



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE MAestrÍA Y DOCTORADO EN
CIENCIAS E INGENIERÍA

COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LA ESTRUCTURA
DE CONTROL CON COMPENSACIÓN ACTIVA DE
PERTURBACIONES Y EL CONTROLADOR PID EN
SISTEMAS MECÁNICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

JOSÉ ARMANDO SÁNCHEZ OSUNA

DIRECTOR:

DR. DAVID ISAÍAS ROSAS ALMEIDA

Mexicali, Baja California, noviembre del 2024



A mi esposa Jackeline, tu paciencia, amor y apoyo compartido durante esta etapa me ha llenado de fuerzas para seguir creciendo y superarme cada día más como persona.

Eres mi constante motivación.

Agradecimientos

Al Dr. David Rosas, por haberme guiado durante este proceso de aprendizaje y transmitirme su sapiencia como profesor y persona, además de fomentar el ejemplo. Gracias por confiar aceptándome nuevamente y trabajar juntos.

A mis padres, que con tanto cariño y soporte me guiaron hacia lo que hoy en día soy.

A los miembros del comité de tesis: Dr. Luis Omar Moreno Ahedo, Dr. Raúl Rascón Carmona, Dr. Ernesto Víctor González Solís y Dra. Karla Isabel Velázquez Victorica por sus consejos y buenos comentarios.

A la Universidad Autónoma de Baja California, Coordinación del laboratorio de mecatrónica, y todos los docentes con los cuales trabajé, gracias por abrirme las puertas.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por brindar apoyo para la realización de mi investigación.

Índice general

Agradecimientos	II
1 Introducción	1
2 Antecedentes	5
2.1 Definiciones básicas	5
2.2 Representación de sistemas dinámicos en variables de estado	7
2.3 Estabilidad de puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov	10
2.3.1 Método por linealización de Lyapunov (método indirecto)	11
2.3.2 Método directo de Lyapunov	12
2.4 Estabilidad de sistemas perturbados	14
2.4.1 Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes	14
2.4.2 Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanescentes	15
2.5 Modelado de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de movimiento de Lagrange	16
2.6 Definición de un observador de estado robusto para sistemas mecánicos	21
2.6.1 Estabilidad de un sistemas de segundo orden con estructura variable	22
2.6.2 Diseño del observador de estado	28
2.6.3 Identificación de perturbaciones	31
3 Definición de controladores	33
3.1 Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)	33
3.2 Estructura de control con compensación activa de perturbaciones	34
3.2.1 Estructura de control	35

3.2.2	Estabilidad de la la estructura de control con compensación activa de perturbaciones	36
4	Sistema Masa Resorte Amortiguador	38
4.1	Descripción del prototipo y modelo dinámico	38
4.2	Diseño y aplicación de la estructura de control ADRC	42
4.3	Diseño de un controlador PID	45
4.3.1	Desempeño numérico del sistema en lazo cerrado	49
4.3.2	Resultados de Simulaciones utilizando el controlador PID	49
4.3.3	Simulación ADRC	51
4.3.4	Desempeño experimental del sistema en lazo cerrado	54
4.3.5	Estructura PID	54
4.3.6	Estructura ADRC	54
4.4	Análisis del desempeño de ambos controladores	56
5	Péndulo simple	62
5.1	Descripción del prototipo y modelo dinámico	62
5.2	Diseño de los controladores PID y ADRC	65
5.2.1	Diseño del controlador PID	66
5.2.2	Diseño de la estructura de control ADRC para el péndulo simple . .	68
5.2.3	Resultados de simulaciones numéricas aplicando el controlador PID	71
5.2.4	Resultados de simulaciones numéricas aplicando la estructura ADRC	71
5.3	Resultados experimentales	73
5.3.1	Control PID	73
5.3.2	Estructura ADRC	76
5.3.3	Análisis de datos	84
6	Robot manipulador de 5 G.D.L. RV-M1	87
6.1	Descripción del robot RV-M1	87
6.2	Resultados experimentales aplicando un controlador PID al robot RV-M1 .	90

6.3	Resultados experimentales al aplicar la estructura ADRC al robot RV-M1 .	98
6.3.1	Análisis de datos	98
7	Actuador lineal basado en SMA	109
7.1	Introducción a las aleaciones con memoria de forma	109
7.1.1	Descripción del mecanismo traslacional con un resorte de Nitinol como actuador	111
7.1.2	Resultados experimentales de la aplicación de un control PID . . .	112
7.2	Resultados experimentales aplicando la estructura ADRC	121
7.2.1	Análisis de datos	130
8	Conclusiones y trabajo futuro	135

Índice de figuras

2.1	Soluciones que cruzan la superficie $S = 0$	9
2.2	Soluciones que definen un modo deslizante	10
3.1	Diagrama a bloques de la estructura de control con identificación de perturbaciones.	36
4.1	Representación esquemática de un masa resorte amortiguador.	40
4.2	Sistema mecánico utilizado en los experimentos.	40
4.3	Validación del modelo identificado del mecanismo Masa Resorte Amortiguador.	41
4.4	Herramienta PID Tuner.	47
4.5	Representación esquemática de la estructura de control PID utilizando la herramienta PID TUNER.	47
4.6	Parámetros obtenidos a través de la herramienta PID Tuner.	48
4.7	Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura de control PID.	49
4.8	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura de control PID.	50
4.9	Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura de control PID.	50
4.10	Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.	51
4.11	Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura ADRC.	52

4.12 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 52

4.13 Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC. 53

4.14 Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC. 53

4.15 Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura PID. 55

4.16 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura PID. 55

4.17 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura PID. 56

4.18 Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC. 57

4.19 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura ADRC. 57

4.20 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 58

4.21 Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC. 58

4.22 Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC. 59

4.23 Diagrama de caja de las simulaciones para cada estructura de control. 60

4.24 Diagrama de caja de los experimentos para cada estructura de control. 61

4.25 Índices de desempeño entre estructuras de control. 61

5.1 Péndulo simple utilizado en la prueba de los controladores. 64

5.2 Experimentos realizados para la identificación del modelo del péndulo simple. 65

5.3 Validación del modelo identificado. 66

5.4 Representación esquemática de la estructura de control PID utilizando la herramienta PID TUNER. 67

5.5 Parametros obtenidos a través de la herramienta PID TUNER. 67

5.6 Señal de entrada como referencia $x_r(t)$ y posición del sistema $x_1(t)$ usando la estructura de control PID. 71

5.7 Señal de error $e(t)$ usando la estructura de control PID. 72

5.8 Señal de control que gobierna al sistema $u(t)$ 72

5.9 Señal de entrada como referencia $x_r(t)$ y posición del sistema $x_1(t)$ usando la estructura de control ADRC. 73

5.10 Señal de control que gobierna al sistema $u(t)$ 74

5.11 Señal de error $e(t)$ usando la estructura de control ADRC. 74

5.12 Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC. 75

5.13 Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC. 75

5.14 Resultados experimentales. Comportamiento del péndulo simple aplicando un control PID y una referencia con amplitud de 28 grados. 76

5.15 Resultados experimentales. Comportamiento de la señal de control utilizando un PID. 77

5.16 Resultados experimentales. Comportamiento el error entre la referencia, con amplitud de 28 grados, y el ángulo del péndulo simple aplicando un control PID. 77

5.17 Resultados experimentales. Comportamiento del péndulo simple aplicando un control PID y una referencia con amplitud de 180 grados. 78

5.18 Resultados experimentales. Comportamiento de la señal de control utilizando un PID. 78

5.19 Resultados experimentales. Comportamiento el error entre la referencia, con amplitud de 180 grados, y el ángulo del péndulo simple aplicando un control PID. 79

5.20 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de referencia con amplitud de 28 grados y ángulo del péndulo. 79

5.21 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de error entre la referencia y la salida del péndulo. 80

5.22 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de control. 80

5.23 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Velocidad estimada. 81

5.24 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Perturbación estimada. 81

5.25 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de referencia con amplitud de 180 grados y ángulo del péndulo. 82

5.26 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de error entre la referencia y la salida del péndulo. 82

5.27 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de control 83

5.28 velocidad estimada del péndulo simple con una referencia senoidal con amplitud igual a 180 83

5.29 Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Perturbación estimada. 84

5.30 Diagrama de caja de las simulaciones para cada estructura de control. . . . 85

5.31 Diagrama de caja de los experimentos para cada estructura de control. . . . 86

5.32 Índices de desempeño entre estructuras de control. 86

6.1 Nombre de los ejes correspondientes al del cuerpo humano (Figura extraída de [22]). 88

6.2 Nomenclatura interna del robot RV-M1 (Figura extraída de [22]). 89

6.3 Características de movimiento de ejes en robot RV-M1. (Figura extraída de [22]). 89

6.4 Dimensiones del robot RV-M1. (Figura extraída de [22]). 90

6.5 Espacio de operación del robot RV-M1. (Figura extraída de [22]). 91

6.6 Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del eje 1 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID. 92

6.7 Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 1, utilizando el controlador PID. 92

6.8 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID. 93

6.9 Comportamiento de la posición $x_3(t)$ del eje 3 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID. 93

6.10	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 3, utilizando el controlador PID.	94
6.11	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_3(t)$, utilizando el controlador PID.	94
6.12	Comportamiento de la posición $x_4(t)$ del eje 4 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.	95
6.13	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 4, utilizando el controlador PID.	95
6.14	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_4(t)$, utilizando el controlador PID.	96
6.15	Comportamiento de la posición $x_5(t)$ del eje 5 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.	96
6.16	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 5, utilizando el controlador PID.	97
6.17	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_5(t)$, utilizando la estructura PID.	97
6.18	Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del eje 1 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.	99
6.19	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 1, utilizando la estructura ADRC.	99
6.20	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y x_1 , utilizando la estructura ADRC.	100
6.21	Comportamiento de la posición $x_3(t)$ del eje 3 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.	100
6.22	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 3, utilizando la estructura ADRC.	101
6.23	Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_3(t)$, utilizando la estructura ADRC.	101
6.24	Comportamiento de la posición $x_4(t)$ del eje 4 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.	102
6.25	Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 4, utilizando la estructura ADRC.	102

6.26 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_4(t)$, utilizando la estructura ADRC. 103

6.27 Comportamiento de la posición $x_5(t)$ del eje 5 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC. 103

6.28 Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 5, utilizando la estructura ADRC. 104

6.29 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_5(t)$, utilizando la estructura ADRC. 104

6.30 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 1. . . . 106

6.31 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 3. . . . 106

6.32 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 4. . . . 107

6.33 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 5. . . . 107

6.34 Índices de desempeño entre estructuras de control. 108

7.1 Sistema mecánico vertical basado en actuadores de Nitinol 111

7.2 Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID. 113

7.3 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID. 113

7.4 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ utilizando el controlador PID. 114

7.5 Comportamiento de la temperatura $T(t)$ del SMA aplicando una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID. 114

7.6 Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID. 115

7.7 Señal de control u_t para la referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID. 116

7.8 Error de posición entre las señales $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID. 116

7.9 Temperatura T_t del actuador para la referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID. 117

7.10 Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12t)$, utilizando el controlador PID. 117

7.11 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, utilizando el controlador PID. 118

7.12 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID. 118

7.13 Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 3, utilizando el controlador PID. 119

7.14 Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID. 119

7.15 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, utilizando el controlador PID. 120

7.16 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID. 120

7.17 Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 3, utilizando el controlador PID. 121

7.18 Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC. 122

7.19 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC. 123

7.20 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 123

7.21 Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC. 124

7.22 Salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC. 124

7.23 Señal de control u_t aplicada al sistema SMA, para una señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura ADRC. 125

7.24 Error de posición entre las señales $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 125

7.25 Comportamiento de la temperatura $T(t)$ del resorte SMA durante el desarrollo del experimento, utilizando la estructura ADRC. 126

7.26 Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC. 126

7.27 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC. 127

7.28 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 127

7.29 Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC. 128

7.30 Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC. 128

7.31 Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC. 129

7.32 Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC. 129

7.33 Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC. 130

7.34 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ 132

7.35 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ 132

7.36 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos. 133

7.37 Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos. 133

7.38 Índices de desempeño entre estructuras de control. 134

Capítulo 1

Introducción

El controlador proporcional integral derivativo, conocido como PID, ha sido un hito desde su creación en la segunda década del siglo XX. Este controlador puede resolver el problema de regulación en una familia muy amplia de sistemas dinámicos sin la necesidad de tener un modelo preciso de la planta. Incluso, el controlador PID, puede resolver este problema de control sin conocer el modelo de planta. Debido a estas características este controlador ha sido ampliamente usado en aplicaciones industriales de todo tipo [1]. En su forma original, analíticamente, este controlador no resuelve el problema de seguimiento de trayectorias, aunque en la práctica, en algunos sistemas con una dinámica lenta, produce un sistema en lazo cerrado con un comportamiento aceptable, por lo que hoy en día se siguen desarrollando nuevas versiones para resolver el problema de seguimiento en diferentes familias de sistemas no lineales e inciertos. En estas propuestas se han tenido buenos resultados, pero se pierde la simplicidad en el diseño, en su implementación y en la sintonización de sus ganancias. Además, el controlador PID presenta algunas desventajas como, por ejemplo, si alguna de las señales involucradas contienen componentes de alta frecuencia, la acción derivativa amplificará estas componentes y producirá vibraciones en el sistema, es por eso que el PID es continuamente utilizado sin implementarse la porción Derivativa, ya que esto ocasiona una alta sensibilidad al ruido, y por último mencionar que el término Integral, a pesar de ser muy crítico para deshacerse del error en estado estable, introduce otros problemas como la saturación y reduce el margen de la estabilidad debido a una fase de retraso [2].

Debido al desarrollo de nuevas tecnologías en la ingeniería, los sistemas a controlar son más complejos, incluso el modelado matemático y la identificación de parámetros resultan ser un reto mucho mayor y demanda un esfuerzo superior de ingeniería en diferentes aplicaciones prácticas [1]. Una estructura de control que en las últimas décadas ha tenido un gran impacto en la solución de los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias es la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, conocida como ADRC por sus siglas en inglés. El control ADRC se ha convertido bastante atractivo siendo aplicado en diversas áreas de la ingeniería e investigaciones a pesar de que su justificación teórica se quedó rezagada durante bastante tiempo [3]. Esto se debe a su singularidad en los conceptos, la simplicidad en su implementación y un desempeño superior, fueron traducidos en algo valioso en la práctica de la ingeniería, con una habilidad para lidiar con respuestas transitorias, fácil implementación y ahorro de energía, por nombrar algunas ventajas. La gama de aplicaciones parece amplia y cubre casi todos los dominios de la ingeniería de control como control de movimiento, convertidores de corriente directa a corriente directa, procesos químicos, sistemas micro-electro-mecánicos, sistemas acoplados a giroscopios, control de velocidad y sincronización de motores, comportamiento y seguimiento de naves espaciales rígidas, estabilidad de compresores axiales de flujo, controles de vuelo, compensaciones de velocidades bajas en servomotores de corriente directa, sistemas de control de turbinas, entre otros [3]. La estructura del control ADRC, se basa en observadores de estado que estiman las variables de estado no medidas, la dinámica no modelada de la planta y las perturbaciones externas, que permiten su compensación a través de controladores nominales simples pero que generan un sistema en lazo cerrado con excelentes propiedades de robustez [4]. Esta estructura de control se ha aplicado ampliamente en sistemas donde se ha probado formalmente que puede hacer frente a fenómenos no lineales como a la fricción seca, zonas muertas, backlash, pequeños retardos y a perturbaciones externas que satisfagan ciertos criterios de acotamiento y acoplamiento. También se ha mostrado que esta estructura de control se puede implementar con circuitos electrónicos analógicos y con plataformas digitales [5], [6]. En un principio, el diseño de los observadores de estado y del controlador que incluyen esta estrategia de control depende del modelo de la planta, sin embargo, se ha mostrado que en muchos casos no se necesita

un modelo preciso de la planta, solo que se cumpla con ciertas propiedades estructurales [6]. Es por eso por lo que en diferentes publicaciones se ha mencionado que esta estructura de control podrá tomar el lugar de los controladores PID en un futuro cercano ya que también su implementación es muy sencilla y puede resolver los problemas de regulación y de seguimiento de trayectorias en forma directa en sistemas no lineales complejos. En este proyecto se pretende demostrar, en forma experimental, que la estructura de control con compensación activa de perturbaciones es una herramienta más eficiente que el control PID en una familia amplia de sistemas dinámicos que incluyen no linealidades como zona muerta, histéresis, retardos, saturación, backlash, así como perturbaciones externas acotadas y dinámicas no modeladas. Además de la eficiencia, también se pretende mostrar que su implementación experimental no requiere de muchos recursos de cómputo, por lo que se podrá implementar en procesadores digitales elementales o incluso con circuitos electrónicos analógicos.

El objetivo general del proyecto es realizar un análisis comparativo experimental, entre la estructura de control con compensación activa de perturbaciones y la forma clásica del control PID, en la solución de seguimiento de trayectorias en sistemas lineales y no lineales donde el PID tiene una respuesta aceptable y ha sido usado ampliamente. Al mismo tiempo se analizará la complejidad de la implementación de ambas estructuras de control y de la sintonización de sus ganancias.

Como resultado principal de este proyecto de tesis se puede decir que el PID y la ADRC tienen un desempeño similar para la solución del problema de seguimiento de trayectorias cuando la frecuencia de las señales de referencia es muy baja, pero si se incrementa la frecuencia, la estructura ADRC tiene un mejor desempeño. En cuanto a la simplicidad de la implementación, se puede decir, aunque de una forma subjetiva, que la implementación del PID es más sencilla debido a que tiene menos ganancias a sintonizar, aunque hay factores adicionales que se deben de considerar como el nivel de ruido en las señales, así como tener precaución con el integrador debido al efecto *windup*. Por parte de la ADRC, su comportamiento depende fuertemente del desempeño del observador que se utiliza para la identificación de las perturbaciones en el sistema y, si se requiere de un filtro pasa bajas adicional, es muy importante seleccionar una frecuencia de corte adecuada, lo cual es muy

complejo de hacer en forma experimental.

La organización de esta memoria de tesis es la siguiente. En el capítulo 2 se presentan los antecedentes, los cuales son un conjunto de conceptos que se utilizan a lo largo del documento. En capítulo 3 presenta la definición del controlador PID y de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones. En los capítulos 4, 5, 6 y 7 se muestra la comparación del desempeño de ambos controladores en diferentes sistemas; un sistema masa resorte amortiguador, un péndulo simple, un robot industrial de cinco grados de libertad y, finalmente, en un sistema mecánico traslacional basado en un resorte de una aleación con memoria de forma como actuador. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se presenta un conjunto de definiciones básicas que son la base del trabajo presentado a lo largo del documento, para una mejor comprensión de estos conceptos se hacen las referencias adecuadas para que el lector las pueda consultar.

2.1. Definiciones básicas

Dos definiciones importantes son las siguientes: una *señal* es cualquier cosa en un ambiente que tenga información y se pueda medir, por otro lado, un *sistema* es algo en el ambiente que relacione señales. Con base a estas definiciones nos damos cuenta que estamos rodeados de señales y sistemas.

Las señales que relacionan los sistemas, por lo general, se clasifican en entradas de control, perturbaciones y salidas. Las *entradas de control* son aquellas que un usuario puede aplicar para que el sistema tenga algún comportamiento deseado, las *perturbaciones* son señales de entrada al sistema que afectan su comportamiento pero que el usuario no puede manipular, mientras que las *salidas* son las señales que se pueden medir y que, de alguna forma, describen el comportamiento del sistema ante las entradas de control y perturbaciones.

Los sistemas se pueden clasificar en *estáticos* y *dinámicos*; los primeros son aquellos cuya salida en un instante de tiempo solo se determina por el valor de sus señales de entrada en ese instante de tiempo, sin embargo, en los sistemas dinámicos, el valor de la

salida en un instante de tiempo depende tanto del valor de las señales de entrada en ese instante de tiempo y del pasado, es decir, los sistemas dinámicos tienen memoria [7].

Otras definiciones que comúnmente se encuentran en la literatura de control automático son las siguientes.

Planta. Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular. Puede ser cualquier objeto físico que se va a controlar.

Variable controlada y señal de control o variable manipulada. La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y se controla. La señal de control o variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema.

Control realimentado. El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia.

Teoría de control moderna. La tendencia moderna en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad, debido sobre todo a que se requieren tareas más complejas y buena precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo. Debido a la necesidad de cumplir requisitos cada vez más exigentes en el comportamiento de los sistemas de control, el aumento en la complejidad del sistema y el fácil acceso a las computadoras a gran escala, la teoría moderna de control, que es una nueva aproximación al análisis y diseño de los sistemas de control complejo, se ha desarrollado desde 1960. Esta nueva aproximación se basa en el concepto de estado. El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, puesto que ha existido durante bastante tiempo en el campo de la dinámica clásica.

Para una explicación mas extensa de estos conceptos puede consultar [8].

2.2. Representación de sistemas dinámicos en variables de estado

Los sistemas dinámicos pueden ser descritos por una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado con condición inicial $x(t_0) = x_0$, $\dot{x} \equiv dx/dt$, $u \in \mathfrak{R}^m$ es el vector de control y $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es, en general, un campo vectorial no lineal. Bajo una elección del vector de control como $u = u(t, x)$ el sistema (2.1) puede ser reescrito en la forma

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.2)$$

Si $f(\cdot)$ no depende explícitamente de t , el sistema (2.2) se le llama autónomo, de otro modo es no autónomo.

Existencia y unicidad de soluciones

El primer paso en la solución de la ecuación diferencial (2.2) es investigar la existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 1 (*Existencia y unicidad de solución local*) Sea $f(t, x)$ una función continua por tramos en t y que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (2.3)$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$. [9]

Teorema 2 (*Existencia y unicidad de solución global*) Sea $f(t, x)$ una función continua por tramos en t que satisface (2.3) $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_1]$ [9].

Ahora se presenta la definición de solución en el sentido de Filippov para el sistema (2.2), esta definición es más general porque considera al campo vectorial $f(\cdot)$ continuo o discontinuo [10].

Considere el sistema (2.2), donde $f(\cdot)$ es continuo por tramos en un dominio G ; $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado y M es un conjunto, de medida cero en el sentido de Lebesgue, de puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$.

Para cada punto (t, x) del dominio G se define un conjunto $F(t, x)$ en un espacio de dimensión n . Si en el punto (t, x) la función $f(\cdot)$ es continua, el conjunto $F(t, x)$ consiste de un punto que coincide con el valor de la función $f(\cdot)$ en este punto. Si (t, x) es un punto de discontinuidad de la función $f(\cdot)$, el conjunto $F(t, x)$ se define de otra forma como se describe más adelante. Una solución de la ecuación (2.2) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (2.4)$$

esto es, una función vectorial $x(t)$ absolutamente continua definida en un intervalo o un segmento I para el cual $\dot{x}(t) \in F(t, x)$ casi en todo punto de I .

Definición 1 (*Definición del convexo más simple*) Para cada punto $(t, x) \in G$ el conjunto $F(t, x)$ es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contenga todos los valores límite de la función vectorial $f(t, x^*)$ para $(t, x^*) \notin M$, $t = cte$.

Una solución de (2.3) es una solución de la inclusión (2.4) con $F(t, x)$ así construida. En los puntos donde la función $f(\cdot)$ es continua el conjunto $F(t, x)$ consiste del punto $f(t, x)$, y la solución satisface la ecuación (2.3) en el sentido usual. Si el punto $(t, x) \in M$ el conjunto $F(t, x)$ es un segmento, polígono o un poliedro.

Considere el caso donde la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave S dada por la ecuación $\psi(x) = 0$. La superficie S divide al espacio x en los dominios G^+ y G^- . Para un tiempo t constante y para el punto x^* aproximándose al punto $x \in S$ desde los dominios G^+ y G^- , la función $f(t, x^*)$ tiene los valores límite

$$\lim_{x^* \in G^- \rightarrow x} f(t, x^*) = f^-(t, x), \quad (2.5)$$

$$\lim_{x^* \in G^+ \rightarrow x} f(t, x^*) = f^+(t, x). \quad (2.6)$$

Entonces el conjunto $F(t, x)$ puede representarse geoméricamente como un segmento lineal uniendo los puntos finales de los vectores $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$.

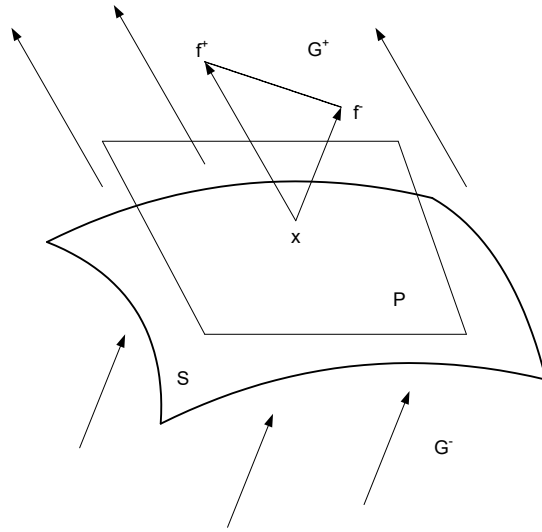


Figura 2.1: Soluciones que cruzan la superficie $S = 0$.

Si para $t_1 < t < t_2$ este segmento cae a un lado del plano P tangente a la superficie S en el punto x , la solución para este tiempo t pasa de un lado de la superficie S al otro (ver figura 2.1).

Si este segmento intersecta al plano P , el punto de intersección es el punto final de un vector $f^0(t, x)$ que determina la velocidad de movimiento $\dot{x} = f^0(t, x)$ a lo largo de la superficie S en el espacio x (ver figura 2.2). Esto significa que la función $x(t)$ que satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(t, x) \quad (2.7)$$

es una solución de la ecuación (2.2) en virtud de la definición (2.4). Si $f^0 \neq f^+$, $f^0 \neq f^-$, a tal solución se le llama *modo deslizante*.

Una solución de un sistema dinámico puede ser constante o variante en el tiempo. A las soluciones constantes se les conoce también como puntos de equilibrio, mientras que a las soluciones variantes en el tiempo también se les conoce como soluciones dinámicas.

Los puntos de equilibrio son de mucho interés en la ingeniería de control. Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (2.2) si, cuando el estado inicial del sistema x_0 es igual al punto de equilibrio, es decir, $x_0 = x^*$, entonces la solución $x = x^*$ permanece para todo tiempo futuro [9]. Los puntos de equilibrio de (2.2) son las soluciones

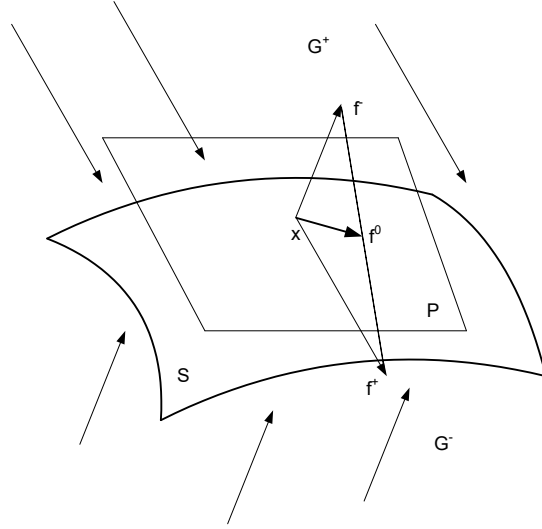


Figura 2.2: Soluciones que definen un modo deslizante

reales para x de la ecuación

$$f(t, x) = 0. \tag{2.8}$$

2.3. Estabilidad de puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov

Existen diversas definiciones de estabilidad, sin embargo, las que se utiliza en este trabajo es la estabilidad en el sentido de Lyapunov, la cual se describe en esta sección.

Sea $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio aislado del sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.9}$$

las propiedades de estabilidad de dicho equilibrio se establecen en las siguientes definiciones.

Definición 2 *El punto de equilibrio $x_0 = 0$ de (2.9) es:*

1. *Estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ que puede depender de t_0 y ε ($\delta(t_0, \varepsilon)$) tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \implies \|x(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0. \tag{2.10}$$

2. Inestable si no es estable.

Definición 3 El punto de equilibrio $x_0 = 0$ se dice ser atractivo al tiempo t_0 si, para alguna $\delta > 0$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un intervalo de tiempo finito $T(t_0, \delta, \varepsilon)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T(t_0, \delta, \varepsilon). \quad (2.11)$$

Es uniformemente atractivo en $[t_0, \infty)$ si para todo ε , que satisface $0 < \varepsilon < \delta$, el intervalo de tiempo finito es independiente del tiempo inicial t_0 .

Definición 4 (Estabilidad asintótica) Un punto de equilibrio $x_0 = 0$ es asintóticamente estable al tiempo t_0 si es estable al tiempo t_0 y si es atractivo, o equivalentemente si existe alguna $\delta > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es uniforme asintóticamente estable en $[t_0, \infty)$ si éste es uniformemente estable en $[t_0, \infty)$, y si $x = 0$ es uniformemente atractivo.

Definición 5 (Estabilidad exponencial) El punto de equilibrio $x_0 = 0$ al tiempo t_0 es exponencialmente atractivo si, para alguna $\delta > 0$ existen constantes $\alpha(\delta) > 0$ y $\beta > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \alpha(\delta) e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Es exponencialmente estable si, para alguna $\delta > 0$ existen dos números estrictamente positivos α y β tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \alpha(\delta) \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}.$$

2.3.1. Método por linealización de Lyapunov (método indirecto)

Considere el sistema autónomo (2.9) y que $f(x)$ es continuamente diferenciable. Aplicando la serie de Taylor a $f(x)$ se obtiene

$$\dot{x} = f(0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} x + O(|x|^2),$$

ya que se considera que $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un punto de equilibrio, una aproximación lineal del sistema (2.9) está dada por

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} x = Ax,$$

entonces, si la matriz A tiene todos sus valores propios en el semiplano izquierdo del plano complejo se dice que el equilibrio $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ del sistema (2.9) es asintóticamente estable, en forma local, en el sentido de Lyapunov. Si al menos un valor propio se encuentra en el semiplano derecho se dice que el equilibrio es inestable, pero si k valores propios, donde $k \leq n$, están en el eje imaginario y el resto, $n - k$, están en el semiplano izquierdo del plano complejo, entonces no se puede decir nada sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal (2.9).

2.3.2. Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es la extensión matemática de un fenómeno físico fundamental: si la energía de un sistema mecánico o eléctrico se disipa continuamente, entonces el sistema lineal o no lineal debe ir a un punto de equilibrio. Así se puede concluir la estabilidad de un sistema examinando la variación de una función escalar.

Esta teoría es bastante extensa, debido a esto aquí solo se presentan las definiciones y teoremas fundamentales de este método. Algunas referencias para un estudio más detallado son [9] y [11]

Definición 6 Una función continua $\gamma : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ es una función de clase \mathcal{K} si $\gamma(0) = 0$ y si es estrictamente monótona creciente. Se dice que es de clase \mathcal{K}_∞ si $\gamma(p) \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow \infty$.

Definición 7 Una función $V(t, x) : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ se le llama localmente definida positiva si existe una función de clase \mathcal{K} , $\gamma_1 : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$, tal que para alguna vecindad del origen $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ se cumple que

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times \mathfrak{R}^+.$$

La función $V(t, x)$ se dice localmente decreciente si existe una función de clase \mathcal{K} , $\gamma_2 :$

$\mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tal que, para alguna vecindad del origen $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ se satisface

$$V(t, x) \leq \gamma_2(\|x(t)\|), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times \mathfrak{R}^+.$$

La palabra “localmente” es reemplazada por “globalmente” si $\Omega = \mathfrak{R}^n$. La función $V(t, x)$ es radialmente no acotada si γ_1 es una función de clase \mathcal{K}_∞ .

Definición 8 Una función $V(t, x(t)) : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función candidata de Lyapunov si es continuamente diferenciable y si

1. Para concluir estabilidad, $V(t, x(t))$ es definida positiva.
2. Para concluir estabilidad asintótica o estabilidad exponencial, $V(t, x(t))$ es definida positiva y decreciente.
3. Para concluir estabilidad global, $V(t, x(t))$ es globalmente definida positiva y radialmente no acotada.
4. Para concluir estabilidad asintótica uniforme y global o estabilidad exponencial global, $V(t, x(t))$ es globalmente definida positiva, globalmente decreciente y radialmente no acotada.

Teorema 3 Considere la ecuación diferencial ordinaria (2.9) tal que, para cualquier conjunto acotado $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$ la función $f(\cdot)$ mapea $\mathcal{D} \times \mathfrak{R}^+$ a conjuntos acotados en \mathfrak{R}^n . Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov en alguna vecindad del origen $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$. Suponga que la derivada temporal de $V(t, x(t))$ a lo largo de la solución de (2.9) tiene la propiedad que, para toda $(t, x(t)) \in \Omega$ se tiene que

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\gamma_3(\|x(t)\|),$$

donde $\gamma_3(\cdot)$ es continua y no negativa, con $\gamma_3(0) = 0$. Entonces el equilibrio x_0 del sistema tiene las siguientes propiedades de estabilidad:

1. Es global o localmente uniformemente estable si γ_3 es semidefinida positiva.

2. Es uniforme y asintóticamente estable en forma global o local si γ_3 es definida positiva.
3. Es exponencialmente estable en forma local o global si $\gamma_3(\|x(t)\|) \geq \lambda V(t, x)$ para alguna constante $\lambda > 0$ o si $\gamma_i(\|x(t)\|) = \lambda_i \|x(t)\|^2$ para $i = 1, 2, 3$ y algunas constantes positivas λ_i .
4. Es exponencialmente estable en forma global o local con convergencia en tiempo finito si $\gamma_3(\|x(t)\|) \geq \lambda V(t, x)^p$ para constantes $\lambda > 0$ y $0 < p < 1$.

2.4. Estabilidad de sistemas perturbados

Considere el sistema con perturbaciones denotadas por $\xi(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x) + \xi(t, x), \quad (2.12)$$

donde $f : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $\xi : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ son funciones continuas por tramos en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, y $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Se considera al sistema (2.12) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.13)$$

En situaciones típicas no se conoce con exactitud el término $\xi(t, x)$, pero sí se conoce algo de él, como por ejemplo su cota superior $\|\xi(t, x)\|$.

Aquí se considerarán perturbaciones que se pueden escribir como un término aditivo; por ejemplo, las incertidumbres que no cambian el orden del sistema siempre pueden ser representadas en esta forma [9].

2.4.1. Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes

Se dice que una perturbación es desvanescente si $\xi(t, 0) = 0$. Suponga que $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.13), y sea $V(t, x)$

una función de Lyapunov que satisfice

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (2.15)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (2.16)$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty] \times \mathcal{D}$ y para algunas constantes positivas c_1 , c_2 , c_3 y c_4 . Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface el acotamiento de crecimiento lineal

$$\|\xi(t, x)\| \leq \sigma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (2.17)$$

donde σ es una constante positiva que satisfice

$$\sigma < \frac{c_3}{c_4}. \quad (2.18)$$

Se tiene el siguiente resultado.

Lema 1 *Sea $x_0 = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.13). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov para el sistema nominal que satisfice las condiciones (2.14) a (2.16) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$. Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisfice (2.17) y (2.18). Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema perturbado (2.12). Además, si todas las condiciones se satisfacen en forma global, entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.*

2.4.2. Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanescentes

Ahora se aborda el caso más general cuando no se sabe si $\xi(t, 0) = 0$. Bajo estas condiciones es posible que el origen $x_0 = 0$ ya no sea un equilibrio del sistema perturbado (2.12). Lo mejor que se puede esperar es que la solución $x(t)$ permanezca en una vecindad del origen, si la perturbación es pequeña en algún sentido.

Asuma que el origen del sistema nominal (2.13) es exponencialmente estable. Entonces se tiene el siguiente lema [9]

Lema 2 *Sea $x_0 = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.13). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (2.14) a (2.16) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Suponga que el término de perturbación satisface*

$$\|\xi(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r \quad (2.19)$$

para toda $t \geq 0$, toda $x \in \mathcal{D}$, y alguna constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda $\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2} r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado (2.12) satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)] \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

para algún tiempo finito T , donde

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \\ \gamma &= \frac{(1 - \theta) c_3}{2c_2}, \\ b &= \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}. \end{aligned}$$

2.5. Modelado de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de movimiento de Lagrange

Como es mencionado en [12], las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El uso de este método se complica conforme aumenta el número de articulaciones de un sistema mecánico, para estos casos se recomienda el uso de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

A razón de lo anterior, considere un mecanismo compuesto de n GDL, cuya energía

total E es la suma de sus energías cinéticas K y potencial U .

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + U(q(t))$$

donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ es el vector de posiciones generalizadas y \dot{q} , es la derivada de este, es decir, la el vector de velocidades generalizadas.

Se define el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ de un robot de n grados de libertad (n GDL) como la resta entre su energía cinética $K(q, \dot{q})$ y su energía potencial $U(q)$

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)). \quad (2.20)$$

Las ecuaciones de movimiento para un manipulador de n GDL están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau,$$

o expresadas manera equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.21)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares que son ejercidas por actuadores en cada articulación e $i = 1, \dots, n$, así como la fricción. $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de posiciones generalizadas y $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de velocidades generalizadas. Hay que aclarar que por cada GDL que tenga el robot se debe agregar una ecuación escalar dinámica.

A continuación, se presentan las cuatro etapas descritas en [12] para el modelo dinámico de manipuladores utilizando las ecuaciones de Lagrange.

1. Cálculo de la energía cinética $K(q(t), \dot{q}(t))$.
2. Cálculo de la energía potencial $U(q(t))$.
3. Cálculo del lagrangiano (2.20) $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$.
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (2.21).

El modelo matemático de un sistema lagrangiano de n grados de libertad (n GDL) es el siguiente

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + \xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q) = \tau \quad (2.22)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz centrífuga y de Coriolis, D es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, τ es el vector de pares de entrada que se considera acotado tal que produce un comportamiento acotado. Finalmente, $\xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q)$ es un vector que contiene los términos producidos por incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas y se considera acotado; $\|\xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q)\| \leq \rho$.

Para mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, que son una clase importante de sistemas lagrangianos, las matrices y vectores que forman el modelo (2.22) tienen las siguientes propiedades.

- Matriz de inercia $M(q)$

1. $M(q)$ es una matriz definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos sólo dependen de q . Su inversa $M^{-1}(q)$ existe y es definida positiva.
2. La energía cinética del sistema se define como

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

3. Existe una constante

$$\lambda_{\max} \{M(q)\} \leq \beta \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n.$$

4. Existe una constante $k'_M > 0$ tal que

$$\|M(x)y\| \leq k'_M \|y\|$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$.

- Matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$

1. La matriz $C(q, \dot{q})$ puede ser no única, pero el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es único.
2. $C(q, 0) = 0$ para todo vector $q \in \mathfrak{R}^n$.
3. Para todo vector $q, x, y, z \in \mathfrak{R}^n$ y escalar α , se tiene que

$$\begin{aligned} C(q, x)y &= C(q, y)x, \\ C(q, z + \alpha x)y &= C(q, z)y + \alpha C(q, x)y. \end{aligned}$$

4. Existe una constante $K_{C_1} > 0$ tal que

$$\|C(q, x)y\| \leq K_{C_1} \|x\| \|y\|$$

para todo $q, x, y \in \mathfrak{R}^n$.

5. Existen constantes k_{C_1} y k_{C_2} tales que

$$\|C(q, z)w - C(y, v)w\| \leq k_{C_1} \|z - v\| \|w\| + k_{C_2} \|x - y\| \|w\| \|z\|$$

para todo vector $v, x, y, z, w \in \mathfrak{R}^n$.

6. La matriz $C(q, \dot{q})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(q)$ por la expresión

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0,$$

y además

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, q)^T.$$

- Vector de pares gravitacionales $G(q)$

1. El vector $G(q)$ es Lipschitz, es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|G(x) - G(y)\| \leq k_g \|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$.

2. Existe una constante k' tal que

$$\|G(q)\| \leq k'$$

para todo $q \in \mathfrak{R}^n$.

■ Dinámica residual $h(t, e, \dot{e})$

La dinámica residual $h(t, e, \dot{e})$ se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h(t, e, \dot{e}) = & [M(q) - M(q - e)] \ddot{q} + [C(q, \dot{q}) - C(q - e, \dot{q} - \dot{e})] \dot{q} + \\ & G(q) - G(q - e). \end{aligned}$$

El vector de dinámica residual depende de e , \dot{e} , así como de q , \dot{q} y \ddot{q} que se suponen acotadas.

1. Existen constantes k_{h_1} y k_{h_2} mayores que cero tal que la norma de la dinámica residual cumple con

$$\|h(t, e, \dot{e})\| \leq k_{h_1} \|\dot{e}\| + k_{h_2} \|f(e)\|$$

para todo $e, \dot{e} \in \mathfrak{R}^n$, donde $f(e)$ es la función tangente hiperbólica vectorial definida como

$$f(e) = \left[\tanh(e_1) \quad \dots \quad \tanh(e_n) \right]^T.$$

■ Linealidad en parámetros

1. Para todo $u, v, w \in \mathfrak{R}^n$

$$M(q)u + C(q, w)v + g(q) = \Phi(q, u, v, w)\theta + \kappa(q, u, v, w)$$

donde $\kappa(q, u, v, w)$ es un vector de $n \times 1$, $\Phi(q, u, v, w)$ es una matriz de $n \times m$ y el vector $\theta \in \mathfrak{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros del mecanismo.

2. Si $q, u, v, w \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(q, u, v, w) \in L_\infty^{n \times m}$

2.6. Definición de un observador de estado robusto para sistemas mecánicos

Uno de los principales problemas en la implementación de controladores basados en retroalimentación de estados es que, por lo general, no se dispone del vector de estado completo. Esto se debe principalmente a que no todos los estados se pueden medir o a que la instalación de sensores para su medición resulta muy cara, o porque las variables de estado no son señales, es decir, no se pueden medir.

Este problema se puede resolver usando observadores de estado; actualmente estos sistemas tienen la finalidad de estimar las variables de estado necesarias para la realización del controlador, estimar perturbaciones, identificar fallas y estimar parámetros.

Uno de los observadores más usados es el llamado observador de Luenberger que, en un principio, fue diseñado solamente para sistemas lineales [13]. Actualmente hay varias versiones de este observador para su aplicación a sistemas no lineales.

El observador de Luenberger tiene buen desempeño cuando el modelo de la planta es más o menos exacto. Idealmente, se necesita un modelo exacto de la planta para aplicar este esquema; sin embargo, la presencia de perturbaciones hace que la estimación del estado sea errónea y de esta manera se degrada el desempeño del controlador.

En esta sección se presenta una nueva opción para el diseño de un observador robusto para sistemas lagrangianos de n GDL, el cual es tomado de [14]. El observador se basa en el esquema de Luenberger para sistemas no lineales, al que se agrega un término discontinuo en la retroalimentación, lo que produce un sistema con estructura variable en el espacio del error.

En el análisis de estabilidad se basa en los resultados presentados en [15] y [16] en donde se presenta un análisis de estabilidad en sistemas con estructura variable en donde cada estructura tiene al origen como punto de equilibrio. En la primera sección de la sección se presenta una extensión de este resultado a sistemas con estructura variable en donde las estructuras no tienen al origen como equilibrio y además existen perturbaciones no desvanescentes.

El resultado es un observador que garantiza convergencia exponencial al estado de

la planta a pesar de la presencia de variaciones paramétricas y perturbaciones externas acotadas. Además, el sistema en lazo cerrado presenta un modo deslizante de segundo orden y el control equivalente está dado por los términos de perturbación; por lo tanto se pueden identificar con este observador.

El control equivalente puede verse como el promedio de los términos de alta frecuencia presentes en los términos discontinuos cuando las trayectorias llegan a la superficie de discontinuidad, por lo que puede ser recuperado filtrando dichos términos [17].

El desempeño del observador se ilustra con resultados experimentales en lazo abierto. El observador puede ser utilizado en la realización de varios controladores; como se muestra en la última sección del capítulo en donde se propone una estructura de control que utiliza el observador para estimar las perturbaciones existentes en la planta y así obtener un sistema en lazo cerrado con buenas propiedades de robustez.

2.6.1. Estabilidad de un sistemas de segundo orden con estructura variable

Considere el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c \operatorname{sign}(z_1), \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde a y b son constantes positivas, $\xi(t)$ es una perturbación externa acotada

$$|\xi(t)| \leq \rho,$$

ρ es una constante, c es un parámetro de control, y $\operatorname{sign}(\cdot)$ es la función signo. Defina una matriz A de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

y una matriz P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

que es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + PA = -I$, donde I es la matriz identidad. Las propiedades de estabilidad del sistema (2.23) se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 4 *Para el sistema (2.23), si*

$$c > \frac{2a\rho}{\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^3(P)}{\lambda_{\min}(P)}},$$

para algún $0 < \theta < 1$, $\lambda_{\max}(P)$ y $\lambda_{\min}(P)$ son los valores propios máximo y mínimo de la matriz P . Entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

Demostración 1 *La demostración se divide en dos partes; primero se define un sistema nominal con $\xi(t) = 0$, y se prueba estabilidad exponencial del origen usando herramientas para sistemas con estructura variable. Después de esto, se encuentran las condiciones sobre c tal que las propiedades de estabilidad se mantengan para el sistema perturbado.*

El sistema nominal de (2.23) está definido por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 - c \operatorname{sign}(z_1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

El sistema (2.26) tiene dos estructuras: S_1 para $z_1 > 0$,

$$S_1 : \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 - c, \end{aligned}$$

y S_2 para $z_1 < 0$

$$S_2 : \begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -av_1 - bv_2 + c. \end{aligned}$$

Cada estructura tiene un punto de equilibrio; para S_1 su equilibrio es $\bar{z}_{S_1} = (-c/a, 0)$ y para S_2 es $\bar{z}_{S_2} = (c/a, 0)$. Note que estos equilibrios se ubican en la región donde la dinámica del sistema está dada por la otra estructura (S_2 para \bar{z}_{S_1} , S_1 para \bar{z}_{S_2}).

