

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**



**EFFECTOS DEL CAMPO MAGNÉTICO EN LA DINÁMICA DEL  
TRANSPORTE CUÁNTICO EN SISTEMAS UNIDIMENSIONALES**

TESIS

que para obtener el título de

FÍSICO

Presenta:

**FABIÁN YARATH MONTIEL PURDON**

Ensenada, Baja California, México, Abril de 2024



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS,  
CAMPUS ENSENADA.



**“Efectos del campo magnético en la dinámica del transporte cuántico en sistemas unidimensionales”**

TESIS

PARA CUBRIR LOS REQUISITOS NECESARIOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**Físico**

PRESENTA

**Fabián Yarath Montiel Purdon**  
**357497**

A quien el Comité de Tesis autoriza el trabajo terminal y de acuerdo con el Art. 19 del R.G.E.P.E.P, emite los siguientes votos aprobatorios mediante rúbrica:

Dr. Jorge Alberto Villavicencio  
Aguilar

**DIRECTOR**

Dr. Alberto Hernández  
Maldonado

**CODIRECTOR**

Dr. Roberto Romo Martínez

**SINODAL**

**“Por la Realización Plena del Ser”**

**RESUMEN** de la tesis que como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física presenta **FABIÁN YARATH MONTIEL PURDON**. Ensenada, Baja California, México, Abril de 2024.

## **EFFECTOS DEL CAMPO MAGNÉTICO EN LA DINÁMICA DEL TRANSPORTE CUÁNTICO EN SISTEMAS UNIDIMENSIONALES**

Resumen aprobado por:



---

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar

Director de Tesis

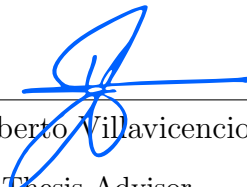
Se deriva una solución integral de la ecuación Schrödinger-Pauli para un espinor de onda plana que interactúa con un potencial de alcance finito dentro de un campo magnético constante. A partir de dicha solución integral se obtiene una fórmula analítica para describir los efectos inducidos en la densidad de probabilidad por el campo magnético en la región de transmisión del potencial. Se encuentra que en el régimen donde la energía de acoplamiento no es despreciable, en comparación con la altura de la barrera, existe un desfase entre los máximos principales de la densidad de probabilidad en ausencia y presencia de campo magnético respecto del caso libre. Dicho desfase es mayor en presencia de campo y permite realizar mediciones del *retraso temporal*, el cual crece monótonamente en función de la frecuencia de Larmor. También se exploran los valores esperados de espín en el régimen de bajas energías de incidencia. Se discute el comportamiento transitorio de dichos valores esperados y se observa que exhiben un patrón de difracción en el tiempo. Se muestra que en el régimen asintótico de tiempos largos estos coinciden con sus correspondientes valores estacionarios. Además, se plantea la posibilidad de asociar escalas de tiempo transitorias a los valores esperados mencionados y analizar su relación con las escalas de tiempo estacionarias como lo son los tiempos de Rybachenko.

**Palabras Clave:** Transitorios, campo magnético.

**ABSTRACT** of the thesis that as a partial fulfillment for obtaining the B.S. in Physics presents **FABIÁN YARATH MONTIEL PURDON**. Ensenada, Baja California, México, April, 2024.

**MAGNETIC FIELD EFFECTS ON THE QUANTUM TRANSPORT  
DYNAMICS IN ONE-DIMENSIONAL SYSTEMS**

Approved by:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar  
Thesis Advisor

We derive an integral analytical solution of the Schrödinger-Pauli equation for a plane wave spinor interacting with a finite range potential under the effect of a constant magnetic field. We obtain an analytical formula to describe the effects induced by the magnetic field in the dynamics of the probability density and the expectation values of the spin in the transmission region of a potential barrier in the regime of low incidence energies. In the regime where the coupling energy is not negligible, compared to the height of the barrier, there is a phase shift between the principal maxima of the probability density with or without a magnetic field respect to the free particle. The phase shift is greater with magnetic field and allows measurements of the *time delay*, which increases as the Larmor frequency increases. We analyze the transient behavior of the expectation values of spin of the system and show that they exhibit diffraction in time patterns. The expectation values of spins coincide with the corresponding stationary values in the asymptotic regime of very long times. In addition, the possibility of associating transient time scales to the average values of the spin components is raised, and analyzing their relationship with the stationary Rybachenko time scales.

**Keywords:** transients, magnetic field

*A mi familia y amigos*

# Agradecimientos

A mi familia, por todo el apoyo incondicional brindado a lo largo de mi vida.

A mis amigos, por la convivencia, el crecimiento personal y académico.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias, por seguir cultivando el amor a la ciencia.

A mi profesor de física en preparatoria Gerardo Resendiz y el Dr. Alberto Hernandez, por mostrarme que la física va más allá de hacer cálculos.

A mis asesores de tesis, por sus valiosos comentarios y la oportunidad de trabajar en lo aquí plasmado.

# Contenido

	Página
<b>Resumen en español</b>	<b>i</b>
<b>Resumen en inglés</b>	<b>ii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Contenido</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>x</b>
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>II. MARCO TEÓRICO</b>	<b>5</b>
II.1 El obturador de Moshinsky para el caso libre . . . . .	6
II.2 El obturador de Moshinsky para un potencial unidimensional . . . . .	7
II.2.1 Solución para el caso de la barrera de potencial . . . . .	10
II.3 El obturador de Moshinsky para un potencial unidimensional en presencia de un campo magnético . . . . .	13
II.4 Obturador de Moshinsky para un potencial en presencia de un campo magnético . . . . .	15
II.4.1 Régimen de bajas energías. . . . .	18
<b>III. RESULTADOS</b>	<b>20</b>
III.1 Dinámica de ondas cuánticas dispersadas por una barrera de potencial	20
III.2 Dinámica de ondas cuánticas dispersadas por un potencial en presencia de un campo magnético . . . . .	26
III.2.1 Densidad de Probabilidad . . . . .	26
III.2.2 Valores Esperados de Espín . . . . .	40
<b>IV. CONCLUSIONES</b>	<b>52</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>54</b>
<b>A. Amplitud de transmisión para una barrera de potencial</b>	<b>57</b>
A.1 Coeficiente de Transmisión a Bajas Energías para Barreras Opacas .	57
<b>B. Función de Moshinsky</b>	<b>59</b>
B.1 Identidad . . . . .	59

## Contenido (continuación)

	Página
B.2 Propiedades asintóticas . . . . .	59
<b>C. Cálculo del propagador <math>K(x, t; y, 0)</math></b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Modelo de obturador cuántico para una onda plana libre . . . . .	7
2	Modelo de obturador cuántico para un potencial arbitrario . . . . .	8
3	Precesión de Larmor de una partícula con espín inicial . . . . .	13
4	Barrera de potencial con campo magnético . . . . .	16
5	Densidad de probabilidad para la partícula libre y barrera de potencial a bajas energías normalizada al coeficiente de transmisión respecto del tiempo. . . . .	21
6	Densidad de probabilidad respecto del tiempo normalizada al coeficiente de transmisión con los parámetros de la figura 5 para $x = 200 \text{ \AA}$ , $x = 300 \text{ \AA}$ , $x = 400 \text{ \AA}$ . . . . .	22
7	Densidad de probabilidad respecto de la posición, normalizada al coeficiente de transmisión para $t = 200 \text{ fs}$ con los parámetros $E$ , $V_0$ , $a$ de la figura 5. . . . .	23
8	Densidad de probabilidad respecto de la posición, normalizada al coeficiente de transmisión para $t = 200 \text{ fs}$ , $t = 300 \text{ fs}$ , $t = 400 \text{ fs}$ , con los parámetros $E$ , $V_0$ , $a$ de la figura 5. . . . .	24
9	Densidad de probabilidad respecto de la posición, normalizada al coeficiente de transmisión para $t = 500 \text{ fs}$ , $t = 1200 \text{ fs}$ , con los parámetros $E = 0.01 \text{ eV}$ y $V_0$ , $a$ de la figura 5. . . . .	25
10	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial con campo magnético. . . . .	27
11	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ y $\omega_L$ de la figura 10. . . . .	28
12	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 10 y $\omega_L = 9 \times 10^{-6} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	29

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
13	Densidad de probabilidad normalizada respecto de la posición, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético para $t = 200$ fs, con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $a$ de la figura 10 y $\omega_L = 9 \times 10^{-3}$ fs $^{-1}$ . . . . .	30
14	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 10 y $\omega_L = 10$ fs $^{-1}$ . . . . .	31
15	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial $V_0 = 0.1$ eV, en presencia y ausencia de campo magnético . . . . .	32
16	Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial $V_0 = 0.1$ eV, en presencia y ausencia de campo magnético . . . . .	33
17	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.14$ fs $^{-1}$ . . . . .	34
18	Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.14$ fs $^{-1}$ . . . . .	35
19	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.17$ fs $^{-1}$ . . . . .	36
20	Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.17$ fs $^{-1}$ . . . . .	37
21	Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.23$ fs $^{-1}$ . . . . .	38

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
22	Máximo de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para una barrera de potencial en presencia y ausencia de campo magnético con los parámetros para $E$ , $V_0$ , $x$ , $a$ de la figura 15 y $\omega_L = 0.23 \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	39
23	Tiempo de retraso dinámico . . . . .	40
24	Valor esperado de $S_x$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-2} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	42
25	Valor esperado de $S_y$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-2} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	43
26	Valor esperado de $S_z$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-2} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	44
27	Suma del cuadrado de los valores esperados de espín respecto del tiempo para $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	45
28	Valor esperado de $S_x$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	46
29	Valor esperado de $S_y$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	47
30	Valor esperado de $S_z$ respecto del tiempo con $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ . . . . .	48
31	Valor esperado para $S_x$ respecto de la posición con $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$ en $t = 10000 \text{ fs}$ . . . . .	49
32	Valor esperado para $S_y$ respecto de la posición con $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$ en $t = 10000 \text{ fs}$ . . . . .	50
33	Valor esperado para $S_z$ respecto de la posición con $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$ en $t = 10000 \text{ fs}$ . . . . .	51
34	Ondas incidentes, transmitidas y reflejadas por un potencial unidimensional arbitrario como función de la posición. . . . .	61

# Lista de Tablas

Tabla

Página

# Capítulo I

## Introducción

Los transitorios en la mecánica cuántica han demostrado ser una herramienta de gran utilidad, tanto teórica como experimental, para el estudio de diversos fenómenos que involucran la propagación de ondas de materia (Kleber, 1994a; Del Campo *et al.*, 2009; Razavy, 2013). Los fenómenos transitorios surgen de las propiedades de los estados cuánticos que obedecen ecuaciones relativistas y no-relativistas sujetas a condiciones iniciales que describen un cambio abrupto en las condiciones iniciales. Quizás el ejemplo más representativo de los fenómenos transitorios, es la *difracción en el tiempo* asociada a ondas de materia, predicho por Moshinsky (1952), que está basado en un modelo de obturador de onda plana. Dicho modelo plantea la evolución de un estado inicial descrito por una onda plana cortada, que a un tiempo  $t = 0$ , es confinada en la región del espacio ( $x < 0$ ), a la izquierda un obturador absorbente en  $x = 0$ . La apertura del obturador a un tiempo  $t > 0$ , permite la evolución libre de la onda plana, cuya densidad de probabilidad exhibe un patrón oscilatorio característico llamado *difracción en el tiempo* (Moshinsky, 1952, 1976), similar al de la intensidad de un haz de luz difractado por un semiplano. El patrón de difracción en el tiempo fue verificado posteriormente en diversos experimentos que involucran átomos ultrafríos (Szriftgiser *et al.*, 1996), neutrones fríos (Hils *et al.*, 1998), así como condensados de Bose-Einstein (Colombe *et al.*, 2005). El estudio y control de las propiedades dependientes del tiempo son de gran relevancia, por ejemplo, en el campo de los láseres de átomos (Hagley *et al.*, 1999; Trippenbach *et al.*, 2000; Del Campo *et al.*, 2007), los cuales se basan en la extracción de ondas de materia a partir de condensados de Bose-Einstein. El modelo del obturador

cuántico también ha permitido estudiar algunos aspectos exclusivos de la óptica, en el dominio temporal de las ondas de materia, mediante experimentos con átomos que exhiben fenómenos de difracción e interferencia (Arndt *et al.*, 1996; Szriftgiser *et al.*, 1996), así como modulaciones de fase (Steane *et al.*, 1995; Décamps *et al.*, 2016) y batimientos de ondas cuánticas (Décamps *et al.*, 2016).

Luego del trabajo seminal de Moshinsky (1952), diversas investigaciones teóricas han planteado distintos escenarios en donde se han utilizado una gran variedad de estados cuánticos iniciales, así como generalizaciones del modelo de obturador, para explorar la dinámica en sistemas cuánticos (Del Campo *et al.*, 2009). Entre estos sistemas podemos encontrar, potenciales delta (Kleber, 1994b; Elberfeld y Kleber, 1988; Hernández y García-Calderón, 2003; Andreatta y Dodonov, 2004; Villavicencio *et al.*, 2007; Granot y Marchewka, 2007; Mendoza-Luna y García-Calderón, 2010), barreras de potencial (Brouard y Muga, 1996; García-Calderón y Villavicencio, 2001; García-Calderón *et al.*, 2003; Granot y Marchewka, 2007; Julve y de Urrés, 2008), y superredes semiconductoras (García-Calderón y Rubio, 1997; Romo y Villavicencio, 1999; Cordero y García-Calderón, 2010). Algunos de los transitorios explorados abordan el estudio del transporte y acumulación de carga en estructuras cuánticas (García-Calderón y Rubio, 1997; Romo y Villavicencio, 1999; Cordero y García-Calderón, 2010), así como escalas de tiempo (Kleber, 1994b; Elberfeld y Kleber, 1988; García-Calderón y Rubio, 1997; García-Calderón y Villavicencio, 2001; Hernández y García-Calderón, 2003; Andreatta y Dodonov, 2004; Villavicencio *et al.*, 2007; García-Calderón *et al.*, 2003; Amador-Bartolini *et al.*, 2020), por mencionar algunos trabajos. Aunque la mayoría de estos estudios se basan en modelos de obturador de onda plana cortada, (Elberfeld y Kleber, 1988; Hernández y García-Calderón, 2003; García-Calderón y Villavicencio, 2001; García-Calderón *et al.*, 2003; Andreatta y Dodonov, 2004; Brouard y Muga, 1996; Villavicencio *et al.*, 2007; Julve y de Urrés, 2008; Mendoza-Luna y García-Calderón,

2010) así como paquetes de onda gaussianos (Andreatta y Dodonov, 2004; Villavicencio *et al.*, 2007; Cordero y García-Calderón, 2010), diferentes condiciones iniciales han sido utilizadas para caracterizar los fenómenos asociados a ondas planas cortadas moduladas (Villavicencio y Hernández-Maldonado, 2020), paquetes Lorentzianos (Yamada *et al.*, 2005; Amador-Bartolini *et al.*, 2020), y obturadores movibles (Hernández, 2010; Hernández-Maldonado *et al.*, 2021), para explorar diversos aspectos de los transitorios, como los son las escalas de tiempo. Sin embargo, en estos contextos dinámicos, los efectos de campos magnéticos en los fenómenos transitorios en estructuras cuánticas han sido poco explorados. Si bien existen estudios en el contexto estacionario (Razavy, 2013) que han sido utilizados para explorar diversas escalas de tiempo, como por ejemplo el tiempo de Larmor (Rybachenko, 1967; Büttiker, 1983) en barreras de potenciales unidimensionales, consideramos que un enfoque dinámico nos proveerá una herramienta útil para describir los aspectos dependientes del tiempo de la densidad de probabilidad electrónica en este tipo de sistemas, con base en soluciones analíticas. El estudio de la dinámica en este tipo de sistemas, también ha sido motivado por experimentos recientes de tunelaje cuántico de átomos ultrafríos de rubidio, a través de barreras ópticas (Ramos *et al.*, 2020; Spierings y Steinberg, 2021), en donde se han verificado las escalas de tiempo de Larmor, introducidas teóricamente por Rybachenko (1967) en el contexto estacionario.

En el presente trabajo se plantea estudiar el problema de obturador cuántico mediante la generalización de la ecuación de Schrödinger para partículas de espín-1/2, que tiene en cuenta la interacción entre el espín y el campo magnético. Para explorar la evolución temporal de una onda plana en una barrera de potencial en presencia de un campo magnético uniforme. El propósito es obtener soluciones analíticas exactas en los regímenes de interés, como lo es el régimen de baja energía de incidencia, y estudiar el comportamiento de la densidad de probabilidad en las regiones interna y externa del

potencial, así como las escalas de tiempo relevantes en el sistema.

