

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



EFICIENCIA DEL CICLO CUÁNTICO DE OTTO EN UN
CONFINAMIENTO TOROIDAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA

JESÚS MAURICIO JIMÉNEZ SOLORIO

DIRECTORA:

Dra. Priscilla Elizabeth Iglesias Vázquez

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Baja California

Ensenada, B.C.

Junio del 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

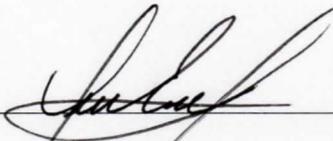
EFICIENCIA DEL CICLO CUÁNTICO DE OTTO EN UN CONFINAMIENTO
TOROIDAL

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

JESÚS MAURICIO JIMÉNEZ SOLORIO

APROBADO POR:



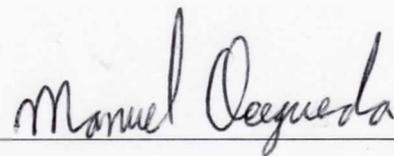
DRA. PRISCILLA ELIZABETH IGLESIAS VÁZQUEZ
DIRECTORA DE TESIS



DR. RAMÓN CARRILLO BASTOS
CODIRECTOR DE TESIS



DR. RUBÉN CÉSAR VILLARREAL SÁNCHEZ
SINODAL



DR. MANUEL IVÁN OCEGUEDA MIRAMONTES
SINODAL

Dedicatoria

A mis padres, pues todo lo que tengo y soy se lo debo a ellos. A mi familia y novia, por todo el cariño y apoyo que me brindaron, sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma de Baja California y a la Facultad de Ciencias, por brindarme todas las herramientas necesarias para concluir mi formación académica y profesional.

A mi directora de tesis, la Dra. Priscilla Elizabeth Iglesias Vázquez, por asesorarme durante todo el desarrollo de este trabajo de tesis y por toda la dedicación y el apoyo que mostró durante mi formación académica.

A mi codirector y sinodales, el Dr. Ramón Carrillo Bastos, Dr. Rubén César Villarreal Sánchez y el Dr. Manuel Iván Ocegueda Miramontes, por su apoyo en el desarrollo de esta tesis, sus comentarios y aportaciones.

Resumen

Resumen de la tesis de Jesús Mauricio Jiménez Solorio como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física. Ensenada, Baja California, México. Junio del 2019.

EFICIENCIA DEL CICLO CUÁNTICO DE OTTO EN UN CONFINAMIENTO TOROIDAL.

Una máquina térmica es aquel sistema capaz de generar un trabajo a partir de una fuente de calor a alta temperatura. Un ejemplo de esto puede ser un pistón confinado a moverse dentro de un cilindro con gas en su interior, que al ser calentado, el gas expande su volumen y, por lo tanto, su presión aumenta, lo cual hace que el pistón comience a expandirse, podemos decir entonces que el calor absorbido ha ocasionado que el pistón realice un trabajo mecánico. En esta tesis se estudiaron los efectos de una máquina térmica cuántica (MTC) operando bajo el ciclo termodinámico de Otto en un confinamiento toroidal, el cual consiste en un pozo de potencial infinito con doble periodicidad espacial. Utilizando expresiones análogas a las ya conocidas clásicamente, se dedujo la eficiencia de dicho sistema. Se obtuvieron las eigenenergías del confinamiento toroidal solucionando la ecuación de Schrödinger correspondiente y mediante estos resultados fue posible calcular expresiones como el trabajo y el calor absorbido, las cuales son de importancia en el cálculo de la eficiencia.

Palabras clave: Máquina térmica, ciclo de Otto, pozo de potencial, confinamiento cuántico.

Aprobado por:

A handwritten signature in black ink, written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to read 'Priscilla Elizabeth Iglesias Vázquez'.

Dra. Priscilla Elizabeth Iglesias Vázquez

Directora de Tesis

Índice general

1. Introducción	1
2. Ciclo clásico de Otto	7
2.1. Introducción	7
2.2. Funcionamiento	9
2.3. Aplicaciones	11
2.4. Procesos termodinámicos	12
2.5. Eficiencia	16
3. Ciclo cuántico de Otto	20
3.1. Eigenenergías de un pozo unidimensional infinito	20
3.2. Fuerza y energía del sistema cuántico	22
3.3. Análogos cuánticos de los procesos termodinámicos	25
3.3.1. Proceso adiabático	25
3.3.2. Proceso isocórico	26
3.4. Procesos del ciclo cuántico de Otto	27
3.4.1. Compresión adiabática	28
3.4.2. Calentamiento isocórico	28
3.4.3. Expansión adiabática	29
3.4.4. Enfriamiento isocórico	30

3.5. Eficiencia	30
3.6. Eigenenergías de un pozo bidimensional	32
4. Ciclo cuántico de Otto para un confinamiento toroidal	38
4.1. Eigenenergías de un pozo bidimensional con doble periodicidad	38
4.1.1. Función de onda con doble periodicidad espacial	40
4.2. Descripción del ciclo cuántico de Otto con doble periodicidad	44
4.2.1. Compresión adiabática	44
4.2.2. Calentamiento isocórico	44
4.2.3. Expansión adiabática	45
4.2.4. Enfriamiento isocórico	46
4.3. Trabajo realizado	46
4.4. Eficiencia del ciclo cuántico de Otto	47
5. Conclusiones	52

Índice de figuras

1.1. Modelo experimental de una máquina térmica cuántica que funciona con una señal infrarroja [18].	5
2.1. Motor de dos tiempos del ciclo de Otto [9].	9
2.2. Motor de cuatro tiempos del ciclo de Otto [10].	11
2.3. Diagrama P-V del ciclo de Otto. Este ciclo consiste en una secuencia de 4 procesos, iniciando con una compresión adiabática desde el volumen V_1 hasta el volumen V_2 (del estado 1 al 2), seguida por un proceso isocórico provocado por un suministro de calor Q_1 , una expansión adiabática donde se realiza un trabajo W y de regreso al estado inicial por un proceso isocórico debido a una expulsión de calor Q_2	13
2.4. Diagrama del funcionamiento de una máquina térmica.	15
2.5. Gráfica de la eficiencia del ciclo de Otto en función de la razón de compresión. Utilizando el valor de $\gamma = 1.39$ para el aire, podemos ver que para los valores típicos de la relación de compresión (entre $r = 8$ y $r = 10$ en la mayoría de los motores modernos) la eficiencia del ciclo es $\eta \approx 0.45$ [8].	19

3.1.	Representación de un pozo de potencial infinito unidimensional con una pared fija en $x = A$ y una pared movable en $x = B$. La pared se mueve debido a una fuerza F hasta la posición $x = B'$. Se pueden observar los cambios en las eigenenergías debido al desplazamiento [13].	23
3.2.	Representación del ciclo cuántico de Otto. Consiste en dos procesos isocóricos y dos adiabáticos. En uno de los procesos isocóricos se le suministra calor Q_H al sistema y en el siguiente se realiza una expulsión de calor Q_L , en estos procesos el sistema no genera ningún trabajo, mientras que en los procesos adiabáticos no se genera ninguna pérdida de calor y se produce trabajo útil [6].	27
4.1.	Pozo de potencial infinito bidimensional donde la función de onda Ψ presenta una periodicidad espacial en el eje y cada $2\pi R$. Esto quiere decir que el módulo cuadrado de la función de onda $ \Psi ^2$, es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula, se repetirá cada $2\pi R$ [15]. .	39
4.2.	Visualización de la periodicidad espacial de la función de onda Ψ . La probabilidad de encontrar una partícula en el punto A es la misma que encontrarla en el punto $A+2\pi R$, $A+4\pi R$, $A+6\pi R$ y así sucesivamente. Esto se puede ver como si conectáramos los dos puntos A de la figura para crear un cilindro [15].	40

4.3. Visualización de los efectos de una función de onda Ψ con una periodicidad espacial en ambas direcciones. Una periodicidad en una dirección es representado por una simetría cilíndrica, sin embargo, al añadir otra periodicidad obtendremos una simetría toroidal. En este caso, la variable r representa el radio exterior del toro causado por la periodicidad de la función de onda en el eje y , mientras que la variable R representa el radio interno del toro, originado por la periodicidad en la dirección x 41

4.4. Eficiencia del ciclo cuántico de Otto en función de R_1 y R_2 49

4.5. Gráfica del trabajo en relación con los desplazamientos R_1 y R_2 .
Usando como parámetros $\hbar = 6.58 \times 10^{-16}$ eV·s y $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. 50

4.6. a) Mapa de color de la eficiencia ciclo cuántico de Otto. b) Mapa de color del trabajo realizado por la máquina térmica, los parámetros usados son $\hbar = 6.58 \times 10^{-16}$ eV·s y $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. 51

1 — Introducción

Si se frotran entre sí dos piedras debajo del agua, el trabajo mecánico realizado por la fricción entre ellas se transforma en energía interna que tiende a elevar su temperatura. Sin embargo, tan pronto como la temperatura de las piedras es superior a la del agua que las rodea, hay un flujo de calor hacia el agua. Si la masa de ésta es suficientemente grande o está fluyendo continuamente, no habrá elevación apreciable de la temperatura. Dado que el estado de las piedras es el mismo al final del proceso que al principio, el resultado neto del mismo es simplemente la transformación de trabajo mecánico en calor. Análogamente, si se hace circular una corriente eléctrica por una resistencia sumergida, ya sea en agua o en una gran masa de agua, existe una transformación de trabajo eléctrico en calor. En general, puede realizarse trabajo de cualquier clase W sobre un sistema en contacto con una fuente de calor, dando origen a un flujo de calor Q sin alterar el estado del sistema. El sistema actúa simplemente como intermediario. Como el estado del sistema fue el mismo al inicio que al final, todo el trabajo que se generó se convirtió puramente en calor, por lo que el trabajo W es igual al calor Q , en otras palabras, la transformación de trabajo en calor se realiza con un rendimiento del 100 %. Además, esta transformación puede seguir indefinidamente [1].

Para estudiar el fenómeno inverso, es decir, la transformación de calor en trabajo, debemos disponer también de un proceso o de una serie de procesos mediante los cuales puede tener lugar tal transformación indefinidamente y sin suponer cambios

en el estado de un sistema cualquiera. En principio, pudiera parecer que la expansión isotérmica de un gas ideal es un proceso adecuado para considerarlo en el estudio de la transformación de calor en trabajo. En este caso no hay cambio de energía interna, ya que la temperatura permanece constante y, por tanto, el calor suministrado se ha convertido íntegramente en trabajo. Sin embargo, este proceso implica un cambio de estado del gas. El volumen aumenta y la presión disminuye hasta alcanzar la presión atmosférica, momento en que se detiene el proceso. Por consiguiente, no puede utilizarse indefinidamente.

Lo que se requiere es una serie de procesos mediante los cuales un sistema sea llevado de nuevo a su estado inicial, es decir, un *ciclo*. Cada uno de los procesos que constituye un ciclo puede suponer paso de calor hacia o desde el sistema, así como la realización de trabajo por o sobre el sistema.

Existen dos tipos de ciclos, los ideales y los no ideales. La diferencia entre ellos es que los ideales son ciclos que no se pueden llevar a la práctica ya que tienen la máxima eficiencia que podría obtenerse haciendo consideraciones que no es posible llevar a cabo en un sistema real. La conversión de calor en trabajo se ha estudiado desde el siglo XIX, y al momento de llevar a cabo estos procesos se ha comprobado que siempre existe una pérdida de calor, es decir, un calor desechado. Esto demuestra que no existe una máquina 100% efectiva y parte del calor suministrado no será convertido en trabajo y se perderá.

Para un ciclo completo, se tiene entonces que se le suministrará una cantidad de calor al sistema, parte de este calor suministrado será convertido en trabajo y la parte restante será expulsada. Al dispositivo mecánico, cuyo funcionamiento lleva a cabo el ciclo termodinámico, se denomina *motor térmico* o *máquina térmica*. El objetivo de una máquina térmica es el de suministrar continuamente trabajo al exterior, realizando una y otra vez el mismo ciclo.

Llamamos eficiencia a la capacidad de la máquina térmica de convertir calor en

trabajo, mientras menos calor se deseché más eficiente será la máquina térmica. El rendimiento de las máquinas térmicas depende de diversos factores, tales como la temperatura del sistema, la presión, el volumen, entre otros. Los valores de estas variables pueden cambiar o permanecer constantes a lo largo del trabajo realizado por la máquina térmica, es aquí donde entran en juego los diferentes ciclos termodinámicos existentes, los cuales indican los procesos realizados por la sustancia de trabajo para completar un ciclo termodinámico.

En el siglo XIX, Sadi Carnot propuso un modelo matemático idealizado de una máquina térmica. Su modelo consistía en un gas contenido en un cilindro que es puesto en contacto térmico entre dos depósitos térmicos, uno de alta temperatura y otro de baja temperatura, T_H y T_C , respectivamente. La eficiencia de este modelo es

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}. \quad (1.1)$$

La máxima eficiencia posible de una máquina térmica se obtiene con el ciclo de Carnot. Además del ciclo idealizado de Carnot, existen diferentes ciclos, tales como el ciclo de Brayton, Diésel, Otto, Stirling, entre otros. Todos estos ciclos son no idealizados.