Cada punto de equilibrio es exponencialmente estable con las siguientes funciones de Lyapunov:

Para S_1

$$V_{S_1}(z) = z^T P z + 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (2.27)$$

$$\dot{V}_{S_1}(z) = -z^T z - 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (2.28)$$

y para S_2

$$V_{S_2}(z) = z^T P z - 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (2.29)$$

$$\dot{V}_{S_2}(z) = -z^T z + 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (2.30)$$

donde $\gamma = \begin{bmatrix} c/a & 0 \end{bmatrix}^T$.

Aplicando el criterio dado en [17] para probar la existencia de modos deslizantes se concluye que la superficie de discontinuidad dada por $z_1 = 0$ no es una superficie deslizante.

Note también que las soluciones cruzan la línea $z_1 = 0$ del cuadrante II al cuadrante I, y del cuadrante IV al cuadrante III.

Ahora considere las funciones $V_{S_1}(z)$, $V_{S_2}(z)$ y sus derivadas. Estas funciones se intersectan en el origen y toman el valor $V_{S_i}(0) = (c/a)^2 p_{11}$, para $i = 1, 2$. Defina dos vecindades del origen, Ω_ε con radio $\varepsilon > 0$, y Ω_β que se define de la siguiente forma

$$\Omega_\beta = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\Omega_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 \geq 0, V_{S_1}(v) \leq \beta\},$$

$$\Omega_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 < 0, V_{S_2}(v) \leq \beta\},$$

donde $\beta > (c/a)^2 p_{11}$. Finalmente, defina una vecindad Ω_δ con radio $\delta < \varepsilon$ (δ puede depender de ε y β ; $\delta(\varepsilon, \beta)$) tal que $\Omega_\delta \subset \Omega_\beta$.

Defina un conjunto de tiempos $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots\}$, en estos tiempos se presentan las conmutaciones de estructura. Se asume que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ donde t_0 es el tiempo inicial.

Si $\|z(t_0)\| < \delta$ y $z(t_0) \in \Omega_k \subset \Omega_\beta$ para alguna $k = 1, 2$ (la k -ésima estructura está activa), entonces el primer cambio de estructuras se presenta en t_1 , y debido a que $\dot{V}_{S_k} < 0$, se tiene que $\|z(t_0)\| > \|z(t_1)\|$, entonces $V_{S_k}(z(t_0)) > V_{S_k}(z(t_1))$. Ahora $z(t_1)$ es la condición inicial para la siguiente estructura.

La segunda conmutación se presenta en t_2 ; el sistema pasa de Ω_{k+1} a Ω_k y $\|z(t_1)\| > \|z(t_2)\|$, $V_{S_{k+1}}(z(t_1)) > V_{S_{k+1}}(z(t_2))$. En cada instante de tiempo donde se presenta una conmutación $z_1 = 0$; por lo tanto $z_2(t_1) > z_2(t_2)$, y la condición inicial para la siguiente estructura es $(0, z_2(t_2))$. Este fenómeno se presenta para todo $t_i \in T$ por lo que se puede concluir que $V_{S_k}(z(t_j)) > V_{S_k}(z(t_{j+2}))$, es decir, el valor de cada función de Lyapunov disminuye cada que su estructura sale de operación.

Entonces las secuencias $W_1 = \{V_{S_k}(t_1), V_{S_k}(t_3), \dots\}$ y $W_2 = \{V_{S_{k+1}}(t_2), V_{S_{k+1}}(t_4), \dots\}$ son estrictamente decrecientes y convergen a $(c/a)p_{11}$, y también se satisface que $\|z(t_{i+1})\| < \|z(t_i)\| < \dots < \|z(t_0)\| < \delta < \varepsilon \forall t > t_0, \forall i$.

Para todo $\varepsilon > 0$ y $\beta > (c/a)^2 p_{11}$ se puede encontrar una constante δ tal que las trayectorias iniciando en Ω_δ permanecerán en la vecindad Ω_ε para todo $t \geq t_0$. De esta manera, el origen es estable en el sentido de Lyapunov.

Para demostrar estabilidad asintótica es suficiente notar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_k}(t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_{k+1}}(t_i) = \frac{c}{a} p_{11},$$

éste es el valor que toman ambas funciones de Lyapunov en el origen, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Para demostrar estabilidad exponencial note que la solución en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1)$ decrece en forma exponencial debido a la estabilidad exponencial del equilibrio de cada estructura. Cuando el sistema cambia de estructura, la solución mantiene su constante de tiempo porque ambas estructuras tienen la misma matriz A , por lo tanto, $\|v(t)\|$ en los

intervalos de tiempo $[t_i, t_{i+1})$ estará por debajo de la función exponencial que domina a la solución en el intervalo $[t_0, t_1)$; entonces el origen es exponencialmente estable.

Finalmente, para demostrar que este resultado es global, note que el punto de equilibrio de cada estructura es exponencialmente estable en forma global, lo que implica que las propiedades que se mencionaron anteriormente se mantienen para cualquier condición inicial.

Ahora se analiza el sistema perturbado (2.23). Considere la estructura S_1 (el análisis para la estructura S_2 es similar),

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c,\end{aligned}\tag{2.31}$$

y el cambio de variables $w_1 = z_1 + c/a$ y $w_2 = z_2$. La dinámica del sistema (2.31) en el nuevo espacio de estado está dado por

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -aw_1 - bw_2 + \xi(t),\end{aligned}$$

o en forma simplificada

$$\dot{w} = Aw + g,$$

donde $g = \begin{bmatrix} 0 & \xi(t) \end{bmatrix}^T$.

Se propone la función de Lyapunov

$$V(w) = w^T Pw,$$

donde las matrices A y P se definen por (2.24) y (2.25) respectivamente. La derivada de

V está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(w) &= -w^T w + 2w^T P g \\ &\leq -\|w\|^2 + 2|w^T P g| \\ &\leq -\|w\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|w\|\rho.\end{aligned}$$

Debido a que $a > 0$ y $b > 0$, se puede aplicar el Lema 13 de [9], y concluir que, para todo $\|w(t_0)\| > \tilde{\mu}$ la solución $w(t)$ satisface

$$\|w(t)\| \leq k \exp(-\gamma(t - t_0)) \|w(t_0)\| \quad \forall t_0 \leq t < t_0 + t_f,$$

y

$$\|w(t)\| \leq \tilde{\mu} \quad \forall t \geq t_0 + t_f,$$

donde t_f es un tiempo finito, y

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \\ \gamma &= \frac{(1 - \theta)}{2\lambda_{\max}(P)}, \\ \tilde{\mu} &= 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\rho}{\lambda_{\min}(P)\theta}},\end{aligned}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$. Esta parte muestra que la bola de radio $\tilde{\mu}$, con centro ubicado en $(-c/a, 0)$, es un atractor para la estructura S_1 , denotado por B_{S_1} .

Similarmente, las trayectorias de la estructura S_2

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) + c,\end{aligned}$$

convergen a la bola B_{S_2} de radio $\tilde{\mu}$ centrada en $(c/a, 0)$. De esta manera, cada estructura del sistema perturbado tiene un atractor (una bola) de radio $\tilde{\mu}$, simétricamente localizadas sobre el eje z_1 y a una distancia $r = c/a$ del origen. Si esta distancia es mayor que $\tilde{\mu}$, es

decir, si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho}{\theta}\right), \quad (2.32)$$

entonces los dos atractores B_{S_1} y B_{S_2} no se intersectan, y el comportamiento de la solución del sistema perturbado será cualitativamente igual al comportamiento del sistema nominal. De esta manera, el origen del sistema perturbado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

2.6.2. Diseño del observador de estado

Considere un sistema Lagrangiano de n grados de libertad definido por

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t) &= \tau, \\ y &= q, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta$ contiene los términos producidos por variaciones en los parámetros θ ; $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ es una matriz con dimensión $n \times m$ y θ es un vector con dimensión $m \times 1$. $\gamma(t) \in \mathfrak{R}^n$ es un vector de perturbaciones externas que se considera acotado, $\tau \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de fuerzas generalizadas de entrada y y es la salida del sistema.

Definiendo las variables de estado $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, la representación del sistema (2.33) en variables de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2) + g(x_1) + \xi(\cdot) + M^{-1}(x_1)\tau \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$y = x_1, \quad (2.35)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= -M^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2, \\ g(x_1) &= -M^{-1}(x_1) G(x_1), \\ \xi(\cdot) &= -M^{-1}(x_1) (\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta + \gamma(t)). \end{aligned}$$

Se asume que el vector de entrada τ y de perturbación $\gamma(t)$ son acotados tal que el comportamiento del sistema (2.34-2.35) es acotado.

Se propone el siguiente observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ f(\hat{x}) + g(x_1) + M^{-1}(\cdot) \tau \end{bmatrix} + H(y - \hat{y}), \quad (2.36)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (2.37)$$

donde el vector $H(y - \hat{y})$ tiene la forma siguiente

$$H(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y - \hat{y}) \\ C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son matrices diagonales definidas positivas.

Para encontrar las condiciones sobre las matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que el sistema (2.36-2.37) sea un observador para el sistema (2.34-2.35) se definen las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, la dinámica de estas variables está dada por el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - C_1 e_1 \\ f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Debido a que la función $f(\cdot)$ es Lipschitz, se tiene que

$$\|f(x) - f(x - e)\| \leq \rho_1 \|e\|$$

donde ρ_1 es una constante positiva. De esta manera se puede definir un nuevo término de

perturbación $\Psi(\cdot)$

$$\Psi(\cdot) = f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot)$$

que está acotado de la siguiente forma

$$\|\Psi(\cdot)\| = \|f(x) - f(\hat{x}) + \xi(\cdot)\| \leq \rho_0 + \rho_1 \|e\|. \quad (2.40)$$

Lema 3 *Para el sistema (2.39) es posible encontrar un conjunto de matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que el origen del espacio del error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. Entonces el sistema definido por (2.36) y (2.37) es un observador para el sistema definido por (2.34) y (2.35).*

Demostración 2 *Se hace el cambio de variables*

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1, \\ v_2 &= e_2 - C_1 e_1 \rightarrow e_2 = v_2 + C_1 e_1. \end{aligned}$$

La dinámica del sistema (2.39) en el nuevo espacio de coordenadas está dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -C_2 v_1 - C_1 v_2 + \Psi(\cdot) - C_3 \text{sign}(v_1). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Este sistema es un conjunto de subsistemas con la forma (2.23). Sea $\rho_1 < 1/(2\lambda_{\max}(P))$, donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov para cada subsistema. Aplicando el teorema 4 termina la prueba.

Las condiciones para el diseño de cada elemento $c_{i,j}$ de las matrices C_i , $i = 1, 2, 3$, son las siguientes:

Las constantes $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ y $c_{3,i}$ deben elegirse tal que

$$\rho_1 < 1/(2\lambda_{\max}(P)), \quad (2.42)$$

$$c_{3,i} > \frac{2c_{2,i}\rho_0}{\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^3(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad (2.43)$$

donde la matriz P y la constante θ se han definido en (2.24) y (2.25), respectivamente.

2.6.3. Identificación de perturbaciones

El sistema (2.41) tiene una superficie de discontinuidad en $v_1 = 0 \in \mathfrak{R}^n$ y el término $C_3 \text{sign}(v_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden [18]; es decir, el control (término discontinuo $C_3 \text{sign}(v_1)$) aparece hasta la segunda derivada de la superficie de discontinuidad

$$\ddot{v}_1 = f(x) - f(\hat{x}) + \xi(\cdot) - C_2 v_1 - C_1 v_2 - u_{eq}.$$

Entonces, el control equivalente se presenta en $v_1 = v_2 = 0$, que es equivalente a $e_1 = e_2 = 0$ e implica $x = \hat{x}$; de esta manera el control equivalente está dado por

$$\begin{aligned} u_{eq} &= \xi(\cdot) \\ &= -M^{-1}(\cdot) (\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta + \gamma(t)) \end{aligned}$$

entonces

$$\Sigma(\cdot) \equiv -M(\cdot) u_{eq} = \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta + \gamma(t).$$

Como se ve de la expresión anterior, el control equivalente está formado por los términos de perturbación, y como es bien conocido, el control equivalente es el promedio del término $C_3 \text{sign}(z_1)$ cuando las trayectorias llegan al origen. En este caso, la convergencia a la superficie de discontinuidad es en forma exponencial, de esta manera se pueden aproximar los términos de perturbación en forma asintótica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{sign}(z_1(t))} = u_{eq},$$

donde $\overline{C_3 \text{sign}(z_1(t))}$ indica el promedio.

Si el término $\xi(\cdot)$ no depende de variaciones paramétricas,

$$\xi(\cdot) = \gamma(t),$$

el término de perturbaciones externas $\gamma(t)$ puede identificarse directamente a partir del control equivalente,

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(t) &= -M(\cdot) u_{eq} \\ &= -M(\cdot) \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{sign}(y(t) - \hat{y}(t))}\end{aligned}$$

Capítulo 3

Definición de controladores

3.1. Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

El controlador Proporcional Integral Derivativo, también conocido como PID, es el controlador más usado en procesos industriales debido al buen desempeño que se alcanza en diferentes aplicaciones sin la necesidad de tener un modelo de la planta. Sin embargo, en su forma estándar, solo puede resolver el problema de regulación, pero existen muchas variantes de este controlador para resolver otros objetivos de control en diferentes familias de sistemas, ver por ejemplo [12]. Las formas más comunes del controlador PID son las siguientes:

- PID en su forma estándar

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt},$$

donde $e(t) = y_r - y(t)$, y_r es una referencia constante y $y(t)$ es la salida del sistema. k_p , k_i y k_d son las ganancias del controlador.

- PID en su forma de constantes de tiempo

$$u(t) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right),$$

al igual que en el caso anterior $e(t) = y_r - y(t)$, y_r es una referencia constante y $y(t)$

es la salida del sistema. En este caso los parámetros que permiten la sintonización del controlador son la ganancia k_p y las constantes de tiempo T_i y T_d .

- PID para sistemas mecánicos de $nGDL$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \dot{e}(t) + K_d z(t)$$

$$\dot{z}(t) = e(t)$$

en este caso K_p , k_i y k_d son matrices cuadradas, diagonales, de dimensión n , donde n es el número de grados de libertad del sistema mecánico.

Como se ha mencionado previamente, lo más atractivo de este controlador es su buen desempeño sin la necesidad de un modelo de la planta pero, para lograr esto, es necesario un proceso de sintonización de las ganancias que puede volverse complejo e inclusive que pueden representar un riesgo para la planta. Existen diferentes métodos de sintonización de un PID; basadas en datos experimentales de la planta en lazo cerrado, heurísticas y numéricas, dentro de estas últimas se encuentra la herramienta de auto-sintonizado (auto-tuning) de Matlab, la cual utilizaremos en este trabajo de tesis. Esta técnica permite sintonizar las ganancias de un PID en forma recursiva hasta obtener la mejor respuesta para un conjunto de criterios particulares, sin embargo, para poder utilizarla, se necesita un modelo nominal de la planta.

3.2. Estructura de control con compensación activa de perturbaciones

Uno de los principales problemas de control es el diseño de controladores que sean robustos a perturbaciones externas, dinámicas no modeladas, y a variaciones paramétricas. Las técnicas de control discontinuo son una buena opción para la solución de estos problemas, como el control por modos deslizantes, logrando sistemas en lazo cerrado con buenas propiedades de robustez.

Sin embargo, una característica que se ha cuestionado mucho en este tipo de controla-

dores es que la entrada de control a la planta presenta componentes de alta frecuencia lo cual, en la práctica, puede causar problemas de desgaste en los actuadores y vibraciones en el estado de la planta, llamado *chattering*. Este problema tiene mayores efectos en sistemas mecánicos, en donde las componentes de alta frecuencia aumentan la temperatura en los motores y producen desgaste, disminuyendo su vida útil.

En esta sección se presenta una estructura de control que permite al sistema en lazo cerrado tener propiedades de robustez similares a un sistema de control discontinuo, pero aplicando una acción de control suave. Esta característica se logra incorporando el observador discontinuo presentado en las secciones anteriores.

3.2.1. Estructura de control

La figura 3.1 muestra el diagrama a bloques de la estructura de control que contiene la planta a controlar que es un sistema lagrangiano y un observador robusto dado por las ecuaciones (2.36-2.38) con un filtro para identificar las perturbaciones de la planta definido por

$$\dot{x}_f = \Gamma x_f + \Gamma (C_3 \text{sign}(y - \hat{y})),$$

donde $x_f \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado del filtro y Γ es una matriz cuadrada, diagonal y definida positiva con dimensión n . El controlador puede ser alguno de los controladores bien conocidos en la literatura y, si requiere del vector de velocidades de la planta, éste puede ser tomado del observador. Aquí se considera un controlador muy sencillo que puede verse como un controlador linealizante por retroalimentación de estado al que se le agrega un término de compensación de perturbaciones; el objetivo es el seguimiento de la trayectoria $q_r \in \mathfrak{R}^n$ con derivadas \dot{q}_r y \ddot{q}_r . El controlador está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tau = & M(q) (-x_f - f(q, \hat{x}_2) - g(q) - K_p(q - q_r) \\ & - K_v(\hat{x}_2 - \dot{q}_r) + \ddot{q}_r), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde K_p y K_v son matrices diagonales, definidas positivas.

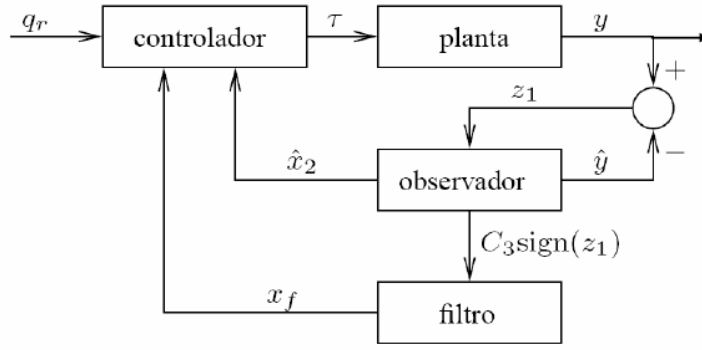


Figura 3.1: Diagrama a bloques de la estructura de control con identificación de perturbaciones.

3.2.2. Estabilidad de la la estructura de control con compensación activa de perturbaciones

Para demostrar que el sistema en lazo cerrado satisface el objetivo de control se sustituye la entrada de control en los sistemas en la planta y en el observador, resultando en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x) - f(x_1, \hat{x}_2) + \xi(\cdot) + \mathcal{K} + \ddot{q}_r \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + C_1(y - \hat{y}) \\ \mathcal{K} + C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{K} = -x_f - K_p(x_1 - q_r) - K_v(\hat{x}_2 - \dot{q}_r) + \ddot{q}_r$.

Ahora se definen las variables de error entre el estado de la planta y la referencia y sus derivadas $e_1 = q - q_r$ y $e_2 = \dot{q} - \dot{q}_r$. La dinámica de estas variables está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -K_p e_1 - K_v e_2 + f(x) - f(x_1, \hat{x}_2) + \xi(\cdot) \\ &\quad - x_f + K_v z_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde z_2 es el error entre el vector de velocidades reales y las observadas. También se

definen variables de error entre las variables de estado de la planta y las variables de estado del observador $z_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $z_2 = x_2 - \hat{x}_2$. La dinámica de estas variables está dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - C_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= f(x) - f(x_1, \hat{x}_2) + \xi(\cdot) - C_2 z_1 - C_3 \text{sign}(z_1).\end{aligned}\tag{3.5}$$

A partir de los resultados presentados en las secciones anteriores se puede encontrar un conjunto de matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que las trayectorias del observador convergen exponencialmente a las trayectorias de la planta, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(x_1, z_2 + \hat{x}_2) - f(x_1, \hat{x}_2) + \xi(\cdot) - x_f + K_v z_2\| = 0$$

con una razón de decrecimiento exponencial. De esta manera se puede encontrar un conjunto de matrices K_p y K_v tal que el origen del sistema (3.4) sea un punto de equilibrio asintóticamente estable. Para una descripción más detallada de la estructura de control puede consultar [19].

Capítulo 4

Sistema Masa Resorte Amortiguador

4.1. Descripción del prototipo y modelo dinámico

El sistema masa resorte amortiguador (MRA) es un sistema mecánico conformado por una masa m , la cual se mueve libremente por una superficie horizontal sobre una línea recta, y a ella están sujetos un resorte y un amortiguador. La posición de la masa m se denomina por la función $x(t)$, que por simplicidad, a lo largo del documento se escribirá como x . Se asume que, tanto el desplazamiento x como la fuerza externa u , son positivos en la dirección indicada por las respectivas flechas del diagrama mostrado en la figura 4.1.

En la figura 4.2 se muestra el sistema mecánico MRA que fue utilizado en este proyecto, el cual está compuesto de un motor de corriente continua sin brochas, acoplado a un mecanismo capaz de transformar el movimiento rotativo del motor a un movimiento lineal que es conectado a una "varilla", la cual cuenta con un resorte sujeto uno de sus extremos. El otro extremo del resorte se encuentra sujeto a la masa. A su vez, la masa cuenta con un acoplamiento a un amortiguador, el cual puede ser ajustado a través de una válvula de aire. El movimiento de la masa x es medido a través de un encoder incremental colocado a un costado, el cual se acopla a otro mecanismo. Y por último, se cuenta con otro mecanismo que se acopla a la masa y que tiene la función de generar perturbaciones externas utilizando un motor de corriente directa.

El modelado de sistemas mecánicos, como el MRA, se lleva a cabo utilizando las ecuaciones de movimiento de Lagrange o a través de la segunda ley de Newton, debido a que

este sistema no es complejo, se utiliza la segunda opción.

$$\Sigma F = m\ddot{x},$$

donde ΣF es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la masa; la fuerza que genera el resorte es

$$F_k = kx,$$

donde k es la constante de elasticidad del resorte, la fuerza generada por el amortiguador es

$$F_\delta = \delta v,$$

donde δ es la constante de fricción viscosa y $v = \dot{x}$ es la velocidad con la que se desplaza la masa. En base a la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación

$$m\ddot{x} = u - kx - \delta\dot{x}.$$

Se definen las variables de estado como $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}_1$ y se obtiene la representación en variables de estado en relación con la ecuación de movimiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(u - kx_1 - \delta x_2) \\ x &= x_1\end{aligned}$$

Por otro lado, la función de transferencia asociada a este mecanismo es

$$\frac{X(S)}{U(S)} = F(S) = \frac{\frac{1}{m}}{S^2 + \frac{\delta}{m}S + \frac{k}{m}} = \frac{a}{s^2 + bs + c}.$$

Para obtener los parámetros a , b y c del mecanismo MRA utilizado se realizó un proceso de identificación de planta. El proceso consistió en someter al sistema a entradas tipo escalón de diferente magnitud y registrar la posición en centímetros con respecto al tiempo

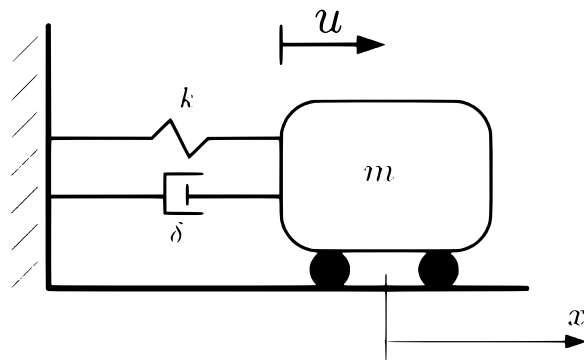


Figura 4.1: Representación esquemática de un masa resorte amortiguador.

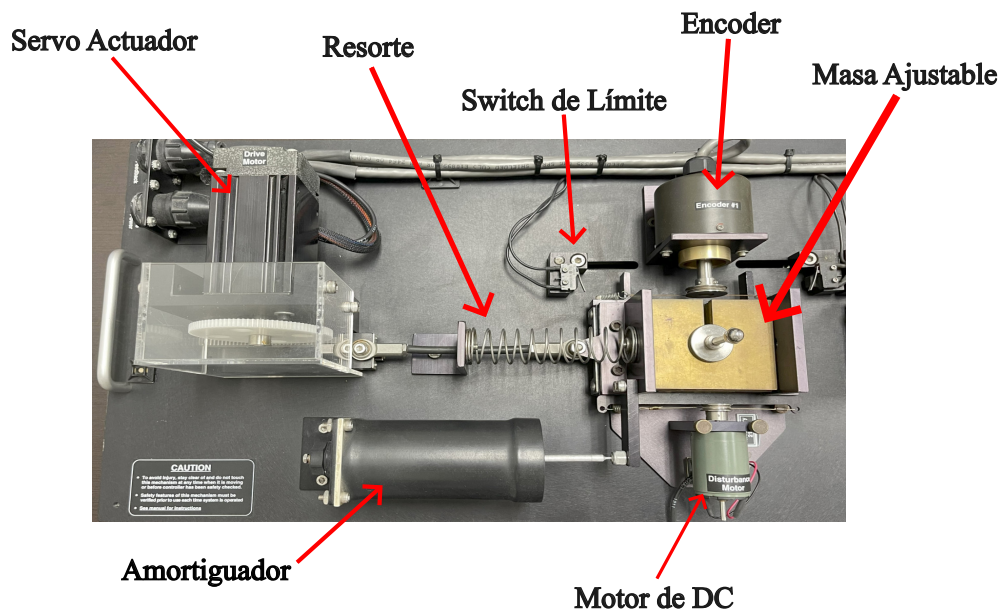


Figura 4.2: Sistema mecánico utilizado en los experimentos.

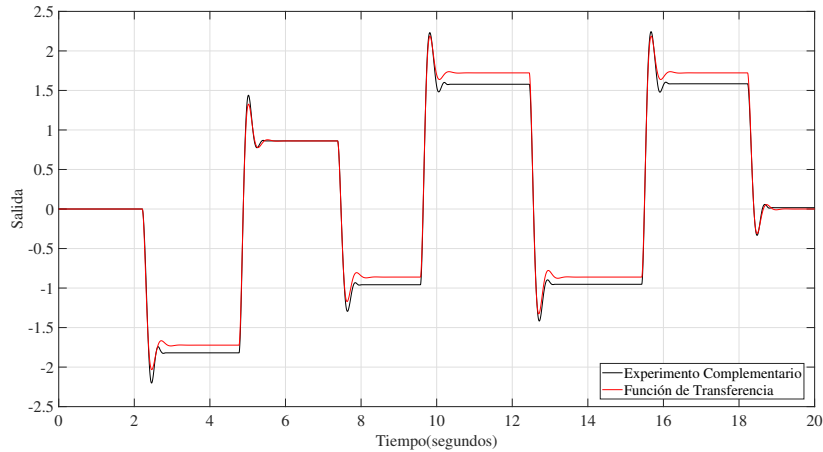


Figura 4.3: Validación del modelo identificado del mecanismo Masa Resorte Amortiguador.

que tomó al recibir la entrada. Este proceso resultó en la realización de once experimentos, los cuales fueron elaborados utilizando la plataforma dSPACE 1103 y MATLAB.

Con los datos capturados y utilizando la herramienta *tfest*, perteneciente a MATLAB, la cual puede ser capaz de proveer una función de transferencia estimada, especificando el número de polos y el número de ceros, se obtuvo una función de control a salida aproximada del sistema con dos polos y cero ceros [20], la cual funge como un modelo matemático que sirve como representación de nuestro sistema MRA se puede escribir como

$$G(s) = \frac{173.9}{s^2 + 13.62s + 202}, \quad (4.1)$$

Una vez determinada la función de transferencia se utilizó el comando *lsim* de MATLAB con el propósito de validar el sistema representado por la función de transferencia y un experimento adicional, como resultado, podemos observar en la Figura 4.3, el comportamiento del sistema siendo simulado y validado a través de la función *lsim*, se asemejaba a la respuesta del experimento adicional, la línea en color negro corresponde a la salida experimental, mientras que la línea de color rojo corresponde a la salida del modelo, como se puede observar son muy parecidas. Es importante señalar que no es necesario conocer con mucha precisión los parámetros del modelo matemático de nuestro sistema ya que los algoritmos de control que se implementarán tienen cierto grado de robustez.

4.2. Diseño y aplicación de la estructura de control ADRC

En esta sección, se presenta el desempeño de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones (ADRC) en el mecanismo masa resorte amortiguador. Considere el modelo matemático del sistema MRA en su representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 - bx_2 + c(u + \gamma(t)), \\ y &= x_1\end{aligned}$$

donde a , b , y c representan los parámetros de la planta nominal que se desea controlar, $\gamma(t)$ representa una perturbación generada por fuerzas externas o/y por términos producidos por incertidumbre paramétricas, este término se considera acotado, es decir $\gamma(t) < |\delta|$.

Para estimar su velocidad y el término de perturbaciones se diseña un observador de estado dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + L_1(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -a\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 + cu + L_2(y - \hat{y}) + L_3 \text{sign}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}_1.\end{aligned}$$

Para demostrar el desempeño del observador se definen las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - L_1e_1 = e_2 - L_1e_1, \\ \dot{e}_2 &= -ax_1 - bx_2 + cu + c\gamma(t) + a\hat{x}_1 + b\hat{x}_2 - cu - L_2(e_1) - L_3 \text{sign}(e_1),\end{aligned}$$

al reordenar términos se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - L_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -a e_1 - b e_2 - L_2 e_1 - L_3 \text{sign}(e_1) + c\gamma(t).\end{aligned}$$

Ahora, se realiza un cambio de variable $z_1 = e_1$ y $z_2 = e_2 - L_1 e_1$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \dot{e}_2 - L_1 \dot{e}_1, \\ &= -(a + L_2)e_1 - b e_2 - L_3 \text{sign}(e_1) + c\gamma(t) - L_1 z_2,\end{aligned}$$

reordenando términos se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -(a + L_2)z_1 - b(z_2 + L_1 z_1) - L_3 \text{sign}(z_1) + c\gamma(t).\end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento presentado en [14] se puede demostrar que este sistema presenta un modo deslizante de segundo orden, donde el control equivalente u_{eq} está dado por

$$u_{eq} = c\gamma(t)$$

por lo que se debe de dividir por la constante c para estimar la perturbación en el sistema, es decir, un estimado de las perturbaciones $\tilde{\gamma}(\cdot)$ está dado por

$$\tilde{\gamma}(\cdot) = \frac{u_{eq}}{c} \tag{4.2}$$

El objetivo de control para seguimiento de trayectorias se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1 - x_r(t)| = 0,$$

entonces, la señal de error respecto a la posición está descrita por

$$e_1 = x_1 - x_r(t),$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -ae_1 - be_2 - ax_r(t) - b\dot{x}_r(t) - \ddot{x}_r(t) + c(u + \gamma(\cdot)), \end{aligned}$$

y se propone la ley de control $u(t)$

$$u = \frac{1}{c}(ax_r(t) - b\dot{x}_r(t) + \ddot{x}_r(t) - k_1e_1 - k_2e_2 - u_{eq}),$$

sustituyendo el control en la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -(a + k_1)e_1 - (b + k_2)e_2 + (\gamma(\cdot) - \tilde{\gamma}(\cdot)). \end{aligned}$$

Idealmente $\gamma(\cdot) - \tilde{\gamma}(\cdot) = 0$, por lo que el origen del sistema del error es exponencialmente estable, por lo que el problema queda resuelto. Sin embargo, en la práctica, $\gamma(\cdot) - \tilde{\gamma}(\cdot) \approx 0$, por lo que las trayectorias permanecen en una región pequeña al rededor del origen, lo que produce un pequeño error en el seguimiento de trayectorias.

4.3. Diseño de un controlador PID

Partiendo nuevamente del modelo matemático del sistema MRA en su representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 - bx_2 + c(u + \gamma(t)), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

donde a , b , y c representan los parámetros de la planta nominal que se desea controlar. El objetivo de control para seguimiento de trayectorias se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_r(t) - x_1| = 0,$$

entonces, la señal de error respecto a la posición está descrita por

$$e_1 = x_r(t) - x_1,$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -a(e_1 - x_r) - b(e_2 - \dot{x}_r) + \ddot{x}_r - c(u + \gamma(t)),\end{aligned}$$

por lo que se propone la ley de control $u(t)$ del tipo PID en su forma de variables de estados y que contiene términos que dependen de $x_r(t)$ y $\dot{x}_r(t)$ para su compensación en la planta, la cual está dada por

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{c} [ax_r + b\dot{x}_r - k_p e_1 - k_d e_2 - k_i w + \ddot{x}_r], \\ \dot{w} &= e_1,\end{aligned}$$

Al sustituir la ley de control en el sistema creado en términos de la dinámica del error se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -(a + k_p)e_1 - k_d e_2 - k_i w - c\gamma(t) \\ \dot{w} &= e_1,\end{aligned}$$

De esta última expresión se puede ver que el sistema nominal, definido con $\gamma(y) = 0$ tiene al origen como punto de equilibrio exponencialmente estable con una adecuada selección de las ganancias k_p , k_i y k_d . Sin embargo, debido a que en general la perturbación depende del tiempo, entonces no se puede garantizar que el origen siga siendo un equilibrio del sistema perturbado, solo se puede garantizar que las trayectorias convergen, en tiempo finito, a una vecindad del origen, cuyo radio depende directamente de la magnitud de la perturbación y de las ganancias del controlador.

Por otro lado, el modelo nominal se obtiene a través de datos experimentales y con la ayuda de las funciones de la Toolbox de Identificación de Sistemas de Matlab, por lo que se hace un proceso de sintonización con la herramienta PID Tuner Toolbox utilizando Simulink, para tener una comparación con el desempeño de la ADRC en este sistema. En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de la ventana de la herramienta PID Tuner. Esta herramienta ayuda a ajustar las ganancias del controlador PID proporcionando valores que generan las mejores especificaciones de rendimiento del sistema. Estos valores de parámetros se pueden ingresar en el sistema aumentado, especialmente en las ganancias del controlador [20], [21].

En la Figura 4.5, se observa un ejemplo de la representación a bloques de cómo es que fácilmente se puede configurar a través del uso de la herramienta Simulink y en la figura 4.6 se muestran los parámetros obtenidos utilizados para la simulación y experimentación haciendo uso de la estructura de control PID y considerando la planta nominal y para entradas tipo escalón.

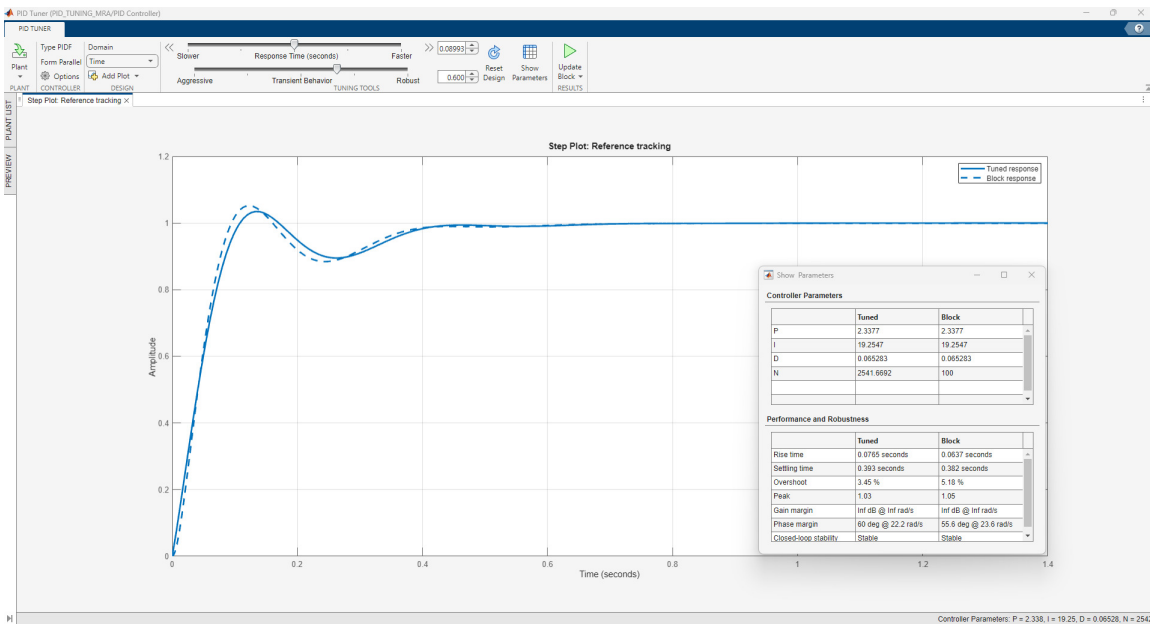


Figura 4.4: Herramienta PID Tuner.

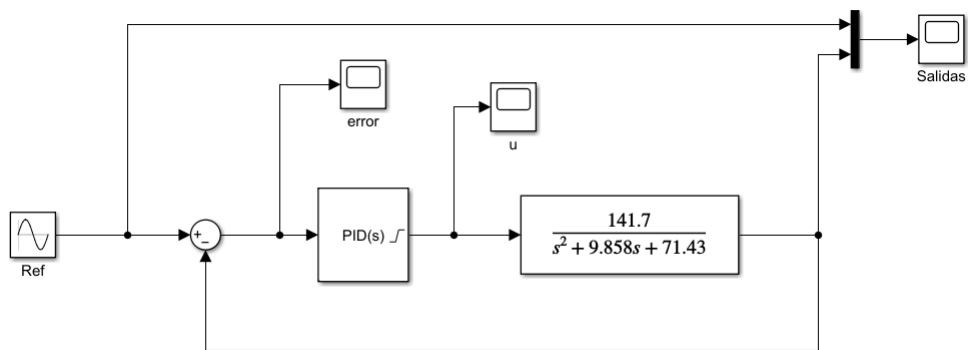


Figura 4.5: Representación esquemática de la estructura de control PID utilizando la herramienta PID TUNER.

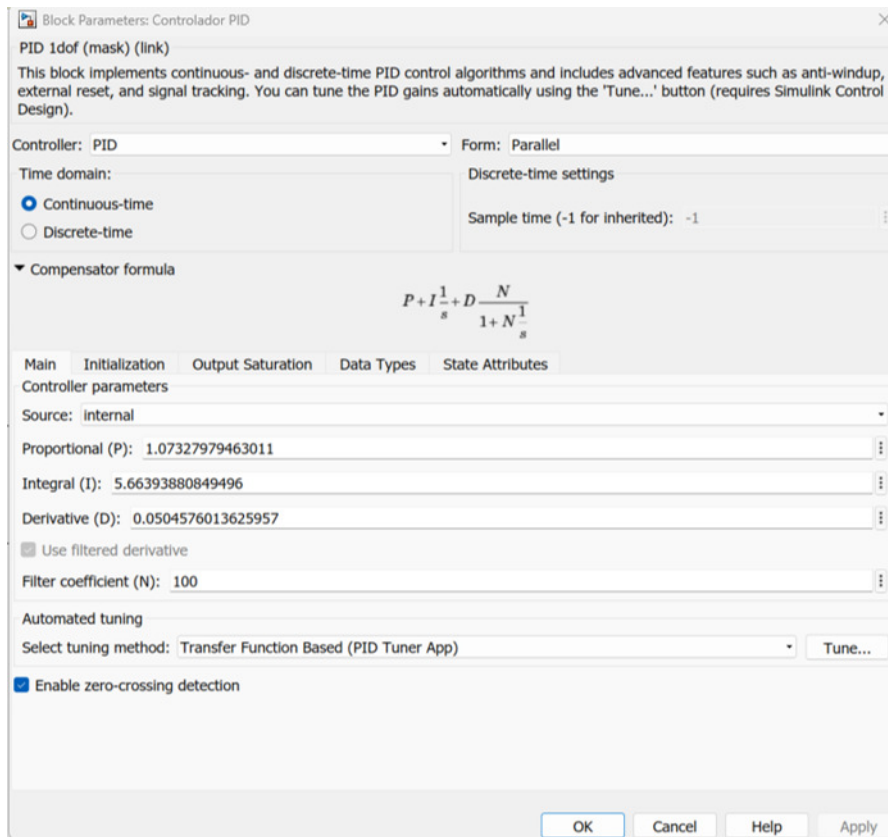


Figura 4.6: Parámetros obtenidos a través de la herramienta PID Tuner.

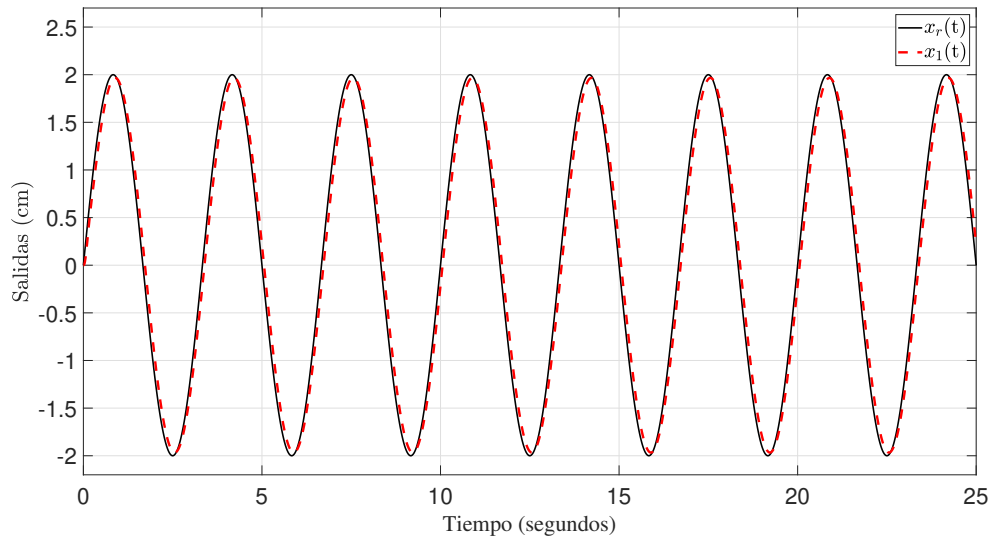


Figura 4.7: Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura de control PID.

4.3.1. Desempeño numérico del sistema en lazo cerrado

En esta subsección se presentan los resultados de simulación que se obtuvieron utilizando la estructura de control PID y ADRC respectivamente aplicados en el sistema MRA, previamente descrito, para el objetivo de seguimiento de trayectorias $x_r(t)$. Se asume, para la simulación, que la planta contiene incertidumbres paramétricas y/o perturbaciones externas que pueden afectar el buen desempeño de técnicas de control tradicionales. Con los resultados de simulación es posible conocer de antemano los valores de las ganancias del controlador, observador, y filtro de primer orden (en el caso de la estructura de control ADRC), así mismo, la herramienta PID Tuner Toolbox, es capaz de proporcionar los valores de K_p , K_i y K_d . Estas simulaciones también nos dan una idea de la amplitud de la ley de control que gobierna al sistema $u(t)$.

4.3.2. Resultados de Simulaciones utilizando el controlador PID

En esta sección se presentan los resultados de simulación que se obtuvieron utilizando un controlador PID. En las Figuras 4.7, 4.9 y 4.8, se observa la referencia $x_r(t)$ y la posición del sistema $x_1(t)$, la ley de control $u(t)$ y el error de posición $e(t)$, respectivamente.

De estas gráficas se puede observar que el PID tiene un muy buen desempeño a pesar

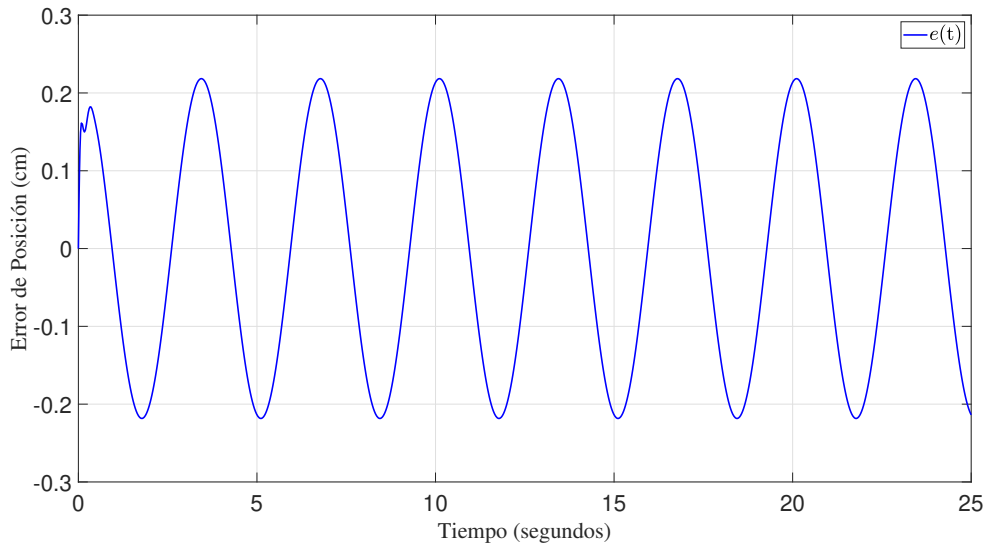


Figura 4.8: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura de control PID.