## Capítulo II

# MARCO TEÓRICO

Se presentan los antecedentes del problema que nos ocupa en esta tesis, en donde pretendemos estudiar los efectos del campo magnético en la dinámica del transporte cuántico en sistemas unidimensionales.

En la sección II.1 se presenta el modelo de obturador cuántico de Moshinsky para el caso libre, el cual representa el modelo base para el estudio de los fenómenos transitorios asociados a las ondas de materia. Dicho modelo involucra la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo con la condición inicial de una onda plana truncada.

En la sección II.2 abordamos el planteamiento del modelo del obturador de Moshinsky para un potencial de alcance finito en una dimensión. Si bien, incluimos una discusión de los resultados obtenidos mediante enfoques de mecánica no-hermitiana (energías complejas) que utilizan desarrollos en estados resonantes, en esta sección enfatizamos algunos de los detalles de un enfoque basado en desarrollos en estados de continuo, en el contexto de la mecánica cuántica ortodoxa (energías reales).

Finalmente, en la sección II.3 presentamos los enfoques estacionarios para describir los efectos de un campo magnético en el caso estacionario, mediante la solución de la ecuación de Schrödinger-Pauli. Lo anterior es el punto de partida para proponer el tema de estudio de nuestro anteproyecto de tesis, en donde planteamos la solución dinámica de la ecuación Schrödinger-Pauli con la condición inicial de obturador de onda plana, para estudiar los efectos del campo magnético en los transitorios en una barrera de potencial, en el régimen de bajas energías.

## II.1 El obturador de Moshinsky para el caso libre

Un modelo que ha resultado de gran utilidad para estudiar los fenómenos transitorios en mecánica cuántica es el del obturador de Moshinsky (1952). Éste involucra la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, para el caso libre.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t), \quad (1)$$

con la condición inicial al tiempo  $t = 0$  de onda plana truncada (ver figura 1),

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} e^{ik_0x}, & -\infty < x \leq 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

en donde  $k_0$  es el momento inicial, y  $E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2m$  es la energía de incidencia de la partícula. La solución de la ecuación diferencial (1) con la condición inicial (2), permite obtener la solución en la región  $x \geq 0$ , utilizando la expresión para la evolución temporal de un estado cuántico en términos de propagador del sistema  $K(x, t; x', 0)$ , dada por

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, t; x', 0) \psi(x', 0), \quad (3)$$

en donde  $K(x, t; x', 0)$  para este caso corresponde al propagador para la partícula libre, así:

$$\psi(x, k, t) = \frac{1}{2} e^{i(kx - \hbar k^2 t / 2m)} \operatorname{erfc}[y_k(x, t)] \equiv M[y_k(x, t)], \quad (4)$$

conocida como la función  $M$  de Moshinsky (1952), con argumento

$$y_k(x, t) = e^{-i\pi/4} \left[ \frac{x - \hbar k t / m}{\sqrt{2\hbar t}} \right]. \quad (5)$$

La función  $M$  posee la siguiente representación integral,

$$M[y_k(x, t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{(im/\hbar)}{\sqrt{2mis/\hbar}} \left[ \frac{e^{\sqrt{2mis/\hbar}x}}{\sqrt{2mis/\hbar} - k} \right] e^{st} ds, \quad (6)$$

y puede expresarse alternativamente en términos de la *función de error compleja* (Abramowitz y Stegun, 1964)  $w(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz)$ , como

$$M[y_k(x, t)] = \frac{1}{2} e^{imx^2/2\hbar t} w[iy_k(x, t)]. \quad (7)$$

Físicamente, una vez que se abre el obturador, la densidad de probabilidad  $|\psi(x, k, t)|^2$  en la región  $x > 0$ , exhibe un patrón oscilatorio característico conocido como *difracción en el tiempo* (Moshinsky, 1952, 1976), en analogía con el fenómeno de difracción óptica de la luz por un plano semi-infinito, como se muestra en la figura 1.

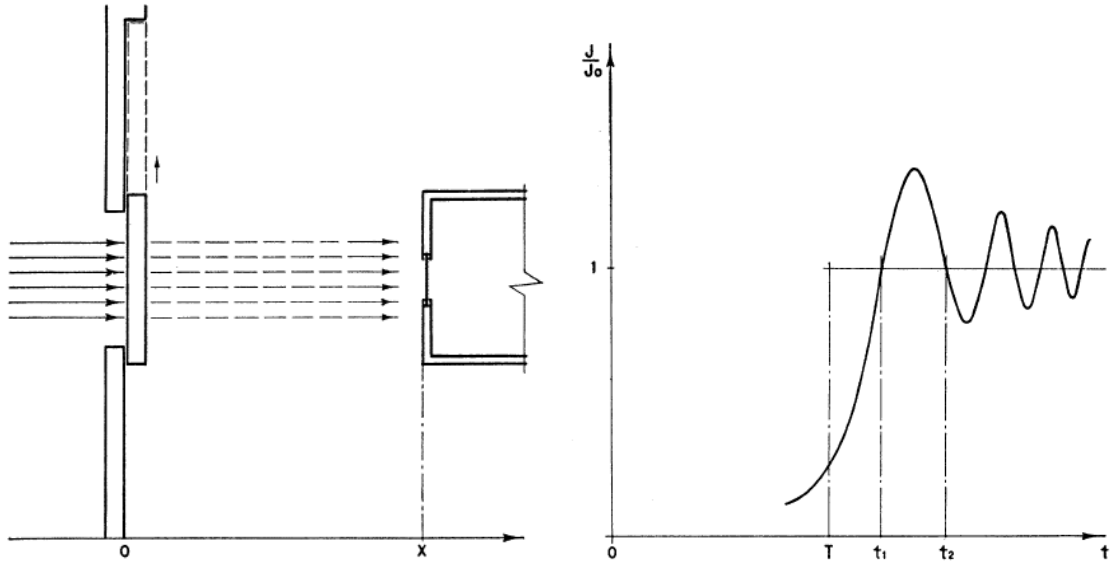


Figura 1: Modelo de obturador cuántico para una onda plana libre. En este caso el fenómeno de difracción en el tiempo se muestra en una gráfica de la corriente de probabilidad  $J$  (normalizada a la corriente incidente,  $J_0$ ), como función del tiempo  $t$ . Tomado del trabajo de Moshinsky (1952).

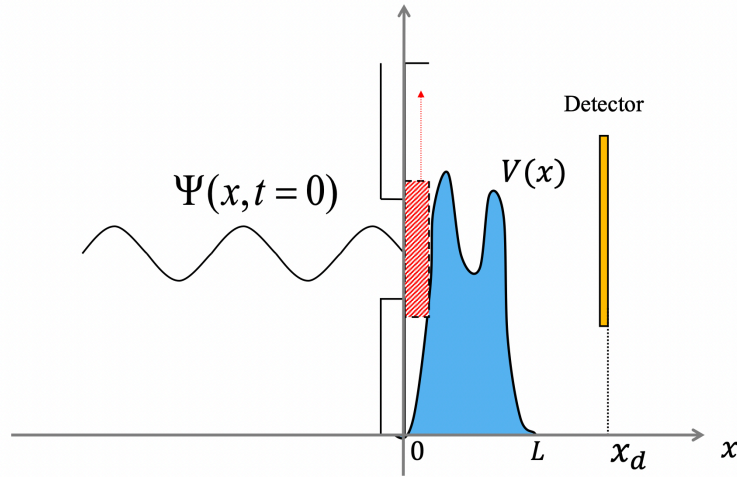
## II.2 El obturador de Moshinsky para un potencial unidimensional

El modelo de obturador cuántico fue generalizado por García-Calderón y Rubio (1997) para estudiar la evolución temporal de ondas planas truncadas en potenciales de alcance finito en una dimensión, basado en un desarrollo de la función de onda en estados

resonantes (García-Calderón y Rubio, 1997; García-Calderón, 2010). Dicho modelo plantea la solución de la ecuación de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t), \quad (8)$$

para un potencial de alcance finito  $V(x)$  definido en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ , con la condición inicial dada por la ecuación (2). Ver la figura 2.



**Figura 2:** Modelo de obturador cuántico para un potencial arbitrario de alcance finito  $V(x)$ , definido en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . Un detector hipotético es colocado en la posición  $x_d$ .

Las soluciones dependientes del tiempo obtenidas con este enfoque no-hermitiano (energías complejas) (García-Calderón y Rubio, 1997; García-Calderón, 2010), involucran desarrollos de las funciones de onda en términos de cantidades como lo son: los *estados resonantes*, los polos de la amplitud de transmisión, así como las funciones  $M$  de Moshinsky. Dichas soluciones analíticas han resultado ser una poderosa herramienta para describir un gran variedad de problemas físicos de transporte electrónico (Del Campo *et al.*, 2009). Alternativamente, se ha demostrado la equivalencia de estos enfoques no-hermitianos con aquellos basados en la mecánica cuántica ortodoxa que incluye

desarrollos en *estados del continuo* (energías reales) (García-Calderón *et al.*, 2003). En este enfoque, se plantea la solución del problema del obturador cuántico mediante el *método de propagadores*. Esto es, la evolución de un estado inicial  $\Psi(y, 0)$  en cualquier posición y tiempo, en la región de transmisión del potencial  $x \geq L$ , y  $t > 0$ , puede ser obtenida utilizando la siguiente representación integral

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, t; y, 0) \psi(y, 0), \quad (9)$$

dada en términos del propagador  $K(x, t; y, t)$  del sistema. Este último puede calcularse analíticamente mediante el procedimiento descrito en el apéndice C, en donde obtenemos una representación para  $K(x, t; y, t)$  dada por la ecuación (68). Una vez que hemos calculado el propagador  $K(x, t; y, 0)$ , podemos realizar un desarrollo en eigenfunciones del estado inicial  $\psi(y, 0)$  en la ecuación (9), que nos conduce a,

$$\psi(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) e^{iky}, \quad (10)$$

en donde  $\phi(k)$  es el estado cuántico inicial en el espacio- $k$ . Sustituyendo la ecuaciones (10) y (68) en (9), e integrando sobre la variable  $y$ , obtenemos finalmente,

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) T(k) e^{ikx - i\hbar k^2 t / 2m}, \quad (11)$$

en donde  $T(k)$  es la amplitud de transmisión del sistema, y  $\phi(k)$  es la transformada de Fourier del estado inicial, esto es,

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} \Psi(y, 0). \quad (12)$$

Vemos que una vez conocida la amplitud de transmisión del sistema,  $T(k)$ , así como la transformada de Fourier del estado inicial,  $\phi(k)$ , es posible describir mediante la ecuación (9) la evolución temporal del estado cuántico en la región de transmisión del sistema. Utilizando el método de propagadores, también es posible obtener expresiones para la función de onda dependiente del tiempo en la región interna del potencial.

## II.2.1 Solución para el caso de la barrera de potencial

A continuación obtendremos una de las aportaciones más importantes del presente trabajo, una expresión analítica para la función de onda dependiente del tiempo, para estudiar la evolución temporal de la densidad de probabilidad en la parte transmitida en una barrera de potencial (sin campo magnético) en el régimen de bajas energías. Esto es, analizaremos los transitorios de la función de onda en la región  $x > a$ , en donde  $a$  es la anchura de la barrera de potencial. Para esto utilizamos la ecuación para la evolución temporal dada por la ecuación (??)

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) T_{\alpha}(k) e^{ikx - i\hbar k^2 t / 2m}, \quad (13)$$

en donde en este caso  $T_{\alpha}(k)$  es la amplitud de transmisión del sistema en el régimen de bajas energías. Sustituimos la  $T_{\alpha}(k)$  dada por la ecuación (56) del apéndice A en (13) y obtenemos,

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) \frac{e^{-ika}}{\cosh \alpha} \frac{k}{k + i\gamma} e^{ikx - i\hbar k^2 t / 2m}. \quad (14)$$

Calculamos  $\phi(k)$  dada por la ecuación (12) utilizando el estado inicial descrito por la ecuación (2), lo que nos conduce a la siguiente expresión

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^0 \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} e^{ik_0 y} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{k - k_0 + i\epsilon} \right), \quad (15)$$

donde  $\epsilon$  es un número infinitesimal positivo, escogido así para que la integral de la ecuación (15) sea convergente. Sustituyendo (15) en (14) obtenemos:

$$\psi(x, t) = \frac{i}{2\pi \cosh \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \frac{1}{k - k_0 + i\epsilon} \right) \frac{k}{k + i\gamma} e^{ik(x-a) - i\hbar k^2 t / 2m}. \quad (16)$$

Definiendo  $\sigma = i\epsilon - k_0$  podemos reescribir el término no exponencial de la ecuación (14) como:

$$\left( \frac{1}{k - k_0 + i\epsilon} \right) \left( \frac{k}{k + i\gamma} \right) = \frac{\gamma}{(\sigma i + \gamma)(k + i\gamma)} + \frac{\sigma i}{(k + \sigma)(\sigma i + \gamma)}. \quad (17)$$

Con el resultado anterior podemos reescribir la ecuación (16), en donde con ayuda de la ecuación (61) del apéndice B identificamos las integrales resultantes como las funciones  $M$  de Moshinsky, lo cual nos permite escribir,

$$\psi(x, t) = \frac{i\sigma}{(\sigma i + \gamma) \cosh \alpha} M(x - a, k_0, t) + \frac{\gamma}{(\sigma + i\gamma) \cosh \alpha} M(x - a, -i\gamma, t). \quad (18)$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y redefiniendo algunas constante obtenemos lo siguiente:

$$\psi(x, t) = t_{k_0} M(x - a, k_0, t) + r_{k_0} M(x - a, -i\gamma, t), \quad (19)$$

donde

$$t_{k_0} = \frac{1}{\cosh \alpha} \left[ \frac{k_0}{k_0 + i\gamma} \right]; \quad (20)$$

$$r_{k_0} = \frac{1}{\cosh \alpha} \left[ \frac{i\gamma}{k_0 + i\gamma} \right]. \quad (21)$$

### Comportamiento asintótico a tiempos largos

Estudiaremos la solución en la región de transmisión descrita por la ecuación (19) a tiempos largos, o bien cuando  $t \rightarrow \infty$ . Dado que la ecuación (19) es la suma de dos funciones de Moshinsky, resulta conveniente utilizar las fórmulas de los desarrollos asintóticos de las funciones de Moshinsky (apéndice B) dados por la ecuación (63) para valores grandes del argumento  $y_q$  descrito por la ecuación (62). Tomando el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  del argumento  $y_q$  obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_q = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \left( \frac{\hbar}{m} q t^{1/2} \right) \right]. \quad (22)$$

Formalmente este límite no converge, sin embargo, para fines prácticos podemos usar la expresión obtenida en (22) como aproximación de  $y_q$  para tiempos largos. Así, para  $q = k_0$ , tenemos que:

$$y_{k_0} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \left( \frac{\hbar}{m} k_0 t^{1/2} \right) = e^{i\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \left( \frac{\hbar}{m} k_0 t^{1/2} \right). \quad (23)$$

De la ecuación (22) observamos que  $\arg(y_{k_0}) = 3\pi/4$ , el cual está dentro de los límites  $\pi/2 < \arg(y_{k_0}) < 3\pi/2$ , por lo que podemos aproximar la función de moshinsky como:

$$M(x - a, k_0, t) = e^{ik_0(x-a)} e^{-iEt/\hbar} \quad (24)$$

Para  $q = -i\gamma$  a tiempos largos:

$$y_{-i\gamma} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \left( \frac{\hbar}{m} \gamma t^{1/2} \right). \quad (25)$$

Mediante la ecuación (25) tenemos que  $\arg(y_{-i\gamma}) = \pi/4$ , así:

$$M(x - a, -i\gamma, t) = \frac{1}{2} e^{imx^2/2m\hbar t} \left[ \frac{1}{\pi^{1/2} y_{-i\gamma}} \right]. \quad (26)$$

Si  $t \rightarrow \infty$ , de la ecuación (26) podemos concluir que  $M(x - a, -i\gamma, t) \rightarrow 0$

Usando la ecuación (24) y lo analizado en la ecuación (26), es posible expresar la función de onda en la región de transmisión sin campo magnético a tiempos largos como:

$$\psi(x, t) = t_{k_0} e^{ik_0(x-a)} e^{-iEt/\hbar} \quad (27)$$

Al calcular la densidad de probabilidad de la ecuación (27) obtenemos:

$$|\psi(x, t)|^2 = |t_{k_0}|^2 \quad (28)$$

De (28) se ha demostrado que para tiempos largos la densidad de probabilidad tiende al coeficiente de transmisión, es un resultado que coincide con lo que se espera de una función de onda que describa este tipo de problemas, ya que tiende al caso estacionario.

