UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ENSENADA

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA (MyDCI)
EN ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN CONTROL

Sincronización de múltiples sistemas caóticos y su aplicación en redes de comunicaciones seguras

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

Hazael Serrano Guerrero

Ensenada, Baja California noviembre de 2012.

TESIS DEFENDIDA POR

Hazael Serrano Guerrero

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. César Cruz Hernández

Director del Comité

Dr. Cornelio Posadas Castillo

Miembro del Comité

Dr. Oscar R. López Bonilla

Miembro del Comité

Dra. Ana Yaveni Aguilar Bustos

Miembro del Comité

Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Miembro del Comité

20 de noviembre de 2012

RESUMEN de la tesis de **Hazael Serrano Guerrero**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELÉCTRICA con orientación en CONTROL. Ensenada, B. C. noviembre de 2012.

Sincronización de múltiples sistemas caóticos y su aplicación en redes de comunicaciones seguras

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Director de Tesis

Este trabajo de tesis doctoral, trata sobre la sincronización de redes complejas constituidas por osciladores con dinámicas altamente complejas (caos e hipercaos). En particular se estudia la sincronización de redes complejas con topologías regulares (global, estrella y anillo) e irregulares.

Se presenta un estudio numérico sobre la robustez de sincronía de redes complejas frente a perturbaciones paramétricas Dicho estudio se realiza en las topologías mencionadas anteriormente en diferentes casos: *i*) topología global, *ii*) topología global con nodo maestro, *iii*) topología en anillo, *iv*) topología en anillo con nodo maestro, *v*) topología en anillo en configuración maestro-esclavo (anillo dirigido), *vi*) topología en anillo abierto (camino), *vii*) topología en anillo abierto con configuración maestro-esclavo (camino dirigido), *viii*) topología en estrella, *ix*) topología en estrella con nodo maestro, *x*) topología irregular y *xi*) topología irregular con nodo maestro. En este estudio se utiliza el oscilador de Chua con retardo de tiempo como nodo de la red en todos los casos.

También se realiza un estudio analítico sobre la robustez de la sincronía de una red de dos nodos con perturbaciones paramétricas utilizando la teoría de sistemas perturbados, donde se establecen condiciones para la estabilidad de la sincronía de la red. Esto se hizo empleando al oscilador de Chua con retardo de tiempo como nodo de la red.

Se realiza un estudio de la sincronía de redes complejas empleando redes celulares neuronales (CNNs) como nodos de la red. En este estudio se emplean las topologías en anillo y estrella en diferentes casos: *i*) topología en anillo, *ii*) topología en anillo en configuración maestro-esclavo (anillo dirigido), *iii*) topología en anillo abierto (camino), *iv*) topología en anillo abierto con configuración maestro-esclavo (camino dirigido), *v*) topología en estrella y *vi*) topología en estrella con nodo maestro.

Se incluye una aplicación a las comunicaciones encriptadas, donde se muestra que es posible transmitir una imagen digital encriptada a través de una red de múltiples usuarios. Para esto se utilizaron dos diferentes topologías de red: en anillo y estrella. Se utilizan redes celulares neuronales (CNNs) como nodos de la red.

Palabras clave: Sincronización, sistemas complejos, caos, redes de comunicaciones seguras.

ABSTRACT of the thesis presented by **Hazael Serrano Guerrero**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR IN SCIENCE degree in ELECTRIC with orientation in CONTROL. Ensenada, B. C. November 2012.

Synchronization of multiple chaotic systems and its application in secure communications networks

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Advisor

In this PhD thesis, the synchronization of complex networks formed by oscillators with highly complex dynamics (chaos and hipercaos) is studied. In particular, the synchronization of networks with regular topologies (global, star and ring) and irregular is approached.

A numerical study on synchrony robustness of complex networks against parametric perturbations is presented. This study is realized on the topologies mentioned above in differents cases: *i*) global topology, *ii*) global topology with master node, *iii*) ring topology, *iv*) ring topology with master node, *v*) ring topology in master-slave configuration (directed ring), *vi*) open ring topology (path), *vii*) open ring topology in master-slave configuration (directed path), *viii*) star topology, *ix*) star topology with master node, *x*) irregular topology and *xi*) irregular topology with master node. The Chua's oscillator with time delay is used as network node in all cases.

Also is performed an analytical study on the robustness of the synchrony of a two-node network with parametric perturbations using perturbed systems theory, which establishes conditions for stability of synchrony of the network. This was done using the Chua oscillator with time delay as network node.

A complex networks synchrony study using cellular neural networks (CNNs) as network nodes is presented. This study use the ring and star topologies in different cases: *i*) ring topology, *ii*) ring topology in master-slave configuration (directed ring), *iii*) open ring topology (path), *iv*) open ring topology in master-slave configuration (directed path), *v*) star topology and *vi*) star topology with master node.

An encrypted communications application, which shows that it is possible to transmit an chaotic encrypted digital image through a network of multiple users is presented. For this, we used two different network topologies: ring and star.

.

Keywords: Synchronization, complex systems, chaos.

A mi amada esposa Sirinella Denis y mi niño Hazael Antonio

Agradecimientos

A Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mi esposa Denis, por acompañarme siempre en esta comisión, por amarme, comprenderme y por su gran apoyo. Gracias por ser mi alegría y razón de vida.

Al Dr. César Cruz Hernández por brindarme su apoyo, amistad y paciencia. Por su atinada y valiosa dirección, desde el inicio hasta la culminación de este trabajo.

Al Dr. Oscar López Bonilla, Dr. Enrique Efrén García Guerrero y Dr. Cornelio Posadas Cástillo, por su apoyo y contribución en la elaboración de esta tesis, muchas gracias.

A la Dra. Rosa Martha López Gutiérrez, le agradezco su amistad, su apoyo incondicional desde el principio hasta el final de este proyecto, entusiasmo en todo momento y colaboración para la realización de esta tesis.

A mi madre Margarita Guerreo.
Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

A mi padre Miguel Serrano.
Por los ejemplos de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

Por el apoyo, colaboración, su tiempo y amistad, quiero agradecer a la Dra. Liliana Cardoza Avendaño, al M.C. Oscar Acosta, M.C. Adrián A. y al M.C. Everardo Inzunza.

A todas las personas y maestros que de una u otra forma colaboraron o participaron en mi educación y en la realización de este trabajo, por el apoyo y la confianza que me han prestado.

El más profundo agradecimiento a la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), que por medio de la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD) campus Ensenada -directivos, docentes, administrativos y servicios generales- me brindó la oportunidad de realizar uno de mis más grandes logros.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada B.C. (CICESE), por la infraestructura, albergue y servicio bibliotecario brindado durante la estancia de mis estudios doctorales.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo a través de la beca de doctorado durante los primeros 2 años de mis estudios de doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo a través del proyecto de grupos de investigación en ciencia básica Referencias 166654.

Ensenada, México Hazael Serrano Guerrero
20 de noviembre de 2012.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido (Continuación)

Lista de Figuras

Lista de Figuras (Continuación)

Figura | Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura | Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura | Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura | Página

Lista de Figuras (Continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (Continuación)

Capítulo I

Introducción

Le presente tesis doctoral pretende contribuir a la solución de problemas abiertos relacionados con la sincronización de redes complejas, formadas por nodos generadores de dinámicas extremadamente complejas, es decir, nodos: caóticos, hipercaóticos, con retardo de tiempo. Con el propósito de aplicar estrategias de control, que permitan sincronizar las redes complejas con el menor número de estados en la retroalimentación de controles en los nodos.

Las redes complejas se encuentran en una gran cantidad de sistemas naturales y artificiales. En los sistemas biológicos se tienen, colonias de insectos, cadenas tróficas (formadas por predador y presa), las neuronas del cerebro, etc. Ejemplos de redes artificiales son la internet, la red de páginas web (www), las redes de transmisión eléctrica, redes de osciladores caóticos y una mención aparte, lo merecen las redes sociales. El problema de sincronizar redes complejas compuestas por sistemas dinámicos, ha proporcionado tremendo impacto en las disciplinas mencionadas, de ahí que en la actualidad constituya un área emergente de investigación, donde convergen los intereses de muchas disciplinas científicas y tecnologías, debido a la amplia gama de aplicaciones en estas áreas de investigación; ver por ejemplo, los trabajos [Li y Chen 2003; Lu y Chen 2004; Posadas-Castillo *et al.* 2005b; Wang y Chen 2002b; Wu y Chua 1995].

En particular, algunas contribuciones al problema de sincronización de redes complejas, donde consideran nodos a sistemas dinámicos no lineales operando en modo caótico: a *redes neuronales* [Yalcin *et al.* 2005; Posadas-Castillo *et al.* 2007a; 2007b; 2008d; 2008h; Serrano-Guerrero *et al.* 2010; Serrano-Guerrero *et al.* 2013], a *láseres de* Nd:YAG [Posadas-Castillo *et al.* 2008a; López-Gutiérrez *et al.* 2008a; 2008b; 2008c], a *circuitos de Chua* [Posadas-Castillo *et al.* 2006b; 2006c; 2006d; 2006e; 2008b].

I.1. Redes complejas

La teoría de grafos tiene su origen en la solución de acertijos y juegos, tales como el célebre problema de los siete puentes de Königsberg o el juego de Hamilton, en la actualidad se ha convertido en una poderosa herramienta para el entendimiento y solución de problemas mucho más complejos y de aplicación práctica. Básicamente un grafo es una representación sencilla de un problema complejo, de hecho hay muchos sistemas cuyo estudio es mucho más simple con la ayuda de la teoría de grafos. El trabajo de Leonhard Euler en 1736, sobre el problema de los siete puentes de Königsberg se considera el primer resultado de la teoría de grafos. Sin embargo, la primera aplicación a un problema físico la hizo Gustav Kirchhoff en 1845, cuando publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en las redes de circuitos eléctricos. En 1852 Francis Guthrie formuló el problema de los cuatro colores, que plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos no tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos, que son las bases para el estudio de las redes complejas.

Tanto los sistemas naturales como los artificiales, a menudo están compuestos por miles de unidades, de las que podemos conocer (o no) su funcionamiento individual. Pensemos en las neuronas y otras neurocélulas del cerebro, o en los componentes de un circuito electrónico, en la comunidad de hormigas que conforman un hormiguero, o en el conjunto de páginas "web" de la red, conectadas vía "link", o incluso en la red física de ordenadores y servidores de internet. También tenemos otros tipos de redes, como las que creamos las personas que formamos las denominadas redes sociales, o los ecosistemas naturales, o nuestro código genético. En todos esos casos muy diversos, tenemos que la teoría de redes, originaria de los enfoques de las teorías de sistemas complejos de la física estadística, nos permite caracterizar estos sistemas de una manera, para posteriormente intentar explicar las propiedades emergentes de los sistemas a los que representan esas redes complejas.

En los últimos años, hemos sido testigos de una explosión en el estudio de las propiedades estructurales y dinámicas de las redes complejas. Durante este tiempo se han publicado cientos de artículos sobre este tema en revistas de investigación científica internacionales de diferentes disciplinas, que abarcan física, biología, sociología, neurología, economía, medicina, por mencionar algunos ejemplos. Este interés en las redes complejas radica en que nos hemos dado cuenta de que dichas redes abundan en la naturaleza, son parte de nuestra vida diaria y se presentan a diferentes niveles de organización. Por ejemplo, algunas redes biológicas que encontramos en el nivel microscópico son las redes de regulación genética, redes de proteínas, redes neuronales, redes metabólicas. Por otra parte, a un nivel de organización mucho mayor, encontramos redes de comunicación e informáticas (la red de internet, la red www, redes telefónicas, etc.), redes sociales (amistades, contactos sexuales, colaboradores científicos, propagación de enfermedades, etc.), redes ecológicas (interacciones tróficas en un ecosistema). Las redes complejas son ubicuas, es decir, están en todas partes. Incluso se ha estudiado la red de súper héroes en el Universo de Marvel, siendo el hombre araña el súper héroe más popular con la mayor conectividad. Es un hecho sobresaliente el que todas estas redes, tan diferentes en naturaleza y en tamaño, tengan muchas propiedades estructurales similares. Este hecho, tan simple como sorprendente, hace posible que podamos formular modelos matemáticos para entender y explicar las propiedades estructurales y en algunos casos también las propiedades dinámicas, de las redes complejas.

Matemáticamente, una red es un conjunto de puntos (nodos) unidos por vértices (enlaces). Las propiedades de las redes han sido extensamente estudiadas por los matemáticos, aunque restringiéndose a redes muy regulares o a redes muy desordenadas, en las cuales, juegan un papel muy importante las propiedades estadísticas. Sin embargo, en los últimos años hemos vivido una verdadera revolución científica que ha hecho darnos cuenta de que muchos fenómenos en disciplinas tan dispares como la biología, la física, la informática, la economía o las ciencias sociales, tienen lugar en complejos entramados de interacción entre los elementos que las forman. Aunque en cada una de estas disciplinas, el concepto de enlace entre dos nodos tiene significados diferentes; así por ejemplo, en una red trófica, los nodos son las especies animales y los enlaces corresponden a pares predador-presa, internet es una red de ordenadores conectados mediante conexiones de soporte físico, la world-wide-web es un entramado de documentos relacionados entre ellos mediante hiperenlaces o las relaciones de parentesco y amistad configuran determinadas redes sociales.

I.1.1. Aplicaciones de las redes complejas

En los últimos años, el estudio de redes complejas toma relevancia en un gran número de disciplinas científicas, incluyendo la física, las matemáticas, las neurociencias y la biología. Por definición, una red compleja es un sistema compuesto de sistemas dinámicos y se encuentra dentro del contexto de los sistemas controlados. Los conceptos relativos a redes tienen numerosas aplicaciones potenciales en el problema de diseño, modelado y control, tanto de sistemas tecnológicos como biológicos, en los cuales, arreglos de un gran número de unidades fundamentales pueden ser identificados y tratados como sistemas dinámicos acoplados en arreglos. El buen funcionamiento (sincronía de sus nodos) o falla (interrupciones en la sincronía) de éstas, trae como consecuencia un bienestar o perjuicio respectivamente en la vida del hombre. La teoría de redes nos ayuda a comprender el comportamiento de las redes complejas, a continuación se mencionan algunas aplicaciones en diferentes áreas.

Redes sociales

Desde la antigüedad, la forma en que las personas establecen relaciones entre sí, ha sido crucial para la guía de la evolución cultural y económica de la sociedad. Las relaciones siempre han definido los diferentes redes sociales, diplomáticas, comerciales e incluso culturales. En varias de estas antiguas redes, fue posible identificar cualitativamente propiedades estructurales relevantes [Ormerod y Roach 2004], por ejemplo, como la importancia de individuos estratégicos que intermedian o deciden negociaciones o experimentan el poder de pensamientos ideológicos/religiosos dentro de los grupos de personas.

Otro ejemplo es el estudio de cómo se dispersan las enfermedades en las epidemias, tales como el sida, puede ayudar a entender su comportamiento y poder detener su avance a través de las redes sociales. Liljeros [2004], explora la complejidad de los mecanismos que contribuyen a la propagación de enfermedades de transmisión sexual y concluye que una solución única para el problema está lejos de ser encontrada, a pesar de que la estructura subyacente de la red sexual contribuye a esta dinámica. De hecho, tanto intervenciones generales y específicas han demostrado ser eficaces.

Redes biológicas

En junio de 2000, el *Proyecto Genoma Humano y Celera Genomics* decodificaron el genoma humano, proporcionando el llamado "libro de la vida", después de esto, el código genético de muchos organismos ha sido descubierto. El proyecto del genoma es sólo un punto de partida [Collins *et al.* 2003], ahora en la era post-genómica los científicos deben estar preocupados con el modelado de las interacciones biológicas en lugar de analizar el código genético por sí mismo. El comportamiento de los sistemas vivos rara vez puede ser reducido a sus componentes moleculares, en el área de la biología de sistemas postgenómica [Kitano 2002] se tienen que montar las piezas desplegadas por los proyectos del genoma. Por ejemplo, en [Vogelstein, Lane y Levine 2000] los autores concluyeron que se pueden obtener resultados más importantes mediante el análisis de las conexiones del gen p53 (un supresor de tumores) que mediante el estudio de este gen por separado.

La teoría de redes complejas es un marco útil para el estudio redes de neuronas en el cerebro. Los modelos de redes, mediciones topológicas y el análisis dinámico (por ejemplo, [Costa 2008; Beggs y Plenz 2003]) pueden ser considerados para el estudio del cerebro. Representar las conexiones del cerebro con redes es útil para estudiar las enfermedades cerebrales, que están relacionadas con ataques a la red y fallas de la misma y funciones cerebrales, donde es posible asociar una arquitectura particular del cerebro con funciones específicas.

Redes de transporte

Las redes de transporte son importantes para el desarrollo de un país y pueden considerarse como indicador de crecimiento económico. La industria del turismo y el transporte de mercancías y de personas son especialmente dependientes de las redes de transporte, que incluyen los aeropuertos, los ferrocarriles, carreteras, pasos subterráneos (metro) y otras formas de transporte público. El estudio de este tipo de red puede ayudar a entender el movimiento de personas en todo el mundo y predecir cómo se pueden propagar enfermedades, además del diseño óptimo de redes para el flujo de personas. En última instancia, puede dar ideas sobre cómo mejorar la economía de un país [Costa 2008].

Sistema de transmisión de energía eléctrica

El sistema de transmisión de energía eléctrica es una de las más complejas redes construidas por el hombre. Se componen de varias líneas de transmisión y subestaciones, que incluyen generadores, las fuentes de energía eléctrica; subestaciones de transmisión, que conectan las líneas de transmisión alta tensión y los centros de carga, que entregan la electricidad a los consumidores, ver por ejemplo [Albert *et. al.* 2004]. Coloquialmente conocido como red eléctrica, el sistema de transmisión de energía eléctrica tiene una estructura compleja, que incluye caminos redundantes para enrutar la energía de cualquier generador a cualquier centro de carga. La principal razón de esta redundancia es garantizar que cada centro de carga pueda ser suministrado por cualquier generador. En otras palabras, si un generador falla, los centros de carga recibirán la potencia necesaria de los otros generadores. De la misma manera, si una subestación falla, las demás tienen que ser capaces de manejar la carga adicional y mantener a toda la red trabajando. No obstante, incluso con la redundancia de líneas, suceden algunos fallos en cascada y apagones y varios centros de carga dejan de recibir energía. Uno de los más graves fue el apagón que afectó a 50 millones de personas en EE.UU. y Canadá, el 14 de agosto de 2003 y dio lugar a una enorme pérdida de dinero, alrededor de 30 millones de dólares de los EE.UU. [Bai *et. al.* 2006]. Obviamente, este tipo de red es fundamental para la economía de un país y merece una atención especial en la ingeniería y la ciencia.

Encriptado de información

Desde la antigüedad, el encriptado de información con el propósito de comunicación confidencial, ha sido un problema de mucho interés para el hombre. Durante muchos años, se han utilizado diferentes técnicas para tratar de resolver este problema. Actualmente, la sincronización de osciladores caóticos (por ejemplo de Lorenz, Chua, Rössler) y recientemente láseres en régimen caótico [Mirasso *et al.* 1996; Sánchez-Díaz *et al.* 1999; Terry 2002; Posadas-Castillo *et al.* 2006a; 2008a; 2008e]. En los siguientes trabajos se proponen una alternativa de solución a dicho problema de encriptamiento de información [Kocarev *et al.* 1992; Feldmann *et al.* 1996; Chow *et al.* 2001; Posadas-Castillo y Cruz-Hernández 2001; Serrano-Guerrero y Cruz-Hernández 2002; Serrano-Guerrero y Cruz-Hernández 2002a; Cruz-Hernández *et al.* 2005; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2005a; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2005b; Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2008; Cruz-Hernández y Romero-Haros 2008; Gámez-Guzmán *et al.* 2008; Gámez-Guzmán *et al.* 2008a; Aguilar-Bustos *et al.* 2008a; Acosta 2008; Rodríguez-Orozco *et al.* 2008]. En especial, en el área de comunicaciones privadas o seguras, la aplicación de diferentes esquemas de comunicación para múltiples usuarios, es uno de los campos de investigación, en donde los conceptos, definiciones y propiedades de las redes complejas participan activamente [Kouomou y Woafo 2003].

I.2. Sincronía

I.2.1. Antecedentes históricos

Cuando hablamos de sincronía estamos haciendo referencia al fenómeno mediante el cual, dos o más acontecimientos suceden al mismo tiempo, de manera pareja y equilibrada, simultáneamente. El término sincronía proviene del griego "**syn**" (que significa juntos o en conjunto) y "**cronos**" (que significa tiempo) por lo cual, puede ser entendido como algo que sucede al mismo tiempo. La sincronía siempre nos habla de una situación en la cual, dos personas o dos elementos actúan de manera conjunta y pareja. De manera general, definiremos **sincronía** a la propiedad que adquiere un conjunto de "objetos dinámicos" (de una misma o diferente especie) de manifestar un ritmo o comportamiento común (generalmente distinto a los ritmos individuales de los objetos considerados), partiendo de ritmos o comportamientos individuales distintos, debido a la presencia de un medio acoplante (un medio físico de conexión) entre ellos, el cual, en la mayoría de los casos, es extremadamente débil.

Históricamente, la primera observación formal de un fenómeno de sincronía, se atribuye a Christiaan Huygens en 1673, durante algunos experimentos realizados en la mejora de relojes de péndulo. Esto ocurrió, cuando dos relojes suspendidos de la misma viga en su habitación, como se observa en la figura 1, los encontró oscilando exactamente con la misma frecuencia y moviéndose en direcciones opuestas, debido al acoplamiento débil a través de la viga, es decir, a las casi imperceptibles oscilaciones de la viga ocasionadas por el movimiento de ambos relojes. Huygens observó también, que los "tictacs"de ambos relojes se escuchaban al unísono.

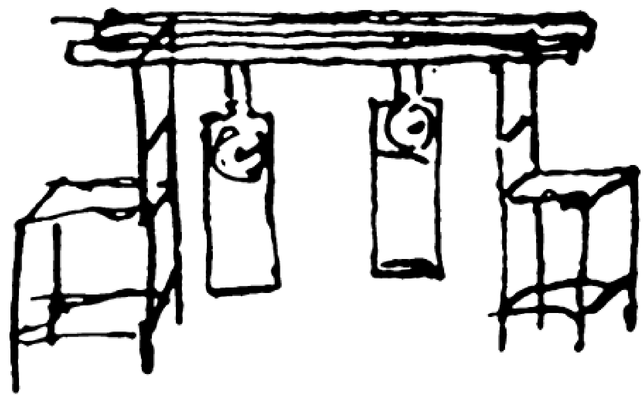

Figura 1: Dibujo original de Christiaan Huygens ilustrando su célebre experimento con dos relojes de péndulo colocados en un soporte común [Pikovsky *et al.* 2001].

Asombrado Huygens se preguntó la causa de dicho fenómeno, ya que al colocar ambos relojes después sobre una pared (es decir, interrumpido el acoplamiento de las oscilaciones), aquél fenómeno cesaba.

A partir de entonces, esta propiedad se viene observando (o apreciando con pronunciado interés) en sistemas de naturaleza muy diversa; por ejemplo, en sistemas eléctricos, mecánicos, biológicos, fisiológicos, celestes, etc.

La observación de la naturaleza nos proporciona a diario miles y miles de ejemplos de fenómenos colectivos en donde unidades dinámicas se organizan en un estado de sincronía. Es suficiente con observar la luna cada noche y darse cuenta de que nuestro satélite nos muestra siempre la misma cara, debido a que en el curso de los años, la fuerza de gravitación con la Tierra se ha encargado de sincronizar sus movimientos de rotación y revolución.

La sincronía se emplea ampliamente en tecnología, por ejemplo, en dispositivos eléctricos, en dispositivos de radio y en máquinas vibratorias. La sincronización juega un papel importante en mecánica celeste donde explica el "amarre" de periodos de revolución entre planetas y satélites. Además, la sincronización no sólo se observa en física, sino también en neurobiología donde ritmos y ciclos pueden hallar su explicación o en la sincronía de grupos de neuronas, cuya operación se considera crucial para el procesamiento de información en el cerebro [Schechter 1996; Schiff *et al.* 1996].

Una aplicación importante de la sincronía en medicina, son los marcapasos, los cuales, envían pulsos eléctricos dentro de áreas específicas del corazón, dictando a los músculos de éste, una frecuencia necesaria de contracción (entre 60-70 por minuto).

La sincronía también se manifiesta en el comportamiento colectivo de los humanos, ya sea voluntaria o involuntariamente; por ejemplo, en los aplausos prolongados en una audiencia, en los gritos al unísono de frases en apoyo o en contra de alguien y en grupos de personas desfilando, la sincronía menstrual en las mujeres, entre muchos otros.

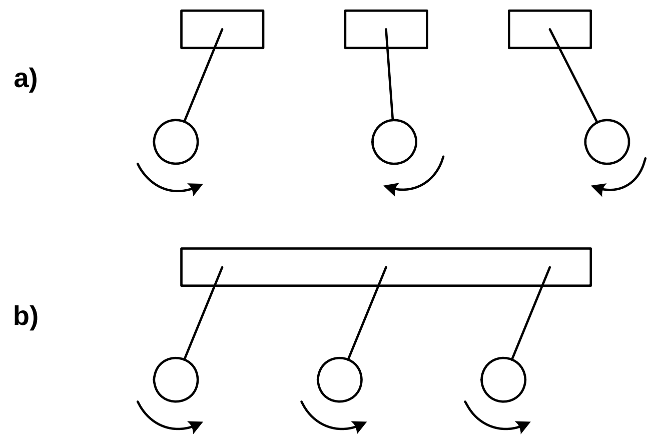

Figura 2: a) Sistemas no acoplados, por tanto no hay sincronía. b) Sincronía debido al acoplamiento apropiado de los sistemas.

En estos y otros numerosos escenarios, la sincronía representa un papel fundamental, ya que establece alguna relación especial entre sistemas o mecanismos acoplados.

En nuestros días, dicha propiedad se emplea frecuentemente en tecnología; ya sea en dispositivos eléctricos, en dispositivos de radio, en máquinas vibratorias, etc., donde las frecuencias a las cuales operan de manera independiente dichos sistemas, difieren en la mayoría de los casos, unas de otras; a continuación se mencionan algunos ejemplos concretos:

- *Sincronización de generadores cuánticos de radio frecuencia ("massers"),*
- *Sincronización de osciladores exhibiendo comportamiento periódico, cuasi-periódico o caótico para su aplicación en comunicaciones privadas y seguras,*
- *Sincronización de robots manipuladores para realizar una tarea común,*
- *Sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas en electrónica y radio,*
- *Sincronización modal en láseres que permite generar pulsos de luz muy potentes.*

Como se mencionó, la sincronización se puede definir como la propiedad que posee un conjunto de sistemas de naturaleza distinta (o no), de adoptar un ritmo uniforme (común) de coexistencia, a partir de sus diferentes ritmos individuales, producido generalmente por la interacción extremadamente "débil" entre ellos (ver figura 2).

Decimos que dos osciladores están sincronizados si finalmente, transcurrido el transitorio (un lapso de tiempo largo o corto), las oscilaciones coinciden exactamente en todo tiempo, a pesar de comenzar ambos osciladores en condiciones distintas (su plano de fase describe una línea recta a 45 grados de pendiente, ver figura 3).

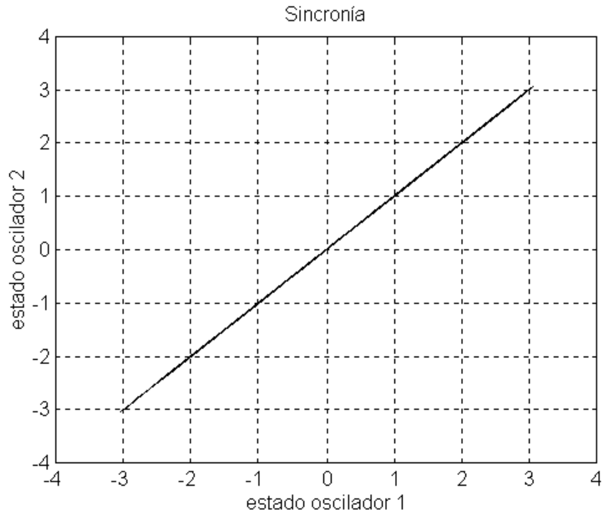

Figura 3: Plano de fase ilustrando la sincronía de 2 osciladores.

I.2.2. Sincronización de osciladores caóticos

Un elemento importante en este trabajo de investigación es el **caos**, los nodos que conforman las redes, en muchos casos exhiben dinámicas caóticas. Aunque la palabra misma, invita a pensar en desorden, desde el punto de vista científico, caos se refiere a un comportamiento dinámico complejo, que puede modelarse por ecuaciones no lineales diferenciales o en diferencias. El caos posee características muy particulares, como ser extremadamente sensible a condiciones iniciales, generar atractores "extraños", tener al menos un exponente de Lyapunov positivo, entre otras que se describirán con detalle posteriormente.

Hoy en día, los sistemas caóticos son utilizados en distintas disciplinas de la ciencia, por ejemplo, en meteorología; en un intento por modelar el comportamiento de la atmósfera y predicción del clima. En biología, destacan los estudios sobre el comportamiento de los sistemas metabólicos (glicólisis), el análisis de las enfermedades cardiacas o la actividad cerebral. En física, dentro de la teoría de partículas elementales y los desplazamientos de electrones en el átomo, el encriptado de información en comunicaciones seguras, etc.

Fujisaka y Yamada en [Fujisaka y Yamada 1983] y Pecora y Carroll en [Pecora y Carroll 1990] fueron pioneros en obtener sincronía de sistemas caóticos (es decir, hacer que dos osciladores con dinámica caótica coincidan en tiempo y forma). Desde entonces, ha existido enorme interés en las comunidades científicas y tecnológicas en aprovechar esta propiedad. En la literatura especializada en este tópico se reportan diferentes métodos para sincronizar **dos osciladores caóticos**: sincronización por *retroalimentación del error* [Chen y Dong 1993a; 1993b; Liu *et al.* 2002; Wu *et al.* 2006; Rafikov y Manoel 2008], sincronización utilizando *observadores de estado* [Ushio 1996; Nijmeijer y Mareels 1997; Grassi y Mascolo 1999; Sira-Ramírez y Cruz-Hernández 2001; Cruz-Hernández *et al.* 2002; Yamamoto *et al.* 2002; Morgül *et al.* 2003], sincronización utilizando *control impulsivo* [Stojanovski T. *et al.* 1996; Yang y Chua 1997; Itoh *et al.* 1999a; 1999b; 2001; Khadra *et al.* 2003a; 2003b], sincronización utilizando *acoplamiento a modelos* [Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2002; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2004; 2005a; Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2006; 2008; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2008], sincronización empleando *filtro extendido de Kalman* [Sobiski y Thorp 1998; Cruz-Hernández y Nijmeijer 1999; 2000; Cruz-Hernández *et al.* 2001; Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2006], sincronización empleando *sistemas inversos* [Feldmann *et al.* 1996], sincronización utilizando *control adaptable* [Fradkov y Markov 1997; Tech-Lu y Shin-Hwa 2000; Wagg 2002; Bowong 2007], sincronización empleando *modos deslizantes* [López-Mancilla y Cruz-Hernández 2004]. Sobre sincronización de caos se han escrito muchos libros [Fradkov y Pogromsky 1998; Chen y Don 1998; Pikovsky *et al.* 2001; González-Miranda 2004; Cruz-Hernández y Martynyuk 2010] y prestigiosas revistas han editado números especiales: On chaos synchronization and control: theory and applications, IEEE Trans. Circuits Systems I (1997), **44**(10), Syst. Contrl. Lett. 31 [1997], Control and synchronization of chaos, Int. J. Bifurc. and Chaos [2000], **10**(3-4), etc. por mencionar algunos.

Sin embargo, en la actualidad, algunas aplicaciones de especial interés científico, industrial y tecnológico, requieren **extender la sincronía a múltiples osciladores**, constituyendo redes complejas, ver por ejemplo [Blekhman *et al.* 1997; Wang y Chen 2002a; Wang y Chen 2002b; Wang 2002; Rodríguez-Ángeles y Nijmeijer 2004; Marubia 2004; Belykh *et al.* 2005; Yalcin 2005; Van den Hoven y Cruz–Hernández 2007; Posadas-Castillo *et al.* 2005a; 2008b; 2008c]. En algunos casos, con el objetivo de realizar una tarea común (sistemas cooperativos), en la formación de grupos de robots móviles, de agentes, etc. En otros casos, para estudiar las características y propiedades emergentes de estas estructuras, para aplicarse a modelos reales (físicos, biológicos, sociales, etc.), que nos ayude a entender más el comportamiento y crecimiento de este tipo de estructuras, para beneficio del hombre.

I.3. Objetivos y alcances de la tesis

Dado el enorme interés que ha despertado el estudio de las redes complejas en los últimos años en muchas áreas científicas y en tecnología, en particular, la sincronización de redes complejas y a las muchas aplicaciones en la ingeniería; con la realización de este trabajo de tesis doctoral, se planteó alcanzar el siguiente **objetivo general.**

Sincronizar redes dinámicas complejas formadas con nodos idénticos y acoplados en diferentes topologías.

Los objetivos particulares que fueron abordados son los siguientes:

1. Sincronizar redes complejas, formadas con nodos generadores de atractores: caóticos, hipercaóticos y de dimensión infinita.

2. Sincronizar redes complejas con nodos conectados en las topologías: global, anillo y estrella.

3. Sincronizar redes complejas con nodos conectados en topologías irregulares.

4. Sincronizar redes neuronales artificiales (CNNs).

5. Aplicar la sincronización de redes complejas a redes de comunicaciones seguras.

I.4. Organización del manuscrito

Esta memoria de tesis doctoral se organiza en ocho capítulos como sigue. En el **primer capítulo**, se da una introducción al trabajo desarrollado, mencionando los objetivos que dieron su origen. En el **capítulo dos**, se presenta la teoría empleada para sincronizar redes complejas, se proporcionan condiciones de acoplamiento necesarias para obtener la sincronización de estas redes. Además se presentan diferentes topologías de redes tanto regulares (global, estrella y anillo) como irregulares, además, condiciones de acoplamiento y características especiales de estas redes. El **tercer capítulo** presenta los dos osciladores caóticos utilizados a lo largo de este trabajo doctoral: oscilador de Chua con retardo de tiempo y redes neuronales celulares (CNNs). El **cuarto capítulo** presenta la sincronización de redes complejas, aplicada al oscilador de Chua con retardo. Se presenta también un estudio de robustez de la sincronía frente a perturbaciones paramétricas. En el **quinto capítulo** se presenta un análisis de robustez frente a perturbaciones paramétricas para una red de dos nodos, empleando la teoría de Lyapunov. En el **sexto capítulo** se muestra la sincronía de redes neuronales caóticas en topología en estrella y en vecino más cercano. En el **séptimo capítulo** se muestra una aplicación a las comunicaciones seguras. Finalmente, en el **octavo capítulo** se dan las conclusiones más importantes del trabajo doctoral y se mencionan las posibilidades de trabajos futuros en esta dirección.

Capítulo II

Sincronización de redes complejas

En este capítulo se presenta la teoría empleada en este trabajo doctoral para sincronizar los nodos de las redes complejas. Se describen las condiciones necesarias de acoplamiento entre los nodos para obtener la sincronización de estas redes. Además, se presentan diferentes arquitecturas o configuraciones de acoplamiento en las redes.

II.1. Dinámica de redes complejas

A través de todo este trabajo, consideramos redes complejas compuesta de N nodos idénticos, acoplados linealmente a través de la primera variable de estado de cada nodo. En estas redes dinámicas, cada nodo constituye un sistema dinámico de dimensión n, estas redes se describen como sigue

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1},\ x_{i2},\ ...,\ x_{in})^T \in R^n$ son las variables de estado del nodo i, mientras que $u_i = u_{i1} \in R$ es la señal de entrada al nodo i, definida por

$$u_{i1} = c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma\mathbf{x}_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

la constante $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento de los nodos en las redes dinámicas y $\Gamma \in R^{n\times n}$ es una matriz constante indicando las conexiones, que conecta a las variables de estado de los nodos acoplados. Por simplicidad se asume que $\Gamma = \mathrm{diag}\,(r_1,\ r_2, \ldots, r_n)$ es una matriz diagonal con $r_i = 1$ para una i en particular y $r_j = 0$ para $j \neq i$. Esto quiere decir, que cualquier par de nodos están acoplados a través de su $i-ésima$ variable de estado.

La matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ es la matriz de acoplamiento. Representa la configuración de acoplamiento de los nodos en las redes dinámicas. Si existe conexión entre el nodo i y el nodo j, entonces la entrada $a_{ij} = 1$; de otra manera, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los elementos de la diagonal de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$ se definen por

$$a_{ii} = -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} a_{ij} = -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} a_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Ahora, asumiendo que la red dinámica (1)-(2) está conectada de manera que no hay nodos aislados. Entonces, la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica irreducible. Se conoce que en este caso, cero es un valor propio de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$, con multiplicidad

1 y el resto de los valores propios son estrictamente negativos [Wang 2002; Wang y Chen 2002b].

La sincronización de los estados de los nodos de la red compleja, puede determinarse por los valores propios diferentes de cero de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$. Se dice que la red dinámica (1)-(2) sincroniza (asintóticamente), sí [Wang y Chen 2002b]:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \ \ldots \ = \mathbf{x}_N(t), \quad \text{cuando} \ \ t \to \infty. \tag{4}$$

La arquitectura de acoplamiento establecida en (3) garantiza que la sincronización de los estados de los nodos de la red, corresponde a una solución $\mathbf{s}(t) \in R^n$, de un nodo aislado, es decir satisface

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f\left(\mathbf{s}(t)\right), \tag{5}$$

donde la solución $\mathbf{s}(t)$, puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Esto implica que, la estabilidad de la sincronización de los estados de los nodos, es decir

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \ \ldots \ = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t), \tag{6}$$

de la red dinámica (1)-(2) está determinada por la dinámica de un nodo aislado, de la función no lineal f y de su solución $\mathbf{s}(t)$, de la fuerza de acoplamiento c, de la matriz de conexiones $\mathbf{\Gamma}$ y de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$.

II.1.1. Condiciones de sincronización

Teorema 1 [Wang 2002; Wang y Chen 2002b] *Considere la red dinámica (1)-(2). Sean*

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_N \tag{7}$$

los valores propios de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$. *Suponiendo que existe una matriz diagonal (de dimensión $n \times \ n$) $\mathbf{D} > 0$ y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tales que*

$$\left[Df(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma\right]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}\left[Df(\mathbf{s}(t)) + d\mathbf{\Gamma}\right] \leq -\tau \mathbf{I}_n \tag{8}$$

para todo $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbf{I}_n \in R^{n\times n}$ es la matriz identidad. Si además, se cumple que

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}, \tag{9}$$

entonces, la sincronización de los estados de los nodos como esta expresado en (6) de la red dinámica (1)-(2), es exponencialmente estable.

Ya que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, la desigualdad (9) es equivalente a

$$c \geq \left|\frac{\bar{d}}{\lambda_2}\right|. \tag{10}$$

Esta condición dice, que dado que $|\lambda_2|$ puede ser muy grande, implica que la red dinámica (1)-(2) pueda sincronizar con un valor de acoplamiento pequeño c. Así que, la sincronización de la red dinámica (1)-(2) con respecto a una configuración particular de acoplamiento (regular o irregular) se puede determinar por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$.

II.2. Topología de redes complejas

En este trabajo de tesis, nos referiremos a la configuración de acoplamiento de las redes, a la forma en que están conectados los nodos que conforman las redes. Podemos considerar que existen dos grupos principales dentro de las redes dinámicas complejas (acorde a la forma en que sus nodos están acoplados o conectados):

i) *redes complejas regulares*, las cuales, siguen un patrón definido en la forma en que sus nodos están conectados, por ejemplo: redes con acoplamiento global entre sus nodos, redes con nodos acoplados en anillo y redes con nodos acoplados en estrella [Wang 2002] y

ii) *redes complejas irregulares*, sin un patrón definido en la forma en que son conectados sus nodos, ejemplo de éstas son las llamadas redes del mundo pequeño, redes aleatorias, redes de libre escala, etc. [Wang y Chen 2002b].

II.2.1. Preliminares

Sea $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ un *grafo*, que consiste de $N = |\mathbf{V}|$ nodos, con $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{G}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ el conjunto de *nodos* y $\mathbf{M} = |\mathbf{E}|$ conexiones entre nodos, donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{G}) = \{e_1, e_2, ..., e_M\}$ representa el conjunto de *conexiones*.

Existen dos matrices principales de interés asociadas a un grafo $\mathbf{G}$:

1. *Matriz de adyacencia* $\mathbf{A}(\mathbf{G})$: matriz de orden $N \times N$, en la cual, los elementos a_{ij} están dados por
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{sí } (i,j) \in E(G) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$
donde $(i,j) \in \mathbf{E}(\mathbf{G})$ significa que el nodo i está conectado con el nodo j. Para un grafo simple sin auto conexiones, la matriz de adyacencia debe tener ceros en la diagonal principal.

2. *Matriz de grado* $\mathbf{D}(\mathbf{G})$: ésta es una matriz diagonal de orden $N \times N$, los elementos de esta matriz d_{ij} están dados por
$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{sí } i = j \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$
donde d_i es el *grado* del nodo i y dado que en esta configuración de acoplamiento cada nodo i está conectado sin un patrón definido, entonces tenemos que d_i es la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia $\mathbf{A}(\mathbf{G})$.

La **matriz laplaciana** de un grafo $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ con N nodos, es una matriz de orden $N \times N$, y puede calculase como $\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G})$, con elementos l_{ij} determinados como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{sí } (i,j) \in \mathbf{E}(\mathbf{G}), \\ d_i, & \text{sí } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Finalmente, *la matriz de acoplamiento* de la red (1)-(2) es:

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{G}) = -\mathbf{L}(\mathbf{G}). \tag{11}$$

II.2.2. Redes con acoplamiento regular

Las redes regulares tienen configuraciones de acoplamiento con forma bien definida, cuyas propiedades están bien establecidas. Las configuraciones de acoplamiento regulares comúnmente estudiadas son: redes con acoplamiento global, redes acopladas en anillo y redes acopladas en estrella [Wang 2002].

Redes con acoplamiento global

En esta configuración todos los nodos están conectados con los demás nodos. Todos los nodos están conectados a la misma cantidad de nodos $(N-1)$, por lo que la matriz de grado es dada por

$$\mathbf{D}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 \end{bmatrix},$$

la matriz de adyacencia es de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz laplaciana es de la forma

$$\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Y la *matriz de acoplamiento global* $\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G})$ es de la forma

$$\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G}) = -\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 1-N & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-N & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-N \end{bmatrix}.$$

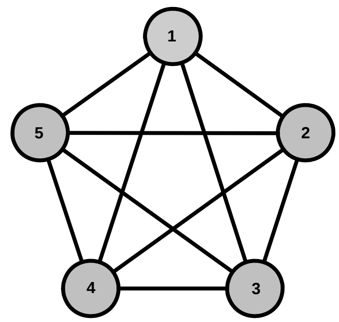

Figura 4: Red de 5 nodos con acoplamiento global.

La matriz $\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G})$ tiene un valor propio en 0 y los demás en $-N$. El segundo valor propio más grande de esta matriz es $\lambda_{2gc} = -N$, por lo que podemos decir, que esta red siempre sincroniza sin importar la cantidad de nodos que formen la red.

Para una red global de 5 nodos la matriz de acoplamiento se expresa como,

$$\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

en la figura 4 podemos ver la representación gráfica de esta red global de 5 nodos.

Los valores propios de la matriz de acoplamiento para esta configuración son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -5$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_{2gc} = -5$.

Redes con acoplamiento en anillo

Una red dinámica con acoplamiento en anillo, con una condición de acotamiento periódica, consiste de N nodos acoplados en anillo y cada nodo i es adyacente a los nodos vecinos $i \pm 1$, $i \pm 2$, $i \pm K/2$ con K un número par. En la figura 5 podemos ver una red en anillo con $N = 16$ y $K = 4$. Todos los nodos de la red tienen el mismo grado, que es igual a $K = 4$.

La matriz laplaciana se calcula de la misma manera que la red con acoplamiento global $\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G})$ y para una $K = 2$ tenemos

$$\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

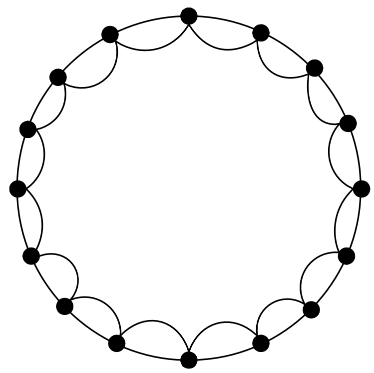

Figura 5: Red con acoplamiento en anillo con N = 16 y K = 4 [Watts y Strogatz 1998].

y la matriz de acoplamiento,

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}.$$

El segundo valor propio mayor de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{nc}$ puede encontrase por

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{j\pi}{N} \right). \tag{12}$$

Para un valor fijo de K, λ_{2nc} disminuye a cero cuando N tiende a infinito,

$$\lim_{N \to \infty} (\lambda_{2nc}) = 0, \tag{13}$$

de lo que podemos deducir que una red con esta configuración no sincroniza para valores grandes de N.

Para una red de 5 nodos y con $K = 2$, la matriz de acoplamiento se expresa por

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

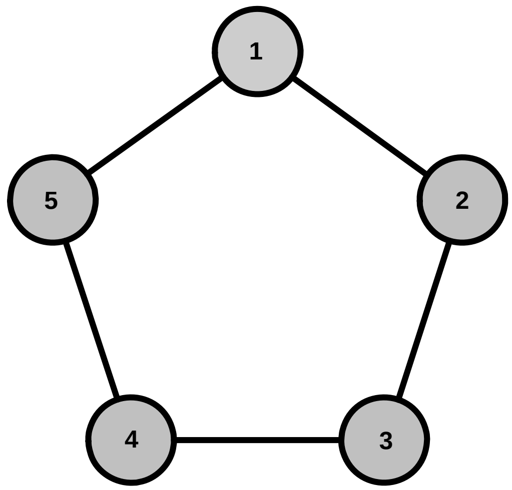

Figura 6: Red en configuración de anillo con $N = 5$ y $K = 2$.

en la figura 6 podemos ver una representación gráfica de esta red. El segundo valor propio mayor de esta configuración se calcula con la ecuación (12):

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{2}{2}} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{j\pi}{5} \right) = -1.382.$$

Redes con acoplamiento en estrella

Otro tipo de red regular es la que tiene el acoplamiento de sus nodos en estrella. Una red dinámica con acoplamiento en estrella consiste en acoplar un sólo nodo (llamado común o central) de la red compleja con los restantes $N - 1$ nodos.

La matriz laplaciana para esta red se calcula con la misma expresión $\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G})$-$\mathbf{A}(\mathbf{G})$, donde $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ es la matriz de grado y $\mathbf{A}(\mathbf{G})$ es el matriz de adyacencia, entonces la matriz laplaciana queda dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(\mathbf{G}) &= \begin{bmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

y la matriz de acoplamiento para estas redes se expresa por

$$
\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 1-N & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.
$$

Los valores propios de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G})$, son $\{0, -N, -1, \ldots, -1\}$, el segundo valor propio mayor es $\lambda_{2st} = -1$.

Puede observarse que el valor del segundo valor propio mayor λ_{2st}, no depende del tamaño, es decir, del número de nodos de la red, podemos decir, que esta configuración puede sincronizar sin importar el número de nodos.

Para una red de 5 nodos acoplados en estrella la matriz de acoplamiento es

$$
\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

en la figura 7 podemos ver una representación gráfica de esta red con 5 nodos y nodo central 1. Los valores propios para esta configuración son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$, el segundo valor propio mayor es $\lambda_{2st} = -1$.

II.2.3. Redes con acoplamiento irregular

Topología de redes sin nodo aislado o maestro

En una red con acoplamiento irregular la matriz laplaciana no tiene una forma definida, por lo que sus propiedades son diferentes para cada configuración de acoplamiento. En la

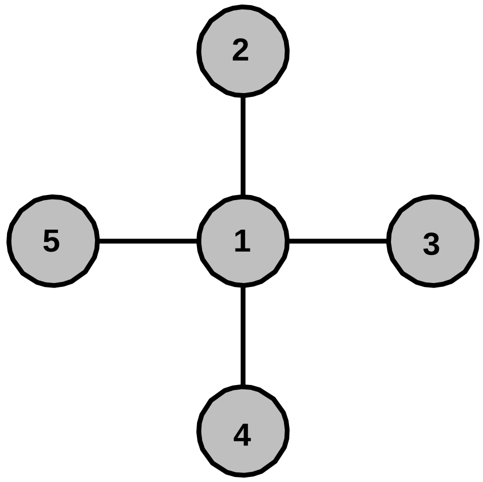

Figura 7: Grafo **G** para una red de 5 nodos con acoplamiento en estrella y cuyo nodo central es el nodo 1.

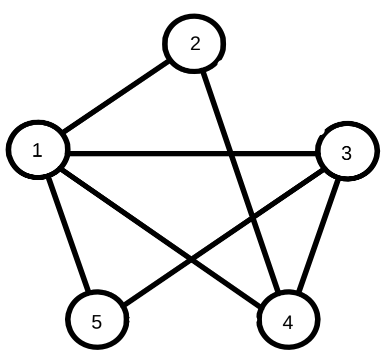

Figura 8: Red con topología irregular con $N = 5$ nodos.

figura 8 podemos ver una red de 5 nodos con configuración de acoplamiento irregular. La matriz de adyacencia de esta red es

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de grado,

$$\mathbf{D}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz laplaciana es obtenida por

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G}) = & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

la matriz de acoplamiento para esta red es

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1.5858$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -4$, $\lambda_5 = -5$, entonces el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1.5858$.

Topología de redes con nodo aislado o maestro

Una red compleja con una configuración de acoplamiento irregular con un nodo maestro, tiene un nodo aislado, que no recibe influencia o información del resto de los nodos de la red, es decir, sólo tiene señales de salida pero no entrada, el cual, en caso de alcanzar sincronización,

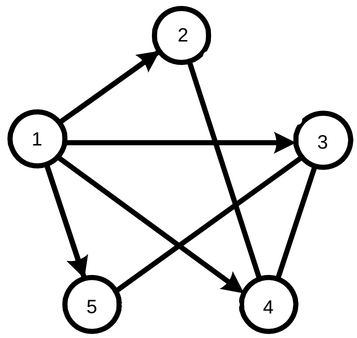

Figura 9: Red con topología irregular con $N = 5$, en la cual, el nodo 1 se considerada aislado o maestro.

impone su dinámica, por compleja que esta sea (punto fijo, periódica, caótica, hipercaótica, etc.), al resto de los nodos que conforman la red. Para este caso, la matriz laplaciana no toma una forma definida (al igual que el caso del acoplamiento irregular sin nodo aislado) y por tanto, sus propiedades son diferentes para cada configuración de acoplamiento.

En la figura 9 se muestra una red de 5 nodos con acoplamiento irregular, en la cual, el nodo 1 corresponde al nodo aislado o maestro. La matriz laplaciana para esta configuración de acoplamiento se calcula como sigue:

$$\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

finalmente, la matriz de acoplamiento es

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1.58$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = -4.41$, de donde podemos ver que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$.

Redes de mundo pequeño

Un grafo **G** es una representación gráfica de un sistema complejo, con el fin de comprender las características y comportamiento de este sistema. Los grafos aleatorios surgieron en un intento de hacer una representación más exacta de los sistemas reales. Aunque por simple intuición se puede ver claramente que muchas redes complejas reales no son ni totalmente regulares ni completamente aleatorias. En 1998, Watts y Strogatz en un esfuerzo por describir la transición entre un grafo regular y un grafo aleatorio presentaron el concepto de redes del *mundo pequeño* [Watts y Strogatz 1998]. Es notable que el fenómeno de mundo pequeño sea más común de lo que se piensa. Una experiencia interesante es que dos personas desconocidas tienen muchas veces amigos en común sin saberlo. Ciertamente, todos nosotros nos conectamos a través de cadenas sociales (redes sociales). La manifestación más popular de lo que llamamos efecto de un mundo pequeño, es lo que conocemos por el concepto de "seis grados de separación", concepto descubierto por el psicólogo Milgram [Milgram 1967]. El concluyó, a través de un sencillo experimento, que seis fue el número promedio de relaciones de la mayoría de pares de pobladores dentro de Estados Unidos. Después concluyó que una separación similar caracteriza la relación de dos pobladores dentro del planeta.

Una característica común de las gráficas aleatorias y de los modelos del mundo pequeño, es la distribución de la conectividad de las redes en un valor promedio y un decaimiento exponencial. Tales redes son llamadas "redes exponenciales". Una red exponencial es homogénea por naturaleza, cada nodo tiene aproximadamente el mismo número de conexiones.

En la figura 10 podemos ver dos formas de construir una red de mundo pequeño. A continuación se muestra como construir el modelo original Watts y Strogatz (figura 10a).

- Se parte de una red en configuración de vecino más cercano, la cual, consiste de N nodos conectados en anillo y cada nodo i es adyacente a sus nodos vecinos $i \pm 1$, $i \pm 2, ...,$ $i \pm K \diagup 2$ con K par. Para tener una red esparcida pero conectada todo el tiempo, se considera en general $N \gg K \gg \ln(N) \gg 1$.

- Se recablean los nodos aleatoriamente con probabilidad p. Esto quiere decir, que se toma un final de cada conexión y se conecta a otro nodo escogido aleatoriamente de la red, con la limitante de que no puede haber más de dos conexiones entre dos nodos de la red y que ningún nodo de la red debe conectarse con él mismo. Este proceso repetidamente introduce $pNK \diagup 2$ conexiones de rango largo, las cuales, conectan nodos que de otra manera nuca serían vecinos. Entonces variando la probabilidad p, se tiene una transición entre el orden (es decir $p = 0$) y completamente aleatorio (es decir $p = 1$).

El modelo de Watts y Strogatz tiene el problema de que en su construcción pueden quedar bloques de nodos aislados por lo que Newman y Watts [1999a; 1999b] propusieron una variante, la cual, es conocida como el *modelo NW de mundo pequeño*. La construcción del modelo NW es muy parecida a la del modelo SW, establece conexiones de manera aleatoria entre los nodos de la red pero sin romper las conexiones existentes, ver figura 10b. Este modelo NW con $p = 0$ se reduce a la red de vecino más cercano original y con $p = 1$ tendremos una red con acoplamiento global.

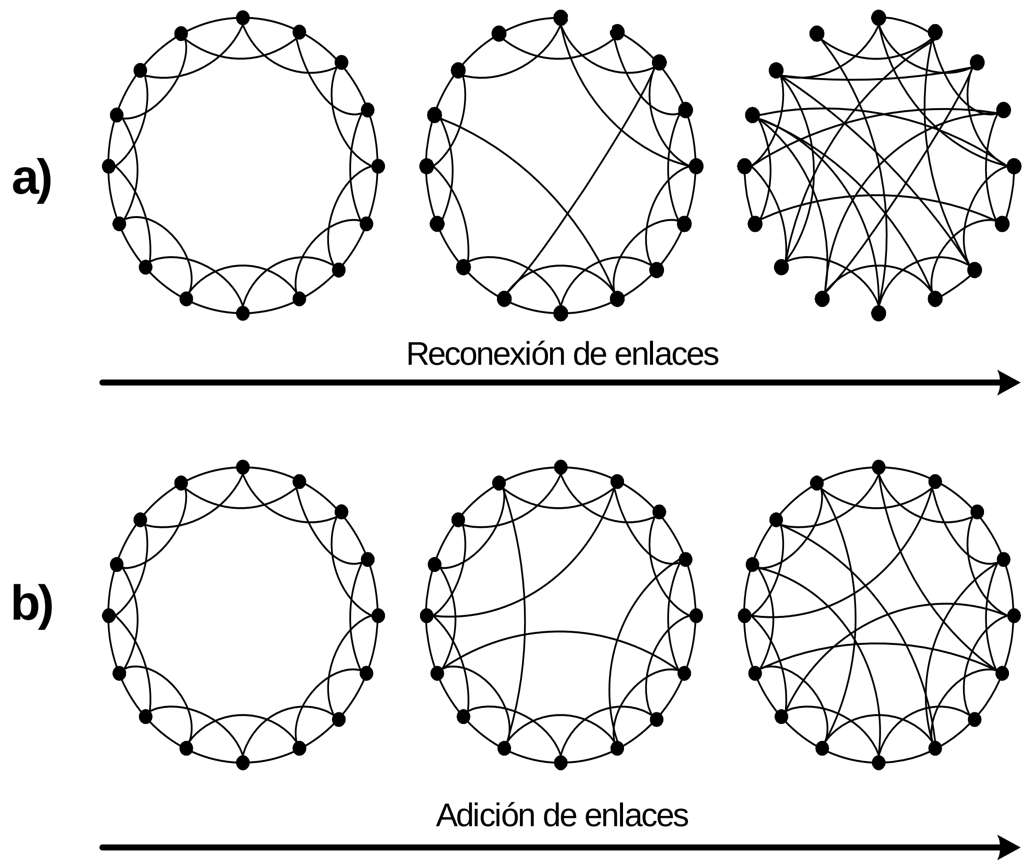

Figura 10: Dos formas de construcción de una red de mundo pequeño [Watts y Strogatz 1998].

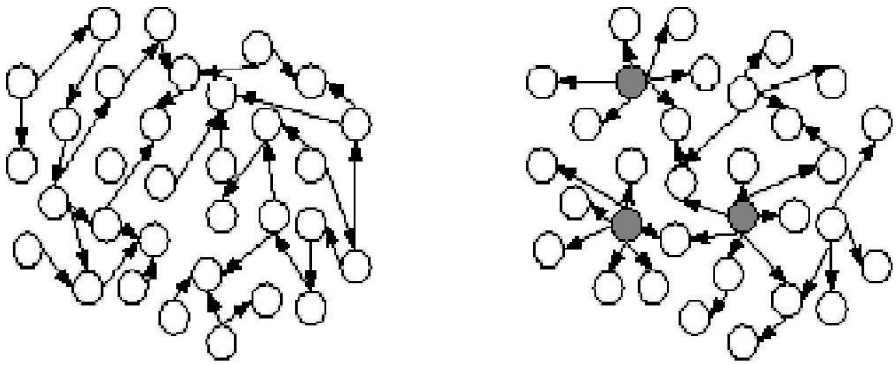

Figura 11: (a) Red aleatoria, (b) red de libre escala.

Redes de libre escala

Otro descubrimiento reciente en el campo de las redes complejas, es la observación de un gran número de *redes de libre escala* (internet, www, redes metabólicas, etc.), éstas no son homogéneas por naturaleza, es decir, pocos nodos tienen muchas conexiones y muchos nodos tienen pocas conexiones. Las redes de libre escala se caracterizan por tener pocos nodos altamente enlazados, que actúan como centros que conectan muchos de los otros nodos a la red, este tipo de redes siguen una distribución de ley de potencia [Barabási y Albert 1999; Barabási *et al.* 1999]. Una ilustración de la diferencia entre una red de libre escala y una red aleatoria se muestra en la figura 11.

Barabási y Albert [1999] propusieron un nuevo modelo de red, llamado modelo BA de libre escala. Ellos argumentan que los otros modelos fallan en tomar en cuenta dos importantes atributos de las redes reales. En primer lugar, la mayoría de las redes reales están en crecimiento mediante la adición de nuevos nodos, por ejemplo, la red de páginas en internet (www) está en continuo crecimiento al crearse nuevas páginas web. En segundo lugar, los dos modelos anteriores establecen una probabilidad uniforme al crear nuevas conexiones, lo cual no es realista. En la red de páginas en internet, por ejemplo, las páginas con más conexiones tienen más probabilidad de obtener más conexiones, este es el fenómeno llamado "*el rico se hace más rico*". El algoritmo para el modelo BA de libre escala se ilustra en la figura 12 y se describe a continuación [Hayes 2000].

- *Crecimiento*: Empezando con un número pequeño de nodos (m_0), en cada paso de tiempo, un nuevo nodo se agrega a la red y se conecta a $m \leq m_0$ nodos ya existentes.

- *Conexión preferencial*: Al elegir los nodos a los cuales el nuevo nodo se conectará, se supone que la probabilidad Π_i de que el nuevo nodo se conecte al nodo i depende del grado k_i del nodo i, de tal manera que

$$\prod\nolimits_i = \frac{k_i}{\sum\limits_j k_j}.$$

Después de t pasos, este algoritmo genera una red compleja con $N = t + m_0$ nodos y mt conexiones.

II.3. Conclusiones

En este capítulo se reportó de manera simplificada, la teoría empleada en este trabajo de tesis para sincronizar redes complejas en diferentes topologías. Las redes complejas que se consideran en este trabajo, están compuestas por N nodos idénticos, linealmente acoplados a través de la primer variable de estado de cada nodo. Se mencionaron las condiciones necesarias para determinar la constante de acoplamiento c que asegure la sincronía de la red. La sincronización de una red compleja independientemente de su configuración (regular o irregular) se determina a partir del segundo valor propio más grande (λ_2) de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}(\mathbf{G})$.

También se mostraron las diferentes topologías de acoplamiento más comunes en las redes complejas. Las redes complejas se pueden clasificar en dos categorías según su configuración de acoplamiento, redes irregulares y redes regulares (global, anillo y estrella). Una red con acoplamiento global, tiene una matriz de acoplamiento siempre con un valor propio en 0 y los restantes en -N. Entonces el segundo valor propio mayor de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G})$ siempre será $\lambda_{2gc} = -N$. Entonces podemos ver que disminuye a $-\infty$ cuando $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} (\lambda_{2gc}) = -\infty.$$

Esto quiere decir que la sincronización no depende del número de nodos de la red. Para una red con acoplamiento en anillo, se mostró que para un valor fijo de K el segundo valor propio mayor (λ_{2nc}) de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G})$ converge a 0 cuando $N \to \infty$. De esto se puede deducir que, sí se incrementa arbitrariamente el número de nodos de la red se puede perder la sincronía de la misma. Se mostró que para una red en configuración en estrella los valores propios de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G})$ son $\{0, -N, -1, \cdots, -1\}$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_{2st} = -1$. De lo anterior, podemos observar que el valor de λ_{2st} no depende del número de nodos de la red, por lo que esta red sincronizará independientemente del número de nodos de la red compleja. Una red compleja con acoplamiento irregular tienen una matriz de acoplamiento sin una forma definida, por lo tanto, sus propiedades cambian para cada configuración en particular. Si sincroniza o no dependerá del segundo valor propio (λ_2) de su matriz de acoplamiento particular $\mathbf{A}(\mathbf{G})$.

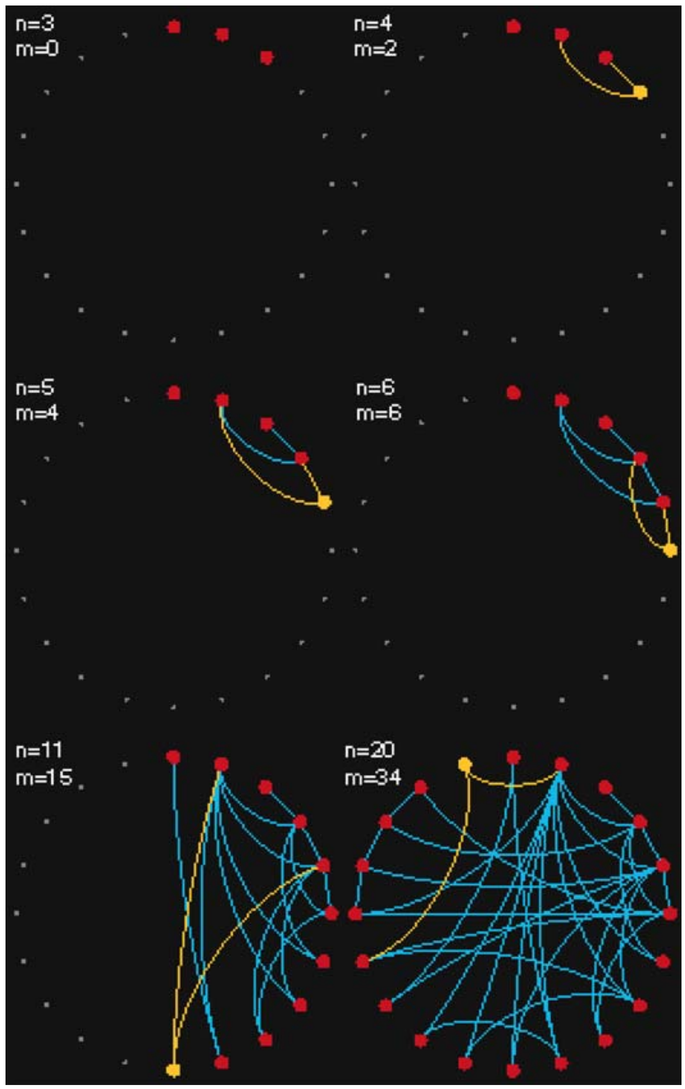

Figura 12: Evolución del modelo Barabasi-Albert de libre escala con $m_0 = 3$, $m = 2$ ([Hayes 2000]).

Capítulo III

Nodos: oscilador de Chua con retardo de tiempo y red neuronal celular (CNN)

En este capítulo, se presentarán los sistemas dinámicos que se utilizan como nodos para la construcción de redes en diferentes topologías y su posterior sincronización, que se abordará en los siguientes capítulos. Primero describimos el oscilador de Chua con retardo de tiempo, el cual, es un oscilador hipercaótico y de dimensión infinita, después se verán las redes neuronales celulares (CNNs). Se mostrará a través de simulaciones numéricas empleando Matlab, la generación de atractores caóticos para determinados intervalos de los parámetros de bifurcación.

III.1. Oscilador de Chua con retardo de tiempo

El oscilador de Chua con retardo de tiempo se muestra en la figura 13. Este circuito es una variación del oscilador de Chua, al cuál, se le agregó una retroalimentación con retardo de tiempo. Con esta modificación el oscilador de Chua con retardo de tiempo presenta múltiples exponentes de Lyapunov positivos y por tanto, genera dinámicas hipercaóticas.

Se realizaron simulaciones numéricas con el oscilador de Chua con retardo de tiempo, las ecuaciones normalizadas de este oscilador se muestran a continuación [Cruz-Hernández 2004; Wang *et al.* 2001]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_1 + x_2 - f(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 - \beta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\sigma x_1(t-\tau)) \end{bmatrix} \tag{14}$$

con función no lineal dada por

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|). \tag{15}$$

Los valores de los parámetros utilizados para las simulaciones numéricas son: $\alpha = 10$, $\beta = 19.53$, $\gamma = 0.1636$, $a = -1.4325$, $b = 0.7831$, $\sigma = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$ y $\tau = 0.001$. En la figura 14 se muestran los atractores hipercaóticos generados por el oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15).

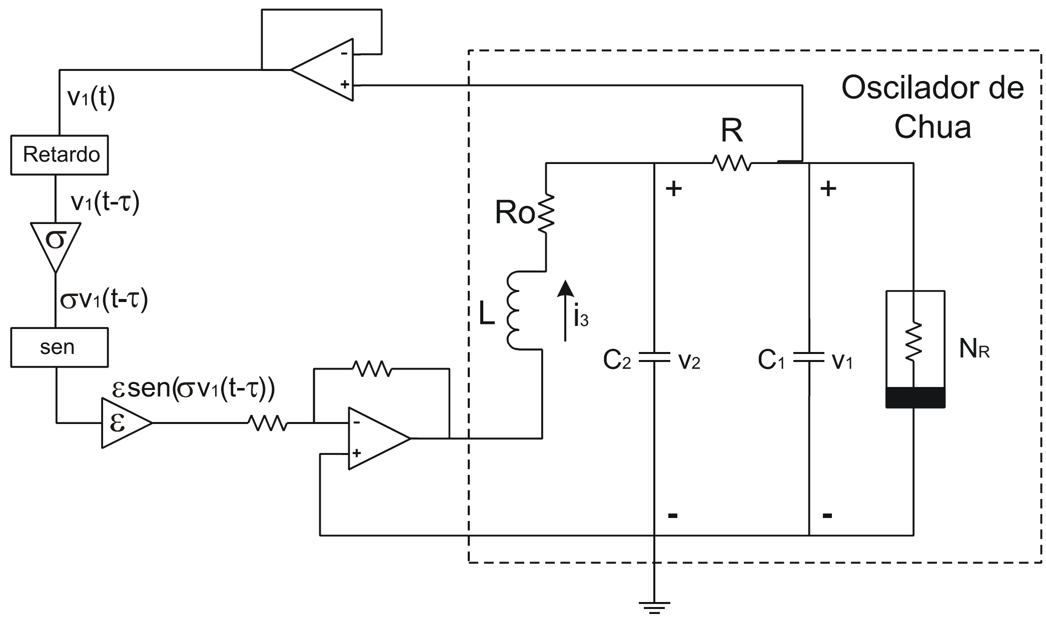

Figura 13: Circuito electrónico del oscilador de Chua con retardo de tiempo [Cruz-Hernández 2004].

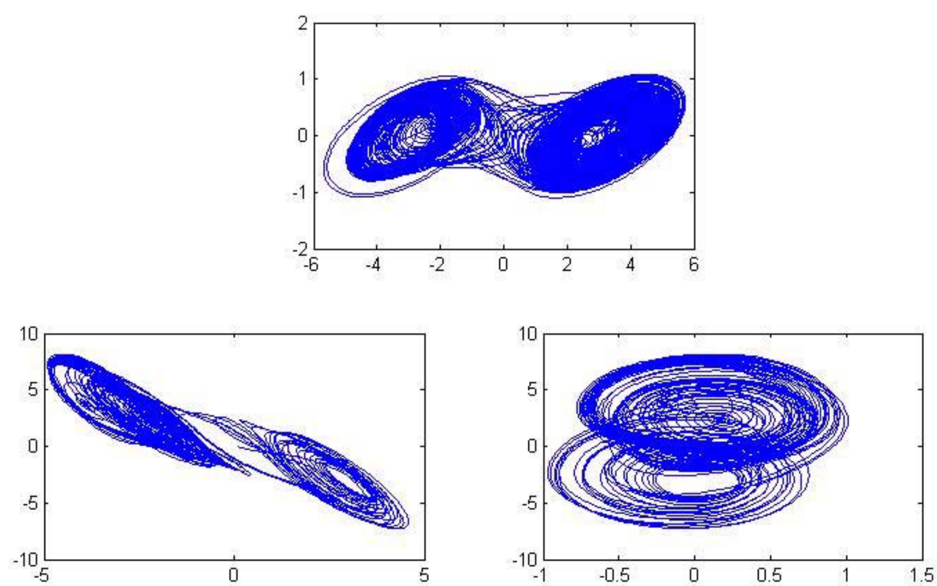

Figura 14: Atractores hipercaóticos generados por el oscilador de Chua con retardo.

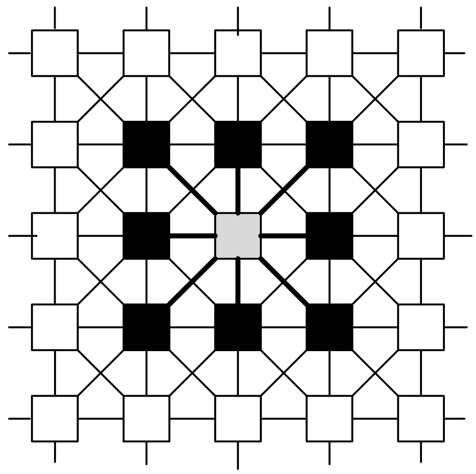

Figura 15: Red neuronal celular con radio de vecindad $r = 1$; la célula gris tiene 9 vecinos (las 8 células negras y ella misma).