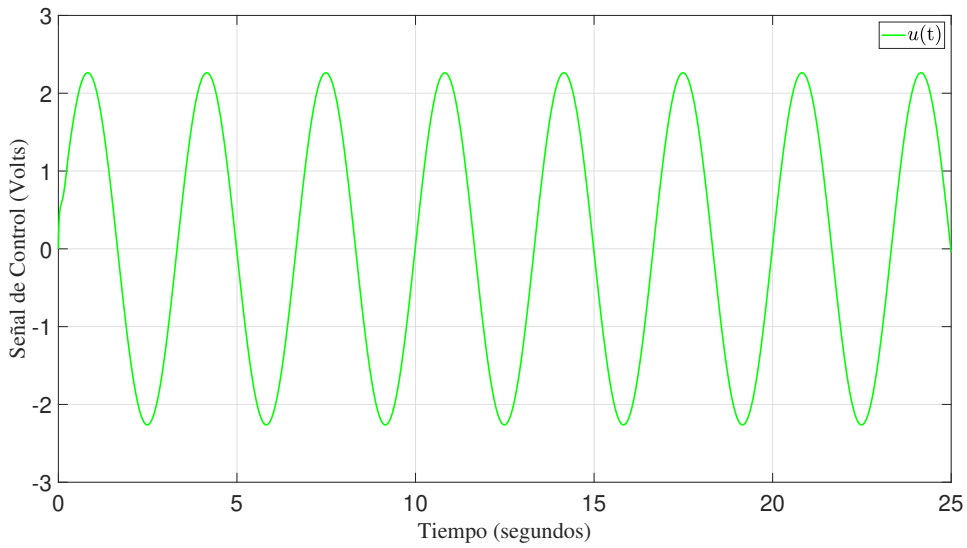


Figura 4.9: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura de control PID.

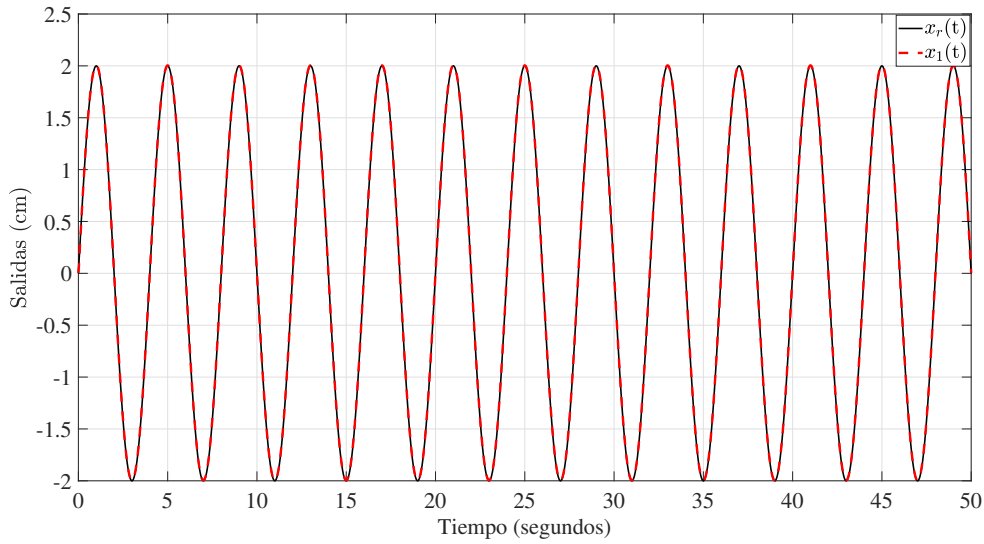


Figura 4.10: Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

de la existencia de perturbaciones externas en la planta, el error entre la señal de referencia y la salida del sistema no sobrepasa los 2.2 milímetros, por otro lado, la señal de control no sobrepasa los 2.5 volts, lo que indica la factibilidad de su implementación.

4.3.3. Simulación ADRC

En esta sección se presentan los resultados de simulación que se obtuvieron implementando la estructura de control con compensación activa de perturbaciones. La señal de $x_r(t)$ fue establecida como la señal de referencia variante en el tiempo que el estado $x_1(t)$ debe seguir. En las figuras 4.10, 4.11 y 4.12 se presentan las gráficas de la posición $x_1(t)$ contra la referencia $x_r(t)$, la ley de control que gobierna al sistema $u(t)$ y el error en estado estable $e(t) = x_1(t) - x_r(t)$. A demás, se muestra en la figura 4.13, el desempeño de la velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, así como el control equivalente $u_{eq}(t)$, señal obtenida a la salida del filtro analógico (figura 4.14).

Des estos resultados se puede notar que la estructura ADRC tiene un mejor desempeño, logra un error entre la señal de referencia y la salida del sistema que no sobrepasa los 0.06 milímetros, esto a costa de que la señal de control tiene mayor amplitud comparada con el PID y contiene componentes de alta frecuencia, las cuales corresponden al control

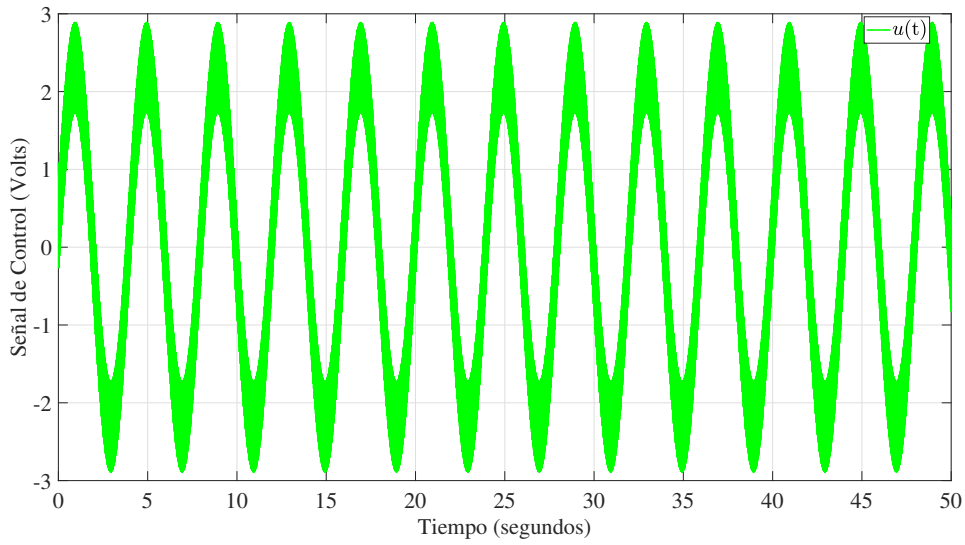


Figura 4.11: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura ADRC.

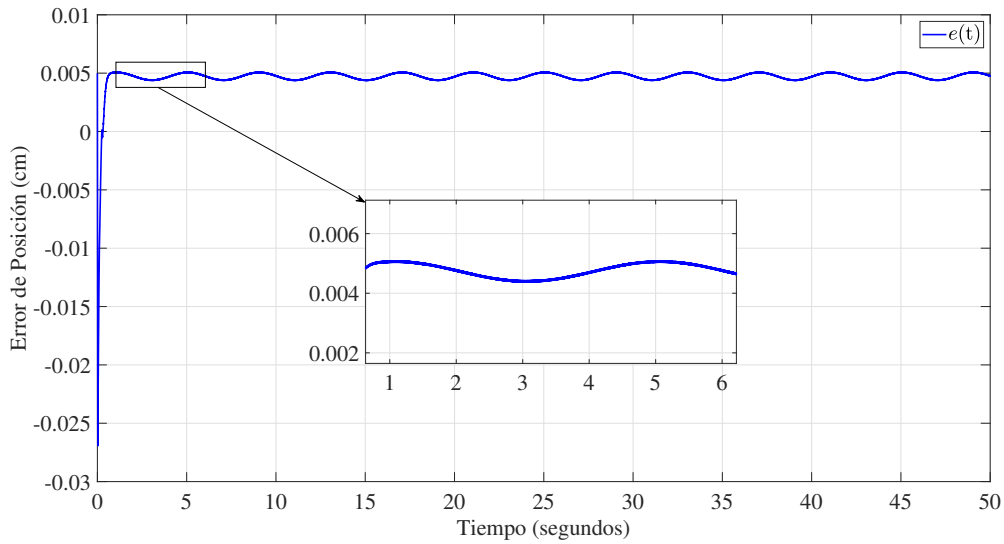


Figura 4.12: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

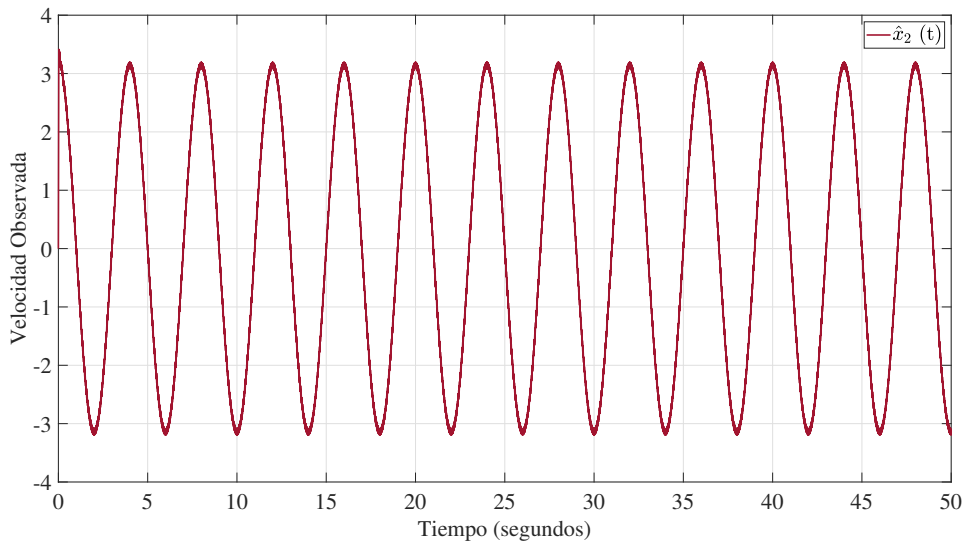


Figura 4.13: Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC.

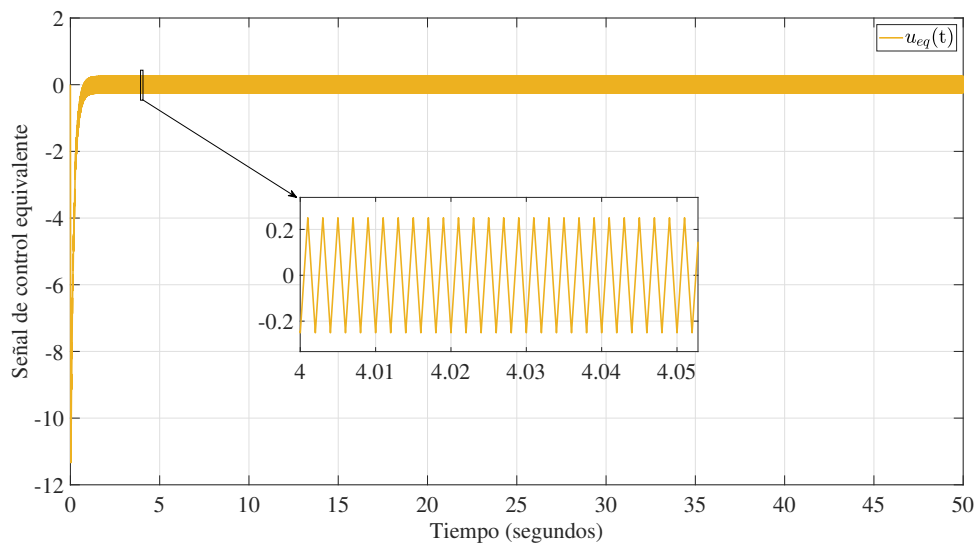


Figura 4.14: Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC.

equivalente.

4.3.4. Desempeño experimental del sistema en lazo cerrado

A continuación, se presentan los resultados experimentales, donde el objetivo es comparar el rendimiento de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, con respecto a la estructura PID. En esta sección se abordará el análisis de dos tipos de experimentos. Las adquisiciones de los datos experimentales para cada una de las estructuras constan de una duración de 50 *segundos*, esto con la finalidad de que durante los primeros 25 *segundos* aproximadamente, el sistema se encuentre libre de una perturbación externa provocada por el motor acoplado, mostrado en la figura 4.2. Posteriormente, la perturbación se introducirá afectando el desempeño del desplazamiento de la masa, con el objetivo de observar el rendimiento de ambas estructuras de control, bajo las mismas condiciones de operación.

4.3.5. Estructura PID

En esta sección se presentan los resultados experimentales de la estructura de control PID para seguimiento de trayectorias. Las ganancias del controlador PID fueron sintonizadas a través de la herramienta "Tuner", como fue mencionado en el punto 4.1 hasta observar un comportamiento óptimo. Se presentan las figuras de la referencia $x_r(t)$ y la posición $x_1(t)$, ley de control $u(t)$ y la señal de error $e(t)$, en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17 respectivamente.

4.3.6. Estructura ADRC

En esta sección se presentan los resultados experimentales de la implementación de la estructura ADRC. Las ganancias del controlador fueron sintonizadas empíricamente hasta observar un comportamiento óptimo en el seguimiento de trayectorias. Se presentan las gráficas de la referencia $x_r(t)$ y la posición $x_1(t)$, ley de control $u(t)$ y la señal de error $e(t)$, en las figuras 4.18, 4.19 y 4.20, respectivamente. A demás, se muestra en la figura

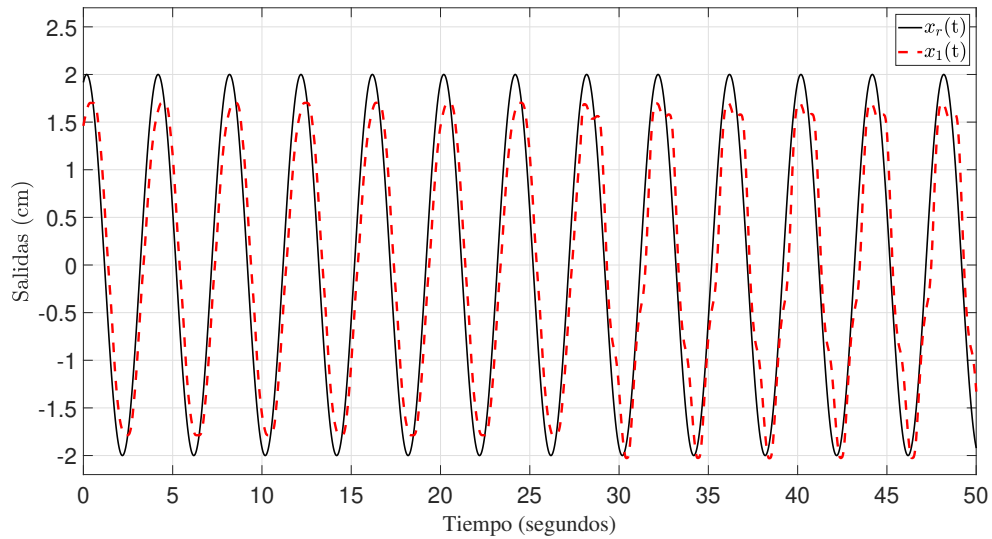


Figura 4.15: Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura PID.

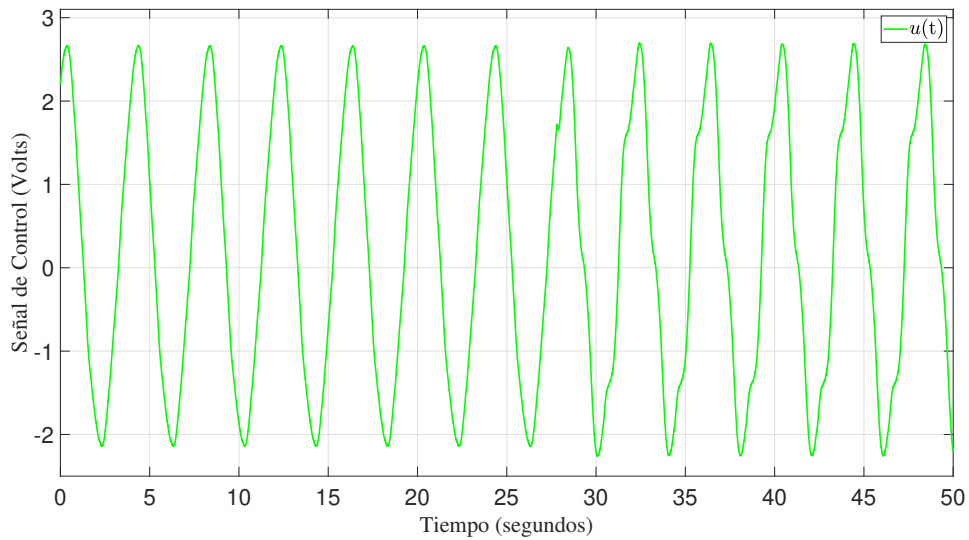


Figura 4.16: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura PID.

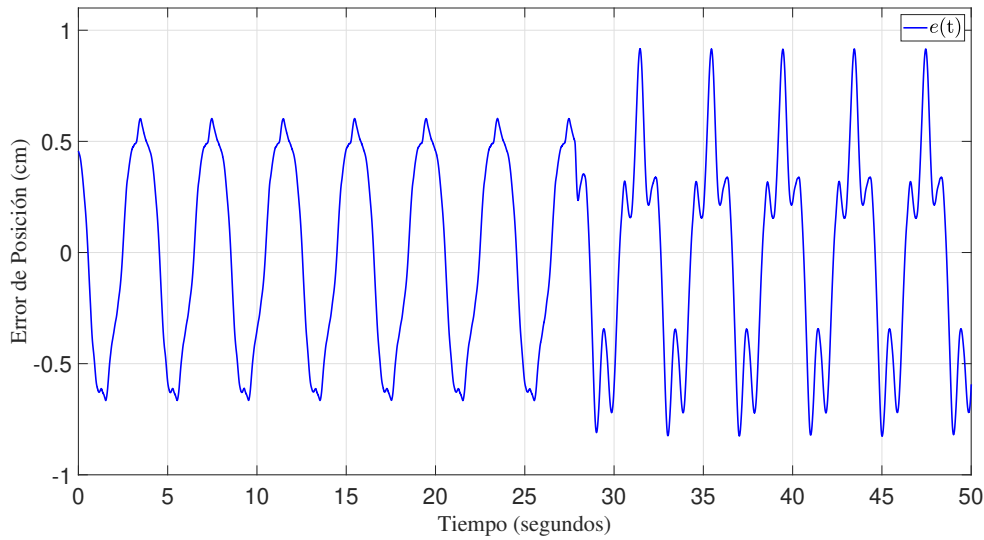


Figura 4.17: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura PID.

4.21, el desempeño de la velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, así como el control equivalente $u_{eq}(t)$, señal obtenida a la salida del filtro analógico (figura 4.22).

4.4. Análisis del desempeño de ambos controladores

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la simulación y la experimentación de ambas estructuras de control. Las figuras 7.36 y 7.37 representan los valores del error de posición para datos simulados y experimentales respectivamente. Podemos notar que, en la figura 7.37, los datos del diagrama de caja nos indican que la estructura ADRC, cuenta con menores valores dispersos entre su límite superior y su límite inferior, como se observa en la tabla 7.1, Esto nos indica que el error es menor entre la posición real y la posición estimada tiende a cero, a diferencia de los experimentos realizados con y sin la perturbación externa, utilizando estructura de control PID. El error de posición, haciendo uso de la estructura ADRC, disminuyó en un 15% en comparación al desempeño del controlador PID sin agregar la perturbación al experimento. Con dicha perturbación afectando al desempeño de ambas estructuras, el error de posición decreció un 19% contra la estructura PID. Con esto, podemos concretar que la estructura ADRC se mantuvo con un mayor grado de robustez, ya que es capaz de compensar las perturbaciones que

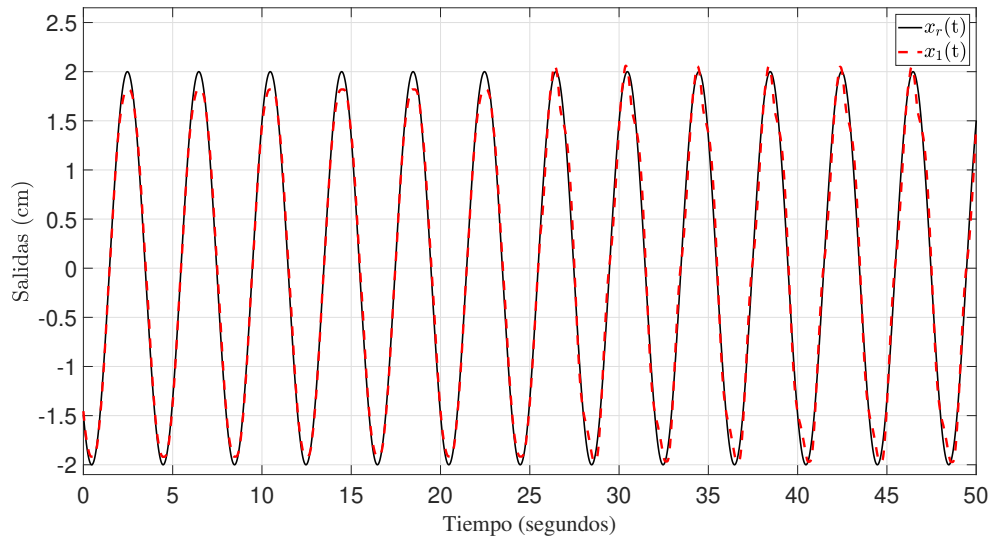


Figura 4.18: Posición del sistema MRA $x_1(t)$ contra referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

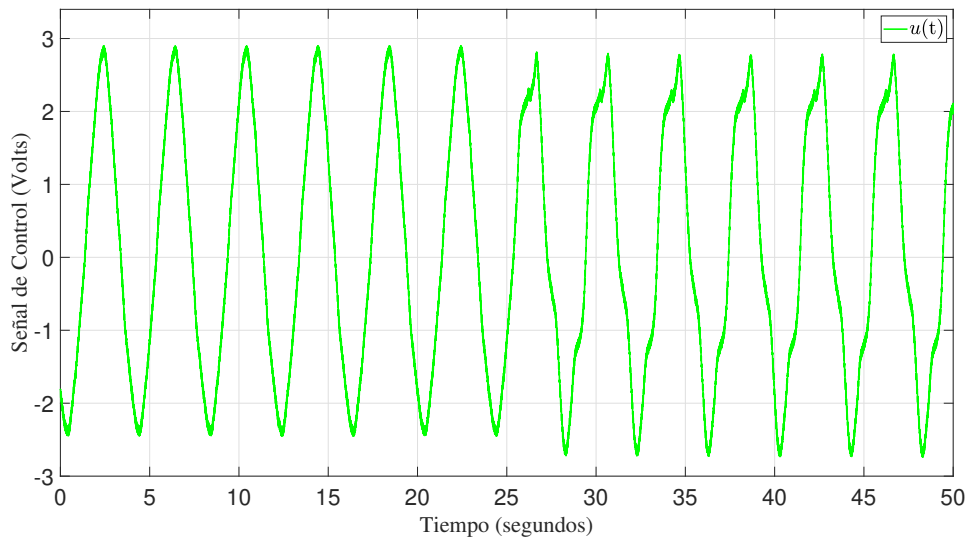


Figura 4.19: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema MRA, utilizando la estructura ADRC.

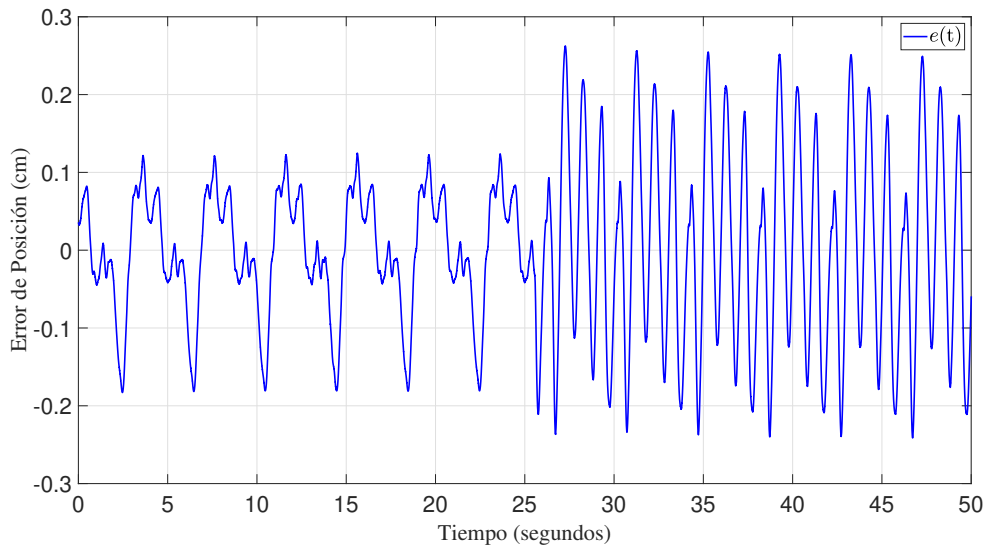


Figura 4.20: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

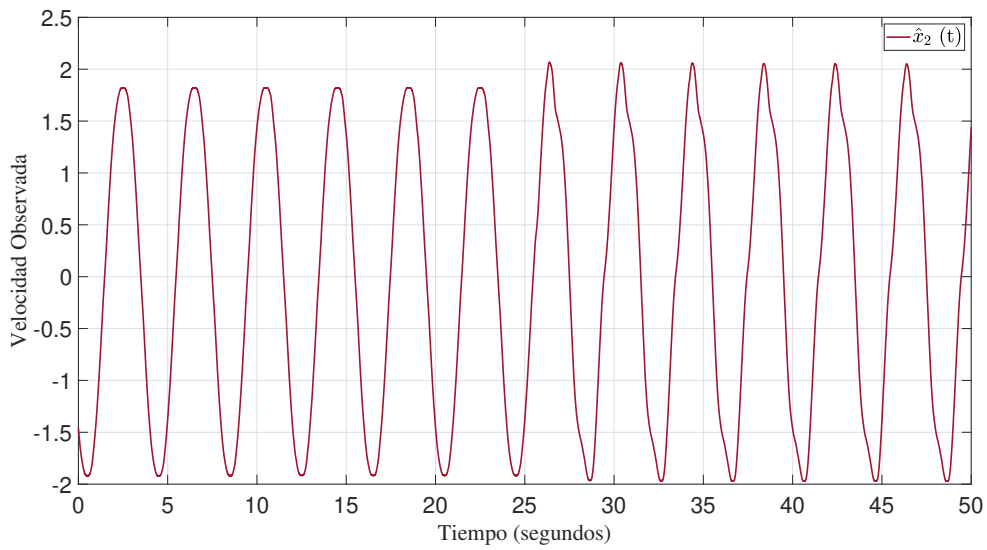


Figura 4.21: Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC.

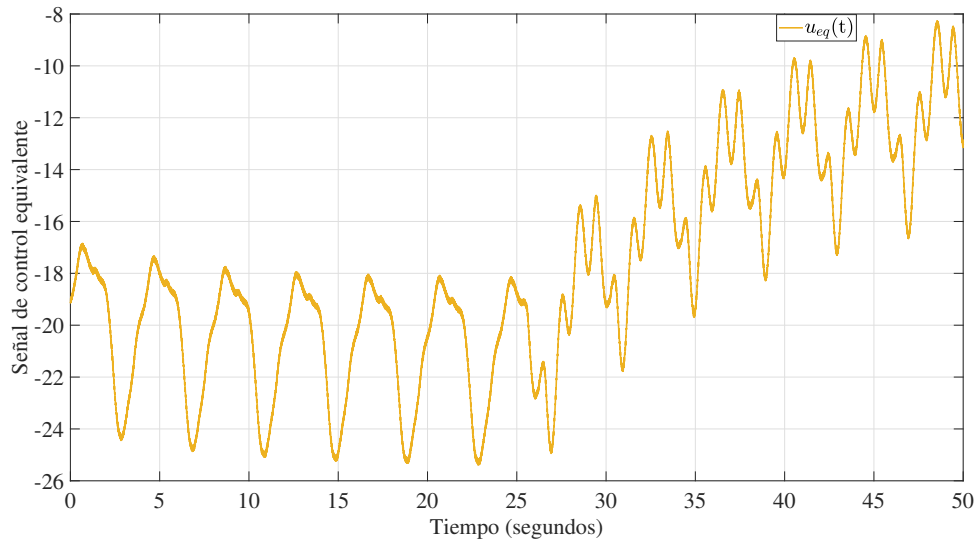


Figura 4.22: Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC.

Índice	PID	ADRC
Media	0.0000456	0.003844
Límite superior	0.1444	0.0047
Límite inferior	-0.1427	-0.0000201
IAE	0.1301	0.0052
Error promedio absoluto	0.1325	0.0053

Tabla 4.1: Índices de desempeño en las simulaciones numéricas

afectaban al sistema. En la figura 7.38 se observa el índice de desempeño de la integral del error absoluto.

Índice	PID	ADRC
Media	0.07047	0.038
Límite superior	0.3304	0.6796
Límite inferior	-0.3346	-0.01487
IAE	0.3001	0.0453
Error promedio absoluto	0.3058	0.0461

Tabla 4.2: Índices de desempeño en los experimentos sin considerar perturbaciones

Índice	PID	ADRC
Media	0.5075	-0.08046
Límite superior	0.5598	0.02466
Límite inferior	0.4718	-0.1572
IAE	0.4979	0.0968
Error promedio absoluto	0.5069	0.0986

Tabla 4.3: Índices de desempeño en los experimentos considerando perturbaciones

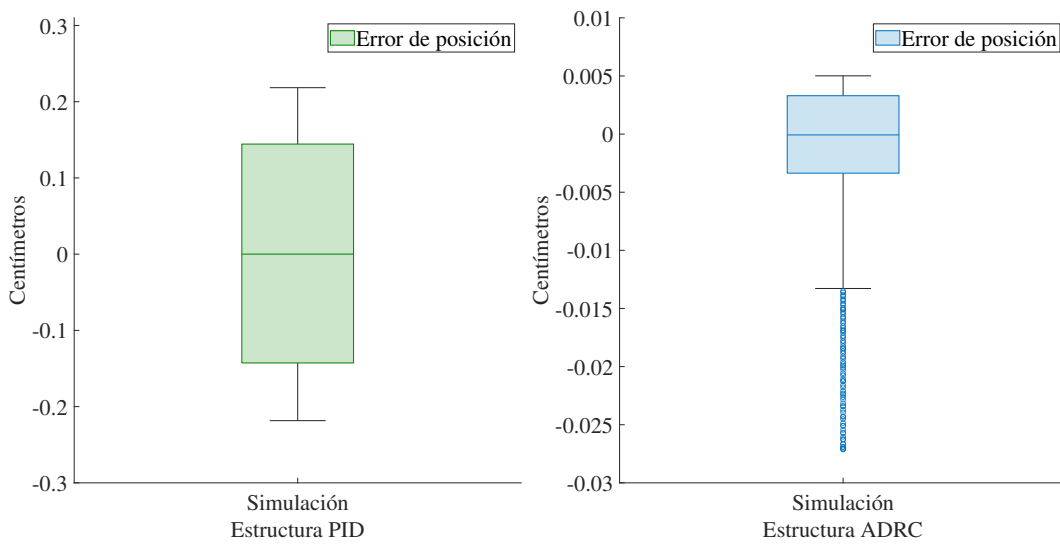


Figura 4.23: Diagrama de caja de las simulaciones para cada estructura de control.

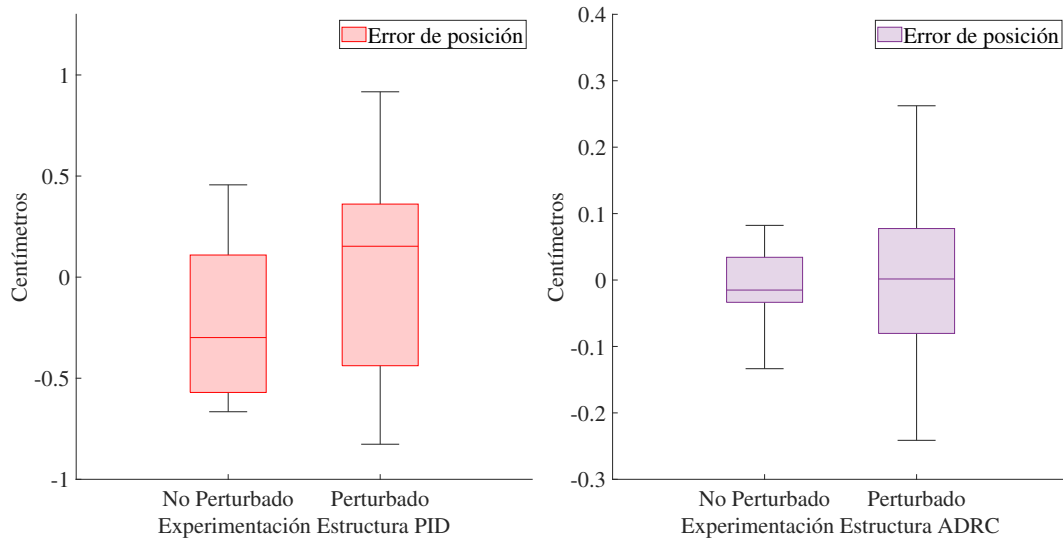


Figura 4.24: Diagrama de caja de los experimentos para cada estructura de control.

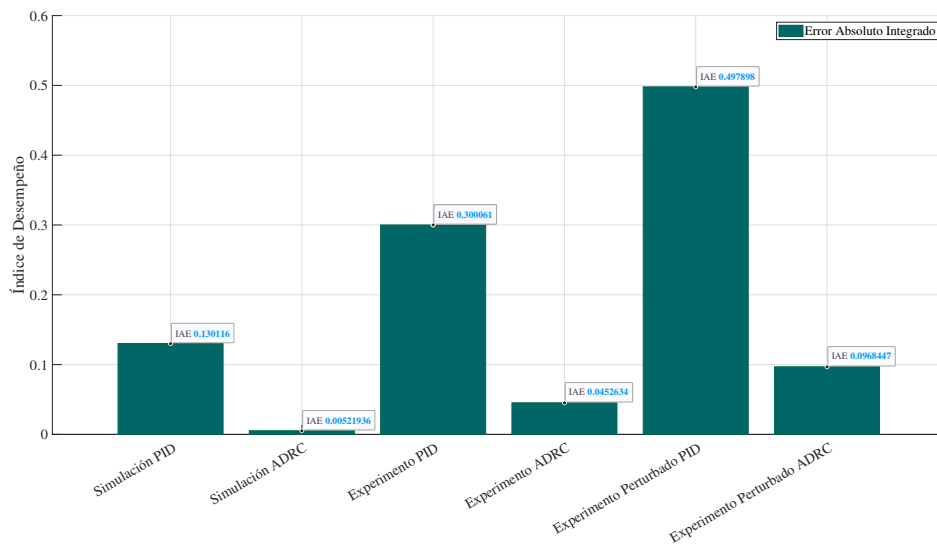


Figura 4.25: Índices de desempeño entre estructuras de control.

Capítulo 5

Péndulo simple

En este capítulo se presenta una comparación del desempeño de los controladores PID y ADRC en un péndulo simple. Su estructura es similar a la del capítulo 4; se inicia con su descripción y modelado, posteriormente se muestran los diseños de los controladores, seguido por la ilustración de su desempeño en forma numérica y, finalmente, su desempeño en forma experimental.

5.1. Descripción del prototipo y modelo dinámico

El péndulo simple está conformado por una masa puntual m que se encuentra suspendida de un punto fijo a través de una varilla de longitud l , se asume que la varilla es inextensible y se desprecia su peso tomando únicamente en consideración el peso de la masa puntual m . El péndulo simple es un sistema mecánico de naturaleza no lineal debido al efecto de la fuerza de gravedad, lo que produce una función trigonométrica en el modelo del sistema. El modelo matemático de este mecanismo se obtiene mediante las ecuaciones de movimiento de Lagrange. La energía cinética está dada por

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2,$$

mientras que la energía potencial es

$$P = -mgl \cos(\theta),$$

donde g es la fuerza de gravedad. Con esto se forma el Lagrangiano del sistema que es la resta de la energía cinética y la energía potencial, obteniendo

$$L = T - P = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta), \quad (5.1)$$

con el Lagrangiano (5.1) y la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico del péndulo simple

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u, \quad (5.2)$$

finalmente se incorpora el efecto de la fricción viscosa para tener el modelo

$$ml^2\ddot{\theta} + \delta\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u, \quad (5.3)$$

cuya representación en variables de estado, siendo x_1 la posición del sistema y x_2 la velocidad, es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + cu, \\ \theta &= x_1, \end{aligned}$$

donde a , b y c son parámetros de la planta y u la entrada de control.

El péndulo simple que se utilizó para las pruebas realizadas en este capítulo se muestra en la Figura 5.1 está conformado por una varilla suspendida de una estructura fija, y se encuentra acoplado a un motor de corriente directa y a un encoder incremental rotativo, cuyas terminales están conectadas a la plataforma de control MicroLabBox de dSPACE.

Para obtener los parámetros a , b y c del modelo del péndulo simple se realizó un proceso

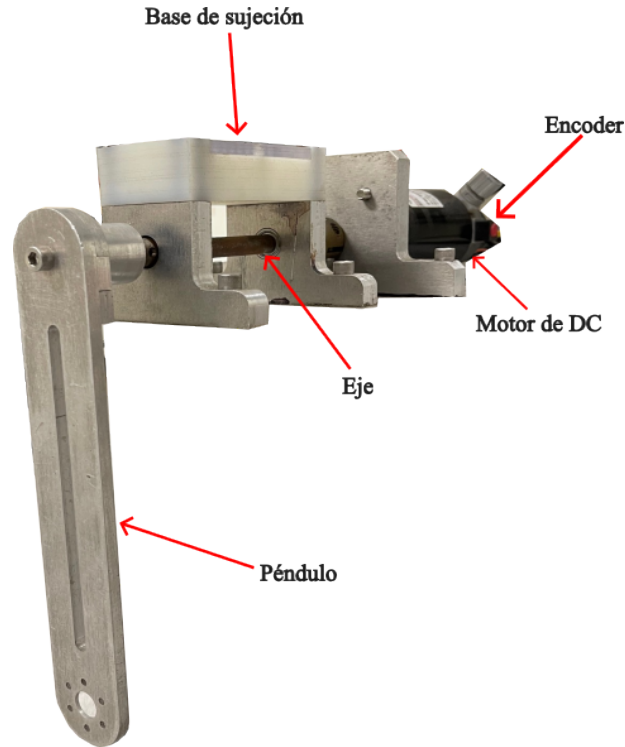


Figura 5.1: Péndulo simple utilizado en la prueba de los controladores.

de identificación de la planta. El proceso consistió en someter al sistema a entradas tipo escalón de diferente magnitud y registrar la posición en radianes y, posteriormente en un proceso fuera de línea, se obtiene el modelo lineal del péndulo simple utilizando las herramientas de la Toolbox de identificación de sistemas de Matlab. Se realizaron once experimentos, los cuales son mostrados en la Figura 5.2.

Se utilizaron los primeros diez experimentos para obtener una función de transferencia, mientras que el experimento número once se utiliza para validar el modelo. La función de transferencia obtenida es la siguiente

$$G(s) = \frac{141.7}{s^2 + 9.858s + 71.43}, \quad (5.4)$$

Una vez determinada la función de transferencia se utilizó la función *lsim* de Matlab con el propósito de validar el modelo identificado. El resultado de esta validación se muestra en la Figura 5.3, como se puede observar, tanto la respuesta experimental, que corresponde a la gráfica en color negro, se asemeja bastante cuando la amplitud del escalón es negati-

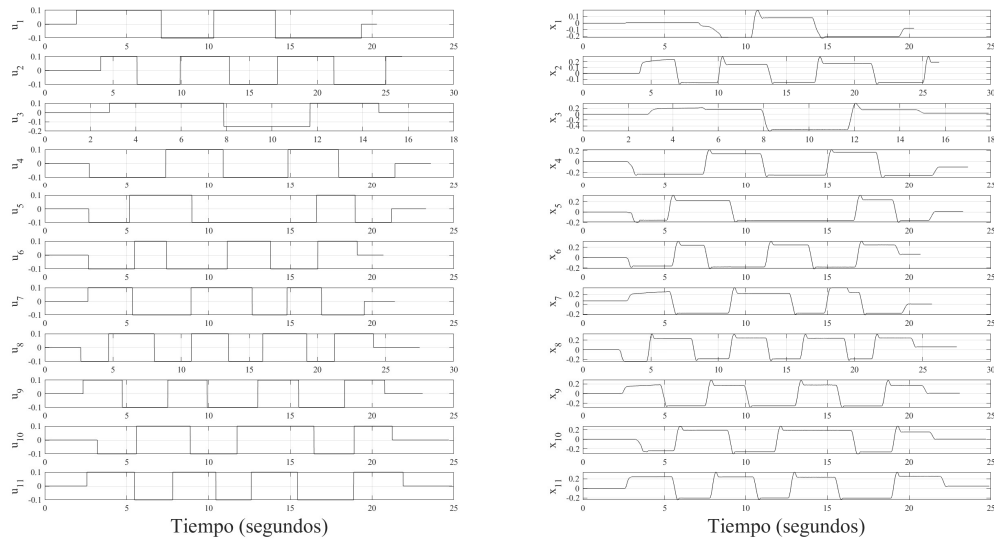


Figura 5.2: Experimentos realizados para la identificación del modelo del péndulo simple.

vo, pero cuando es positivo hay una mayor diferencia, esto se debe principalmente a las características de operación del motor. A pesar de estas diferencias los parámetros de esta función de transferencia se utilizarán en el modelo no lineal que se va a considerar en los experimentos del resto de esta sección.

Finalmente, el modelo no lineal del péndulo es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -71.43 \sin(x_1) - 9.858x_2 + 141.7u, \\ \theta &= x_1.\end{aligned}$$

5.2. Diseño de los controladores PID y ADRC

En esta sección se desarrollan los controladores PID y la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, donde el objetivo de control es el seguimiento de trayectorias. Posteriormente se presentan resultados de simulación y experimentación de dichas estrategias de control.

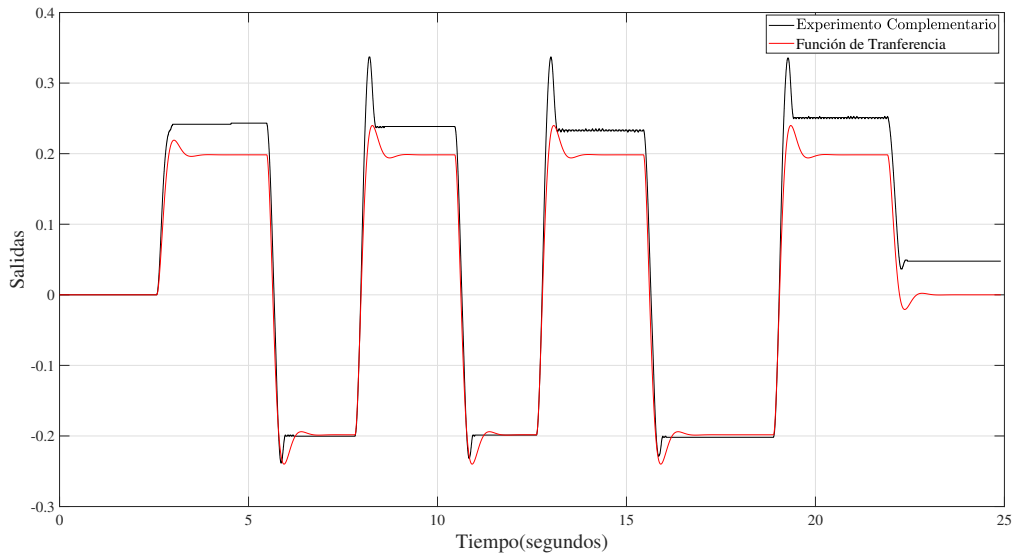


Figura 5.3: Validación del modelo identificado.

5.2.1. Diseño del controlador PID

Considere el siguiente modelo matemático del péndulo dado por la función de transferencia (5.4) en donde se va a aplicar un control PID

$$u = k_p e + k_i \int e dt + k_d \frac{de}{dt},$$

donde $e = y_r(t) - y$.

Para definir los valores de las ganancias k_p , k_i y k_d se utiliza la herramienta PID Tuner, en la cual se considera como planta la función de transferencia (5.4). La Figura 5.4 muestra un ejemplo de la representación a bloques del sistema en lazo cerrado que se utiliza en el proceso de sintonización, y en la Figura 5.5 se muestran los parámetros obtenidos utilizados para la simulación y experimentación.

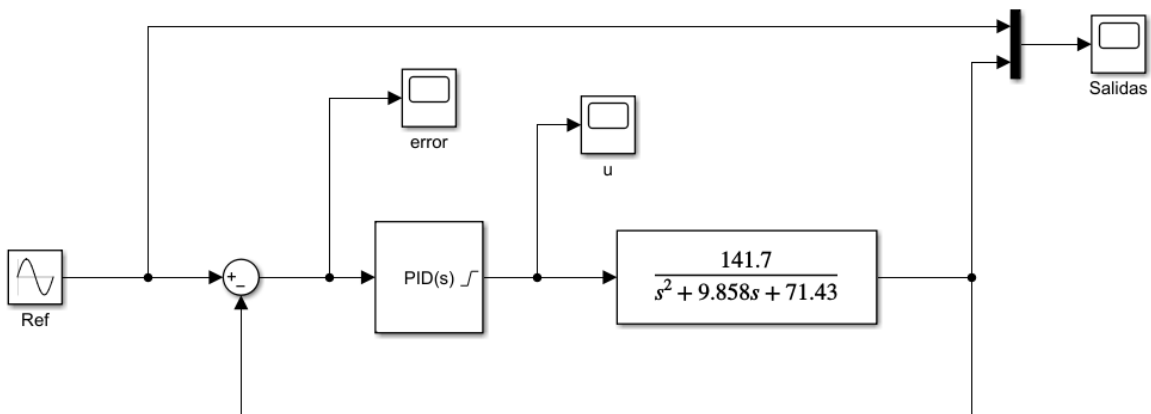


Figura 5.4: Representación esquemática de la estructura de control PID utilizando la herramienta PID TUNER.