## II.3 El obturador de Moshinsky para un potencial unidimensional en presencia de un campo magnético

Los efectos de un campo magnético uniforme en los transitorios de la función de onda en estructuras cuánticas, ha sido un campo poco explorado. Existen estudios en el contexto estacionario (Razavy, 2013) que han sido utilizados para explorar escalas de tiempo relevantes, como lo es el tiempo de Larmor (Rybachenko, 1967; Büttiker, 1983) en barreras de potenciales unidimensionales. La solución de este problema estacionario (Rybachenko, 1967; Büttiker, 1983) consiste en plantear la dispersión de un haz de partículas con espín-1/2 polarizadas en la dirección del eje  $x$ , y que tunelean a través de una barrera de potencial  $V(y) = V_0$  ( $|y| \leq L/2$ ) a lo largo del eje  $y$ . Se incluye además el efecto de un campo magnético débil, aplicado en la dirección del eje  $z$ , y confinado en la región interna de la barrera, esto es  $B = 0$  ( $|y| \geq L/2$ ), como se muestra en la figura 3.

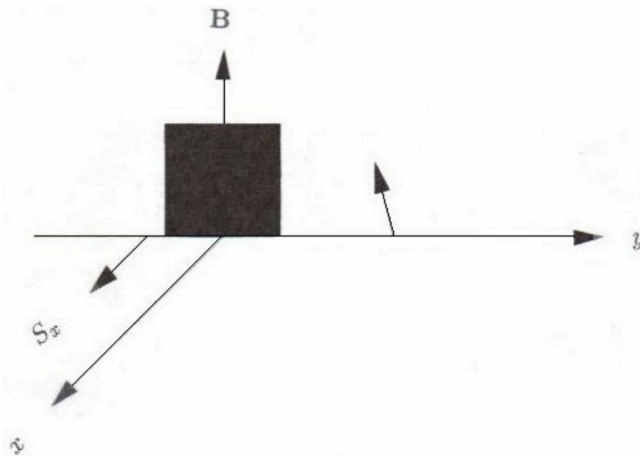


Figura 3: Precesión de Larmor de una partícula con espín inicial  $S_x$ , en presencia de un campo magnético  $B$ . Tomado de Razavy (2013).

La partícula que interacciona con la barrera experimenta una precesión de Larmor con frecuencia  $\omega_L = qB/2m$ , en donde  $q$  y  $m$  son la carga y la masa de la partícula, respectivamente. El ángulo de precesión  $\theta$  nos provee el tiempo  $\theta/\omega_L$  que emplea la partícula en atravesar la región de la barrera. El hamiltoniano para el movimiento de la partícula cargada en este caso, está dado por:

$$\hat{H} = \begin{cases} [-(\hbar^2/2m)\partial^2/\partial y^2 + V_0]\sigma_0 - (\hbar\omega_L/2)\sigma_z, & |y| \leq L/2; \\ [-(\hbar^2/2m)\partial^2/\partial y^2]\sigma_0, & |y| \geq L/2, \end{cases} \quad (29)$$

en donde  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  (matriz unidad de  $2 \times 2$ ), y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli. El término  $(\hbar\omega_L/2)\sigma_z$  en el hamiltoniano (29) se debe al acoplamiento  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$  entre el espín de la partícula y el campo magnético. La función de onda estacionaria (espinor) tiene dos componentes:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_+(y) \\ \psi_-(y) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

en donde  $|\psi_{\pm}(y)|^2 dy$  es la probabilidad de encontrar a la partícula con espín  $\pm\hbar/2$  en el intervalo  $[y, y + dy]$ . Debido a que las partículas incidentes están polarizadas en la dirección de  $x$ , la condición inicial para el problema está dada por,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{iky}. \quad (31)$$

Se observa que el hamiltoniano  $\hat{H}$  dado por la ecuación (29) es diagonal en la base de los espinores, de modo que la ecuación Schrödinger-Pauli resulta en dos ecuaciones desacopladas para las componentes  $\psi_+(y)$  y  $\psi_-(y)$  del espinor, por lo que obtendremos ecuaciones similares para las partículas con *espín-arriba* y *espín-abajo*. En este caso, tenemos que las soluciones de las componentes del espinor son:

$$\psi_{\pm}(y) = e^{iky} + R_{\pm} e^{-iky}, \quad y \leq -L/2; \quad (32)$$

$$\psi_{\pm}(y) = T_{\pm} e^{iky}, \quad y \geq L/2. \quad (33)$$

Estas expresiones se utilizan para calcular las escalas de tiempo de Larmor (Rybachenko, 1967).

El enfoque anterior permite describir a los espinores en el régimen estacionario. Sin embargo, consideramos que un enfoque dinámico nos proveerá con una herramienta útil para describir los aspectos dependientes del tiempo de la densidad de probabilidad electrónica con base en soluciones analíticas. De esta manera podremos explorar la dinámica de la densidad de probabilidad espinoral desde el régimen transitorio hasta el régimen estacionario, como se discutirá en la siguiente sección.

## **II.4 Obturador de Moshinsky para un potencial en presencia de un campo magnético**

En la presente sección se plantea el estudio del problema de obturador cuántico para explorar la evolución temporal de una onda plana en una potencial unidimensional en presencia de un campo magnético uniforme. En la figura 3 se presenta el potencial definido en el eje  $y$  y la partícula polarizada en  $x$ , por cuestiones de convención invertiremos estos ejes de tal forma que la región interna del potencial estará definida en el intervalo  $0 \leq x \leq a$  y la partícula estará polarizada en el eje  $y$ , como se muestra en la figura 4.

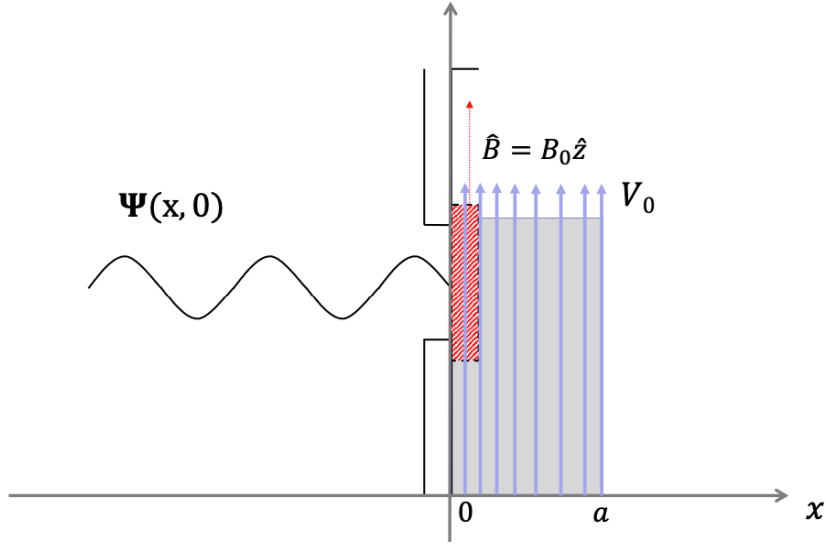


Figura 4: Onda plana con polarización de espín en el eje  $y$  denotado por  $\Psi(x, 0)$ , atravesando una barrera de potencial de longitud  $a$  y altura  $V_0$  con campo magnético de magnitud  $B_z$  a lo largo del eje  $z$ , representado por un rectángulo gris y flechas perpendiculares al eje  $x$  respectivamente.

El problema es una extensión de los resultados obtenidos por (Razavy, 2013), al dominio temporal utilizando la ecuación de Schrödinger-Pauli.

$$\hat{H} \begin{bmatrix} \psi^+(x, t) \\ \psi^-(x, t) \end{bmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \psi^+(x, t) \\ \psi^-(x, t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

con la condición inicial de obturador cuántico a un tiempo  $t = 0$  dada por,

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{ikx} \Theta(x). \quad (35)$$

donde

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \end{cases}, \quad (36)$$

En general, el hamiltoniano es de la forma:

$$\hat{H} = \begin{cases} [-(\hbar^2/2m)\partial^2/\partial x^2 + V(x)]\sigma_0 - (\hbar\omega_L/2)\sigma_z, & 0 \leq x \leq a; \\ [-(\hbar^2/2m)\partial^2/\partial x^2]\sigma_0, & \text{de otro modo,} \end{cases} \quad (37)$$

en donde  $V(x)$  es un potencial finito arbitrario dentro de los límites establecidos por la ecuación (37), sujeto a los efectos de un campo magnético constante en la dirección de  $z$ . Al igual que el caso estacionario, la ecuación Schrödinger-Pauli resultante para las componentes  $\psi^+(x, t)$  y  $\psi^-(x, t)$  están desacopladas, y es posible obtener ecuaciones diferenciales para cada una de las partículas con *espín-arriba* y *espín-abajo*. Esto es, las funciones de onda espinorales satisfacen la siguientes dos ecuaciones diferenciales desacopladas dentro del intervalo  $0 \leq x \leq a$ ,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( V(x) \mp \frac{\hbar\omega_L}{2} \right) \right] \psi^\pm(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\pm(x, t). \quad (38)$$

Para el resto del intervalo, las ecuaciones para las elementos del espinor  $\psi^\pm$  corresponden a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para la partícula libre. En la ecuación (38) podemos definir  $V^\pm(x) = V(x) \mp \hbar\omega_L/2$ , por lo que obtenemos las ecuaciones Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V^\pm(x) \right] \psi^\pm(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\pm(x, t), \quad (39)$$

para un potencial efectivo  $V^\pm(x)$ . Así, observamos que (39) es de la forma (8), por lo que las ecuaciones diferenciales resultantes se resuelven mediante el método de propagadores presentado en la sección II.2. En otras palabras, las soluciones espinorales  $\psi^\pm(x, t)$  son de la forma dada por la ecuación (11), por lo que en la región de transmisión del potencial tenemos que:

$$\psi^\pm(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \phi^\pm(k) T^\pm(k) e^{ikx - i\hbar k^2 t / 2m}. \quad (40)$$

Los términos  $T(k)^\pm$  y  $\phi^\pm$ , son el coeficiente de transmisión correspondiente a  $V^\pm(x)$ , y la transformada de fourier de las condiciones iniciales del espinor, respectivamente.

La ecuación (40) proporciona una solución general en la región de transmisión para un potencial arbitrario, en el que se induce un campo magnético ortogonal al eje donde está definido dicho potencial. Este resultado es una generalización interesante de la fórmula obtenida por García-Calderón *et al.* (2003), y se trata de una de las aportaciones más importantes del presente trabajo de tesis.

Con estas fórmulas analíticas podemos explorar los efectos inducidos por el campo magnético en la dinámica de las ondas cuánticas transmitidas, así como las escalas de tiempo relevantes en el sistema. Un caso que resulta de gran interés es el los efectos de un campo magnético uniforme en la evolución temporal de ondas plana cortada, el cual abordaremos en la siguiente sección.

#### II.4.1 Régimen de bajas energías.

Para un potencial constante  $V(x) = V_0$ , la ecuación (39) escrita de forma explícita para  $\psi^+(x, t)$  y  $\psi^-(x, t)$  es:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^2} + V^+ \psi^+ = i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t}, \quad (41)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x^2} + V^- \psi^- = i\hbar \frac{\partial \psi^-}{\partial t}. \quad (42)$$

Donde  $V^\pm = V_0 \mp \hbar\omega_L/2$ , Aplicando las condiciones iniciales dada por la ecuación (35), que son equivalentes a la estudiada para la barrera de potencial de la sección II.2.1, la solución para la región de transmisión, en el régimen de bajas energías para las componentes del espinor  $\psi^\pm$  será la misma obtenida en la ecuación (18) con el valor de potencial correspondiente a  $V_\pm$ :

$$\psi^\pm(x, t) = \frac{i\sigma}{(\sigma i + \gamma_\pm) \cosh(\alpha_\pm)} M(x - a, k_0, t) + \frac{\gamma_\pm}{(\sigma + i\gamma_\pm) \cosh(\alpha_\pm)} M(x - a, -i\gamma_\pm, t), \quad (43)$$

donde  $\alpha_{\pm} = \sqrt{2mV_{\pm}/\hbar^2} a$  y  $\gamma = (\alpha_{\pm}/2a) \operatorname{tgh}(\alpha_{\pm})$ . De manera similar a la ecuación (19), la solución (43) se expresa como:

$$\psi^{\pm}(x, t) = t_{k_0}^{\pm} M(x - a, k_0, t) + r_{k_0}^{\pm} M(x - a, -i\gamma_{\pm}, t), \quad (44)$$

donde

$$t_{k_0}^{\pm} = \frac{k_0}{\cosh(\alpha_{\pm})(k_0 + i\gamma_{\pm})}, \quad (45)$$

$$r_{k_0}^{\pm} = \frac{i\gamma_{\pm}}{\cosh(\alpha_{\pm})(k_0 + i\gamma_{\pm})}. \quad (46)$$

Por lo tanto, el espinor para la región de transmisión queda expresado por:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi^{+}(x, t) \\ \psi^{-}(x, t) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

La ecuación (47) permite estudiar la evolución temporal de la densidad de probabilidad.

## Capítulo III

### RESULTADOS

En el presente capítulo estudiaremos la dinámica de la función de onda en la región de transmisión de una barrera de potencial en ausencia y en presencia de un campo magnético, en el régimen de bajas energías con base en la solución analítica obtenida en el capítulo anterior. En la sección III.1 se estudiará la densidad de probabilidad para el caso en ausencia de campo magnético, con el propósito de mostrar los aspectos más importantes de la dinámica de la densidad de probabilidad como función del tiempo y de la posición, así como su comportamiento en el régimen de tiempos largos. En la sección III.2 mostraremos los efectos en la dinámica de la densidad de probabilidad de espín, cuando el sistema se encuentra bajo los efectos de un campo magnético. Al igual que en el caso libre, se explorarán los fenómenos transitorios de la densidad de probabilidad de espín como función del tiempo y de la posición, así como su comportamiento en el régimen de tiempos largos. También se estudiarán los valores esperados de las componentes de espín dinámicos  $\langle S_i \rangle^2$  ( $i = x, y, z$ ) y se analizarán su evolución desde el régimen transitorio al régimen estacionario.

#### III.1 Dinámica de ondas cuánticas dipersadas por una barrera de potencial

Analizaremos el comportamiento de la densidad de probabilidad  $|\psi(x, t)|^2$  de la ecuación (19), como función de la posición y del tiempo para distintas energías de incidencia, la cual corresponde al caso de la barrera en ausencia de campo magnético. En todos los

cálculos numéricos utilizaremos la masa efectiva típica de materiales semiconductores, como el Arseniuro de Galio (*GaAs*)  $m = 0.067 m_e$ , con  $m_e = 0.510998 \text{ MeV}/c^2$  la masa del electrón. En la figura 5 se muestra una comparación del comportamiento de la densidad de probabilidad para la barrera, normalizada al coeficiente de transmisión  $|t_{k_0}|^2$ , la cual presenta un patrón oscilatorio similar a la del caso libre. Observamos que, para tiempos largos, la densidad de probabilidad para la barrera adopta un valor constante que tiende al coeficiente de transmisión, como se demostró en la sección II.2.1 *i.e.*  $|\psi(x, t)|^2/|t_{k_0}|^2 \rightarrow 1$ .

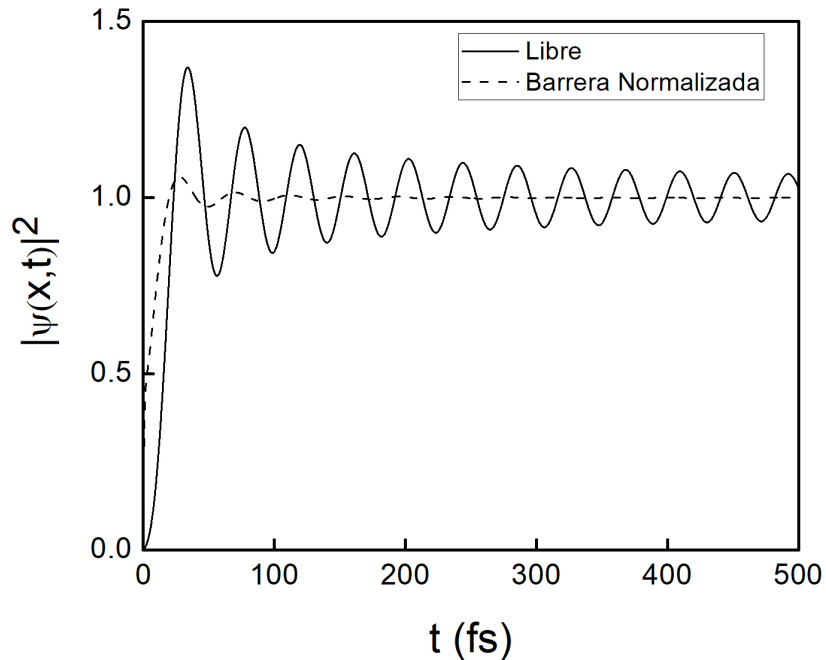


Figura 5: Densidad de probabilidad normalizada al coeficiente de transmisión respecto del tiempo para el caso de un barrera de potencial a bajas energías (línea a trazos). Se incluye el caso de una partícula libre (línea continua) como referencia. Parámetros: longitud de barrera  $a = 50 \text{ \AA}$ , altura de barrera  $V_0 = 8 \text{ eV}$  y energía de incidencia  $E = 0.1 \text{ eV}$ , en una posición  $x = 80 \text{ \AA}$ .