III.2. Red neuronal celular (CNN) caótica

Las redes complejas se encuentran en una gran cantidad de sistemas naturales y artificiales. En los sistemas biológicos se tienen, colonias de insectos, las cadenas tróficas (predador y presa), las neuronas del cerebro, etc. Ejemplos de redes artificiales son la internet, la red de páginas web (www), la red de transmisión eléctrica, redes sociales, redes de osciladores caóticos, etc. Un caso especial son las redes neuronales artificiales, modelos matemáticos que intentan emular el comportamiento del cerebro humano. Hay muchos tipos de redes neuronales artificiales, entre ellas están las redes neuronales celulares (CNNs por sus siglas en inglés), la CNN es un sistema no lineal definido por un acoplamiento entre sistemas dinámicos idénticos llamados células [Chua y Yang 1988]. Las CNNs tienen muchas aplicaciones en procesamiento de imágenes, video, robótica, visión biológica, etc. [Werblin *et al.* 1994]. Además, las CNNs pueden bajo ciertas condiciones de trabajo, mostrar un conjunto grande de dinámicas extremadamente complejas (caos e hipercaos). Cuando esto último ocurre, se dice que es una red neuronal caótica e hipercaótica, respectivamente. En el contexto de las CNNs, hablaremos de células refiriéndonos a los nodos que conforman las redes complejas.

Una CNN es un arreglo espacial de células acopladas, cada célula es un sistema dinámico, con una entrada y estados evolucionando acorde a sus leyes dinámicas [Chua 1998]. La arquitectura de una CNN en dos dimensiones, tiene matemáticamente en cada célula C_{ij}, una ubicación espacial (i, j), constituye un sistema dinámico, en el cual, los estados evolucionan acorde a algunas ecuaciones de estado prescritas. Sus dinámicas son acopladas sólo entre vecinos que se encuentren dentro de una esfera de influencia $N(i, j)$ centrada en (i, j) (ver figura 15).

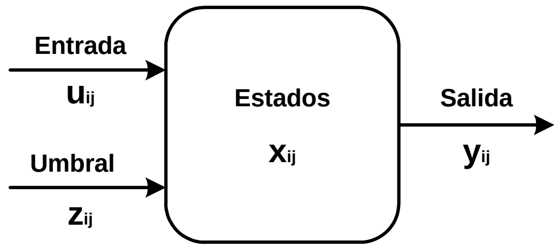

Figura 16: Célula aislada: entrada u_{ij}, umbral z_{ij}, estados $x_{ij} \in \mathbf{R}^x$ y salida y_{ij} para una CNN en dos dimensiones.

Las variables para una célula son: la entrada $u_{ij}(t) \in R^u$, el umbral $z_{ij}(t) \in R^z$, los estados $x_{ij}(t) \in R^x$ y la salida $y_{ij}(t) \in R^y$ (ver figura 16). Una CNN se dice que está aislada, si ésta no está acoplada o conectada con otras células, es decir $u_{ij}(t) = 0$.

En este trabajo doctoral, asumiremos que las células aisladas C_{ij} son idénticas y por simplicidad, consideraremos que $z_{ij}(t)$ es una constante. Además, asumimos que para cualquier $x_{ij}(t_0)$ en $t = t_0$, cualquier umbral $z_{ij}(t)$ y cualquier entrada $u_{ij}(t)$, los estados de cada célula aislada C_{ij} evolucionan para $t \geq t_0$ como un conjunto no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ij} &= -x_{ij}(t) + \sum_{k,l \in N(i,j)} A_{ij;kl} \cdot y_{kl}(t) + \sum_{k,l \in N(i,j)} B_{ij;kl} \cdot u_{kl}(t) + z_{ij}, \\ y_{ij} &= g_{ij}(x_{ij}) \end{aligned} \tag{16}$$

donde los índices k y l representan una célula que pertenece a la vecindad $N(i,j)$ de la célula en la posición (i,j). $g_{ij}(\cdot)$ es una función acotada por arriba y por abajo. El conjunto de matrices y el umbral ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y z), que contienen los pesos de la red neuronal, se llama la plantilla clonadora y define el comportamiento de la red.

En este trabajo doctoral se utilizará la siguiente versión simplificada de la ecuación (16):

$$\begin{aligned} C_i \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{1}{R_i} x_i + \sum_{j=1}^{3} T_{ij} v_j + I_i, \\ v_i &= g(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{17}$$

donde $\mathbf{T} = (T_{ij})$ es una matriz de 3×3 llamada matriz de pesos o conexión que describe la fuerza de las conexiones entre neuronas. En [Yang y Li 2006] se muestra que bajo ciertas condiciones el modelo (17) exhibe comportamiento caótico. Se utilizará el siguiente modelo matemático simplificado de (17) para la construcción de las redes complejas [Yang y Li 2006]:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + T\tanh(\mathbf{x}), \tag{18}$$

donde $\mathbf{x} \in R^n$ es el vector de estados, $\tanh(\mathbf{x}) = (\tanh(x_1),\ \tanh(x_2),\ \tanh(x_3))^T$ y

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Los valores de la matriz de pesos (19) son: $T_{11} = 1.49$, $T_{12} = 2$, $T_{13} = 1$, $T_{21} = -2$, $T_{22} = 1.7$, $T_{23} = 0$, $T_{31} = 4$, $T_{32} = -4$ y $T_{33} = 2$. El modelo simplificado de CNN en 3D definido por (18)-(19) genera un atractor caótico. En la figura 17 se muestra el atractor caótico generado por la CNN en 3D, está proyectado en el espacio (x_1, x_2, x_3), cuando se usan las siguientes condiciones iniciales $x_1(0) = 0.14$, $x_2(0) = -0.5$ y $x_3(0) = 0.1$.

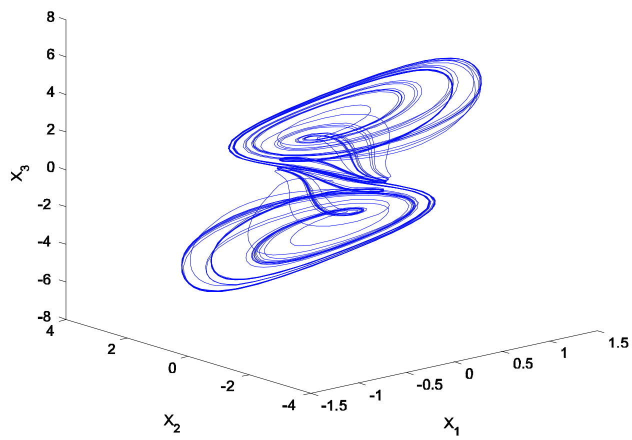

Figura 17: Atractor caótico de la CNN en 3D proyectado en el espacio (x_1, x_2, x_3).

III.3. Conclusiones

En este capítulo, se describieron los modelos matemáticos: oscilador de Chua con retardo de tiempo y red neuronal celular (CNN), que serán considerados como nodos hipercaótico y caótico, respectivamente; para construir las redes en diferentes topologías de acoplamiento y su posterior sincronización y aplicación a las comunicaciones seguras en diferentes redes.

Capítulo IV

Sincronización de redes en diferentes topologías con perturbaciones paramétricas

En este capítulo, se presenta la sincronización de un conjunto de osciladores de Chua con retardo de tiempo (14)-(15), actuando como nodos y operando en régimen hipercaótico. Se consideran redes complejas con osciladores de Chua con retardo de tiempo, los cuales, serán acoplados a través de la primer variable de estado de cada nodo. Se ilustran redes de osciladores de Chua con retardo de tiempo en diferentes arquitecturas de acoplamiento, como son: global, anillo y estrella. Además, se presenta un estudio numérico de robustez de estas configuraciones frente a perturbaciones paramétricas.

IV.1. Análisis numérico de robustez frente a perturbaciones paramétricas

En esta sección se presenta un análisis numérico de la robustez de la sincronía de redes frente a perturbaciones paramétricas. Este análisis se realizará para diferentes topologías: global, anillo, anillo abierto o cadena, estrella e irregular. Utilizado al oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15) como nodo fundamental de la red, utilizando la ecuación de la red dinámica vista en el capítulo 2, (1)-(2), las ecuaciones de la red quedan de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{i1} + x_{i2} - f(x_{i1})) \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} \\ -\beta x_{i2} - \gamma x_{i3} - \beta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\sigma x_{i1}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\sum\limits_{j=1}^{5} a_{ij}\mathbf{\Gamma} x_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

con

$$f\,(x_{i1}) = bx_{i1} + \frac{1}{2}\,(a-b)\,(|x_{i1}+1| - |x_{i1}-1|)\,.$$

Utilizando el teorema 1 de sincronización, encontramos que con $d = -20$ el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de un nodo aislado (14)-(15). Entonces para sincronizar la red se debe de cumplir la condición $c \geq \left|\frac{d}{\lambda_2}\right|$, en la figura 18 se muestra el estado x_1 con $d = -20$. Entonces la constante de acoplamiento debe cumplir la siguiente

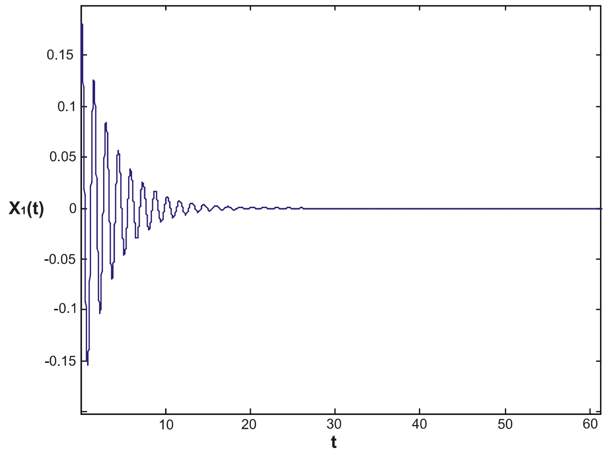

Figura 18: Estado x_1 del oscilador de Chua con retardo de tiempo (nodo aislado), con $d = -20$.

desigualdad,

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right|.$$

IV.1.1. Red con acoplamiento global

Se realizaron simulaciones numéricas de una red de 5 nodos (14)-(15) con acoplamiento global. La matriz de acoplamiento para esta red es

$$\mathbf{A}_{gc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

el segundo valor propio mayor de esta matriz de acoplamiento es $\lambda_{2gc} = -5$, entonces, la constante de acoplamiento c, se obtiene de la siguiente manera

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 4.$$

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento, quedan de la siguiente manera. Para el primer nodo N_1:

$$N_1 \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{11} + x_{12} - f(x_{11})) + u_{11} \\ x_{11} - x_{12} + x_{13} \\ -\beta x_{12} - \gamma x_{13} - \beta \varepsilon s \operatorname{sen}(\sigma x_{11}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} \right., \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f(x_{11}) &= bx_{11} + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x_{11}+1| - |x_{11}-1|\right), \\ u_{11} &= c(a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + a_{14}x_{41} + a_{15}x_{51}), \\ u_{11} &= c(-4x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}), \end{aligned} \tag{22}$$

para el segundo nodo N_2:

$$N_2 \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{21} + x_{22} - f(x_{21})) + u_{21} \\ x_{21} - x_{22} + x_{23} \\ -\beta x_{22} - \gamma x_{23} - \beta \varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{21}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} \right., \tag{23}$$

$$\begin{aligned} f(x_{21}) &= bx_{21} + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x_{21}+1| - |x_{21}-1|\right), \\ u_{21} &= c(a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + a_{24}x_{41} + a_{25}x_{51}), \\ u_{21} &= c(x_{11} - 4x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}), \end{aligned} \tag{24}$$

las ecuaciones del tercer nodo N_3:

$$N_3 \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \\ \dot{x}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{31} + x_{32} - f(x_{31})) + u_{31} \\ x_{31} - x_{32} + x_{33} \\ -\beta x_{32} - \gamma x_{33} - \beta \varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{31}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} \right., \tag{25}$$

$$\begin{aligned} f(x_{31}) &= bx_{31} + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x_{31}+1| - |x_{31}-1|\right), \\ u_{31} &= c(a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} + a_{34}x_{41} + a_{35}x_{51}), \\ u_{31} &= c(x_{11} + x_{21} - 4x_{31} + x_{41} + x_{51}), \end{aligned} \tag{26}$$

el cuarto nodo N_4:

$$N_4 \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_{41} \\ \dot{x}_{42} \\ \dot{x}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{41} + x_{42} - f(x_{41})) + u_{41} \\ x_{41} - x_{42} + x_{43} \\ -\beta x_{42} - \gamma x_{43} - \beta \varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{41}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} \right., \tag{27}$$

$$\begin{aligned} f(x_{41}) &= bx_{41} + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x_{41}+1| - |x_{41}-1|\right), \\ u_{41} &= c(a_{41}x_{11} + a_{42}x_{21} + a_{43}x_{31} + a_{44}x_{41} + a_{45}x_{51}), \\ u_{41} &= c(x_{11} + x_{21} + x_{31} - 4x_{41} + x_{51}), \end{aligned} \tag{28}$$

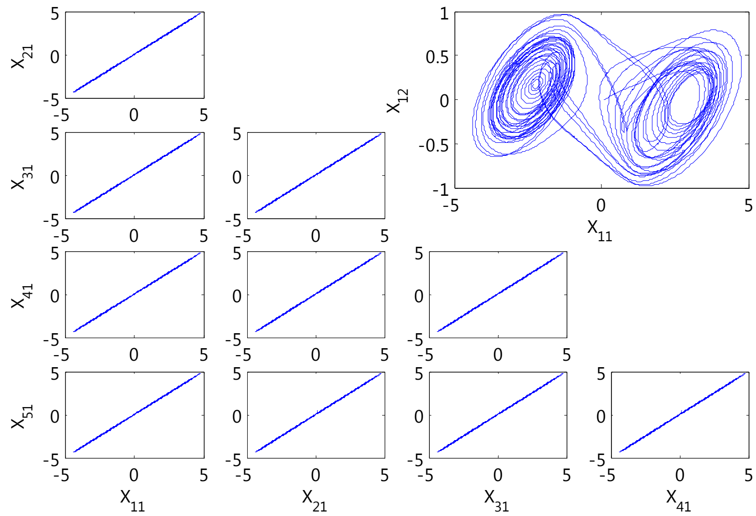

Figura 19: Diagramas de fase de los estados x_{i1} de los nodos de la red global de 5 nodos. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

por último, para el quinto nodo N_5:

$$N_5 \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_{51} \\ \dot{x}_{52} \\ \dot{x}_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{51} + x_{52} - f(x_{51})) + u_{51} \\ x_{51} - x_{52} + x_{53} \\ -\beta x_{52} - \gamma x_{53} - \beta\varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{51}\,(t-\tau)) \end{bmatrix} \right. , \tag{29}$$

$$\begin{aligned} f(x_{51}) &= bx_{51} + \frac{1}{2}(a-b)\left(|x_{51}+1| - |x_{51}-1|\right), \\ u_{51} &= c(a_{51}x_{11} + a_{52}x_{21} + a_{53}x_{31} + a_{54}x_{41} + a_{55}x_{51}), \\ u_{51} &= c(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} - 4x_{51}). \end{aligned} \tag{30}$$

En la figura 19 se muestran los diagramas de fase entre los estados x_{i1} de los 5 nodos, también se muestra la proyección del atractor hipercaótico en el plano (x_{11}, x_{12}). La constante de acoplamiento que se utilizó para esta simulación es $c = 10$, podemos ver que la red esta sincronizada en el primer estado de todos los nodos de la red.

A continuación variamos uno de los parámetros en uno de los nodos, para ver el comportamiento dinámico de la sincronía de la red. Primero se modificó el parámetro ε, el cual, normalmente es $\varepsilon = 0.2$. Se creó un vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5),$$

para representar al parámetro ε de cada nodo en la red, es decir, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$ corresponde al valor del parámetro para los nodos $N_1, N_2, \ldots, N_5$ de la red, respectivamente.

De esta manera, se modificó el parámetro ε del nodo N_1 como sigue

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2),$$

los resultados se muestran en las figuras 20, 21, 22 y 23. En las figuras anteriores podemos ver que el nodo N_1, al que se modificó el valor del parámetro ε, es el único nodo que perdió sincronía en la red.

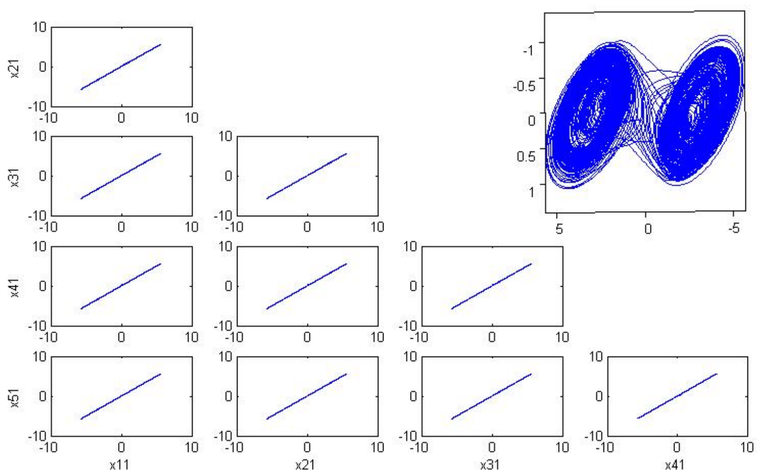

Figura 20: Diagramas de fase de la red global de 5 nodos con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Se realizaron simulaciones modificando el parámetro ε en los demás nodos, uno por uno, pero como en esta configuración de acoplamiento global el comportamiento de que sólo los estados del nodo perturbado son los que pierden sincronía se repite en todos los nodos, se omitirán las gráficas correspondientes. También se realizaron simulaciones modificando los parámetros σ y τ en cada uno de los nodos de la red, pero como los resultados fueron cualitativamente similares al caso anterior, es decir, sólo pierde sincronía el nodo perturbado, se omitirán las gráficas correspondientes.

Conclusiones

En esta configuración de acoplamiento global, sólo pierden sincronía los estados del nodo perturbado, por lo que se puede decir, que la red no pierde sincronía y por tanto, la configuración de acoplamiento global es robusta frente a variaciones en los parámetros.

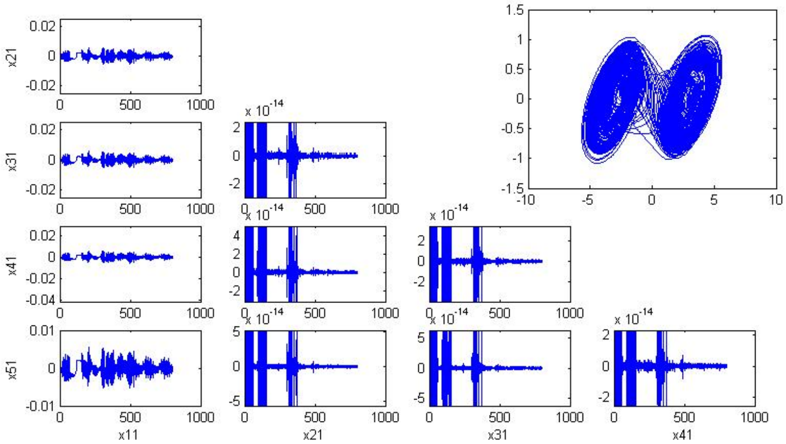

Figura 21: Gráficas de los errores de los primeros estados de los nodos con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

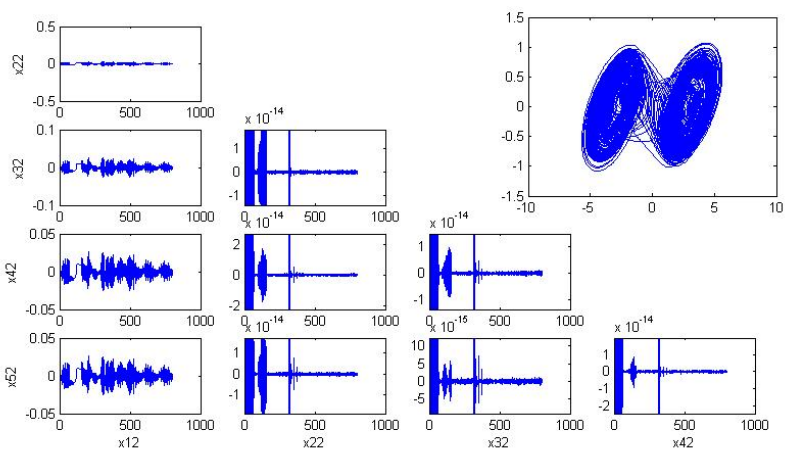

Figura 22: Gráfica de los errores de sincronía entre los segundos estados de los nodos, con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

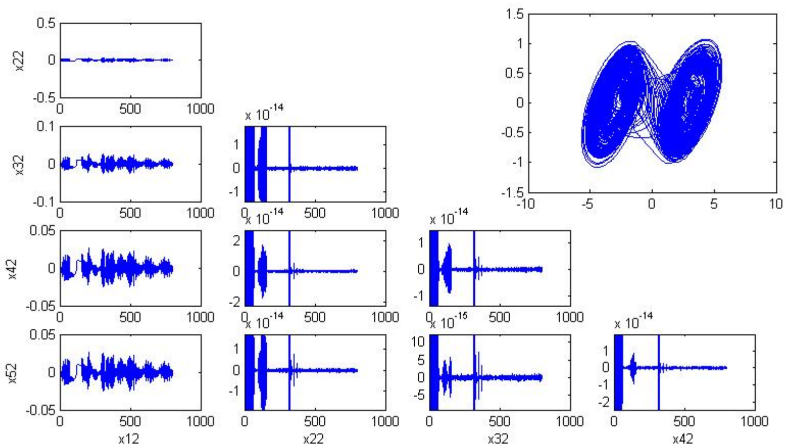

Figura 23: Gráfica de los errores de sincronía entre los terceros estados de los nodos, con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

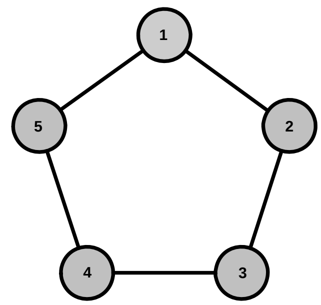

Figura 24: Red de 5 nodos en configuración en anillo.

IV.1.2. Red con acoplamiento en anillo

Red sin nodo aislado o maestro

En esta sección, mostraremos la simulación numérica de una red con acoplamiento en anillo sin nodo aislado o maestro, empleando como nodos caóticos al oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15). En la figura 24 se puede ver la topología de esta red.

La matriz de acoplamiento para una red en anillo de 5 nodos con $K = 2$ es la siguiente

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

el segundo valor propio de esta matriz de acoplamiento es

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{2}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{5}\right) = -1.382.$$

La constante de acoplamiento es entonces

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_{2nc}} \right| = 14.4371,$$

sin embargo para las simulaciones se seleccionó $c = 15$.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento en anillo son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= c(-2x_{11} + x_{21} + x_{51}), \\
u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{31}), \\
u_{31} &= c(x_{21} - 2x_{31} + x_{41}), \\
u_{41} &= c(x_{31} - 2x_{41} + x_{51}), \\
u_{51} &= c(x_{11} + x_{41} - 2x_{51}).
\end{aligned} \tag{31}
$$

En la figura 25 se muestran los diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red. En esta figura se puede ver que la red sincroniza, aunque como se muestra en (13), conforme aumenta el número de nodos esta red pierde sincronía, ya que el segundo valor propio de su matriz de acoplamiento tiende a cero.

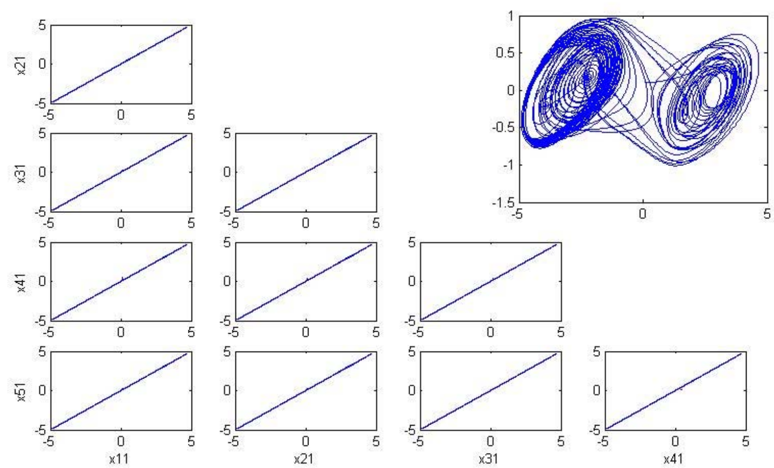

Figura 25: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red acoplada en configuración de anillo con $N = 5$ nodos y $K = 2$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Ahora vamos a variar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ empezando con el nodo N_1 de la siguiente manera $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 26 y 27. De las gráficas anteriores podemos ver que sólo sincronizan los estados de los nodos N_2 con N_5 y N_3 con N_4. El resto de los nodos mantienen un error de sincronía considerable, aunque se mantiene pequeño. Cabe notar que el nodo al que se cambió el parámetro, N_1, es el que mantiene el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error

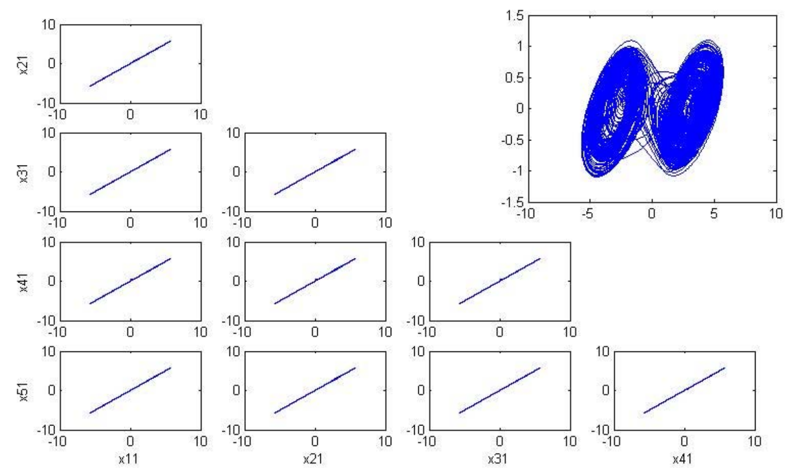

Figura 26: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

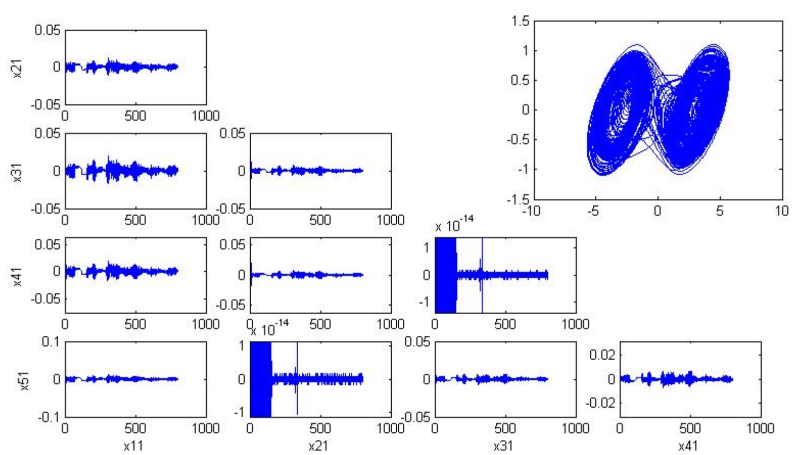

Figura 27: Gráficas de los errores de sincronía entre los segundos estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 27).

Se repitió la simulación anterior para $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.201, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2001, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. Para este caso, no se muestran las gráficas por que los resultados fueron los mismos cualitativamente hablando, sólo se redujo un poco en magnitud el error de sincronía.

El siguiente paso fue variar el parámetro ε_2 en el segundo nodo para ver el comportamiento del sistema, entonces tenemos que $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 28 y 29 se muestran las gráficas de la simulación. De las gráficas anteriores podemos ver que sólo sincronizan los estados de dos pares de nodos, N_1 con N_3 y N_4 con N_5, el resto de los nodos presentan un error de sincronía considerable y el nodo al que se modificó el parámetro es el que tiene el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 29).

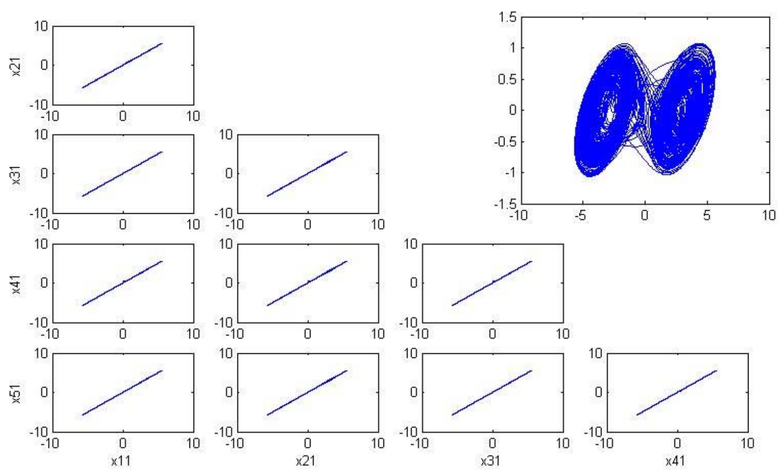

Figura 28: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Nuevamente se cambia el nodo al que se modifica el parámetro para ver qué diferencias hay en el comportamiento de la red. Ahora tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.21, 0.2, 0.2)$. En las figuras 30 y 31 podemos ver el resultado de la simulación con estos parámetros. Ahora sincronizan los estados de los nodos, N_2 con N_4 y N_1 con N_5. El resto de los nodos presentan una error de sincronía considerable y el nodo al que se modificó el parámetro es el que tiene el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y

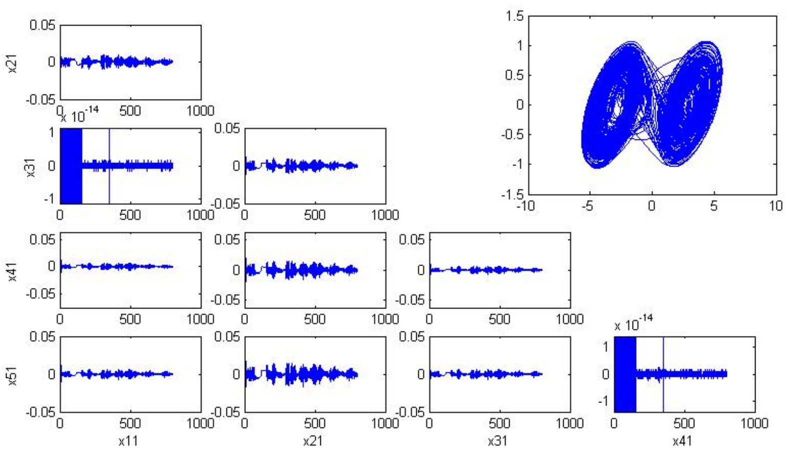

Figura 29: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 31).

Se desplaza el nodo al que se varía el parámetro, ahora será al nodo N_4. El vector de parámetros queda entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2)$. En las figuras 32 y 33 se ven los resultados de la simulación con este cambio de parámetros. En este caso, los estados que sincronizan son de los nodos N_1 con N_2 y N_3 con N_5. Los demás nodos presentan un error de sincronía diferente de cero, siendo el de mayor magnitud el del nodo al que se cambió el parámetro, es decir N_4. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 33).

Finalmente, se varía el parámetro del último nodo N_5. El vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda de la siguiente manera $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. En las figuras 34 y 35 se ven los resultados de la simulación. Nuevamente sincronizan dos pares de nodos, en este caso, N_1 con N_4 y N_2 con N_3 y el nodo al que se cambió el parámetro es el que tiene el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados, debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 35).

Al variar los restantes parámetros del oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15) el comportamiento en la sincronización de las redes es muy similar cualitativamente hablando, por lo que se optó por omitir las respectivas gráficas.

Conclusiones

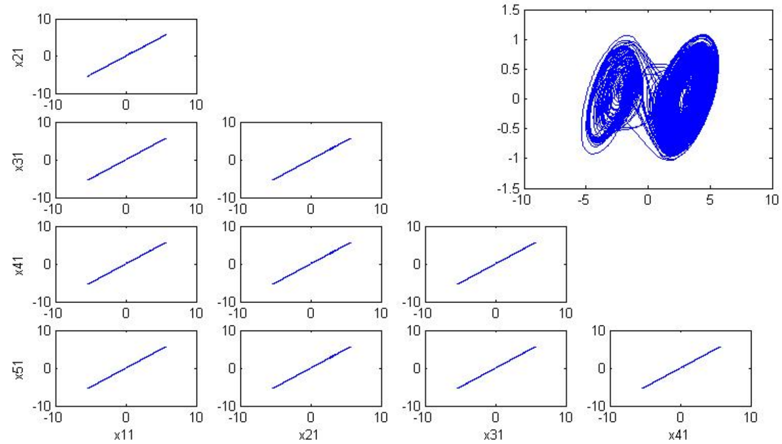

Figura 30: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

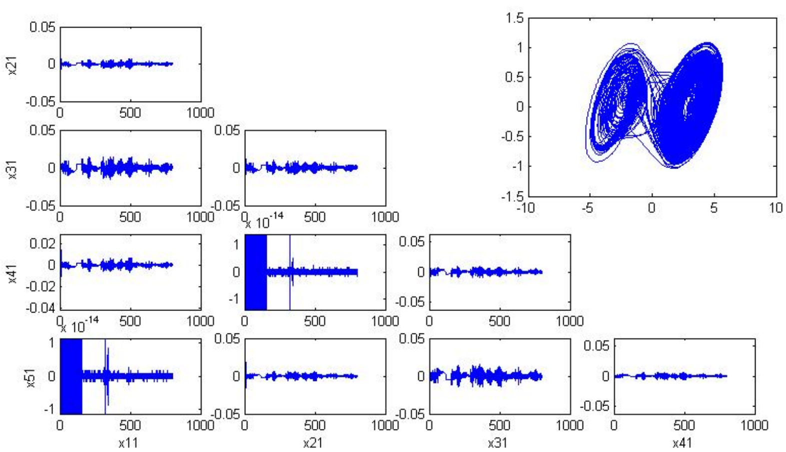

Figura 31: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

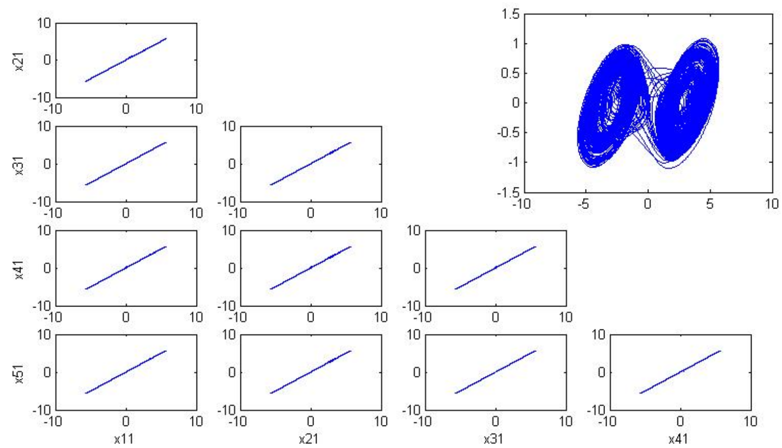

Figura 32: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

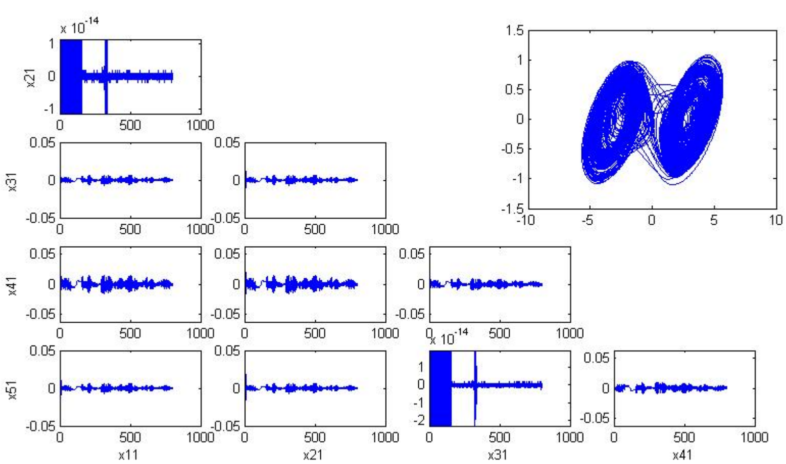

Figura 33: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

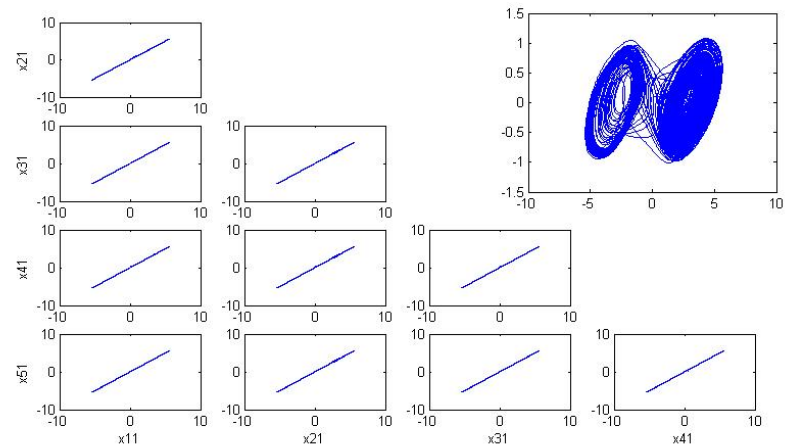

Figura 34: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

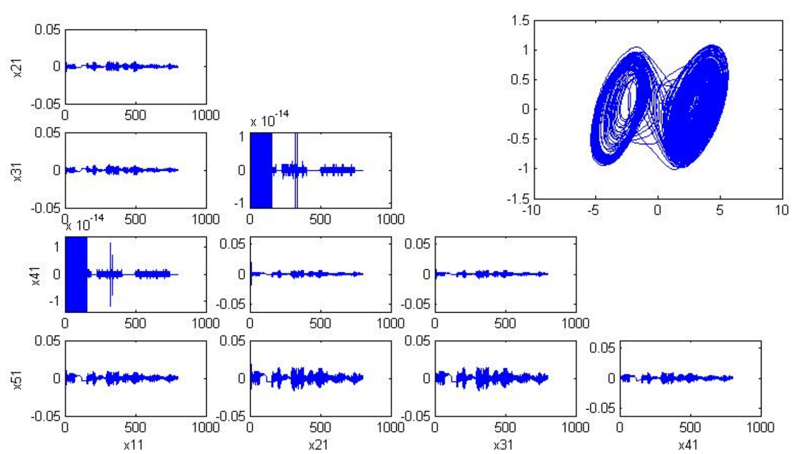

Figura 35: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

De las simulaciones numéricas presentadas, podemos ver que al ir variando el mismo parámetro en cada nodo de la red, la sincronización de la red se comporta de manera parecida, sincronizando los estados de dos pares de nodos cada vez de manera cíclica. Por tanto, podemos concluir que esta configuración de acoplamiento en anillo no es muy robusta a variaciones del parámetro ε.