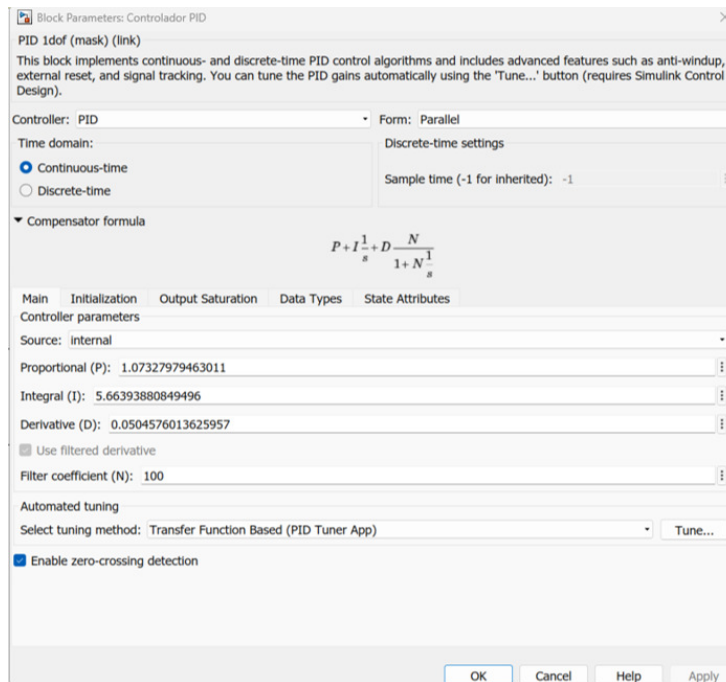


Figura 5.5: Parametros obtenidos a través de la herramienta PID TUNER.

5.2.2. Diseño de la estructura de control ADRC para el péndulo simple

Considere el siguiente modelo matemático del péndulo simple en su representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + c(u + \gamma(t)), \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

donde a , b , y c representan los parámetros de la planta nominal que se desea controlar, $\gamma(t)$ representa una perturbación o incertidumbre paramétrica acotada; $\gamma(t) < |\delta|$.

El observador de estado para implementar la estructura ADRC es el siguiente

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + L_1(y - \hat{y}), \\ \hat{x}_2 &= -a \sin(x_1)\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 + cu + L_2(y - \hat{y}) + L_3 \text{sign}(y - \hat{y}), \\ y &= \hat{x}_1,\end{aligned}$$

se definen las variables del error entre el estado de la planta y del observador

$$\begin{aligned}e_1 &= x_1 - \hat{x}_1, \\ e_2 &= x_2 - \hat{x}_2,\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - L_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -ae_1 - be_2 - L_2 e_1 - L_3 \text{sign}(e_1) + c\gamma(t).\end{aligned}$$

Ahora se realiza el cambio de variables

$$\begin{aligned}z_1 &= e_1, \\z_2 &= e_2 - L_1 e_1,\end{aligned}$$

cuya dinámica se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{e}_2 - L_1 \dot{e}_1 \\ &= -(a + L_2)e_1 - be_2 - L_3 \text{sign}(e_1) + c\gamma(t) - L_1 z_2\end{aligned}$$

reordenando términos se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -(a + L_2)z_1 - b(z_2 + L_1 z_1) - L_3 \text{sign}(z_1) + c\gamma(t).\end{aligned}$$

En este caso el control equivalente está dado por

$$u_{eq} = c\gamma(t),$$

Por lo que se utiliza un filtro pasa bajas para tenerlo disponible, este filtro tiene la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= -w_c x_f + w_c u_f, \\ y_f &= x_f,\end{aligned}$$

donde u_f es igual al término discontinuo del observador de estado y, en consecuencia, y_f es el control equivalente u_{eq} .

Para resolver el problema de seguimiento de trayectorias se definen las variables de

error $\xi_1 = x_1 - y_r(t)$ y $\xi_2 = x_2 - \dot{y}_r(t)$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -a \sin(x_1) - b(\xi_2 + \dot{y}_r(t)) + cu + c\gamma(t) - \ddot{y}_r(t),\end{aligned}$$

y se propone el control

$$u = \frac{1}{c} (a \sin(x_1) + b\dot{y}_r(t) + \ddot{y}_r(t) - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - x_f),$$

al sustituir en la dinámica del error resulta el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -k_1\xi_1 - (k_2 + b)\xi_2 + c\gamma(t) - x_f,\end{aligned}$$

ya que $x_f = c\gamma(t)$ entonces se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -k_1\xi_1 - (k_2 + b)\xi_2,\end{aligned}$$

por lo que fácilmente se pueden elegir las ganancias k_1 y k_2 para que el origen sea un punto de equilibrio exponencialmente estable.

A continuación se presentan los resultados de simulaciones numéricas que se obtuvieron utilizando la estructura de control PID y ADRC respectivamente para un péndulo simple para el objetivo de seguimiento de trayectorias $y_r(t)$. Se asume, para la simulación, que la planta contiene incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas que pueden afectar el buen desempeño de las técnicas de control tradicionales. Con los resultados de simulación es posible conocer de antemano los valores de las ganancias del controlador, observador, y filtro de primer orden (en el caso del ADRC) así como la amplitud de la ley de control que gobierna al sistema $u(t)$.

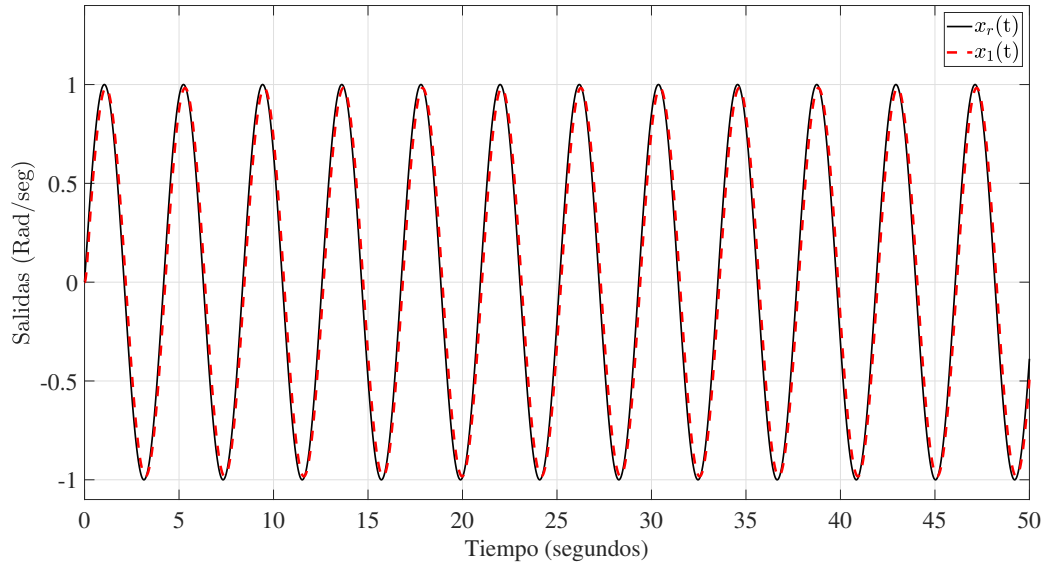


Figura 5.6: Señal de entrada como referencia $x_r(t)$ y posición del sistema $x_1(t)$ usando la estructura de control PID.

5.2.3. Resultados de simulaciones numéricas aplicando el controlador PID

En esta sección se presentan los resultados de simulación que se obtuvieron utilizando un controlador PID. En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8, se observa la referencia $x_r(t)$ y la posición del sistema $x_1(t)$, la señal de error $e(t)$ y la ley de control $u(t)$, respectivamente. En la siguiente sección se presenta el análisis de estos resultados.

5.2.4. Resultados de simulaciones numéricas aplicando la estructura ADRC

En esta sección se presentan los resultados de simulación que se obtuvieron implementando la estructura de control con compensación activa de perturbaciones. La señal de $x_r(t) = A \sin(\omega t)$ fue establecida como la señal de referencia variante en el tiempo que el estado $x_1(t)$ debe seguir. En las Figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se presentan las gráficas de la posición $x_1(t)$ y la referencia $x_r(t)$, el error en estado estable $e(t) = x_1(t) - x_r(t)$ y la ley de control que gobierna al sistema $u(t)$, así como también, el control equivalente 5.12 y

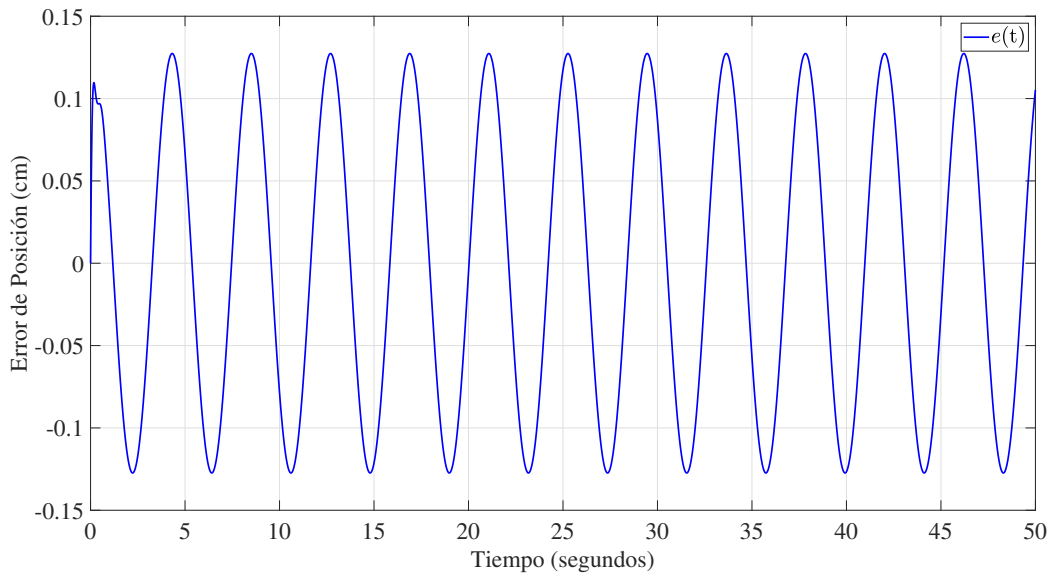


Figura 5.7: Señal de error $e(t)$ usando la estructura de control PID.

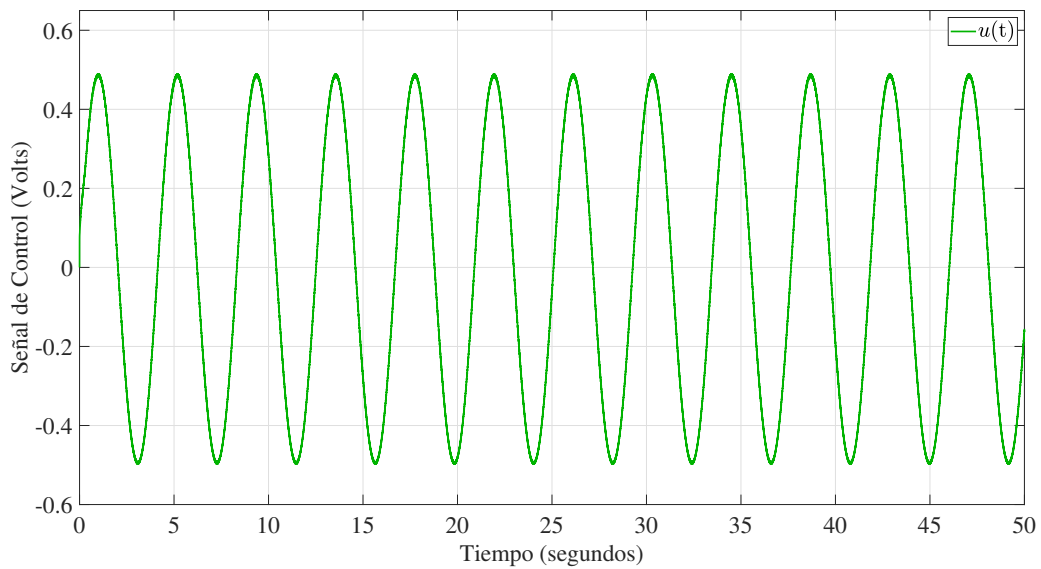


Figura 5.8: Señal de control que gobierna al sistema $u(t)$.

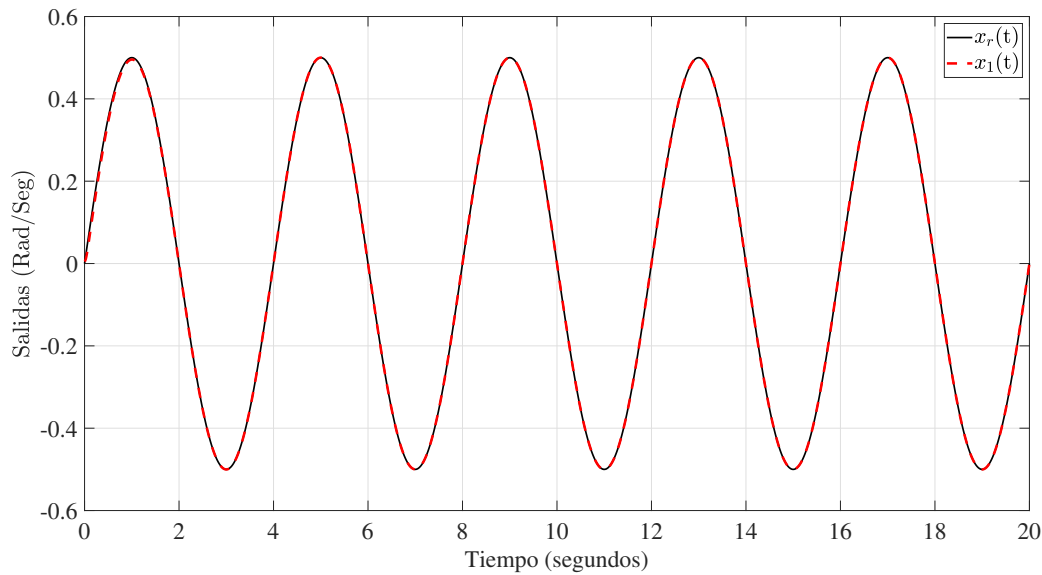


Figura 5.9: Señal de entrada como referencia $x_r(t)$ y posición del sistema $x_1(t)$ usando la estructura de control ADRC.

velocidad observada 5.13.

5.3. Resultados experimentales

A continuación, se presentan los resultados experimentales obtenidos posteriormente a la simulación, donde el objetivo es comparar el rendimiento de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, con respecto a un control proporcional-integral-derivativo.

5.3.1. Control PID

En esta sección se presentan los resultados experimentales en la puesta en marcha del control PID para un péndulo simple. Las ganancias del controlador PID fueron sintonizadas a través de la herramienta "Tuner", como fue mencionado en sección 4.1 hasta observar un comportamiento óptimo en el seguimiento de trayectorias. Se presentan las gráficas de la referencia $x_r(t)$ y la posición x_1 , la ley de control u y la señal de error e , en las Figuras 5.14, 5.15, y 5.16, respectivamente, para una referencia senoidal con una amplitud máxima

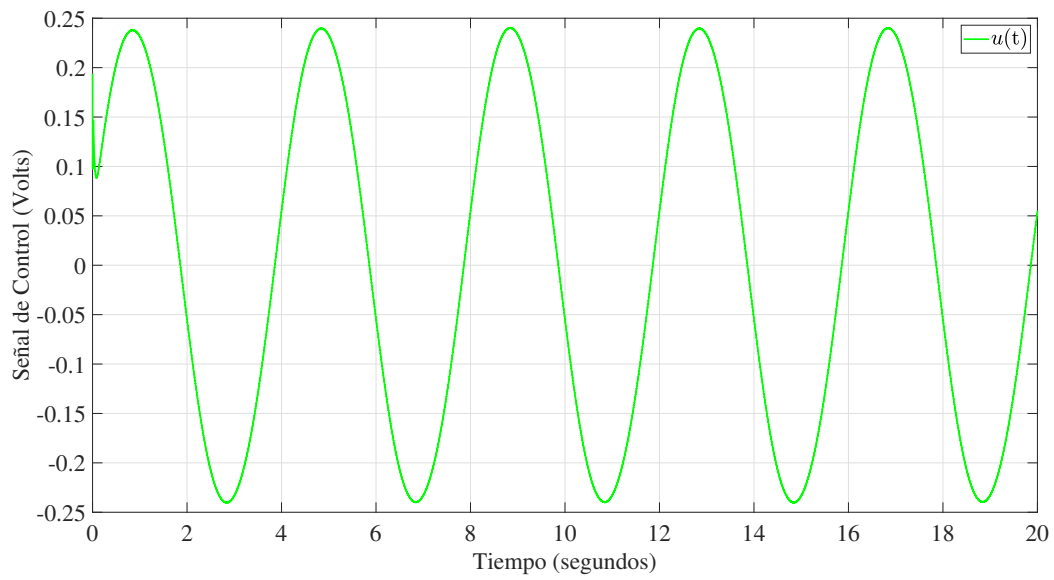


Figura 5.10: Señal de control que gobierna al sistema $u(t)$.

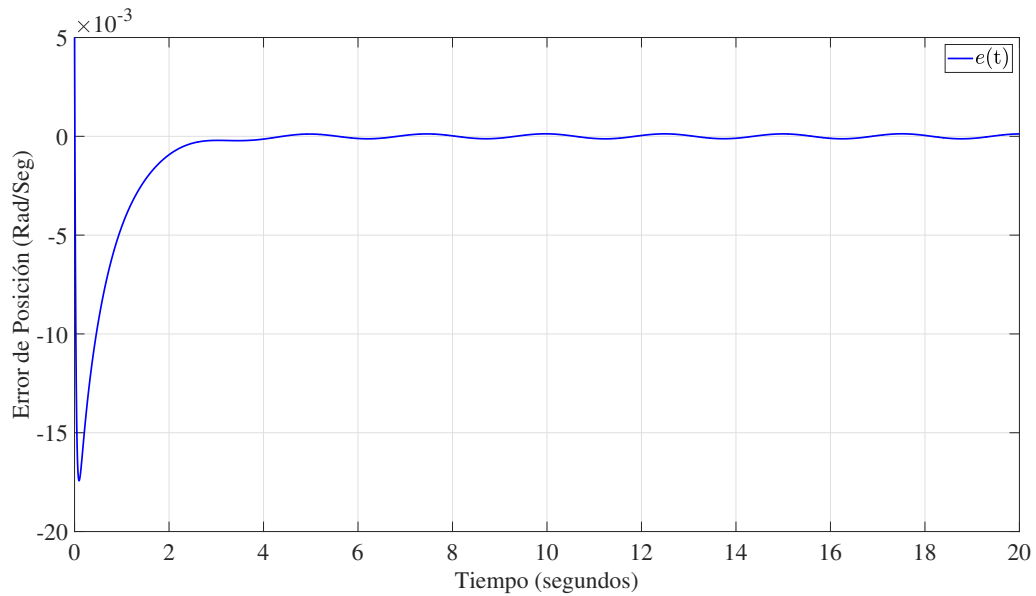


Figura 5.11: Señal de error $e(t)$ usando la estructura de control ADRC.

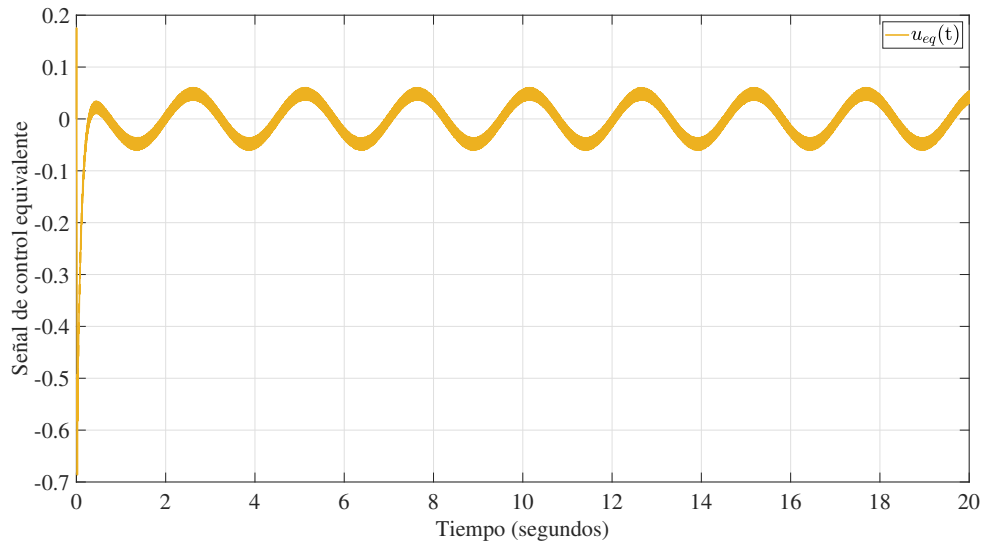


Figura 5.12: Señal de Control Equivalente $u_{eq}(t)$, utilizando la estructura ADRC.

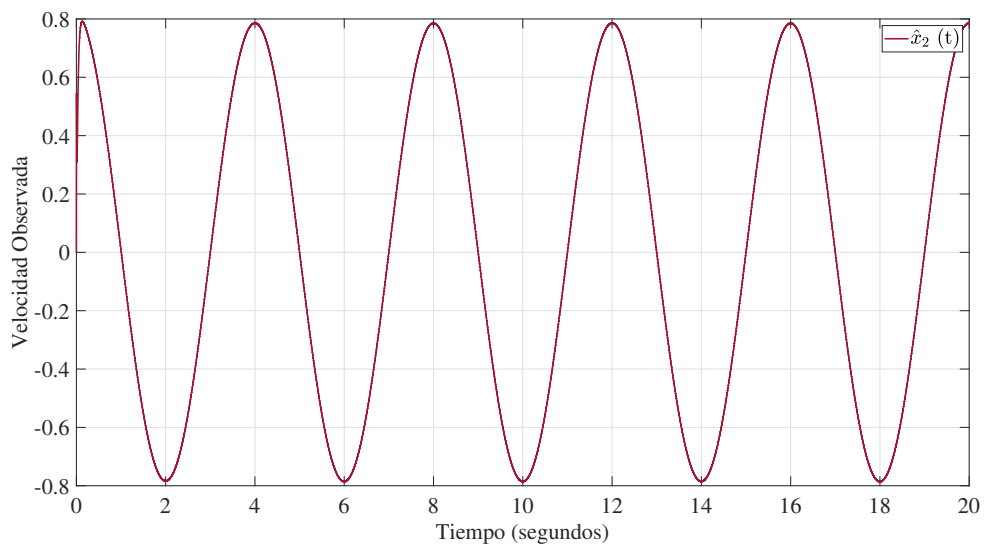


Figura 5.13: Velocidad observada $\hat{x}_2(t)$, utilizando la estructura ADRC.

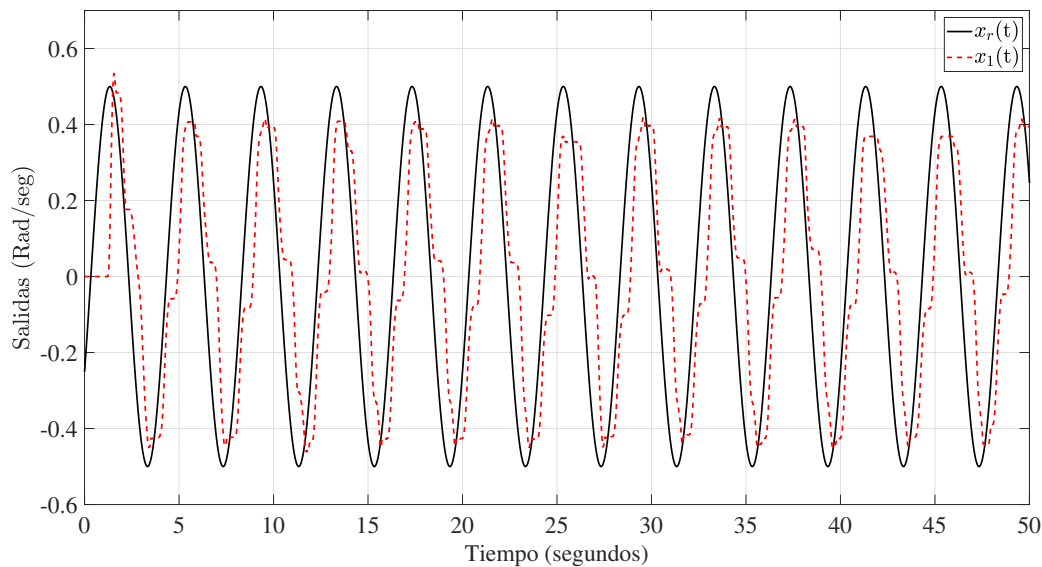


Figura 5.14: Resultados experimentales. Comportamiento del péndulo simple aplicando un control PID y una referencia con amplitud de 28 grados.

de 28 grados. Con la finalidad de observar el desempeño del observador con diferentes referencias, las figuras 5.17, 5.18, y 5.19, muestran el desempeño del ángulo del péndulo para la referencia senoidal que alcanza los 180 grados.

5.3.2. Estructura ADRC

En esta sección se presentan los resultados experimentales en la puesta en marcha del control ADRC para un péndulo simple. Las ganancias del controlador fueron sintonizadas empíricamente hasta observar un comportamiento óptimo en el seguimiento de trayectorias. Se presentan las gráficas de la referencia $x_r(t)$ y la posición $x_1(t)$, señal del error y señal de control, en las Figuras 5.20, 5.21 y 5.22, respectivamente; en este caso también se muestra el comportamiento de la velocidad observada, figura 5.23, así como el control equivalente, el cual corresponde a las perturbaciones estimadas, figura 5.24. Al igual que en el caso del PID, las figuras 5.25, 5.26, y 5.27, muestran el desempeño del ángulo del péndulo para la referencia senoidal que alcanza los 180 grados. así como el control equivalente, el cual corresponde a las perturbaciones estimadas, figura 5.29 y el comportamiento de la velocidad observada, figura 5.28.

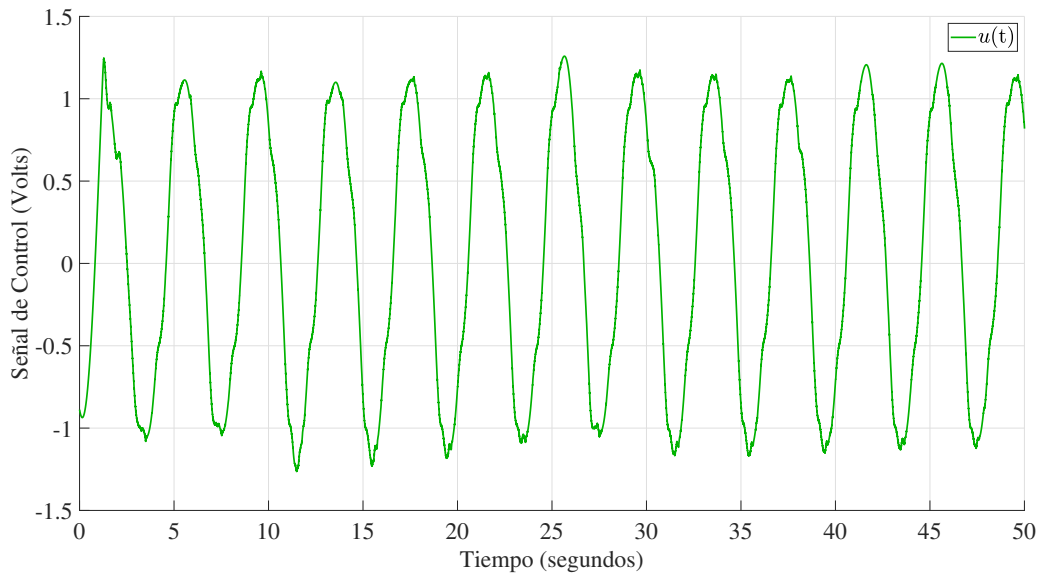


Figura 5.15: Resultados experimentales. Comportamiento de la señal de control utilizando un PID.

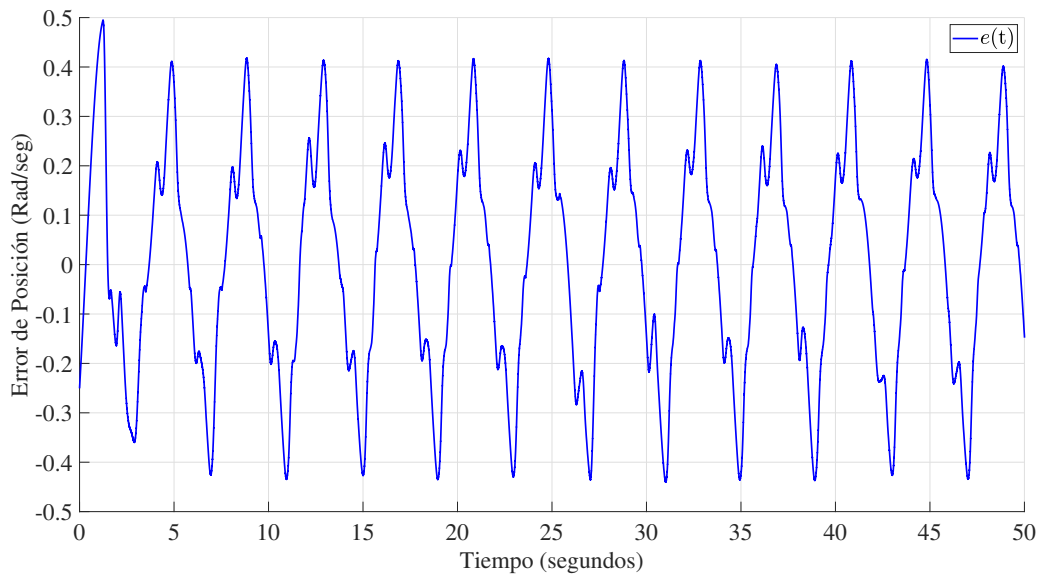


Figura 5.16: Resultados experimentales. Comportamiento el error entre la referencia, con amplitud de 28 grados, y el ángulo del péndulo simple aplicando un control PID.

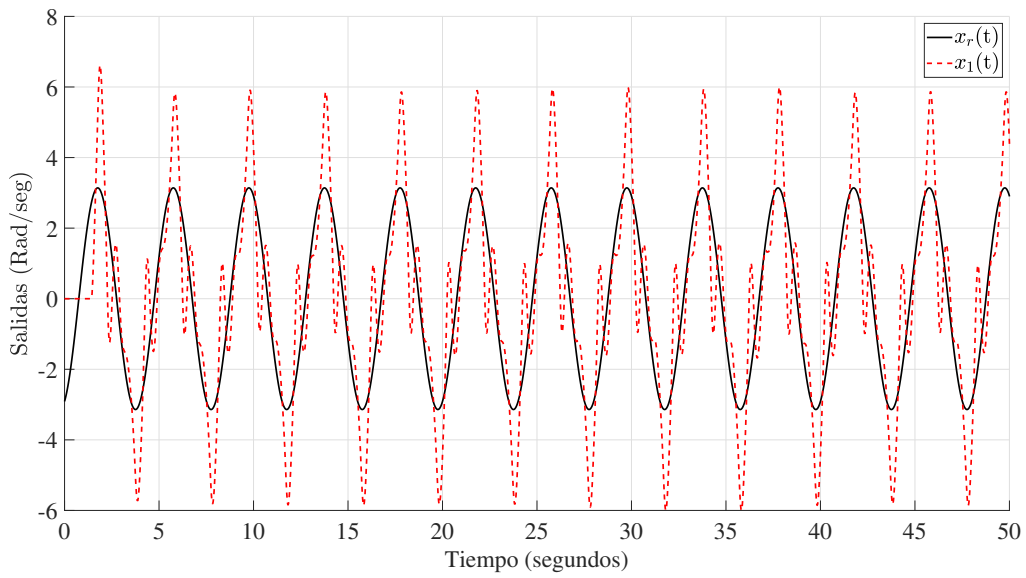


Figura 5.17: Resultados experimentales. Comportamiento del péndulo simple aplicando un control PID y una referencia con amplitud de 180 grados.

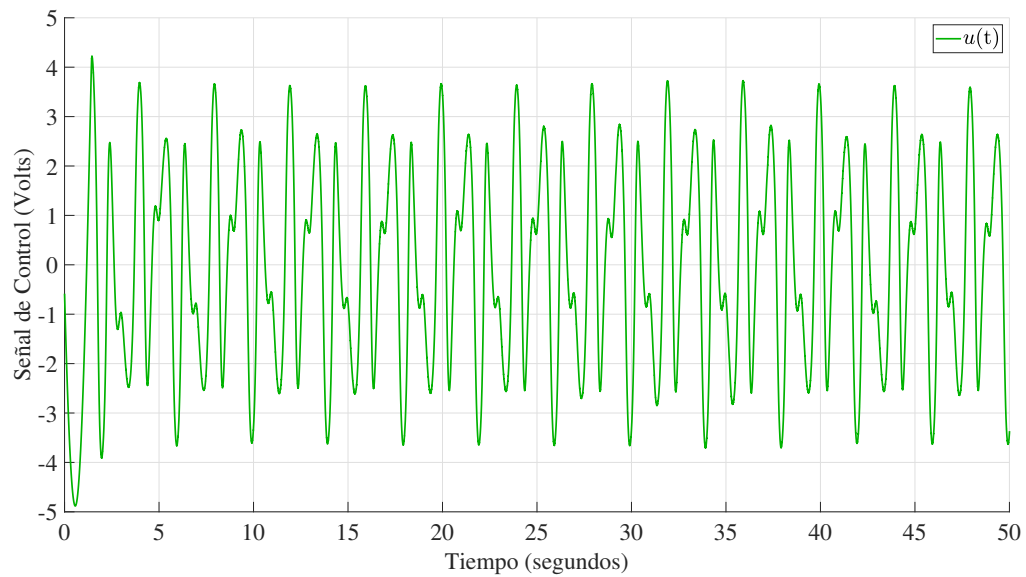


Figura 5.18: Resultados experimentales. Comportamiento de la señal de control utilizando un PID.

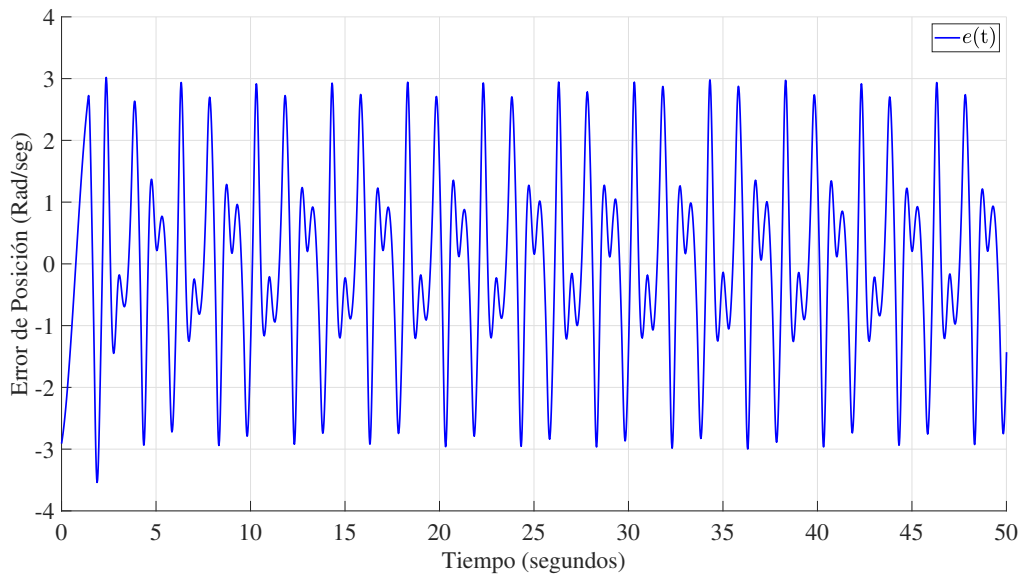


Figura 5.19: Resultados experimentales. Comportamiento el error entre la referencia, con amplitud de 180 grados, y el ángulo del péndulo simple aplicando un control PID.

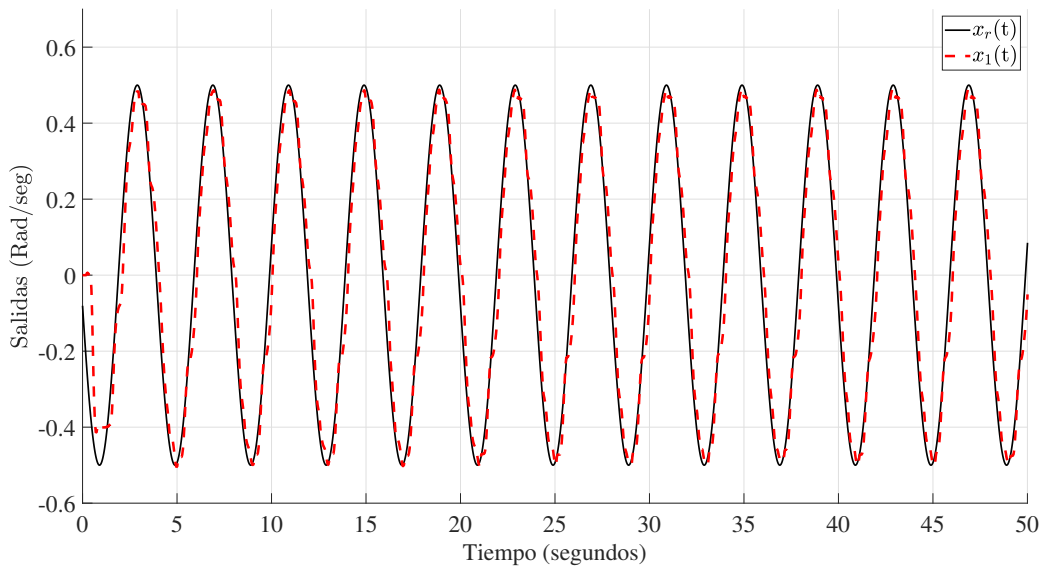


Figura 5.20: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de referencia con amplitud de 28 grados y ángulo del péndulo.

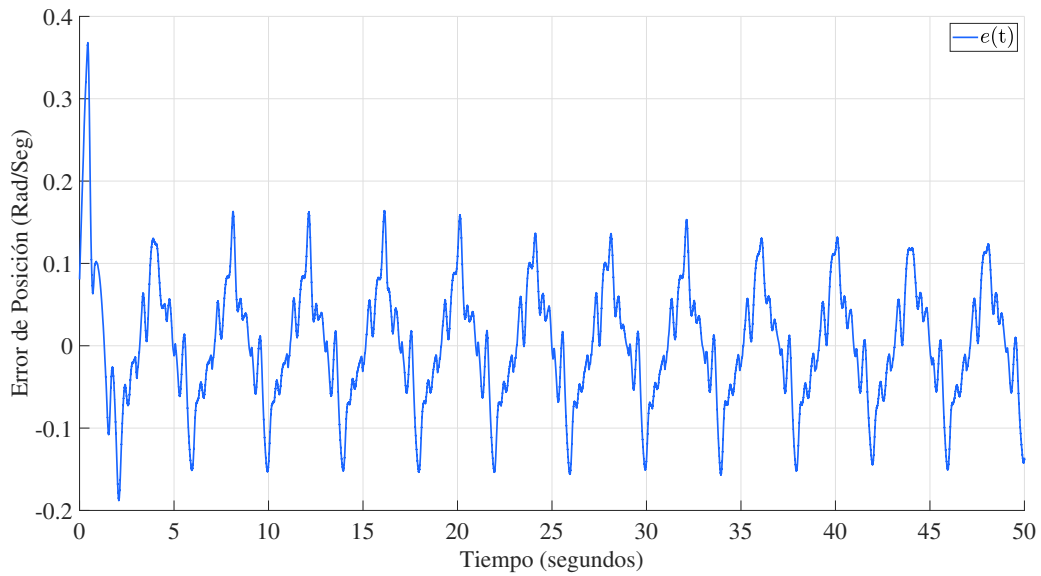


Figura 5.21: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de error entre la referencia y la salida del péndulo.

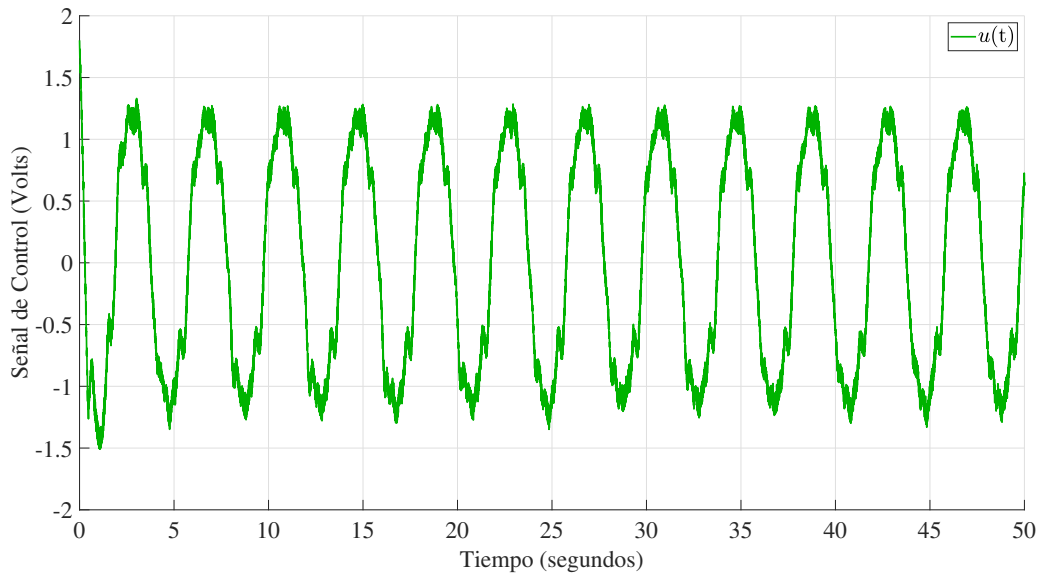


Figura 5.22: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de control.

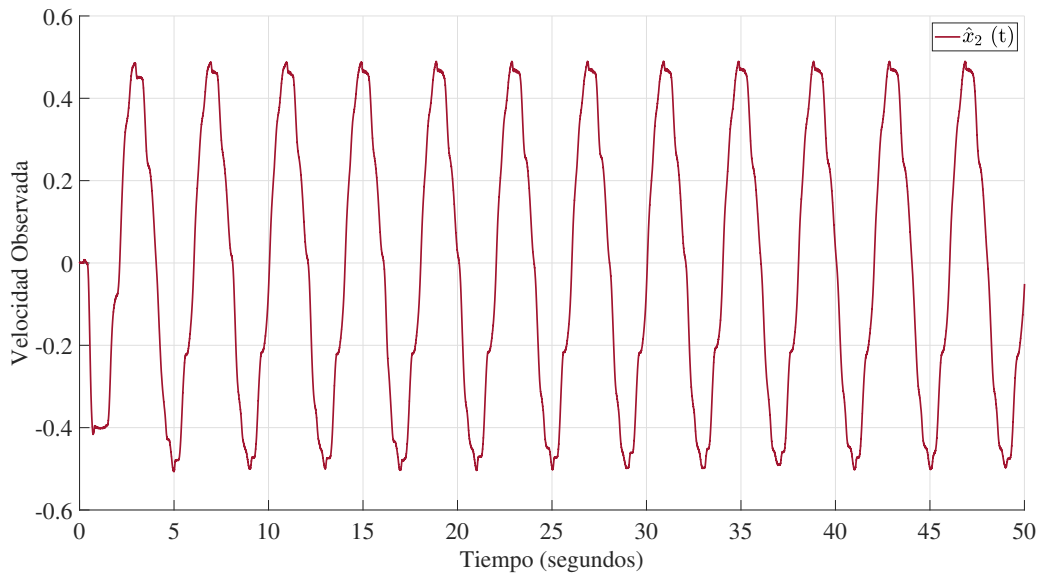


Figura 5.23: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Velocidad estimada.

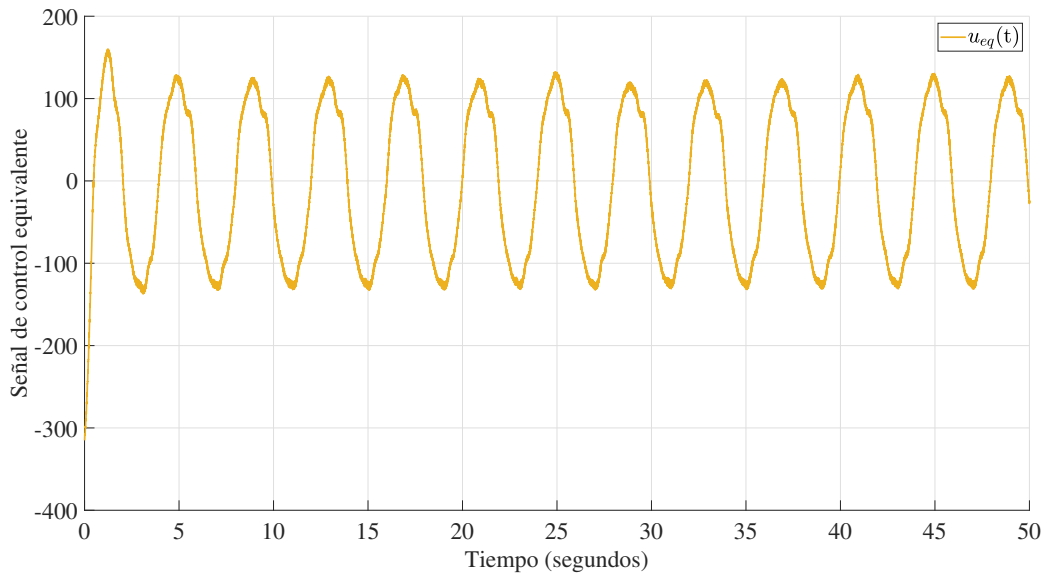


Figura 5.24: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Perturbación estimada.