En la práctica, la eficiencia de las máquinas térmicas no supera el 50%. Por tal motivo, es de interés estudiar los sistemas y procesos que permiten aumentar la eficiencia de dichas máquinas. En este sentido, se han propuesto las *máquinas térmicas cuánticas* (MTC) [4, 5, 6, 11, 12]. En ese tipo de máquinas se sustituye la idea de un gas confinado en un cilindro con un pistón movable, por una partícula confinada en un pozo de potencial cuyo ancho puede variar.

Las máquinas térmicas cuánticas producen trabajo utilizando materia como sustancia de trabajo que es estudiada en el ámbito de la mecánica cuántica, como pueden ser electrones, fotones, átomos, moléculas, etc. [11]. Debido a la naturaleza

cuántica de nuestra sustancia de trabajo, las MTC tienen inusuales e interesantes propiedades, por ejemplo, bajo ciertas condiciones pueden superar el límite de la cantidad de trabajo hecho por el ciclo termodinámico clásico y, además, sobrepasar la eficiencia de la máquina clásica de Carnot [11]. Las MTC ofrecen buenos modelos para estudiar y profundizar la relación entre la termodinámica y la mecánica cuántica, resaltando la diferencia entre los sistemas termodinámicos clásicos y cuánticos.

El motor clásico de Carnot es una máquina térmica muy conocida y estudiada que produce trabajo realizando un ciclo termodinámico. Las propiedades termodinámicas del motor durante todo el ciclo demuestran el mecanismo físico universal de una máquina térmica. Estudios de las MTC se centran mayormente en el estudio del análogo cuántico de la máquina clásica de Carnot, exponiendo de manera detallada el ciclo termodinámico cuántico que debe seguir, mostrando los análogos cuánticos de los procesos adiabáticos e isotérmicos. En este trabajo nos enfocaremos en un estudio similar, pero enfocándonos en una máquina térmica de Otto.

En trabajos relacionados con las MTC, Latifah *et al.* [6] calcularon la eficiencia de diferentes ciclos termodinámicos para un pozo de potencial infinito con múltiples niveles energéticos, entre los ciclos estudiados se encuentran el ciclo de Carnot, Otto y Diésel. Bender *et al.* [4] describieron el ciclo cuántico de Carnot para un pozo de potencial infinito, describiendo los análogos cuánticos de los procesos realizados. Quan [5] obtuvo la eficiencia para diferentes ciclos cuánticos en diversos confinamientos, tales como, un pozo de potencial tridimensional, oscilador armónico en una, dos y tres dimensiones y considerando el espín de la sustancia de trabajo. Arnaud *et al.* [12] mostraron en su trabajo que un molino de agua, el cual es un sistema puramente mecánico, puede ser considerado como una máquina térmica cuántica de dos niveles energéticos.

En la práctica se han desarrollado diversos experimentos relacionados con las máquinas térmicas cuánticas, entre ellos Rosnagel *et al.* reportaron

experimentalmente una máquina térmica que funcionaba con un solo átomo [17]. Un ion es confinado en una trampa lineal de Pauli con una geometría cónica, la cual es accionada térmicamente, acoplando al ion alternadamente entre un depósito caliente y uno frío. En dicho trabajo fue posible determinar los ciclos termodinámicos para diferentes temperaturas de los depósitos. De los ciclos utilizados se evaluó la potencia p y la eficiencia η del motor, donde se obtuvieron valores de $p = 3.4 \times 10^{-22} J/s$ y $\eta = 0.28\%$ [17].

Recientemente, en el 2018, Ghosh *et al.* estudiaron una máquina térmica que utilizaba un láser de dos niveles energéticos [18]. La sustancia de trabajo de dicha máquina consiste en un sistema de dos niveles, la cual es continuamente acoplada a un depósito caliente y uno frío, utilizando radiación térmica ambiental (véase figura 1.1). Una señal de microondas o una señal infrarroja es enviada a través de la sustancia de trabajo, esta señal actúa como un pistón que extrae el trabajo de la máquina.

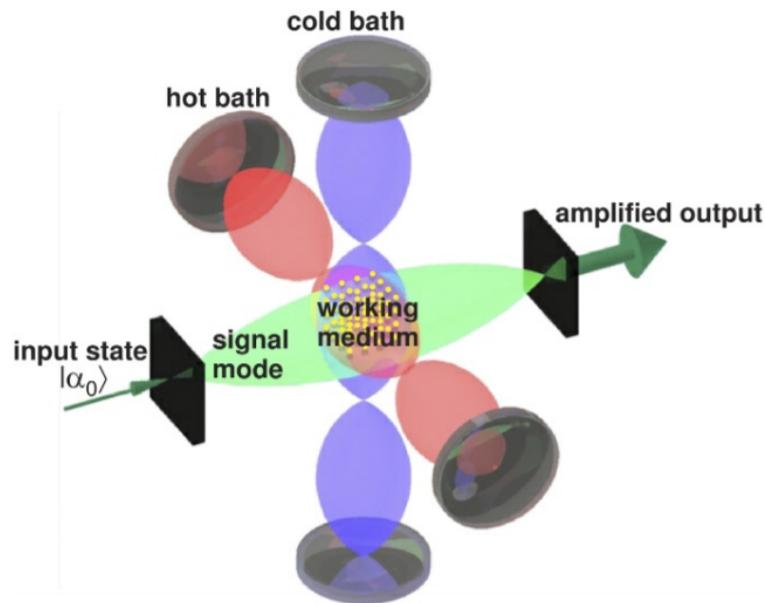


Figura 1.1: Modelo experimental de una máquina térmica cuántica que funciona con una señal infrarroja [18].

Objetivo de la tesis

En esta tesis se explica el funcionamiento de una máquina térmica cuántica que realiza el ciclo cuántico de Otto. Se describen las propiedades termodinámicas de una partícula confinada en un pozo de potencial infinito con doble periodicidad espacial, la cual realiza los procesos que rigen el ciclo cuántico de Otto. Este confinamiento se puede interpretar como una partícula confinada en la superficie de un toro. Se determinará la eficiencia de dicho sistema.

Una vez planteado el objetivo de la investigación, a continuación se presenta la organización de esta tesis por capítulos. El capítulo 2 comienza con una introducción de lo que ha sido la evolución de las máquinas térmicas, sus creadores y su funcionamiento. Además, se explica de manera detallada los procesos realizados en el ciclo de Otto, ciclo en el que se enfocará esta tesis, así como también se hablará de su correspondiente motor, aplicaciones y eficiencia.

En el capítulo 3 se habla sobre los efectos cuánticos que rigen el ciclo de Otto. Se da una breve introducción a lo que es el confinamiento de un pozo de potencial infinito, se describen los análogos cuánticos de los procesos termodinámicos clásicos y la eficiencia del ciclo cuántico de Otto en un pozo de potencial infinito.

Una vez comprendido en que consiste el ciclo cuántico de Otto y sus procesos termodinámicos, se realizarán los cálculos correspondientes de una partícula confinada en la superficie de un toro. Se obtendrán las eigenfunciones y la energía del pozo de potencial infinito bidimensional con doble periodicidad espacial resolviendo la ecuación de Schrödinger y utilizándolas para obtener expresiones para el trabajo y eficiencia del ciclo de Otto en este confinamiento. Esto se llevará a cabo en el capítulo 4.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones generales de este trabajo de tesis.

2 — Ciclo clásico de Otto

En este capítulo se hablará un poco sobre la historia y origen de algunos de los ciclos termodinámicos, pero nos enfocaremos más en el ciclo de Otto, hablaremos de su origen y la evolución que ha tenido, así como también de las aplicaciones comerciales que tiene y su eficiencia.

2.1. Introducción

En una época tan temprana como el año 1816, un sacerdote llamado Robert Stirling (1790–1878) empleó mucho tiempo y esfuerzo en experimentar con un motor de combustión externa que usaba aire. Su fracaso, a pesar de su innegable ingenio y habilidad mecánica, se debió principalmente a los rudimentarios elementos e inadecuados materiales con que contaba. Actualmente, versiones modificadas del motor de aire de Stirling funcionan con altos rendimientos [2].

Durante una parte del ciclo realizado por una sustancia de trabajo (aire, gasolina, agua, etc.) en un motor, una cantidad de calor es absorbida de un depósito de alta temperatura; durante otra parte del ciclo, una pequeña cantidad de calor es enviada a un depósito frío. Ya que es un hecho experimental que siempre se rechaza algo de calor al depósito frío, la eficiencia de un motor nunca será del 100%. Si asumimos que tenemos dos depósitos a temperaturas dadas, es importante responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la máxima eficiencia térmica que se puede obtener por un motor

operando entre esos dos depósitos? ¿Cuáles son las características de dicho motor? ¿Cuál es la naturaleza de la sustancia de trabajo?

La importancia de esas preguntas fue reconocida por Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1831), un brillante joven ingeniero francés quien, en 1824, antes de que la primera ley de la termodinámica fuera firmemente establecida, describió en un artículo llamado “Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu” (“Reflexiones sobre la fuerza motriz del fuego”) un motor ideal operando en un simple y particular ciclo conocido hoy en día como el *ciclo de Carnot* [3].

Un ciclo de Carnot es un conjunto de procesos que se pueden realizar por cualquier sistema termodinámico que sea hidrostático, químico, eléctrico, magnético, etc. Debido a que se trata de procesos idealizados, los motores funcionando bajo este ciclo contarán con la máxima eficiencia posible, por lo que en la práctica no será posible llevarlos a cabo sin generar pérdidas de calor, lo que ocasiona una disminución en la eficiencia.

En 1853, el ingeniero sueco John Ericsson (1803-1889), construyó en Inglaterra un motor de aire de combustión externa que no tuvo aceptación debido a la falta de materiales capaces de resistir eficazmente las altas temperaturas desarrolladas. En 1856, el francés Beau de Rochas (1815-1893), sugiere y discute un ciclo de motor de combustión interna pero no lo construye. Recién en 1860 aparece el primer motor de combustión interna que tuvo éxito comercial, pero duró poco debido a la aparición de una máquina a pistón libre debida a Nicolaus August Otto (1832-1891) y Eugen Langen (1833-1895) desarrollada en 1867 cuyo rendimiento era superior debido a que el movimiento del pistón se debe únicamente a la presión del gas. Posteriormente en 1876 aparece el llamado “motor silencioso” que operaba bajo el ciclo de Otto, cuya denominación se justificaba no porque era precisamente insonoro, sino porque comparado con el diseño de pistón libre era menos ruidoso [2].

2.2. Funcionamiento

Habitualmente se pueden encontrar dos versiones del ciclo de Otto: de dos y cuatro tiempos. Se denomina tiempos a los desplazamientos del pistón que se requieren para completar un ciclo. Veamos primero el motor de dos tiempos [2].

En el motor de dos tiempos (figura 2.1) la mezcla ingresa al cilindro a través de las lumbreras de admisión. Una vez producida la chispa, ocurre la ignición de la mezcla de vapor de combustible y aire (comburente) y, simultáneamente, la expansión de los gases (tiempo de expansión o embolada de potencia). Finalizada ésta, se produce la admisión de la mezcla que desaloja los gases exhaustos, esto ocurre debido a que el pistón baja durante el tiempo de expansión, y al hacerlo comprime los gases frescos, expulsando los gases viejos y forzando a entrar los nuevos cuando se abren las lumbreras de admisión.

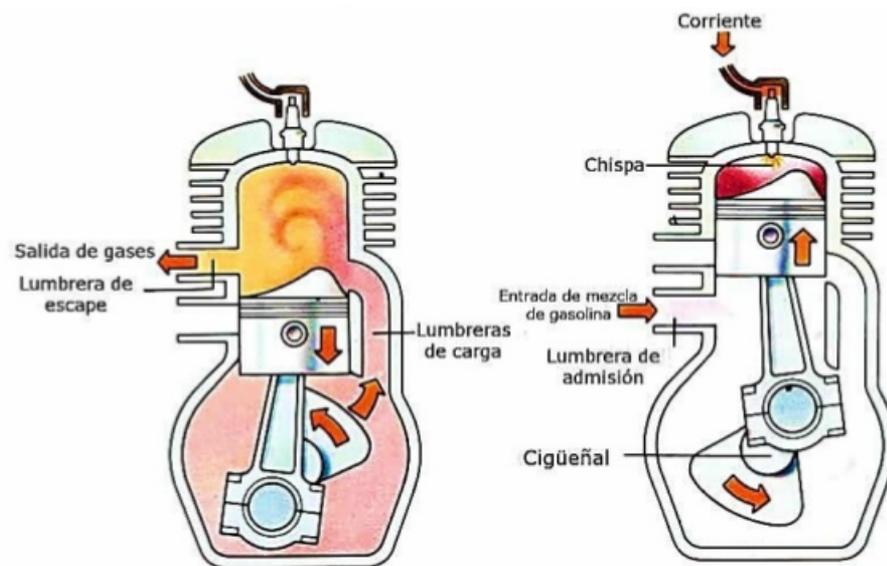


Figura 2.1: Motor de dos tiempos del ciclo de Otto [9].