En la figura 6, se muestra que el patrón de difracción en la densidad de probabilidad sufre un desplazamiento al incrementar los valores de la posición. Lo anterior indica que la partícula le toma más tiempo en ser detectada para posiciones más distantes al potencial.

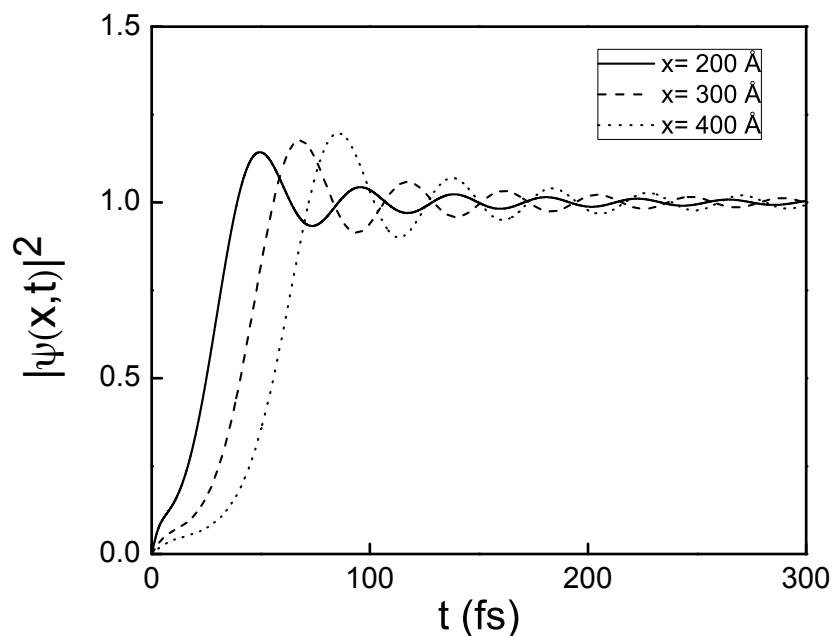


Figura 6: Densidad de probabilidad respecto del tiempo normalizadas al coeficiente de transmisión para distintos valores de la posición  $x = 200 \text{ \AA}$  (línea continua),  $x = 300 \text{ \AA}$  (línea a trazos) y  $x = 400 \text{ \AA}$  (línea a puntos), con los parámetros de la figura 5.

Analizaremos ahora la densidad de probabilidad respecto a la posición, para la región de transmisión. En la figura 7, se observa que la densidad de probabilidad presenta un patrón de difracción donde la amplitud de las oscilaciones aumenta hasta llegar a un valor máximo, a partir del cual disminuye conforme la distancia  $x$  aumenta.

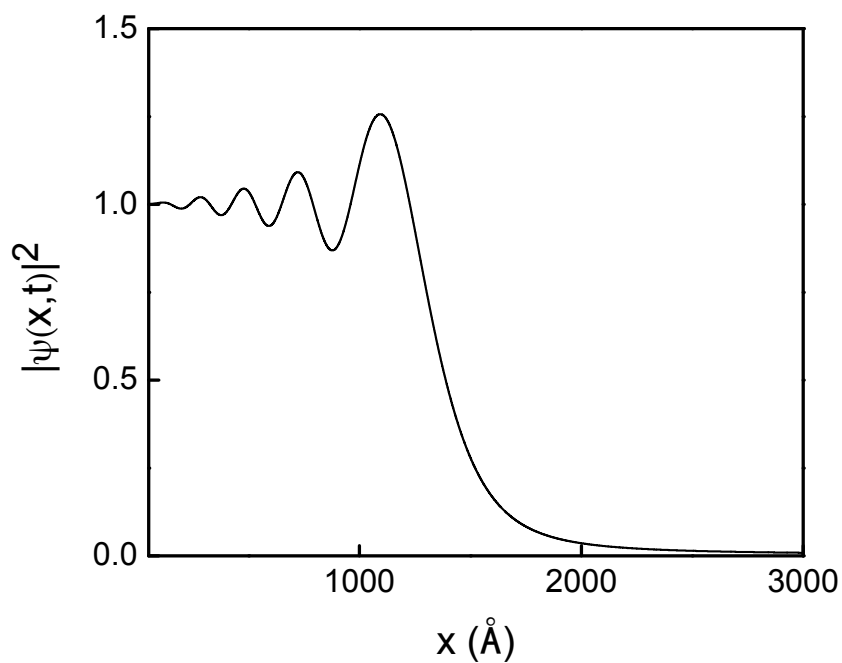


Figura 7: Densidad de probabilidad respecto de la posición, normalizada al coeficiente de transmisión, para  $t = 200 \text{ fs}$ , usando los parámetros para  $E$ ,  $V_0$  y  $a$  de la figura 5.

En la figura 8, se muestra que el patrón de difracción en la densidad de probabilidad sufre un desplazamiento al incrementar los valores del tiempo. Podemos interpretar este comportamiento como el de un frente de onda que se propaga a través del espacio.

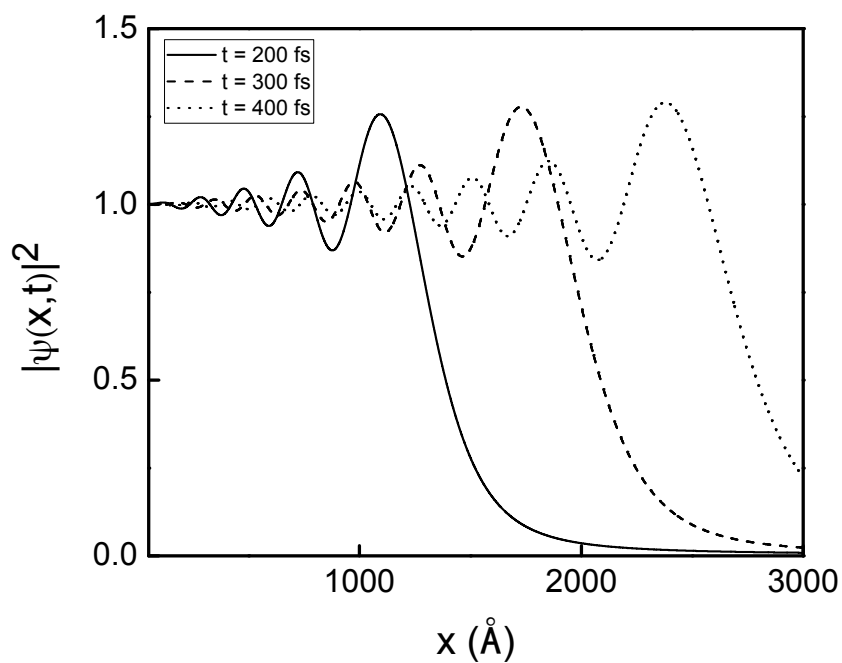


Figura 8: Densidad de probabilidad respecto a la posición, normalizadas al coeficiente de transmisión para distintos tiempos,  $t = 200$  fs (línea continua),  $t = 300$  fs (línea a trazos),  $t = 400$  fs (línea a puntos), usando los parámetros para  $E$ ,  $V_0$  y  $a$  de la figura 5.

En la figura 9 se observa que a energías más bajas se conserva el patrón oscilatorio de la densidad de probabilidad respecto a la posición, sin embargo, es necesario utilizar tiempos más largos para obtener más oscilaciones como las mostradas en la figura 8.

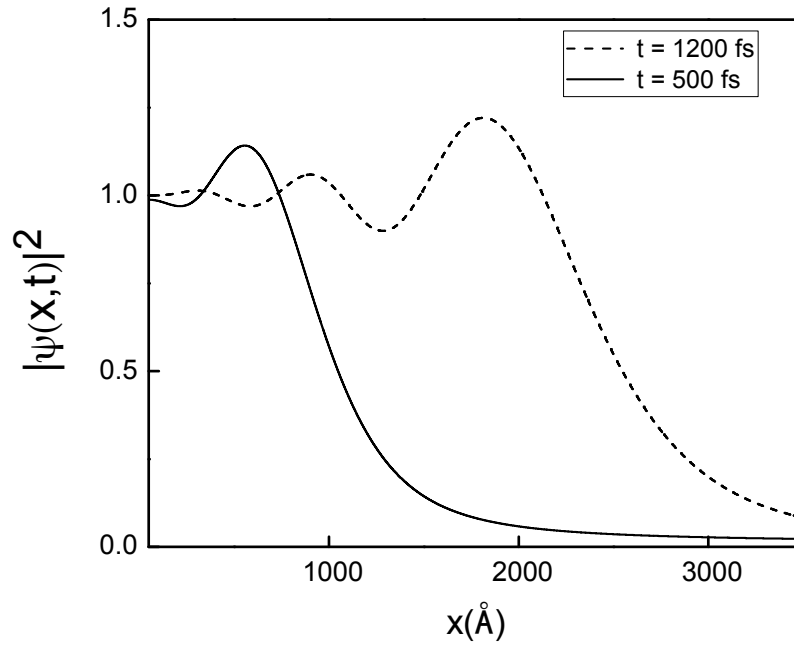


Figura 9: Densidad de probabilidad respecto a la posición, normalizadas al coeficiente de transmisión para  $t = 500$  fs (línea continua),  $t = 1200$  fs (línea a trazos) y energía de incidencia  $E = 0.01$  eV, usando los parámetros para  $V_0$  y  $a$  de la figura 5.

Hemos estudiado la dinámica de la densidad de probabilidad para la barrera de potencial en el régimen de bajas energías en ausencia de campo magnético. En la siguiente sección estudiaremos los efectos de un campo magnético constante en la región interna de una barrera de potencial.

## III.2 Dinámica de ondas cuánticas dispersadas por un potencial en presencia de un campo magnético

### III.2.1 Densidad de Probabilidad

Analizaremos la densidad de probabilidad en presencia de campo magnético, y lo compararemos con lo obtenido en la sección III.1. En todos los cálculos numéricos utilizaremos los parámetros de la masa efectiva definidos en la sección anterior. Al ser la función de onda el espinor descrito por la ecuación (47), la densidad de probabilidad queda expresada como:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} [|\psi^+(x, t)|^2 + |\psi^-(x, t)|^2], \quad (48)$$

en donde las funciones  $\psi^+(x, t)$  y  $\psi^-(x, t)$  son equivalentes a la solución para la barrera de potencial a bajas energías, con una diferencia en el potencial dado por el factor  $\mp \hbar\omega_L/2$ , respectivamente. Al ser  $\omega_L$  directamente proporcional a la magnitud del campo magnético, este se usara como parámetro en todos los cálculos. El módulo cuadrado de las componentes del espinor  $\psi^\pm(x, t)$  tienden a su respectivo coeficiente de transmisión  $|t_{k_0}^\pm|^2$ , por lo que se propone el factor de normalización de la densidad de probabilidad como  $2/(|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2)$ , de modo que  $|\Psi(x, t)|^2 \rightarrow 1$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . En la figura 10 se observa que la densidad de probabilidad exhibe un patrón oscilatorio con un primer máximo definido, característico de la difracción en el tiempo, tendiendo a uno para valores grandes del tiempo.

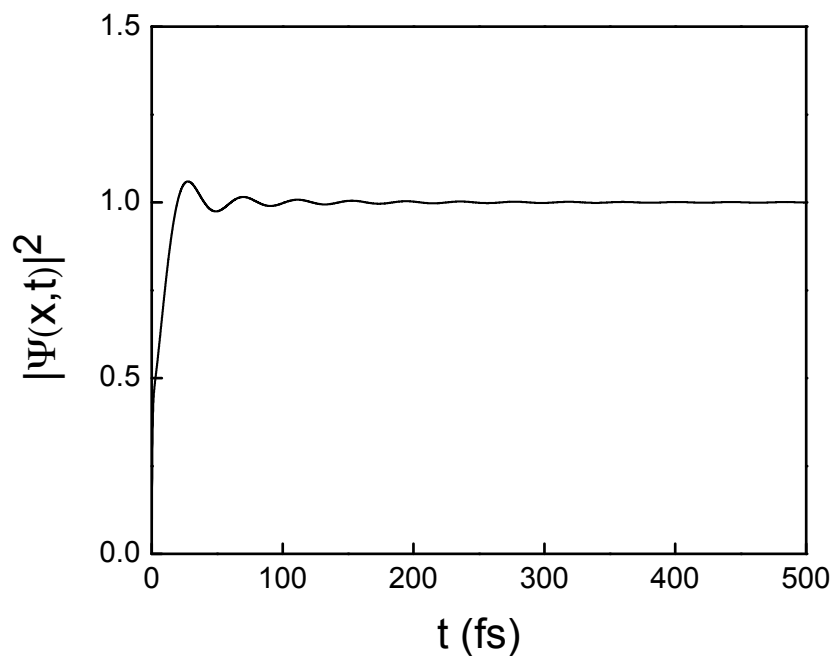


Figura 10: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo, en la región de transmisión a bajas energías, para el caso de una barrera de potencial con campo magnético. Parámetros de la barrera: anchura  $a = 50 \text{ \AA}$ , altura  $V_0 = 8 \text{ eV}$ , posición  $x = 80 \text{ \AA}$ , frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-2} \text{ fs}^{-1}$  y energía de incidencia  $E = 0.1 \text{ eV}$ .

En la figura 11 se muestra una comparación de la densidad de probabilidad mostrada en la figura 10 con el caso de la densidad de probabilidad en ausencia de campo magnético. Se encuentra que ambos casos coinciden en la región de transmisión en todo el régimen temporal.

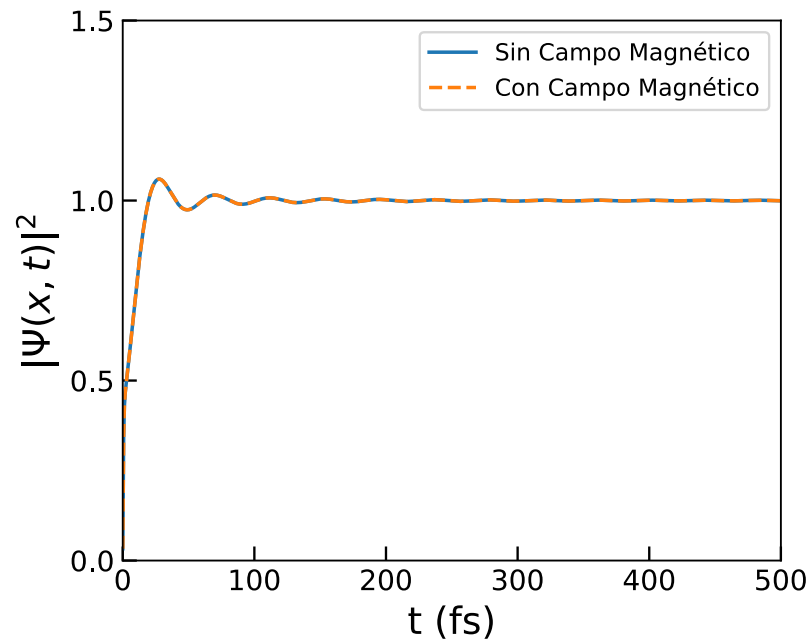


Figura 11: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea continua) y con campo magnético (línea a trazos), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ ,  $a$  y  $\omega_L$  de la figura 10.

En la figura 12 se muestra que incluso al disminuir la intensidad del campo magnético, la densidad de probabilidad con campo se mantiene invariante respecto al caso en ausencia del mismo.

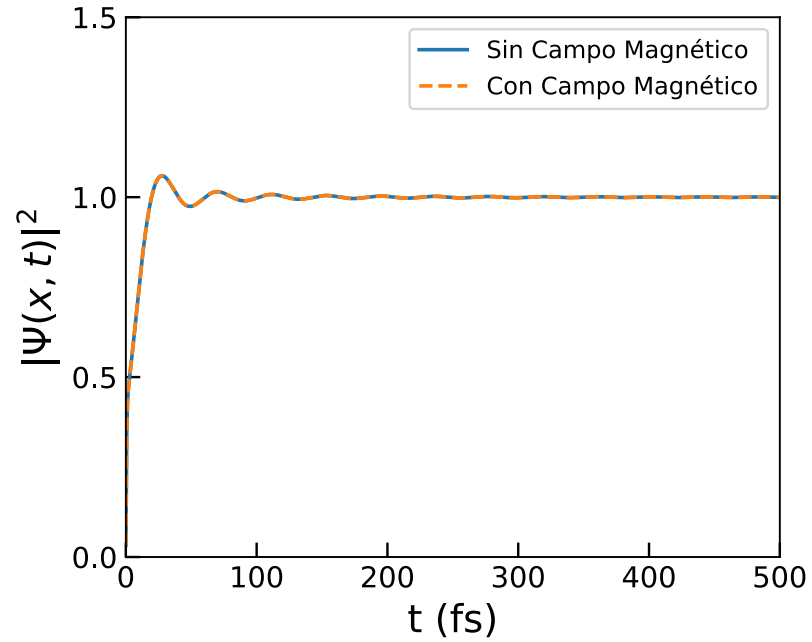


Figura 12: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea continua) y con campo magnético (línea a trazos), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$  y  $a$ , de la figura 10 y frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-6} \text{ fs}^{-1}$ .