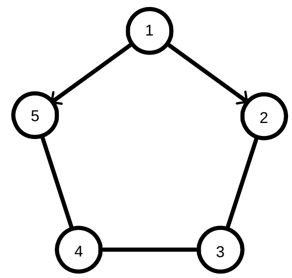

Figura 36: Red de 5 nodos con configuración de acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro.

Red en anillo con nodo aislado o maestro

En esta sección, mostraremos la simulación numérica de una red con acoplamiento en anillo con un sólo nodo aislado o maestro, empleando como nodos caóticos al oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15). En la figura 36 se puede ver la topología de esta red.

En este ejemplo, el nodo N_1 es el nodo aislado o maestro, la matriz de acoplamiento para esta red queda de la forma

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.3820$, $\lambda_3 = -1.3820$, $\lambda_4 = -2.6180$, $\lambda_5 = -3.6180$, de esta forma, el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -0.3820$. Por tanto, la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 52.35,$$

sin embargo, para las simulaciones se tomó el valor de $c = 55$.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento en anillo con nodo maestro N_1 son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red, es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

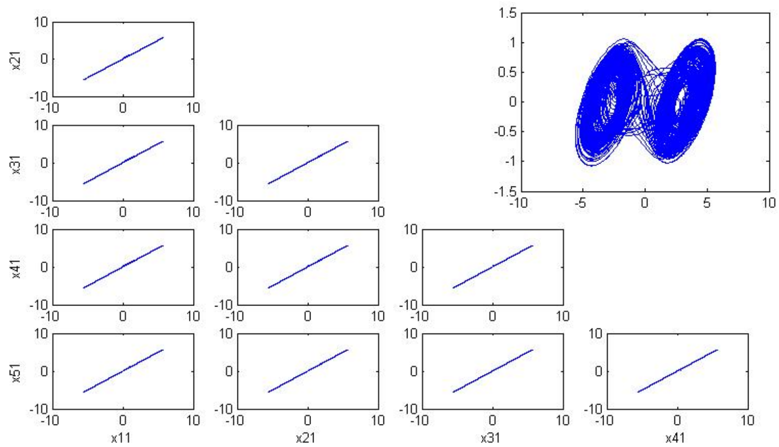

Figura 37: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0, \\ u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{31}), \\ u_{31} &= c(x_{21} - 2x_{31} + x_{41}), \\ u_{41} &= c(x_{31} - 2x_{41} + x_{51}), \\ u_{51} &= c(x_{11} + x_{41} - 2x_{51}). \end{aligned} \tag{32}$$

Primero veremos la simulación cuando el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ no se modifica, es decir $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.2)$. En las figuras 37 y 38 se ilustran los resultados de la simulación. Podemos ver que todos los estados de los nodos de la red sincronizan. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 38).

Ahora modificaremos el parámetro ε_1 en el primer nodo de la red, es decir $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 39 y 40 Podemos ver que los estados de los nodos N_2 con N_5 y N_3 con N_4 sincronizan. Los estados del resto de los nodos no sincronizan, pero sus errores de sincronía se mantienen acotados con un valor pequeño. Cabe notar, que este comportamiento es parecido al de la red acoplada en anillo sin nodo maestro. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 40).

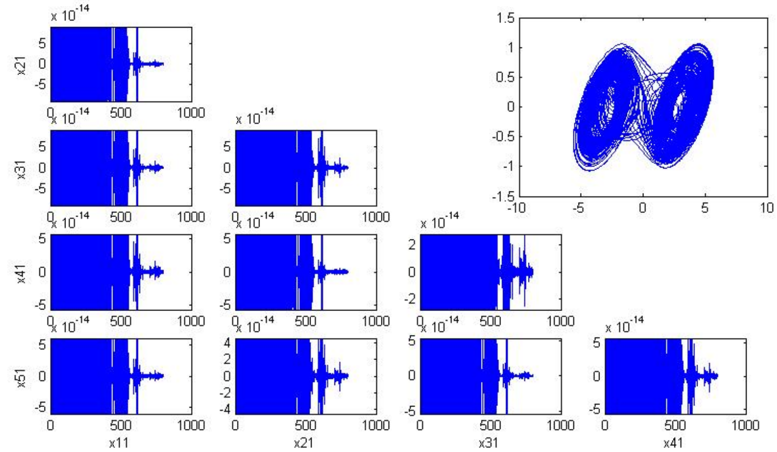

Figura 38: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$.También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

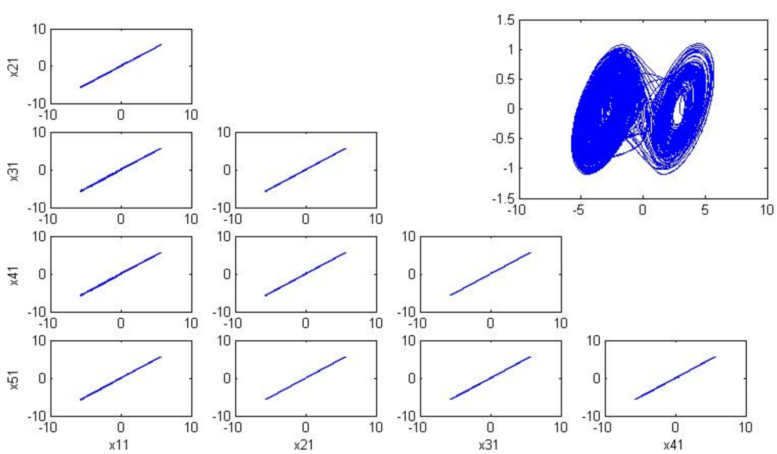

Figura 39: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

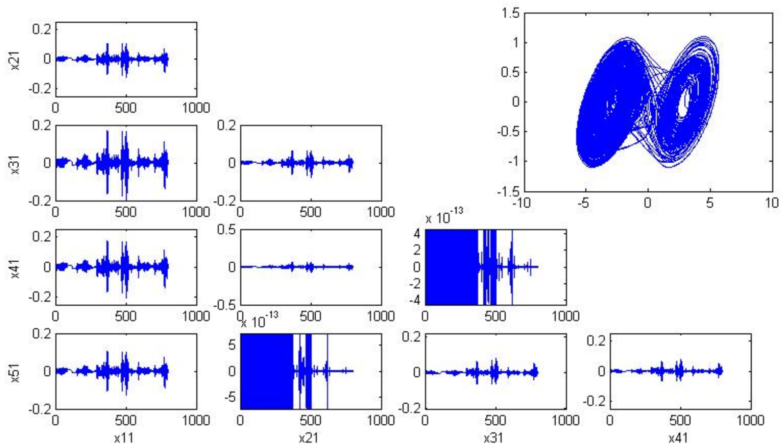

Figura 40: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

El siguiente paso es modificar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el siguiente nodo N_2, quedando entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.21, 0.2, 0.2, 0.2)$. En las figuras 41 y 42 podemos ver los resultados de la simulación. En este caso, ninguno de los estados de los nodos de la red logra sincronizar y los estados del nodo modificado son los que tienen el error de sincronía mayor. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 42).

Cambiamos ahora el parámetro del nodo N_3, tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.21, 0.2, 0.2)$. En las figuras 43 y 44 se pueden ver los resultados de la simulación. Otra vez no sincroniza la red. Aunque los errores de sincronía se mantiene acotados. Los estados del nodo modificado son los que tienen el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 44).

Ahora modificaremos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_4, entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.21, 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 45 y 46. Nuevamente no sincroniza la red. Aunque los errores de sincronía se mantiene acotados. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 46).

Cambiamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_5, tenemos entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.21)$. En las figuras 47 y 48 podemos ver los resultados de la simulación. En este

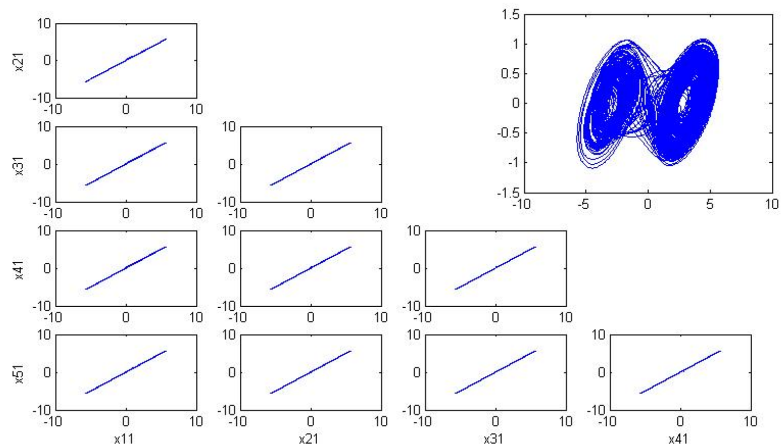

Figura 41: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

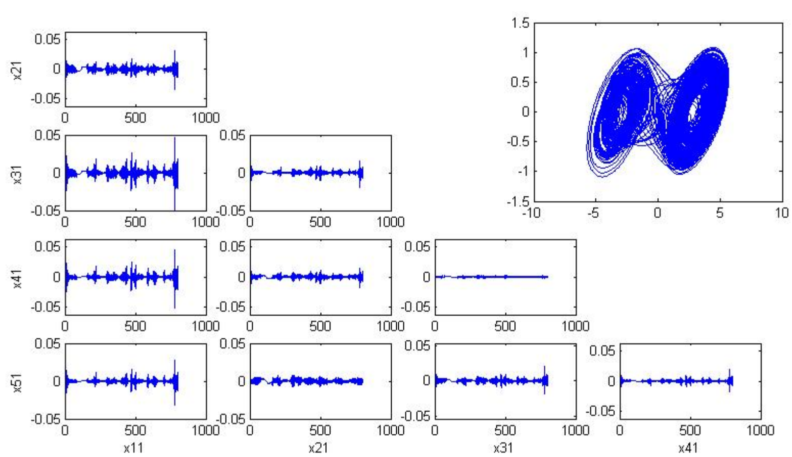

Figura 42: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

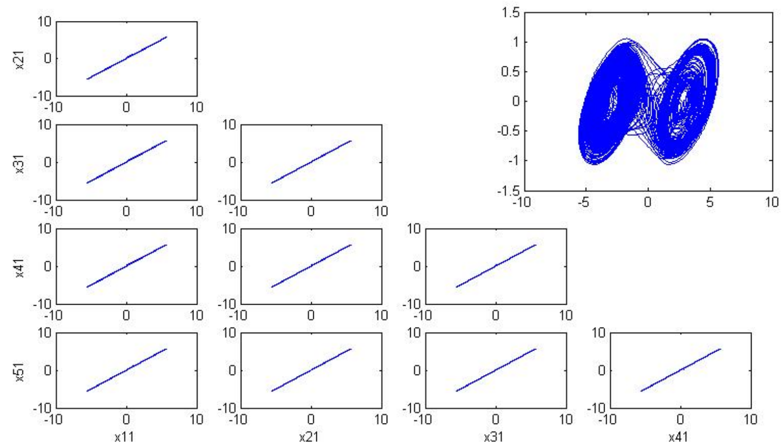

Figura 43: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

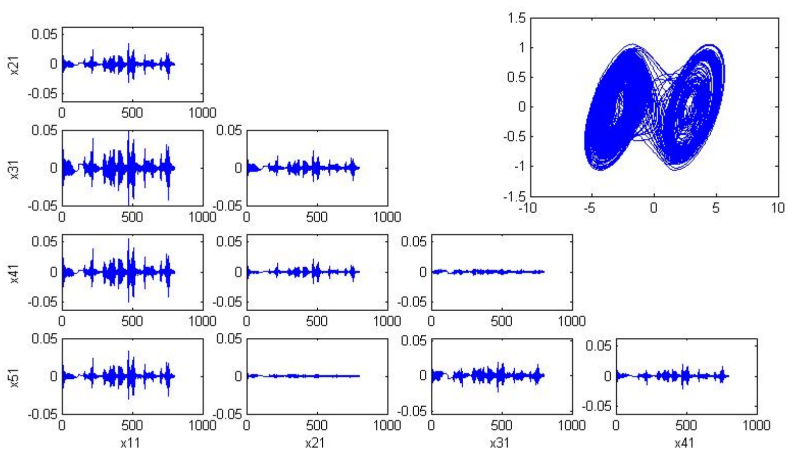

Figura 44: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

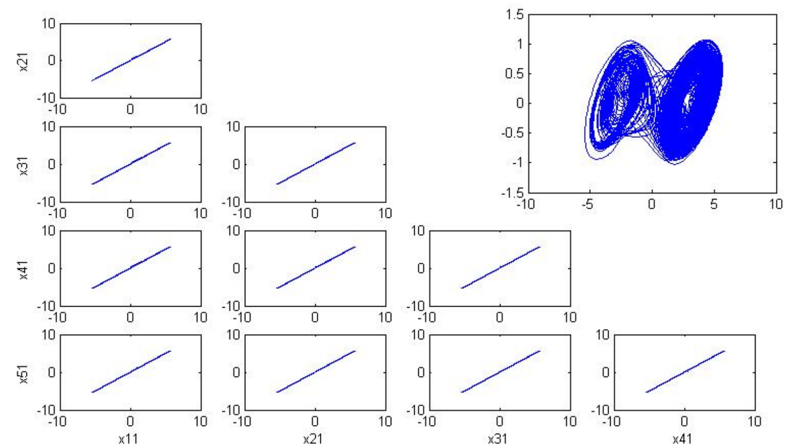

Figura 45: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

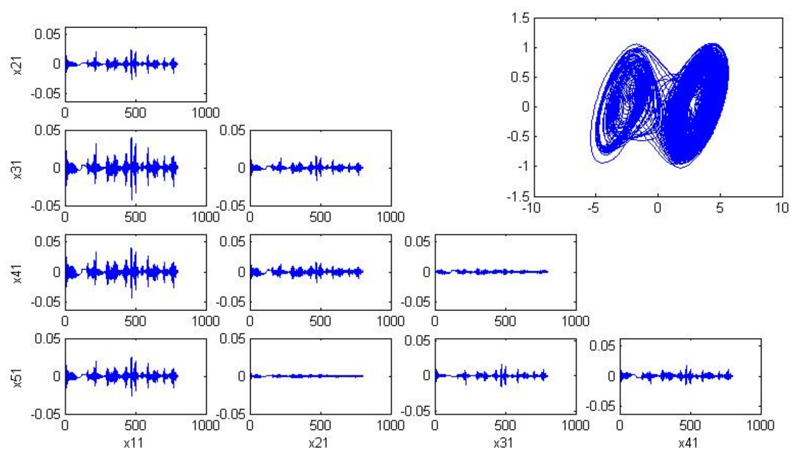

Figura 46: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

último caso, tampoco sincroniza ninguno de los estados de los nodos de la red, con los errores de sincronía acotados. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 48).

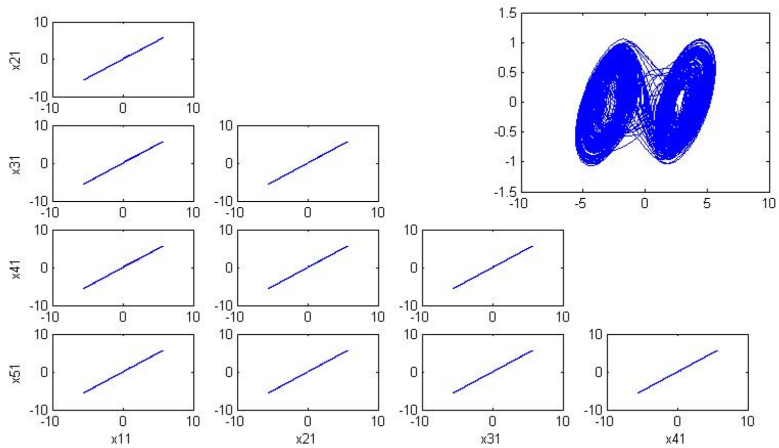

Figura 47: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Conclusiones

Podemos apreciar de las simulaciones numéricas presentadas en esta sección, que esta configuración de acoplamiento en anillo con nodo aislado o maestro N_1, con una variación pequeña en un parámetro de uno de sus nodos pierde totalmente la sincronía, sólo en el caso, en el que se varía el parámetro en el nodo N_1 (maestro) logran sincronizar dos pares de nodos, de manera parecida que en la configuración de anillo sin nodo aislado o maestro. En conclusión, esta configuración de acoplamiento no es robusta a cambios en los parámetros.

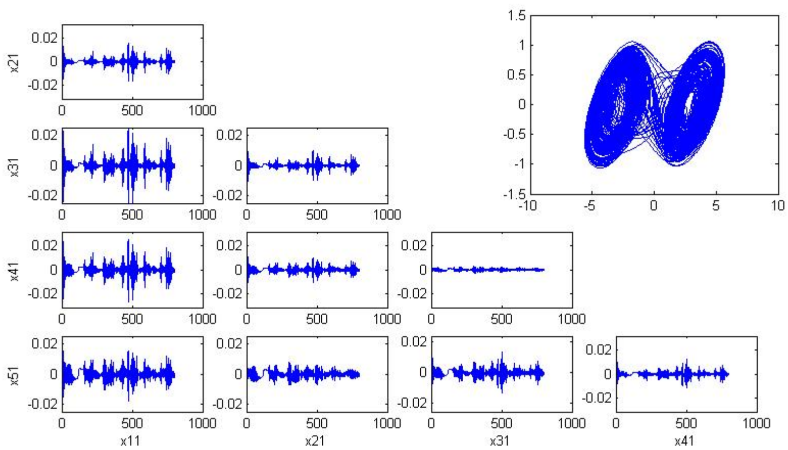

Figura 48: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo con el nodo N_1 como nodo aislado o maestro, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

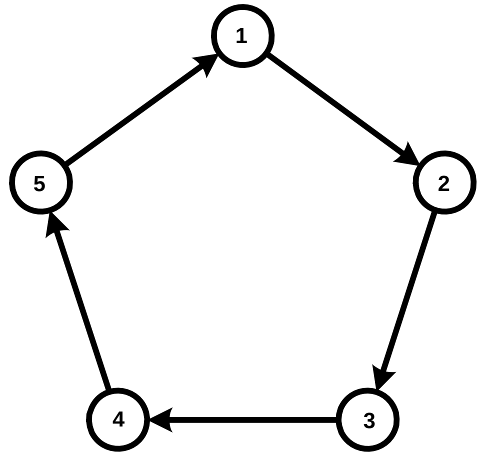

Figura 49: Red en anillo de 5 nodos en configuración maestro y esclavo.

Red en anillo en configuración maestro y esclavo

Ahora mostraremos la simulación de una red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo. En esta configuración, el nodo N_1 es maestro del nodo N_2, el nodo N_2 es maestro del nodo N_3, el nodo N_3 es maestro del nodo N_4, el nodo N_4 es maestro del nodo N_5 y el nodo N_5 es maestro del nodo N_1. En la figura 49 se muestra la topología de la configuración de la red.

La matriz de acoplamiento queda de la forma

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.6910 + 0.9511i$, $\lambda_3 = -0.6910 - 0.9511i$, $\lambda_4 = -1.8090 + 0.5878i$, $\lambda_5 = -1.8090 - 0.5878i$, por lo que la parte real del segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -0.6910$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 29,$$

sin embargo para las simulaciones se tomó el valor de $c = 30$.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$\begin{aligned} u_{11} &= c(-x_{11} + x_{51}), \\ u_{21} &= c(x_{11} - x_{21}), \\ u_{31} &= c(x_{21} - x_{31}), \\ u_{41} &= c(x_{31} - x_{41}), \\ u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}). \end{aligned} \tag{33}$$

Ahora se mostrarán los resultados de la simulación sin modificar ningún parámetro, es decir, $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 50 y 51 se muestran los resultados de la simulación con estos parámetros. En estas gráficas podemos ver que todos los estados de los nodos de la red sincronizan. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 51).

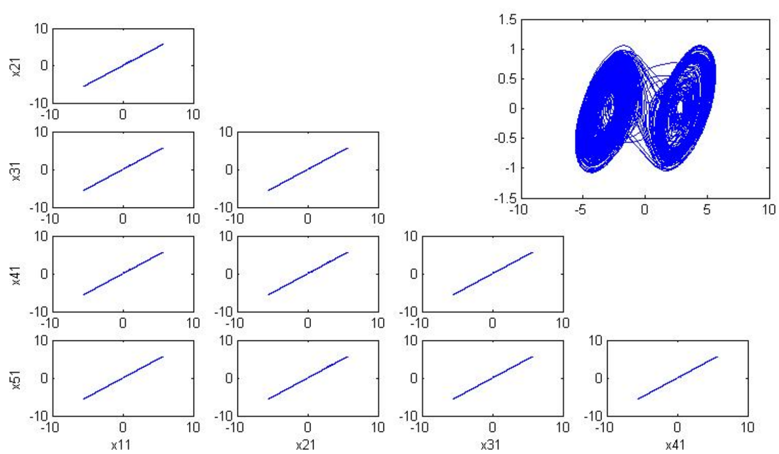

Figura 50: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$ y $K = 2$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

El siguiente paso, es modificar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ empezando con el nodo N_1, quedando el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ como sigue $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 52 y 53 se

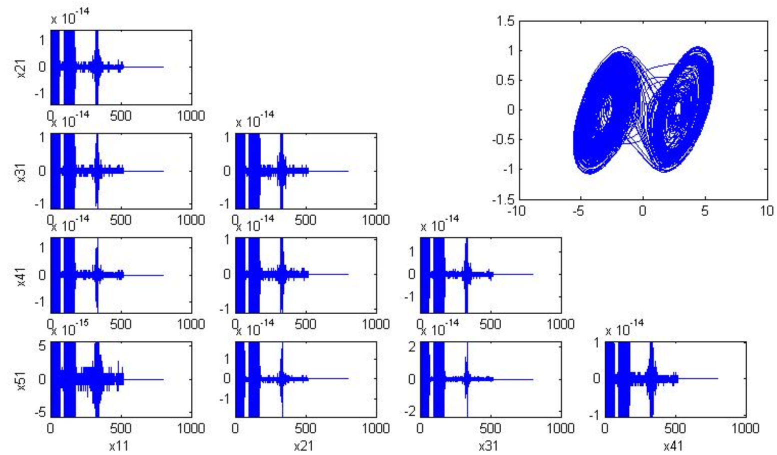

Figura 51: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$ y $K = 2$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

muestran los resultados de la simulación con estos valores de parámetros. Podemos ver que ninguno de los estados de los nodos logra sincronizar. Aunque los errores de sincronía se mantienen acotados. También se puede notar que los estados del nodo al que se modificó el parámetro son los que tienen el mayor error de sincronía. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 53).

El siguiente paso es modificar el parámetro ε en el nodo N_2, entonces el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda como $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 54 y 55 se muestran los resultados de la simulación con el nuevo cambio de parámetro ε. No sincroniza ninguno de los estados de los nodos pero con error de sincronía acotado. El error de sincronía más grande lo tienen los estados del nodo al que se modificó el parámetro. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 55).

Cambiamos de nodo al que se modifica el parámetro, ahora será el nodo N_3, quedando el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ como $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 56 y 57 se muestran los resultados de la simulación con estos parámetros. No sincroniza ningún estado de los nodos de la red, con errores de sincronía acotados. Nuevamente el error de sincronía mayor es el de los estados del nodo al que se ha modificado el parámetro. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 57).

A continuación variamos el vector parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_4, es decir $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,$

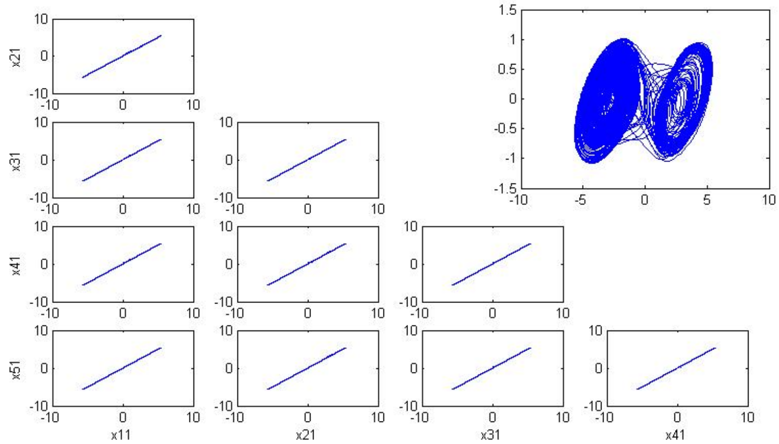

Figura 52: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$.También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

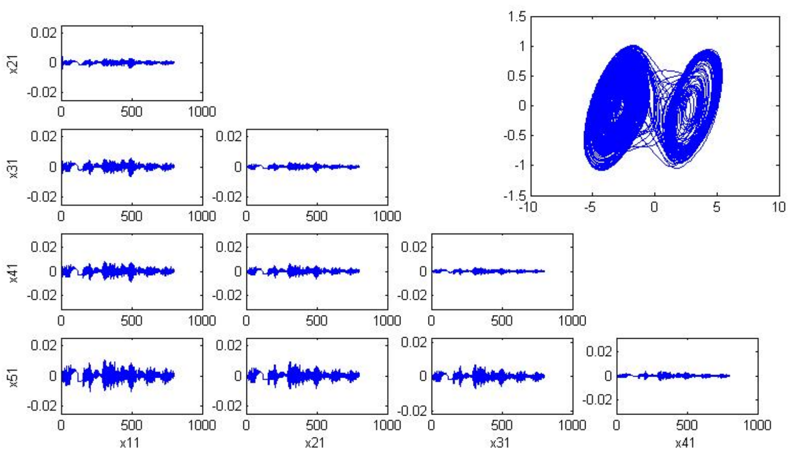

Figura 53: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

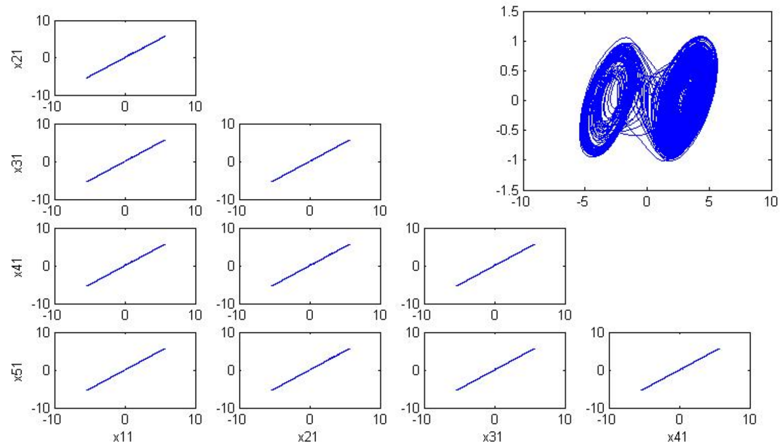

Figura 54: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

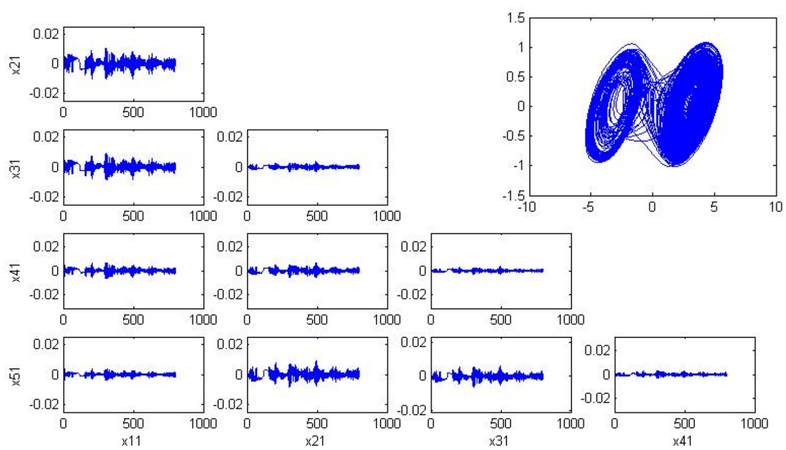

Figura 55: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

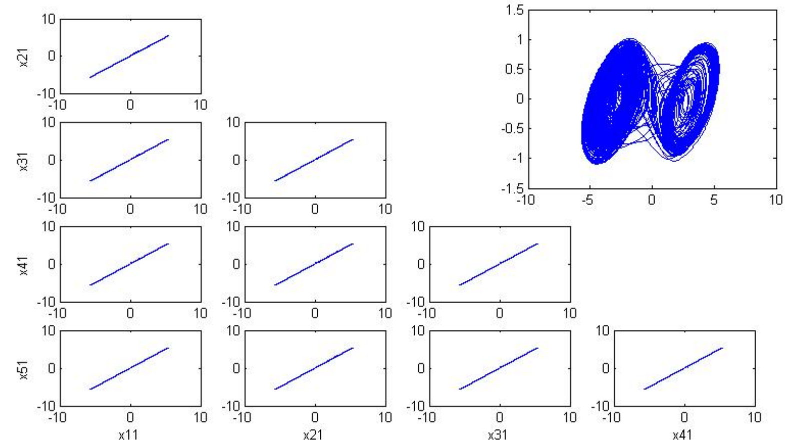

Figura 56: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

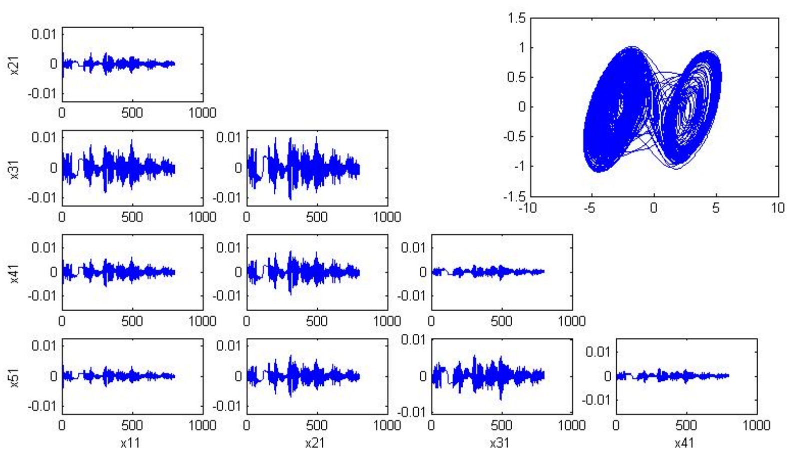

Figura 57: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

0.2, 0.21, 0.2). Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 58 y 59. También en este caso, no sincronizan los estados de los nodos de la red, el error de sincronía es más grande en los estados del nodo modificado. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 59).

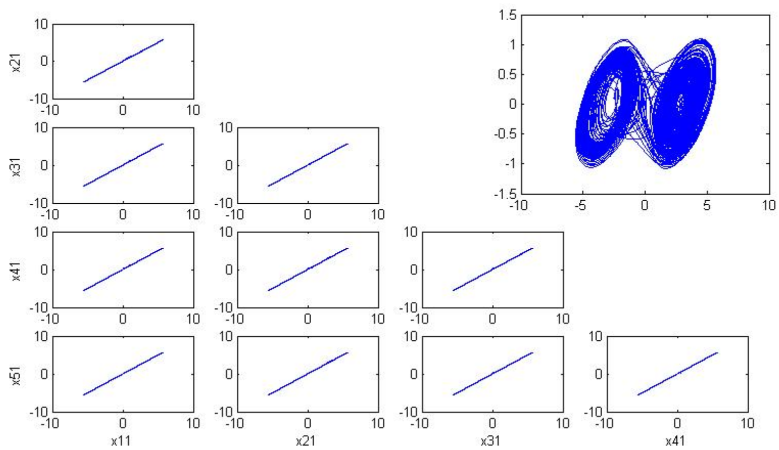

Figura 58: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

También en este caso, no sincronizan los estados de los nodos de la red, el error de sincronía es más grande en los estados del nodo modificado.

Por último, modificamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_5, entonces tenemos el vector $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.21)$. A continuación se muestran los resultados de la simulación con estos parámetros, ver figuras 60 y 61. Se puede ver que en este caso no sincroniza la red. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 61).