Luego se inicia el tiempo de compresión. El pistón sube tapando las lumbreras de admisión y escape y lleva la mezcla hasta a la presión adecuada para la explosión.

Durante este tiempo, mientras sube el pistón, se produce una depresión en el cárter y absorbe mezcla fresca del carburador. El motor de dos tiempos tiene una elevada relación de peso sobre la potencia del motor comparado al de cuatro tiempos porque da una embolada de potencia por cada revolución. Pero como no tiene válvulas de escape es imposible impedir las pérdidas de mezcla fresca en la etapa de admisión cuando esta desplaza los gases exhaustos, lo que inevitablemente hace bajar el rendimiento del combustible y causa el típico olor de estos motores. No obstante, es un motor barato, sencillo y pequeño, ideal para vehículos livianos. Veamos ahora el motor de cuatro tiempos.

El motor de cuatro tiempos (figura 2.2) tiene los siguientes movimientos: en el tiempo de aspiración el pistón se desplaza hacia abajo con la válvula de admisión abierta y la de escape cerrada. Luego se invierte la dirección y comienza el tiempo de compresión; un poco antes de llegar al punto muerto inferior se cierra la válvula de admisión y la de escape permanece cerrada, quedando así durante el tiempo o carrera de compresión. Un poco antes del punto muerto superior se produce la ignición (salta la chispa, en un instante determinado por el distribuidor de acuerdo a la velocidad del motor) y comienza el tiempo de expansión. Al aproximarse el pistón al punto muerto inferior se abre la válvula de escape y se iguala la presión con la externa. Es entonces cuando se inicia la etapa o tiempo de expulsión al retornar el pistón hacia el punto muerto superior evacuando los gases exhaustos a través de la válvula de escape cuya posición viene determinada por un mecanismo de sincronización (árbol de levas) y así se completa el ciclo [2].

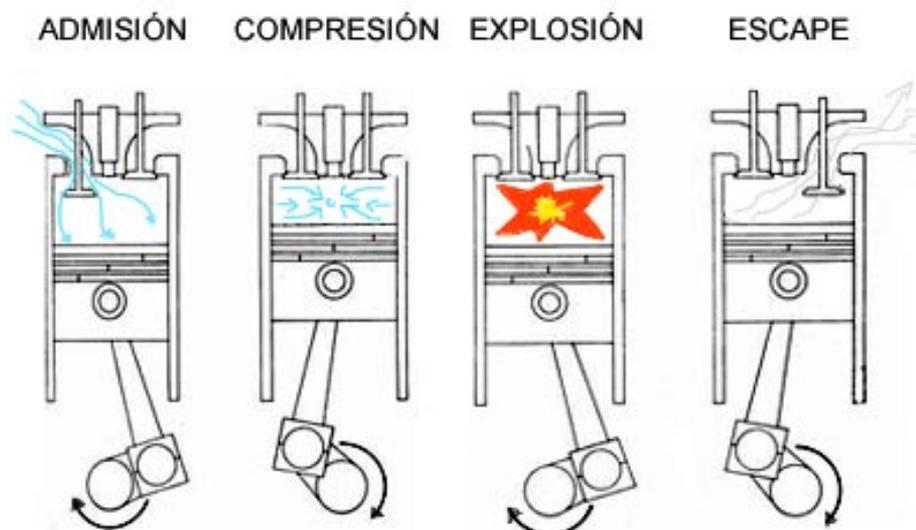


Figura 2.2: Motor de cuatro tiempos del ciclo de Otto [10].

2.3. Aplicaciones

En todo el resto del siglo XIX, hasta la aparición del motor Diésel, no se habló más de motores de combustión interna. A partir de la aparición del motor Diésel la máquina de vapor estuvo condenada a desaparecer. Si la segunda mitad del siglo XVIII y todo el siglo XIX son la era del vapor y del carbón, el siglo XX es la era del motor de combustión interna y del petróleo [2]. Las razones del éxito del motor de combustión interna sobre la máquina de vapor son varias: la máquina de vapor como planta de potencia portable es más ineficaz por ser más grande, ya que requiere una cámara de combustión desde donde se transfiere el calor al agua que se vaporiza y luego se transporta la cámara de expansión donde se realiza trabajo útil. El motor de combustión interna, en cambio, tiene estos dos elementos sintetizados en uno solo ya que el combustible al quemarse constituye el fluido de trabajo. La combustión se realiza en el mismo recinto donde ocurre la expansión, eliminando la transferencia de calor, con su carácter fuertemente irreversible y por lo tanto nefasto

para el rendimiento. Esto, aunque parezca tener sólo el interés teórico, resulta de la mayor importancia práctica. Por ejemplo, una máquina alternativa de vapor es demasiado voluminosa para ser portátil, ya que pesa en promedio 150 kg. por caballo de potencia generada. Semejante peso no podría ser soportado por ningún vehículo aéreo, de modo que no es posible construir aviones o helicópteros impulsados por vapor [2].

En la actualidad hay dos versiones de combustión interna, que responden a grandes rasgos a las características originales de los motores Otto y Diésel, pero también hay muchos diseños intermedios que están, por decirlo así, en la frontera entre ambas categorías, por ejemplo, los motores de ciclo de Otto con inyección de combustible.

2.4. Procesos termodinámicos

El ciclo de Otto se compone de cuatro procesos, dos adiabáticos y dos isocóricos, que realiza un gas confinado en un pistón (véase figura 2.3). En el proceso adiabático no hay transferencia de calor con los alrededores. Mientras que en el proceso isocórico el volumen del gas se mantiene constante, se suministra calor al sistema, pero como el pistón no se mueve la temperatura del gas se eleva y en consecuencia también la presión lo hace.

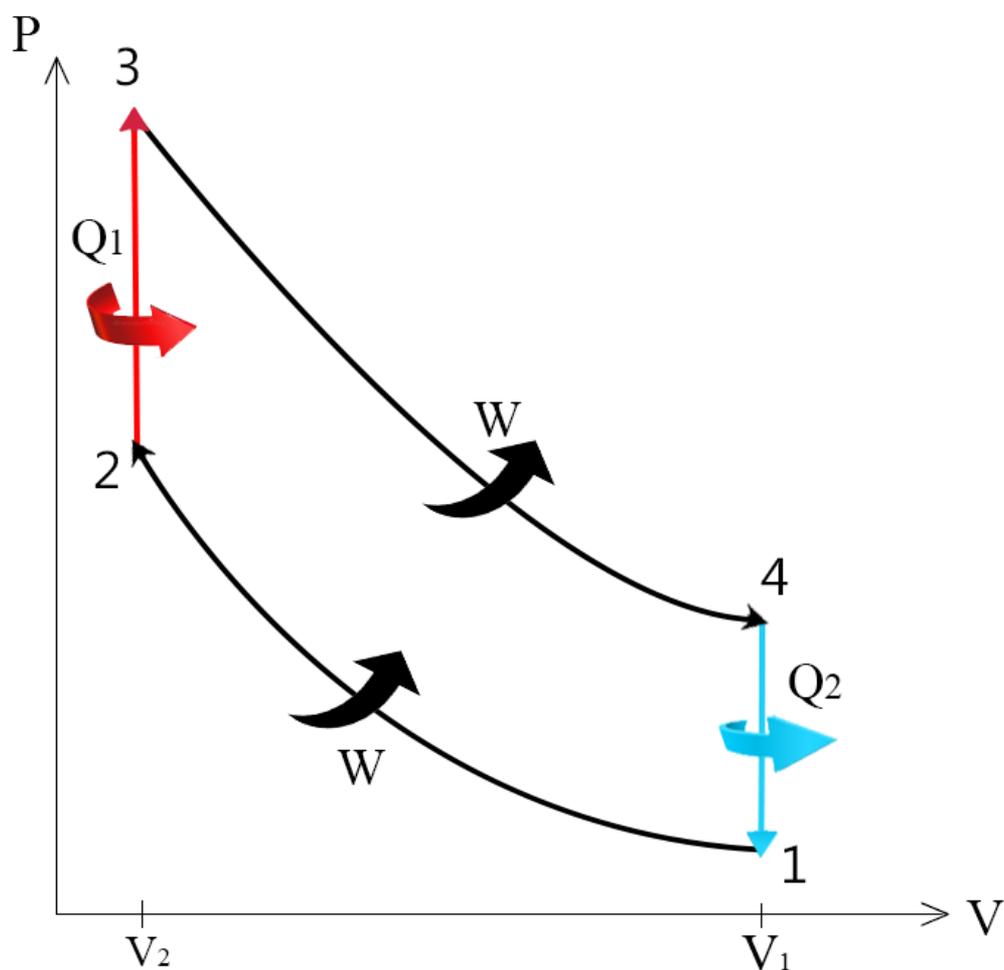


Figura 2.3: Diagrama P-V del ciclo de Otto. Este ciclo consiste en una secuencia de 4 procesos, iniciando con una compresión adiabática desde el volumen V_1 hasta el volumen V_2 (del estado 1 al 2), seguida por un proceso isocórico provocado por un suministro de calor Q_1 , una expansión adiabática donde se realiza un trabajo W y de regreso al estado inicial por un proceso isocórico debido a una expulsión de calor Q_2 .

Como podemos observar en la figura 2.3, el proceso que va de los estados $1 \rightarrow 2$ representa una compresión adiabática cuasi-estática de n_1 moles de aire, que en este caso, por simplicidad, tomaremos $n_1 = 1$ mol. Suponemos que no hay rozamiento ni pérdidas de calor a través de las paredes del cilindro. La temperatura T_1 en el estado 1 se eleva hasta alcanzar la temperatura T_2 en el estado 2 de acuerdo a la ecuación

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad (2.1)$$

donde γ se define como el coeficiente de dilatación adiabática y está dado por

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (2.2)$$

donde C_p es la capacidad calorífica a presión constante, que es el cambio de la energía interna por cada grado que cambia la temperatura en un proceso a presión constante, y C_v es la capacidad calorífica a volumen constante, que es el cambio de la energía interna por cada grado que cambia la temperatura en un proceso a volumen constante [8]. Estas dos últimas definiciones se expresan como

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P. \quad (2.3)$$

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V. \quad (2.4)$$

El proceso realizado que va del estado 2 al estado 3 representa un aumento isocórico cuasi-estático de la temperatura y la presión, producido por la absorción de calor Q_1 de una fuente externa. Este proceso es una aproximación del efecto debido a la explosión en un motor de gasolina.

El proceso realizado entre los estados 3 al 4 constituye una expansión adiabática cuasi-estática, produciendo una disminución de la temperatura, de acuerdo con la ecuación

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}. \quad (2.5)$$

Finalmente, el proceso realizado que va de los estados 4 al 1 representa un descenso

isocórico cuasi-estático de la temperatura y la presión producido por la expulsión de calor Q_2 a una fuente externa. Este proceso es una aproximación a lo que sucede cuando, al abrir la válvula de escape, la presión desciende hasta la presión atmosférica.

Cuando una máquina térmica termina de realizar un ciclo, ha convertido un cierto porcentaje del calor absorbido Q_1 en trabajo, mientras que el resto del calor Q_2 ha sido expulsado o enviado a un depósito frío. Llamamos eficiencia a la relación entre el trabajo realizado por la maquina térmica y el calor absorbido Q_1 , mientras más calor sea convertido en trabajo, más eficiente será la máquina térmica.

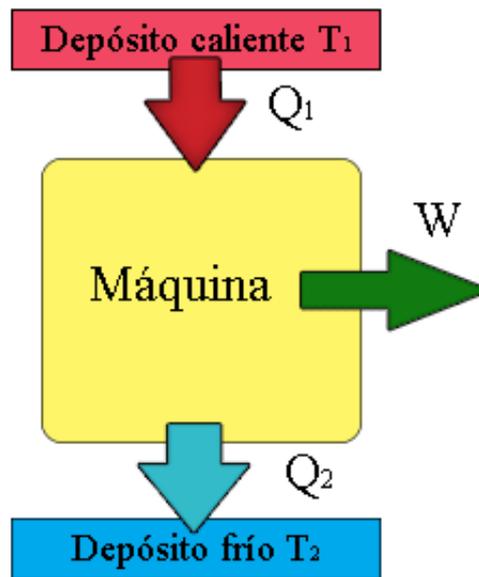


Figura 2.4: Diagrama del funcionamiento de una máquina térmica.

Vemos de la figura 2.4 que el flujo se realiza desde el depósito caliente al depósito frío, si quisiéramos hacer el proceso inverso, es decir, pasar del depósito frío al depósito caliente, debemos suministrar trabajo W al sistema. Este es el funcionamiento básico de los refrigerados caseros.