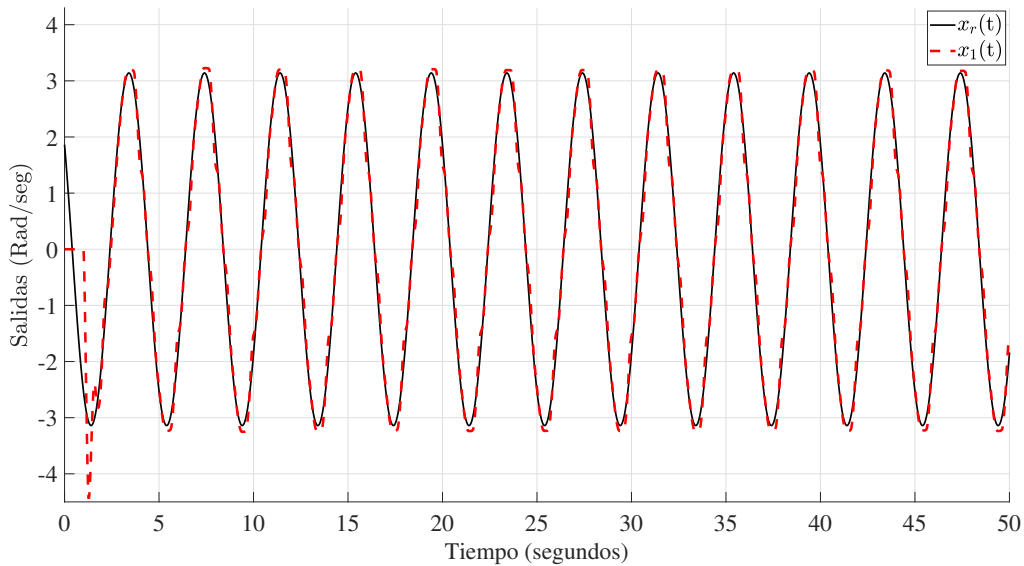


Figura 5.25: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de referencia con amplitud de 180 grados y ángulo del péndulo.

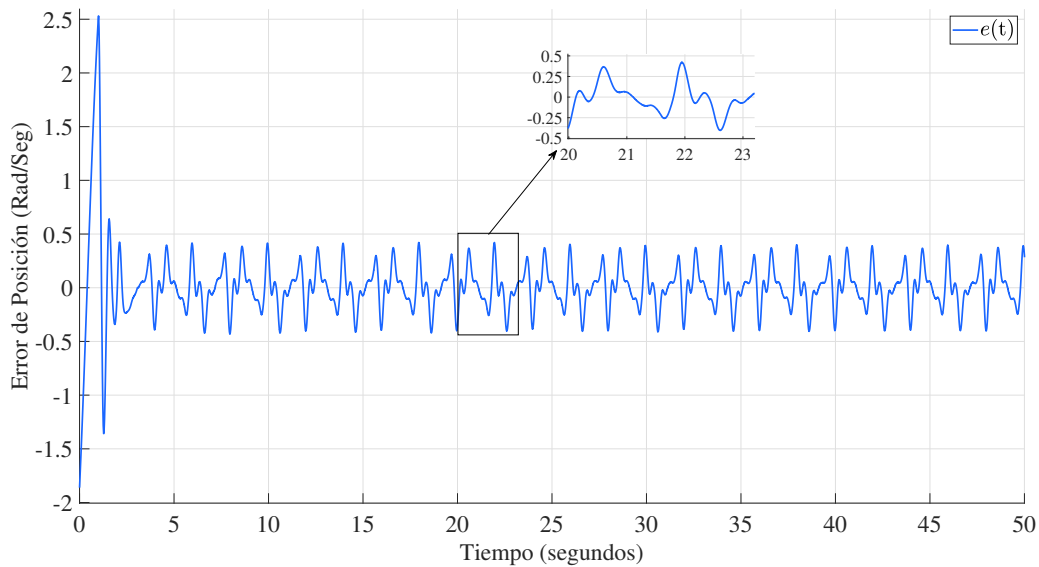


Figura 5.26: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de error entre la referencia y la salida del péndulo.

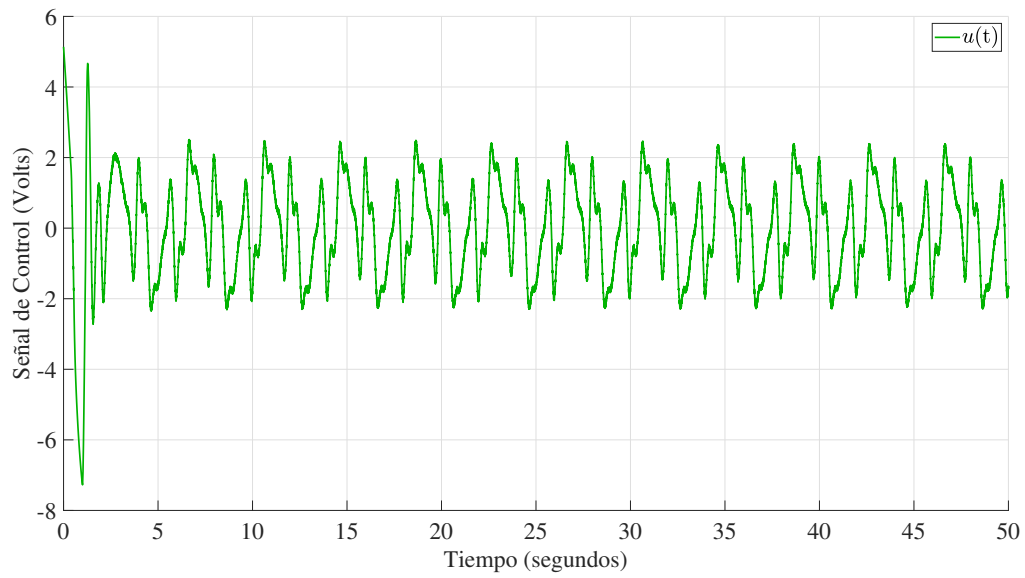


Figura 5.27: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Señal de control

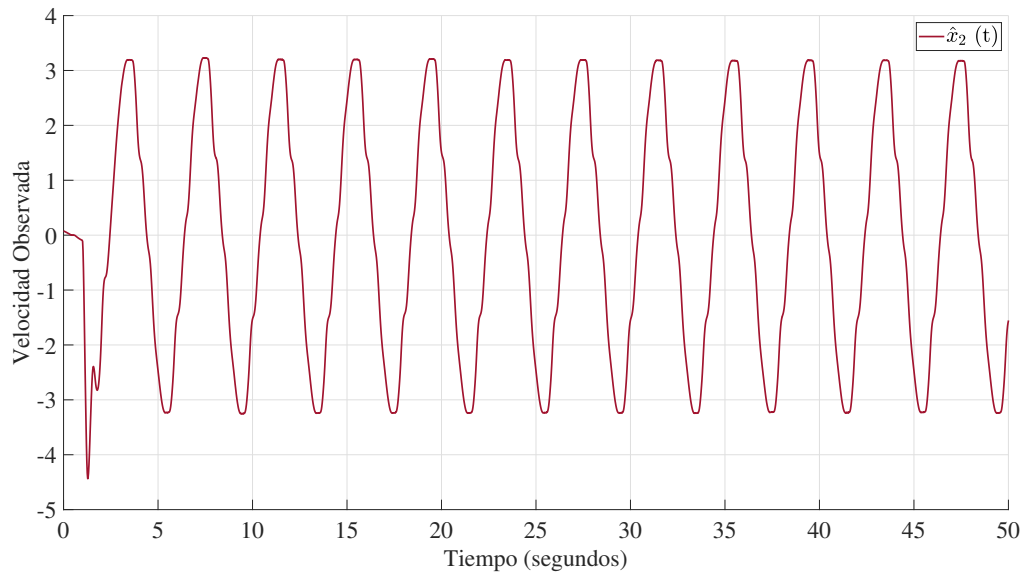


Figura 5.28: velocidad estimada del péndulo simple con una referencia senoidal con amplitud igual a 180

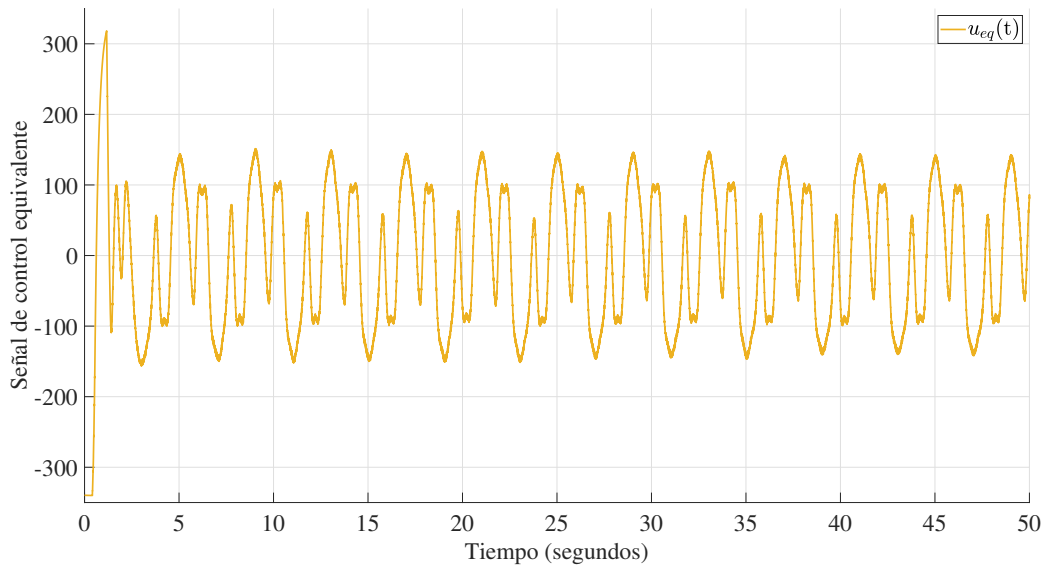


Figura 5.29: Resultados experimentales aplicando la estructura de control ADRC. Perturbación estimada.

5.3.3. Análisis de datos

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la simulación y la experimentación de ambas estructuras de control. Las figuras 7.36 y 7.37 representan los valores del error de posición para datos simulados y experimentales respectivamente. Podemos notar que, en la figura 7.37, los datos del diagrama de caja nos indican que la estructura ADRC, cuenta con menores valores dispersos entre su límite superior y su límite inferior, como se observa en la tabla 7.1, Esto nos indica que el error es menor entre la posición real y la posición estimada, a diferencia de los experimentos utilizando estructura de control PID. El error de posición, haciendo uso de la estructura ADRC, disminuyó en un 31% en comparación al desempeño del controlador PID tomando como referencia 28 grados. Notablemente, al aplicar una referencia de 180 grados, el error de posición decreció un 18% contra la estructura PID. Con esto, podemos concretar que la estructura ADRC se mantuvo con un mayor grado de robustez, ya que es capaz de compensar las perturbaciones, como lo pueden ser fuerzas gravitacionales, que afectan directamente al sistema. En la figura 7.38 se observa el índice de desempeño de la integral del error absoluto.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.001595	-0.01622
Límite superior	0.08784	-0.01516
Límite inferior	-0.0906	-0.01708
IAE	1.6094	0.2911
Error promedio absoluto	0.0805	0.0146

Tabla 5.1: Índices de desempeño en las simulaciones numéricas

Índice	PID	ADRC
Media	-0.008111	-0.0001827
Límite superior	0.1716	0.05039
Límite inferior	-0.1819	-0.04835
IAE	3.9066	1.2467
Error promedio absoluto	0.1953	0.0623

Tabla 5.2: Índices de desempeño en los experimentos a una amplitud de 28 grados.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.08344	0.001498
Límite superior	0.9597	0.09673
Límite inferior	-0.9154	-0.1125
IAE	24.4323	4.4280
Error promedio absoluto	1.2217	0.2214

Tabla 5.3: Índices de desempeño en los experimentos a una amplitud de 180 grados.

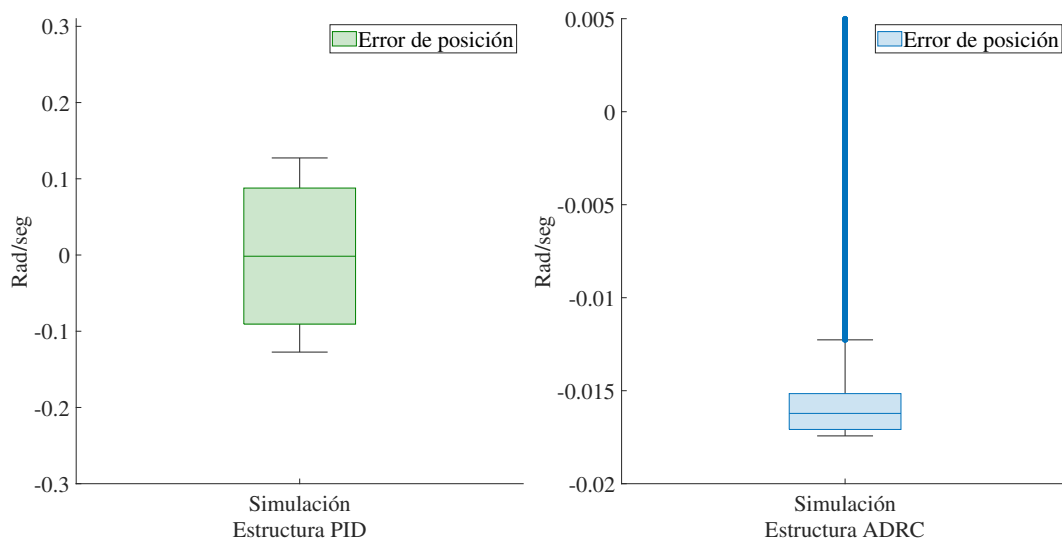


Figura 5.30: Diagrama de caja de las simulaciones para cada estructura de control.

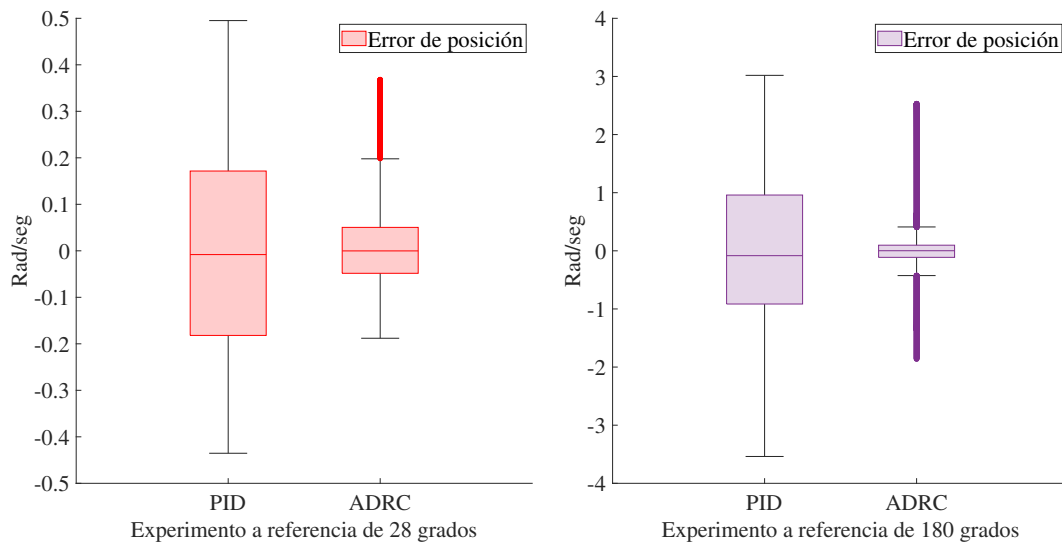


Figura 5.31: Diagrama de caja de los experimentos para cada estructura de control.

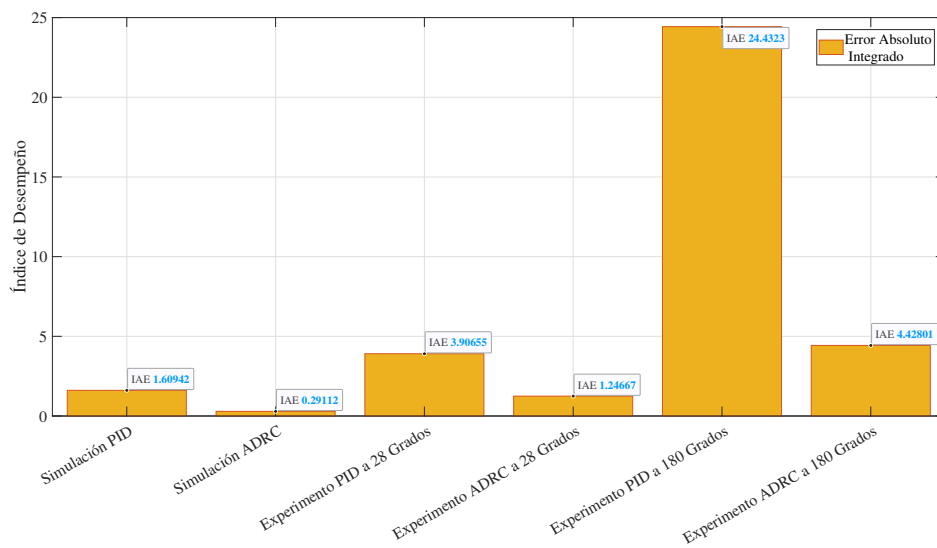


Figura 5.32: Índices de desempeño entre estructuras de control.

Capítulo 6

Robot manipulador de 5 G.D.L. RV-M1

Los robots industriales se usan con frecuencia en la industria para mejorar la productividad, ya que un robot puede realizar tareas monótonas y complejas sin errores en la operación y a altas velocidades comparadas con los operadores humanos [12]. Un robot industrial manipula objetos con una forma y un peso determinado, por lo tanto, debe tener una estructura mecánica que le permita hacer esa manipulación en un espacio de trabajo determinado. Además, deben de tener la fuerza suficiente para realizar la tarea.

Existen diferentes tipos de robots industriales, desde los típicos brazos manipuladores que se encuentran fijos sobre una base, hasta los robots móviles que pueden desplazarse libremente en las instalaciones realizando diferentes tareas [12].

Con el objetivo de comparar el desempeño del controlador PID y la estructura ADRC en robots industriales, en este capítulo se utiliza el robot RV-M1, fabricado por la empresa Mitsubishi, como prototipo para desarrollar pruebas experimentales. Este robot es un brazo manipulador de 5 grados de libertad (GDL) en arquitectura abierta. En la siguiente sección se explica a detalle las características de este robot.

6.1. Descripción del robot RV-M1

El robot Mitsubishi RV-M1, es una cadena cinemática abierta de cinco grados de libertad. Este robot se clasifica como un brazo manipulador, por lo que cada uno de sus eslabones recibe un nombre relacionado al cuerpo humano, como se puede ver en la figura

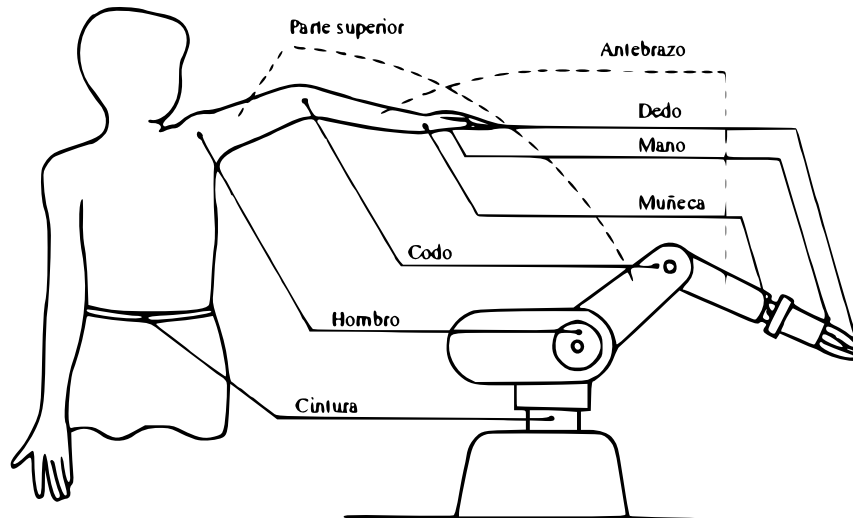


Figura 6.1: Nombre de los ejes correspondientes al del cuerpo humano (Figura extraída de [22]).

6.1.

El robot RV-M1 tiene 5 eslabones y cinco articulaciones, todas ellas rotacionales. El par que hace posible el movimiento de cada una de las articulaciones es generado por un motor de corriente directa, que a su vez, cuenta con un encoder incremental que permite la medición de la posición angular. También cuenta con interruptores de fin de carrera en cada articulación. En la figura 6.2 se muestra como se distribuyen los componentes eléctricos internos del robot en cada uno de sus ejes. El eslabón 5 del robot cuenta con una herramienta, la cual opera en forma similar a un motor de corriente directa. En las articulaciones 2 y 3 se tienen colocados frenos electromecánicos, como se observan en la figura 6.2, que se liberan con un voltaje de 12 V de corriente continua obtenido directamente de la etapa de potencia.

Como se mencionó anteriormente, el robot cuenta con cinco grados de libertad, definiendo un espacio de trabajo adecuado para un sin número de aplicaciones industriales. Cada una de las articulaciones tiene movimiento rotacional, el sentido del movimiento de cada una de ellas se define en la figura 6.3. Es importante mencionar que, dependiendo de nuestra referencia, es posible definir el sentido sea positivo o negativo del movimiento de cada articulación para su funcionamiento.

Finalmente, las dimensiones de los eslabones de robot y, en consecuencia, el espacio de

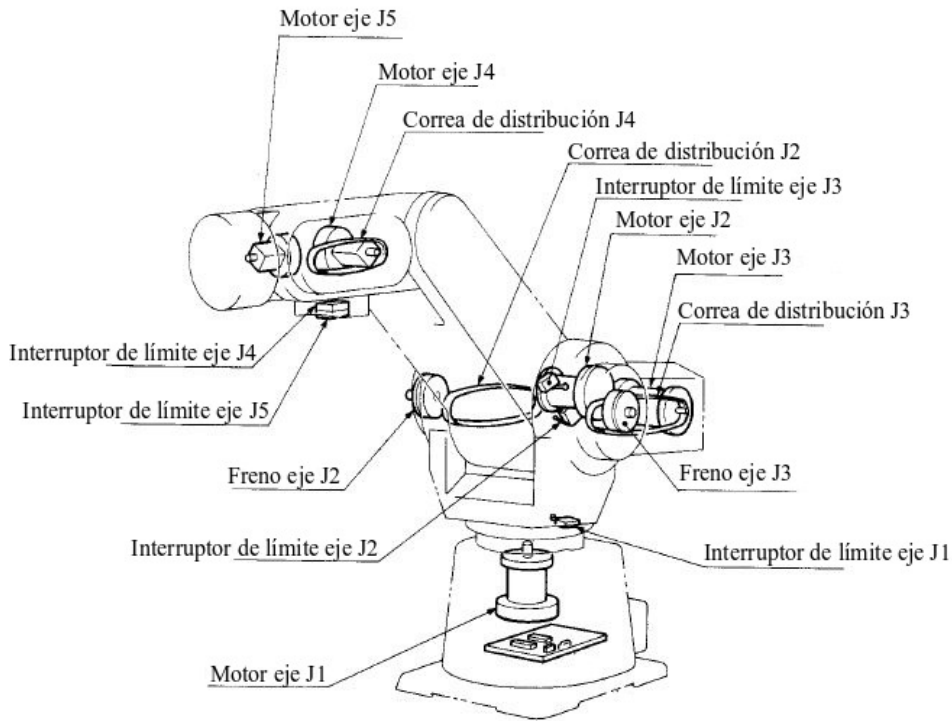


Figura 6.2: Nomenclatura interna del robot RV-M1 (Figura extraída de [22]).

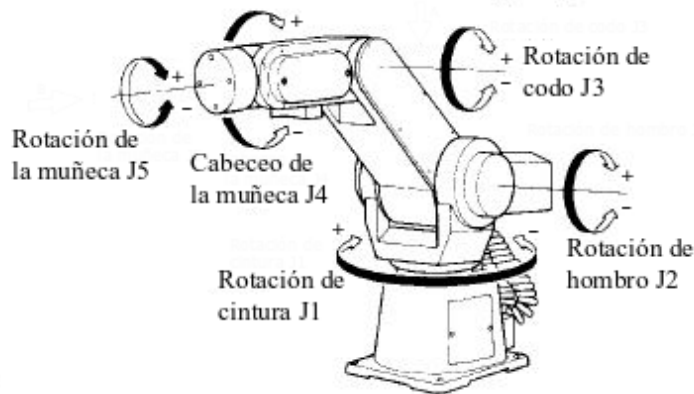


Figura 6.3: Características de movimiento de ejes en robot RV-M1. (Figura extraída de [22]).

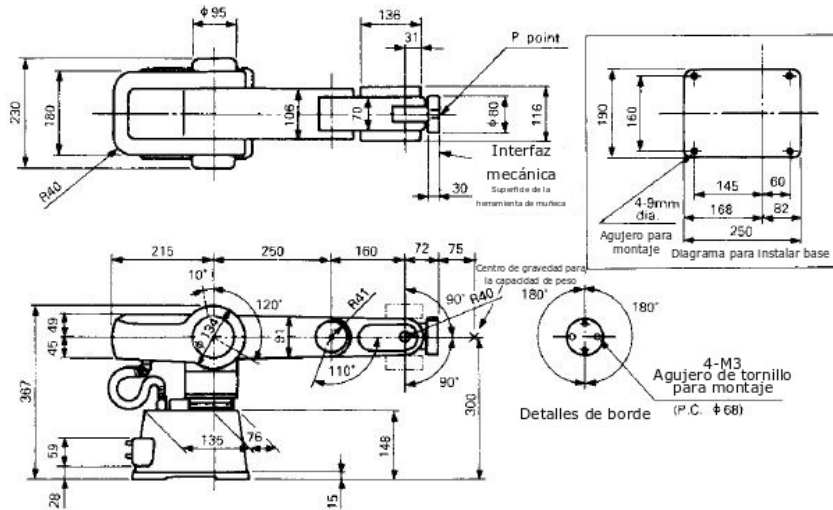


Figura 6.4: Dimensiones del robot RV-M1. (Figura extraída de [22]).

trabajo del robot se muestra en las figuras 6.4 y 6.5, respectivamente.

Debido a la complejidad de este robot, en este capítulo se omite el modelado e identificación del modelo dinámico. De esta forma, la comparación del desempeño de los controladores se realiza solo considerando la estructura del modelo y de un proceso de sintonización de las ganancias de los controladores, todo en forma experimental, en consecuencia, se puede evaluar el desempeño de del controlador PID y de la estructura ADRC en un caso en donde se desconoce el modelo de la planta.

6.2. Resultados experimentales aplicando un controlador PID al robot RV-M1

Para el caso del controlador PID, se implementó, en forma independiente, un controlador para cada articulación, por lo que no se consideró el efecto de la dinámica del resto de las articulaciones, ni los parámetros de la planta. En cada articulación se aplicó una señal de referencia tipo senoidal, con una amplitud y frecuencia de acuerdo a cada articulación. Finalmente, es importante hacer dos observaciones, la primera es que la articulación 2 está dañada, por lo que solo se aplicaron controladores a las articulaciones 1, 3, 4 y 5. La segunda es que los resultados que se muestran en cada articulación corresponden a

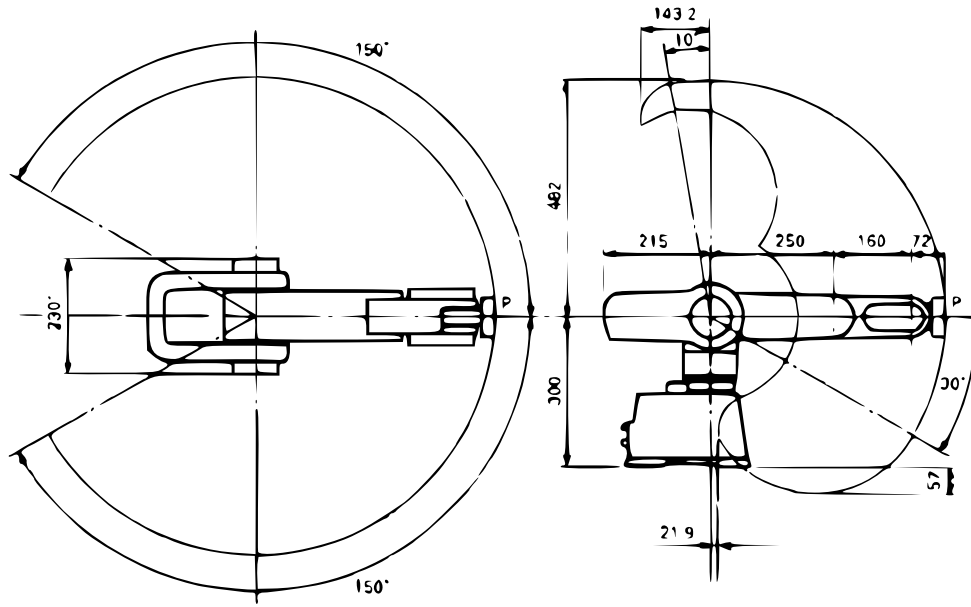


Figura 6.5: Espacio de operación del robot RV-M1. (Figura extraída de [22]).

movimientos simultáneos de las 4 articulaciones.

En la figura 6.6 se muestra el comportamiento de la señal de referencia $x_r(t)$, línea negra, y la posición angular del primer eslabón $x_1(t)$, línea punteada roja. Se observa un comportamiento típico de un control PID clásico cuando se aplica una referencia variante en el tiempo; la salida de la planta trata de seguir la referencia pero existe un error permanente que puede parecer un desfase. En la figura 6.7 se muestra la señal de control, la cual tiene una forma senoidal, no se satura y no tiene componentes de alta frecuencia. Finalmente, en la figura 6.8 se muestra el comportamiento del error entre la referencia y la posición angular de la articulación 1, como se puede observar, el valor absoluto del error tiene un valor máximo de 0.4 radianes.

Este mismo tipo de experimentos se aplicaron a las articulaciones 3, 4 y 5. Los resultados correspondientes a la articulación 3 se muestran en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11, que corresponden a la señal de referencia y ángulo de la articulación 3, señal de control y error de control respectivamente. En este caso se puede observar que el valor absoluto del error tiene menor magnitud, al rededor de 0.1 radianes. Un comportamiento similar ocurre en la articulación 4, figuras 6.12, 6.13 y 6.14, y para la articulación 5, figuras 6.15, 6.16 y 6.17.

Es importante mencionar que el mayor error de seguimiento se obtuvo en la articulación

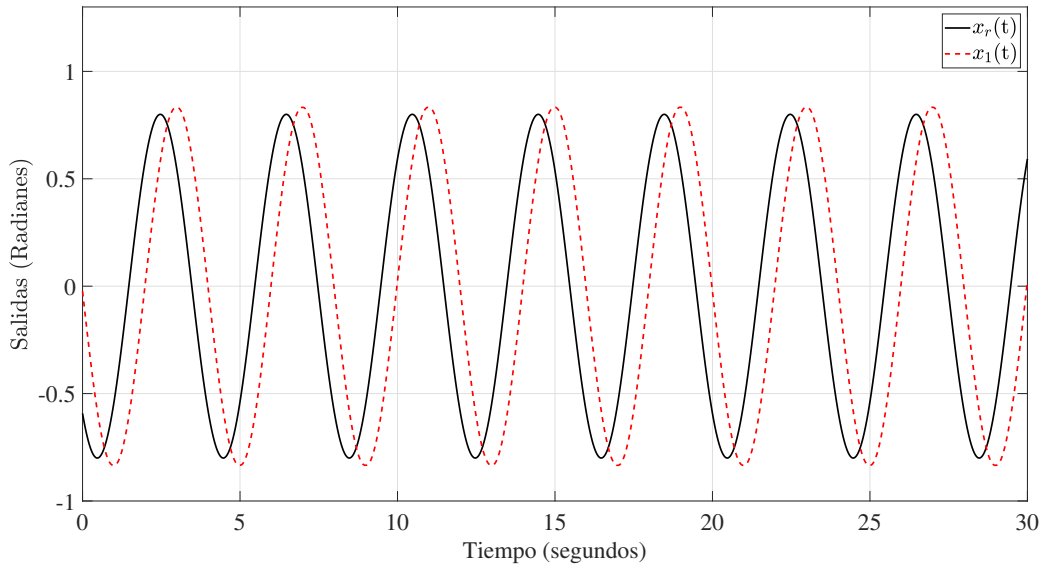


Figura 6.6: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del eje 1 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.

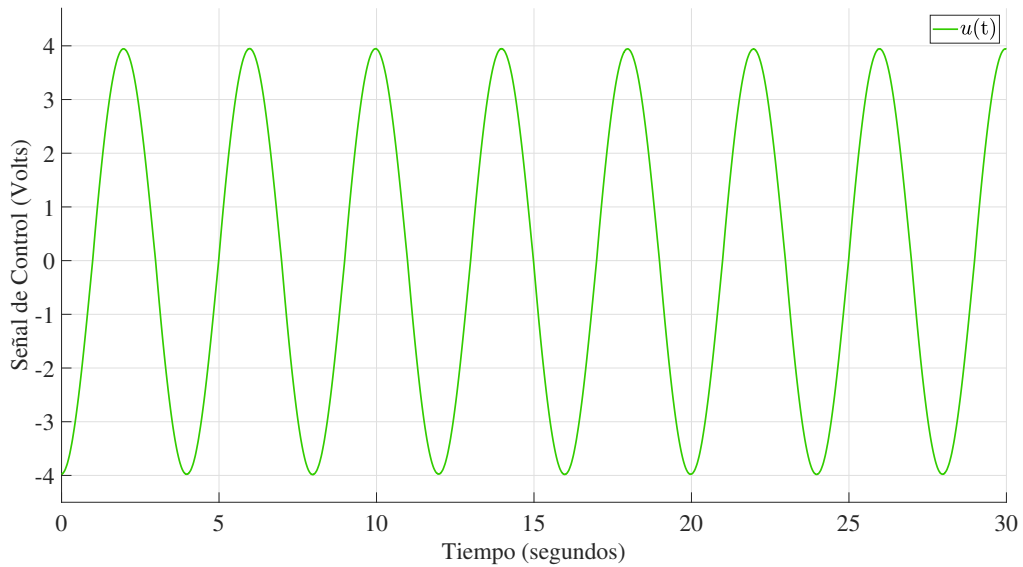


Figura 6.7: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 1, utilizando el controlador PID.

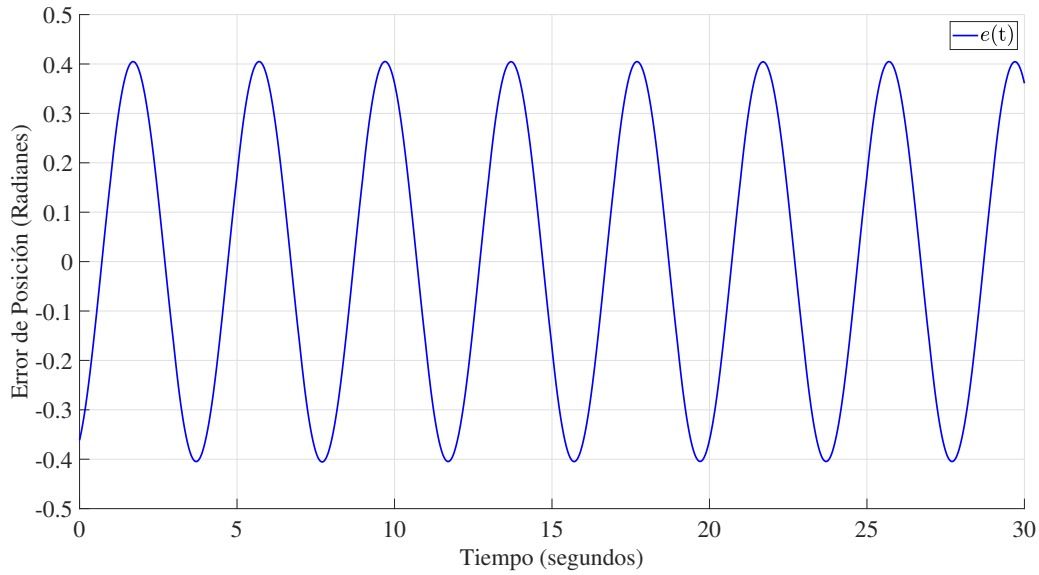


Figura 6.8: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID.

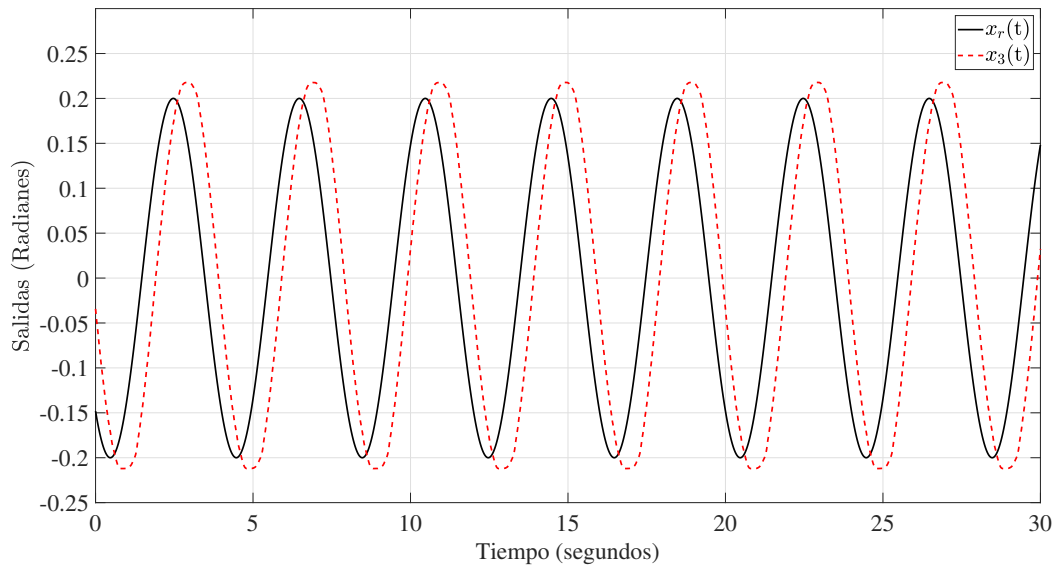


Figura 6.9: Comportamiento de la posición $x_3(t)$ del eje 3 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.

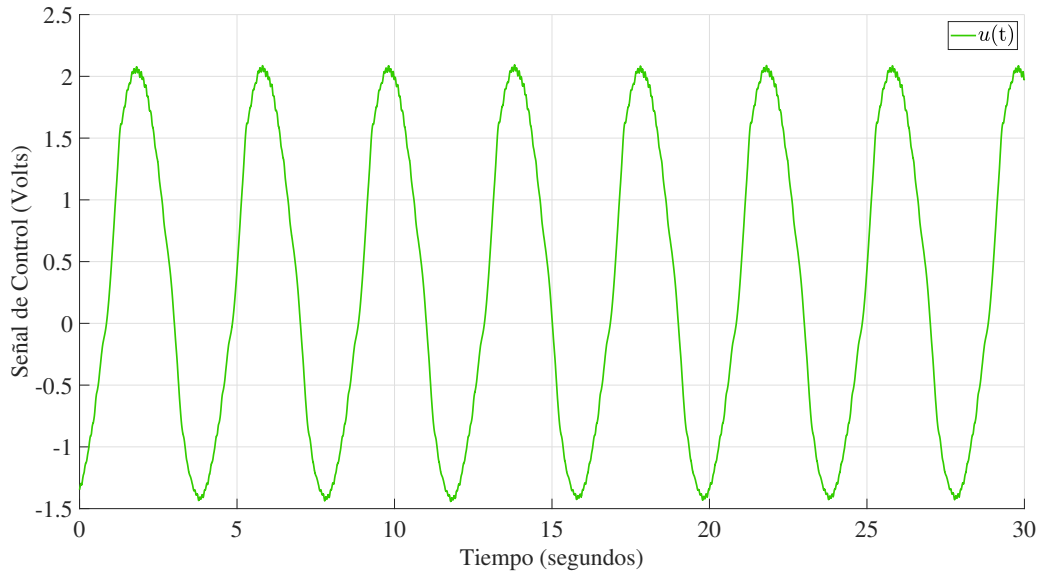


Figura 6.10: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 3, utilizando el controlador PID.

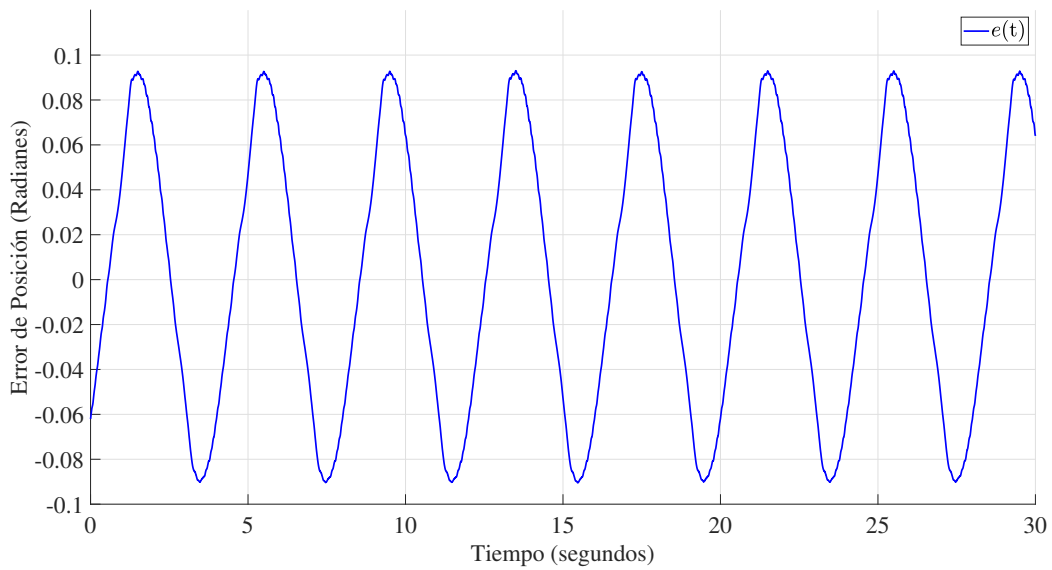


Figura 6.11: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_3(t)$, utilizando el controlador PID.

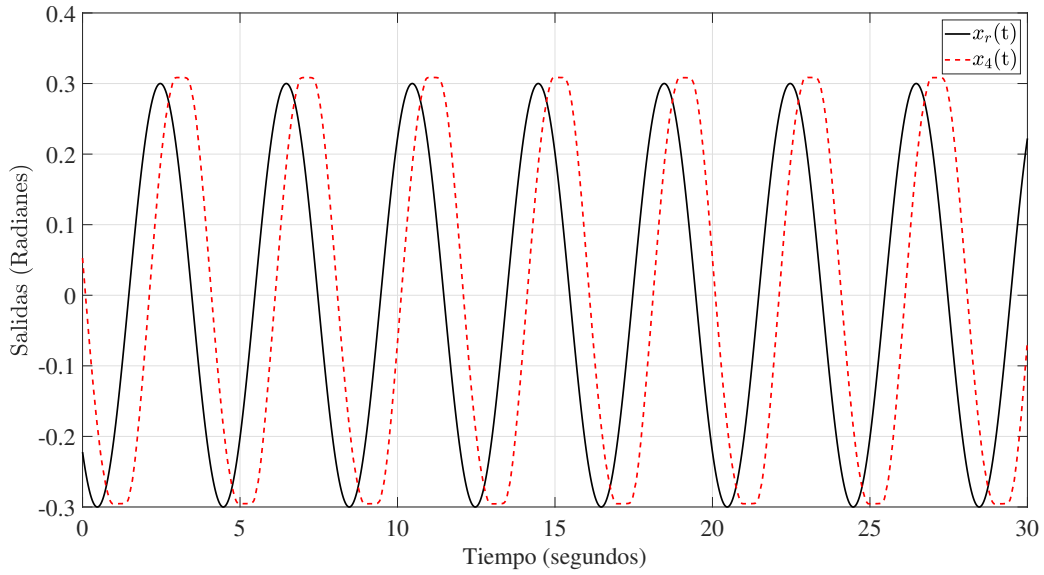


Figura 6.12: Comportamiento de la posición $x_4(t)$ del eje 4 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.

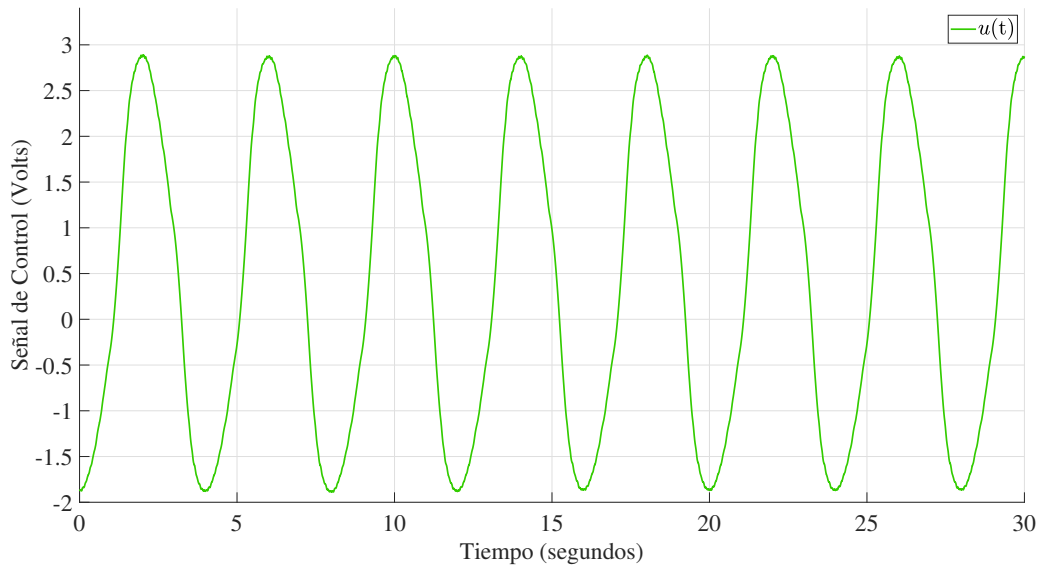


Figura 6.13: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 4, utilizando el controlador PID.