Conclusiones

Como conclusión, se puede decir que esta configuración no es robusta a variaciones de los parámetros, es decir, a perturbaciones en los parámetros ya que con un nodo que varíe ligeramente sus parámetros, se pierde la sincronía de toda la red. Aunque sería interesante

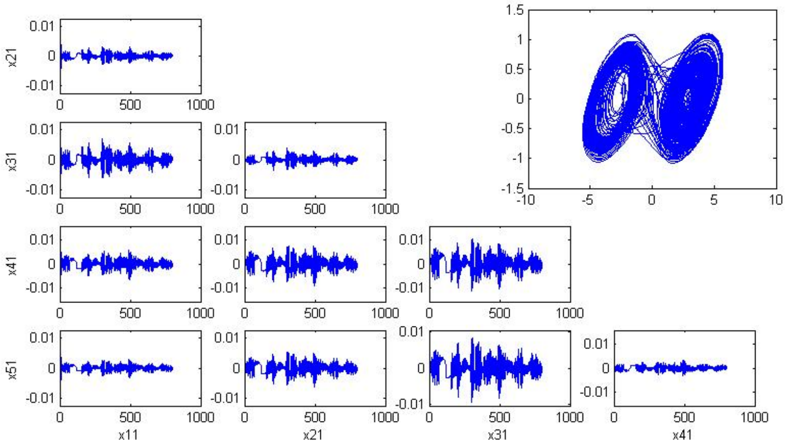

Figura 59: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

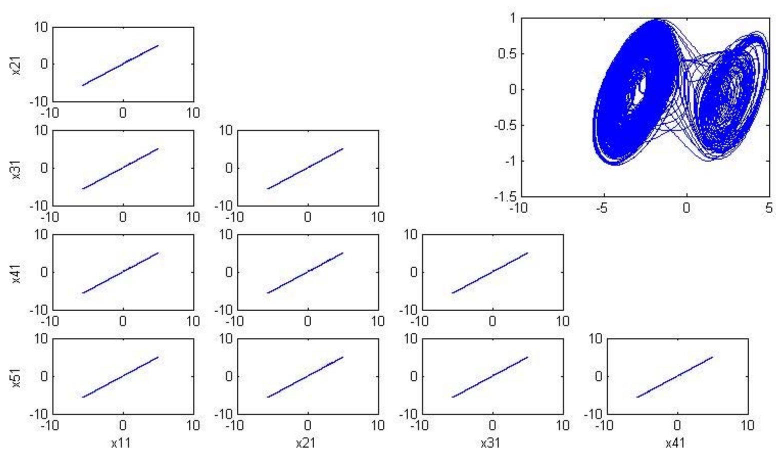

Figura 60: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

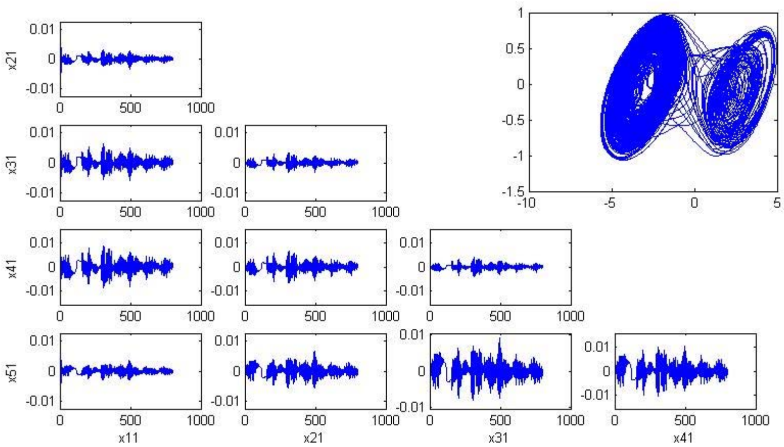

Figura 61: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo en configuración maestro y esclavo, con $N = 5$, $K = 2$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

pensando en aplicaciones en conmutación caótica, es decir, en transmisión encriptada de señales digitales variando un parámetro de un nodo de la red.

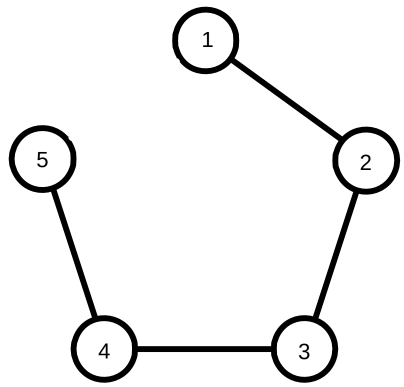

Figura 62: Red en anillo abierto (cadena) de 5 nodos.

Red en anillo abierto (cadena) sin nodo maestro

En esta sección, se muestran las simulaciones numéricas de una red anillo abierto en uno de sus lados con lo que se obtiene una red en cadena. La conexión que se eliminó es la que existía entre los nodos N_1 y N_5. En la figura 62 se muestra la topología de esta red.

La matriz de acoplamiento para una cadena de 5 nodos es como sigue

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios para esta matriz de acoplamiento son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.382$, $\lambda_3 = -1.382$, $\lambda_4 = -2.618$, $\lambda_5 = -3.618$. Por lo que la constante de acoplamiento queda determinada como

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 52.356,$$

se tomó el valor de $c = 55$ para las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento en anillo abierto o cadena son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= c(-x_{11} + x_{21}), \\
u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{31}), \\
u_{31} &= c(x_{21} - 2x_{31} + x_{41}), \\
u_{41} &= c(x_{31} - 2x_{41} + x_{51}), \\
u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{34}
$$

Primero se mostrará la simulación de esta configuración de red sin modificar ningún parámetro, es decir, $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 63 y 64 se muestran los resultados de la simulación. Como podemos ver en las figuras anteriores, con esta topología no sincronizan la totalidad de los estados de los nodos de la red, sólo sincronizan los nodos N_1 con N_5 y N_2 con N_4. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 64).

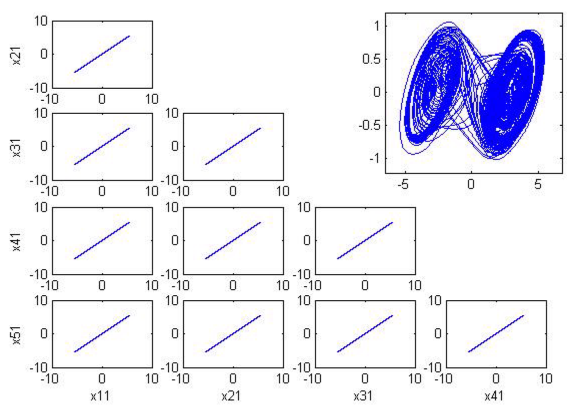

Figura 63: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

A continuación mostraremos cómo se comporta la red al variar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada uno de sus nodos. Primero se modifica el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_1 quedando $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. En las figuras 65 y 66 se muestran los resultados de la simulación. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 66).

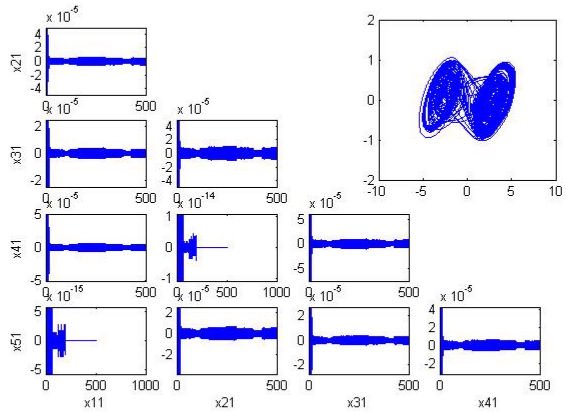

Figura 64: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

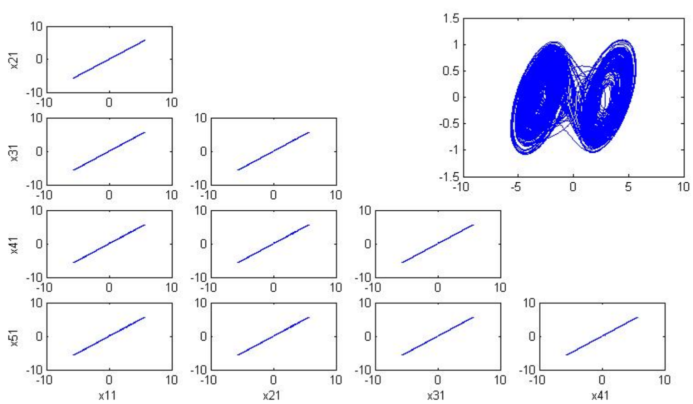

Figura 65: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

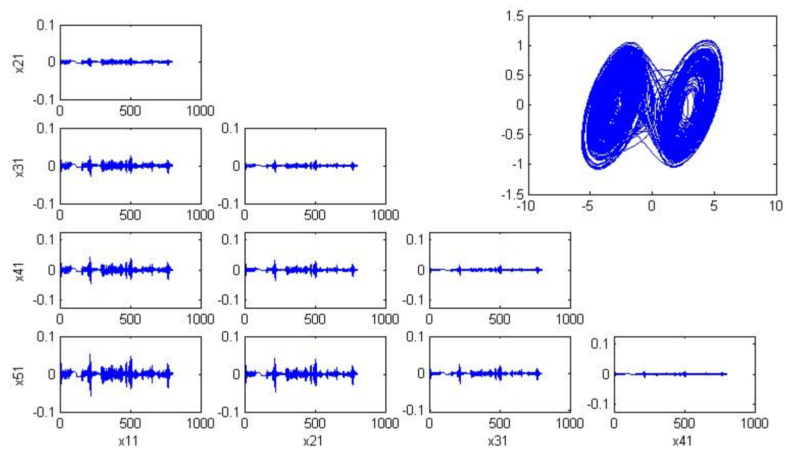

Figura 66: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

En este caso, podemos ver que ninguno de los estados de los nodos de la red logra sincronizar adecuadamente, aunque se puede ver que los errores de sincronía se mantiene pequeños y acotados. Se puede observar que el error de sincronía es más grande en los estados del nodo al que se modificó el parámetro, N_1.

Se realizó otra simulación para $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.201, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2001, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. No se muestran las gráficas porque los resultados fueron los mismos cualitativamente, sólo se redujo un poco el error de sincronía.

Cambiamos el nodo al que se modifica el parámetro ε, ahora será al nodo N_2. El vector de parámetros ahora es $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.21, 0.2, 0.2, 0.2)$. En las figuras 67 y 68 se ilustran los resultados de la simulación. Nuevamente podemos ver que no sincroniza ningún estado de la red, aunque el error de sincronía se mantiene acotado y los estados del nodo al que se modificó el parámetro, son los que tienen el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 68).

Cambiamos otra vez el nodo al que se cambia el parámetro ε, ahora será al nodo N_3, quedando $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.21, 0.2,0.2)$. A continuación en las figuras 69 y 70 se muestran los resultados de la simulación. En este caso, alcanzaron a sincronizar los estados de los nodos N_1 con N_5 y N_2 con N_4. Cabe mencionar, que son los mismos nodos cuyos estados sincronizaron en la simulación de la configuración en anillo cerrado cuando se varió el parámetro ε en el mismo nodo N_3. El resto de los estados de los demás nodos siguen manteniendo un error de sincronía considerable pero acotado y los estados del nodo al que se modificó el parámetro, son los que tienen el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error

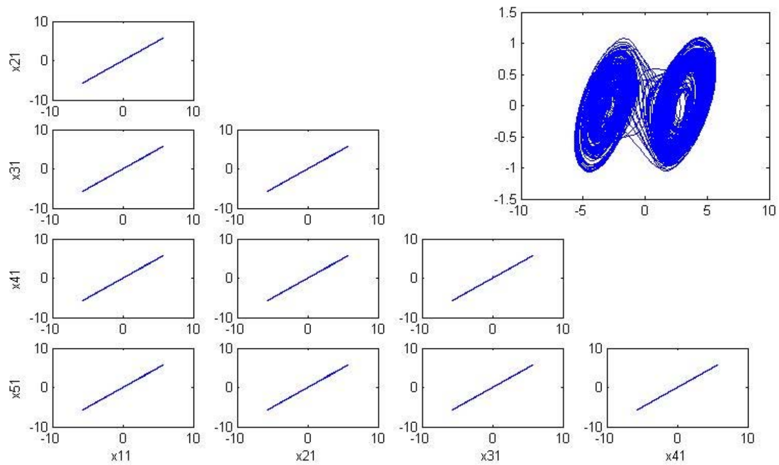

Figura 67: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

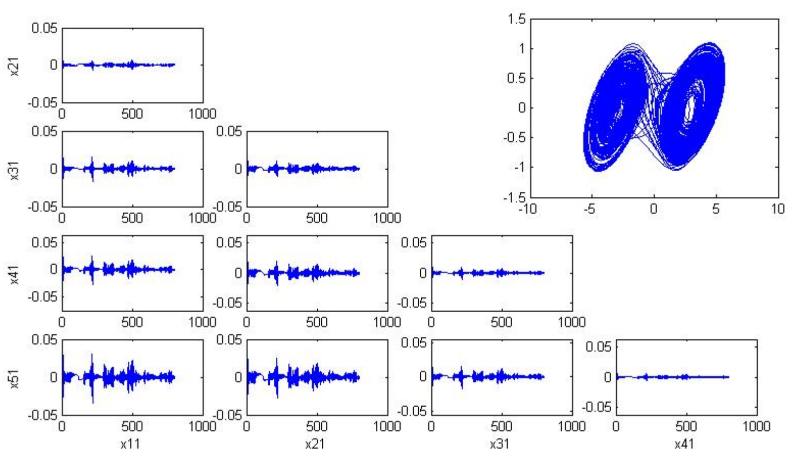

Figura 68: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 70).

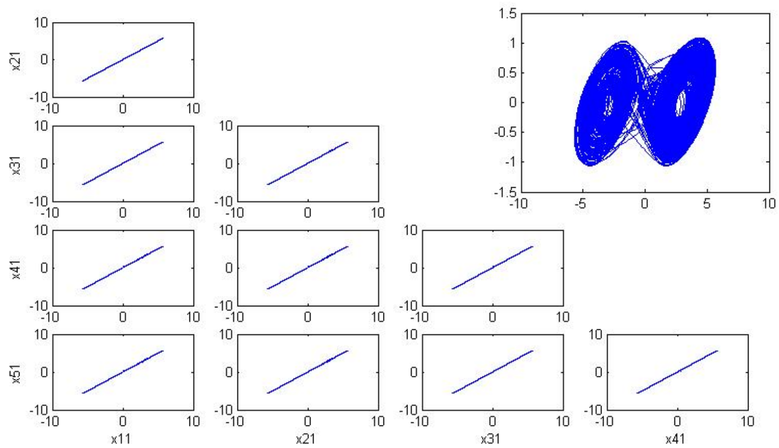

Figura 69: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Se vuelve a desplazar el nodo al que se le cambia el parámetro, ahora será N_4, por lo que $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 71 y 72. En este caso, nuevamente no sincroniza ningún estado de la red. Aunque siguen manteniendo un error de sincronía acotado. Los estados del nodo al que se modificó el parámetro son los que presentan el error de sincronía mayor. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 72).

Por último, tomamos el nodo N_5 y le cambiamos el parámetro ε_5, quedando ahora el vector $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. A continuación se muestran los resultados de la simulación, los cuales se ven en las figuras 73 y 74. Nuevamente en este caso, no sincroniza ningún estado de los nodos de la red, pero el error de sincronía se mantiene acotado. El error de sincronía de los estados del nodo al que se modificó el parámetro es el más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 74).

Conclusiones

Esta configuración de red en anillo abierto o cadena sin nodo aislado o maestro, no alcanza a sincronizar aún cuando no se modifica ningún parámetro $\boldsymbol{\varepsilon}$. Al empezar a variar

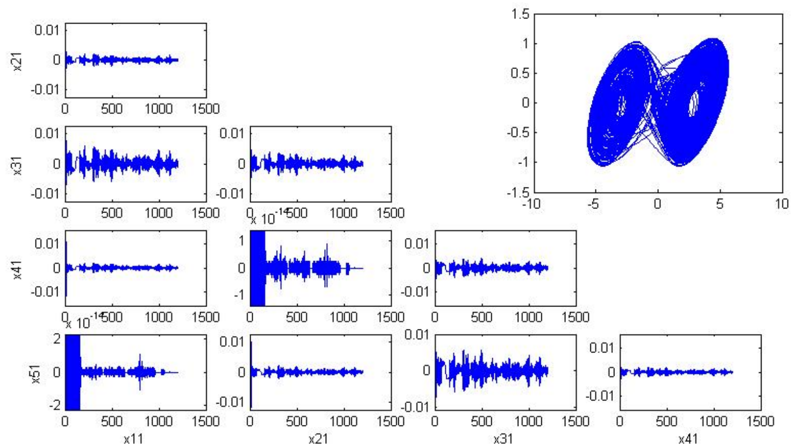

Figura 70: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

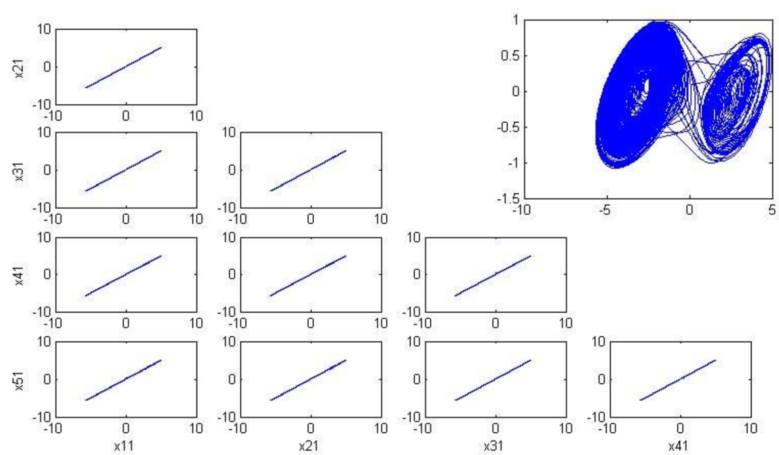

Figura 71: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra la proyección del atractor en el plano (x_{11}, x_{12}).

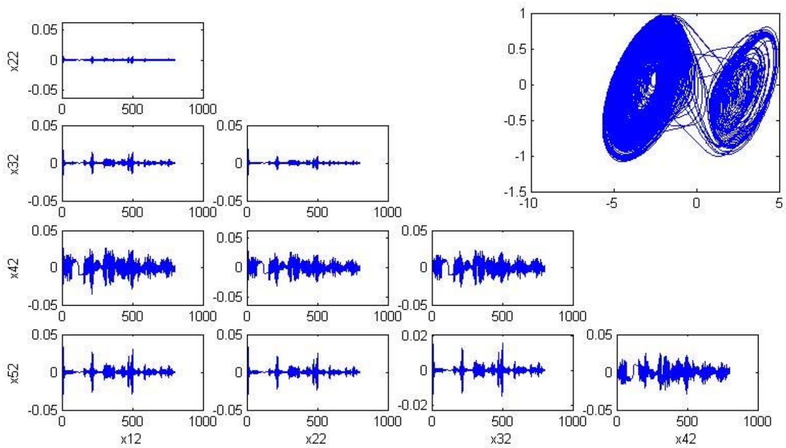

Figura 72: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra la proyección del atractor en el plano (x_{11}, x_{12}).

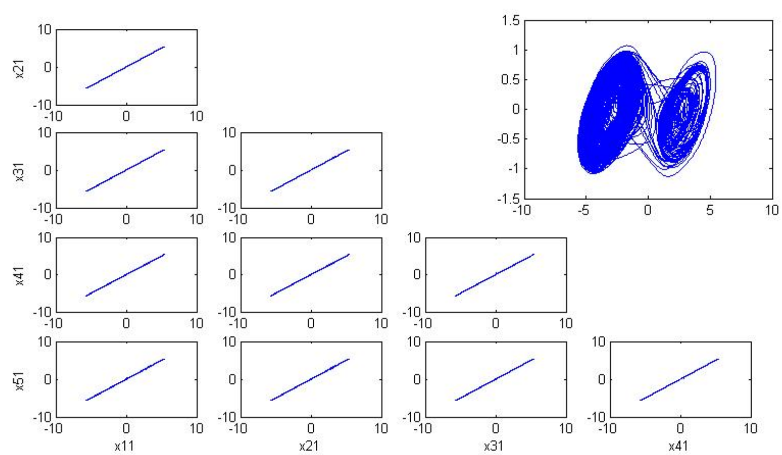

Figura 73: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

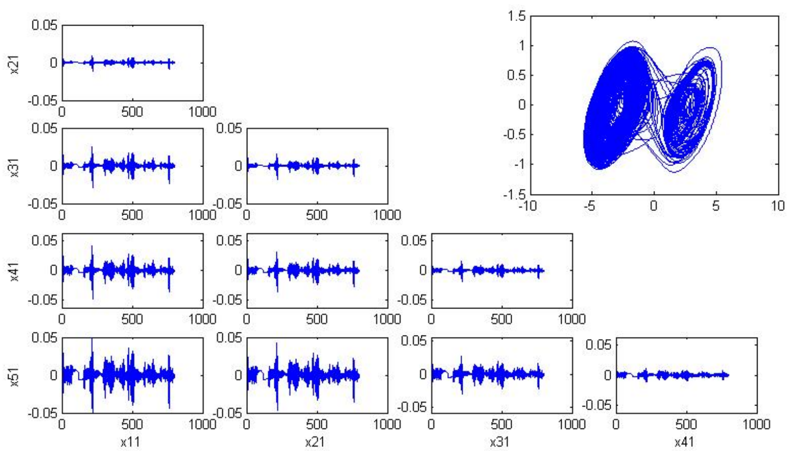

Figura 74: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena con $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

los parámetros en los nodos de la red se pierde totalmente la sincronía en algunos casos y en otros, se tiene sincronía parcial entre algunos de los estados de los nodos de la red, que es el caso cuando se varía ε_3.

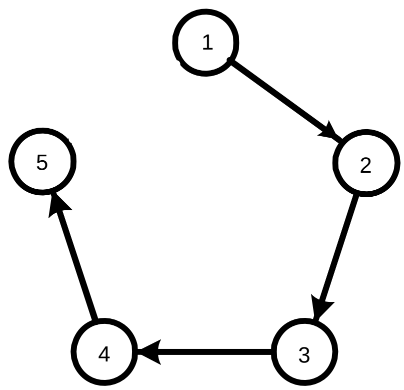

Figura 75: Red de 5 nodos con acoplamiento en cadena con configuración maestro y esclavo.

Red en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo

El material de esta sección está dedicado a mostrar en simulación numérica, el caso de una red en configuración en cadena con arreglo maestro y esclavo. En esta configuración el nodo N_1 es maestro del nodo N_2, el nodo N_2 es maestro del nodo N_3, el nodo N_3 es maestro del nodo N_4 y el nodo N_4 es maestro del nodo N_5. En la figura 75 se muestra la topología de esta configuración de red.

La matriz de acoplamiento para esta topología de red queda de la forma

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = -1$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 20,$$

se tomó el valor de $c = 30$ para realizar las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red en cadena con arreglo maestro y esclavo son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= 0, \\
u_{21} &= c(x_{11} - x_{21}), \\
u_{31} &= c(x_{21} - x_{31}), \\
u_{41} &= c(x_{31} - x_{41}), \\
u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{35}
$$

Primero se mostrarán los resultados de la simulación sin modificar ningún parámetro, es decir, $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. En la figura 76 se muestran los resultados de la simulación.

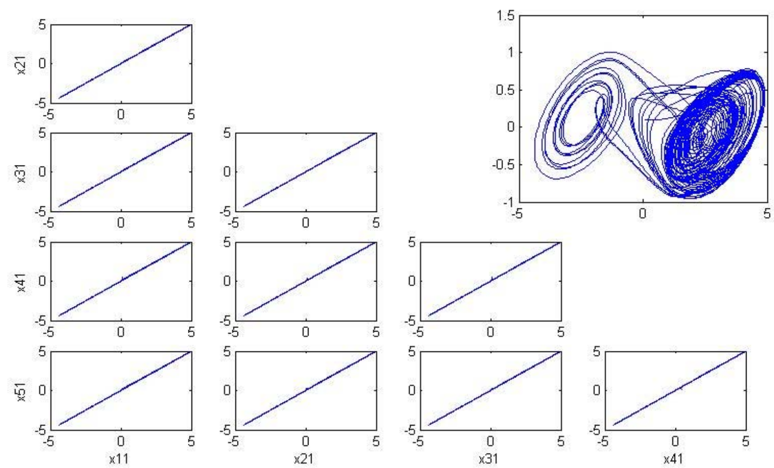

Figura 76: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

En esta configuración sin modificar parámetros todos los estados de todos los nodos de la red logran sincronizar, por lo que ya no se presentan las gráficas de los errores de los estados.

Nuevamente se modificará el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ en los nodos de la red. Primero empezamos con el nodo N_1, así $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. Los resultados de la simulación numérica se muestran en las figuras 77 y 78. En estas figuras, podemos ver que ningún de los estados de los nodos sincroniza, aunque el error de sincronía permanece acotado. Nuevamente se puede ver que el error de sincronía es mayor en los estados del nodo al que se modificó el parámetro. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados

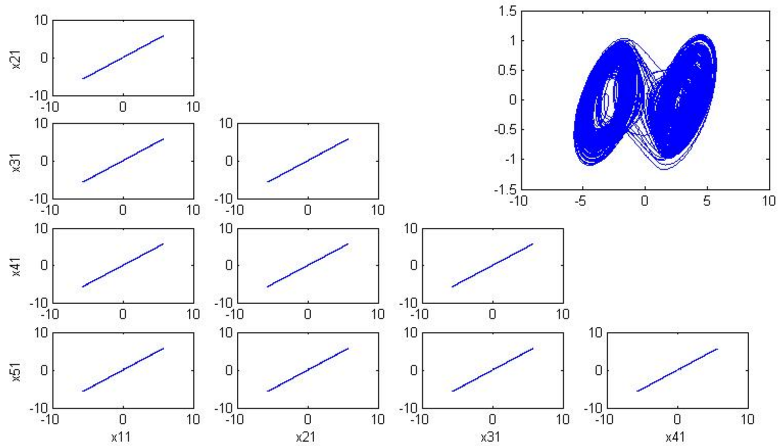

Figura 77: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

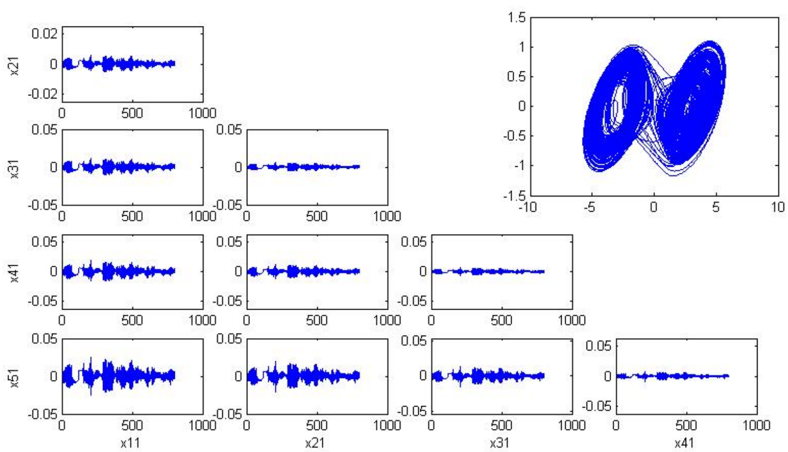

Figura 78: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 78).

Se repitió la simulación numérica anterior para $\boldsymbol{\varepsilon}$ = (0.201, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2) y $\boldsymbol{\varepsilon}$ = (0.2001, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2). No se muestran las gráficas porque los resultados fueron los mismos cualitativamente, sólo se redujo un poco el error de sincronía.

Cambiamos el parámetro al nodo N_2, entonces el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda $\boldsymbol{\varepsilon}$ = (0.2, 0.21, 0.2, 0.2, 0.2). Los resultados de la simulación numérica se muestran en las figuras 79 y 80. Nuevamente ninguno de los estados de los nodos logra sincronizar, aunque los errores de sincronía permanecen acotados. Se mantiene que el error de sincronía más grande es el de los estados del nodo al que se modificó el parámetro. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 80).

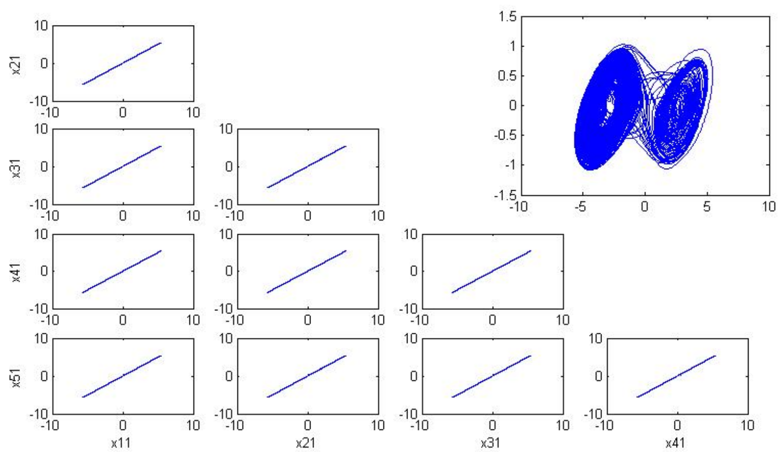

Figura 79: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Cambiamos el parámetro del siguiente nodo N_3, el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda de la siguiente forma $\boldsymbol{\varepsilon}$ = (0.2, 0.2, 0.21, 0.2, 0.2). En las figuras 81 y 82 se ilustran los resultados de la simulación. Ahora podemos ver que sincronizan los estados del nodo N_1 con los estados del nodo N_2. Esto se debe a que los nodos N_1 y N_2 no se ven afectados por el nodo N_3 que es al que se le cambió el parámetro, por lo que entre los estados de estos nodos no pierden sincronía entre ellos. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos

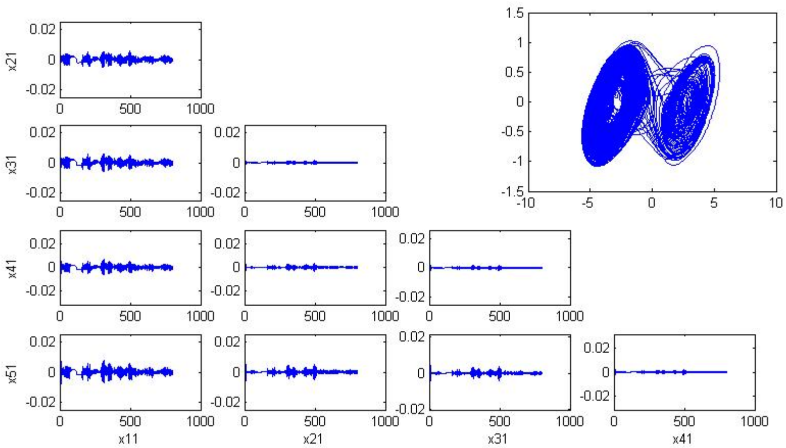

Figura 80: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 82).

Ahora vamos a cambiar el parámetro del nodo N_4, entonces el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ quedará como $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2)$. Podemos ver los resultados de las simulaciones en las figuras 83 y 84. En este caso, sincronizan los estados de los nodos N_1 con N_2, N_1 con N_3 y N_2 con N_3. Esto se debe a que el nodo al que se modificó el parámetro fue N_4 y este nodo no afecta a los nodos N_1, N_2 y N_3, por lo que, los estados de estos nodos no pierden sincronía entre ellos. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 84).

Desplazamos nuevamente al nodo al que se le cambia el parámetro, ahora el nodo N_5. El vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda ahora como $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 85 y 86. Ahora sincronizan los estados de los nodos N_1 con N_2, N_1 con N_3, N_1 con N_4, N_2 con N_3, N_2 con N_4 y N_3 con N_4. Esto se debe a que el nodo al que se modificó el parámetro fue N_5 y este nodo no afecta a los nodos N_1, N_2, N_3 y N_4, por lo que los estados de estos nodos no pierden sincronía entre ellos. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 86).

Conclusiones

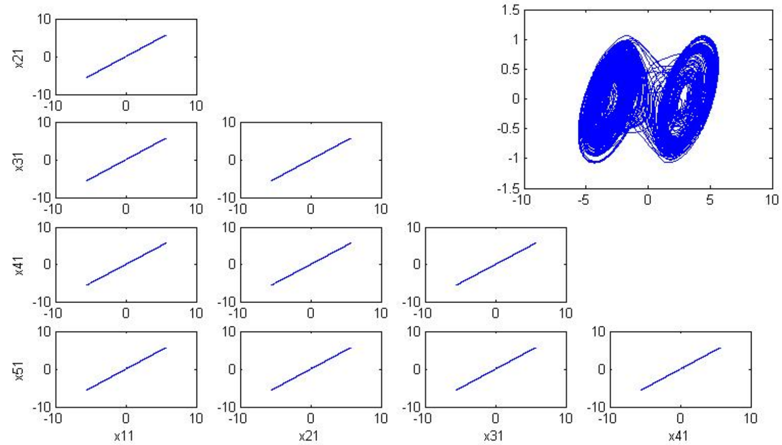

Figura 81: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

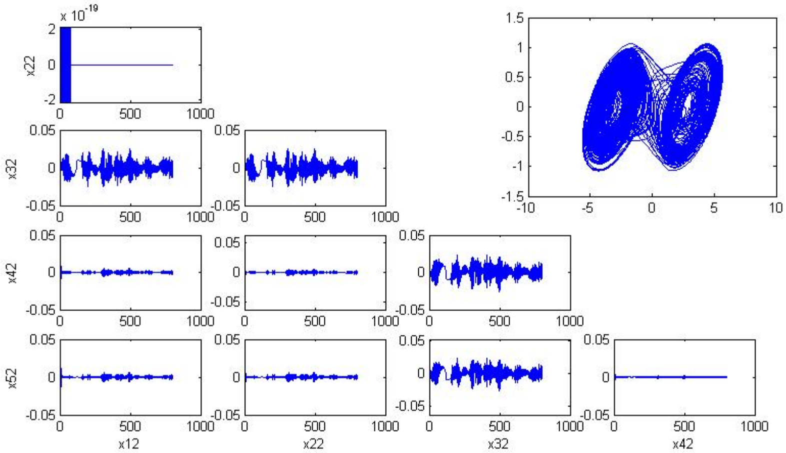

Figura 82: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

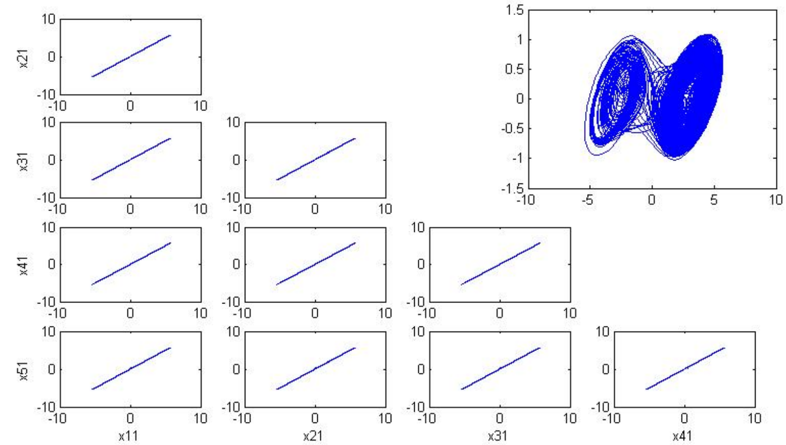

Figura 83: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

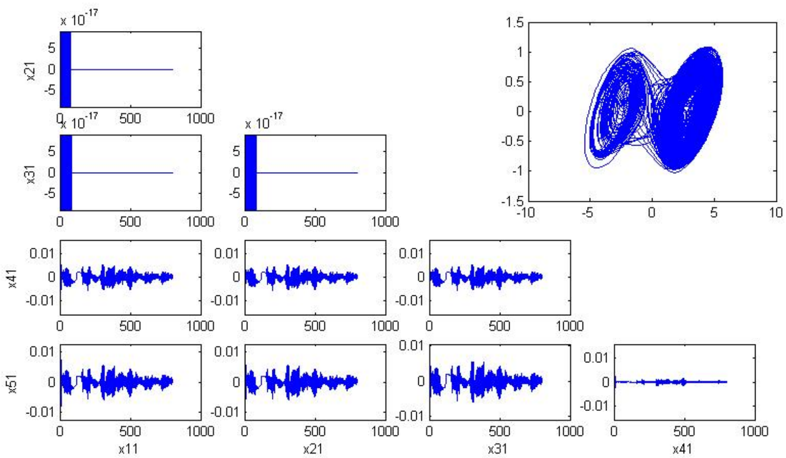

Figura 84: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

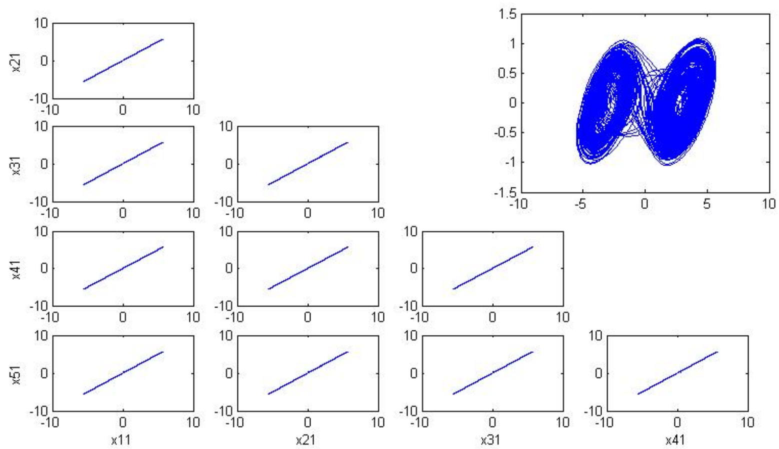

Figura 85: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

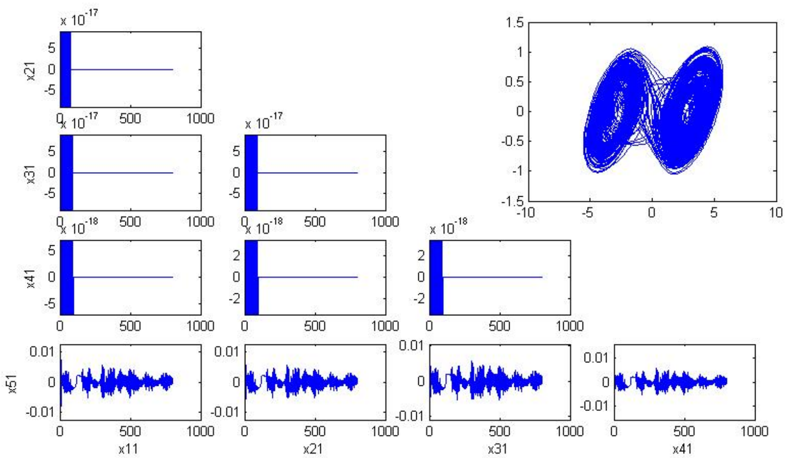

Figura 86: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en anillo abierto o cadena en configuración maestro y esclavo, con $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Esta configuración de red en anillo abierto o en cadena con acoplamiento maestro y esclavo, logra sincronizar por completo cuando no hay variación paramétrica en ninguno de sus nodos. Al variar el parámetro ε en un nodo de la red, este hace que él y todos los nodos de siguientes pierdan sincronía entre ellos y con el resto de la red. De lo anterior, podemos deducir que esta configuración de red no es robusta a variaciones paramétricas.