En la figura 13 se observa que al comparar la densidad de probabilidad respecto de la posición para el caso con campo magnético y en ausencia del mismo, coinciden.

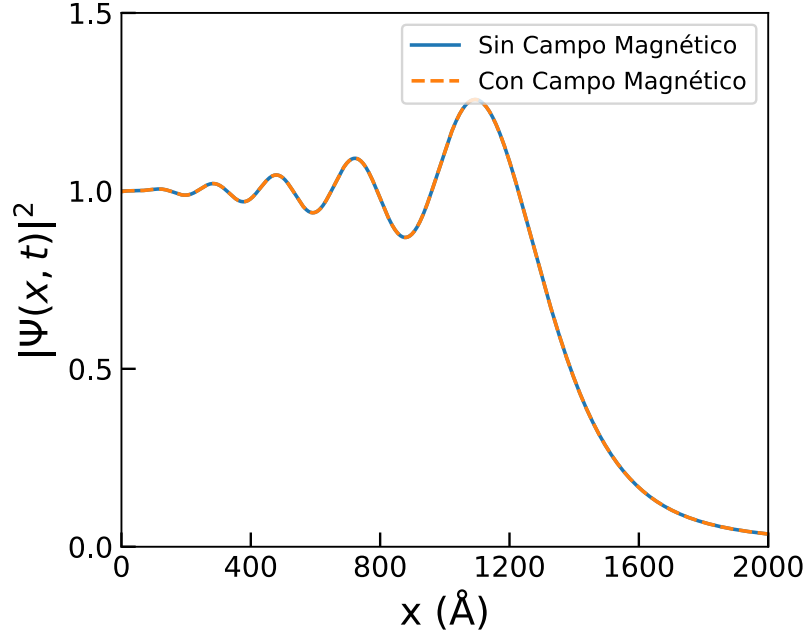


Figura 13: Densidad de probabilidad normalizada respecto de la posición en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea continua) y con campo magnético (línea a trazos) a un tiempo  $t = 200$  fs, con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ , y  $a$ , de la figura 10, y frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-3} \text{ fs}^{-1}$ .

La invarianza mostrada en la densidad de probabilidad respecto del tiempo y posición tiene una justificación teórica. De la ecuación (39) definimos un potencial general  $V^\pm(x) = V(x) \mp \hbar\omega_L/2$ . Para que el término  $\hbar\omega_L/2$  sea relevante para el potencial general  $V(x)$ , estos deben ser aproximadamente del mismo orden. Para el caso en que  $V(x) \gg \hbar\omega_L/2$ , el potencial  $V^\pm(x) = V(x)$ , en particular para un potencial constante como el analizado en esta sección, la frecuencia de Larmor con mayor valor empleada en las figuras anteriores ( $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ ) representa una energía de  $\hbar\omega_L/2 = 0.029 \text{ eV}$ , lo cual es muy pequeño comparado con el potencial empleado de  $V_0 = 8.0 \text{ eV}$ . Por esta razón la densidad de probabilidad para la barrera de potencial con campo magnético a

bajas energías con la normalización  $2/(|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2)$  con la consideración  $V_0 \gg \hbar\omega_L/2$  se expresaría de la siguiente forma:

$$\frac{2}{|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2} |\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2|t_{k_0}|^2} (|\psi(x, t)|^2 + |\psi(x, t)|^2) = \frac{1}{|t_{k_0}|^2} |\psi(x, t)|^2, \quad (49)$$

en donde  $\psi(x, t)$  es la función de onda en la región de transmisión para la barrera de potencial en ausencia de campo magnético a bajas energías, por lo que  $|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x, t)|^2$ . Debido a esto, para campos magnéticos donde el valor de  $\hbar\omega_L/2$  sea despreciable para el potencial  $V(x)$  en todo su dominio, no se esperan cambios en las escalas temporales como en el caso del *delay time*. Incluso al aumentar la intensidad del campo magnético en la densidad de probabilidad analizada en la figura 12, no se aprecia un cambio significativo, como se muestra a continuación en la figura 14.

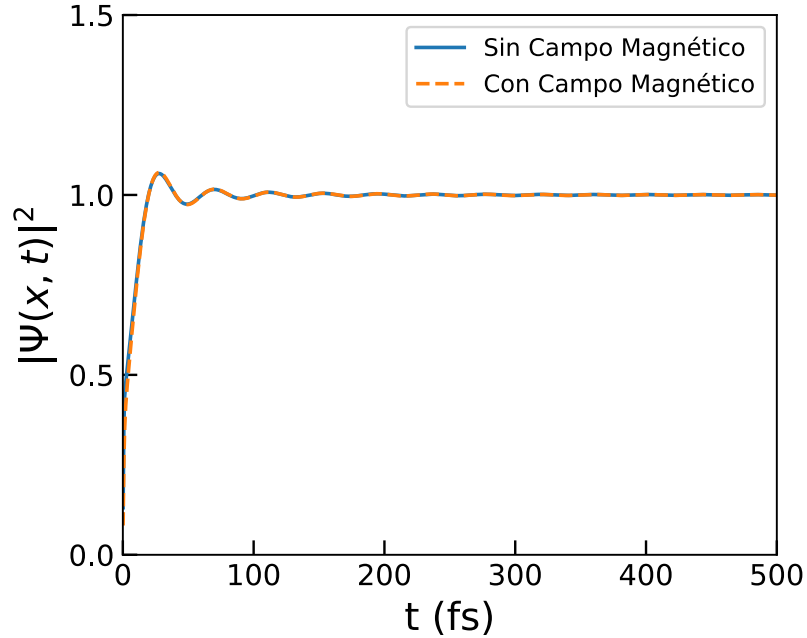


Figura 14: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea continua) y con campo magnético (línea a trazos), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ , y  $a$  de la figura 10 y frecuencia de Larmor  $\omega_L = 10 \text{ fs}^{-1}$ .

En la figura 15 se observa que al disminuir la altura de la barrera e implementar una frecuencia de Larmor donde el término  $\hbar\omega_L/2$  no sea despreciable, el patrón de difracción en la densidad de probabilidad respecto del tiempo en presencia y ausencia de campo magnético se conserva, pero no es evidente alguna diferencia en la densidad de probabilidad. Si nos aproximamos al máximo principal de ambas funciones, estas presentan una pequeña variación, como se muestra en la figura 16. Calculando el tiempo donde ambas densidades tienen su valor máximo, obtenemos los tiempos  $t_c = 5792.82$  fs para presencia de campo y  $t_s = 5777.82$  fs para ausencia del mismo. Al tener un desplazamiento del máximo principal es posible plantear estudios de *retraso temporal*.

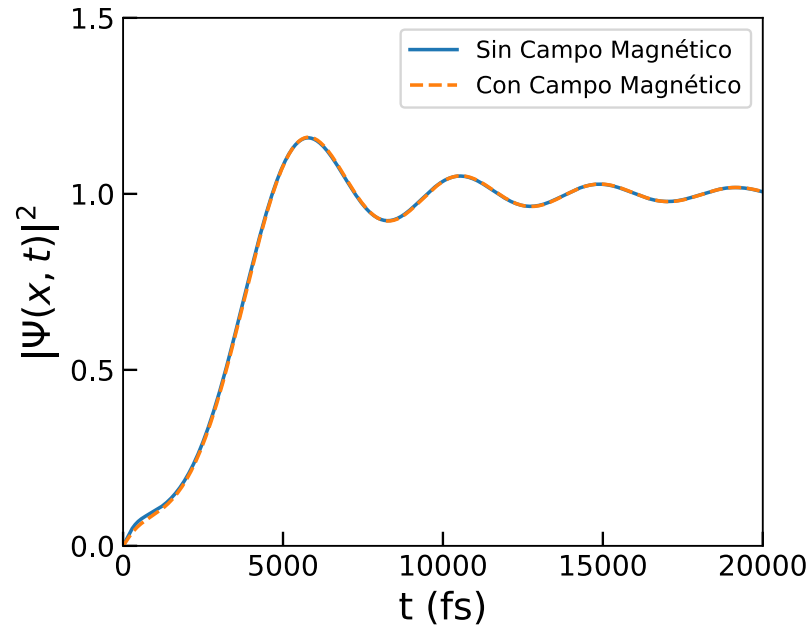


Figura 15: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial con campo magnético (línea a trazos) y sin campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E = 0.001$  eV,  $V_0 = 0.1$  eV,  $x = 2000$  Å,  $a = 50$  Å y  $\omega_L = 0.1$  fs<sup>-1</sup>.

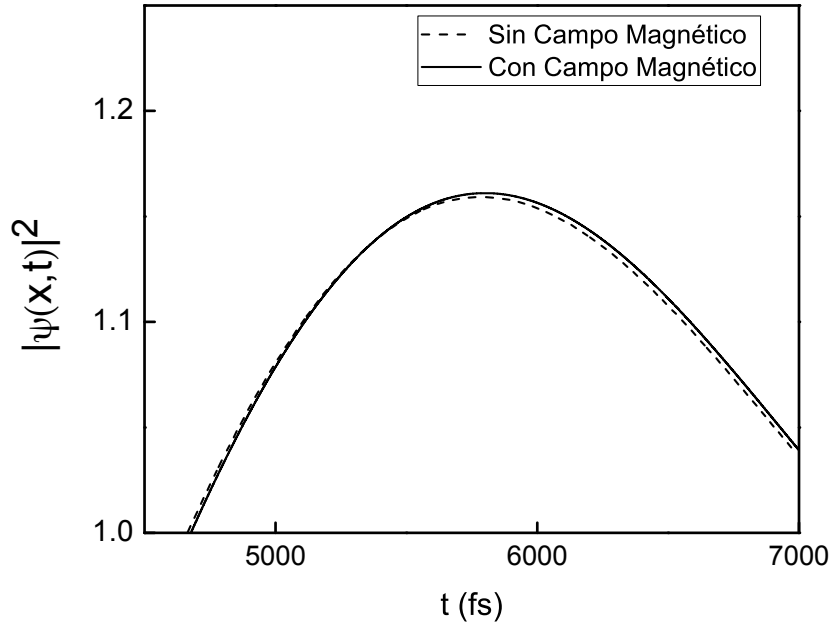


Figura 16: Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea a trazos) y con campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E = 0.001$  eV,  $V_0 = 0.1$  eV,  $x = 2000$  Å ,  $a = 50$  Å y  $\omega_L = 0.1$  fs $^{-1}$ .

En la figura 17 observamos que al aumentar el valor de la frecuencia de Larmor *i.e.* el valor de la energía asociada al campo magnético, la densidad de probabilidad en presencia y ausencia de campo magnético no muestra una diferencia considerable. Nuevamente al aproximarnos al máximo principal y calcular su correspondiente tiempo, obtenemos un valor de  $t_c = 5809.83$  fs, el cual representa un desplazamiento hacia la derecha del máximo principal de la densidad de probabilidad en presencia de campo magnético respecto al máximo principal en ausencia del mismo, como se muestra en la figura 18.

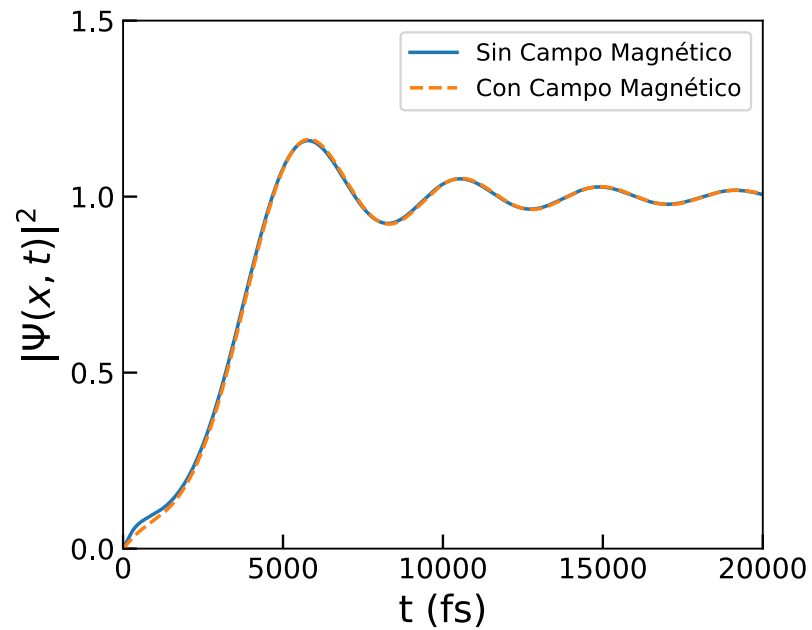


Figura 17: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial con campo magnético (línea a trazos) y sin campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ , y  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.14 \text{ fs}^{-1}$ .

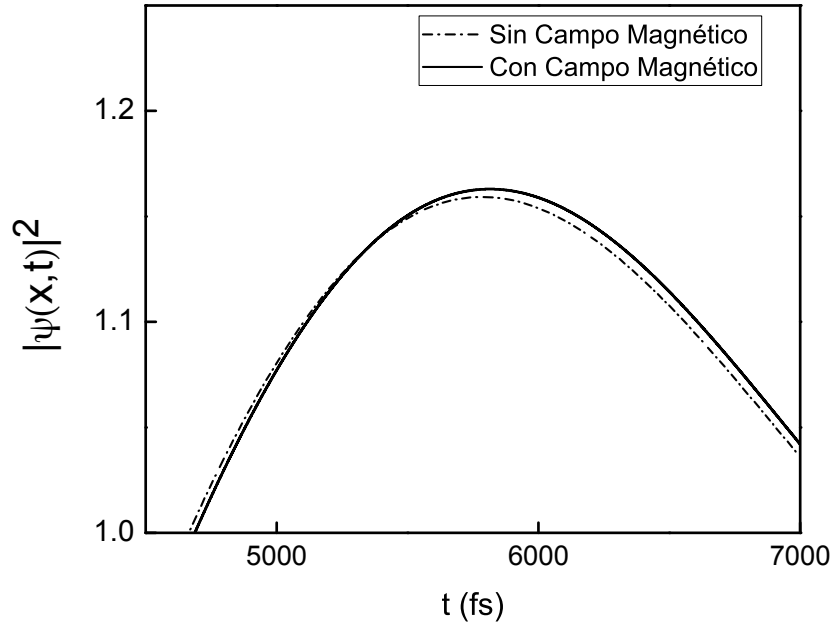


Figura 18: Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea a trazo y punto) y con campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ , y  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.14 \text{ fs}^{-1}$ .

Si continuamos aumentando la frecuencia de Larmor, la densidad de probabilidad en presencia de campo magnético continua presentando un desplazamiento del máximo principal hacia la derecha en el tiempo, mientras que la densidad de probabilidad en presencia y ausencia de campo no exhiben una variación considerable, una respecto a la otra, como se muestra en las figuras 19, 20, 21, 22.

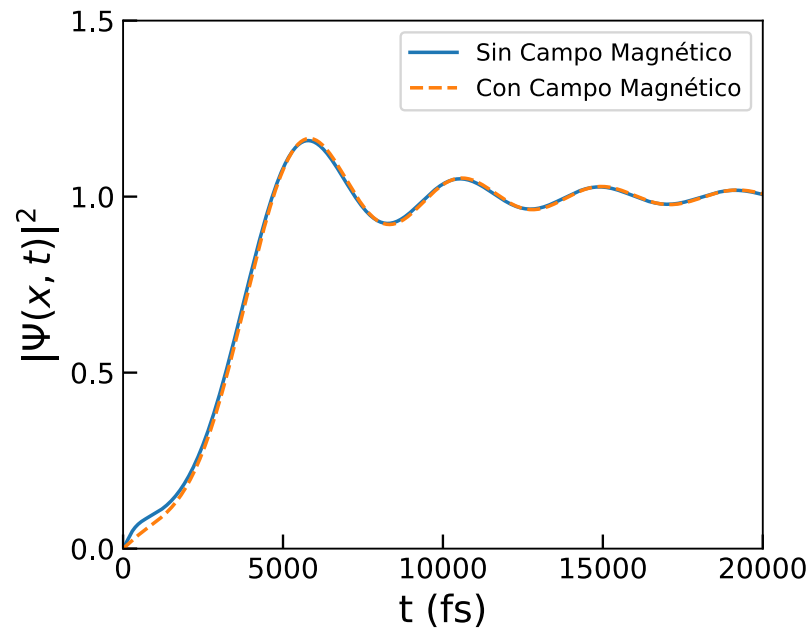


Figura 19: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial con campo magnético (línea a trazos) y sin campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ ,  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.17 \text{ fs}^{-1}$ .