2.5. Eficiencia

Si se toma una cantidad de calor Q_1 del depósito de alta temperatura y se realiza una cantidad de trabajo mecánico W , la eficiencia η de una máquina térmica está dada por [1]

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_1|}. \quad (2.6)$$

El cambio infinitesimal de la energía interna de un sistema está dada por la primera ley de la termodinámica

$$dU = \bar{d}Q - \bar{d}W. \quad (2.7)$$

Por el principio de la conservación de la energía, para un ciclo termodinámico, la primera ley se expresa como

$$|Q_2| = |Q_1| - |W|, \quad (2.8)$$

donde Q_2 es la energía enviada al depósito de baja temperatura. La eficiencia de una máquina térmica es entonces

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}, \quad (2.9)$$

De esta ecuación se deduce que η será la unidad (rendimiento del 100 %) cuando Q_2 sea nulo. En otras palabras, si se puede construir un motor que trabaje de forma cíclica de modo que el sistema no ceda calor, la transformación del calor absorbido en trabajo tendrá lugar con un rendimiento del 100 %. Sin embargo, esto no es posible.

Para obtener una ecuación para la eficiencia en términos de la temperatura vamos a utilizar expresiones para la capacidad calorífica a volumen constante C_v . De la figura 2.3 podemos observar que en los procesos que ocurren desde los estados 2 al 3 y del 4 al 1, no hay cambio en el volumen del sistema y, por lo tanto, no se realiza ningún trabajo. Entonces, por la primera ley de la termodinámica tenemos que

$$dU = \dot{d}Q, \quad (2.10)$$

definimos la capacidad calorífica molar a volumen constante c_v como

$$c_v = \frac{1}{N} \left(\frac{\dot{d}Q}{dT} \right)_V, \quad (2.11)$$

donde N es el número de moles. De aquí obtenemos que

$$\dot{d}Q = c_v N dT. \quad (2.12)$$

Suponiendo que el número de moles N y la capacidad calorífica c_v se mantienen constantes a lo largo del proceso que ocurre del estado 2 al 3, podemos integrar la ecuación (2.12) y obtenemos

$$Q_1 = c_v N (T_3 - T_2), \quad (2.13)$$

de manera similar obtenemos una expresión para Q_2

$$Q_2 = c_v N (T_1 - T_4). \quad (2.14)$$

Sustituyendo los valores de Q_1 y Q_2 en la ecuación (2.9) tenemos

$$\eta = 1 - \frac{|c_v(T_1 - T_4)|}{|c_v(T_3 - T_2)|}. \quad (2.15)$$

Finalmente obtenemos

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \quad (2.16)$$

Otra forma de expresar la eficiencia es utilizando la relación de los procesos

adiabáticos dada por

$$TV^{\gamma-1} = cte. \quad (2.17)$$

Utilizando esta expresión para los procesos adiabáticos $1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$ llegamos a que

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}, \quad (2.18)$$

definimos

$$r = \left(\frac{V_1}{V_2} \right), \quad (2.19)$$

como la razón de compresión entre el volumen inicial y final, y obtenemos

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma}. \quad (2.20)$$

Como podemos ver en la ecuación (2.9) la eficiencia será la unidad si Q_2 es cero.

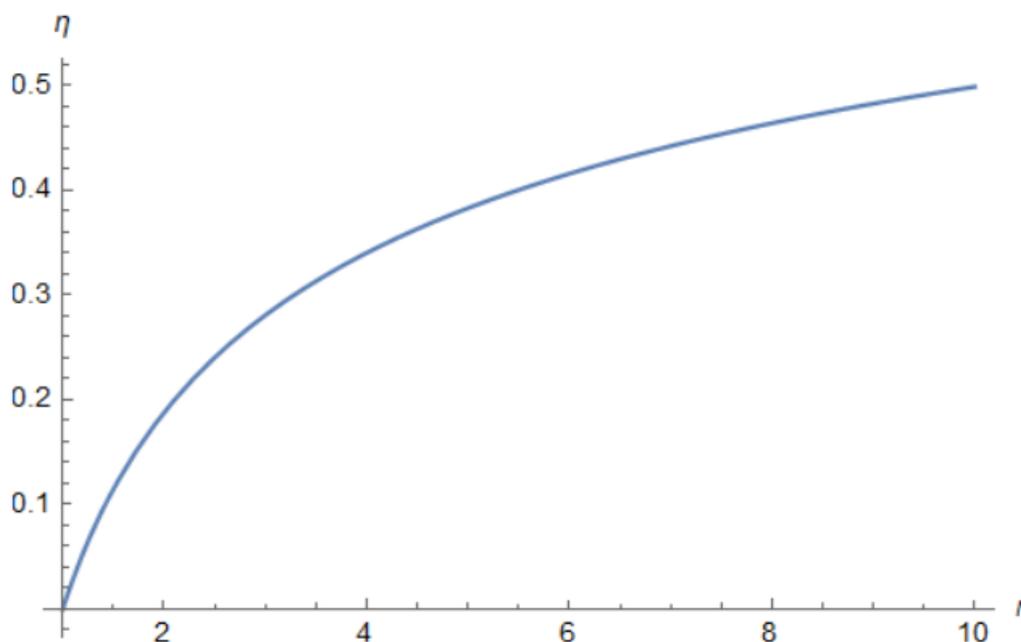


Figura 2.5: Gráfica de la eficiencia del ciclo de Otto en función de la razón de compresión. Utilizando el valor de $\gamma = 1.39$ para el aire, podemos ver que para los valores típicos de la relación de compresión (entre $r = 8$ y $r = 10$ en la mayoría de los motores modernos) la eficiencia del ciclo es $\eta \approx 0.45$ [8].

Ahora analizaremos de manera similar el proceso del ciclo de Otto pero desde una perspectiva cuántica, es decir, reemplazaremos la idea de una sustancia trabajando en un motor de combustión utilizando el ciclo de Otto por la de una partícula confinada en un pozo de potencial infinito, el cual realiza movimientos en una de sus paredes simulando el efecto clásico de un pistón moviéndose, dicho sistema será tratado como si realizará un ciclo de Otto.

3 — Ciclo cuántico de Otto

En este capítulo introduciremos una descripción de un sistema cuántico y lo relacionaremos con el ciclo cuántico de Otto, esto para poder calcular la eficiencia del ciclo. Por sencillez se trabajará en una dimensión.

Para lograr comprender cómo es que funciona el ciclo cuántico de Otto, primero debemos entender los diferentes tipos de confinamientos en el cual se puede llevar a cabo. A continuación, se describirá el más básico de ellos.

3.1. Eigenenergías de un pozo unidimensional infinito

El sistema de confinamiento cuántico más simple es el de una partícula de masa m confinada en un pozo de potencial unidimensional infinito de ancho L . La ecuación de Schrödinger de este sistema es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (3.1)$$

donde \hbar es la constante de Planck entre 2π , E es la energía, Ψ es la función de onda y $V(x)$ es el potencial que confina a la partícula en la región $0 \leq x \leq L$, donde $V(x) = 0$ dentro del pozo e infinito fuera de él [7].

El estado del sistema, descrito por la función de onda Ψ , se puede expresar como

una combinación lineal de eigenfunciones ψ_n de la siguiente manera

$$\Psi(x) = \sum_n a_n \psi_n(x), \quad (3.2)$$

donde n es un número entero y a_n se conocen como coeficientes de expansión. Si Ψ y ψ_n están normalizadas, entonces los coeficientes satisfacen la condición de normalización $\sum_n |a_n|^2 = 1$.

Al resolver la ecuación de Schrödinger (3.1) se obtiene que las eigenfunciones ψ_n están dadas por

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.3)$$

Las correspondientes eigenenergías ε_n son

$$\varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (3.4)$$

La energía E está dada por el valor de expectación del Hamiltoniano \hat{H} . Si P_n es la probabilidad de encontrar el valor ε_n en una medición de la energía, entonces el valor promedio de la energía está dada por la expresión

$$E = \langle \hat{H} \rangle = \sum_n |a_n|^2 \varepsilon_n = \sum_n P_n \varepsilon_n. \quad (3.5)$$

Aquí tenemos la interpretación del modulo cuadrado de los coeficientes a_n , es decir, $|a_n|^2 = P_n$ es la probabilidad de encontrar el valor ε_n al medir la energía. Así, la energía del sistema es

$$E(L) = \sum_n |a_n|^2 n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (3.6)$$

De las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) se puede ver que si una las paredes del pozo de potencial es libre de realizar un movimiento infinitesimal dL , entonces la función de onda $\Psi(x)$, las eigenfunciones $\psi_n(x)$ y las eigenenergías ε_n también pueden variar

infinitesimalmente como función de L .

3.2. Fuerza y energía del sistema cuántico

En esta sección definiremos la fuerza y la energía de un sistema cuántico basados en la interpretación fenomenológica de los cambios infinitesimales del valor de expectación del Hamiltoniano.

El valor de expectación del Hamiltoniano es el promedio de la energía medida del sistema, que simplemente puede ser llamada la energía de sistema. Bajo un proceso infinitesimal, los cambios de la energía dada por la ecuación (3.5) son

$$dE = \sum_n \varepsilon_n dP_n + \sum_n P_n d\varepsilon_n. \quad (3.7)$$

Esta es la primera ley de la termodinámica para sistemas mecánico cuánticos [16]. Los dos términos de la ecuación (3.7) nos dice que existen dos maneras diferentes de cambiar la energía del sistema. El primer término representa el cambio de los estados de ocupación o probabilidades dP_n y el segundo término da los cambios de los niveles energéticos $d\varepsilon_n$.

Consideraremos una máquina térmica cuántica que consistirá en un pozo de potencial infinito, cuya sustancia de trabajo será una partícula que esta confinada dentro del pozo. Para que se pueda obtener trabajo mecánico de este sistema es necesario que una de las paredes del pozo sea movable, de esta manera podemos simular el sistema clásico de un pistón moviéndose y aplicar sobre él diferentes procesos termodinámicos (véase figura 3.1).

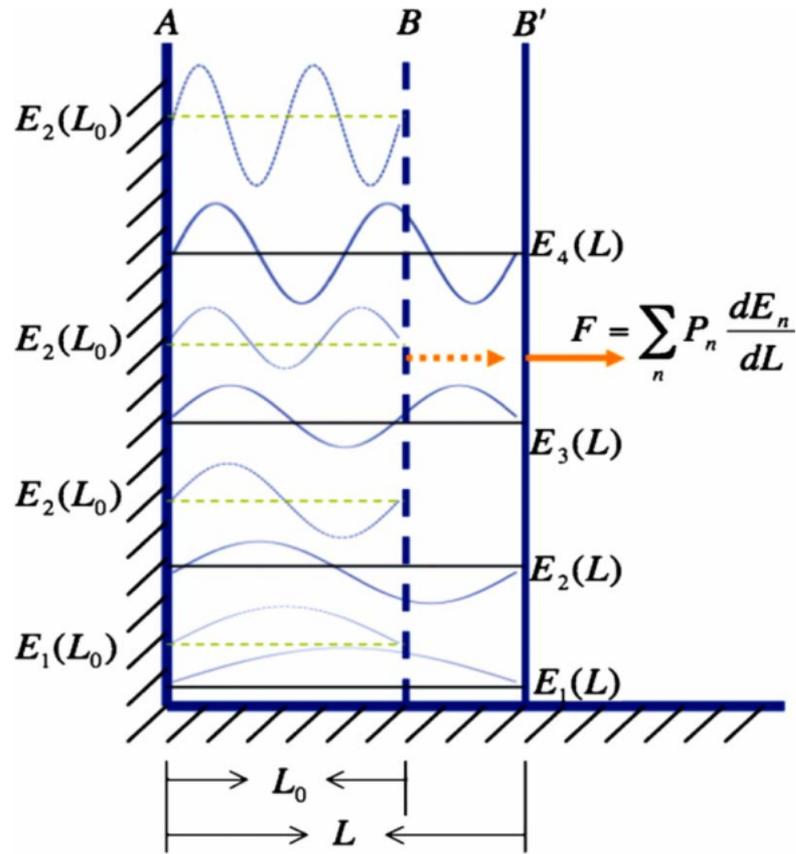


Figura 3.1: Representación de un pozo de potencial infinito unidimensional con una pared fija en $x = A$ y una pared movable en $x = B$. La pared se mueve debido a una fuerza F hasta la posición $x = B'$. Se pueden observar los cambios en las eigenenergías debido al desplazamiento [13].