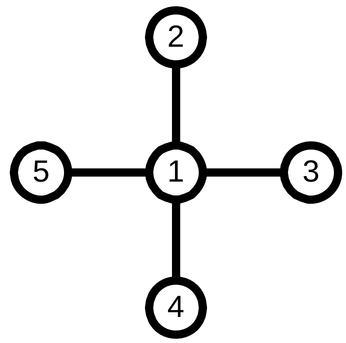

Figura 87: Red en configuración de estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ nodos.

IV.1.3. Red con acoplamiento en estrella

Red en estrella sin nodo aislado o maestro

En esta sección trataremos con una red con acoplamiento en estrella con $N = 5$ nodos, sin nodo aislado o maestro. En la figura 87 se muestra la topología de esta red en estrella con 5 nodos.

La matriz de acoplamiento para esta configuración de acoplamiento queda de la forma

$$\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$, $\lambda_5 = -5$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 20,$$

se tomó el valor de $c = 20$ para realizar las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento en estrella sin nodo maestro son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= c(-4x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}), \\
u_{21} &= c(x_{11} - x_{21}), \\
u_{31} &= c(x_{11} - x_{31}), \\
u_{41} &= c(x_{11} - x_{41}), \\
u_{51} &= c(x_{11} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{36}
$$

Aplicando esta configuración de acoplamiento en simulación, utilizando el oscilador de Chua con retardo (14)-(15) como nodo, se obtienen las gráficas que se muestran en la figura 88.

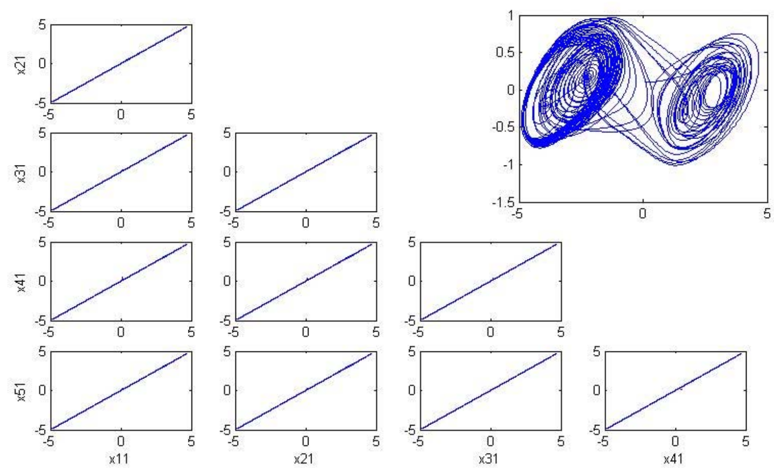

Figura 88: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento estrella con $N = 5$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Todos los estados de los nodos de la red sincronizan, por lo que no es necesario agregar las gráficas de los errores de los estados.

Nuevamente variaremos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada uno de los nodos empezando por el nodo N_1, entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 89 y 90. Podemos ver, que en este caso los estados del nodo N_1, que es al que se modificó el parámetro, pierden sincronía con los estados de los demás nodos, aunque sus errores de sincronía se mantiene acotados. Los estados de los demás nodos N_2, N_3, N_4 y N_5 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 90).

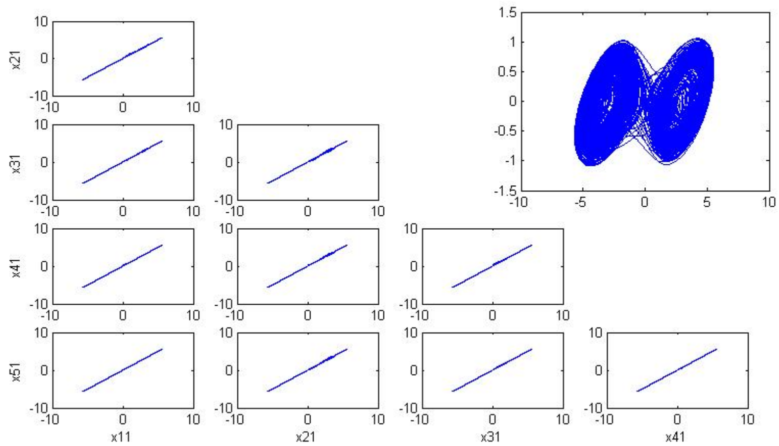

Figura 89: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Pasamos a modificar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_2, tenemos entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.21, 0.2, 0.2, 0.2)$. En las figuras 91 y 92 se muestran los resultados de la simulación. Podemos ver, que ahora pierden sincronía los estados de los nodos N_1 y N_2 y los estados de los nodos restantes N_3, N_4 y N_5, sincronizan entre sí. Los estados del nodo perturbado son los que muestran el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 92).

Cambiamos ahora el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_3, quedando $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.21, 0.2, 0.2)$. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 93 y 94. Ahora los estados que pierden sincronía son los de los nodos N_1 y N_3, y los estados de los nodos restantes N_2, N_4 y N_5 sincronizan entre sí. Otra vez, el nodo modificado es el que tiene los estados con mayor error de sincronía. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 94).

El nodo a modificar es N_4, entonces el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda como sigue $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.21, 0.2)$. En las figuras 95 y 96 se muestran los resultados de la simulación. En este caso los estados de los nodos N_1 y N_4 son los que pierden sincronía. Los estados de los demás nodos N_2, N_3 y N_5, sincronizan entre sí. El error de sincronía mayor lo tienen los estados

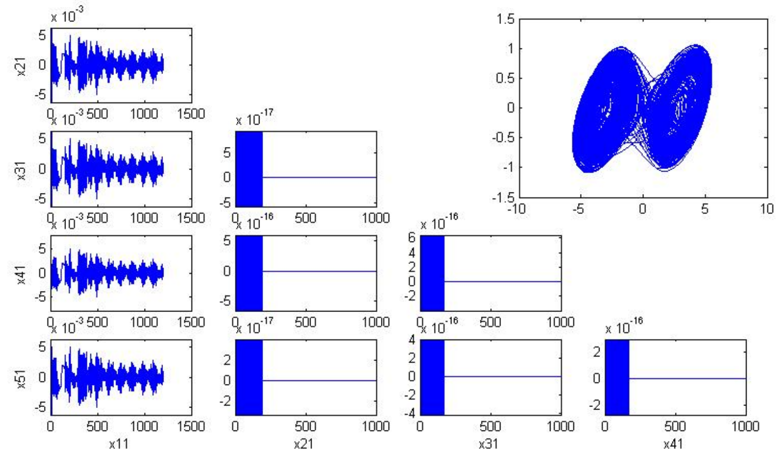

Figura 90: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

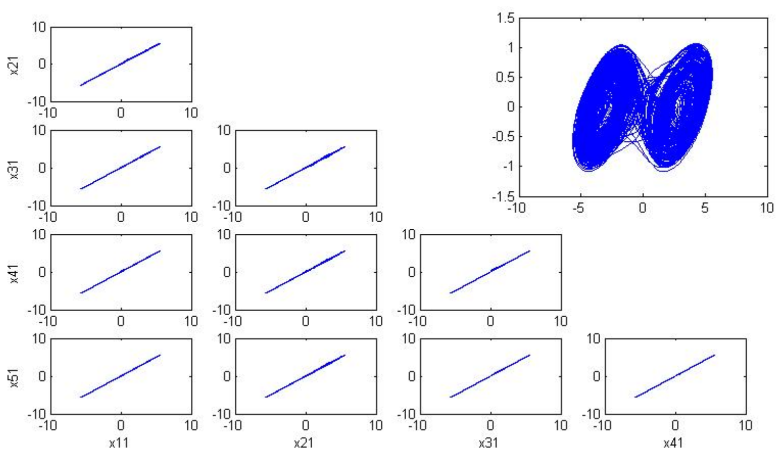

Figura 91: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

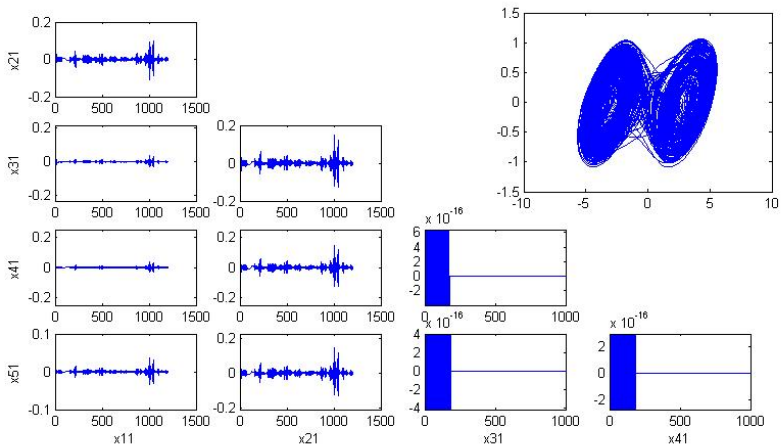

Figura 92: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

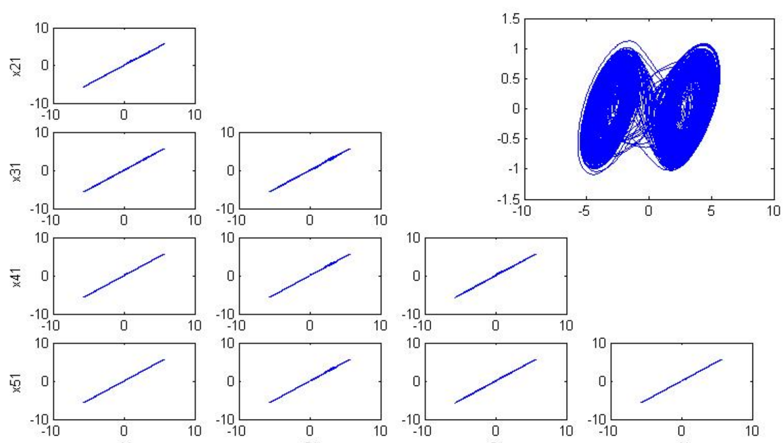

Figura 93: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

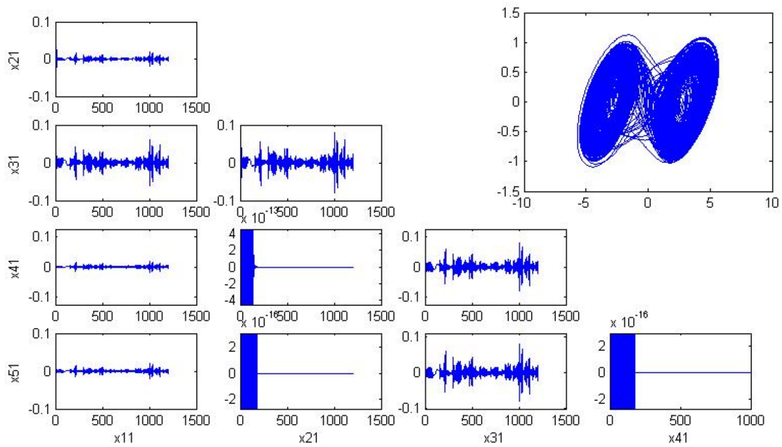

Figura 94: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

del nodo modificado. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 96).

Por último, cambiamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_5, tenemos entonces que $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. Se pueden ver los resultados de la simulación en las figuras 97 y 98. Ahora los estados de los nodos N_1 y N_5 son los que pierden sincronía. Los estados de los nodos restantes N_2, N_3 y N_4 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 98).

Conclusiones

Podemos ver en la figura 88 que en esta configuración de acoplamiento en estrella sin nodo maestro o aislado, sincroniza la totalidad de la red cuando no hay perturbación de parámetros en ninguno de sus nodos. Cuando se cambia el parámetro ε en el nodo central N_1 podemos ver que los estados del nodo N_1 pierden sincronía mientras que los estados de los demás nodos sincronizan entre sí (ver figuras 89 y 90). Podemos decir que la red se mantiene sincronizada. Si variamos el parámetro en cualquiera de los demás nodos $N_2, ..., N_5$ los estados que pierden sincronía son los del nodo perturbado y del nodo central solamente, mientras que los estados de los demás nodos de la red mantienen sincronía entre sí. De lo anterior, podemos deducir que esta configuración de acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro tiene cierto grado de robustez frente a variaciones paramétricas.

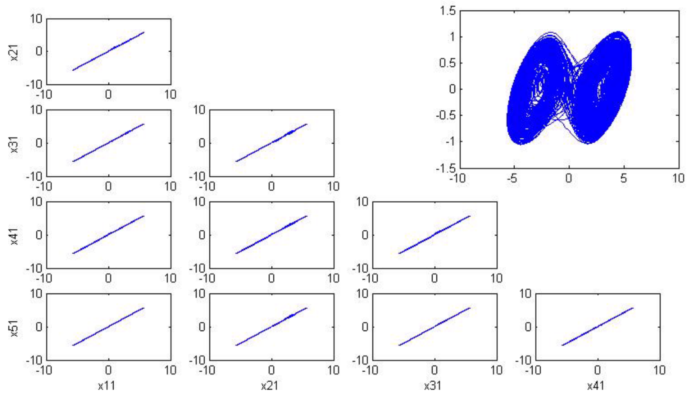

Figura 95: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

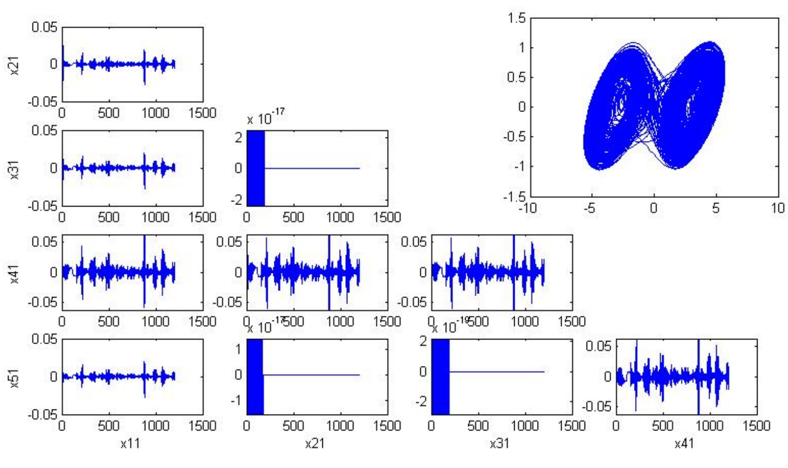

Figura 96: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

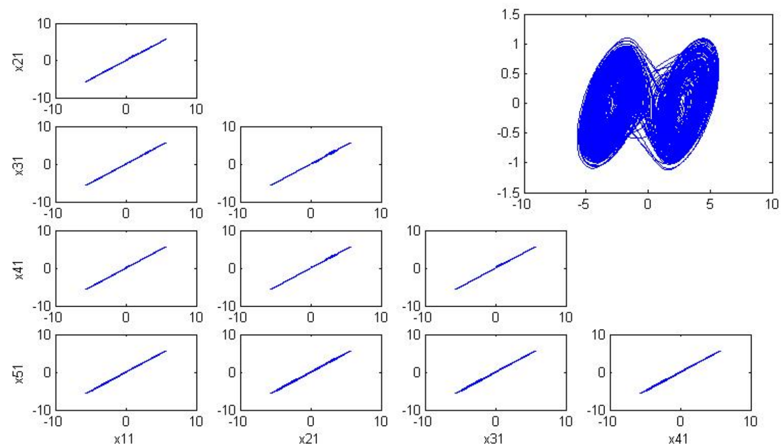

Figura 97: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

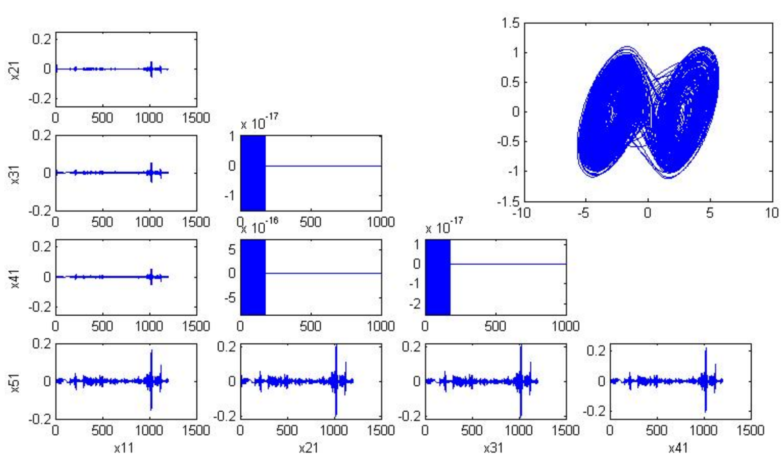

Figura 98: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

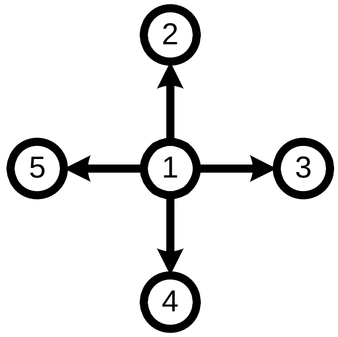

Figura 99: Red en estrella con el nodo N_1 como nodo maestro con $N = 5$ nodos.

Red en estrella con nodo aislado o maestro

La siguiente configuración que ocupa nuestra atención es la de estrella con el nodo N_1 como maestro y los demás nodos como esclavos (ver figura 99). La matriz de acoplamiento para esta configuración de estrella con nodo maestro en la red es

$$\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left|\frac{20}{\lambda_2}\right| = 20,$$

se tomó el valor de $c = 20$ para la realización de las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red para esta topología de acoplamiento en estrella con nodo maestro son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= 0, \\
u_{21} &= c(x_{11} - x_{21}), \\
u_{31} &= c(x_{11} - x_{31}), \\
u_{41} &= c(x_{11} - x_{41}), \\
u_{51} &= c(x_{11} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{37}
$$

Aplicando esta configuración de acoplamiento en simulación, utilizando el oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15) como nodo, se obtienen los diagramas de fase que se muestran en la figura 100.

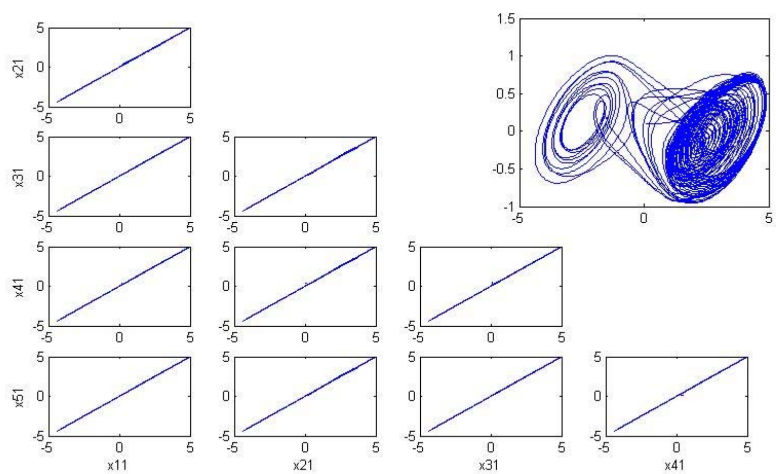

Figura 100: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ nodos. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Todos los estados de todos los nodos de la red sincronizan entre sí, por lo que no es necesario mostrar las gráficas de los errores de los estados.

Nuevamente se modificará el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada uno de los nodos. Primero se perturba el nodo N_1, así tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 101 y 102. Podemos ver que los estados del nodo N_1 pierden sincronía con respecto a los estados de los demás nodos y que los estados de los nodos restantes N_2, N_3, N_4 y N_5 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error

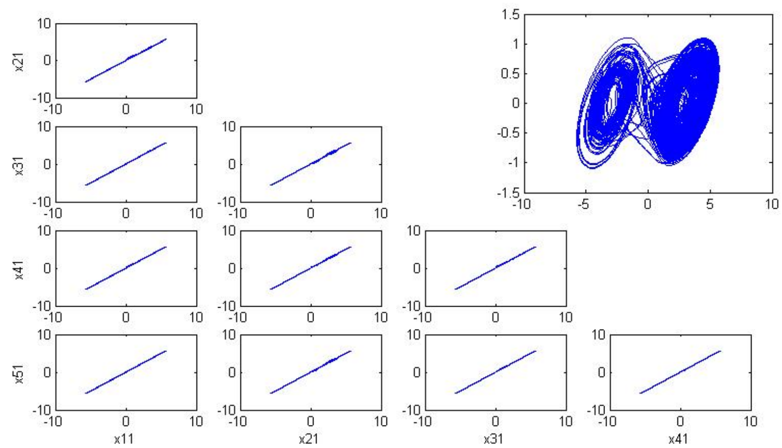

Figura 101: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

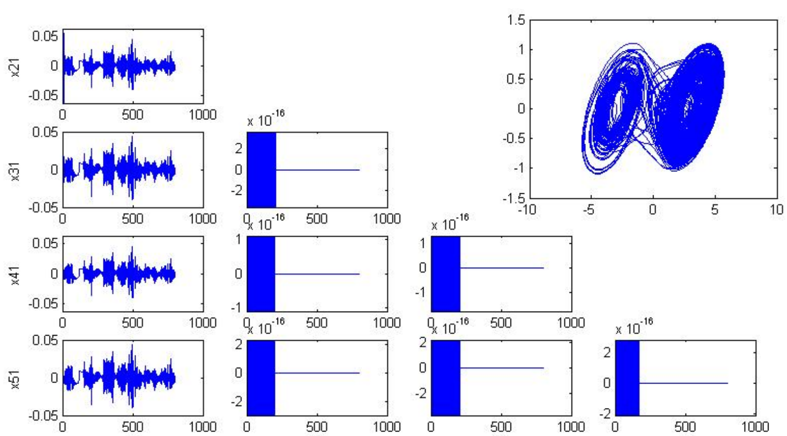

Figura 102: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 102).

Ahora modificamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_2, por lo que tenemos: $\boldsymbol{\varepsilon} =$ (0.2, 0.21, 0.2, 0.2, 0.2). En las figuras 103 y 104 se muestran los resultados de la simulación. En este caso, los estados del nodo perturbado N_2, pierden sincronía, mientras que los estados de los nodos restantes N_1, N_3, N_4 y N_5 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 104).

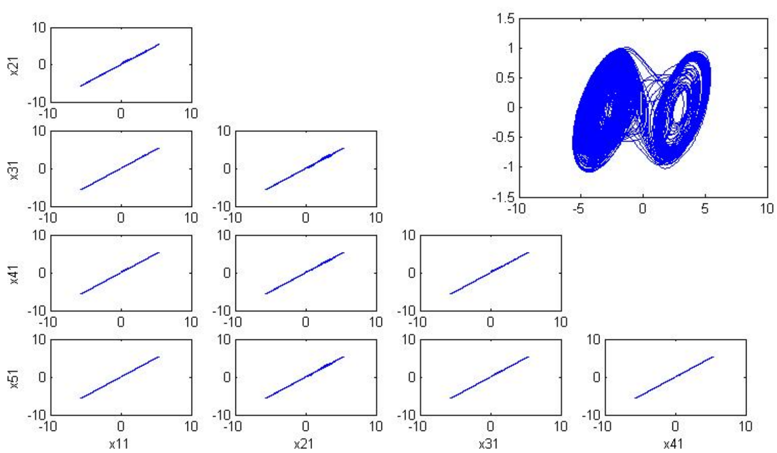

Figura 103: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

El siguiente paso es cambiar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_3, quedando $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,$ 0.2, 0.21, 0.2, 0.2). Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 105 y 106. Se puede ver que los estados que pierden sincronía son los del nodo N_3 (el perturbado), mientras que los estados de los nodos restantes N_1, N_2, N_4 y N_5 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 106).

Ahora cambiamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para el nodo N_4, tenemos entonces que $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.21, 0.2)$. Se pueden ver los resultados de la simulación en las figuras 107 y 108. Los estados del nodo perturbado N_4 pierden sincronía, mientras que los estados de los nodos restantes N_1, N_2, N_3 y N_5 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error

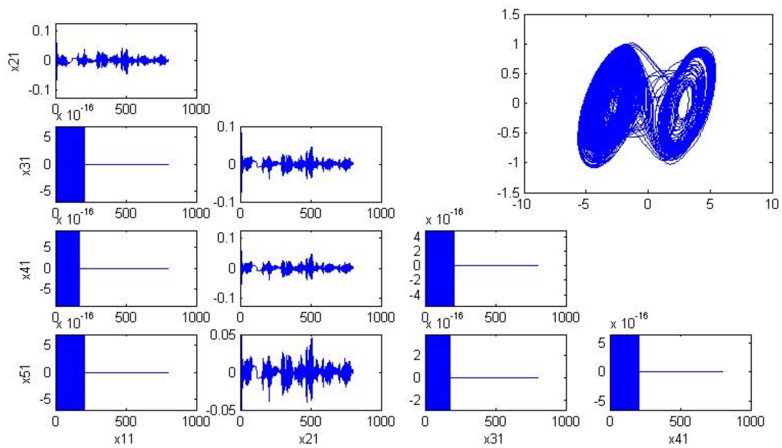

Figura 104: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

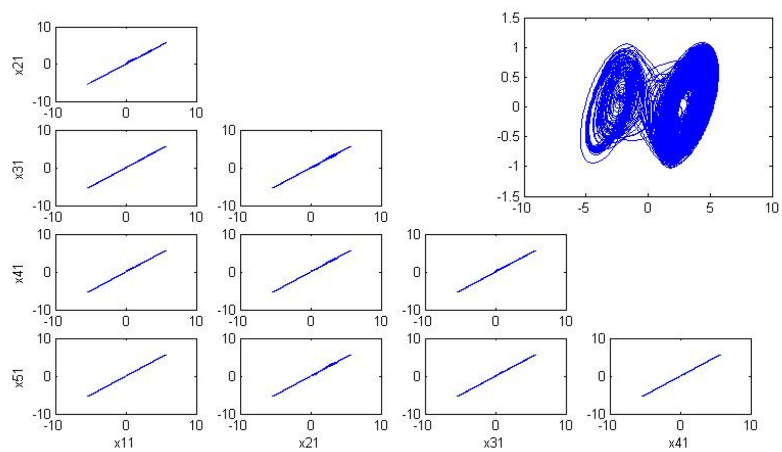

Figura 105: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

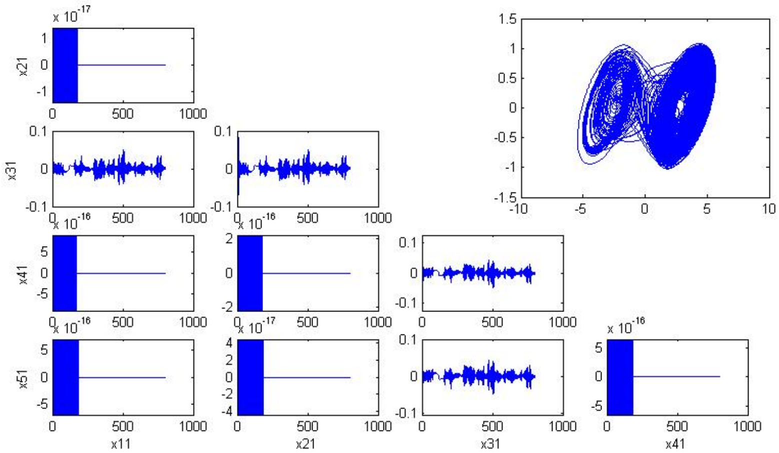

Figura 106: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 108).

Cambiamos ahora a perturbar al nodo N_5, entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.2,\, 0.21)$. En las figuras 109 y 110 se muestran los resultados de la simulación. Ahora los estados del nodo perturbado N_5 son los que pierden sincronía y los estados de los demás nodos N_1, N_2, N_3 y N_4 sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 110).

Conclusiones

Con esta topología de acoplamiento en la red en estrella con nodo aislado o maestro, los estados del nodo perturbado son los que pierden sincronía, mientras que los estados de los nodos restantes sincronizan, es decir, la red no pierde sincronía. De lo anterior podemos deducir que esta configuración es robusta a variaciones en los parámetros.

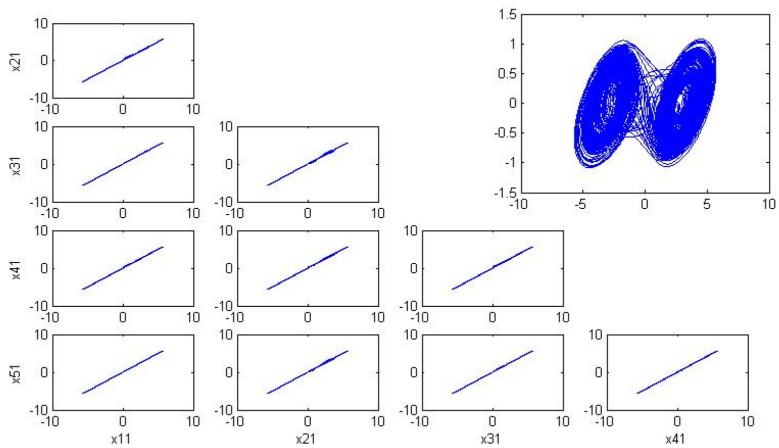

Figura 107: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

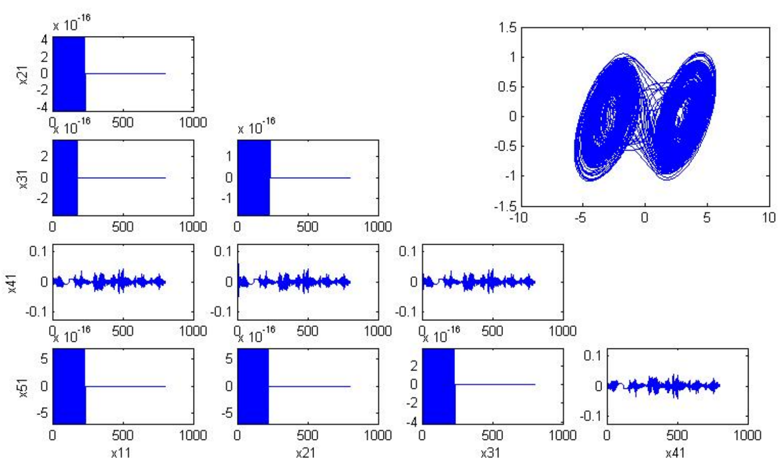

Figura 108: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0{,}21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

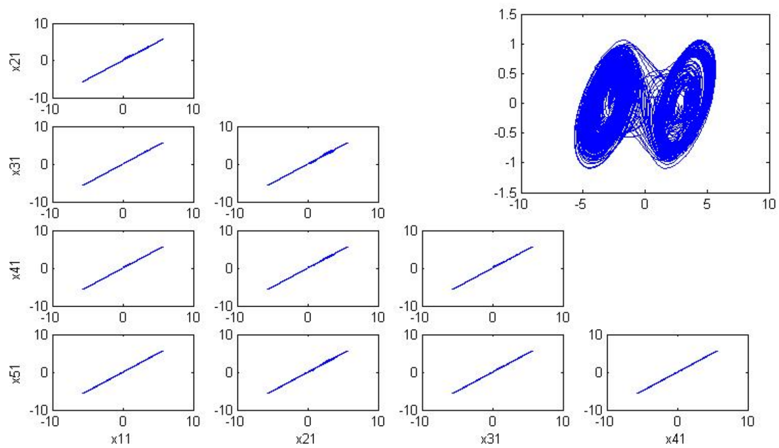

Figura 109: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

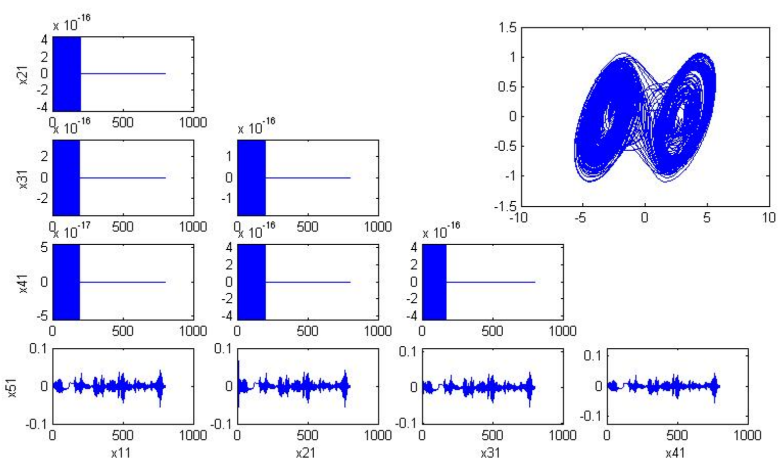

Figura 110: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en estrella con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

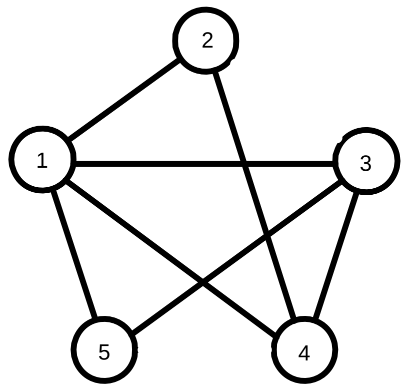

Figura 111: Red irregular con $N = 5$ nodos, sin nodo aislado o maestro.

IV.1.4. Red con acoplamiento irregular

En una red con acoplamiento irregular la matriz laplaciana no tiene una forma definida en general, por lo que, sus propiedades son diferentes para cada configuración en particular.

A continuación se presentará una red irregular de 5 nodos y veremos su comportamiento frente a variaciones en el parámetro ε.