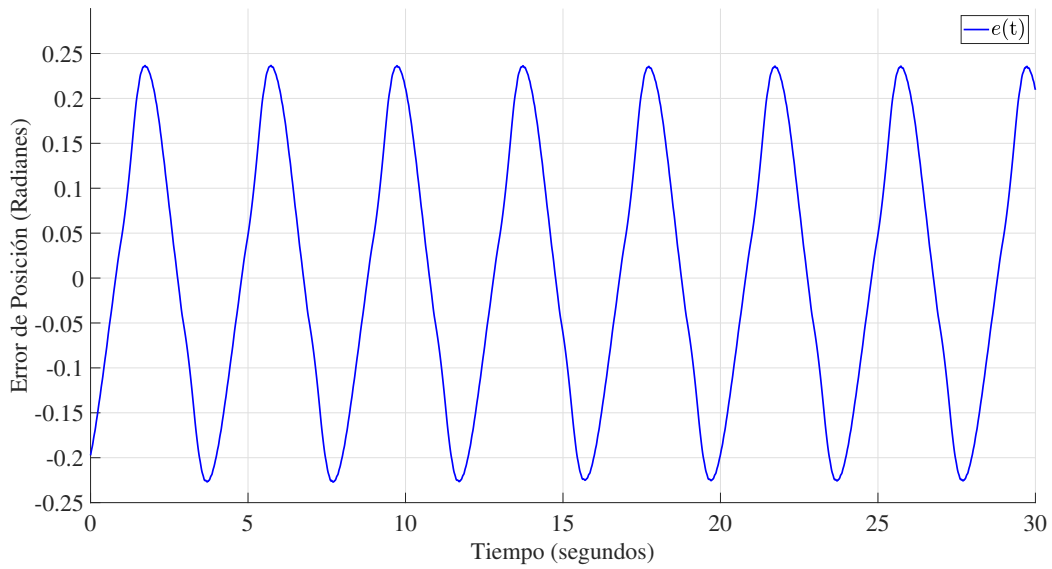


Figura 6.14: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_4(t)$, utilizando el controlador PID.

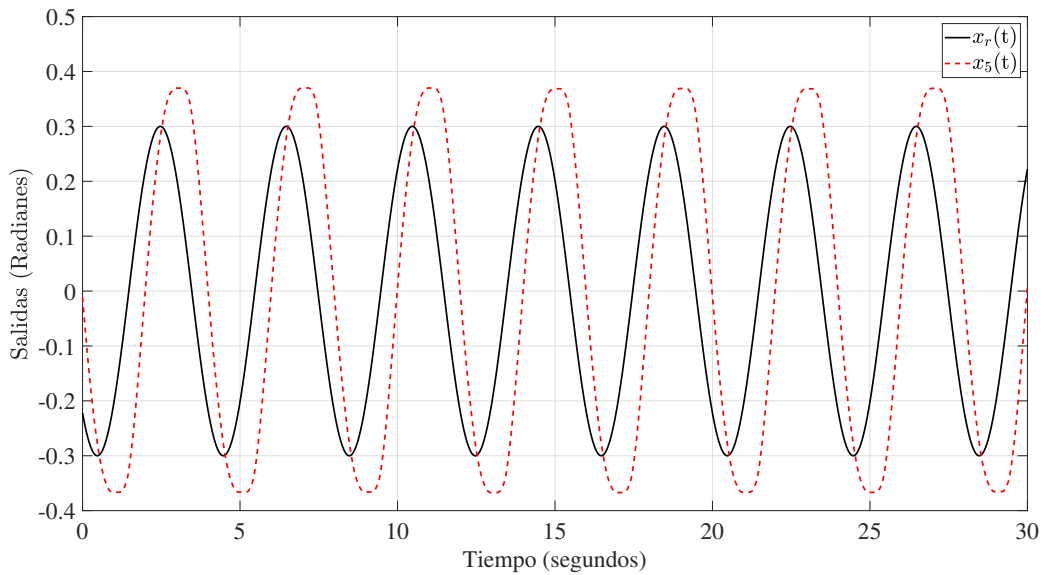


Figura 6.15: Comportamiento de la posición $x_5(t)$ del eje 5 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando el controlador PID.

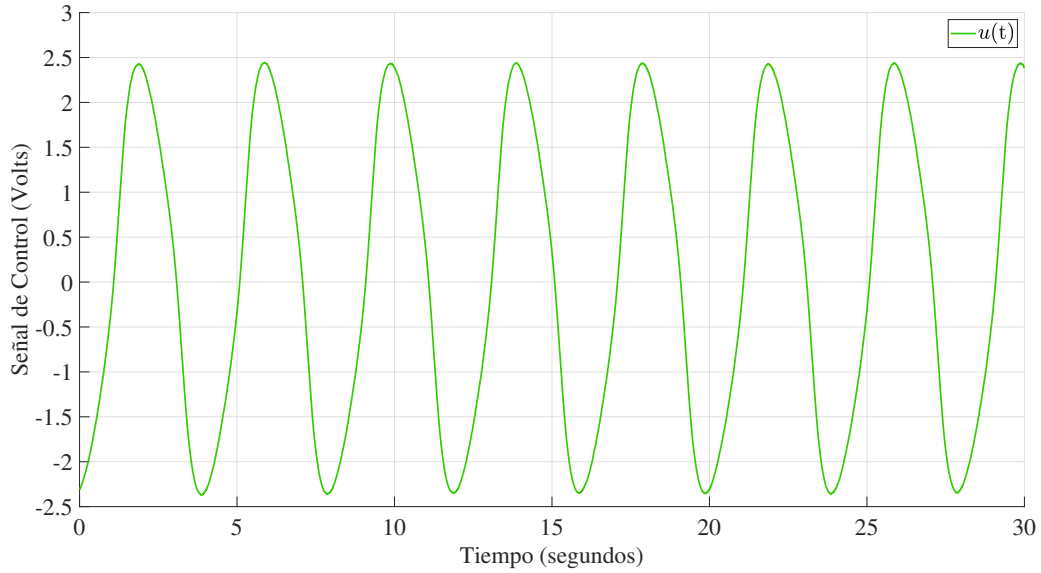


Figura 6.16: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 5, utilizando el controlador PID.

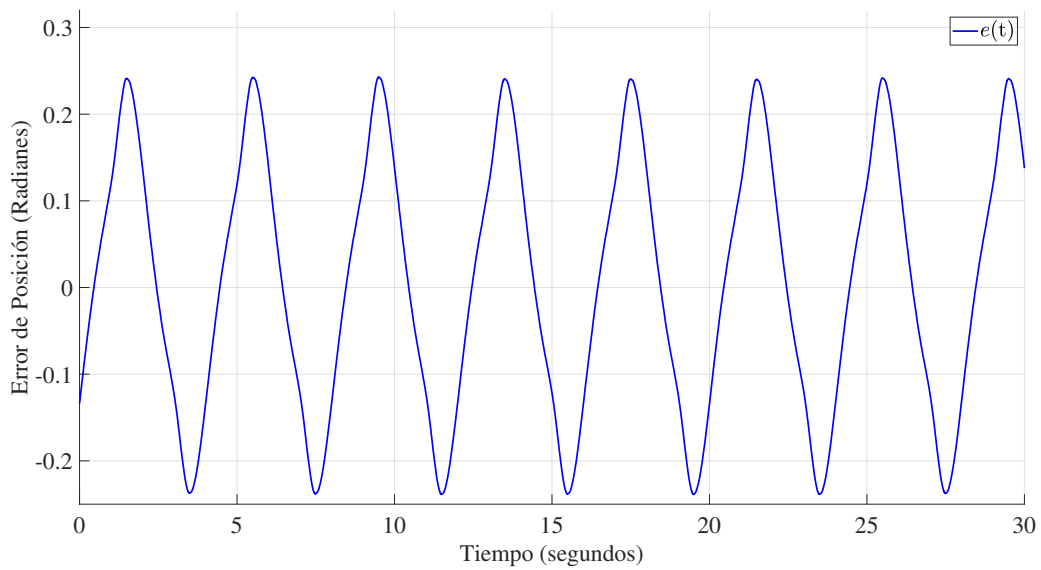


Figura 6.17: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_5(t)$, utilizando la estructura PID.

5, a pesar de ser un elemento rotativo que no es afectado por la fuerza de gravedad.

6.3. Resultados experimentales al aplicar la estructura ADRC al robot RV-M1

En esta sección se presenta el desempeño de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones (ADRC) al robot RV-M1, con el objetivo de seguimiento de trayectorias en cada uno de sus eslabones. Al igual que en el caso del controlador PID de la sección anterior, se considera que no se cuenta con el modelo del robot y se aplicará un controlador independiente a cada uno de los eslabones, despreciando el efecto que tiene la dinámica del resto de los eslabones. El control nominal es un control por retroalimentación lineal de estados, el observador de estado tiene la forma (2.42) y el filtro para recuperar el control equivalente es de primer orden. Se aplicaron las mismas señales de referencia a cada articulación que se utilizaron con el controlador PID, y se hizo una sintonización de las ganancias del observador, del filtro y del controlador, tal que se minimizaran los errores de seguimiento. Los resultados se muestran en las figuras 6.18 a 6.29. Como se puede observar, en las articulaciones 1,3 y 5 se obtiene un mejor desempeño, aunque la señal de control contiene componentes de alta frecuencia, sin embargo, no afectó significativamente al mecanismo, es decir, no produjo vibraciones perceptibles. Sin embargo, en la articulación 4 hubo el mayor error entre la referencia y la salida del sistema, sin embargo el error que se obtiene con esta estructura de control es menor que con los controladores PID.

6.3.1. Análisis de datos

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la experimentación de ambas estructuras de control. Las figuras 7.36 y 7.37 representan los valores del error de posición para datos experimentales en los ejes 1 y 3 respectivamente, mientras que, Las figuras 6.32 y 6.33 representan los valores del error de posición para datos experimentales en los ejes 4 y 5 respectivamente. Podemos notar que, en la figura 7.37, los datos del diagrama de caja nos indican que la estructura ADRC, cuenta con menores valores dispersos entre

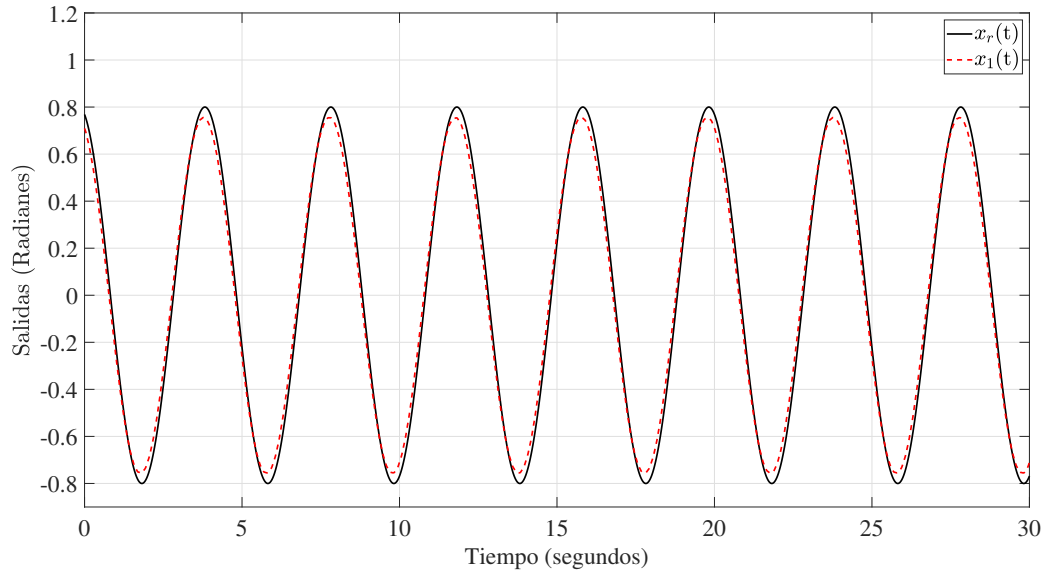


Figura 6.18: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del eje 1 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

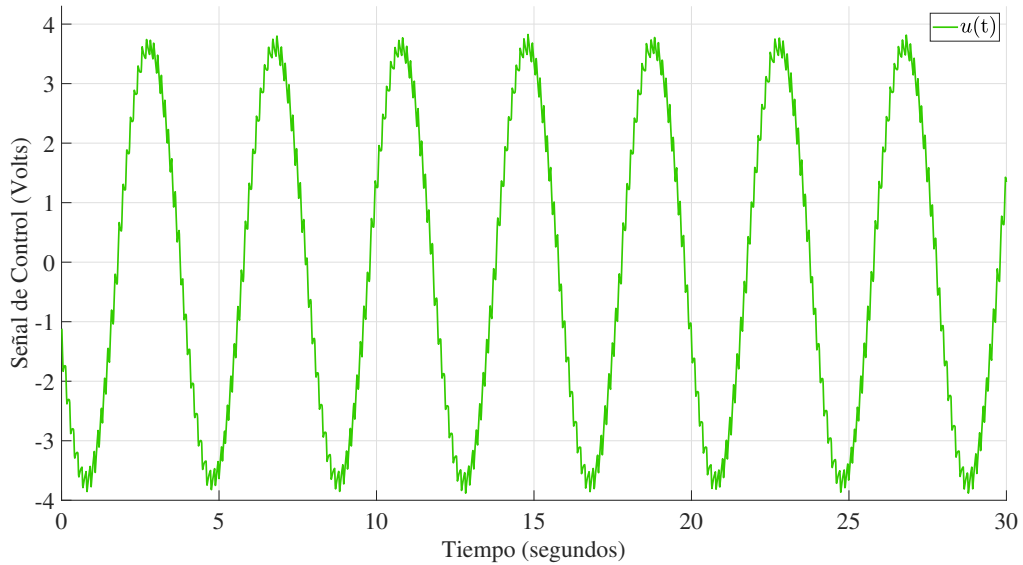


Figura 6.19: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 1, utilizando la estructura ADRC.

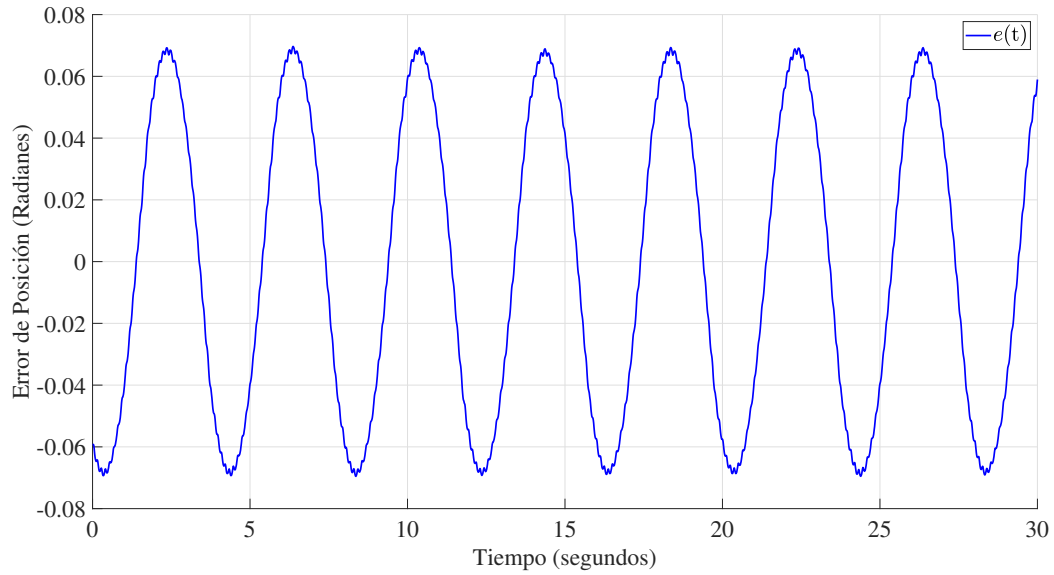


Figura 6.20: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y x_1 , utilizando la estructura ADRC.

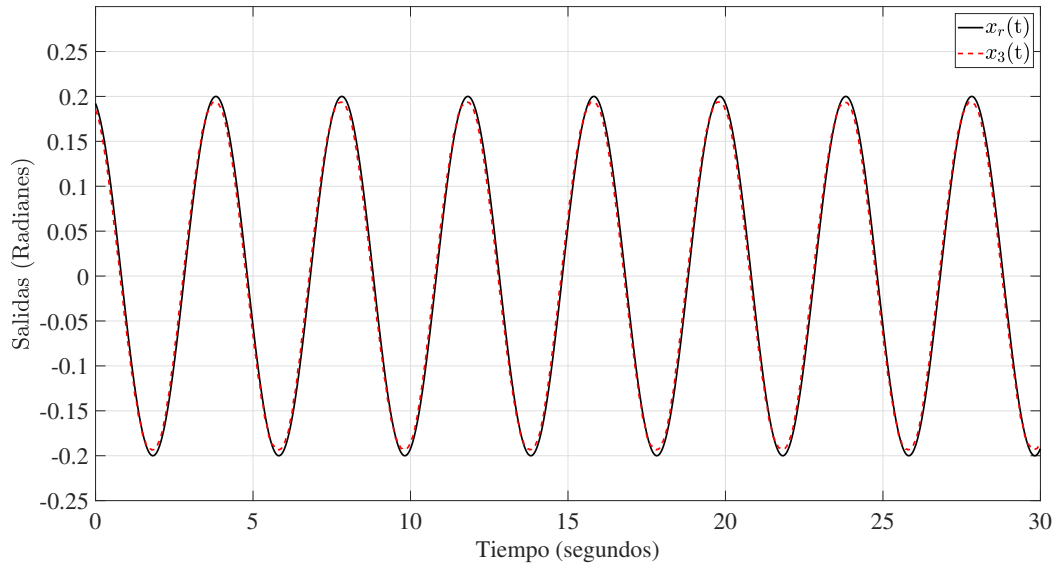


Figura 6.21: Comportamiento de la posición $x_3(t)$ del eje 3 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

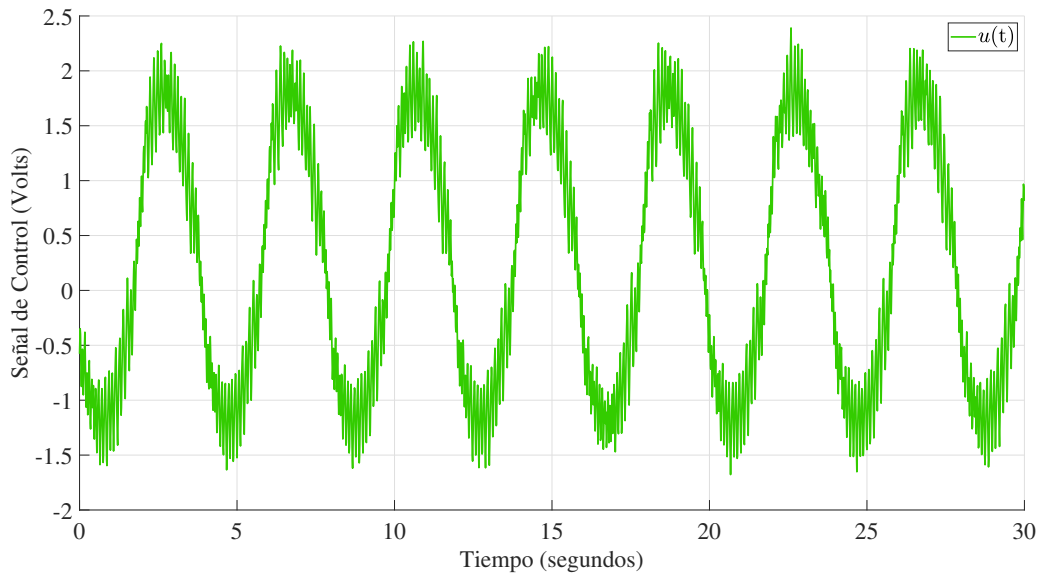


Figura 6.22: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 3, utilizando la estructura ADRC.

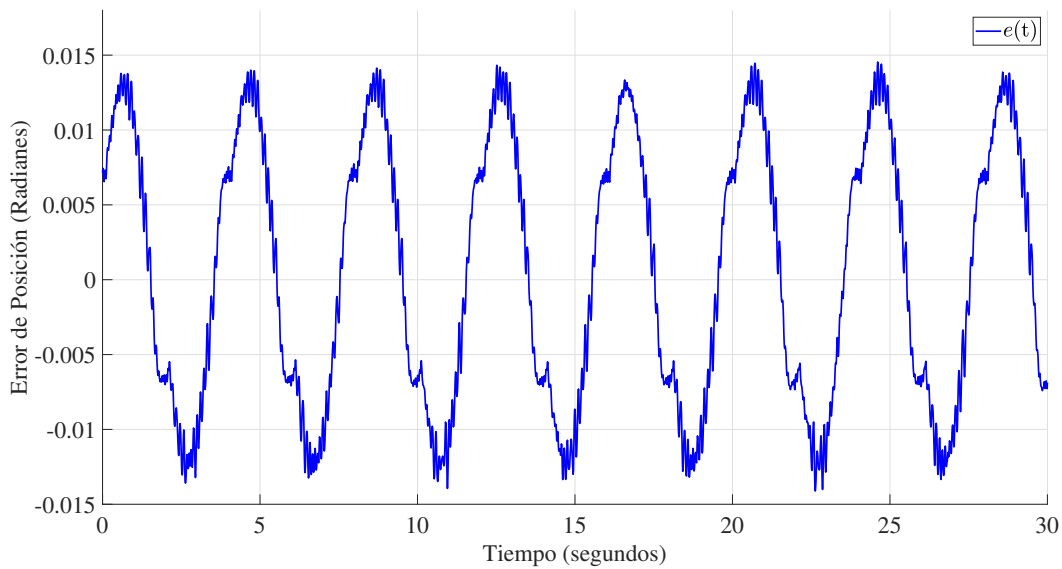


Figura 6.23: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_3(t)$, utilizando la estructura ADRC.

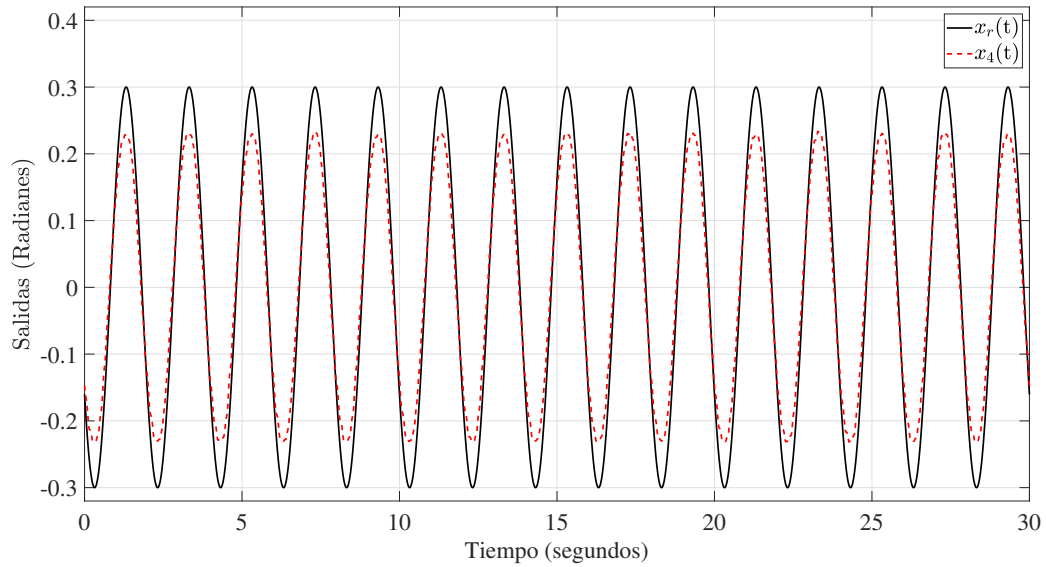


Figura 6.24: Comportamiento de la posición $x_4(t)$ del eje 4 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

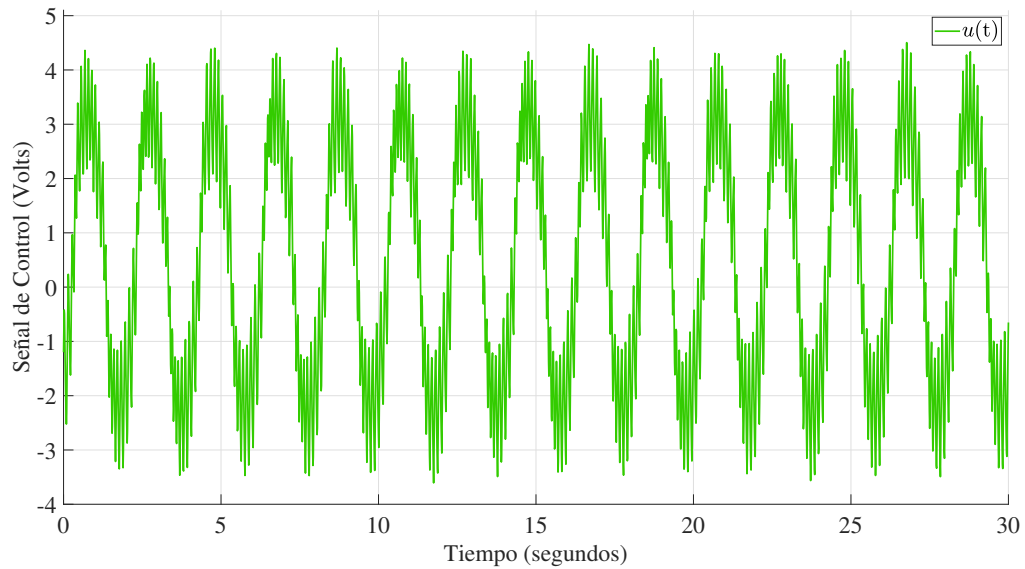


Figura 6.25: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 4, utilizando la estructura ADRC.

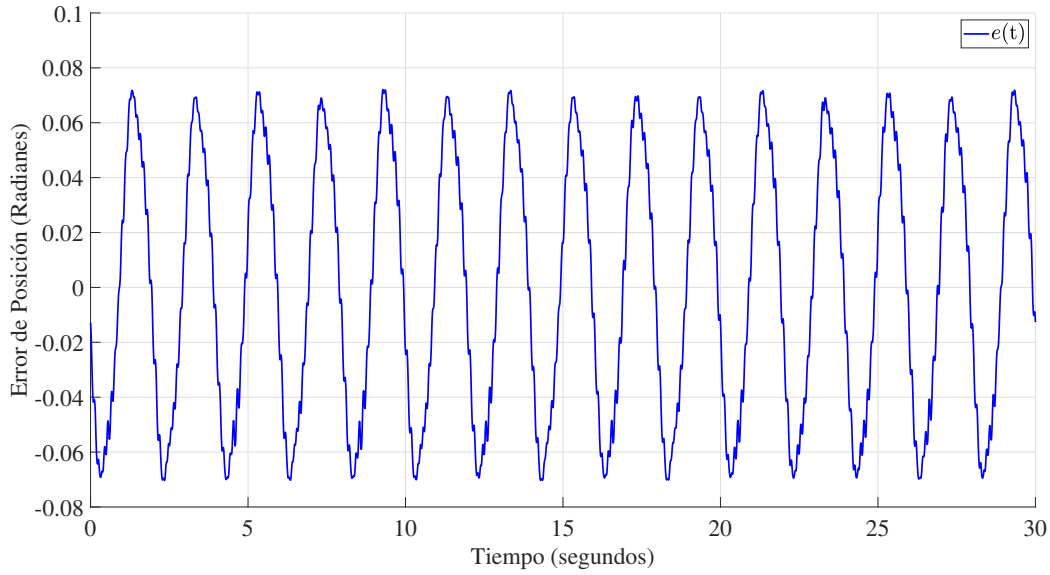


Figura 6.26: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_4(t)$, utilizando la estructura ADRC.

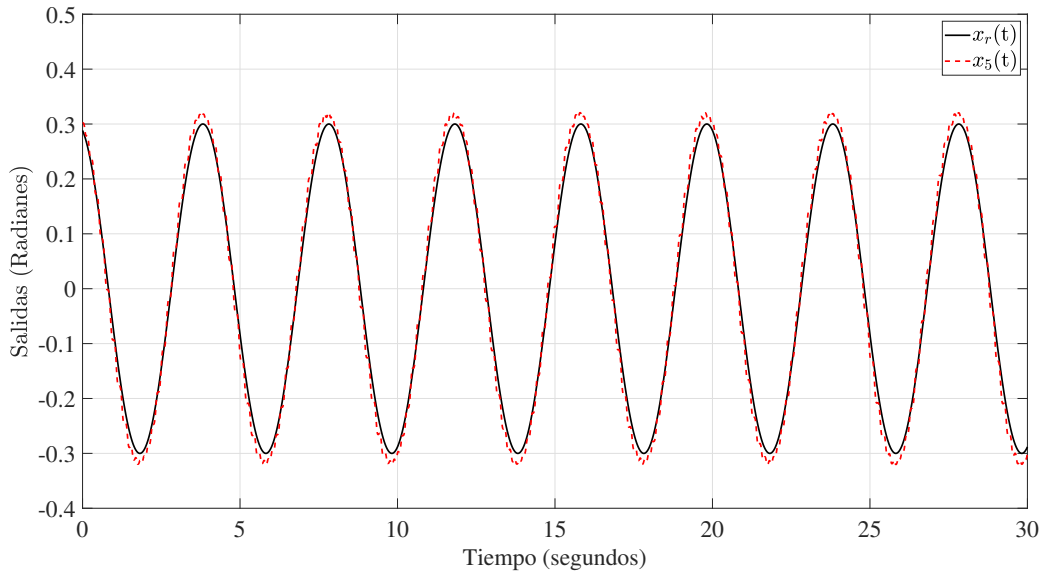


Figura 6.27: Comportamiento de la posición $x_5(t)$ del eje 5 y señal de referencia $x_r(t)$, utilizando la estructura ADRC.

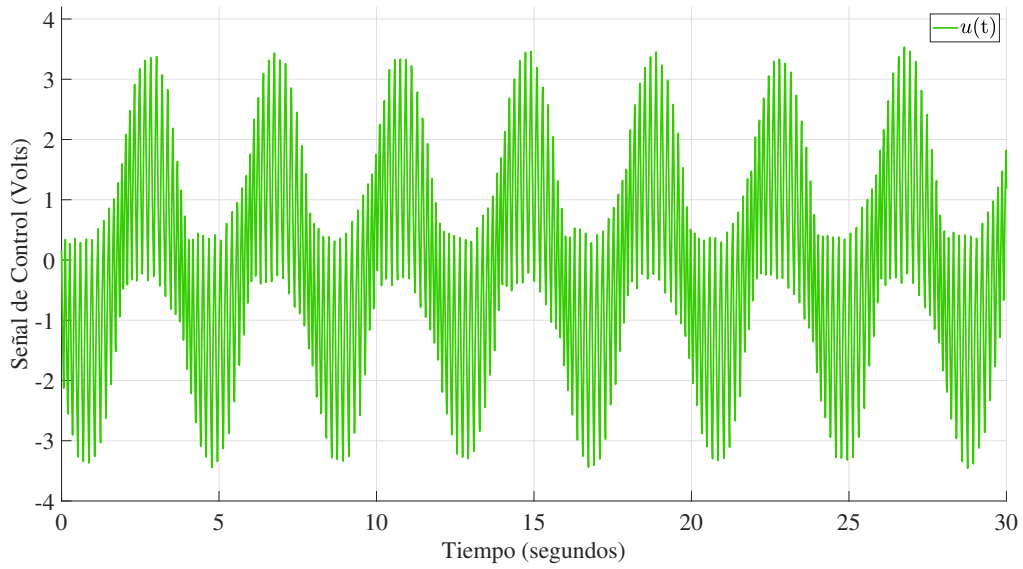


Figura 6.28: Comportamiento de la señal de control $u(t)$ aplicada al eje 5, utilizando la estructura ADRC.

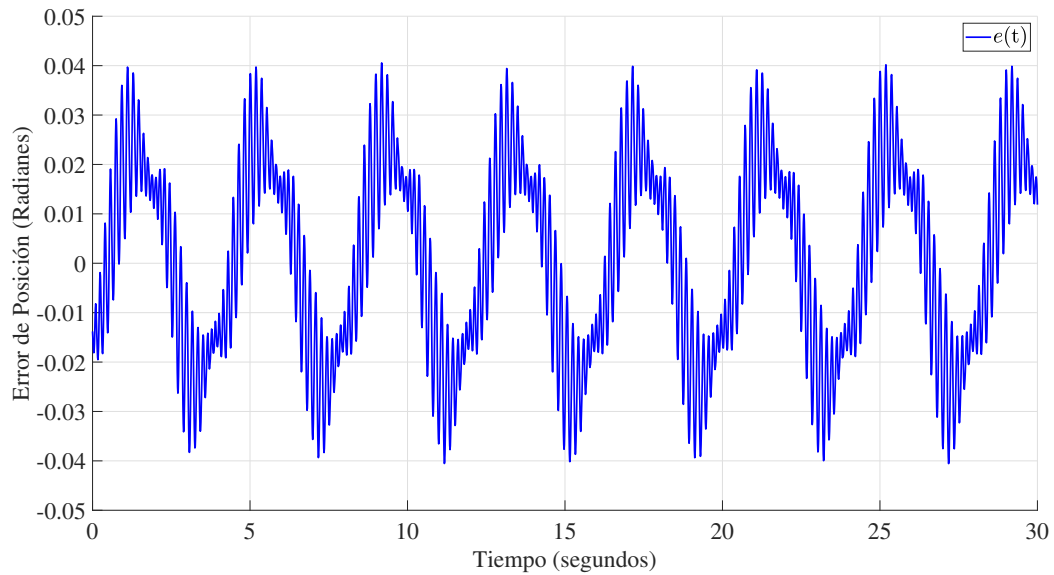


Figura 6.29: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_5(t)$, utilizando la estructura ADRC.

su límite superior y su límite inferior, como se observa en las tablas 7.1 y 7.2, Esto nos indica que el error es menor entre la posición real y la posición estimada, a diferencia de los experimentos utilizando estructura de control PID. Con esto, podemos concretar que la estructura ADRC se mantuvo con un mayor grado de robustez, ya que es capaz de compensar las perturbaciones, como lo pueden ser fuerzas gravitacionales, que afectan directamente al sistema. En la figura 7.38 se observa el índice de desempeño de la integral del error absoluto.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.006078	0.0002965
Límite superior	0.2832	0.05116
Límite inferior	-0.2921	-0.05076
IAE	5.2004	0.8957
Error promedio absoluto	0.2575	0.0448

Tabla 6.1: Índices de desempeño eje 1.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.001591	-0.0005217
Límite superior	0.05662	0.008156
Límite inferior	-0.05752	-0.007192
IAE	1.0973	0.1597
Error promedio absoluto	0.0543	0.0080

Tabla 6.2: Índices de desempeño eje 3.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.007163	0.0004714
Límite superior	0.1384	0.04714
Límite inferior	-0.1445	-0.04686
IAE	2.7070	0.8567
Error promedio absoluto	0.1340	0.04284

Tabla 6.3: Índices de desempeño eje 4

Índice	PID	ADRC
Media	-0.003749	0.0004179
Límite superior	0.1259	0.016
Límite inferior	-0.1268	-0.01583
IAE	2.6144	0.3377
Error promedio absoluto	0.1294	0.0169

Tabla 6.4: Índices de desempeño eje 5

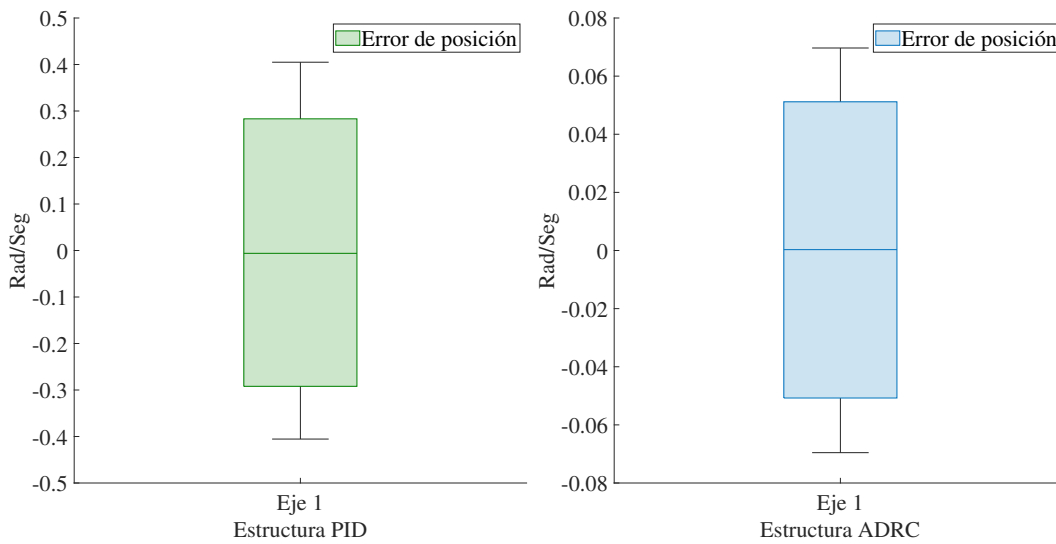


Figura 6.30: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 1.

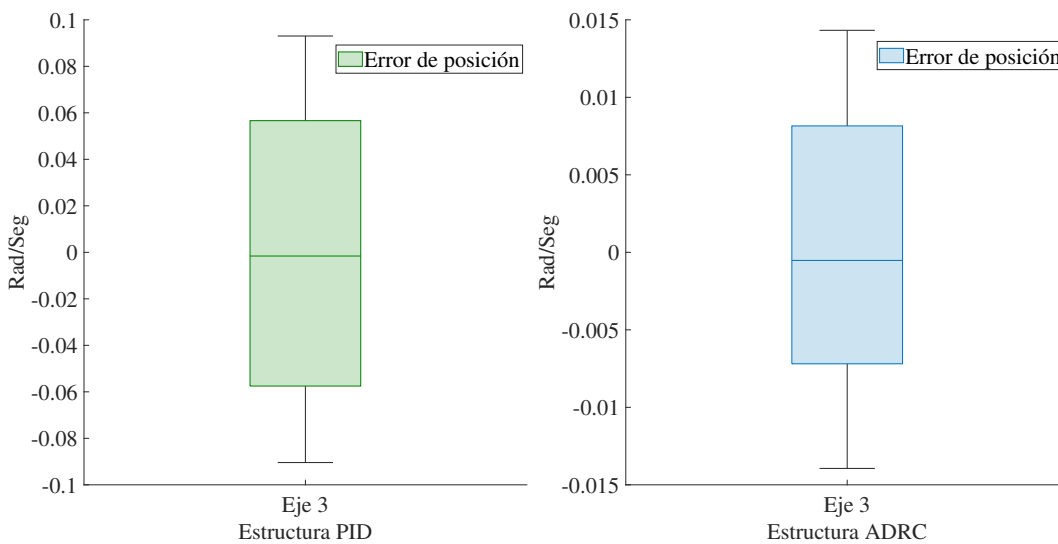


Figura 6.31: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 3.

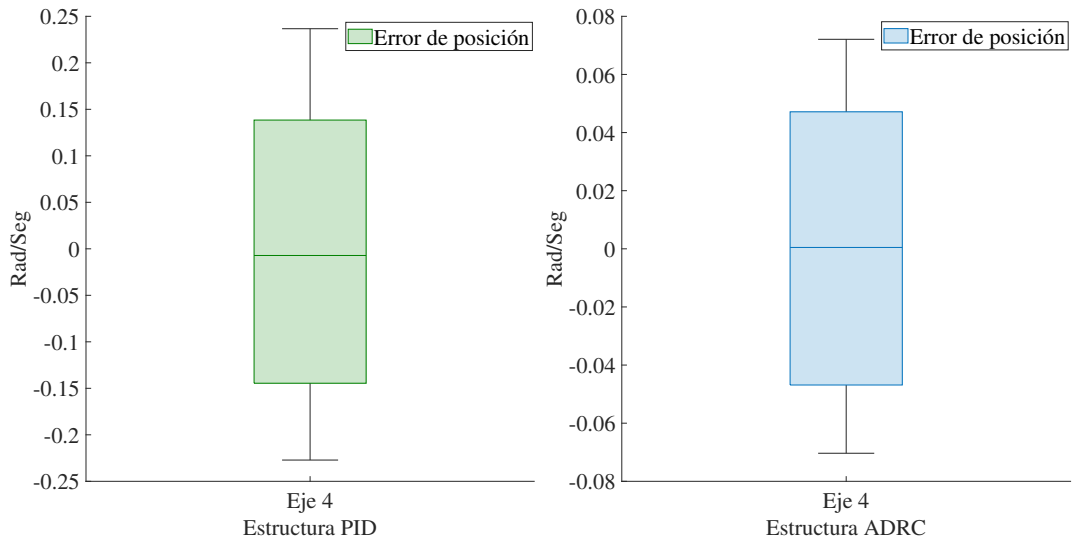


Figura 6.32: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 4.

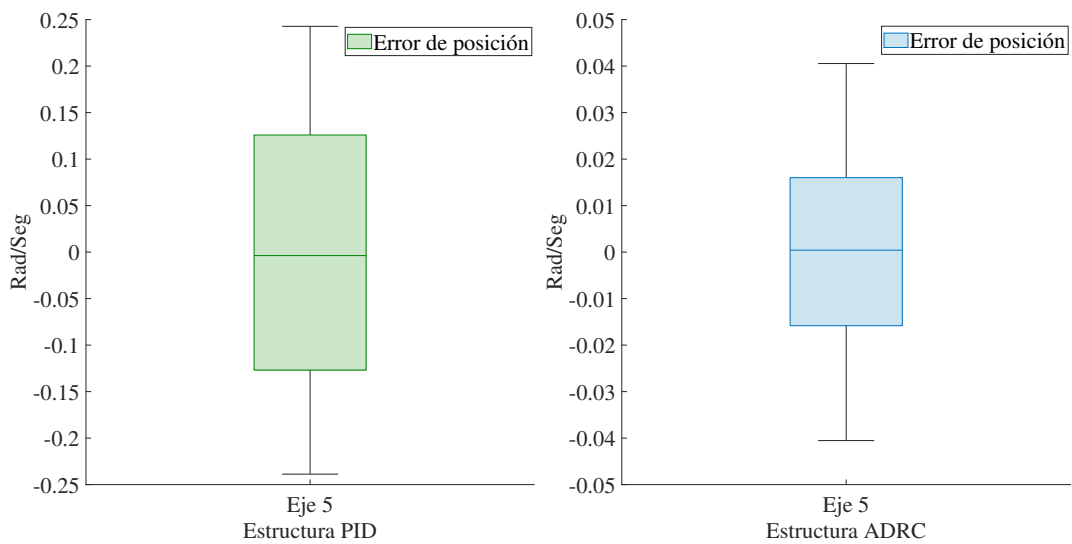


Figura 6.33: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados en eje 5.

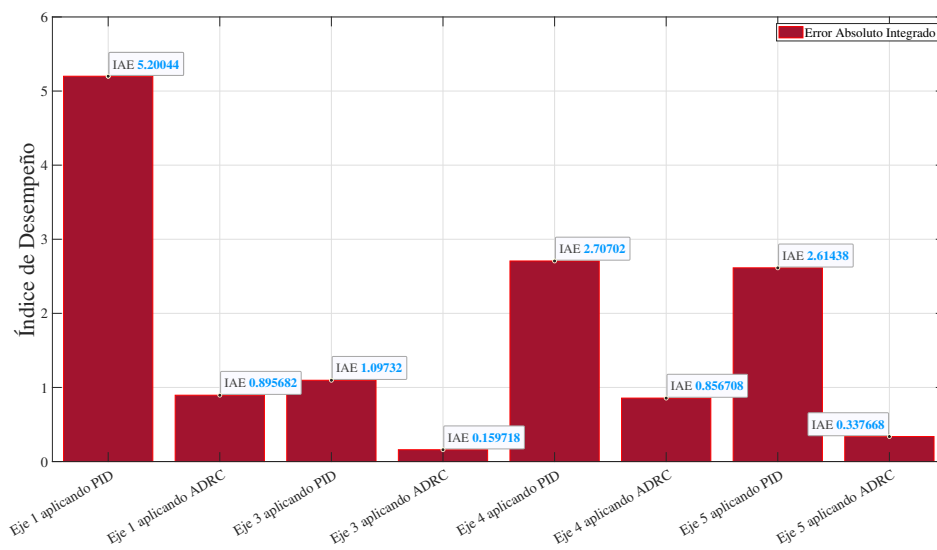


Figura 6.34: Índices de desempeño entre estructuras de control.