Bajo un proceso adiabático, el teorema adiabático nos dice que los niveles energéticos son modificados sin cambiar sus probabilidades de ocupación P_n , por lo que son invariantes, entonces la ecuación (3.7) toma la forma

$$dE = \sum_n P_n d\varepsilon_n. \quad (3.8)$$

Como se trata de un pozo unidimensional, la longitud decrece lentamente desde L a $L - dL$ debido a la aplicación de una fuerza externa. Al igual que en la física clásica, es

natural definir la fuerza en la pared del pozo de potencial como la derivada negativa de la energía[4]

$$F = -\frac{dE}{dL}. \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.9) nos da el valor promedio de la fuerza en el sistema

$$F = -\sum_n P_n \frac{d\varepsilon_n}{dL}. \quad (3.10)$$

La fuerza F es el valor promedio de las fuerzas F_n sobre todos los estados representados en el sistema. Esto permite introducir la observable macroscópica de la fuerza o la “presión”. Digamos ahora que le suministramos una cantidad de calor dQ al sistema, haciendo que realice una cantidad de trabajo dW . Por el principio de la conservación de la energía (ecuación 2.7), el cambio infinitesimal de la energía interna está dada por la primera ley como

$$dE = dQ - dW. \quad (3.11)$$

Este cambio de la energía dE también se puede ver en la ecuación (3.7). Como se definió previamente, los cambios en los niveles de energía $d\varepsilon_n$ pueden ser generados realizando movimientos infinitesimales dL en la pared, por lo que el término $\sum_n P_n d\varepsilon_n$ será relacionado con el trabajo hecho por el sistema, esto es,

$$dW = -\sum_n P_n d\varepsilon_n. \quad (3.12)$$

Por otro lado, el término que rige el reordenamiento de los niveles energéticos, $\sum_n \varepsilon_n dP_n$, debe estar relacionado con la cantidad de calor suministrado al sistema

$$\sum_n \varepsilon_n dP_n = dQ. \quad (3.13)$$

3.3. Análogos cuánticos de los procesos termodinámicos

Basados en las ecuaciones de la fuerza y el energía descritas en la sección anterior, y con la primera ley de la termodinámica para un sistema cuántico, podemos describir procesos cuánticos que son los análogos de los procesos termodinámicos clásicos.

3.3.1. Proceso adiabático

Clásicamente, un proceso adiabático es uno en el que el sistema está térmicamente aislado. Entonces, para un gas confinado en un cilindro con paredes adiabáticas y un pistón movable, el calor no puede fluir dentro o fuera de él. En este proceso, el pistón se mueve pero el sistema permanece en equilibrio todo el tiempo, debido a esto el gas en el cilindro hace trabajo y parte de la energía interna del gas se convierte en energía mecánica. En un proceso adiabático cuántico, asumimos que el estado cuántico inicial de la partícula $\Psi(x)$, confinada en un pozo de potencial de anchura L , es una combinación lineal de eigenestados, como en la ecuación (3.2). En el proceso adiabático cuántico, el tamaño del pozo de potencial cambia conforme se mueve la pared, como el sistema permanece en equilibrio todo el tiempo el valor absoluto de los coeficientes de expansión $|a_n|^2 = P_n$ deben permanecer constantes, esto es, no se espera ninguna transición entre los estados energéticos de la partícula (ecuación 3.8).

La expresión (3.10) para la fuerza no es una expresión general que se aplique en todos los procesos termodinámicos, sino que solo se puede utilizar para los procesos adiabáticos e isotérmicos.

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) se puede ver que los eigenestados $\psi_n(x)$ y sus correspondientes energías ε_n varían conforme se mueve la pared del pozo de potencial. Los niveles energéticos no son independientes de la longitud del pozo L , cada valor de

la eigenenergía decrece conforme el ancho del pozo crece, tal como se muestra en la ecuación (3.6). La fuerza ejercida para mover la pared del sistema se puede calcular utilizando la ecuación (3.9), de modo que al derivar la ecuación (3.6) se obtiene que

$$F = \sum_n |a_n|^2 n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^3}. \quad (3.14)$$

Una vez calculadas las expresiones para la fuerza y la energía podemos obtener información del sistema después de aplicar cualquier proceso adiabático cuántico. Ahora nos resta encontrar expresiones para los procesos isocóricos cuánticos.

3.3.2. Proceso isocórico

En un proceso isocórico, el sistema se pone en contacto con una fuente de calor. Clásicamente, la presión p y la temperatura T cambian a lo largo del proceso y como consecuencia de que el volumen no cambia, el sistema no realiza trabajo a lo largo del proceso [3].

Un proceso isocórico cuántico tiene propiedades similares al proceso isocórico clásico. Las probabilidades de ocupación $|a_n|$ de los estados varían en el proceso isocórico cuántico debido a la absorción o expulsión de calor, esto sin variar el ancho del pozo, es decir, $dL = 0$, lo cual implica que no se realiza trabajo $dW = 0$. El calor transferido provocará que la energía del sistema cambie, por lo que la primera ley (3.11) se reduce a

$$dQ = dE. \quad (3.15)$$

La energía interna del sistema aumentará debido al calor suministrado, de acuerdo a la ecuación (3.13).

3.4. Procesos del ciclo cuántico de Otto

A continuación vamos a describir el ciclo cuántico de Otto, que se muestra en la figura 3.2, para un pozo de potencial infinito considerando únicamente los dos primeros niveles de energía, donde se varía la anchura L del pozo.

En la siguiente sección se describirá el ciclo cuántico de Otto reportado por Latifa y Perwanto [6], para una partícula confinada en un pozo de potencial infinito, cuyo ancho varía, y solo se considerarán los dos primeros niveles de energía para llevar a cabo los distintos procesos.

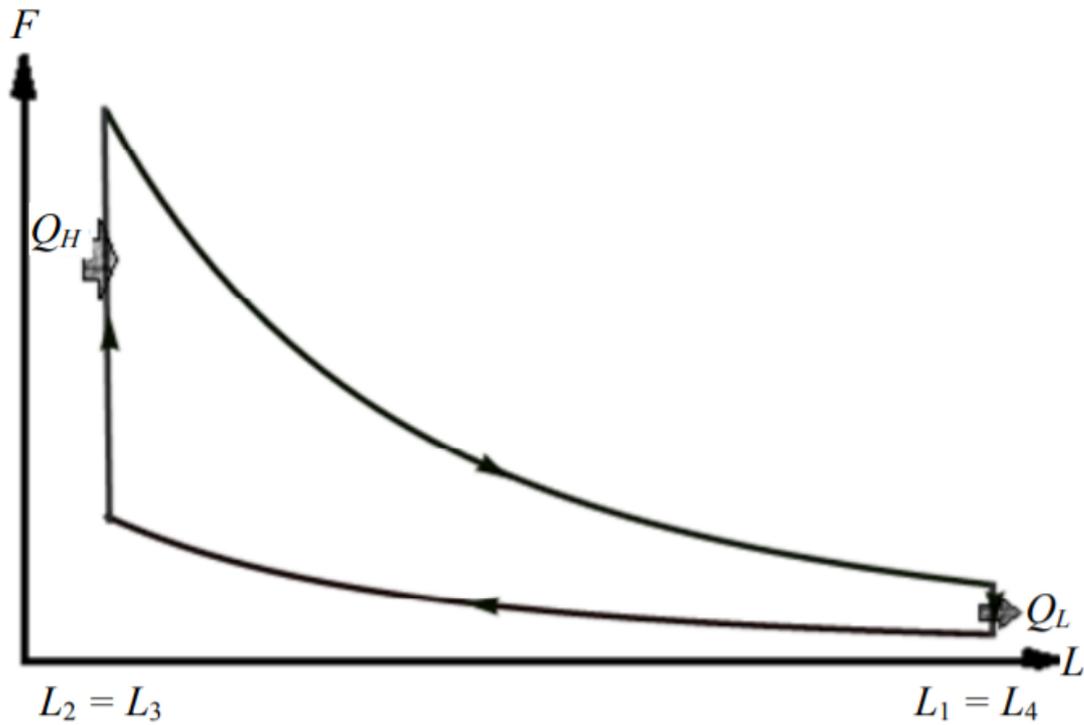


Figura 3.2: Representación del ciclo cuántico de Otto. Consiste en dos procesos isocóricos y dos adiabáticos. En uno de los procesos isocóricos se le suministra calor Q_H al sistema y en el siguiente se realiza una expulsión de calor Q_L , en estos procesos el sistema no genera ningún trabajo, mientras que en los procesos adiabáticos no se genera ninguna pérdida de calor y se produce trabajo útil [6].

3.4.1. Compresión adiabática

Se comienza el ciclo con una compresión adiabática desde el nivel de energía $n = 1$, iniciando en $L = L_1$ hasta $L = L_2$, con $L_1 > L_2$ (véase figura 3.2). Como se trata de un proceso adiabático los valores de los coeficientes de expansión $|a_n|^2 = P_n$ no cambian, por lo que las probabilidades de ocupación de los niveles energéticos permanecerán invariantes, tal como se mencionó en la sección 3.3.1. El valor de expectación del Hamiltoniano, E , dado por la ecuación (3.6), depende del ancho L del pozo de potencial, por lo que E cambiará durante todo el proceso. El valor esperado de la energía en este proceso está dada por la ecuación (3.6), como estamos en el primer nivel de energía $n = 1$ y las probabilidades de ocupación no varían, la ecuación (3.6) toma la forma

$$E_{1 \rightarrow 2}(L) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (3.16)$$

La fuerza como función de L a lo largo de esta expansión se puede calcular utilizando la ecuación (3.9), es decir, derivando la expresión (3.16)

$$F_{1 \rightarrow 2}(L) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^3}. \quad (3.17)$$

3.4.2. Calentamiento isocórico

A continuación, se realizará un proceso isocórico, se añade calor Q_1 al sistema, la fuerza aumentará pero se mantendrá la longitud del pozo constante (véase figura 3.2). Al hacer esto, hay una transición del estado $n = 1$ al estado $n = 2$. El valor de expectación del Hamiltoniano al iniciar el proceso está dado por la ecuación (3.6),

como estamos en el primer nivel de energía la expresión toma la forma

$$E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL_2^2}, \quad (3.18)$$

como vemos en la imagen 3.2, en el calentamiento isocórico no se mueve la pared del pozo de potencial, por lo que el valor de expectación del Hamiltoniano solo dependerá del nivel energético en el que se encuentre el sistema. Al finalizar el proceso estaremos en el segundo nivel de energía, es decir, $n = 2$, por lo que la ecuación (3.6) queda como

$$E_3 = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{mL_2^2}. \quad (3.19)$$

Aquí, el valor esperado del hamiltoniano no depende de L ya que la pared no se mueve, lo único que cambiará es el nivel energético de la partícula.

De la ecuación (3.15) se puede calcular Q_1 , obteniendo que

$$Q_1 = E_3 - E_2 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL_2^2}. \quad (3.20)$$

3.4.3. Expansión adiabática

Ahora consideramos una expansión adiabática del sistema, desde $L = L_2$ hasta $L = L_1$ (véase figura 3.2), sin modificar las probabilidades de ocupación, es decir, sin cambio de estado. Durante este proceso el valor esperado del Hamiltoniano dado por la ecuación (3.6), recordando que nos encontramos en el segundo nivel energético, $n = 2$, es

$$E_{3 \rightarrow 4}(L) = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{mL^2}. \quad (3.21)$$

La fuerza en función L es

$$F_{3 \rightarrow 4}(L) = \frac{4\hbar^2 \pi^2}{mL^3}. \quad (3.22)$$

3.4.4. Enfriamiento isocórico

Finalmente, consideramos un proceso isocórico donde hay una pérdida de calor Q_2 (figura 3.2), cambiando el estado de la partícula desde $n = 2$ hasta $n = 1$. El valor esperado del Hamiltoniano al iniciar el proceso esta dada por la ecuación (3.6) con $n = 2$

$$E_4 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL_1^2}, \quad (3.23)$$

y al finalizarlo

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_1^2}. \quad (3.24)$$

En este proceso se libera calor del sistema, que se puede calcular con la ecuación (3.15) a partir de la cual se obtiene

$$Q_2 = E_1 - E_4 = -\frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL_1^2}, \quad (3.25)$$

finalizando así el ciclo.

Una vez concluidos los procesos termodinámicos, se obtiene una expresión para el calor absorbido Q_1 dada por (3.20), a partir de esto se puede obtener una expresión para la eficiencia del ciclo cuántico de Otto en un pozo de potencial infinito, tal como se mostrará en la siguiente sección.