Red con acoplamiento irregular sin nodo aislado o maestro

Ahora veremos una configuración irregular de una red con 5 nodos. Semejante a los ejemplos anteriores, se modificará el parámetro ε en cada uno de los nodos y veremos el comportamiento de la red ante estas perturbaciones. En la figura 111 podemos ver la red irregular que se analizará en esta sección. La matriz de acoplamiento para esta configuración de la red es

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1.5858$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -4$, $\lambda_5 = -5$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1.5858$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left| \frac{20}{\lambda_2} \right| = 12.61,$$

se tomó el valor de $c = 15$ para realizar las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento irregular son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$\begin{aligned} u_{11} &= c(-4x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}), \\ u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{41}), \\ u_{31} &= c(x_{11} - 3x_{31} + x_{41} + x_{51}), \\ u_{41} &= c(x_{11} + x_{21} + x_{31} - 3x_{41}), \\ u_{51} &= c(x_{11} + x_{31} - 2x_{51}). \end{aligned} \tag{38}$$

Aplicando esta configuración de acoplamiento en simulación, utilizando el oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15) como nodo, se obtiene la figura 112.

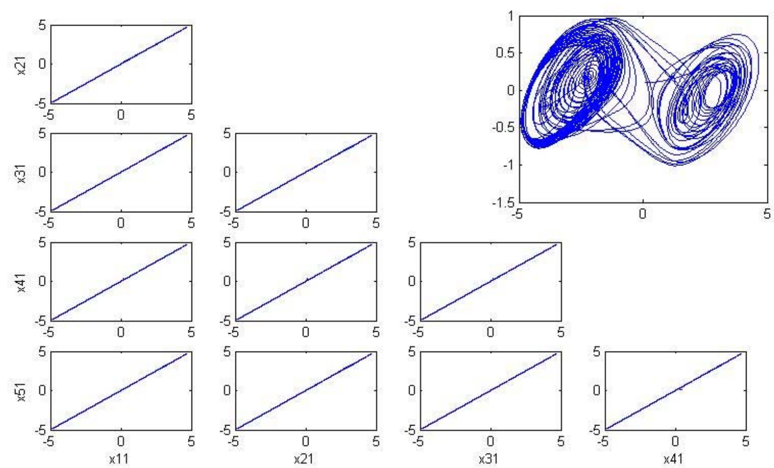

Figura 112: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ nodos. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Todos los estados de todos los nodos de la red sincronizan, por lo que no es necesario mostrar las gráficas de los errores de sincronía.

Nuevamente vamos a variar el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ para cada uno de los nodos, empezando con el nodo N_1 tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. En las figuras 113 y 114 se muestran los resultados de la simulación. Podemos ver que los estados del nodo perturbado N_1 pierden sincronía con los estados de los demás y los estados de los nodos restantes sincronizan entre sí. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 114).

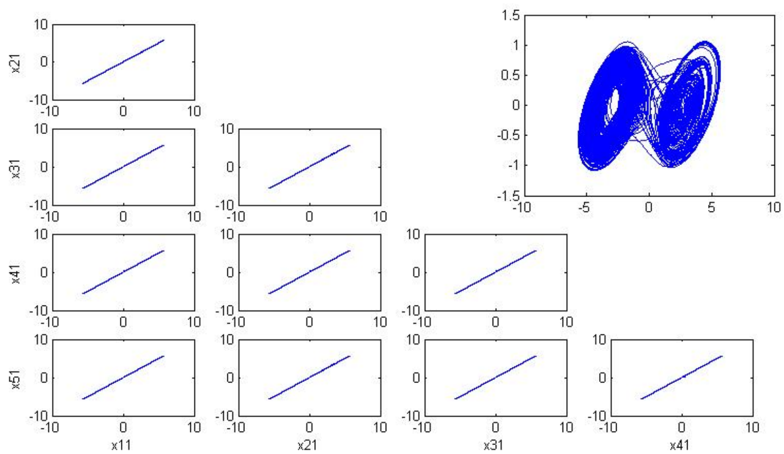

Figura 113: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Perturbando el nodo N_2 tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 115 y 116. En este caso todos los estados de los nodos de la red pierden sincronía, aunque los errores de sincronía se encuentran acotados. Los estados del nodo perturbado N_2 son los que tienen el error de sincronía más grande. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 116).

Cambiamos el vector de parámetros $\boldsymbol{\varepsilon}$ perturbando el nodo N_3, tenemos entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 117 y 118. De las figuras anteriores podemos ver nuevamente que ninguno de los estados de los nodos logra sincronizar, aunque los errores de sincronía se mantienen acotados. Cabe notar otra vez, que el mayor error de sincronía es el del nodo perturbado N_3. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 118).

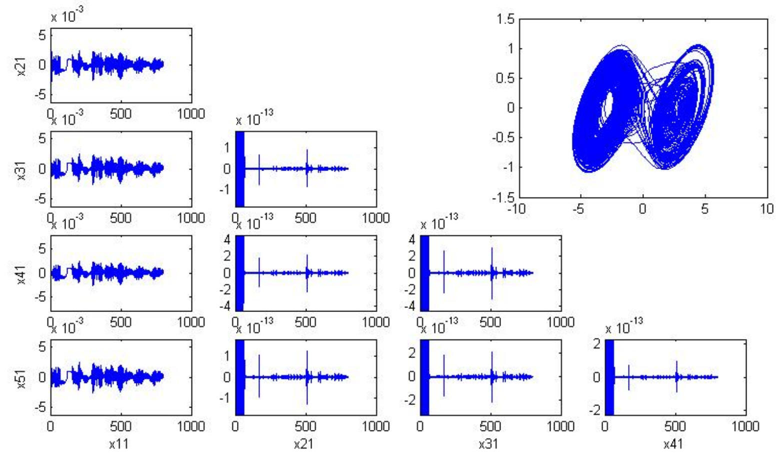

Figura 114: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

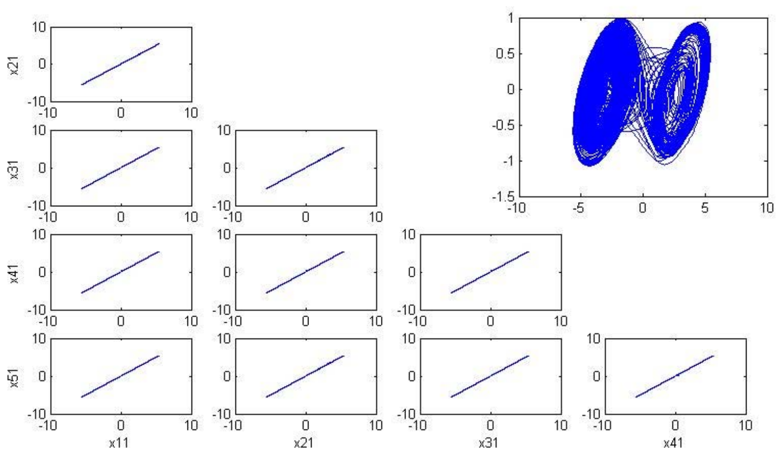

Figura 115: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

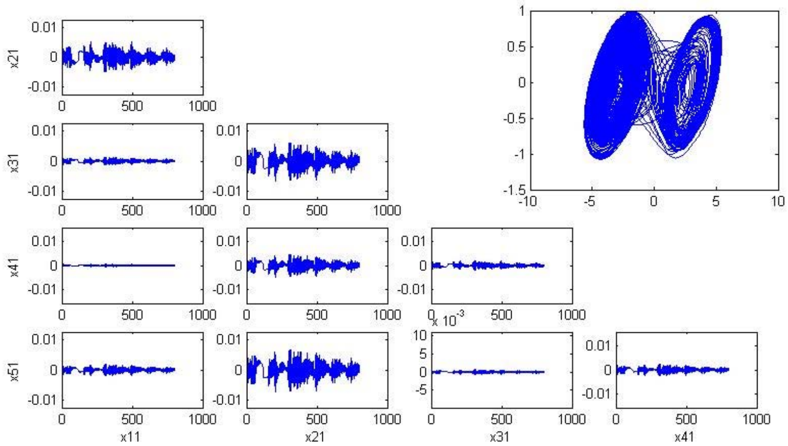

Figura 116: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

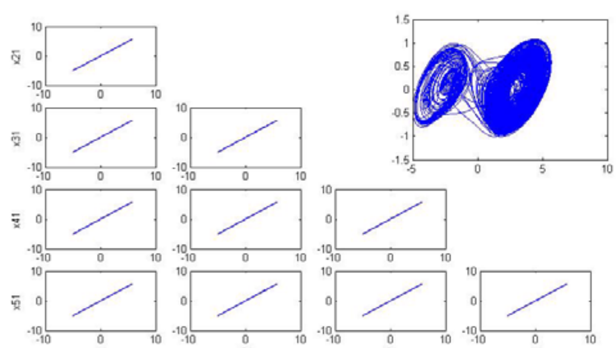

Figura 117: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

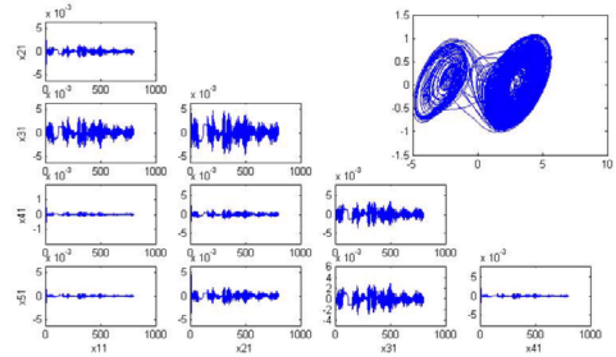

Figura 118: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Perturbando al nodo N_4 el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2)$. En las gráficas de las figuras 119 y 120 se pueden ver los resultados de la simulación. Otra vez, no sincroniza ningún estado de los nodos de la red, pero los errores de sincronía se mantienen acotados. El nodo perturbado N_4 es el que tienen mayor error de sincronía. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 120).

Por último, modificaremos el parámetro en el nodo N_5, tenemos entonces que $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. Los resultados de la simulación se muestran en las figuras 121 y 122. Nuevamente la red no sincroniza. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 122).

Conclusiones

Sólo en el caso en que se perturbó el nodo N_1, los demás nodos de la red no perdieron sincronía entre ellos, en todos los demás casos, la totalidad de los estados de los nodos de la red perdieron sincronía. De lo anterior, se puede concluir que esta configuración irregular en particular no es robusta frente a variaciones en los parámetros.

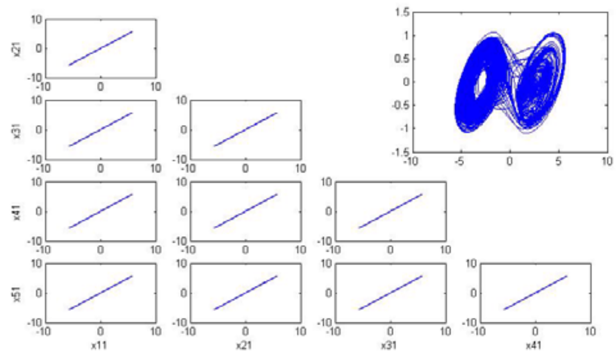

Figura 119: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

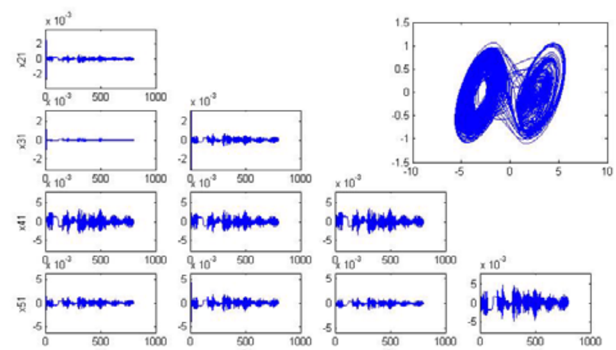

Figura 120: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

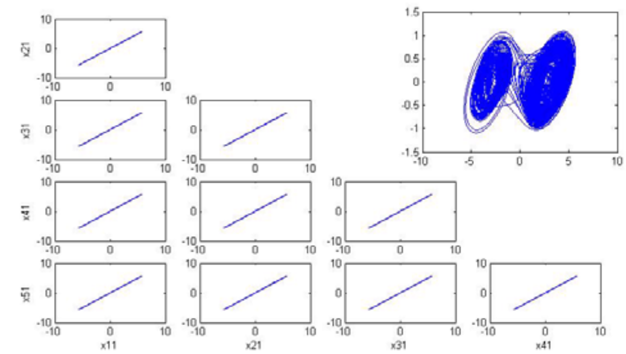

Figura 121: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento en irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

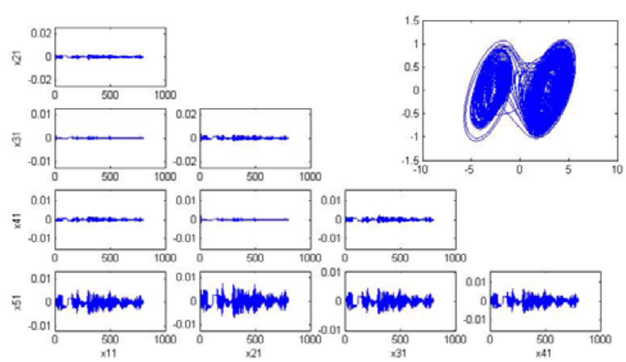

Figura 122: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular sin nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

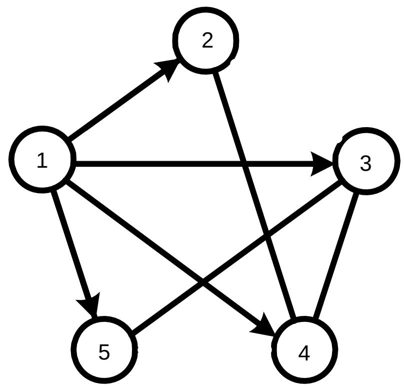

Figura 123: Red irregular con $N = 5$ nodos, con nodo N_1 aislado o maestro.

Red con acoplamiento irregular con nodo aislado o maestro

Ahora veremos una configuración irregular de una red con 5 nodos con nodo maestro. Igual que los ejemplos anteriores se perturbará el parámetro ε en cada uno de los nodos y analizaremos el comportamiento de la red. En la figura 111 podemos ver la red irregular que se utilizará. La matriz de acoplamiento para esta configuración de red es

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1.58$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = -4$, por lo que el segundo valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$. Entonces la constante de acoplamiento es

$$c \geq \left|\frac{20}{\lambda_2}\right| = 20,$$

se tomó el valor de $c = 20$ para realizar las simulaciones.

Las ecuaciones de estado de la red para esta configuración de acoplamiento irregular con nodo maestro N_1 son las mismas que en (21)-(29), lo único que cambia en esta configuración de red es la configuración de las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, con $i = 1, 2, ..., 5$. La configuración de las entradas de acoplamiento es como sigue:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= 0, \\
u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{41}), \\
u_{31} &= c(x_{11} - 3x_{31} + x_{41} + x_{51}), \\
u_{41} &= c(x_{11} + x_{21} + x_{31} - 3x_{41}), \\
u_{51} &= c(x_{11} + x_{31} - 2x_{51}).
\end{aligned} \tag{39}
$$

Aplicando esta configuración de acoplamiento en simulación, utilizando el oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15) como nodo, se obtienen los retratos de fase que se muestran en la figura 124. Todos los estados de todos los nodos de la red sincronizan entre sí, por lo que no es necesario mostrar las gráficas de los errores de los estados.

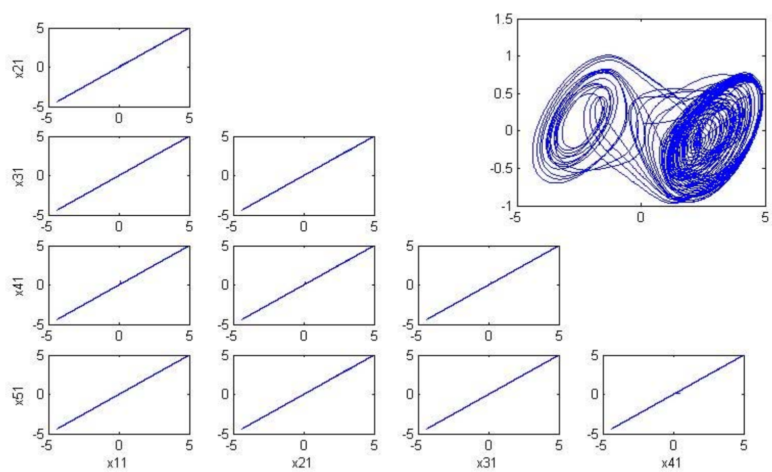

Figura 124: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ nodos. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Seguimos con el mismo procedimiento de variar el vector de parámetros ε para cada uno de los nodos. Empezamos con el nodo N_1, entonces tenemos ε = (0.21, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2). En las figuras 125 y 126 se muestran los resultados de la simulación con estos valores de parámetros. En este caso, sólo pierden sincronía los estados del nodo que se perturbó, mientras que los estados de los nodos restantes sincronizan. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 126).

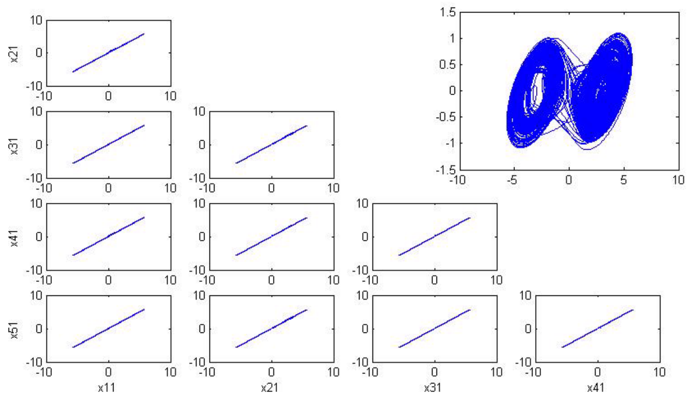

Figura 125: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

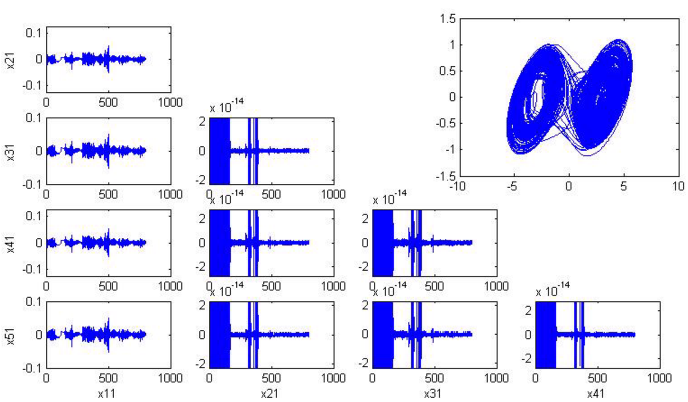

Figura 126: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_1 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Perturbamos el nodo N_2, entonces tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se pueden ver en las figuras 127 y 128. En este caso, todos los estados de los nodos de la red pierden sincronía, aunque los errores de sincronía se mantiene acotados. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 128).

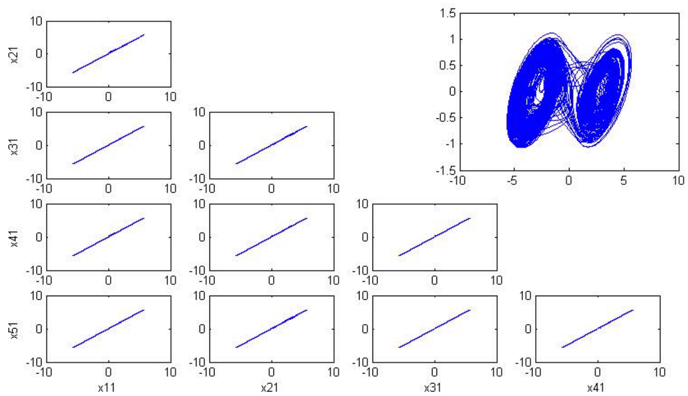

Figura 127: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

Pasamos al nodo N_3, por lo que tenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2,\ 0.2)$. Los resultados de la simulación se muestran en la figuras 129 y 130. De las gráficas anteriores podemos ver que no sincroniza ninguno de los estados de los nodos de la red. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 130).

El siguiente nodo perturbado es N_4, por lo que el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda como $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21,\ 0.2)$. En las figuras 131 y 132 se muestran los resultados de la simulación. Nuevamente no sincroniza ninguno de los estados de los nodos de la red, aunque se mantienen acotados los errores. No se incluyen las gráficas de error de sincronía de los segundos y terceros estados debido a que su comportamiento es similar cualitativamente hablando al de los primeros estados (ver figura 132).

Por último, cambiamos el parámetro en el nodo N_5, entonces $\boldsymbol{\varepsilon} = (0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.21)$. En las figuras 133 y 134 se muestran los resultados de la simulación. Otra vez no sincronizan los estados de los nodos de la red.

Conclusiones

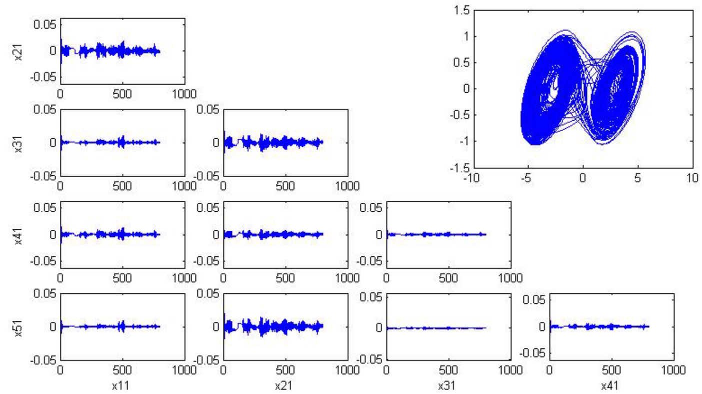

Figura 128: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_2 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

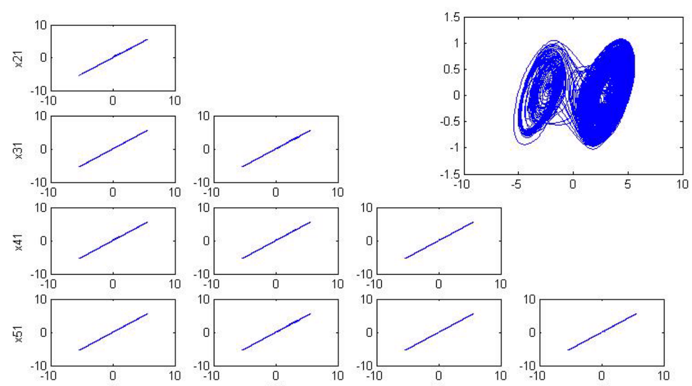

Figura 129: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

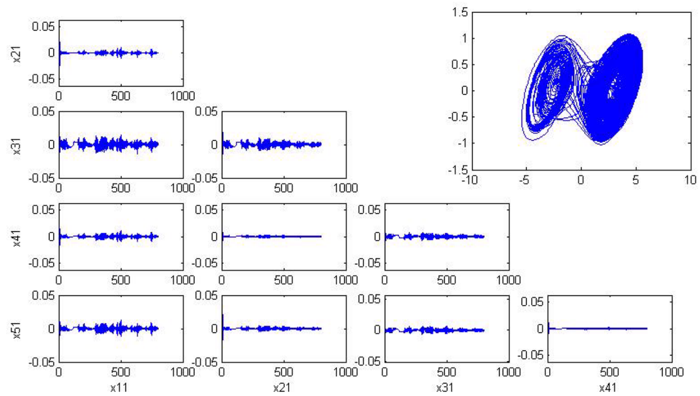

Figura 130: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_3 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

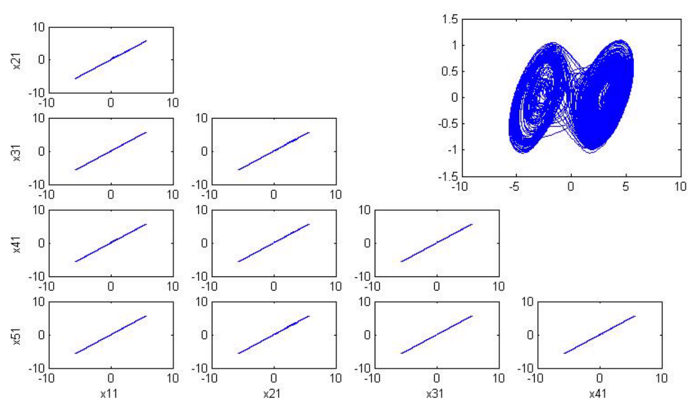

Figura 131: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

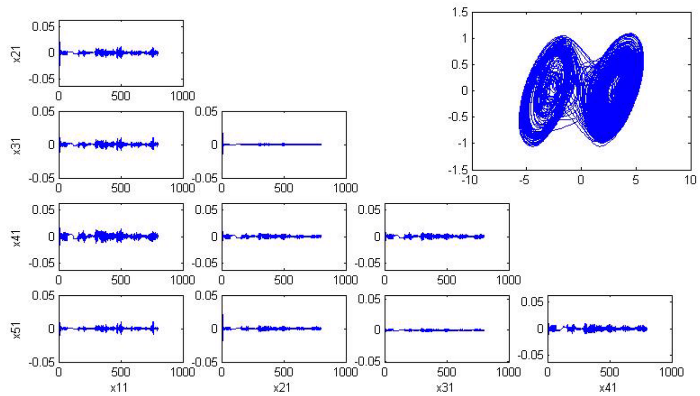

Figura 132: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_4 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

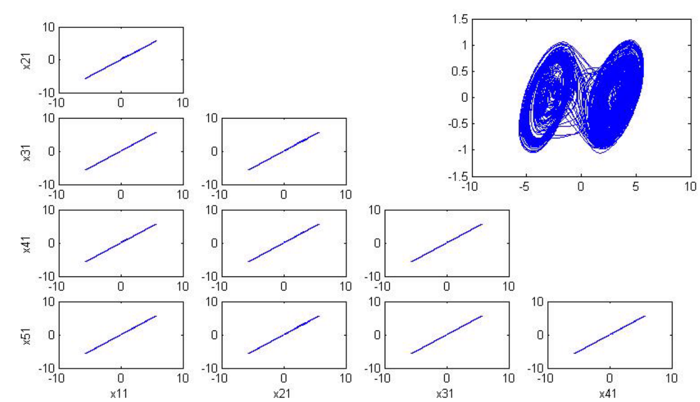

Figura 133: Diagramas de fase de los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

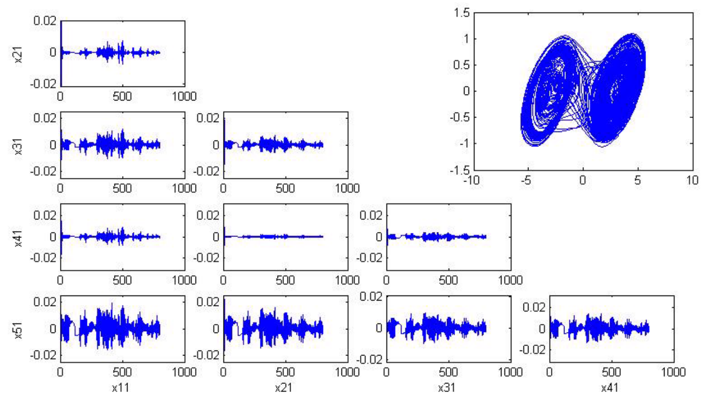

Figura 134: Gráficas de los errores de sincronía entre los primeros estados de los nodos de la red con acoplamiento irregular con nodo maestro, con $N = 5$ y $\varepsilon_5 = 0.21$. También se muestra el atractor hipercaótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el plano (x_{11}, x_{12}).

El comportamiento de esta configuración de acoplamiento irregular con nodo maestro se comportó igual que la configuración sin nodo maestro, sólo cuando se perturbó el nodo N_1, los demás nodos de la red tuvieron sincronía entre ellos, en todos los demás casos, la totalidad de los estados de los nodos de la red perdieron sincronía. De lo anterior se puede concluir que esta configuración irregular no es robusta frente a variaciones en los parámetros.

IV.2. Conclusiones

En este capítulo, se analizaron mediante simulaciones numéricas en Matlab, los comportamientos de diferentes configuraciones de acoplamiento de redes complejas frente a perturbaciones paramétricas, empleando como nodo al oscilador de Chua con retardo de tiempo. En cada caso, se perturbó un parámetro, es decir, se modificó un parámetro de cada uno de los nodos, uno a la vez, para verificar el comportamiento de la red frente a estas perturbaciones. Lo que se pudo observar es que la configuración global es robusta a pequeñas perturbaciones en los parámetros de uno de sus nodos, ya que sólo pierde sincronía el nodo perturbado y el resto de la red permanece sincronizada; la red en anillo no es muy robusta a variaciones paramétricas ya que al variar un parámetro en uno de sus nodos varios nodos de la red pierden sincronía. Otra configuración que se analizó es la de anillo en configuración maestro y esclavo (anillo dirigido), esta configuración resultó no ser robusta frente a perturbaciones en sus nodos ya que sólo en el caso en el que el nodo maestro es el perturbado, logran sincronizar algunos de los nodos de la red y en cualquier otro caso, la red pierde sincronía en su totalidad. Red de anillo abierto (cadena) sin nodo aislado o maestro, esta configuración de red no alcanza a sincronizar bien aún cuando no se modifica ningún parámetro, al empezar a variar los parámetros en los nodos de la red se pierde totalmente la sincronía, en algunos casos y en otros, se tiene sincronía entre algunos de los estados de los nodos de la red, que es el caso cuando se varía ε_3. Red en anillo abierto en configuración maestro y esclavo, esta configuración de red no es robusta a variaciones paramétricas, ya que al variar un parámetro en un nodo de la red este hace que él y todos los nodos de orden mayor pierdan sincronía entre ellos y con el resto de la red. Red en estrella sin nodo aislado o maestro, esta configuración de acoplamiento en estrella sin nodo aislado o maestro tiene cierto grado de robustez frente a variaciones paramétricas, ya que al perturbar al nodo central sólo éste pierde sincronía, mientras el resto de la red permanece sincronizada, cuando se perturba un nodo de la periferia sólo el nodo perturbado y el central pierden sincronía y el resto permanecen sincronizados entre sí. Red en estrella con nodo aislado o maestro, esta configuración es robusta frente a perturbaciones en sus parámetros ya que sólo pierde sincronía el nodo al que se le agrega la perturbación, mientras que el resto red permanece sincronizada; red con acoplamiento irregular sin nodo maestro (ver figura 111), cada configuración irregular tienen su comportamiento emergente particular, la que se vio en este ejemplo no es robusta frente a perturbaciones paramétricas, ya que sólo cuando el nodo más conectado (N_1) es perturbado el resto de los nodos permanece sincronizados, pero al perturbar cualquier otro de los nodos menos conectados la red pierde sincronía. Por último, se vio una red irregular con nodo maestro (ver figura 123), el comportamiento de esta configuración fue semejante al de la configuración irregular sin nodo maestro, por lo que se concluye que tampoco es robusta frente a variaciones en sus parámetros. El presente estudio sobre la sincronización de redes en diferentes topologías ante perturbaciones, sirve para tener una idea de que configuraciones de red son más robustas que otras, un trabajo a futuro será hacer un análisis general de robustez para cualquier tipo de red. Y un estudio de fallas en las redes, un problema muy actual.

Capítulo V

Análisis de robustez frente a perturbaciones paramétricas

En este capítulo se presenta un análisis de la sincronización, bajo perturbaciones no desvanecientes, de una red de dos nodos utilizando al oscilador de Chua con retardo de tiempo como nodo fundamental de la red. Recurrimos a la teoría de sistemas complejos para lograr la sincronización de nodos caóticos. Basándose en la teoría de estabilidad de Lyapunov para sistemas no lineales, se muestra que las trayectorias del error de sincronización perturbado tienen una cota final, siempre que el sistema del error de sincronización no perturbado sea exponencialmente estable y algunas condiciones para los términos de perturbación se satisfagan.

En las redes complejas es importante estar seguro de la sincronía de la red. Un problema fundamental en el análisis de convergencia de la sincronización de nodos caóticos, es la robustez con respecto al error de modelado, el envejecimiento de los componentes físicos, incertidumbres y perturbaciones que existen en cualquier problema real. Desde el punto de vista de la teoría de estabilidad de Lyapunov de sistemas no lineales, el efecto debido a perturbaciones paramétricas en el punto de equilibrio del sistema dinámico del error de sincronización puede ser nulo o no. El primer caso se llama perturbación desvaneciente, en este caso el punto de equilibrio del sistema dinámico del error de sincronización perturbado sigue siendo el mismo que el del sistema dinámico del error sin perturbar. El segundo caso, se llama perturbación no desvaneciente, para este caso, los puntos de equilibrio de los sistemas dinámicos del error perturbado y no perturbado no son los mismos. El sistema dinámico del error perturbado puede no tener un equilibrio en absoluto, en cuyo caso, no se puede estudiar el problema como la estabilidad del equilibrio. Por tanto, lo mejor que podemos esperar es que las trayectorias de estado del error de sincronización en última instancia estén limitadas por una cota final, si las perturbaciones satisfacen algunas condiciones.

V.1. Estabilidad de sistemas perturbados

Considere el siguiente sistema dinámico no lineal

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x) \tag{40}$$

donde $f : [0,\infty) \times D \to R^n$ y $g : [0,\infty) \times D \to R^n$ son continuas por tramos en t y localmente Lipschitz en x en el dominio $[0,\infty) \times D$ y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. Pensamos al modelo (40) como un sistema perturbado del siguiente sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{41}$$

El término de perturbación $g(t, x)$ puede provenir de errores de modelado, envejecimiento, incertidumbres, etc. Típicamente no conocemos el término $g(t, x)$ pero tenemos alguna información sobre él, por ejemplo una cota superior sobre $\|g(t, x)\|$. La representación aditiva de la perturbación en (40) modela, por ejemplo, perturbaciones que no modifican el orden del sistema.

Supongamos que el sistema nominal (41) tiene un punto de equilibrio uniforme y asintóticamente estable en el origen. ¿Qué podemos decir acerca de la estabilidad del sistema perturbado (40)? Una forma natural de encarar esta cuestión es la de usar una función de Lyapunov del sistema nominal como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado (40).

Existen dos casos, cuando la perturbación $g(t, 0) = 0$, el sistema perturbado (40) tiene al origen como punto de equilibrio. En este caso, podemos analizar el comportamiento de la estabilidad del origen como un punto de equilibrio del sistema perturbado. El segundo caso, es cuando $g(t, 0) \neq 0$, en este caso, el origen no será un punto de equilibrio del sistema perturbado. En este caso se estudia la cota final de las soluciones del sistema perturbado. Al primer caso, se le llama *perturbación desvaneciente* y al segundo *perturbación no desvaneciente.*

V.1.1. Perturbación desvaneciente

Supongamos entonces que $g(t, 0) = 0$ y que $x = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (41). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 , \tag{42a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 , \tag{42b}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \tag{42c}$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ y para ciertas constantes positivas $c_1 = \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{P})$, $c_2 = \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})$, $c_3 = \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{Q})$ y $c_4 = 2\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{P})$, donde $\mathbf{P}$ es la matriz definida positiva de la función de Lyapunov $V(t, x)$. Supongamos además que el término de perturbación $g(t, x)$ satisface la cota de crecimiento lineal

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\| , \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D \tag{43}$$

donde γ es una constante no negativa. La propiedad (43) es natural, dadas las hipótesis que hicimos sobre $g(t, x)$. Como $g(t, x)$ se anula en el origen y es localmente Lipschitz en un entorno acotado del origen, entonces es fácil de probar que satisface (43) en dicho entorno. Usamos $V(t, x)$ como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado (40). Planteamos

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x).$$

Usando (42b)-(43), acotamos $V(t,x)$ de la siguiente manera

$$\dot{V}(t,x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t,x)\| \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \gamma \|x\|^2 .$$

Si γ es lo suficientemente pequeña tal que satisface la cota

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4}, \tag{44}$$

entonces

$$\dot{\mathbf{V}}(t,x) \leq -(c_3 - c_4\gamma) \|x\|^2 < 0, \quad \forall x \in D - \{0\} .$$

Los argumentos de estabilidad para el sistema perturbado se establecen en el siguiente lema.