Capítulo 7

Actuador lineal basado en SMA

En este último capítulo se presentan los resultados experimentales de aplicar el control PID y la estructura de control ADRC en un mecanismo traslacional, el cual utiliza un resorte de Nitinol como actuador. Las aleaciones con memoria de forma, conocidas como SMA por sus siglas en inglés, pertenecen a una clase de materiales muy interesantes que se consideran inteligentes, uno de estos materiales es el Nitinol, el cual es una aleación de Níquel y Titanio. Este material puede memorizar una forma determinada, ser deformado por fuerzas externas y presentar una deformación plástica pero, aplicando calor puede recuperar su forma original y en este proceso genera una fuerza que puede ser utilizada para realizar diferentes aplicaciones. Estos materiales presentan muchas ventajas como ser parte de la estructura de un mecanismo, tener la función de actuador y tener la función de sensor, todo al mismo tiempo. Sin embargo, tienen una dinámica fuertemente no lineal que implica un gran reto en el diseño de algoritmos de control, es por este motivo que se realiza una comparación del desempeño de estas dos estructuras de control en este tipo de sistemas.

7.1. Introducción a las aleaciones con memoria de forma

El desarrollo de diferentes polímeros inició en la primera mitad del siglo XX, desde entonces, con la ayuda de los grandes desarrollos tecnológicos en manufactura, se han creado muchos materiales con características muy particulares, que pueden ser usados para re-

solver una cantidad significativa de problemas en diferentes áreas. Sin embargo, muchos de estos materiales aún están a nivel de laboratorio debido, principalmente, a su alto costo de fabricación y a la falta de un estudio completo de su comportamiento en diferentes ambientes y aplicaciones. Por lo tanto, el análisis de su comportamiento dinámico es fundamental ya que nos permitirá conocer el alcance de la operación de estos materiales y el desarrollo de algoritmos para su control. Como se ha mencionado previamente, las aleaciones con memoria de forma son una familia de materiales que han llevado a cabo su propio desarrollo industrial. Actualmente, los podemos encontrar en diferentes aplicaciones y pueden ser adquiridos con cierta facilidad en el mercado o sintetizados en laboratorios. Sin embargo, para incrementar su aplicabilidad, es necesario conocer con mayor detalle su comportamiento dinámico de tal forma que sea posible el desarrollo de algoritmos de control que permitan el desarrollo de aplicaciones de alta precisión, tanto en regulación como seguimiento de trayectorias y otros objetivos de control no convencionales. Los SMA son materiales que cambian su forma mediante la aplicación de estímulos externos. Aquí, el material cambia de forma cuando se calienta por encima de una cierta temperatura, un material de este tipo que se ha utilizado mucho en diferentes aplicaciones es la aleación de Níquel y Titanio, también conocida como Nitinol. En muchas aplicaciones, las aleaciones con memoria de forma podrían asumir la función de actuador. Por tanto, es fundamental conocer un modelo que nos permita estudiar su dinámica y, al mismo tiempo, diseñar algoritmos de control para resolver diferentes problemas de control. Los modelos actuales pueden ser muy complejos que no permiten el diseño de controladores. Varias estrategias de control han sido consideradas para resolver algunos objetivos de control. Algunos ejemplos son el control adaptivo robusto, la lógica difusa híbrida, los modos deslizantes y el control de modos deslizantes terminal. También se han aplicado controles PID tradicionales y algunas variaciones del control PID, como uno que consta de un Controlador PID convencional conectado en cascada con un compensador bilineal. Así mismo, se han aplicado controladores PIPD con pre-compensación conmutada para resolver el problema de control de regulación.

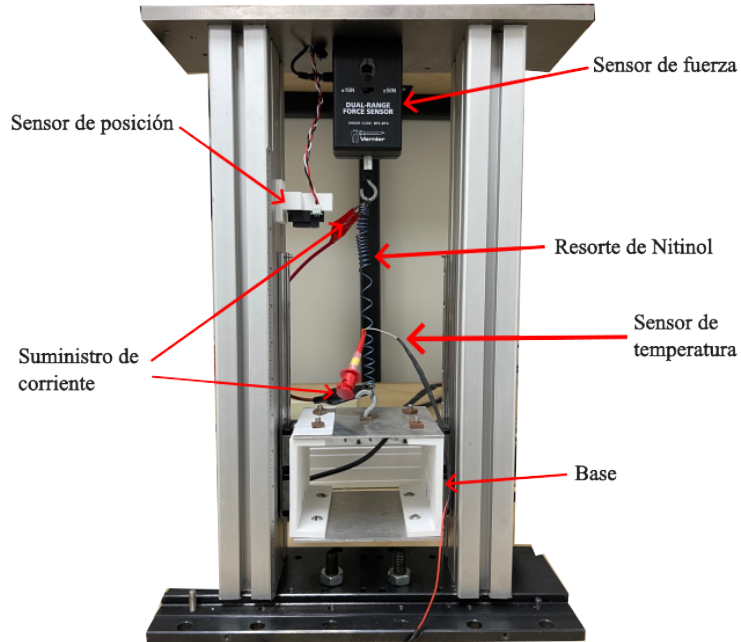


Figura 7.1: Sistema mecánico vertical basado en actuadores de Nitinol

7.1.1. Descripción del mecanismo traslacional con un resorte de Nitinol como actuador

El prototipo de mecanismo traslacional vertical se muestra en la figura 7.1. Este prototipo está formado por una estructura metálica rectangular de aluminio, en sus cubiertas laterales, del lado interno, tiene colocados rieles con baleros lineales. A estos baleros se sujeta una masa, cuyo peso puede ser variado agregando algún objeto en el interior. Un resorte de Nitinol une la masa con la parte superior de la estructura a través de un sensor de fuerza, este resorte, al contraerse, genera un movimiento de la masa hacia arriba. El prototipo también cuenta con un sensor óptico de distancia, el cual permite medir la posición de la masa. Finalmente, se cuenta con un termistor que permite medir la temperatura del resorte por contacto. Este sensor se sujeta directamente al resorte utilizando una pinza. Además de estos elementos, se cuenta con los circuitos de acondicionamiento, etapa de potencia y la plataforma dSPACE 1103 para la implementación de controladores.

7.1.2. Resultados experimentales de la aplicación de un control PID

Debido a que no se cuenta con un modelo dinámico del prototipo, debido principalmente a las no linealidades que presenta el resorte de Nitinol y a su característica de histéresis, en esta sección se muestran los resultados experimentales de aplicar un control PID, el cual fue sintonizado de forma empírica para obtener el mejor desempeño. Esta sintonización se realizó para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, es importante considerar que la amplitud de esta señal de referencia implica que la masa debe oscilar, en forma senoidal, con una frecuencia de 0.06 Hz a una amplitud de 1.5 centímetros al rededor de su origen.

La figura 7.2 muestra el comportamiento de la salida de la planta, línea en color rojo, y la señal de referencia, línea en color negro. Aquí se puede observar que el controlador puede tener un mejor desempeño en el ciclo en donde la referencia aumenta de valor, es decir, cuando el resorte debe de calentarse para seguir la referencia, sin embargo, en el ciclo de bajada el desempeño no es bueno, debido a que no hay control para enfriar el resorte, esto se puede observar en la figura 7.3. En este sentido, se puede decir que el controlador PID tiene un muy buen desempeño en el ciclo en donde actúa, esto se ve con mayor claridad en la señal de error $e(t)$ que se muestra en la figura 7.4. Finalmente, el comportamiento de la temperatura en el resorte de Nitinol se muestra en la figura 7.5, aquí se puede observar que la temperatura en el resorte no sobrepasa los 40 grados centígrados durante todo el experimento.

Con la finalidad de observar el desempeño del controlador, con las mismas ganancias establecidas para la referencia anterior, en un segundo experimento se cambia la frecuencia de la referencia, es decir $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, los resultados experimentales del comportamiento de la salida del sistema, la señal de control, el error entre la salida y la referencia, así como el comportamiento de la temperatura en el resorte de nitinol se muestran en las figuras 7.6, 7.7, 7.8 y 7.9, respectivamente. Aquí se puede ver que el desempeño del controlador se degrada considerablemente tanto cuando el control está en operación como cuando el sistema no está bajo la acción de control. Esto se debe principalmente al fenómeno de histéresis y al no tener una forma de controlar el enfriamiento del resorte, por otro lado,

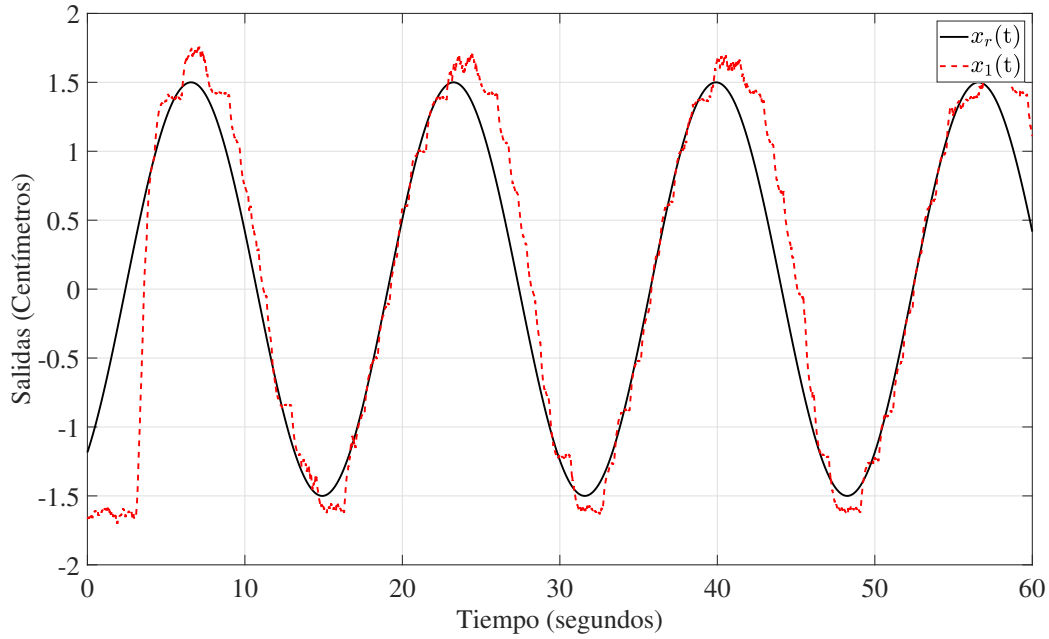


Figura 7.2: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID.

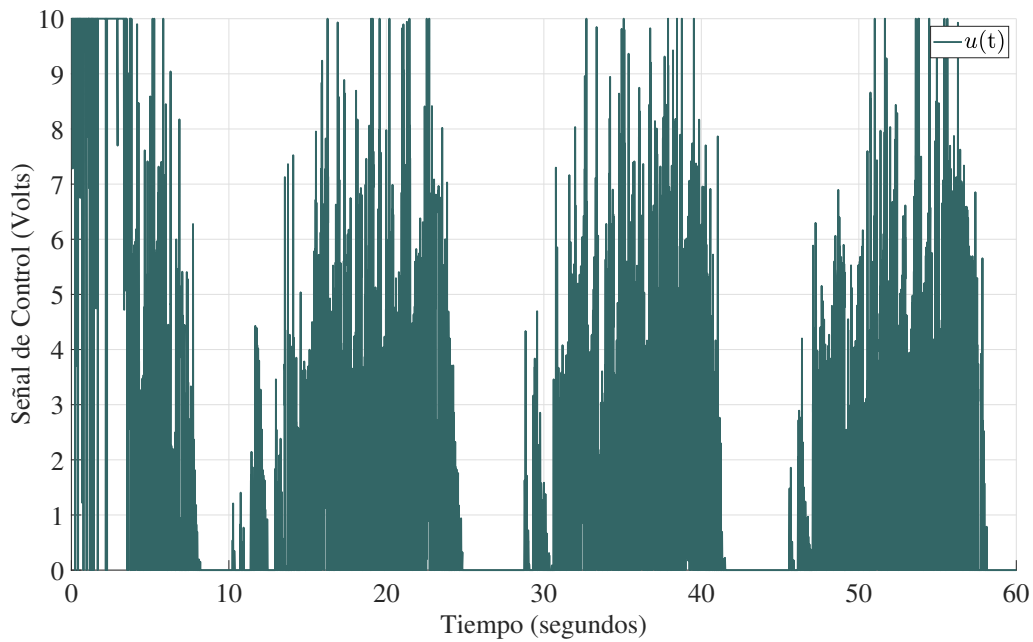


Figura 7.3: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID.

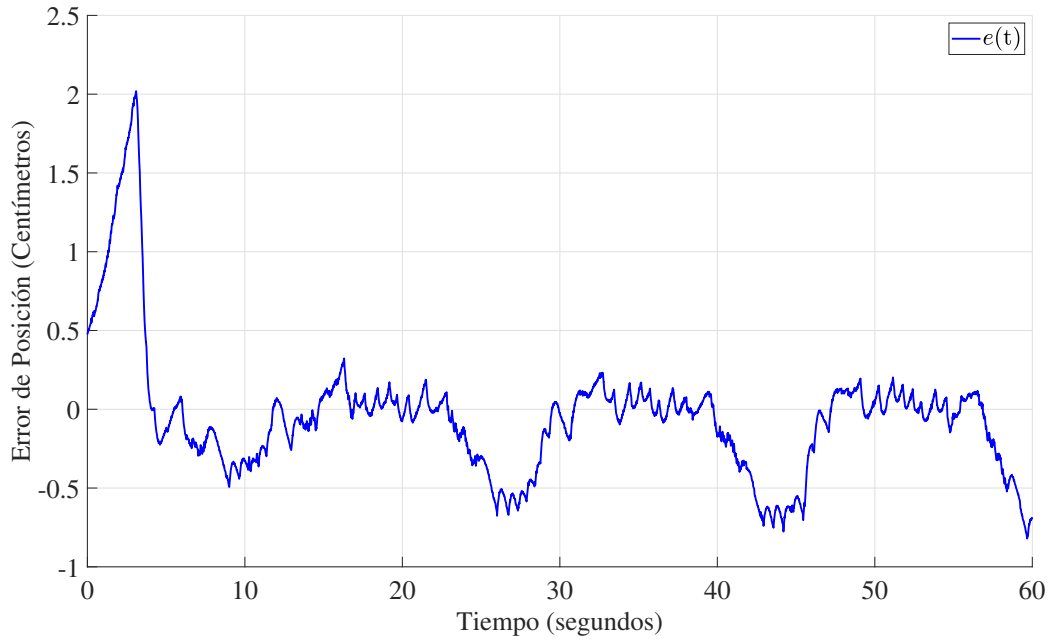


Figura 7.4: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ utilizando el controlador PID.

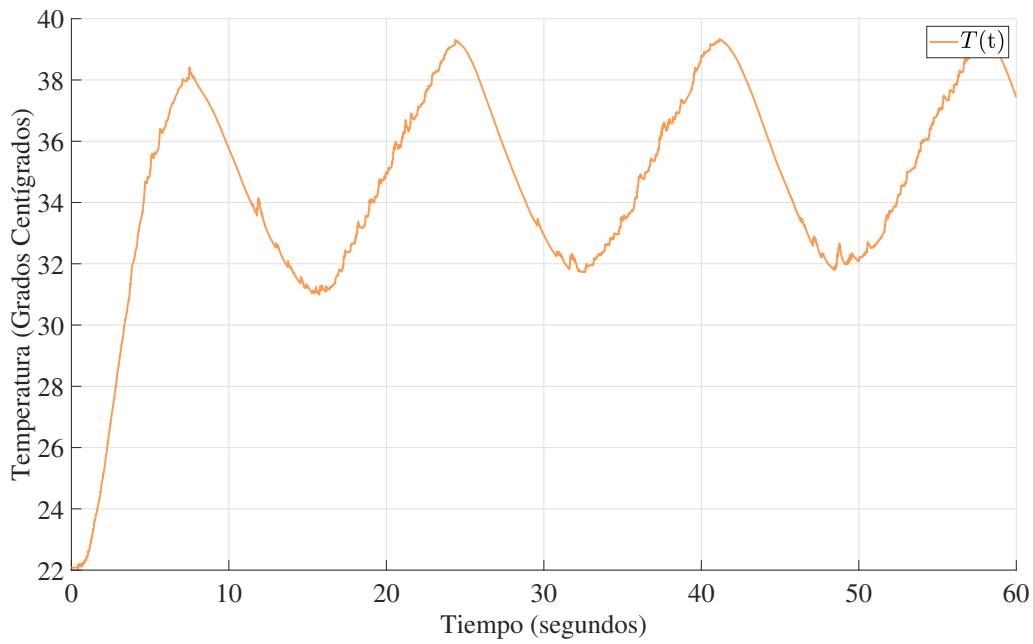


Figura 7.5: Comportamiento de la temperatura $T(t)$ del SMA aplicando una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando el controlador PID.

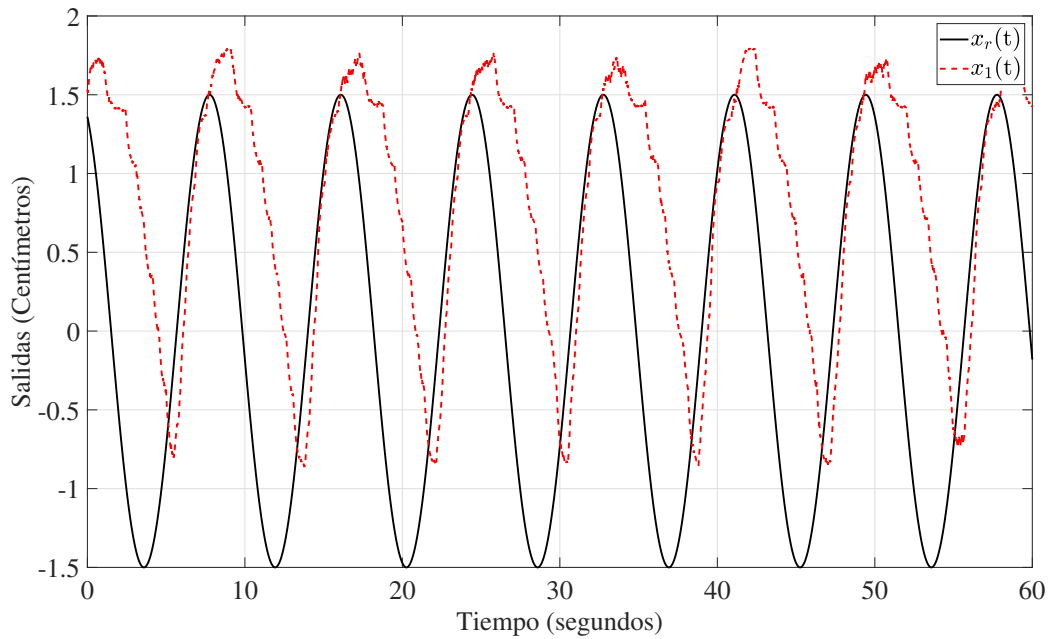


Figura 7.6: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID.

la señal de control tiene su valor máximo durante un periodo de tiempo largo, el error es mayor en ambos ciclos y los niveles de temperatura máximos en el SMA son menores.

Debido a que un incremento mayor en la frecuencia causaría mayores errores, se hace un tercer experimento utilizando la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12t)$ y un cuarto experimento con la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, señales de referencia mencionadas anteriormente durante los primeros dos experimentos, con la única diferencia de que al mecanismo se le añadió una masa de 400 gramos, la cual puede fungir como un factor importante durante el desempeño de ambas estructuras de control. A continuación se muestra la posición del actuador, la señal de control, el error de posición y la temperatura del tercer experimento, figuras 7.10, 7.11, 7.12 y 7.13 respectivamente. Y, para el cuarto experimento, posición del actuador, la señal de control, el error de posición y la temperatura del cuarto experimento, figuras 7.14, 7.15, 7.16 y 7.17 respectivamente.

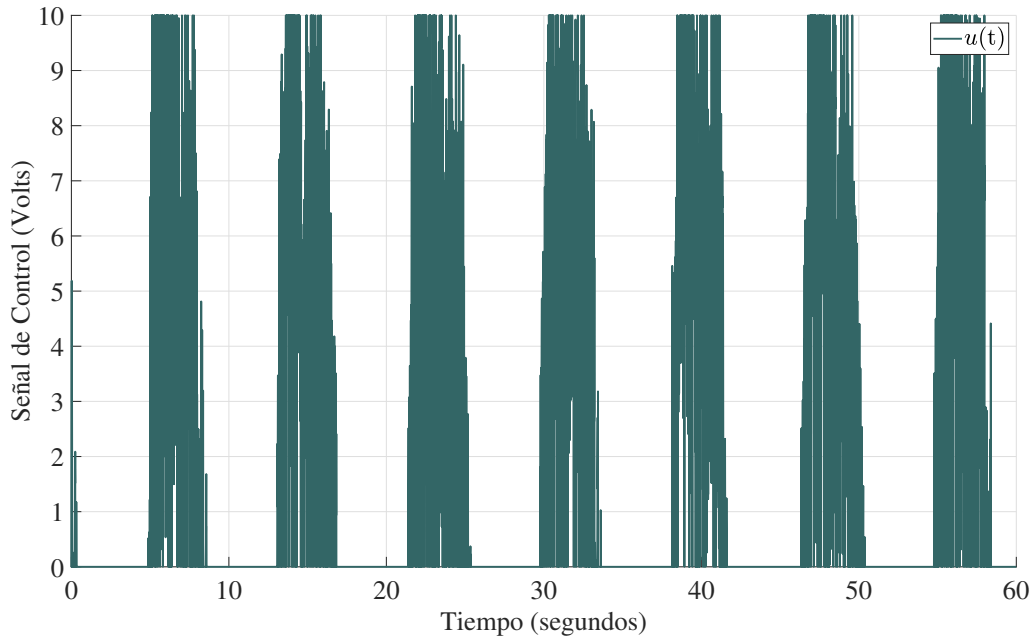


Figura 7.7: Señal de control u_t para la referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID.

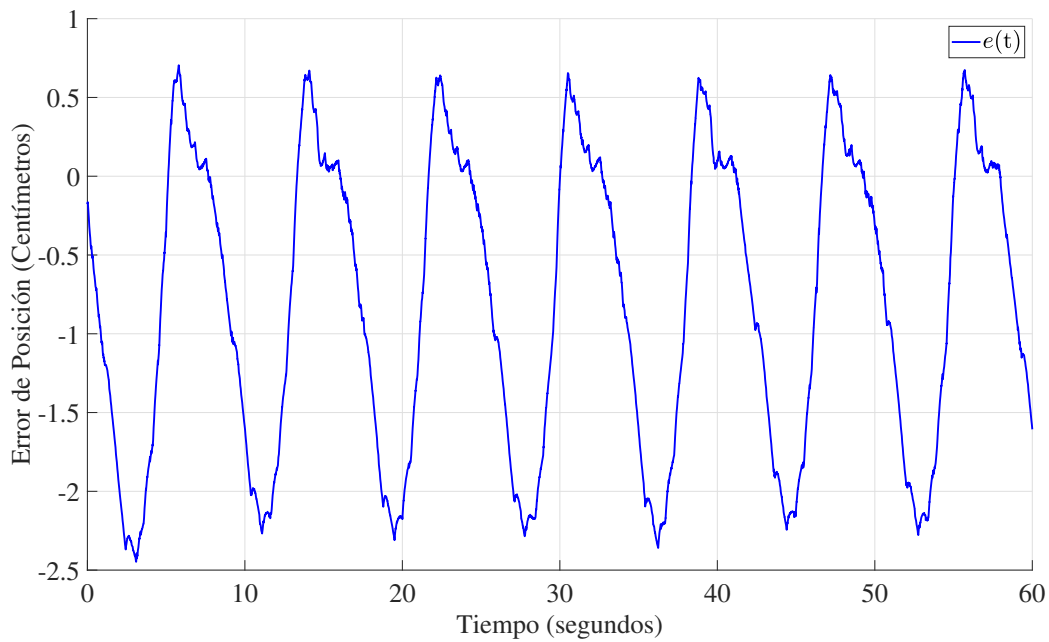


Figura 7.8: Error de posición entre las señales $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID.

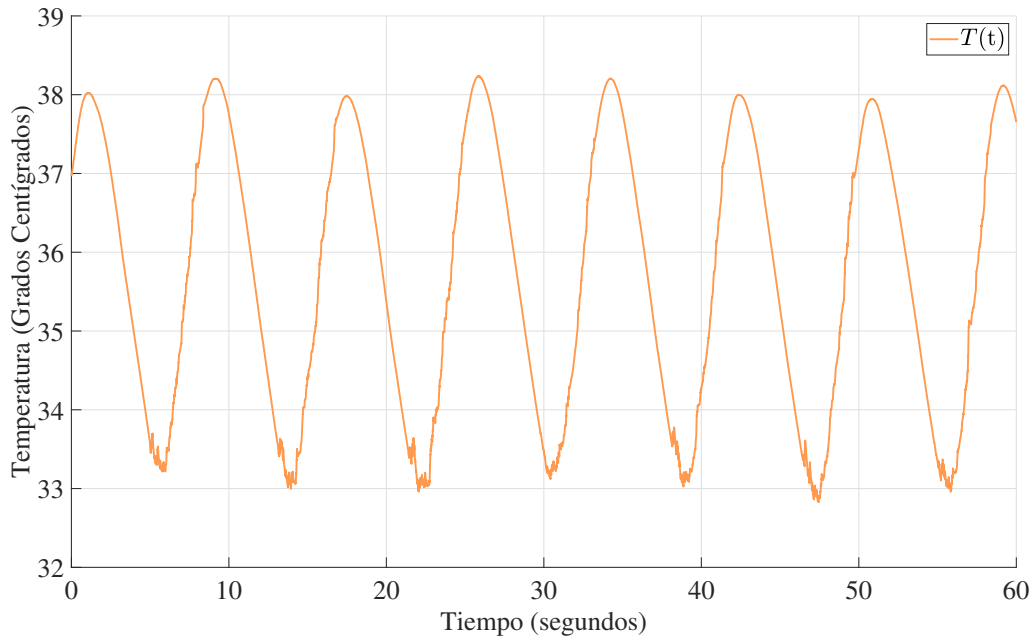


Figura 7.9: Temperatura T_t del actuador para la referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID.

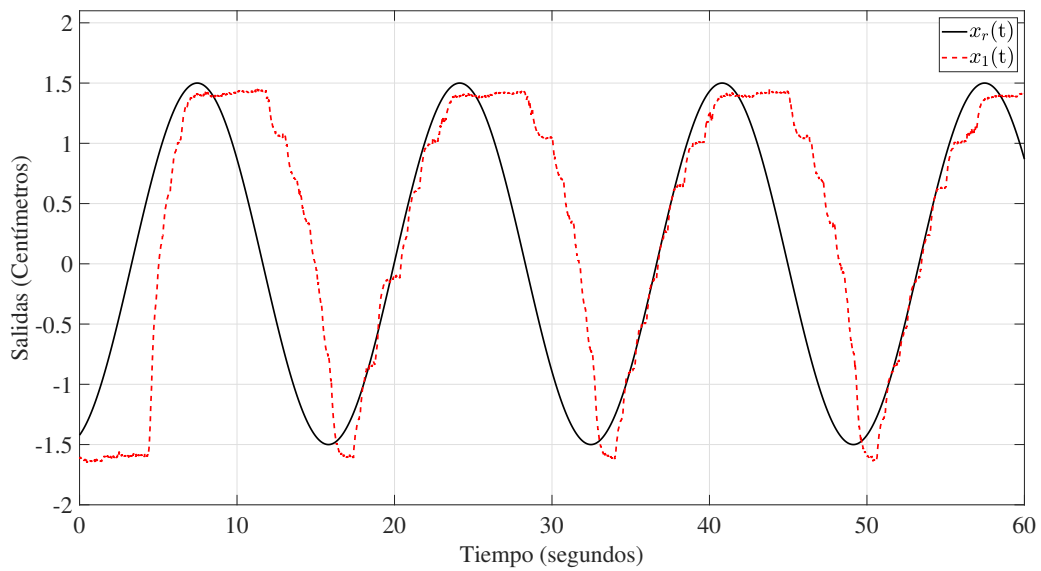


Figura 7.10: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12t)$, utilizando el controlador PID.

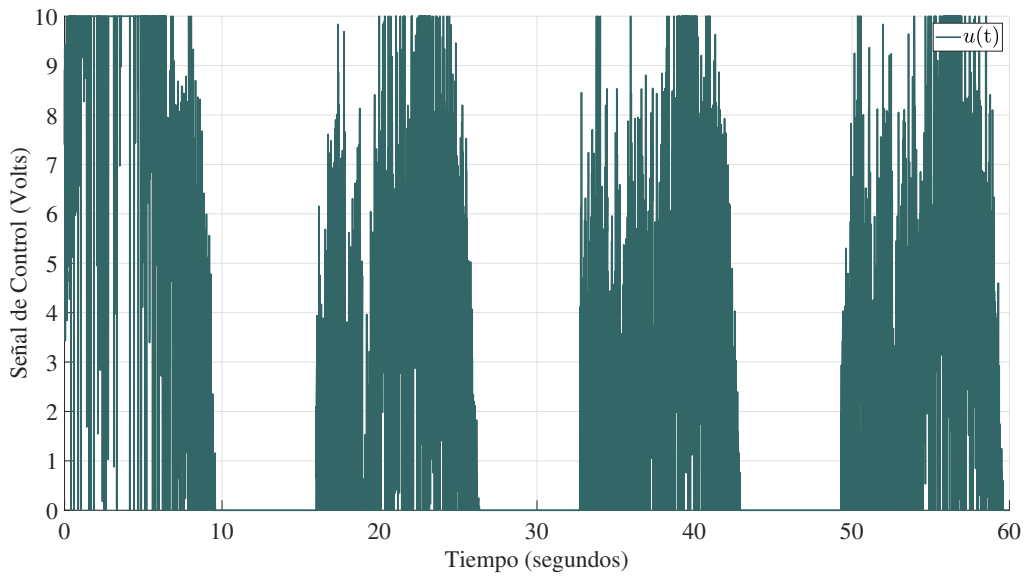


Figura 7.11: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, utilizando el controlador PID.

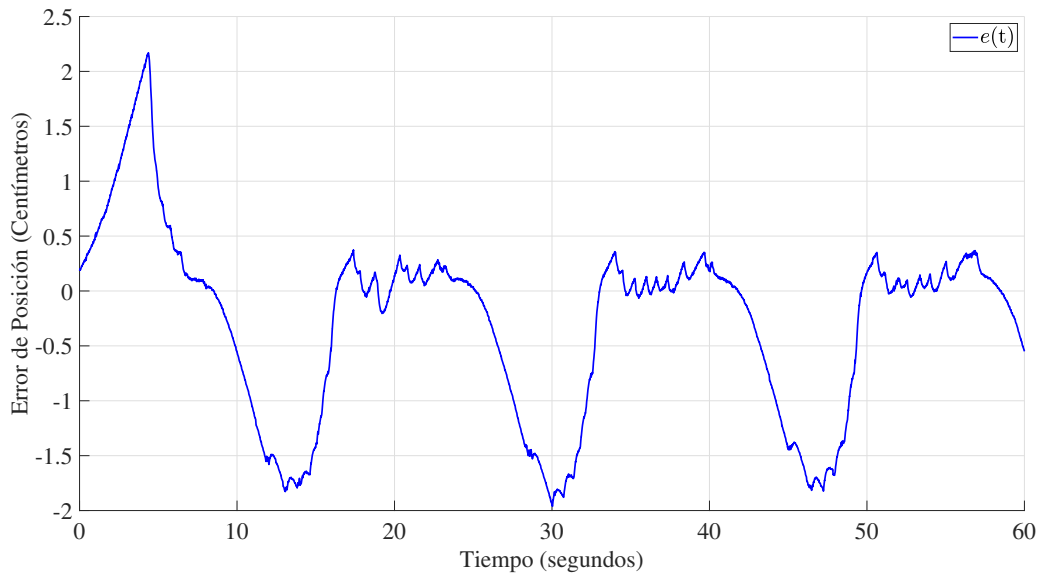


Figura 7.12: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID.

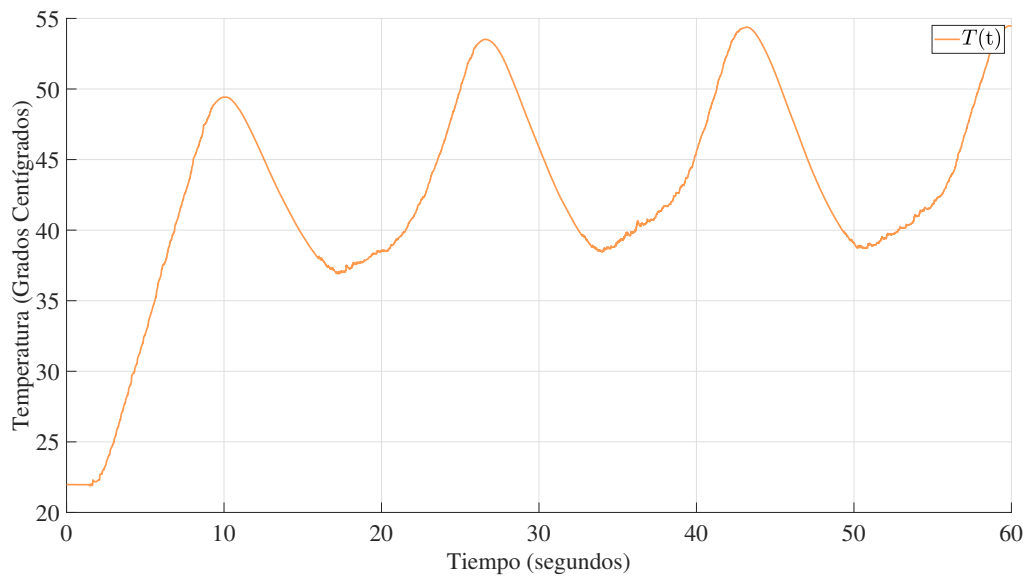


Figura 7.13: Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 3, utilizando el controlador PID.

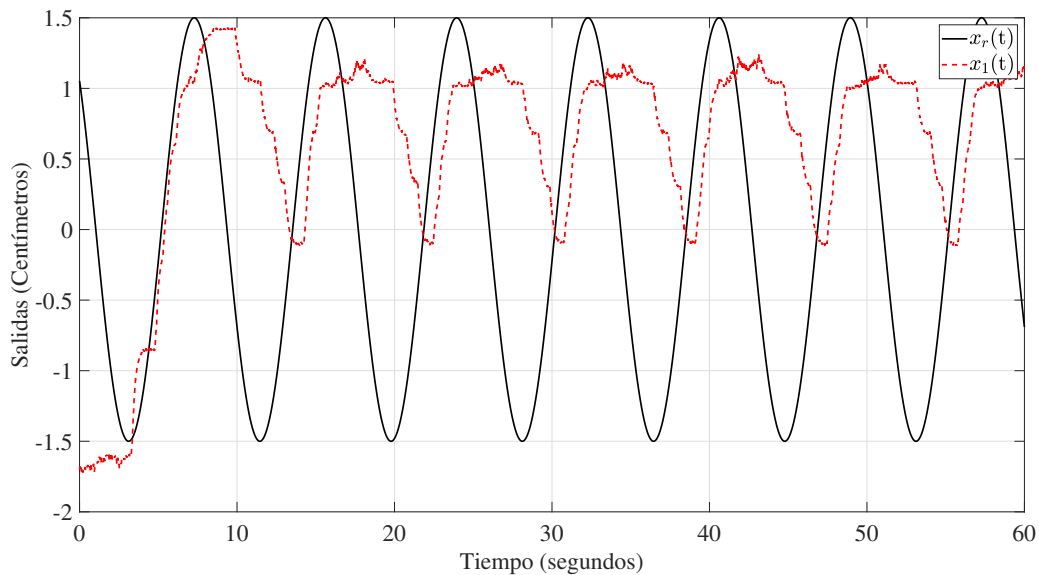


Figura 7.14: Comportamiento de la posición $x_1(t)$ del sistema y la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24t)$, utilizando el controlador PID.

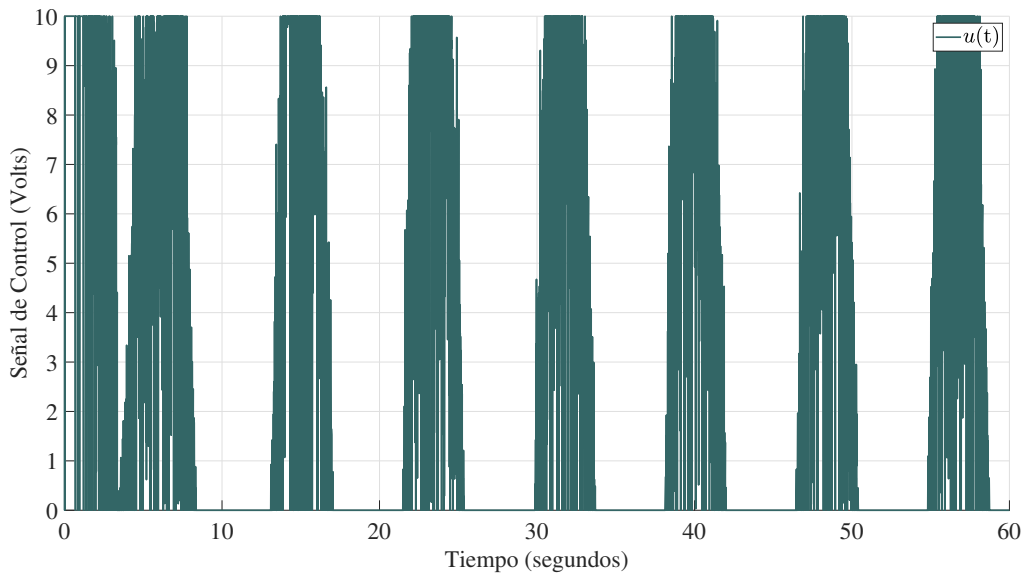


Figura 7.15: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema SMA, utilizando el controlador PID.

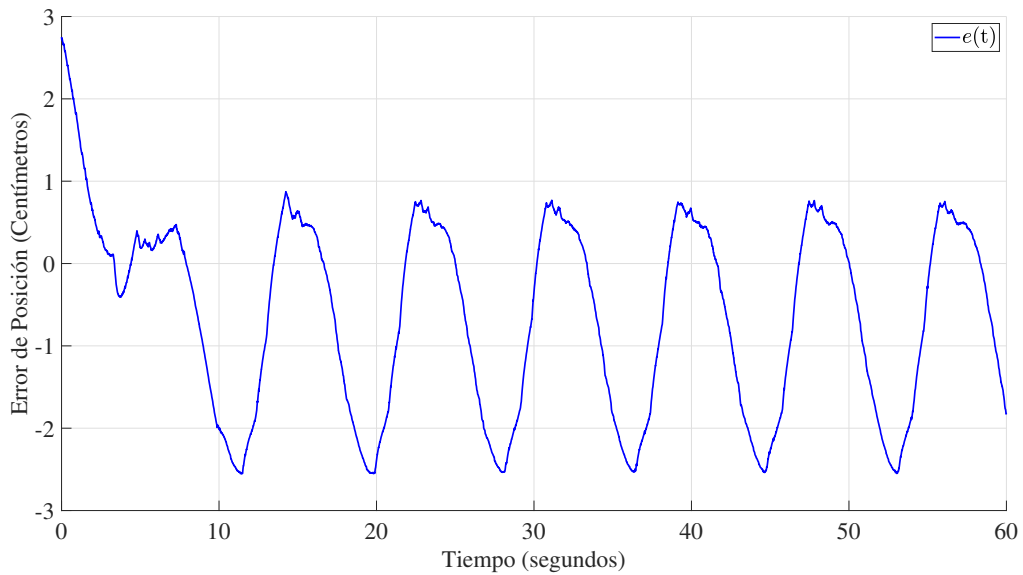


Figura 7.16: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando el controlador PID.

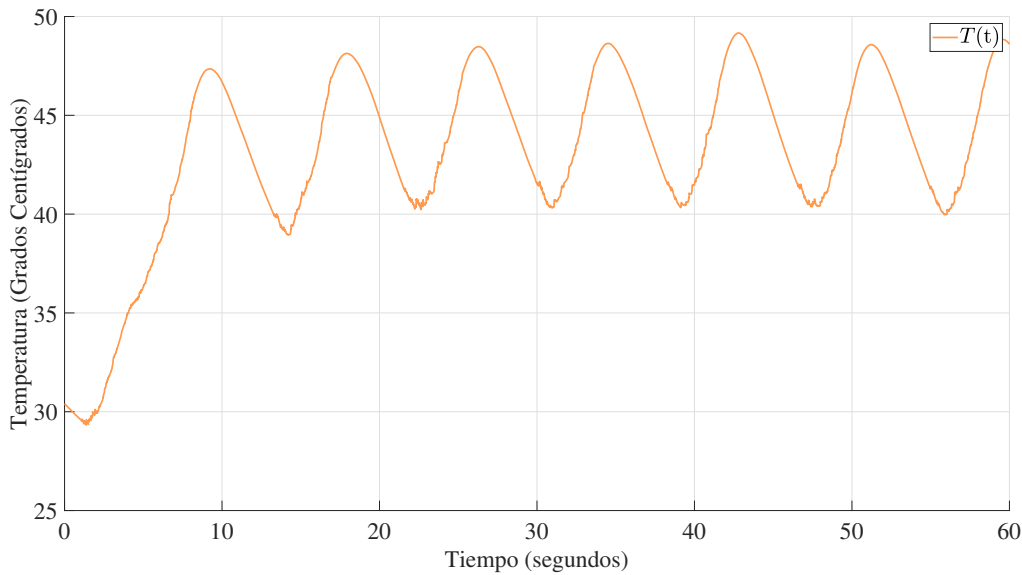


Figura 7.17: Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 3, utilizando el controlador PID.

7.2. Resultados experimentales aplicando la estructura ADRC

La estructura de control ADRC se aplicó al mecanismo con actuador de Nitinol bajo las mismas condiciones. Para este fin, se consideró al mecanismo como un sistema masa resorte amortiguador en forma vertical, de tal forma que la fuerza de gravedad genera el movimiento de la masa. Toda la dinámica no lineal se consideró como dinámicas no modeladas y se consideraron parte de las perturbaciones. Los resultados se describen a continuación.

En la figura 7.18 se muestra la señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, curva en color negro, así como la salida del sistema, curva en color rojo. Aquí se puede observar que el sistema en lazo cerrado tiene un comportamiento muy similar cuando se usa un controlador PID, tiene un comportamiento aceptable cuando el SMA se calienta, pero en la parte del enfriamiento crece mucho el error. Por otro lado, la señal de control, ver figura 7.19 presenta componentes de alta frecuencia y casi alcanza los valores máximos en algunos instantes de tiempo. La señal de error entre la referencia y la salida de la planta, ver figura

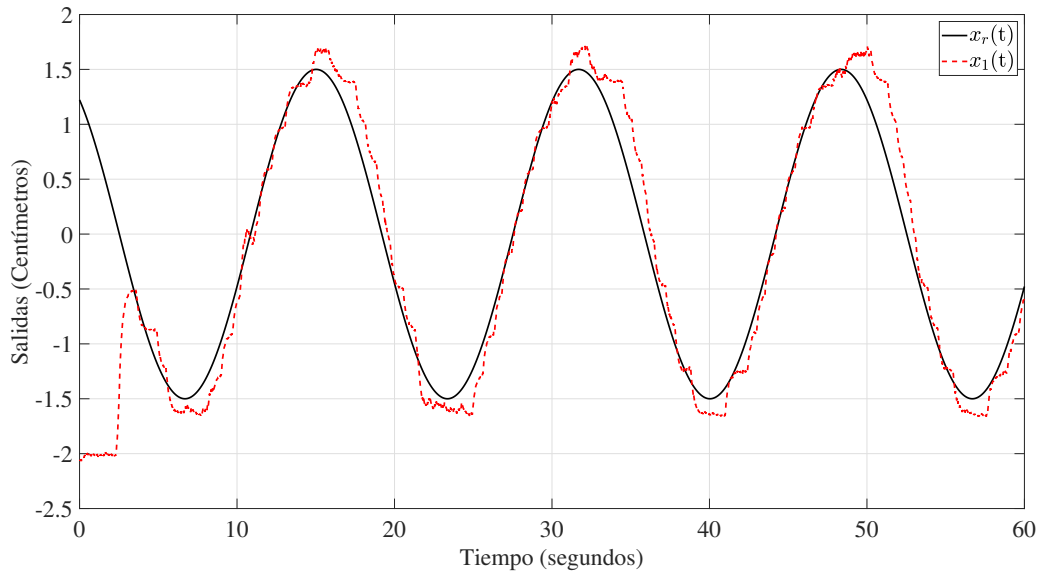


Figura 7.18: Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC.

7.20, está en el mismo rango que en caso del PID, lo mismo ocurre para la temperatura, ver figura 7.21.

Ahora, cuando la referencia es $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ los resultados se muestran en de la figura 7.22 a la figura 7.25. Aquí se puede observar una mejora en lo que se refiere a la disminución del error de seguimiento en el ciclo de calentamiento, en comparación del PID, sin embargo, en la parte de la disminución de la temperatura, el error es mayor debido a que la frecuencia es mayor y no hay forma de enfriar al resorte de Nitinol. El comportamiento de la temperatura en el resorte es muy parecido al caso cuando se usa un PID.

A continuación se muestran los resultados experimentales de la aplicación de la estructura de control ADRC añadiendo una masa de 400 gramos, así, como posteriormente fue realizado durante la aplicación de la estructura de control PID. A continuación se muestra la posición del actuador, la señal de control, el error de posición y la temperatura del tercer experimento, figuras 7.26, 7.27, 7.28 y 7.29 respectivamente. Y, para el cuarto experimento, posición del actuador, la señal de control, el error de posición y la temperatura del cuarto experimento, figuras 7.30, 7.31, 7.32 y 7.33 respectivamente.