3.5. Eficiencia

Antes de calcular la eficiencia primero se debe calcular el trabajo realizado por el ciclo, el cual se genera en los procesos adiabáticos. Recordando que en los procesos adiabáticos $dQ = 0$, entonces por la primera ley de la termodinámica, dada por la ecuación (2.7), tenemos que $dE = -dW$, utilizando esta expresión y sustituyéndola en la ecuación (3.9) obtenemos una forma para calcular el trabajo realizado en los

procesos adiabáticos, por lo que se obtiene

$$W = \int F(L)dL. \quad (3.26)$$

Debido a que en nuestro caso tenemos 2 procesos adiabáticos, debemos sumar el trabajo realizado en ambos procesos

$$W = \int_{L_1}^{L_2} dLF_{1 \rightarrow 2}(L) + \int_{L_2}^{L_1} dLF_{3 \rightarrow 4}(L). \quad (3.27)$$

Sustituyendo las expresiones (3.17) y (3.22), obtenidas para las fuerzas, se tiene que

$$W = \int_{L_1}^{L_2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^3} dL + \int_{L_2}^{L_1} \frac{4\hbar^2 \pi^2}{mL^3} dL \quad (3.28)$$

$$= -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{L^2} \right)_{L_1}^{L_2} + 4 \left(\frac{1}{L^2} \right)_{L_2}^{L_1} \right] \quad (3.29)$$

$$= -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} + 4 \frac{1}{L_1^2} - 4 \frac{1}{L_2^2} \right), \quad (3.30)$$

por lo que finalmente se obtiene que el trabajo realizado en el ciclo es

$$W = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m} \left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right). \quad (3.31)$$

Sabemos que la eficiencia de una máquina térmica está dada por

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_1|}. \quad (3.32)$$

Utilizando las ecuaciones (3.20) y (3.31), la eficiencia es

$$\eta = W \frac{1}{Q_1} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m} \left(\frac{1}{L_2^2} - \frac{1}{L_1^2} \right) \left(\frac{2}{3} \frac{mL_2^2}{\hbar^2 \pi^2} \right) = 1 - \left(\frac{L_2^2}{L_1^2} \right), \quad (3.33)$$

de las ecuaciones (3.18) y (3.24) se puede ver que:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL_1^2} \right) \left(\frac{2mL_2^2}{\hbar^2 \pi^2} \right) = \frac{L_2^2}{L_1^2}, \quad (3.34)$$

por lo tanto, sustituyendo (3.34) en (3.33) se puede escribir la eficiencia como [6]

$$\eta = 1 - \frac{E_1}{E_2}. \quad (3.35)$$

De esta expresión se puede observar que $\eta \rightarrow 1$ cuando $E_2 \rightarrow \infty$. Para lograr hacer tender E_2 a infinito, vemos que de la ecuación (3.18), se debe hacer tender a L_2 a cero, entonces mientras más pequeña sea la compresión en el pozo más eficiente será la máquina térmica cuántica.

3.6. Eigenenergías de un pozo bidimensional

En esta sección analizaremos el confinamiento de una partícula en un pozo de potencial bidimensional infinito de anchura L_x en la dirección x y anchura L_y en la dirección y .

Comenzaremos resolviendo la ecuación de Schrödinger para dos dimensiones dentro de un pozo bidimensional infinito donde $V = 0$, esto es,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = E\Psi. \quad (3.36)$$

Dado que se trata de una ecuación diferencial con derivadas parciales de segundo orden con coeficientes constantes, podemos proponer una solución utilizando el método de separación de variables. Este método consiste en buscar una solución en forma de productos de funciones de una sola variable, de esta manera la ecuación original se puede convertir en ecuaciones diferenciales ordinarias para cada una de

las variables tratadas. Proponemos entonces una solución de la forma [14]

$$\Psi(x, y) = f(x)g(y), \quad (3.37)$$

con las siguientes condiciones de frontera

$$\Psi(0 \leq x \leq L_x, 0) = \Psi(0 \leq x \leq L_x, y) = 0, \quad (3.38)$$

y

$$\Psi(0, 0 \leq y \leq L_y) = \Psi(L_x, 0 \leq y \leq L_y) = 0. \quad (3.39)$$

Al sustituir la solución propuesta (3.37), por el método de separación de variables, en la ecuación (3.36) tenemos que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 [f(x)g(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [f(x)g(y)]}{\partial y^2} \right) = Ef(x)g(y), \quad (3.40)$$

como $g(y)$ no depende de x y $f(x)$ no depende y , podemos hacer

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(g(y) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) \frac{d^2 g(y)}{dy^2} \right) = Ef(x)g(y), \quad (3.41)$$

y como último paso, dividiremos toda la ecuación por $\Psi(x, y) = f(x)g(y)$ de modo que

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2}. \quad (3.42)$$

De esta manera, logramos convertir una ecuación de derivadas parciales de dos variables en una ecuación diferencial ordinaria de dos variables. Vemos que la ecuación (3.42) se cumple solo si ambos términos son igual a una misma constante que

llamaremos k_y^2 , esto es,

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = k_y^2, \quad (3.43)$$

entonces obtendremos dos ecuaciones diferentes, una de ellas es

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = k_y^2, \quad (3.44)$$

y la otra es

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = k_y^2, \quad (3.45)$$

a partir de la cual tenemos que

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = k_y^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (3.46)$$

Si definimos

$$-k_x^2 = k_y^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (3.47)$$

podemos escribir la ecuación (3.46) como

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k_x^2, \quad (3.48)$$

Para solucionar la ecuación (3.48) se utiliza una solución de la forma

$$f(x) = A \cos(k_x x) + B \operatorname{sen}(k_x x), \quad (3.49)$$

donde A y B son constantes. Como la función de onda en este confinamiento debe de anularse en las paredes del pozo de potencial debido a que es imposible encontrar

a la partícula fuera del pozo, utilizaremos las siguientes condiciones de frontera

$$f(0) = 0, \quad (3.50)$$

$$f(L_x) = 0. \quad (3.51)$$

De manera análoga, para solucionar la ecuación (3.44) utilizamos una solución de la forma

$$g(y) = C \operatorname{sen}(k_y y) + D \operatorname{cos}(k_y y), \quad (3.52)$$

donde C y D son constantes. Consideraremos las siguientes condiciones de frontera

$$g(0) = 0, \quad (3.53)$$

$$g(L_y) = 0. \quad (3.54)$$

Como podemos ver, el problema de una partícula confinada en un pozo de potencial infinito bidimensional dada por la ecuación (3.36), se ha reducido a solucionar el problema de un pozo de potencial infinito unidimensional dados por las ecuaciones (3.44) y (3.48).

Aplicando la condición de frontera (3.50) en la función en (3.49), la solución se reduce a

$$f(x) = B \operatorname{sen}(k_x x), \quad (3.55)$$

y utilizando la condición de frontera (3.51) llegamos a que

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, n_x = 1, 2, 3... \quad (3.56)$$

por lo que la función (3.55) para la dirección en x queda de la forma

$$f(x) = B \operatorname{sen} \left(\frac{n_x \pi}{L_x} x \right). \quad (3.57)$$

Normalizando esta función obtenemos

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \operatorname{sen} \left(\frac{n_x \pi}{L_x} x \right). \quad (3.58)$$

Similarmente, aplicando la condición (3.53), la función (3.52) queda como

$$g(y) = C \operatorname{sen}(k_y y), \quad (3.59)$$

y aplicando la condición (3.43) llegamos a la condición

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, n_y = 1, 2, 3, \dots \quad (3.60)$$

Por lo que la función (3.59) en la dirección y es

$$g(y) = C \operatorname{sen} \left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right). \quad (3.61)$$

Normalizando la función se tiene que

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \operatorname{sen} \left(\frac{n_y \pi}{L_y} y \right). \quad (3.62)$$

De la ecuación (3.47) podemos encontrar una expresión para la energía de la partícula en el pozo de potencial, dada por

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2), \quad (3.63)$$

sustituyendo (3.56) y (3.60) podemos escribir (3.63) como

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x \pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 \right]. \quad (3.64)$$

Utilizando la expresión (3.64) podemos encontrar la energía de la partícula en función de su nivel energético y la anchura del pozo. A continuación utilizaremos estos resultados para encontrar los análogos cuánticos de los procesos adiabáticos e isocóricos involucrados en el ciclo cuántico de Otto.

4 — Ciclo cuántico de Otto para un confinamiento toroidal

En este capítulo se presentarán los resultados del trabajo realizado. Se calcularán las eigenenergías de un pozo bidimensional con doble periodicidad, después, en este sistema, se realizará el ciclo cuántico de Otto y, finalmente, se calculará la eficiencia del ciclo.

4.1. Eigenenergías de un pozo bidimensional con doble periodicidad

A continuación se presentarán los resultados obtenidos al estudiar el confinamiento de una partícula en un pozo bidimensional infinito donde en ambas direcciones se presenta una periodicidad espacial. Para comprender mejor a qué se refiere la periodicidad espacial veremos primero un ejemplo en una dirección. Consideraremos un pozo de potencial bidimensional donde la función de onda presentará una periodicidad en el eje y cada $2\pi R$ (véase figura 4.1) [15]; esto quiere decir que

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y + 2\pi R). \quad (4.1)$$

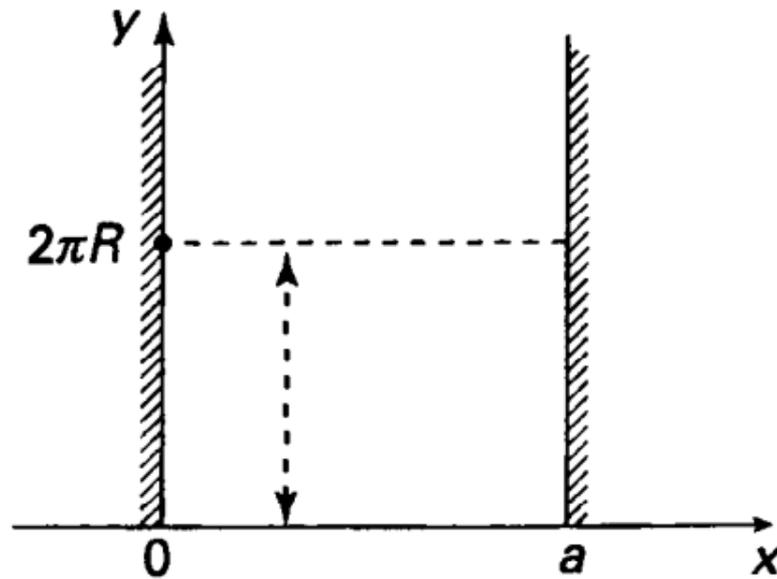


Figura 4.1: Pozo de potencial infinito bidimensional donde la función de onda Ψ presenta una periodicidad espacial en el eje y cada $2\pi R$. Esto quiere decir que el módulo cuadrado de la función de onda $|\Psi|^2$, es decir, la probabilidad de encontrar a la partícula, se repetirá cada $2\pi R$ [15].

La periodicidad nos dice que cada cierto intervalo de distancia se repetirá el módulo cuadrado de la función de onda $|\Psi|^2$. De esta manera, si la probabilidad de encontrar a la partícula en el punto A es igual que encontrarla en el punto $A + 2\pi R$ (véase figura 4.2), podemos imaginarnos que deformamos el espacio a su alrededor para formar un cilindro. Así, podemos decir que una periodicidad espacial cada $2\pi R$ de la función de onda se puede ver como una geometría cilíndrica con radio R .

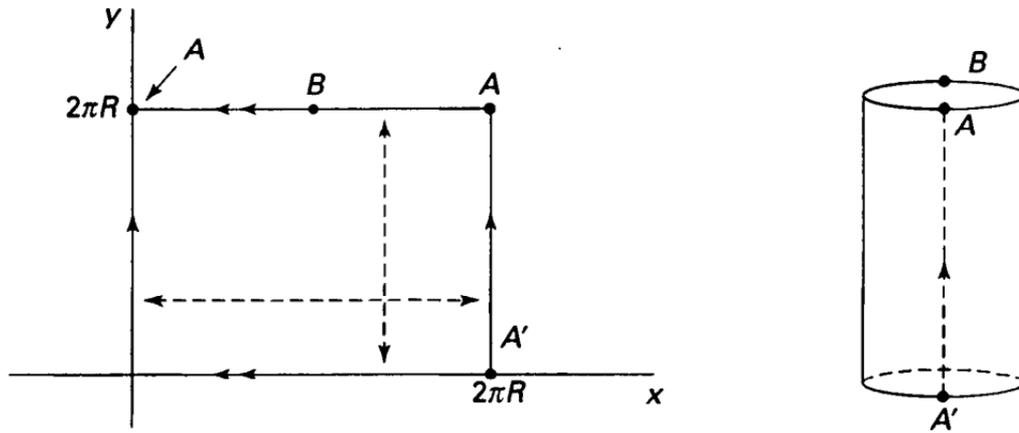


Figura 4.2: Visualización de la periodicidad espacial de la función de onda Ψ . La probabilidad de encontrar una partícula en el punto A es la misma que encontrarla en el punto $A + 2\pi R$, $A + 4\pi R$, $A + 6\pi R$ y así sucesivamente. Esto se puede ver como si conectáramos los dos puntos A de la figura para crear un cilindro [15].

Una vez entendido esto, será mas fácil visualizar el efecto que tendrá una función de onda con doble periodicidad espacial en un pozo de potencial.

4.1.1. Función de onda con doble periodicidad espacial

Imaginemos que en el pozo de la figura 4.1 también se presenta una periodicidad en el eje x cada $2\pi R$. De igual manera que en el análisis anterior, podemos imaginarnos a la partícula dando vueltas en círculos, pero como también tenemos la periodicidad del eje y , tenemos que modificar al cilindro que teníamos anteriormente uniendo sus dos extremos, tendremos una superficie en forma de rosquilla, en otras palabras, tendremos a una partícula confinada a moverse sobre la superficie de una simetría toroidal (véase figura 4.3). En este caso debemos considerar las siguientes condiciones de frontera

$$\Psi(x, y) = \Psi(x + 2\pi R, y). \quad (4.2)$$

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y + 2\pi r). \quad (4.3)$$

donde en el eje x se presenta una periodicidad cada $2\pi R$ y en el eje y se presenta cada $2\pi r$ [15].