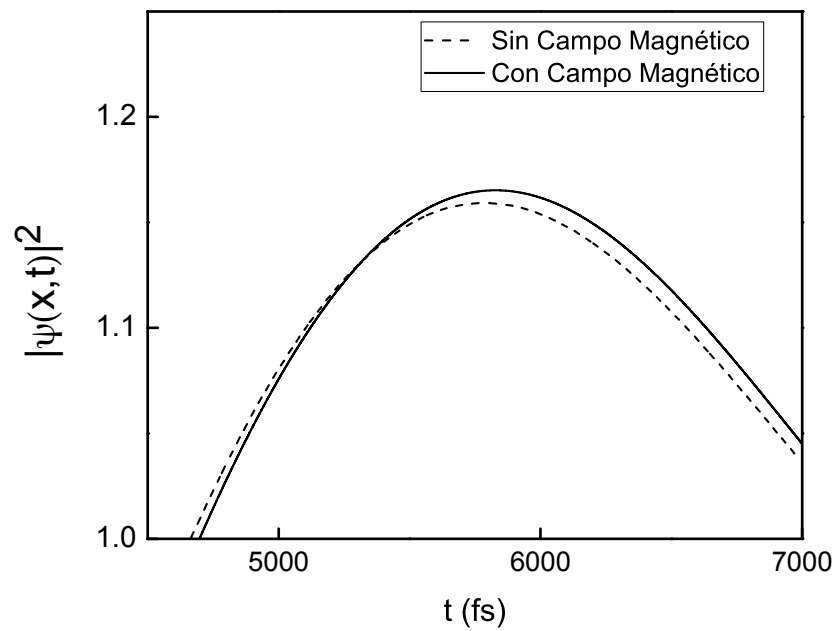


Figura 20: Máximo principal de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea a trazos) y con campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ ,  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.17 \text{ fs}^{-1}$ .

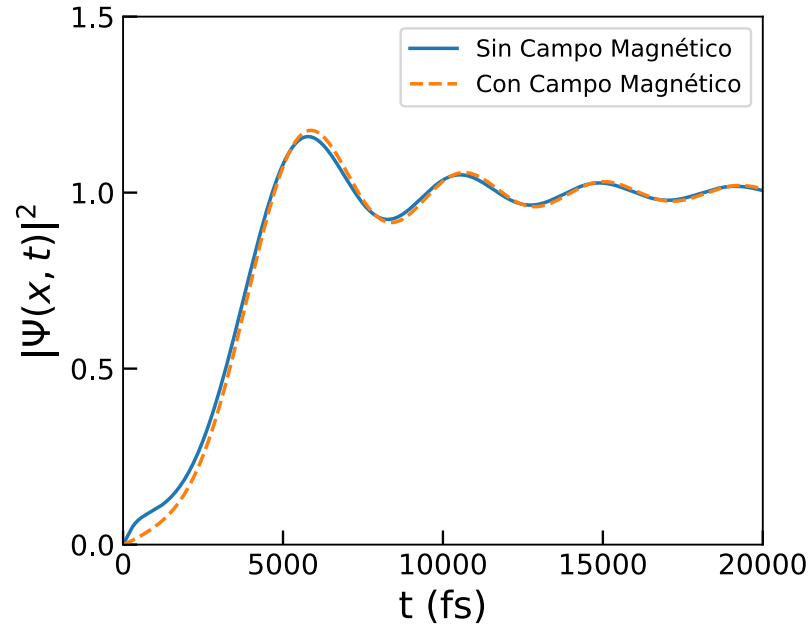


Figura 21: Densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial con campo magnético (línea a trazos) y sin campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ ,  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.23 \text{ fs}^{-1}$ .

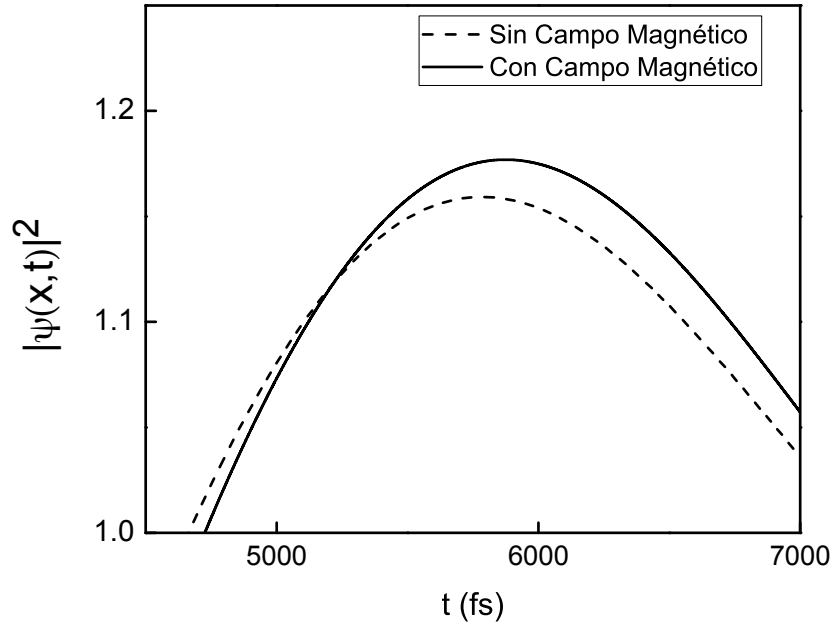


Figura 22: Máximo de la densidad de probabilidad normalizada respecto del tiempo en la región de transmisión a bajas energías para el caso de una barrera de potencial sin campo magnético (línea a trazos) y con campo magnético (línea continua), con los parámetros para  $E$ ,  $V_0$ ,  $x$ ,  $a$  de la figura 15 y  $\omega_L = 0.23 \text{ fs}^{-1}$ .

A continuación se exploraran las escalas de tiempo relacionadas con el retraso temporal, medido a partir de los máximos principales de las densidades de probabilidad. Para esto, sea  $t_l, t_s, t_c$  el tiempo donde la densidad de probabilidad presenta su primer máximo para el caso libre (ausencia de barrera), barrera en ausencia de campo y barrera en presencia de campo magnético respectivamente. Definamos el retraso temporal relativo  $\Delta t_{ij}$  mediante la diferencia  $\Delta t_{ij} = t_i - t_j$ , donde  $i, j = \{c, s, l\}$  para este caso. En particular  $\Delta t = \Delta t_{cl}$ . En la figura 23 se observa que las cantidades  $\Delta t_{cs}$  y  $\Delta t_{cl}$  crecen monótonamente como función de  $\omega_L$ , obteniendo así un mayor *retraso temporal* en la densidad de probabilidad en presencia de campo magnético respecto a la densidad en

ausencia del mismo y para el caso libre, respectivamente. Cabe destacar que no es posible incrementar  $\omega_L$  de forma arbitraria ya que se debe cumplir  $E \ll V_{\pm}$ .

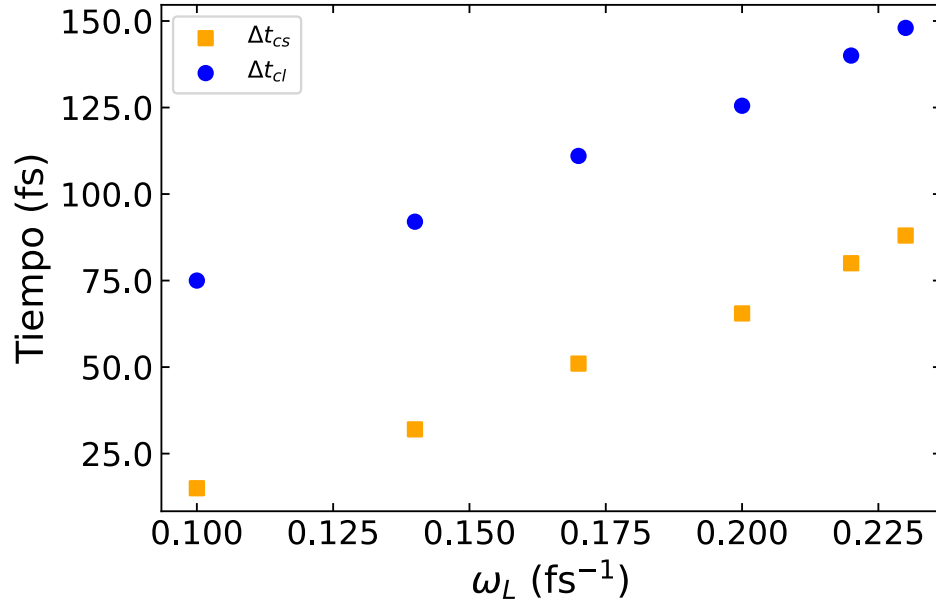


Figura 23: Tiempo de retraso dinámico  $\Delta t_{cs} = t_c - t_s$  (cuadro sólido naranja) y  $\Delta t_{cl} = t_c - t_l$  (círculo sólido azul) como función de la frecuencia de Larmor  $\omega_L$ . Los parámetros utilizados son los de la figura 15:  $E = 0.001$  eV,  $V_0 = 0.1$  eV,  $x = 2000$  y  $\text{Å}$ , y  $a = 50$   $\text{Å}$ .

### III.2.2 Valores Esperados de Espín

En la presente sección se obtendrá la evolución temporal de los valores esperados de las componentes de espín para la región de transmisión de una barrera de potencial con campo magnético constante. Para el caso estacionario, estos valores esperados están relacionados con tiempos característicos, que a su vez, son asociados a distintas escalas de tiempo (Büttiker, 1983). Es de interés estudiar los valores esperados de espín desde un enfoque dinámico con el propósito de definir nuevas escalas temporales. Estudiaremos el caso de barreras opacas a bajas energías. En todos los cálculos numéricos,

utilizaremos longitud de barrera  $a = 500 \text{ \AA}$ , altura de barrera  $V_0 = 1 \text{ eV}$ , energía de incidencia  $E = 0.001 \text{ eV}$  y posición  $x = 5000 \text{ \AA}$ .

Los valores esperados de espín se obtienen mediante la relación  $\langle S_i \rangle = (\hbar/2) \langle \Psi | \sigma_i | \Psi \rangle$  donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli para  $i = x, y, z$ . Usando el factor de normalización  $\sqrt{2/(|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2)}$  en las componentes del espinor de la ecuación (47). Obtenemos lo siguiente para los valores esperados de las componentes de espín en la región de transmisión:

$$\langle S_x \rangle = \left( \frac{\hbar}{2} \right) \frac{\psi^+ \psi^{-*} + \psi^- \psi^{+*}}{|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2}, \quad (50)$$

$$\langle S_y \rangle = \left( \frac{i\hbar}{2} \right) \frac{\psi^+ \psi^{-*} - \psi^- \psi^{+*}}{|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2}, \quad (51)$$

$$\langle S_z \rangle = \left( \frac{\hbar}{2} \right) \frac{|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2}{|t_{k_0}^+|^2 + |t_{k_0}^-|^2}. \quad (52)$$

Como  $\psi^\pm \rightarrow |t_{k_0}^\pm|^2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para tiempos largos se cumple que:

$$\langle S \rangle^2 = \langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (53)$$

La figura 24 muestra que  $\langle S_x \rangle$  respecto del tiempo presenta un patrón de difracción en el tiempo. Este comportamiento no ha sido reportado en la literatura y es consecuencia de la expresión del valor esperado como combinación lineal de las funciones  $\psi^+$ ,  $\psi^-$ , las cuales presentan el mismo comportamiento. Es de interés encontrar un parámetro el cual sea posible compararlo con el primer máximo observado en el patrón de difracción del valor esperado, con el objetivo de definir una nueva escala temporal, como en el *retraso temporal*.

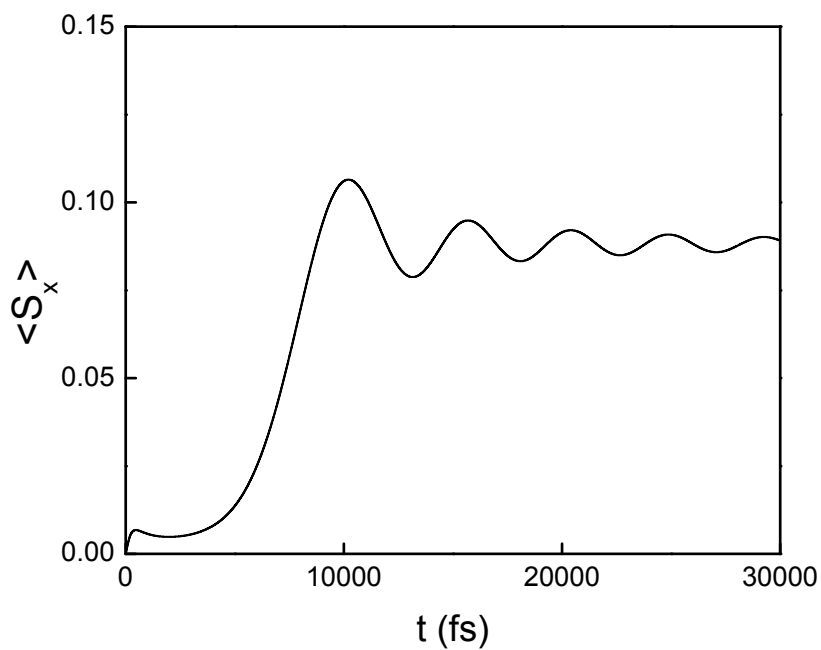


Figura 24: Valor esperado para  $S_x$  respecto del tiempo, con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ .

En la figura 25 observamos que  $\langle S_y \rangle$  respecto del tiempo presenta un patrón oscilatorio. Con valores despreciables e incluso negativos, esto debido a que las componentes de espín tienden a alinearse en la misma dirección del campo magnético inducido. Por lo que se esperan valores mayores para  $\langle S_z \rangle$  que los mostrados para  $\langle S_x \rangle$  y  $\langle S_y \rangle$  de las figuras 24 y 25 respectivamente, como se muestra en la figura 26.

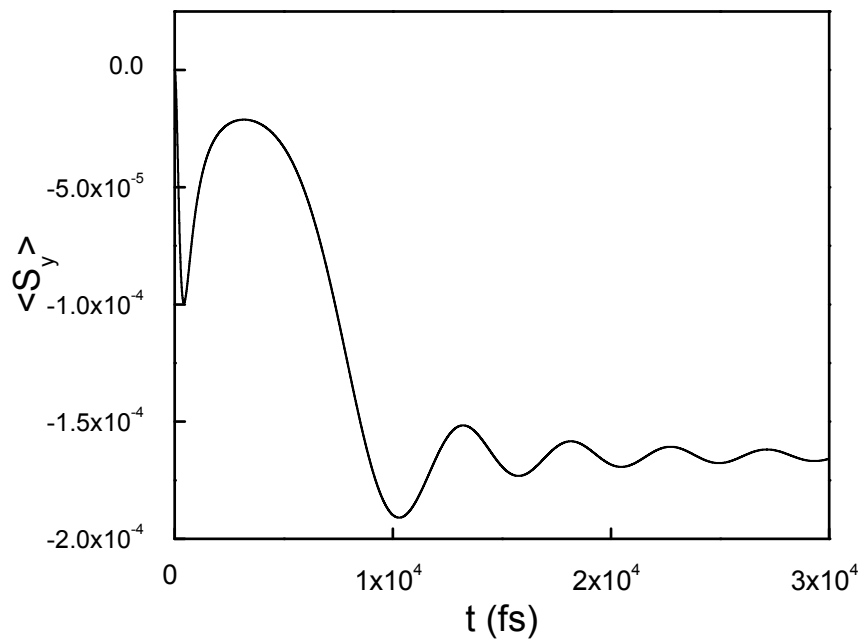


Figura 25: Valor esperado para  $S_y$  respecto del tiempo, con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ .

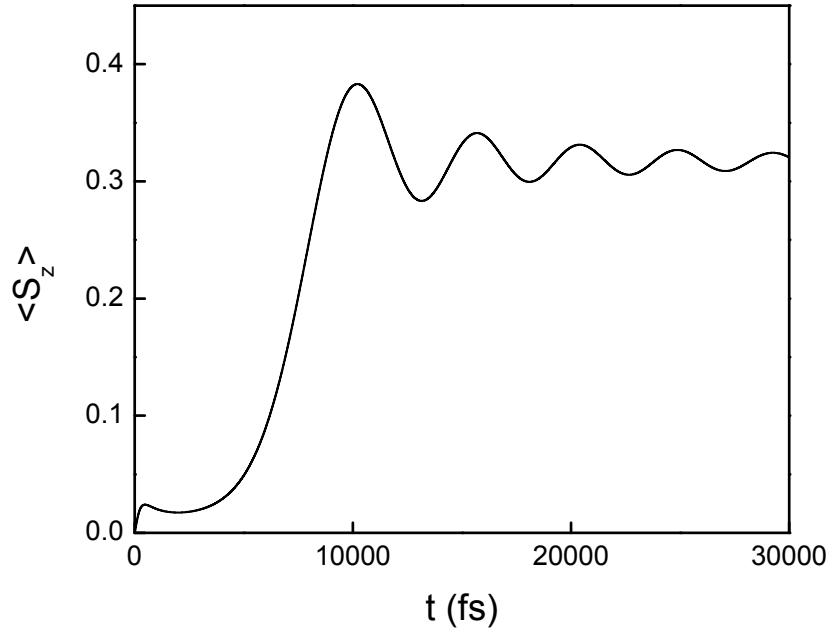


Figura 26: Valor esperado para  $S_z$  respecto del tiempo con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ .

En la figura 27 se observa que la suma del cuadrado de los valores esperados de las componentes de espín, multiplicada por el factor  $\hbar^2/4$  respecto del tiempo, presenta un comportamiento ondulatorio típico de un patrón de difracción en el tiempo. Observamos en la figura 27, que el valor esperado total  $\langle S \rangle^2 = \langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2$  tiende a la unidad en el régimen de tiempos largos, cumpliendo con la propiedad descrita por la ecuación (53). Al ser constante para tiempos largos, podría ser una propuesta de parámetro de comparación para la definición de alguna escala temporal, como sucede con el caso de la función de onda para una partícula libre en el retraso temporal.

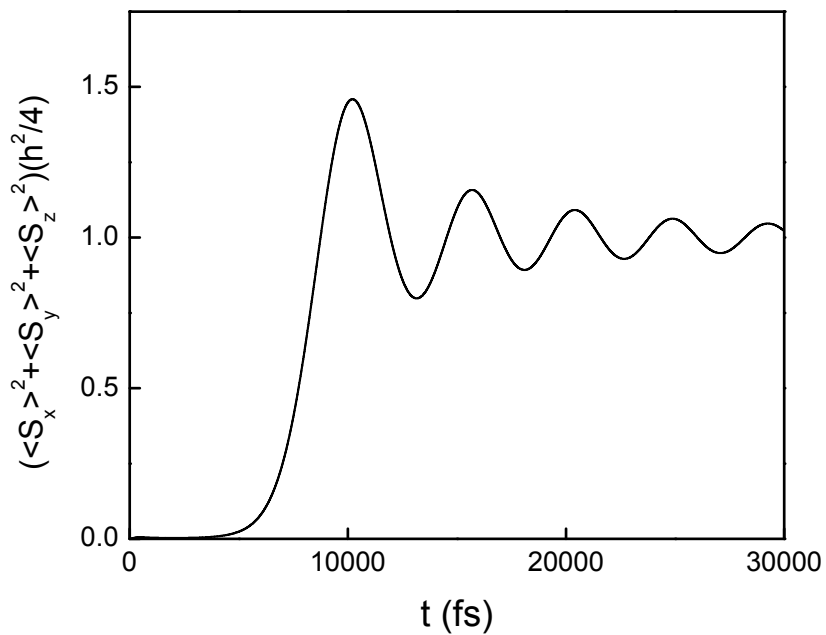


Figura 27: Valor esperado de espín total  $\langle S \rangle^2$  multiplicado por el factor  $\hbar^2/4$  respecto del tiempo. Hemos utilizado una frecuencia de Larmor de  $\omega_L = 0.09 \text{ fs}^{-1}$ .

En la figura 28, al usar campos magnéticos de menor intensidad, se observa una disminución en el valor esperado para  $S_x$ , conservando el mismo comportamiento de difracción en el tiempo.

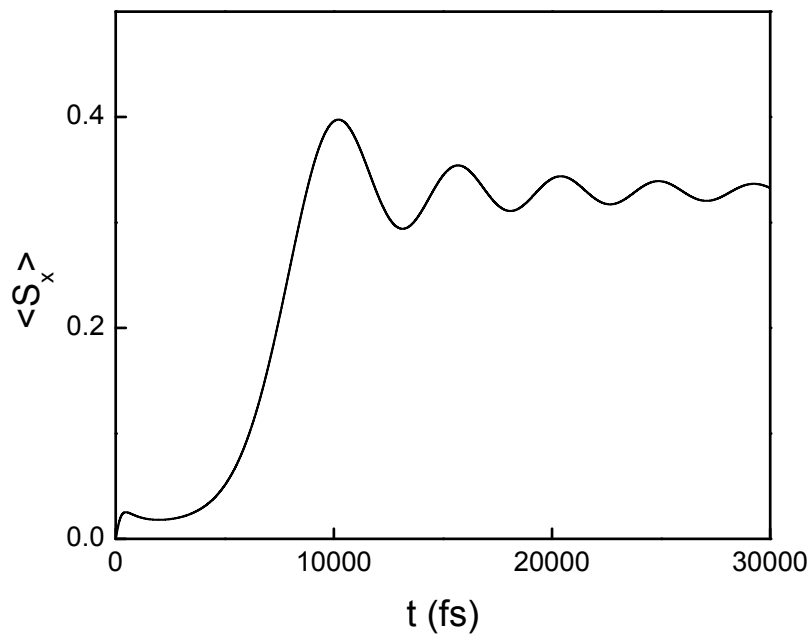


Figura 28: Valor esperado de  $S_x$  respecto del tiempo con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ .

Para campos magnéticos pequeños, la figura 29 muestra una drástica disminución de los valores de  $\langle S_y \rangle$ , conservando el comportamiento ondulatorio.

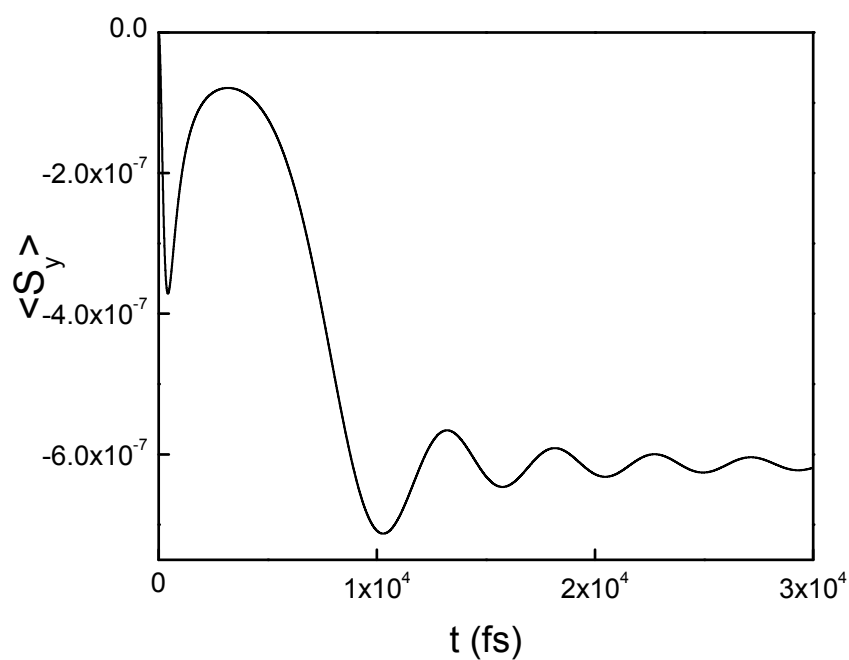


Figura 29: Valor esperado de  $S_y$  respecto del tiempo con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ .

La figura 30 muestra los valores de  $\langle S_z \rangle$  a largo del tiempo, para campos magnéticos pequeños. Cabe destacar que al usar campos de esta intensidad, se observa que los valores de  $\langle S_x \rangle$  son los más grandes en comparación a  $\langle S_y \rangle$  y  $\langle S_z \rangle$ . Esto debido a que el vector de espín, asociado a los valores esperados, no logra precesar lo suficiente para alinearse en la dirección del campo una vez atravesada la barrera.

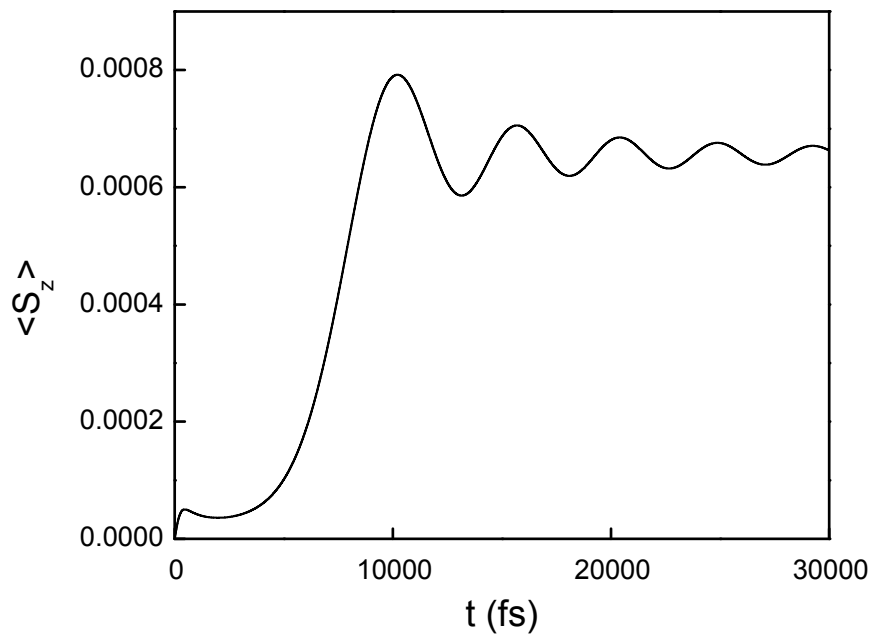


Figura 30: Valor esperado de  $S_z$  respecto del tiempo con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-5} \text{ fs}^{-1}$ .

Si graficamos los valores esperados de espín respecto a la posición, se espera un comportamiento similar a la densidad de probabilidad respecto a la posición analizada en la sección III.2.1. Debido a la dependencia de los valores esperados de espín de las funciones  $\psi^\pm$ , como se muestra a continuación en las figuras 31, 32 y 33.

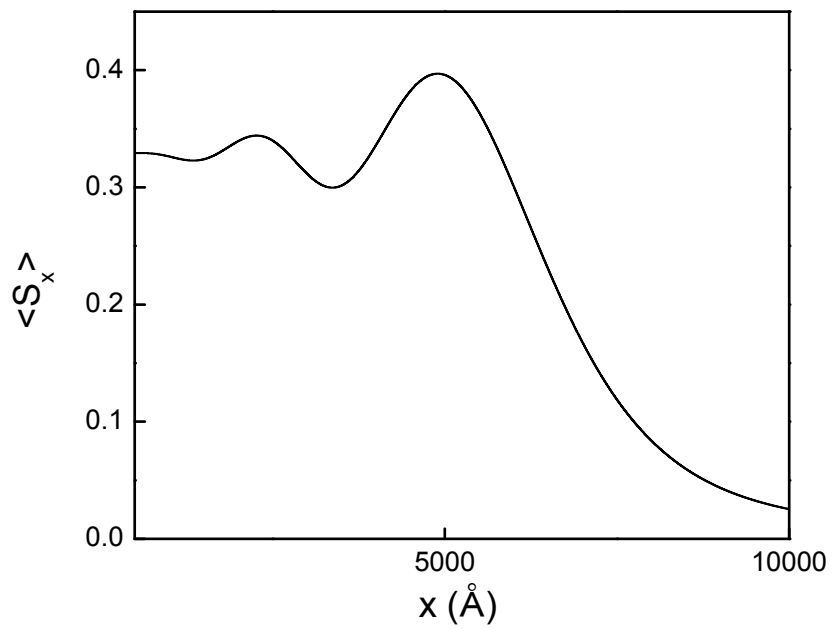


Figura 31: Valor esperado para  $S_x$  respecto de la posición con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$  en  $t = 10000 \text{ fs}$ .

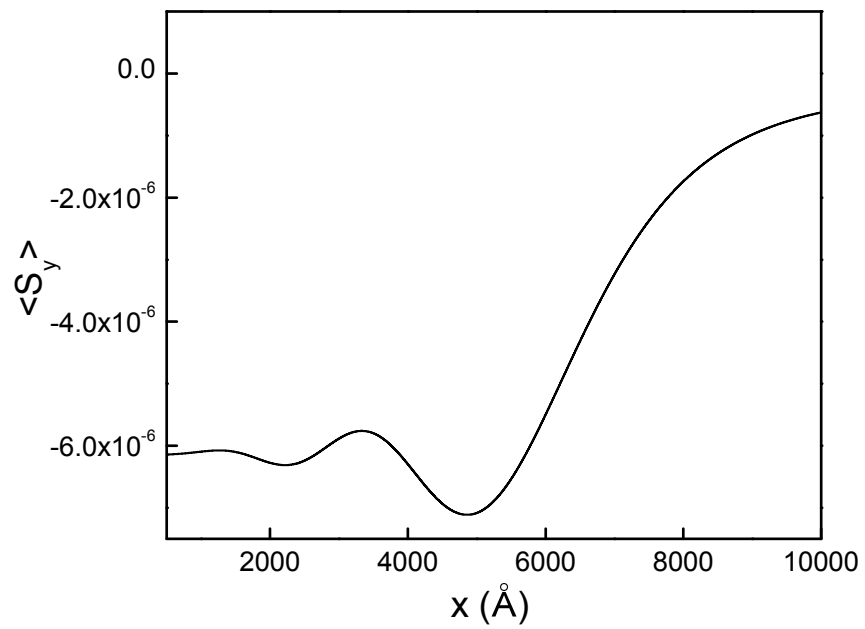


Figura 32: Valor esperado para  $S_y$  respecto de la posición con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$  en  $t = 10000 \text{ fs}$ .

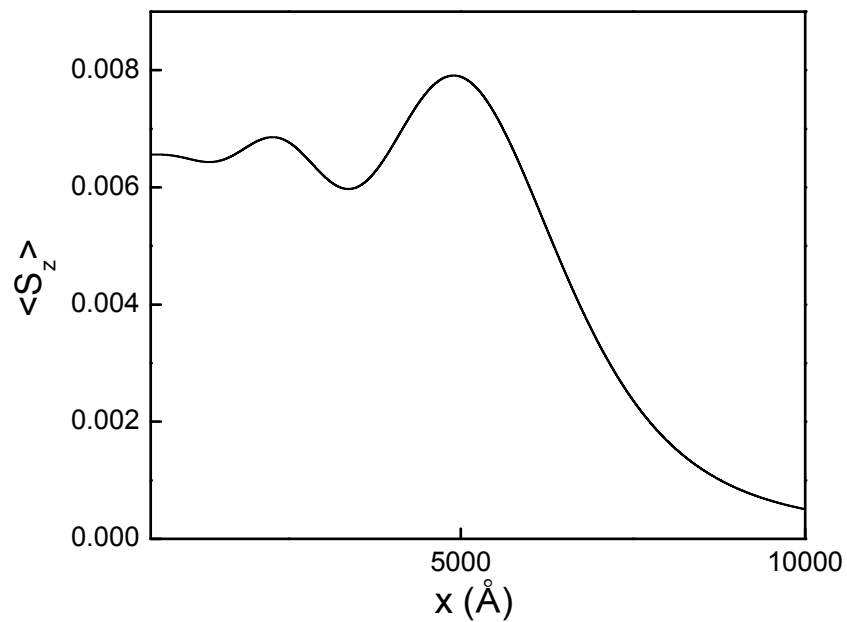


Figura 33: Valor esperado para  $S_z$  respecto de la posición con frecuencia de Larmor  $\omega_L = 9 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-1}$  en  $t = 10000 \text{ fs}$ .

El comportamiento ondulatorio de los valores esperados de espín presenta la posibilidad de futuras investigaciones que relacionen los máximos principales de la función con escalas del tiempo, como lo son el retraso temporal y tiempos de Rybachenko.