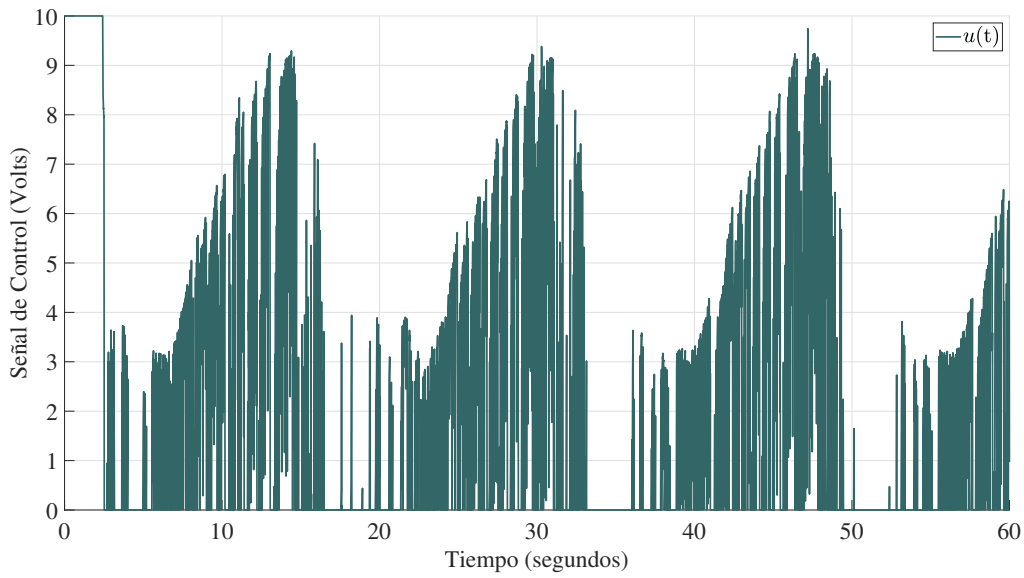


Figura 7.19: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC.

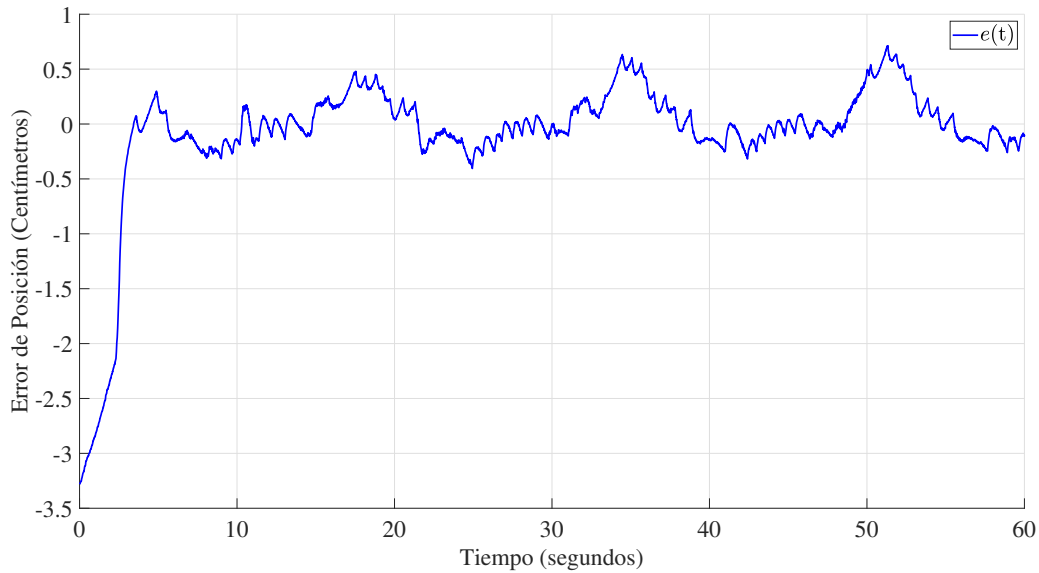


Figura 7.20: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

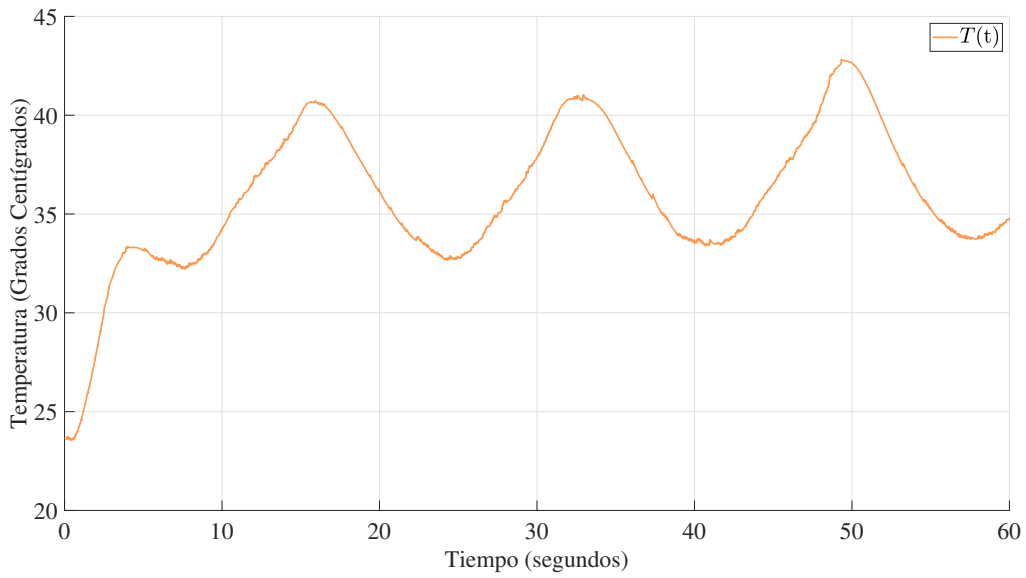


Figura 7.21: Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC.

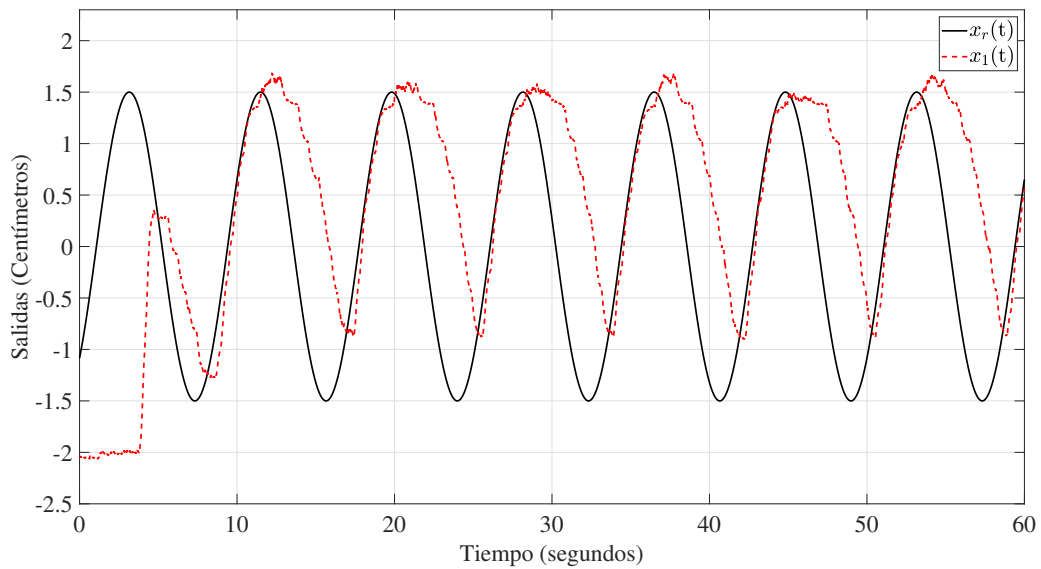


Figura 7.22: Salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5\sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC.

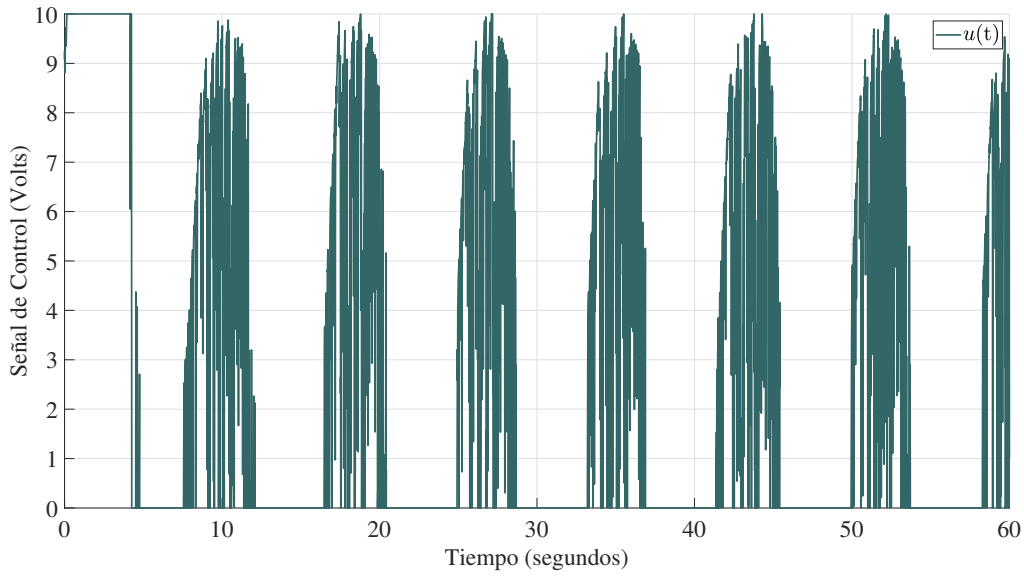


Figura 7.23: Señal de control u_t aplicada al sistema SMA, para una señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura ADRC.

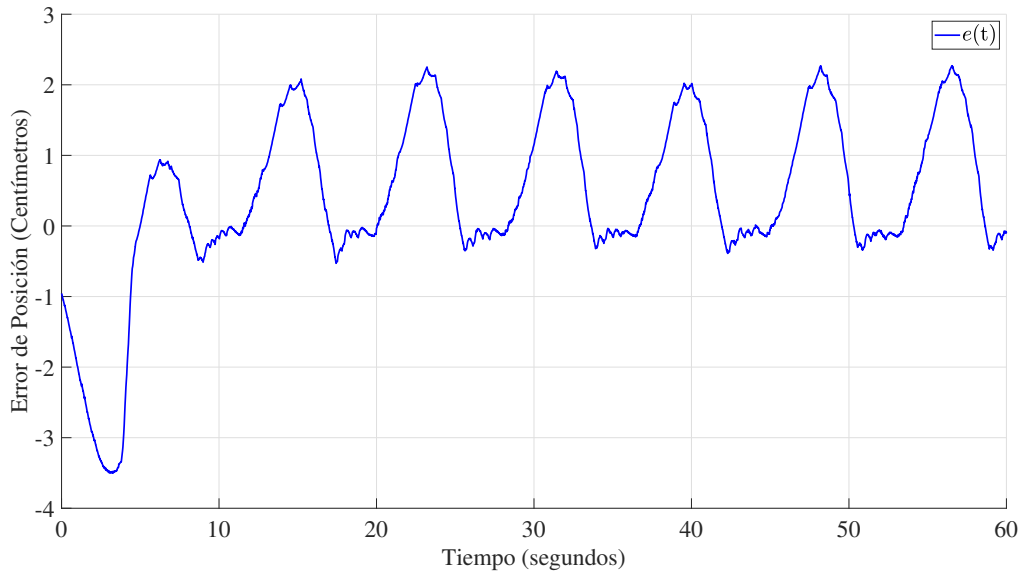


Figura 7.24: Error de posición entre las señales $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

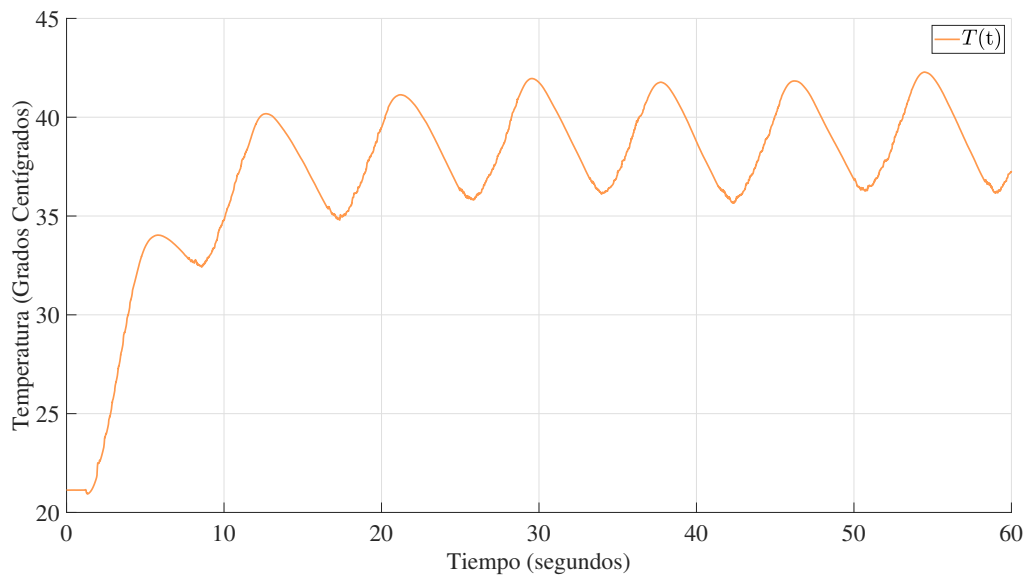


Figura 7.25: Comportamiento de la temperatura $T(t)$ del resorte SMA durante el desarrollo del experimento, utilizando la estructura ADRC.

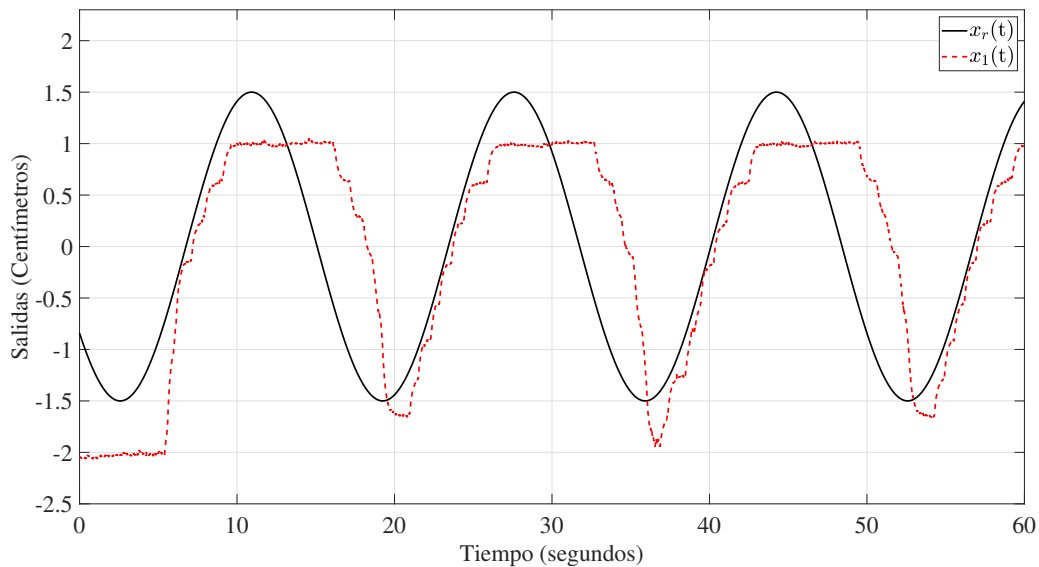


Figura 7.26: Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC.

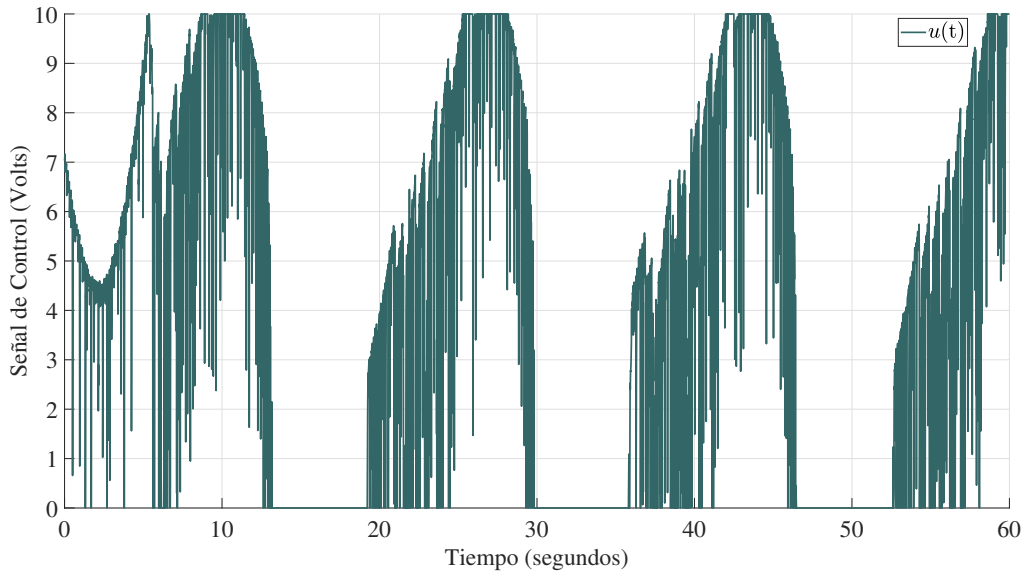


Figura 7.27: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC.

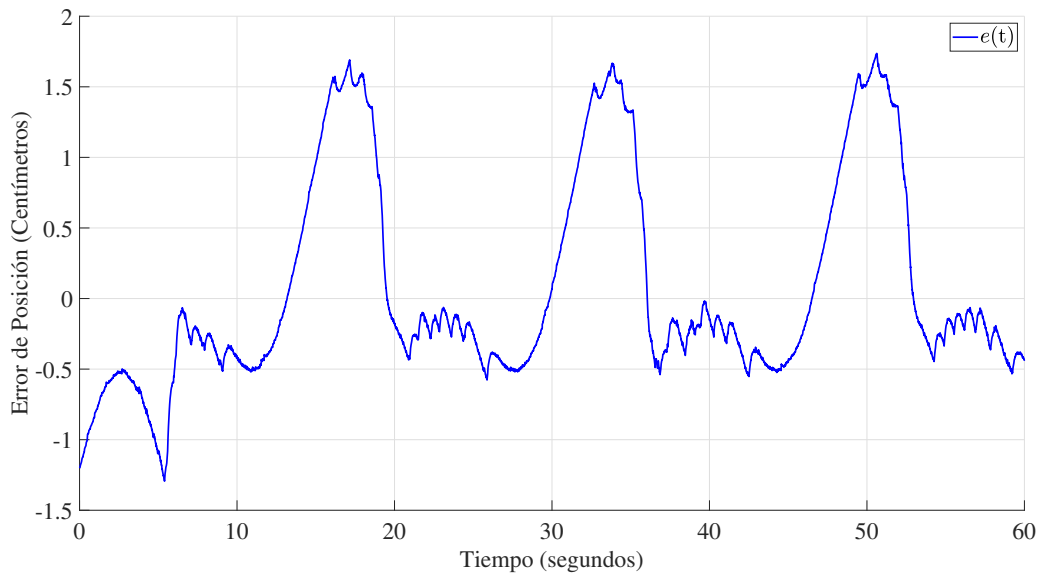


Figura 7.28: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

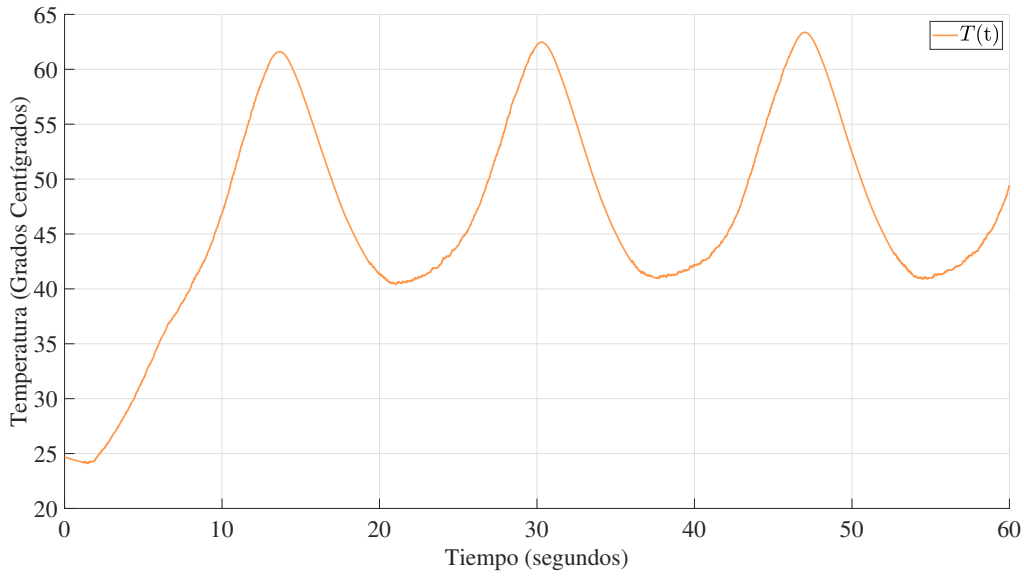


Figura 7.29: Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC.

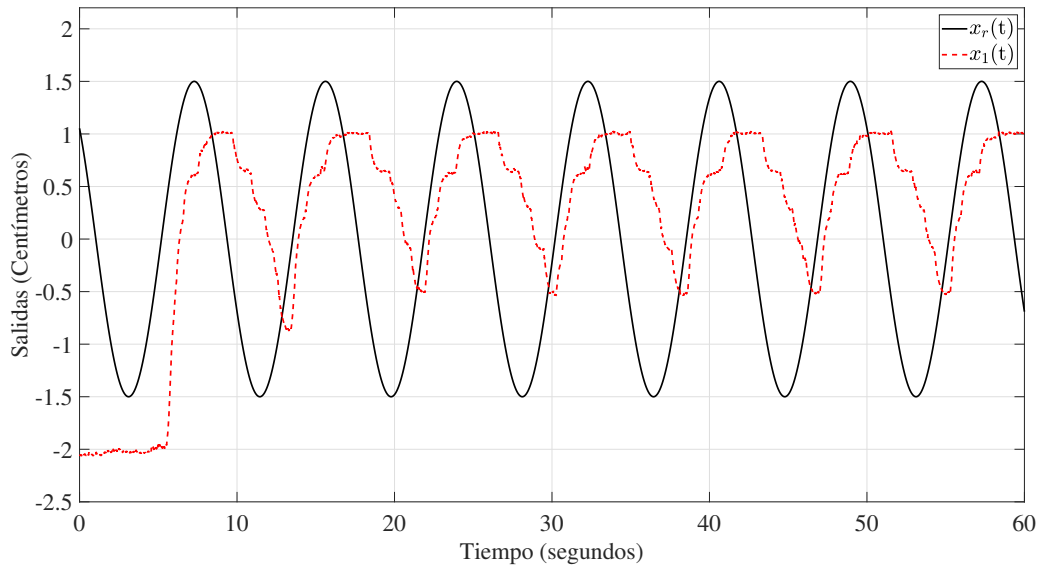


Figura 7.30: Comportamiento de la salida del sistema SMA $x_1(t)$ y señal de referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, aplicando la estructura de control ADRC.

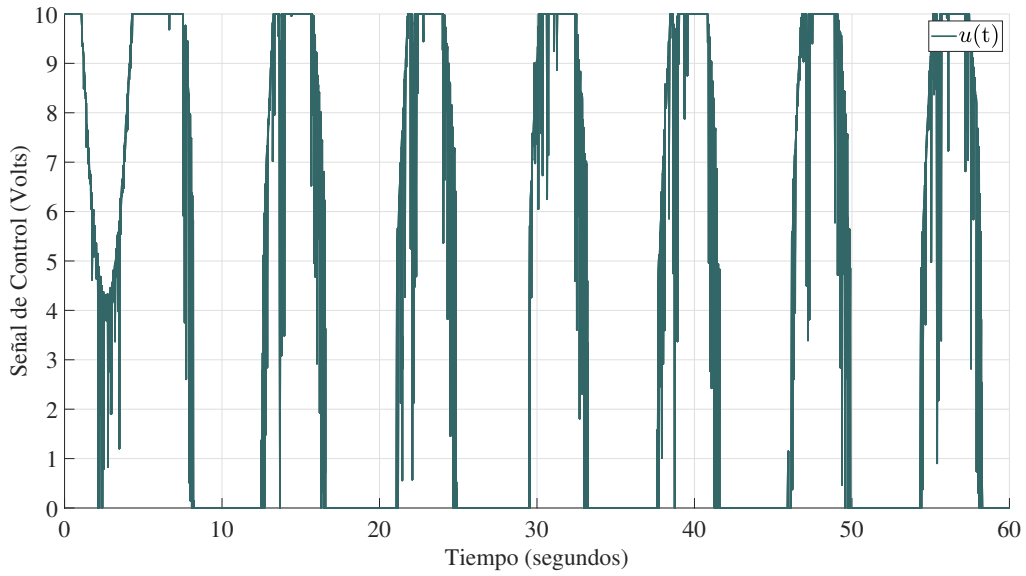


Figura 7.31: Señal de control $u(t)$ aplicada al sistema, para una referencia $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$, utilizando la estructura de control ADRC.

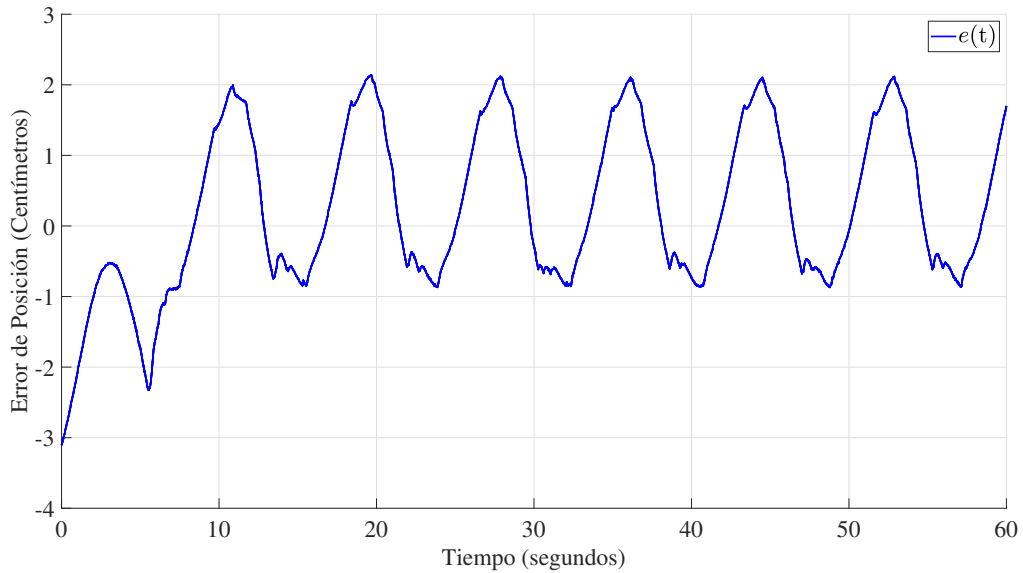


Figura 7.32: Error de posición entre las señales $x_r(t)$ y $x_1(t)$, utilizando la estructura ADRC.

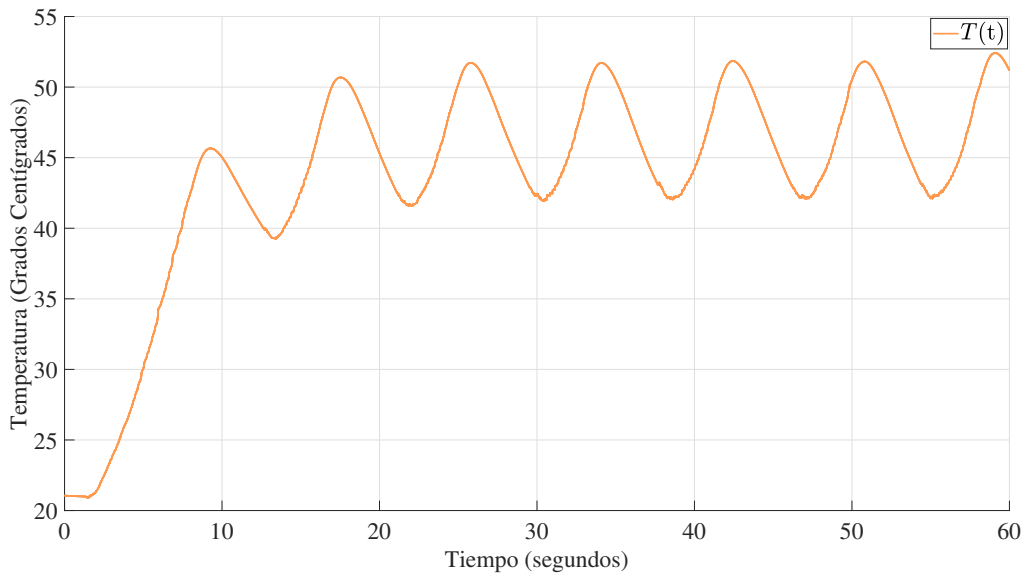


Figura 7.33: Temperatura $T(t)$ del actuador generada durante el desarrollo del experimento 1, utilizando la estructura ADRC.

7.2.1. Análisis de datos

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la experimentación de ambas estructuras de control. Las figuras 7.36 y 7.37 representan los valores del error de posición para datos experimentales en los ejes 1 y 3 respectivamente, mientras que, Las figuras 6.32 y 6.33 representan los valores del error de posición para datos experimentales en los ejes 4 y 5 respectivamente. Podemos notar que, en la figura 7.37, los datos del diagrama de caja nos indican que la estructura ADRC, cuenta con menores valores dispersos entre su límite superior y su límite inferior, como se observa en las tablas 7.1 y 7.2, Esto nos indica que el error es menor entre la posición real y la posición estimada, a diferencia de los experimentos utilizando estructura de control PID. Con esto, podemos concretar que la estructura ADRC se mantuvo con un mayor grado de robustez, ya que es capaz de compensar las perturbaciones, como lo pueden ser fuerzas gravitacionales, que afectan directamente al sistema. En la figura 7.38 se observa el índice de desempeño de la integral del error absoluto.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.1784	-0.09366
Límite superior	-0.009756	0.01067
Límite inferior	-0.4727	-0.1631
IAE	2.600	1.2739
Error promedio absoluto	0.2600	0.127

Tabla 7.1: Índices de desempeño a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.9243	0.4628
Límite superior	0.03483	1.406
Límite inferior	-1.816	-0.06572
IAE	10.2321	7.8655
Error promedio absoluto	1.0232	0.7865

Tabla 7.2: Índices de desempeño a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$.

Índice	PID	ADRC
Media	0.03337	-0.2759
Límite superior	0.138	-0.1809
Límite inferior	-0.9583	-0.4265
IAE	7.8655	11.9257
Error promedio absoluto	0.7865	1.1926

Tabla 7.3: Índices de desempeño a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos.

Índice	PID	ADRC
Media	-0.9766	0.5653
Límite superior	0.3257	1.591
Límite inferior	-1.988	-0.4161
IAE	11.9257	9.4927
Error promedio absoluto	1.1926	0.9493

Tabla 7.4: Índices de desempeño a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos.

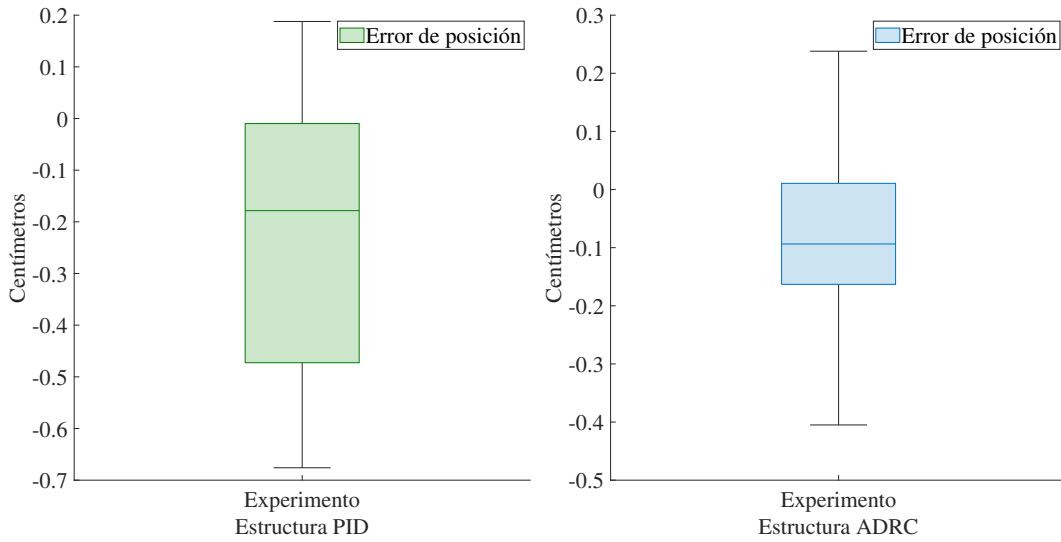


Figura 7.34: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$.

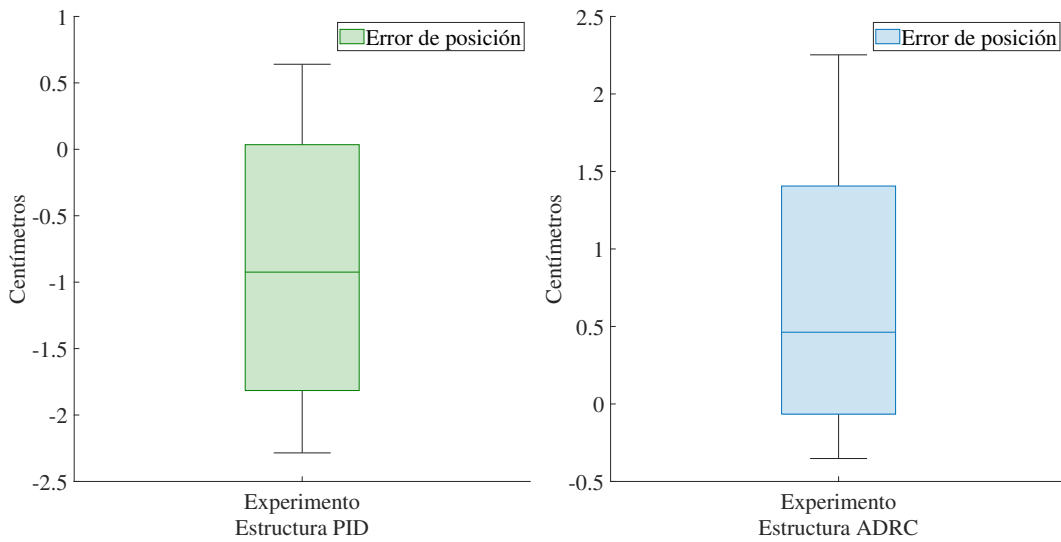


Figura 7.35: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$.

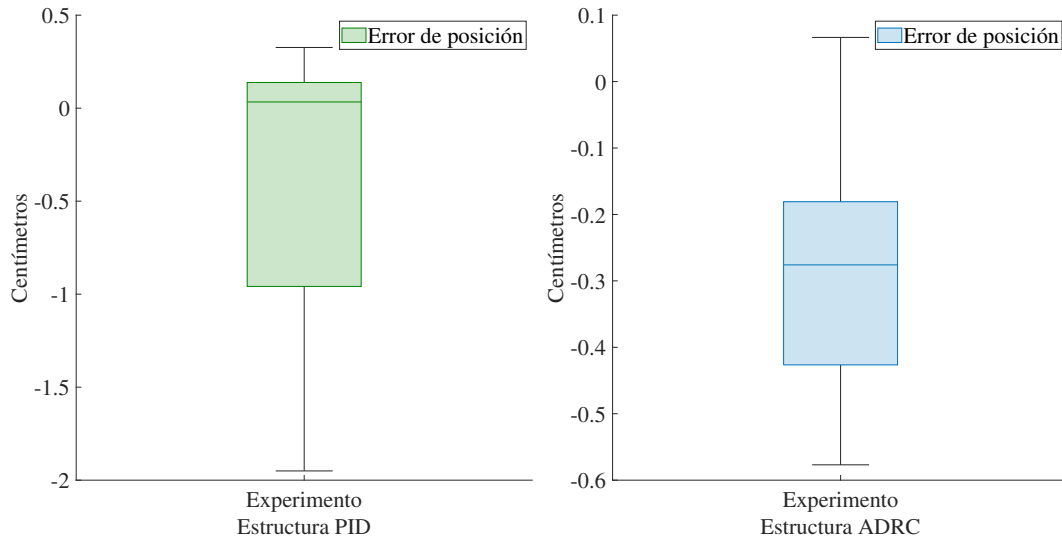


Figura 7.36: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.12\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos.

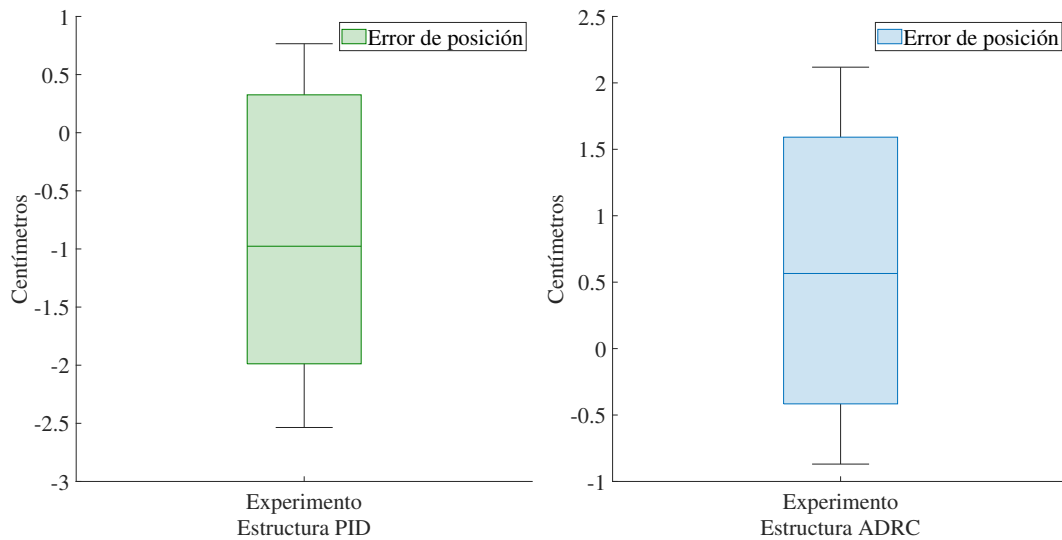


Figura 7.37: Diagrama de caja de los resultados experimentales aplicados a $x_r(t) = 1.5 \sin(0.24\pi t)$ agregando una masa de 400 gramos.

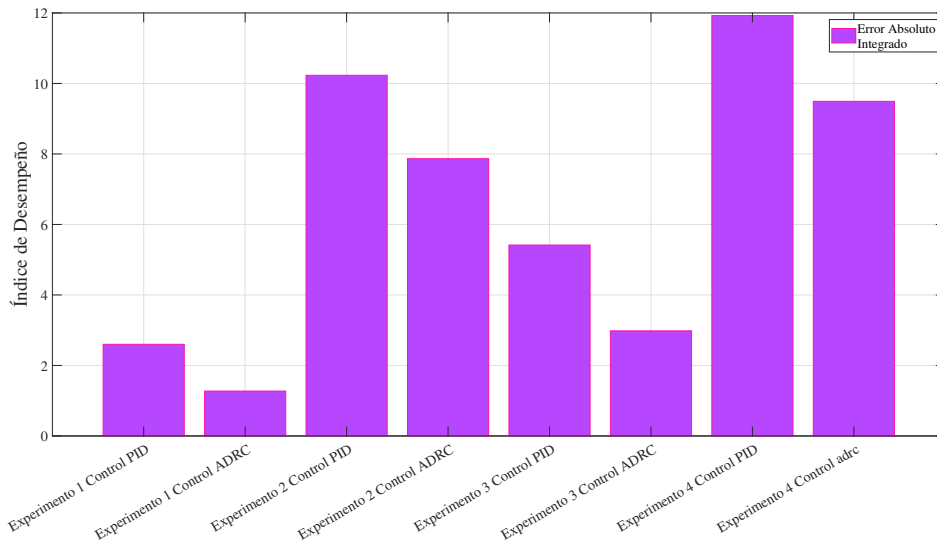


Figura 7.38: Índices de desempeño entre estructuras de control.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajo futuro

Como conclusiones finales de este trabajo de tesis se puede comentar lo siguiente. En primer lugar, hacer una comparativa del desempeño del controlador PID y de la estructura de control ADRC, en forma experimental, es complicado, debido a que finalmente el desempeño del sistema en lazo cerrado depende de la sintonización de las ganancias de cada controlador, que a su vez depende de la experiencia del usuario. Se trató de ser lo más objetivo posible en este sentido utilizando la herramienta de sintonización de los controladores PID que provee Matlab. Por otro lado, a primera vista se puede pensar que esta comparación es injusta, ya que el controlador PID, en su forma nativa, no garantiza la solución del problema de seguimiento de trayectorias y, teóricamente, la ADRC sí lo hace. Sin embargo, a pesar de esta gran diferencia conceptual, en los experimentos realizados se observa que los errores de seguimiento en los mecanismos, MRA, péndulo simple y robot de RV-M1, son grandes si la señal de referencia tiene una frecuencia es grande, pero si la frecuencia es baja, los errores son comparables con la ADRC. Esto se ve más evidente en el control del actuador con aleaciones con memoria de forma que, a pesar de ser un sistema fuertemente no lineal, con una histéresis, y sin conocer su modelo ni parámetros, el desempeño a bajas frecuencias fue prácticamente igual. Es importante mencionar que el método de sintonización de ambos controladores, en forma experimental, no ha sido la óptima, por lo que pueden mejorar los resultados en ambos casos. Sin embargo, los resultados nos permiten tener una idea sobre la aplicabilidad, ventajas y desventajas de cada una de las opciones de control y se puede concluir, que en ciertos tipos de plantas en donde no se

conoce su modelo ni parámetros, para resolver el problema de seguimiento de trayectorias, se puede aplicar un PID en su forma nativa si la referencia tiene componentes de muy baja frecuencia, mientras que si hay componentes de mayor frecuencia es recomendable utilizar la ADRC.

En lo que respecta a trabajo futuro, debido a que ambas estructuras no dependen fuertemente del modelo y pueden implementarse con cierto grado de facilidad, un trabajo de investigación que surge de los resultados de este trabajo de tesis es proponer un controlador que una ambas estrategias, es decir, un controlador PID+ADRC, con lo que se esperaría que esta estructura pueda asegurar la solución del problema de seguimiento de trayectoria en una clase amplia de sistemas dinámicos con un alto grado de robustez, basado en la forma de un PID nativo.

Bibliografía

- [1] Mohammad Shamsuzzoha. *PID control for Industrial processes*. BoD–Books on Demand, 2018.
- [2] Jingqing Han. “From PID to active disturbance rejection control”. En: *IEEE transactions on Industrial Electronics* 56.3 (2009), págs. 900-906.
- [3] Huang Yi, XUE Wen-Chao y ZHAO Chun-Zhe. “Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis”. En: *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences* 31.9 (2011), pág. 1111.
- [4] A David Rosas et al. “Methodology to assess quality of estimated disturbances in active disturbance rejection control structure for mechanical system”. En: *ISA transactions* 70 (2017), págs. 238-247.
- [5] David I Rosas Almeida, Joaquin Alvarez y Jesus Armando Cantu Cardenas. “Application of the active disturbance rejection control structure to improve the controller performance of uncertain pneumatic actuators”. En: *Asian Journal of Control* 21.1 (2019), págs. 99-113.
- [6] C Mario Mora et al. “Robust output control of an uncertain underactuated 2dof mass-spring-damper system with backlash based on active disturbance rejection control structure”. En: *Mathematical Problems in Engineering* 2018 (2018).
- [7] Huibert Kwakernaak y Raphael Sivan. *MODERN SIGNALS AND SYSTEMS*. Prentice-Hall, 1990.
- [8] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.

- [9] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002. ISBN: 9780130673893. URL: https://books.google.com.mx/books?id=t_d1QgAACAAJ.
- [10] Aleksei Fedorovich Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*. Vol. 18. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] Jean-Jacques E Slotine. “Applied Nonlinear Control”. En: *PRENTICE-HALL google schola* 2 (1991), págs. 1123-1131.
- [12] Rafael Kelly, Victor Santibánes et al. “Control de movimiento de robots manipuladores”. En: (2003).
- [13] David Luenberger. “An introduction to observers”. En: *IEEE Transactions on automatic control* 16.6 (1971), págs. 596-602.
- [14] David I Rosas Almeida, Joaquin Alvarez y Leonid Fridman. “Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems”. En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal* 17.9 (2007), págs. 842-861.
- [15] Michael S Branicky. “Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems”. En: *IEEE Transactions on automatic control* 43.4 (1998), págs. 475-482.
- [16] Daniel Liberzon. *Switching in systems and control*. Vol. 190. Springer, 2003.
- [17] Vadim Utkin, Jürgen Guldner y Jingxin Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, 2017.
- [18] Yuri Shtessel et al. *Sliding mode control and observation*. Vol. 10. Springer, 2014.
- [19] David I Rosas Almeida, Joaquin Alvarez y Jonatan Peña. “Control structure with disturbance identification for Lagrangian systems”. En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.3 (2011), págs. 486-495.
- [20] Mathworks. *MATLAB, Matlab User Guide*. Inf. téc. Mathworks, 2023.
- [21] Dodi Saputra et al. “Design and application of PLC-based speed control for DC motor using PID with identification system and MATLAB tuner”. En: *International Journal of Robotics and Control Systems* 3.2 (2023), págs. 233-244.

- [22] Mitsubishi Electric Corporation. *Industrial Micro-Robot System Manual Model: RV-M1*.