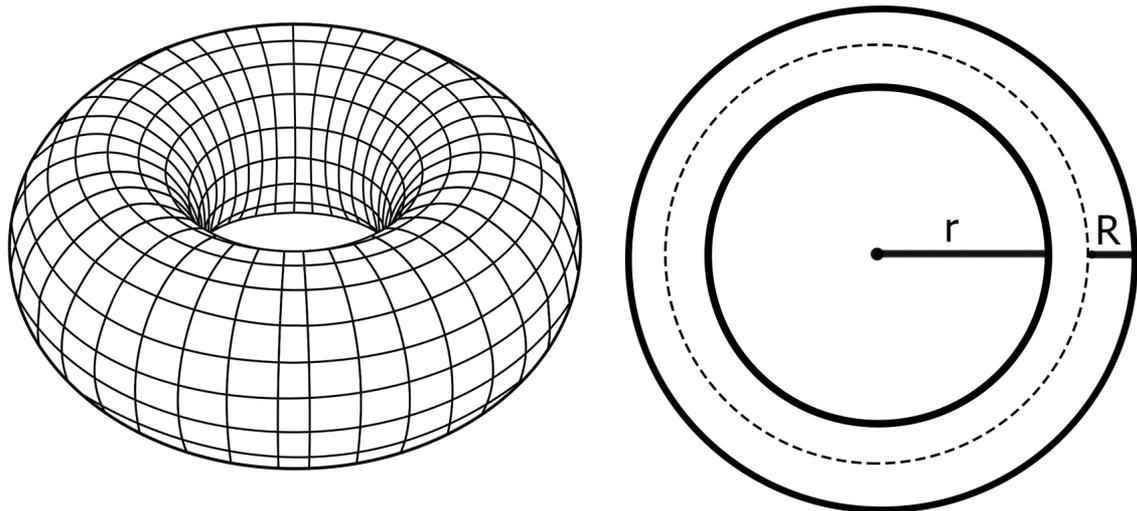


Figura 4.3: Visualización de los efectos de una función de onda Ψ con una periodicidad espacial en ambas direcciones. Una periodicidad en una dirección es representado por una simetría cilíndrica, sin embargo, al añadir otra periodicidad obtendremos una simetría toroidal. En este caso, la variable r representa el radio exterior del toro causado por la periodicidad de la función de onda en el eje y , mientras que la variable R representa el radio interno del toro, originado por la periodicidad en la dirección x .

Comenzaremos resolviendo la ecuación de Schrödinger para dos dimensiones dentro de un pozo infinito donde el potencial es nulo, es decir, $V = 0$. Realizando un procedimiento similar al de la sección 3.6 se sabe que es necesario resolver la ecuación (3.36) proponiendo una solución por el método de separación de variables como la mencionada en la ecuación (3.37). Análogamente al procedimiento hecho en la sección 3.6 obtenemos las ecuaciones (3.44) y (3.48), las cuales son

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = k_y^2, \quad (4.4)$$

para la dirección en y , y

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k_x^2, \quad (4.5)$$

para la dirección en x . Para solucionar la ecuación (4.5) se utiliza una solución de la forma (3.49). Sin embargo, a diferencia de la sección 3.6 donde se utilizó una condición de frontera del tipo $f(0) = 0$, aquí se debe tomar en cuenta la periodicidad espacial de la función de onda en la dirección x , es decir, utilizaremos la condición de frontera

$$f(x) = f(x + 2\pi R). \quad (4.6)$$

También es necesario que la derivada de la función de onda sea continua en las fronteras, es decir, se debe cumplir la condición

$$\dot{f}(x) = \dot{f}(x + 2\pi R). \quad (4.7)$$

donde la notación \dot{f} indica la derivada espacial df/dx . Aplicando las condiciones (4.6) y (4.7) en la solución (3.49), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$A = A \cos(2\pi R k_x) + B \sin(2\pi R k_x), \quad (4.8)$$

$$B = -A \sin(2\pi R k_x) + B \cos(2\pi R k_x), \quad (4.9)$$

si las constantes A y B son distintas de cero, vemos que este sistema de ecuaciones se cumple solo si en la ecuación (4.8) el término $\sin(2\pi R k_x) = 0$ y $\cos(2\pi R k_x) = 1$, de igual manera, para que se cumpla la ecuación (4.9) es necesario que se cumplan las dos condiciones anteriores, y vemos que esto es posible si

$$k_x = \frac{n_x}{R}, n_x = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

Ahora se resolverá la ecuación (4.4). Para ello, utilizaremos una solución que ya se había visto previamente en la sección 3.6. Tomando como solución la ecuación (3.52) y, similarmente, debido a la periodicidad de la función de onda en la dirección y , consideramos las siguientes condiciones de frontera

$$g(y) = g(y + 2\pi r), \quad (4.11)$$

$$\dot{g}(y) = \dot{g}(y + 2\pi r). \quad (4.12)$$

Aplicando las condiciones (4.11) y (4.12) en la ecuación (3.52) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$D = C \operatorname{sen}(2\pi r k_y) + D \operatorname{cos}(2\pi r k_y), \quad (4.13)$$

$$C = C \operatorname{cos}(2\pi r k_y) - D \operatorname{sen}(2\pi r k_y), \quad (4.14)$$

similarmente al sistema de ecuaciones (4.8) y (4.9) vemos que el sistema se cumple solo cuando los términos $\operatorname{sen}(2\pi r k_y) = 0$ y $\operatorname{cos}(2\pi r k_y) = 1$, por lo tanto, tenemos que

$$k_y = \frac{n_y}{r}, n_y = 1, 2, 3... \quad (4.15)$$

Utilizando los valores obtenidos para k_x y k_y podemos ver que de la ecuación (3.47) obtenida en la sección 3.6 tenemos una expresión para la energía del sistema

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2), \quad (4.16)$$

sustituyendo (4.10) y (4.15), obtenemos

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x}{R} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.17)$$

Tomando en cuenta las expresiones que describen los procesos isobáricos e isocóricos del ciclo de Otto, presentadas en la sección 3.4, en la siguiente sección extenderemos el análisis al caso de una partícula en un confinamiento toroidal.

4.2. Descripción del ciclo cuántico de Otto con doble periodicidad

4.2.1. Compresión adiabática

Se comenzará con una compresión adiabática desde el nivel de energía $n_x = 1$ y $n_y = 1$. Durante el proceso solo se variará la longitud en el eje x , manteniendo la distancia en y constante. Iniciando en $R = R_1$ se moverá la pared en x hasta $R = R_2$. Como se trata de un proceso adiabático, las probabilidades de ocupación de los niveles energéticos permanecen invariantes (véase sección 3.4.1), por lo que de acuerdo a la ecuación (4.17), se tiene que

$$E_{1 \rightarrow 2}(R) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.18)$$

Al igual que en la sección 3.4.1, se puede obtener una expresión para la fuerza como función de R a lo largo de esta expansión, por lo que utilizando la ecuación (3.9) obtenemos

$$F_{1 \rightarrow 2}(R) = \frac{\hbar^2}{mR^3}. \quad (4.19)$$

4.2.2. Calentamiento isocórico

En este punto, se realizará un proceso isocórico, para ello se añadirá calor Q_1 al sistema, la fuerza aumentará pero se mantendrá la longitud del pozo constante. Al

hacer esto se cambiará del estado $n_x = 1$ al estado $n_x = 2$. El valor de expectación del Hamiltoniano al iniciar el proceso es

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.20)$$

y al finalizar el proceso será

$$E_3 = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{2}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.21)$$

Con estos datos podemos calcular Q_1 utilizando la ecuación (3.15)

$$Q_1 = E_3 - E_2 = \frac{2\hbar^2}{mR_2^2} - \frac{\hbar^2}{2mR_2^2} = \frac{3\hbar^2}{2mR_2^2}. \quad (4.22)$$

4.2.3. Expansión adiabática

Ahora se expande adiabáticamente el sistema, desde $R = R_2$ hasta $R = R_1$, sin modificar los niveles de energía. Recordando que durante el calentamiento isocórico hecho en la sección anterior el nivel energético n_x cambio hasta el estado 2, mientras que n_y permaneció en el estado 1, podemos calcular el valor de expectación del Hamiltoniano durante en este proceso utilizando la ecuación (4.17), por lo que obtenemos

$$E_{3 \rightarrow 4}(R) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{2}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.23)$$

La fuerza en función de R se obtiene usando la ecuación (3.9)

$$F_{3 \rightarrow 4}(R) = \frac{4\hbar^2}{mR^3}. \quad (4.24)$$

4.2.4. Enfriamiento isocórico

Finalmente, se realizará un proceso isocórico donde la fuerza disminuirá, bajando el nivel de energía desde $n_x = 2$ hasta $n_x = 1$ y así regresar al punto inicial del ciclo. El valor esperado del Hamiltoniano al iniciar el proceso será

$$E_4 = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{2}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.25)$$

y al finalizar el proceso

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (4.26)$$

Podemos calcular el calor expulsado Q_2

$$Q_2 = E_1 - E_4 = \frac{\hbar^2}{2mR_1^2} - \frac{2\hbar^2}{mR_1^2} = -\frac{3\hbar^2}{2mR_1^2}. \quad (4.27)$$

Finalizando así el ciclo cuántico de Otto. Una vez calculada una expresión para Q_1 , solo nos falta calcular el trabajo realizado por este sistema para poder obtener una expresión para la eficiencia del ciclo cuántico de Otto en un confinamiento toroidal.

4.3. Trabajo realizado

Al igual que en la sección 3.5, debemos calcular el trabajo realizado por los procesos adiabáticos antes de poder calcular la eficiencia. Utilizando la ecuación (3.26) para nuestros dos procesos adiabáticos tenemos que

$$W = \int_{R_1}^{R_2} dRF_{1 \rightarrow 2}(L) + \int_{R_2}^{R_1} dRF_{3 \rightarrow 4}(L). \quad (4.28)$$

Sustituyendo las expresiones (4.19) y (4.24) obtenidas para las fuerzas tenemos

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\hbar^2}{mR^3} dR + \int_{R_2}^{R_1} \frac{4\hbar^2}{mR^3} dR \quad (4.29)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{1}{R^2} \right)_{R_1}^{R_2} + \left(\frac{4}{R^2} \right)_{R_2}^{R_1} \right] \quad (4.30)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} + \frac{4}{R_1^2} - \frac{4}{R_2^2} \right] \quad (4.31)$$

$$= -\frac{3\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right]. \quad (4.32)$$

Por lo que podemos escribir el trabajo realizado como

$$W = \frac{3\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right]. \quad (4.33)$$

Vemos que el trabajo realizado por una máquina térmica cuántica actuando bajo el ciclo de Otto depende de las distancias R_1 y R_2 .

4.4. Eficiencia del ciclo cuántico de Otto

Recordando que la eficiencia de una máquina térmica está dada por

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_1|}. \quad (4.34)$$

Por lo que en nuestro caso, sustituyendo la expresión (4.33) y (4.22) en (4.34), la eficiencia es

$$\eta = \frac{3\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right] \left(\frac{2mR_2^2}{3\hbar^2} \right), \quad (4.35)$$

simplificando tenemos que

$$\eta = \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) R_2^2, \quad (4.36)$$

y finalmente

$$\eta = 1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (4.37)$$

Vemos que de las ecuaciones (4.20) y (4.26) podemos hacer

$$E_2 - E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad (4.38)$$

además, de la ecuación (4.20) despejamos R_2^2 , de modo que

$$R_2^2 = \frac{r^2 \hbar^2}{2mr^2 E_2 - \hbar^2}. \quad (4.39)$$

Sustituyendo (4.38) y (4.39) en (4.37) podemos obtener una expresión para la eficiencia en términos de las energías, esto es,

$$\eta = \frac{2m}{\hbar^2} (E_2 - E_1) \cdot \frac{r^2 \hbar^2}{2mr^2 E_2 - \hbar^2}, \quad (4.40)$$

o bien como

$$\eta = 2mr^2 \frac{E_2 - E_1}{2mr^2 E_2 - \hbar^2}. \quad (4.41)$$

A continuación, en la figura 4.4, se gráfica la eficiencia dada por la ecuación 4.37 en función de los desplazamientos R_1 y R_2 .