## Capítulo IV

# CONCLUSIONES

En el presente trabajo se obtiene una solución integral de la ecuación Schrödinger-Pauli para describir la evolución temporal de un espinor de onda plana cortada que interacciona con un potencial de alcance finito en presencia de un campo magnético constante. Para ello, se utiliza un enfoque basado en un desarrollo en estados del continuo y el método de propagadores. De dicha solución integral, se deriva una fórmula analítica para describir los fenómenos transitorios. Esta fórmula nos permite explorar la dinámica de la densidad de probabilidad como función de la posición y del tiempo en la región de transmisión de una barrera de potencial, en el régimen de bajas energías de incidencia. Se muestra de forma analítica que los efectos del campo magnético en la densidad de probabilidad son nulos para barreras muy intensas. Dicha intensidad es respecto al incremento o disminución de la altura de la barrera, debido a la interacción con el campo magnético. En barreras donde dichos efectos no son nulos, se observa que a medida que se incrementa la frecuencia de Larmor, se produce un desfaseamiento del máximo de la densidad de probabilidad del espinor, en comparación con el máximo de la densidad de probabilidad en ausencia de campo magnético. Este fenómeno proporciona una oportunidad interesante para llevar a cabo mediciones de *retraso temporal*. Las mediciones realizadas de dicha escala temporal muestran que el tiempo de retraso crece conforme se incrementa la frecuencia de Larmor. A su vez, con base en las soluciones dinámicas obtenidas, hemos estudiado el comportamiento transitorio de los distintos valores esperados de espín del sistema. Un resultado relevante es el hecho de que estas cantidades físicas, exhiben un comportamiento típico de un patrón de difracción en el

tiempo, similares a las que exhiben las componentes espinorales de la función de onda. Se ha demostrado analíticamente, a partir de las soluciones dinámicas con ayuda de los desarrollos asintóticos de la solución, que dichos valores esperados del espín tienden a los valores conocidos en el régimen estacionario del sistema. Lo anterior nos permite describir las escalas de tiempo de Larmor en el régimen de campos magnéticos pequeños.

Una secuela interesante del presente trabajo, es asociar escalas de tiempo a los máximos de los valores esperados de espín, y ver de que manera estas pudiesen relacionarse con las escalas de tiempo estacionarias medidas en estos sistemas, como son los tiempos de Rybachenko. El análisis de lo anterior requiere de más estudios y se plantea como trabajo futuro.

## Bibliografía

- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Amador-Bartolini, D., Villavicencio, J., Romo, R., y Hernández-Maldonado, A. (2020). Buildup and decay dynamics of exponentially modulated quantum waves in resonant structures. *Physica Scripta*, **96**(1): 015403.
- Andreatta, M. A. y Dodonov, V. V. (2004). Tunnelling of narrow gaussian packets through delta potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37**(6): 2423–2438.
- Arndt, M., Szriftgiser, P., Dalibard, J., y Steane, A. M. (1996). Atom optics in the time domain. *Phys. Rev. A*, **53**: 3369–3378.
- Brouard, S. y Muga, J. G. (1996). Transient and asymptotic effects in tunneling. *Phys. Rev. A*, **54**: 3055–3066.
- Büttiker, M. (1983). Larmor precession and the traversal time for tunneling. *Phys. Rev. B*, **27**: 6178–6188.
- Colombe, Y., Mercier, B., Perrin, H., y Lorent, V. (2005). Diffraction of a bose-einstein condensate in the time domain. *Phys. Rev. A*, **72**: 061601.
- Cordero, S. y García-Calderón, G. (2010). Transient effects and reconstruction of the energy spectra in the time evolution of transmitted gaussian wave packets. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**(18): 185301.
- Décamps, B., Gillot, J., Vigué, J., Gauguier, A., y Büchner, M. (2016). Observation of atom-wave beats using a kerr modulator for atom waves. *Phys. Rev. Lett.*, **116**: 053004.
- Del Campo, A., Muga, J. G., y Moshinsky, M. (2007). Time modulation of atom sources. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **40**(5): 975–987.
- Del Campo, A., García-Calderón, G., y Muga, J. (2009). Quantum transients. *Physics Reports*, **476**(1): 1 – 50.
- Elberfeld, W. y Kleber, M. (1988). Time-dependent tunneling through thin barriers: A simple analytical solution. *American Journal of Physics*, **56**(2): 154–159.
- García-Calderón, G. (2010). Chapter 7 - theory of resonant states: An exact analytical approach for open quantum systems. En C. A. Nicolaides y E. Brändas, editores, *Unstable States in the Continuous Spectra, Part I: Analysis, Concepts, Methods, and Results*, Vol. 60 de *Advances in Quantum Chemistry*, páginas 407 – 455. Academic Press.

- García-Calderón, G. y Rubio, A. (1997). Transient effects and delay time in the dynamics of resonant tunneling. *Phys. Rev. A*, **55**: 3361–3370.
- García-Calderón, G. y Villavicencio, J. (2001). Time dependence of the probability density in the transient regime for tunneling. *Phys. Rev. A*, **64**(1): 012107.
- García-Calderón, G., Villavicencio, J., y Yamada, N. (2003). Equivalence between the real-time feynman histories and the quantum-shutter approaches for the “passage time” in tunneling. *Phys. Rev. A*, **67**: 052106.
- Granot, E. y Marchewka, A. (2007). Universal potential–barrier penetration by initially confined wave packets. *Phys. Rev. A*, **76**: 012708.
- Griffiths, D. J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall. ISBN 0-13-124405-1.
- Hagley, E. W., Deng, L., Kozuma, M., Wen, J., Helmerson, K., Rolston, S. L., y Phillips, W. D. (1999). A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, **283**(5408): 1706–1709.
- Hernández, A. (2010). Delay time in a single barrier for a movable quantum shutter. *Phys. Rev. A*, **81**: 054101.
- Hernández, A. y García-Calderón, G. (2003). Quantum shutter transient solutions and the delay time for the  $\delta$  potential. *Phys. Rev. A*, **68**: 014104.
- Hernández-Maldonado, A., Villavicencio, J., y Hernández-Aviña, A. (2021). Delay time and persistent oscillations for a shifted quantum shutter. *Physica Scripta*, **96**(5): 055213.
- Hils, T., Felber, J., Gähler, R., Gläser, W., Golub, R., Habicht, K., y Wille, P. (1998). Matter-wave optics in the time domain: Results of a cold-neutron experiment. *Phys. Rev. A*, **58**: 4784–4790.
- Julve, J. y de Urriés, F. J. (2008). Tunnelling of plane waves through a square barrier. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**(30): 304010.
- Kleber, M. (1994a). Exact solutions for time-dependent phenomena in quantum mechanics. *Phys. Rep.*, **236**: 331–393.
- Kleber, M. (1994b). Exact solutions for time-dependent phenomena in quantum mechanics. *Physics Reports*, **236**(6): 331 – 393.
- Mendoza-Luna, L. G. y García-Calderón, G. (2010). Bound-state-induced persistent oscillations in the transient behavior of the probability density for the attractive  $\delta$  potential. *Phys. Rev. A*, **81**: 064102.
- Messiah, A. (1999). *Quantum Mechanics*. Número v. 2 en Dover books on physics. Dover Publications. ISBN 978-0-486-40924-5.

- Moshinsky, M. (1952). Diffraction in time. *Phys. Rev.*, **88**: 625–631.
- Moshinsky, M. (1976). Diffraction in time and the time–energy uncertainty relation. *American Journal of Physics*, **44**(11): 1037–1042.
- Ramos, R., Spierings, D., Racicot, I., y Steinberg, A. M. (2020). Measurement of the time spent by a tunnelling atom within the barrier region. *Nature*, **583**(7817): 529–532.
- Razavy, M. (2013). *Quantum Theory Of Tunneling (2nd Edition)*. World Scientific Publishing Company. ISBN 9789814525039.
- Romo, R. y Villavicencio, J. (1999). Dynamical description of the buildup process in resonant tunneling: Evidence of exponential and nonexponential contributions. *Phys. Rev. B*, **60**: R2142–R2145.
- Rybachenko, V. F. (1967). Time of penetration of a particle through a potential barrier. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **5**: 635–639.
- Spierings, D. C. y Steinberg, A. M. (2021). Observation of the decrease of larmor tunneling times with lower incident energy. *Phys. Rev. Lett.*, **127**: 133001.
- Steane, A., Szriftgiser, P., Desbiolles, P., y Dalibard, J. (1995). Phase modulation of atomic de broglie waves. *Phys. Rev. Lett.*, **74**: 4972–4975.
- Szriftgiser, P., Guéry-Odelin, D., Arndt, M., y Dalibard, J. (1996). Atomic wave diffraction and interference using temporal slits. *Phys. Rev. Lett.*, **77**: 4–7.
- Trippenbach, M., Band, Y. B., Edwards, M., Doery, M., Julienne, P. S., Hagley, E. W., Deng, L., Kozuma, M., Helmerson, K., Rolston, S. L., y Phillips, W. D. (2000). Coherence properties of an atom laser. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **33**(1): 47.
- van Dijk, W. y Nogami, Y. (2002). Analytical approach to the wave function of a decaying quantum system. *Phys. Rev. C*, **65**: 024608.
- Villavicencio, J. y Hernández-Maldonado, A. (2020). Transient quantum beats, rabi oscillations, and delay time of modulated matter waves. *Phys. Rev. A*, **101**: 042109.
- Villavicencio, J., Romo, R., y Cruz, E. (2007). Tunneling and delay time of cutoff gaussian wave packets. *Phys. Rev. A*, **75**: 012111.
- Yamada, N., García-Calderón, G., y Villavicencio, J. (2005). Quantum-shutter approach to tunneling time scales with wave packets. *Phys. Rev. A*, **72**: 012106.

## Apéndice A

### Amplitud de transmisión para una barrera de potencial

A continuación presentamos el coeficiente de transmisión para el caso de partículas con energía  $E$  dispersadas por una barrera de potencial finita de intensidad  $V_0$  y anchura  $a$ , que puede encontrarse en cualquier libro de texto (Griffiths, 1995),

$$T(k) = \frac{e^{-ik_1a}}{\cos(k_2a) - i\left(\frac{k_2^2 + k_1^2}{2k_1k_2}\right)\sin(k_2a)}, \quad (54)$$

en donde hemos definido  $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  y  $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}$ . La transmisión en el régimen de bajas energías se obtiene haciendo  $E \ll V_0$  en la ecuación (55), por lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$T_\alpha(k) = \frac{e^{-ik_1a}}{\cos\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}a\right) - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{V_0}{E}}\sin\left(\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}a\right)}. \quad (55)$$

Definiendo  $\alpha = k_{V_0} a$ , con  $k_{V_0} = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ ,  $\gamma = (k_{V_0}/2) \tanh \alpha$  y  $k = k_1$  podemos reescribir la ecuación (19) de la siguiente forma:

$$T_\alpha(k) = \frac{e^{-ika}}{\cosh \alpha} \frac{k}{k + i\gamma}. \quad (56)$$

#### A.1 Coeficiente de Transmisión a Bajas Energías para Barreras Opacas

Estudiaremos un caso particular conocido como barreras opacas. Analizar el coeficiente de transmisión a bajas energías en barreras opacas posee una ventaja respecto a

analizarlo de forma general, ya que podemos obtener una expresion analitica sencilla de dicho parámetro, lo cual facilita el estudio de su evolución temporal y la comparación con el caso estacionario estudiado por Buttiker (Büttiker, 1983).

El caso de barreras opacas se refiere a una situación en donde una barrera de potencial cumple la condición  $\alpha_0 \gg 1$ , lo cual implica  $a \gg 1/k_{v_0}$ . Podemos explorar el comportamiento del coeficiente de transmisión con estas condiciones, de (21) podemos desarrollar  $t_{k_0}$  de la siguiente manera:

$$t_{k_0} = \frac{1}{\cosh(\alpha)} \frac{k_0}{\left[ k_0 + i \frac{k_{v_0}}{2} \tanh(\alpha) \right]}. \quad (57)$$

El término  $e^{-\alpha}$  dentro de las funciones hiperbólicas puede ser anulado debido a las condiciones de barrera opaca, de tal forma que  $t_{k_0}$  puede ser expresado de la siguiente manera:

$$t_{k_0} = \frac{k_0 e^{-k_{v_0} a}}{1 + \frac{ik_{v_0}}{2}}. \quad (58)$$

Obteniendo el módulo de la ecuación (58) tenemos que:

$$T = |t_{k_0}|^2 = \frac{k_0^2 e^{-2k_{v_0} a}}{1 + \frac{k_{v_0}^2}{4}}. \quad (59)$$

La ecuación (59) representa el coeficiente de transmisión para una barrera opaca a bajas energías.

## Apéndice B

### Función de Moshinsky

#### B.1 Identidad

La función de Moshinsky tiene la siguiente representación (van Dijk y Nogami, 2002):

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x' - i\xi^2 \frac{\hbar t}{2m}}}{\xi - k'} d\xi = \begin{cases} M(x', k', t), & \text{si } \text{Im}(k') \leq 0; \\ M(x', k', t) - e^{ik'x' - ik'^2 t \hbar}, & \text{si } \text{Im}(k') \geq 0. \end{cases} \quad (60)$$

Para  $k'$  real se tiene que:

$$M(x', k', t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x' - i\xi^2 \frac{\hbar t}{2m}}}{\xi - k' + i\epsilon} d\xi, \quad (61)$$

con  $\epsilon$  un infinitesimal.

#### B.2 Propiedades asintóticas

Los desarrollos asintóticos de la función de Moshinsky para valores grandes del argumento  $y_q$  (García-Calderón y Rubio, 1997),

$$y_q = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{m}{\hbar t}} \left[ (x - a) - \frac{\hbar}{m} qt \right], \quad (62)$$

están dadas por:

$$M(y_q) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} e^{imx^2/2m\hbar t} \left[ \frac{1}{\pi^{1/2}y} - \frac{1}{2\pi^{1/2}y^3} + \dots \right] & \text{si } \arg(y) \in (-\pi/2, \pi/2); \\ \frac{1}{2} e^{imx^2/2m\hbar t} \left[ 2e^{y^2} + \frac{1}{\pi^{1/2}y} - \frac{1}{2\pi^{1/2}y^3} + \dots \right] & \text{si } \arg(y) \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases} \quad (63)$$

## Apéndice C

### Cálculo del propagador $K(x, t; y, 0)$

El propósito de esta sección es obtener una expresión analítica para el propagador  $K(x, t; y, 0)$  en la región de transmisión de un potencial de alcance finito para evaluar la solución integral (9). El procedimiento analítico para el cálculo de  $K(x, t; y, 0)$  se basa en un desarrollo en estados del continuo utilizando la definición estándar del propagador,

$$K(x, t; y, 0) = \int_0^\infty dk e^{-i\hbar k^2 t/2m} [\psi_l(x)^* \psi_l(y) + \psi_r(x)^* \psi_r(y)], \quad (64)$$

que involucra los eigenestados normalizados  $\psi_l$  correspondientes a la incidencia por la izquierda,

$$\psi_l(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T(k) e^{ikx}, & x > L; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{ikx} + R(k) e^{-ikx}], & x < 0, \end{cases} \quad (65)$$

y por la derecha,  $\psi_r$ ,

$$\psi_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{T}(k) e^{-ikx}, & x < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-ikx} + \tilde{R}(k) e^{ikx}], & x > L, \end{cases} \quad (66)$$

en un potencial arbitrario de alcance finito  $V(x)$  ( $0 \leq x \leq L$ ) que se muestra en la figura 34.

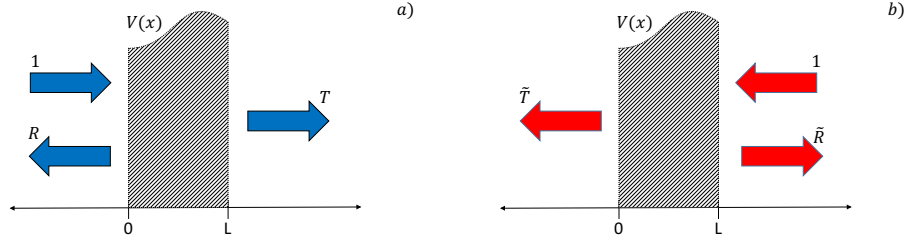


Figura 34: Ondas incidentes, transmitidas y reflejadas por un potencial unidimensional arbitrario como función de la posición. (a) Incidencia por la izquierda. (b) Incidencia por la derecha.

Sustituyendo las ecuaciones (65) y (66) en (64), y utilizando la identidad  $T\tilde{R}^* + R\tilde{T}^* = 0$ , obtenida mediante las propiedades del wronskiano (Messiah, 1999) de las soluciones  $\psi_l$  y  $\psi_r$ , obtenemos,

$$K(x, t; y, 0) = \int_0^\infty dk e^{-i\hbar k^2 t/2m} \left[ T^*(k) e^{-ik(x-y)} + \tilde{T}(k) e^{ik(x-y)} \right]. \quad (67)$$

Utilizando las identidades  $T^*(k) = T(-k)$ , así como  $\tilde{T}(k) = T(-k)$  en la ecuación (67), y extendiendo la integración en todo el espacio- $k$ , obtenemos la expresión final para el propagador,

$$K(x, t; y, 0) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} T(k) e^{ik(x-y) - i\hbar k^2 t/2m}. \quad (68)$$