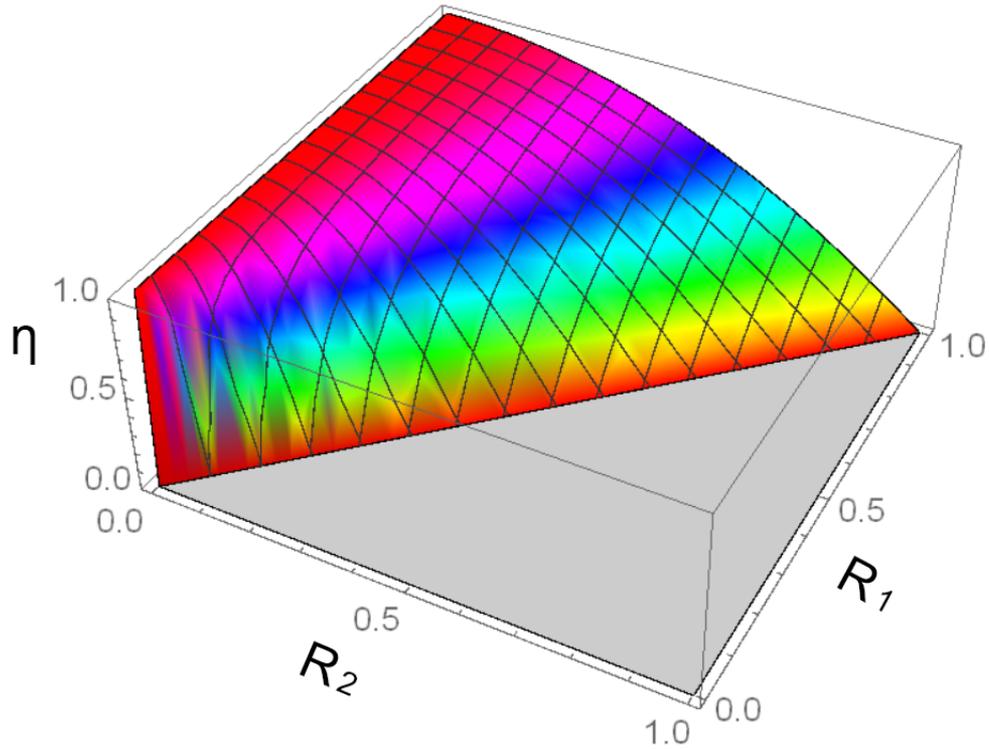


Figura 4.4: Eficiencia del ciclo cuántico de Otto en función de R_1 y R_2 .

Como podemos ver en la figura, existen valores prohibidos en la eficiencia del ciclo, por ejemplo, aquellas donde $R_1 < R_2$. También se puede observar que en el caso límite cuando $R_2 \rightarrow 0$ la eficiencia $\eta \rightarrow 1$. Recordando que R_1 es la posición inicial de la pared y R_2 es la distancia hasta la que se contrae la pared del pozo de potencial durante la compresión adiabática, entonces podemos decir que obtendremos una eficiencia mayor mientras más pequeño sea el desplazamiento hecho por la compresión adiabática y, a su vez, mientras más grande sea el valor de R_1 , también habrá un incremento en la eficiencia de la máquina térmica.

Similarmente, se presenta a continuación una gráfica para el trabajo efectuado por la MTC dado por la ecuación (4.33), en función de R_1 y R_2 .

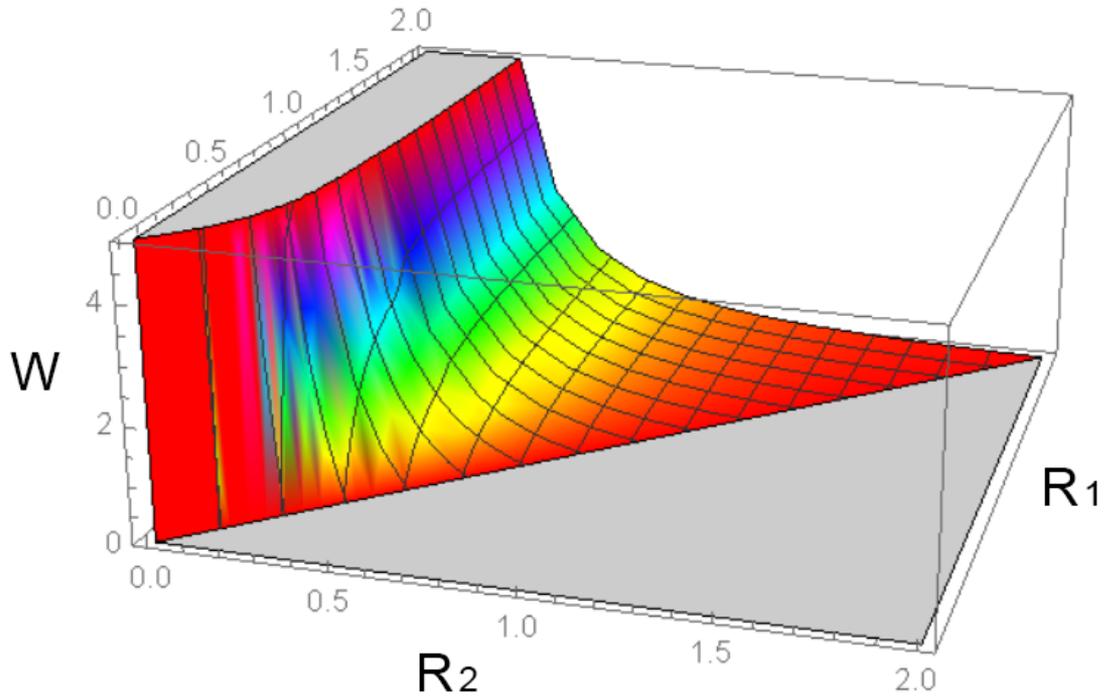


Figura 4.5: Gráfica del trabajo en relación con los desplazamientos R_1 y R_2 . Usando como parámetros $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$ y $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Vemos que el trabajo obtenido por la máquina térmica cuántica tiene valores prohibidos, similar a la eficiencia, aquellos donde $R_1 < R_2$. También podemos ver que tiende a crecer cuando R_2 y R_1 decrecen.

Para realizar un análisis comparativo, en la figura 4.6 se muestra un mapa de colores de la eficiencia y el trabajo, con esto podemos encontrar lugares óptimos donde sea posible conseguir los mejores valores para la eficiencia y trabajo.

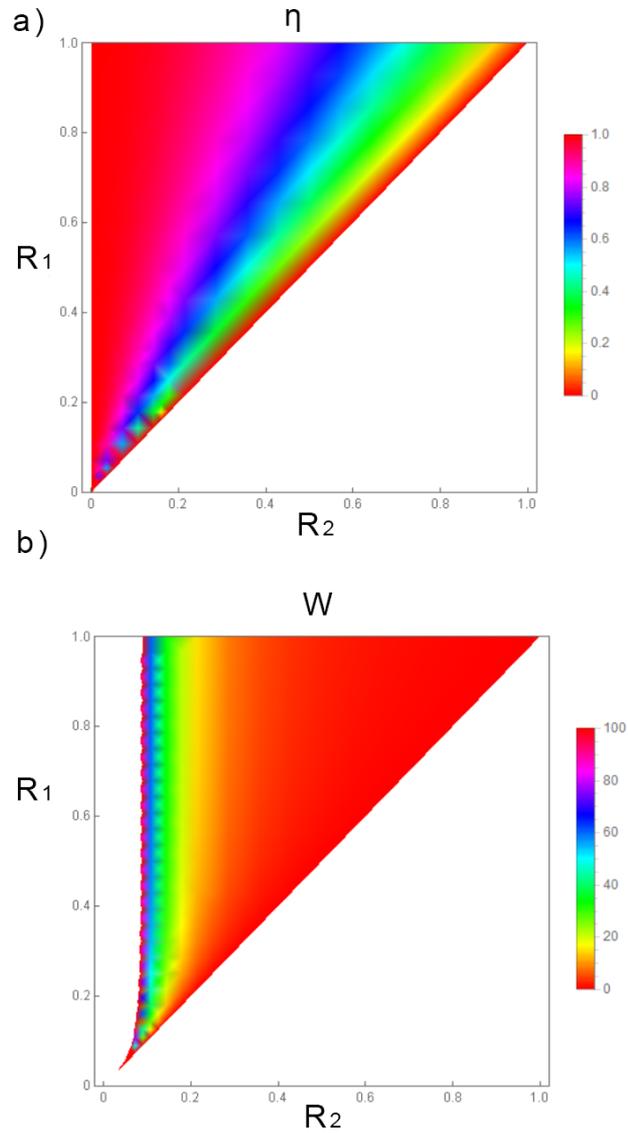


Figura 4.6: a) Mapa de color de la eficiencia ciclo cuántico de Otto. b) Mapa de color del trabajo realizado por la máquina térmica, los parámetros usados son $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$ y $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Podemos ver que existen los valores para R_1 y R_2 que nos dan la mejor relación entre eficiencia y trabajo, los cuales corresponden a hacer tender R_1 a valores grandes y R_2 a valores pequeños, donde R_1 es la posición donde inicia el ciclo y R_2 es la posición donde termina la compresión adiabática.

5 — Conclusiones

La presente tesis tuvo como objetivo calcular la eficiencia de una máquina térmica cuántica que consiste en una partícula confinada en una superficie toroidal, dicha superficie realiza los procesos que rigen el ciclo cuántico de Otto. Para lograr este objetivo fue necesario solucionar la ecuación de Schrödinger para un pozo bidimensional infinito con doble periodicidad espacial en sus ejes, que se puede representar como un toro. Al obtener las eigenenergías del sistema notamos que dependen únicamente de los radios R y r , que corresponden a las distancias $2\pi R$ y $2\pi r$ donde se presentan las periodicidades en el eje x y en el eje y , respectivamente. A partir de las eigenenergías se realizaron los procesos que describen el ciclo cuántico de Otto (adiabáticos e isocóricos) para obtener expresiones de la fuerza y el calor transferido. Una vez obtenida la fuerza y el calor transferido durante todo el proceso, obtuvimos el trabajo que se realizó y finalmente obtuvimos una expresión de la eficiencia.

Se mostró que la eficiencia del ciclo cuántico de Otto operando en una MTC bidimensional con doble periodicidad espacial, depende únicamente de las distancias R y r , que corresponden a los radios interior y exterior del toroide, así que variando estos radios es posible determinar donde se llevará a cabo un máximo de la eficiencia. el conocimiento del trabajo, las energías, la transferencia de calor y la eficiencia nos proporciona un mejor entendimiento del funcionamiento de las máquinas térmicas cuánticas y como mejorarlas.

Trabajos futuros

Como futuros trabajos se puede considerar un sistema de una partícula confinada en la superficie de un toro tomando en cuenta el espín de la partícula, así se podría obtener una descripción más precisa de la máquina térmica cuántica y las implicaciones que el espín puede tener en su eficiencia. También es posible utilizar diferentes ciclos para este mismo confinamiento toroidal como, por ejemplo, el ciclo de Diesel, Brayton, Stirling, y así analizar la diferencia de la eficiencia en distintos ciclos.

Con los resultados obtenidos podemos ver que el confinamiento de la partícula juega un papel importante en la eficiencia del ciclo, por lo que es necesario seguir estudiando diferentes tipos de confinamientos y así obtener una eficiencia que supere a las máquinas térmicas clásicas.

Bibliografía

- [1] Zemansky, W. M. & Dittman, R. H.(1985). *Calor y termodinámica*. Sexta edición. United States: McGraw-Hill.
- [2] Jorge, R. (1990). *Introducción a la termodinámica*. México.
- [3] Zemansky, W. M.(1957). *Heat and thermodynamics*. United States: McGraw-Hill.
- [4] Bender, C.M, Brody, D.C, & Meister, B.K. (2000) Quantum mechanical carnot engine. *Journal of physics A: Mathematical and general*, 33(24):4427
- [5] Quan H. T. (2009) Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. II. *Physical Review E*, 79:41129
- [6] Latifa, E. & Purwanto, A. (2013). Quantum heat engines, multiple-state 1D box system. *Journal of Modern Physics*, 4:1091.
- [7] Shankar, R. (1980). *Principles of Quantum Mechanics*. New Haven, Connecticut: Springer US.
- [8] John R. Howell & Richard O. (1990). *Principios de termodinámica para ingeniería*. Austin, Texas. McGraw Hill.
- [9] <http://www.surgarden.es/blog/funcionamiento-de-un-motor-de-2-tiempos/>
- [10] <http://pablomodi.blogspot.com/2014/06/blog-post.html>

- [11] Quan H. T., Yu-xi L., Sun C. P., Franco N. (2008). Quantum Thermodynamic Cycles and Quantum Heat Engines H.T. arXiv:quant-ph/0611275.
- [12] Arnaud, J. Laurent C. & Philippe F. (2003). A simple quantum heat engine. arXiv:quant-ph/0211072.
- [13] H.T. Quan, Yu-xi Liu, C. P Sun & Franco Nori. (2009) Quantum Thermodynamic Cycles and Quantum Heat Engines II. *Physical Review E* 79, 041129.
- [14] Richard L. Liboff (2002). *Introductory Quantum Mechanics*. United States: Addison-Wesley.
- [15] Barton Zwiebach (2009). *A First Course in String Theory*. Massachusetts: Cambridge University Press.
- [16] Donald Allan McQuarrie (1973). *Statistical Mechanics*. Indiana University: Harper & Row.
- [17] Johannes R., Samuel T., *et al.* (2016) A single-atom heat engine. arXiv:quant-ph/0211072
- [18] Arnab G., David G., Wolfgang N., *et al.* (2018) Two-level masers as heat-to-work converters. arXiv:1712.08936 [physics.optics]