Lema 1 *[Khalil 2002] Sea $x = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (41). Sea $V(t,x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (42a)-(42c) en $[0,\infty) \times D$. Supongamos que el término de perturbación $g(t,x)$ satisface (43)-(44). Entonces el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado (40). Más aún, si las hipótesis valen globalmente, entonces el origen es globalmente y exponencialmente estable.*

Este lema es conceptualmente importante porque muestra que la estabilidad exponencial del origen, es robusta con respecto a una clase de perturbaciones que satisfacen (43)-(44). Para poder enunciar esta propiedad de robustez no es necesario conocer $\mathbf{V}(t,x)$ explícitamente, sólo hace falta saber que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal. Sin embargo, si no conocemos a $\mathbf{V}(t,x)$ explícitamente, entonces no podemos calcular la cota (44), en cuyo caso sólo podemos decir que el origen es exponencialmente estable para toda perturbación que satisface (43) con γ suficientemente pequeña.

V.1.2. Perturbación no desvaneciente

Pasemos ahora al caso más general, cuando no sabemos que $g(t,0) = 0$. El origen $x = 0$ no puede ser un punto de equilibrio del sistema perturbado (40). Por lo que ya no podemos estudiar al origen como un punto de equilibrio, ni podemos esperar que la solución del sistema perturbado tienda al origen cuando $t \to \infty$. Lo mejor que podemos esperar es que si el término de perturbación $g(t,x)$ es pequeño en cierto sentido, entonces $x(t)$ estará limitada por una cota pequeña; esto es, $\|x(t)\|$ será pequeña para un tiempo t suficientemente grande. Esto nos lleva al concepto de cota final o última.

Definición 1 *Se dice que las soluciones de $f(t,x)$ tienen una cota final, sí existen constantes positivas b y c, y para cada $\alpha \in (0,c)$ existe una constante positiva $T = T(\alpha)$ de tal manera que*

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Longrightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T. \tag{45}$$

Se dice que las soluciones del sistema están global y uniformemente limitadas si la desigualdad (45) se mantiene para valores arbitrariamente grandes de α.

Nos referiremos a la constante b en (45) como la cota final. Ahora veremos el caso cuando el origen del sistema nominal (41) es exponencialmente estable.

Lema 2 *[Khalil 2002] Sea $x = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (41). Sea $V(t, x)$ una función del sistema nominal que satisface* (42a)-(42c), *para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, donde $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$. Suponga que el término de perturbación satisface*

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,\theta r$$

para todo $t \geq 0$, todo $x \in D$ y una constante positiva $\theta < 1$. Entonces para todo $\|x(t_0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp\left[-\gamma(t - t_0)\right]\|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

y

$$\|x(t)\| < b, \quad \forall t \geq t_0 + T$$

para una T finita, donde

$$k = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \quad \gamma = \frac{(1 - \theta)c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{c_4}{c_3}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\frac{\delta}{\theta}.$$

Note que la cota final b en el Lema 2 es proporcional a la cota superior de la perturbación δ. Este resultado puede verse como una propiedad de robustez de los sistemas nominales que tienen un equilibrio exponencialmente estable en el origen, porque muestra que perturbaciones arbitrariamente pequeñas (acotadas uniformemente) no resultan en grandes desviaciones en estado estacionario del origen.

V.2. Análisis de estabilidad para una red de dos nodos

V.2.1. Caso nominal

Para una red de dos nodos con acoplamiento unidireccional, la matriz de acoplamiento es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

los valores propios para esta matriz de acoplamiento son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$, entonces el valor propio mayor es $\lambda_2 = -1$.

Aplicando el teorema 1 se tiene que $\bar{d} = 20$, entonces la constante de acoplamiento debe cumplir la desigualdad

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right| = \frac{20}{1}$$
$$c \geq 20.$$

Las ecuaciones de la red de dos nodos empleando el oscilador de Chua con retardo de tiempo (14)-(15), se describe como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{i1} + x_{i2} - f(x_{i1})) \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} \\ -\beta x_{i2} - \gamma x_{i3} - \beta\varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{i1}(t-\tau)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij} \mathbf{x}_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con

$$f(x_{i1}) = b x_{i1} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{i1}+1| - |x_{i1}-1|)$$

entonces para el nodo 1 (maestro)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{11} + x_{12} - f(x_{11})) \\ x_{11} - x_{12} + x_{13} \\ -\beta x_{12} - \gamma x_{13} - \beta\varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{11}(t-\tau)) \end{bmatrix}, \tag{46}$$

con

$$f(x_{11}) = b x_{11} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{11}+1| - |x_{11}-1|), \tag{47}$$

y para el nodo 2 (esclavo)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(-x_{21} + x_{22} - f(x_{21})) \\ x_{21} - x_{22} + x_{23} \\ -\beta x_{22} - \gamma x_{23} - \beta\varepsilon \operatorname{sen}(\sigma x_{21}(t-\tau)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c(x_{11} - x_{21}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

con

$$f(x_{21}) = b x_{21} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{21}+1| - |x_{21}-1|). \tag{49}$$

En particular, para esta red simple de dos nodos, decimos que el esclavo (48)-(49) sincroniza con el nodo maestro hipercaótico (46)-(47) sí [Cruz-Hernández y Martynyuk 2010]:

$$\lim_{t\to\infty} (\mathbf{e}(t)) = 0 \tag{50}$$

sin importar la condición inicial $\mathbf{e}(0)$ que tenga. Donde $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ corresponde al error de sincronización, definido por:

$$e_1(t) = x_{11}(t) - x_{21}(t), \quad e_2(t) = x_{12}(t) - x_{22}(t), \quad e_3(t) = x_{13}(t) - x_{23}(t) \tag{51}$$

Entonces, usando (51), las ecuaciones de estado del error dinámico de sincronía son las siguientes

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha\left(f(x_{11}) - f(x_{21})\right) \\ 0 \\ -\beta\varepsilon\left[\operatorname{sen}(\sigma x_{11}(t-\tau)) - \operatorname{sen}(\sigma x_{21}(t-\tau))\right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ce_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

agrupando los términos del error de sincronía tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\alpha\left(1+b\right)+c\right) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha\left(a-b\right)\left(sat(x_{11}) - sat(x_{21})\right) \\ 0 \\ -\beta\varepsilon\left[\operatorname{sen}(\sigma x_{11}(t-\tau)) - \operatorname{sen}(\sigma x_{21}(t-\tau))\right] \end{bmatrix} \tag{52}$$

después de haber utilizado la igualdad

$$sat(x) = \frac{1}{2}\left(|x+1| - |x-1|\right).$$

El criterio para la estabilidad global en el origen del sistema dinámico del error (52), está dado por el siguiente teorema.

Teorema 2 *El vector de estados del esclavo (48)-(49) sincroniza asintóticamente con el vector de estados del maestro hipercaótico (46)-(47), en el sentido de la condición (50), sí*

$$c > \alpha\left(\frac{\beta}{4\gamma}(\varepsilon\sigma)^2 + |a-b| - b\right). \tag{53}$$

Prueba. Considere la siguiente función candidata a función de Lyapunov $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$, donde la matriz $\mathbf{P}$ está dada por

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

la cual, es una matriz definida positiva. La derivada con respecto al tiempo de $V(\mathbf{e})$ a través de las trayectorias del sistema del error de sincronía (52), está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{e}) &= \frac{1}{\alpha}e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + \frac{1}{\beta}e_3\dot{e}_3 \\
\dot{V}(\mathbf{e}) &= -\left(b+\frac{c}{\alpha}\right)e_1^2 - \left(e_1^2 - 2e_1e_2 - e_2^2\right) - \frac{\gamma}{\beta}e_3^2 - e_1\left(a-b\right)\left(sat(x_{11}) - sat(x_{21})\right) \\
&\quad -\varepsilon e_3(\mathrm{sen}(\sigma x_{11}\left(t-\tau\right)) - \mathrm{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right)))
\end{aligned}$$

usando las desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left|sat(x) - sat(y)\right| &\leq \left|x-y\right|, \\
\left|\mathrm{sen}\left(x\right) - \mathrm{sen}\left(y\right)\right| &\leq \left|x-y\right|
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\left(b+\frac{c}{\alpha} - \left|(a-b)\right|\right)e_1^2 - \left(e_1-e_2\right)^2 - \frac{\gamma}{\beta}e_3^2 + \left|\varepsilon\sigma\right|\left|e_3\right|\left|e_1\left(t-\tau\right)\right|.$$

El término con retardo en el tiempo $e_1\left(t-\tau\right)$ se puede expandir en series de Taylor de la siguiente manera

$$e_1\left(t-\tau\right) = e_1\left(t\right) - \tau\dot{e}_1\left(t\right) + \frac{1}{2}\tau^2\ddot{e}_1\left(t\right) - \frac{1}{3!}\tau^3 e_1^{(3)}\left(t\right) + \ldots. \tag{55}$$

.

Como deseamos que los osciladores sincronicen en régimen caótico, la constante de retardo τ sólo puede tomar valores pequeños. En este caso, se está usando $\tau = 0.001$, con este valor de la constante de retardo de tiempo se puede utilizar la siguiente aproximación

$$e_1\left(t-\tau\right) \approx e_1\left(t\right). \tag{56}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{e}) &\leq -\left(b+\frac{c}{\alpha} - \left|(a-b)\right|\right)e_1^2 - \left(e_1-e_2\right)^2 - \frac{\gamma}{\beta}e_3^2 + \left|\varepsilon\sigma\right|\left|e_3e_1\right|) \\
&\leq -\begin{bmatrix} \left|e_1\right| & \left|e_2\right| & \left|e_3\right| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b+\frac{c}{\alpha}-\left|(a-b)\right|+1 & -1 & -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| & 0 & \frac{\gamma}{\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left|e_1\right| \\ \left|e_2\right| \\ \left|e_3\right| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} b+\frac{c}{\alpha}-\left|(a-b)\right|+1 & -1 & -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| & 0 & \frac{\gamma}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Es claro que $\mathbf{Q}$ es una matriz definida positiva, por tanto $\dot{V}(\mathbf{e}) < 0$ sí

$$c > \alpha\left(\frac{\beta}{4\gamma}(\varepsilon\sigma)^2 + \left|a-b\right| - b\right) = 17.309 \tag{57}$$

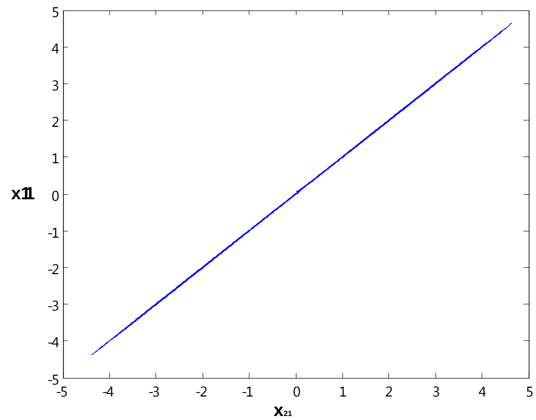

Figura 135: Diagrama de fase x_{11} vs x_{21} de la red maestro y esclavo sin perturbar.

Entonces, de acuerdo con la teoría de estabilidad de Lyapunov, el origen del sistema dinámico del error de sincronía (52) es asintóticamente estable. □

Con una constante de acoplamiento $c = 25$ se cumplen las desigualdades (10) y (57), y con esto, se logra la sincronización maestro y esclavo, es decir, entre los nodos hipercaóticos (46)-(47) and (48)-(49). En la figura 135 podemos ver el diagrama de fase de x_{11} vs x_{21}.

Con este valor de c y linealizando la ecuación del error de sincronización (52) se obtiene la matriz

$$\frac{\partial f(e)}{\partial e}|_{e=0} = \begin{bmatrix} -\left[\alpha\left(b+1\right)+c\right] & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix},$$

la cual es Hurwitz, por lo que el sistema dinámico del error (52) es exponencialmente estable.

V.2.2. Caso perturbado

En esta sección veremos el caso cuando la perturbación está presente sólo en el nodo esclavo. Las ecuaciones del nodo maestro son las mismas que en (46)-(47) y las ecuaciones del nodo esclavo ahora son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\Delta\alpha)\left(-x_{21}+x_{22}-f(x_{21})\right) \\ x_{21}-x_{22}+x_{23} \\ -(\beta+\Delta\beta)x_{22}-(\gamma+\Delta\gamma)x_{23}-(\beta+\Delta\beta)(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right)) \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$+\begin{bmatrix} c\left(x_{11}-x_{21}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{59}$$

con

$$f\left(x_{21}\right)=bx_{21}+\frac{1}{2}\left(a-b\right)\left(\left|x_{21}+1\right|-\left|x_{21}-1\right|\right) \tag{60}$$

Las ecuaciones de estado del error de sincronización perturbado son

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha\left(f(x_{11})-f(x_{21})\right) \\ 0 \\ -\beta\varepsilon\left[\operatorname{sen}(\sigma x_{11}\left(t-\tau\right))-\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))\right] \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \Delta\alpha x_{21}-\Delta\alpha x_{22}+\Delta\alpha f(x_{21}) \\ 0 \\ +(\beta\Delta\varepsilon+\Delta\beta\varepsilon+\Delta\beta\Delta\varepsilon)\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))+\Delta\beta x_{22}+\Delta\gamma x_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ce_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

separando los términos de las funciones no lineales del oscilador de Chua con retardo de tiempo, tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\left(1+b\right)-c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{61}$$
$$+\begin{bmatrix} -\alpha\left(a-b\right)\left(sat(x_{11})-sat(x_{21})\right) \\ 0 \\ -\beta\varepsilon\left[\operatorname{sen}(\sigma x_{11}\left(t-\tau\right))-\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))\right] \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} \Delta\alpha(1+b)x_{21}-\Delta\alpha x_{22}+\Delta\alpha(a-b)sat(x_{21}) \\ 0 \\ (\beta\Delta\varepsilon+\Delta\beta\varepsilon+\Delta\beta\Delta\varepsilon)\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))+\Delta\beta x_{22}+\Delta\gamma x_{23} \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones del sistema del error de sincronía perturbado (61) las podemos separar en dos partes, en las ecuaciones del error sin perturbar

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\left(1+b\right)-c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{62}$$
$$+\begin{bmatrix} -\alpha\left(a-b\right)\left(sat(x_{11})-sat(x_{21})\right) \\ 0 \\ -\beta\varepsilon\left[\operatorname{sen}(\sigma x_{11}\left(t-\tau\right))-\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))\right] \end{bmatrix}$$

y un término de perturbación

$$g(\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \Delta\alpha(1+b)x_{21} - \Delta\alpha x_{22} + \Delta\alpha(a-b)sat(x_{21}) \\ 0 \\ (\beta\Delta\varepsilon + \Delta\beta\varepsilon + \Delta\beta\Delta\varepsilon)\,\mathrm{sen}(\sigma x_{21}\,(t-\tau)) + \Delta\beta x_{22} + \Delta\gamma x_{23} \end{bmatrix}. \qquad (63)$$

Para analizar la estabilidad del sistema del error de sincronía perturbado (61), se hacen las siguientes suposiciones:

(**A1**) *El origen del sistema del error de sincronía sin perturbar (62) es un punto de equilibrio exponencialmente estable.*

Si se satisface la suposición (**A1**), entonces el lema 2 puede usarse para determinar la estabilidad del sistema del error de sincronía perturbado (62), el cual, garantiza la existencia de una función de Lyapunov $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$. La primer parte de las ecuaciones del sistema del error de sincronía perturbado (62) es igual que las ecuaciones del sistema del error de sincronía sin perturbar (52), por lo que es exponencialmente estable y la matriz de su función de Lyapunov es (54). La función de Lyapunov $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$ satisface las condiciones (42b)-(42c) con $c_1 = 0.0256$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.006$ y $c_4 = 1$.

(**A2**) *El término de perturbación $g(\mathbf{e})$ satisface la cota*

$$\begin{aligned} \|g(\mathbf{e})\|_2 \;\leq\; & \|x_2\|_2\sqrt{(\Delta\alpha(1+b))^2 + (-\Delta\alpha)^2} + |\Delta\alpha(a-b)| + |(\beta\Delta\varepsilon + \Delta\beta\varepsilon + \Delta\beta\Delta\varepsilon)| \\ & + \|x_2\|_2\sqrt{\Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2} \end{aligned}$$

usando las desigualdades:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt[2]{n}\,\|x\|_2\,, \\ |ax_1 + bx_2 + cx_3| &\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\|x\|_2\,, \\ |sat\,(x)| &\leq 1, \\ |\mathrm{sen}(x)| &\leq 1 \end{aligned}$$

con $\delta = r_x\sqrt{(\Delta\alpha(1+b))^2 + (\Delta\alpha)^2} + |\Delta\alpha(a-b)|$ *y* $l = |(\beta\Delta\varepsilon + \Delta\beta\varepsilon + \Delta\beta\Delta\varepsilon)| + r_x\sqrt{\Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}$. *Para todo* $t > 0$ *y para todo* $\mathbf{e}(t) \in R^2$ *y* $l, \delta > 0$.

Ahora, estamos en condiciones de declarar el principal resultado de este capítulo de la siguiente manera.

Teorema 3 Asúmase que las suposiciones (**A1**) y (**A2**) se cumplen. Entonces, para todo error $\|\mathbf{e}(0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\,r_e$, existen constantes $\bar{\delta}$, $\bar{l} \geq 0$ tales que, la solución $\mathbf{e}(t)$ del sistema del error de sincronización perturbado (61) tiene una cota final b para toda $t > 0$ en función de $\bar{\delta}$, $\bar{l}$ y para todo término de perturbación $\|g(e)\|_2 = r_x\sqrt{(\Delta\alpha(1+b))^2 + (\Delta\alpha)^2} + |\Delta\alpha(a-b)| + |(\beta\Delta\varepsilon + \Delta\beta\varepsilon + \Delta\beta\Delta\varepsilon)| + \|x_2\|_2\sqrt{\Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}$ que satisface (**A2**) con $\delta \leq \bar{\delta}$ y $l \leq \bar{l}$.

Prueba. La derivada con respecto al tiempo de $V(\mathbf{e})$ a través de las trayectorias del sistema del error de sincronización perturbado (61), está dada por

$$
\begin{aligned}
\dot{V}\left(\mathbf{e}\right) &\leq -(b+\frac{c}{\alpha}-|a-b|)e_1^2-(e_1-e_2)^2-\frac{\gamma}{\beta}e_3^2+\left|\varepsilon\sigma\right|\left|e_1e_3\right| \\
&+\frac{1}{\alpha}e_1(\Delta\alpha(1+b)x_{21}-\Delta\alpha x_{22}+\Delta\alpha(a-b)sat(x_{21})) \\
&+\frac{1}{\beta}e_3[(\beta\Delta\varepsilon+\Delta\beta\varepsilon+\Delta\beta\Delta\varepsilon)\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))+\Delta\beta x_{22}+\Delta\gamma x_{23}] \\
&\leq -\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+\frac{c}{\alpha}-\left|(a-b)\right|+1 & -1 & -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left|\varepsilon\sigma\right| & 0 & \frac{\gamma}{\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{\alpha}e_1\left[\Delta\alpha(1+b)x_{21}-\Delta\alpha x_{22}+\Delta\alpha(a-b)sat(x_{21})\right] \\
&+\frac{1}{\beta}e_3\left[(\beta\Delta\varepsilon+\Delta\beta\varepsilon+\Delta\beta\Delta\varepsilon)\operatorname{sen}(\sigma x_{21}\left(t-\tau\right))+\Delta\beta x_{22}+\Delta\gamma x_{23}\right] \\
&\leq -\left\|\mathbf{Q}\right\|\left\|e\right\|_2^2+\frac{1}{\alpha}\left\|e_1\right\|_2\left[r_x\sqrt{\left(\Delta\alpha(1+b)\right)^2+\left(-\Delta\alpha\right)^2}+\left|\Delta\alpha(a-b)\right|\right] \\
&+\frac{1}{\beta}\left\|e_3\right\|_2\left[\left|(\beta\Delta\varepsilon+\Delta\beta\varepsilon+\Delta\beta\Delta\varepsilon)\right|+r_x\sqrt{\Delta\beta^2+\Delta\gamma^2}\right]
\end{aligned}
$$

$_2 < r_x$, entonces

$$
\begin{aligned}
\dot{V}\left(e\right) &\leq -c_3\left\|e\right\|_2^2-(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{l}{\beta})\left\|e\right\|_2 \\
&\leq -(1-\theta)c_3\left\|e\right\|_2^2-\theta c_3\left\|e\right\|_2^2+\frac{\delta}{\alpha}\left\|e\right\|_2
\end{aligned}
$$

para una constante θ tal que $0<\theta<1$. Si δ y l satisfacen las cotas

$$\delta \leq \bar{\delta} < \alpha\theta c_3\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}r_e-\frac{\alpha l}{\beta} > 0, \tag{64}$$

$$l \leq \bar{l} < \beta\theta c_3\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}r_e \tag{65}$$

con una constante positiva r_e tal que $\|e\| \leq r_e$, entonces

$$\dot{V}\left(\mathbf{e}\right) \leq -\left(1-\theta\right)c_3\left\|e\right\|_2^2, \quad \forall\left\|e\right\|_2 \geq \mu = \frac{1}{\theta c_3}(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{l}{\beta})$$

y la cota final para el error de sincronía perturbado está determinada por

$$b = \frac{1}{\theta c_3}\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{l}{\beta}).$$

$\square$

Note que la cota final b es proporcional al límite superior de la perturbación. Este resultado puede ser visto como una propiedad de robustez del sistema del error de sincronización perturbado (61), teniendo un equilibrio asintóticamente estable en el origen. En otras palabras, este resultado muestra que perturbaciones no desvanecientes arbitrariamente pequeñas no resultan en un gran error de sincronización.

Ahora, en la desigualdad (65) con $\theta = 0.99$ y $r_e = 0.15$, $\bar{l} < 3.9374 \times 10^{-3}$ con $r_x = 9$ el valor de l debe ser

$$l = |(\beta\Delta\varepsilon + \Delta\beta\varepsilon + \Delta\beta\Delta\varepsilon)| + r_x\sqrt{\Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2} < 3.9374 \times 10^{-3}$$

para complementar esta desigualdad $\Delta\beta$, $\Delta\varepsilon$ y $\Delta\gamma$ deben tomar valores entre $\pm 1.213 \times 10^{-4}$. Con $\Delta\beta = \Delta\varepsilon = \Delta\gamma = 0.0001$ el valor de l es $l = 3.2 \times 10^{-3} < \bar{l}$. Con este valor de l y usando la desigualdad (64), $\bar{\delta} = 3.7760 \times 10^{-4}$ con $r_x = 9$ el valor de δ debe ser

$$\delta = r_x\sqrt{(\Delta\alpha(1+b))^2 + (-\Delta\alpha)^2} + |\Delta\alpha(a-b)| < 3.776\,0 \times 10^{-4},$$

para complementar esta desigualdad $\Delta\alpha$ debe tomar valores entre $\pm 1.83 \times 10^{-5}$. Con $\Delta\alpha = 1.8 \times 10^{-5}$ el valor de δ es $\delta = 3.71 \times 10^{-4}$ y la cota final es $b = 0.15$.

La figura 136 muestra el comportamiento del error de sincronización del sistema perturbado, podemos ver como el error permanece dentro de la cota final b calculada, mientras que la figura 137 muestra la sincronización de los tres estados de la red maestro y esclavo bajo perturbaciones paramétricas. La figura 137(a) muestra el estado x_{21} del esclavo perturbado (línea punteada) sincronizad al estado x_{11} del nodo maestro. La figura 137(b) muestra el segundo estado del nodo esclavo x_{22} (línea punteada) sincronizado al estado x_{12} del nodo maestro y la figura 137(c) muestra al tercer estado del nodo esclavo x_{23} (línea punteada) sincronizado al estado x_{13} del nodo maestro.

V.3. Conclusiones

En este capítulo se estableció un criterio de estabilidad para la sincronización robusta de dos nodos osciladores de Chua con retardo de tiempo, bajo perturbaciones no desvanecientes. Se invocaron los resultados de la teoría de sistemas complejos y estabilidad en el sentido de Lyapunov basados en la teoría de control no lineal. Se utilizaron dos osciladores de Chua con retardo de tiempo para demostrar la robustez de sincronía de la red simple. Se demostró analíticamente que la sincronización de una red simple de dos nodos, usando la configuración de acoplamiento reportada en [Wang, 2002], es robusta bajo perturbaciones no desvanecientes.

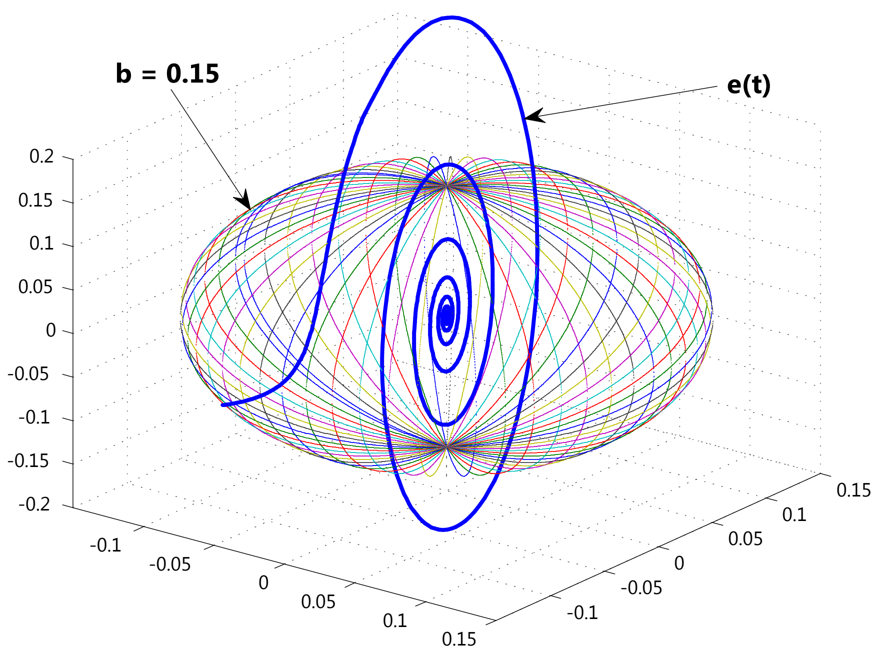

Figura 136: Comportamiento del error de sincronización $\mathbf{e}(t)$ del sistema perturbado, el cual, se encuentra completamente dentro de la bola formada por la cota final b.

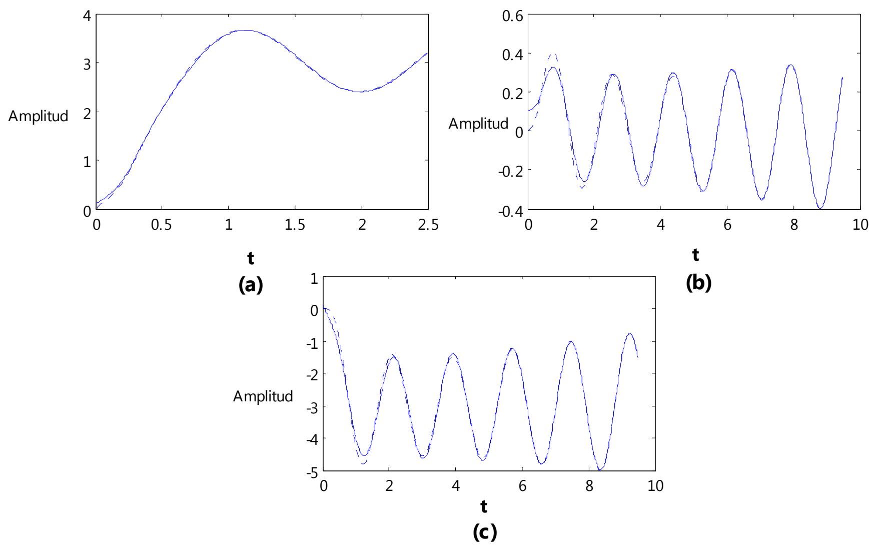

Figura 137: Sincronización de la red maestro y esclavo bajo perturbaciones: (a) muestra el estado x_{21} del nodo esclavo perturbado (línea punteada) siguiendo al estado x_{11} del nodo maestro (línea continua). (b) muestra el segundo estado del nodo esclavo x_{22} (línea punteada) siguiendo al estdo x_{12} del nodo maestro (línea continua) y (c) muestra al tercer estado del nodo esclavo x_{23} (línea punteada) siguiendo al estado x_{13} del nodo maestro (línea continua).

Capítulo VI

Sincronización de CNNs

En este capítulo se estudiará la sincronización de redes neuronales celulares, utilizando la configuración en estrella y la de vecino más cercano. Se utilizará como nodo fundamental a la red neuronal celular (CNN) descrita en el capítulo 3. Posteriormente, en el siguiente capítulo se ilustrará una aplicación de esta sincronización, a transmisión de información encriptada en redes seguras.

VI.1. Sincronización de CNNs en 3D con acoplamiento en estrella

En esta sección, primero se mostrará la construcción de dos redes dinámicas en estrella, considerando dos escenarios de acoplamiento: red en estrella con nodo maestro y sin nodo maestro, usando como nodo fundamental de la red a la CNN en 3D descritas en (18)-(19). Finalmente, se mostrará por medio de simulaciones numéricas la sincronización de la red dinámica diseñada.

La red dinámica compleja a construirse con CNNs en 3D (18)-(19), toma la siguiente forma (de acuerdo con las ecuaciones de red (1)-(2)),

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= -x_{i1} + T_{11}\tanh(x_{i1}) + T_{12}\tanh(x_{i2}) + T_{13}\tanh(x_{i3}) + u_{i1}, \\ \dot{x}_{i2} &= -x_{i2} + T_{21}\tanh(x_{i1}) + T_{22}\tanh(x_{i2}) + T_{23}\tanh(x_{i3}), \\ \dot{x}_{i3} &= -x_{i3} + T_{31}\tanh(x_{i1}) + T_{32}\tanh(x_{i2}) + T_{33}\tanh(x_{i3}), \end{aligned} \tag{66}$$

con $i = 1, 2, \ldots, N$ y con una señal de entrada definida por

$$u_{i1} = c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma x_{j1}. \tag{67}$$

Sí la señal de entrada (67) es $u_{i1} \equiv 0$ para $i = 1, 2, \ldots, N$, entonces tendremos el conjunto original de N CNN en 3D desacopladas (18)-(19), las cuales evolucionan de acuerdo con sus propias dinámicas y por supuesto los N *nodos desacoplados no estarán sincronizados.* En particular, para la red (66)-(67), consideramos $N = 5$ y $\Gamma = (1, 0, 0)$ por lo que tenemos *5* nodos de CNN en 3D componiendo a la red dinámica en estrella a ser sincronizada.

Reescribamos detalladamente los arreglos para cada uno de los 5 nodos de la red dinámica en estrella (66)-(67). El primer nodo CNN en 3D está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{11} &= -x_{11} + T_{11}\tanh(x_{11}) + T_{12}\tanh(x_{12}) + T_{13}\tanh(x_{13}) + u_{11},\\
\dot{x}_{12} &= -x_{12} + T_{21}\tanh(x_{11}) + T_{22}\tanh(x_{12}) + T_{23}\tanh(x_{13}),\\
\dot{x}_{13} &= -x_{13} + T_{31}\tanh(x_{11}) + T_{32}\tanh(x_{12}) + T_{33}\tanh(x_{13}),\\
u_{11} &= c\left(a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} + a_{14}x_{41} + a_{15}x_{51}\right),
\end{aligned} \tag{68}$$

el segundo está descrito por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{21} &= -x_{21} + T_{11}\tanh(x_{21}) + T_{12}\tanh(x_{22}) + T_{13}\tanh(x_{23}) + u_{21},\\
\dot{x}_{22} &= -x_{22} + T_{21}\tanh(x_{21}) + T_{22}\tanh(x_{22}) + T_{23}\tanh(x_{23}),\\
\dot{x}_{23} &= -x_{23} + T_{31}\tanh(x_{21}) + T_{32}\tanh(x_{22}) + T_{33}\tanh(x_{23}),\\
u_{21} &= c\left(a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} + a_{24}x_{41} + a_{25}x_{51}\right),
\end{aligned} \tag{69}$$

el tercero por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{31} &= -x_{31} + T_{11}\tanh(x_{31}) + T_{12}\tanh(x_{32}) + T_{13}\tanh(x_{33}) + u_{31},\\
\dot{x}_{32} &= -x_{32} + T_{21}\tanh(x_{31}) + T_{22}\tanh(x_{32}) + T_{23}\tanh(x_{33}),\\
\dot{x}_{33} &= -x_{33} + T_{31}\tanh(x_{31}) + T_{32}\tanh(x_{32}) + T_{33}\tanh(x_{33}),\\
u_{31} &= c\left(a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} + a_{34}x_{41} + a_{35}x_{51}\right),
\end{aligned} \tag{70}$$

el cuarto por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{41} &= -x_{41} + T_{11}\tanh(x_{41}) + T_{12}\tanh(x_{42}) + T_{13}\tanh(x_{43}) + u_{41},\\
\dot{x}_{42} &= -x_{42} + T_{21}\tanh(x_{41}) + T_{22}\tanh(x_{42}) + T_{23}\tanh(x_{43}),\\
\dot{x}_{43} &= -x_{43} + T_{31}\tanh(x_{41}) + T_{32}\tanh(x_{42}) + T_{33}\tanh(x_{43}),\\
u_{41} &= c\left(a_{41}x_{11} + a_{42}x_{21} + a_{43}x_{31} + a_{44}x_{41} + a_{45}x_{51}\right),
\end{aligned} \tag{71}$$

y el quinto como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{51} &= -x_{51} + T_{11}\tanh(x_{51}) + T_{12}\tanh(x_{52}) + T_{13}\tanh(x_{53}) + u_{51},\\
\dot{x}_{52} &= -x_{52} + T_{21}\tanh(x_{51}) + T_{22}\tanh(x_{52}) + T_{23}\tanh(x_{53}),\\
\dot{x}_{53} &= -x_{53} + T_{31}\tanh(x_{51}) + T_{32}\tanh(x_{52}) + T_{33}\tanh(x_{53}),\\
u_{51} &= c\left(a_{51}x_{11} + a_{52}x_{21} + a_{53}x_{31} + a_{54}x_{41} + a_{55}x_{51}\right).
\end{aligned} \tag{72}$$

En la siguiente parte, se mostrarán dos topologías de conexión en estrella para la red de 5 nodos en dos casos: arreglo con nodo maestro y sin nodo maestro.

Caso 1 (Red en estrella sin nodo maestro): *Se conectarán 5 nodos de CNN en 3D (18)-(19) en una red con configuración en estrella, ver figura 138(a).*

La matriz de acoplamiento (11) para este caso está dada por

$$\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

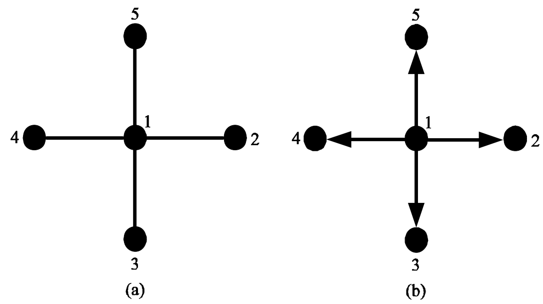

Figura 138: 5 nodos CNN en 3D con topología en estrella sin nodo maestro (a) y con nodo maestro (b).

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ y $\lambda_5 = -5$. Para propósitos de sincronización, se diseñaron las entradas de acoplamiento $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, que explícitamente están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} u_{11} &= c\left(-4x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}\right), \\ u_{21} &= c\left(x_{11} - x_{21}\right), \\ u_{31} &= c\left(x_{11} - x_{31}\right), \\ u_{41} &= c\left(x_{11} - x_{41}\right), \\ u_{51} &= c\left(x_{11} - x_{51}\right). \end{aligned} \tag{73}$$

Para construir la red con acoplamiento en estrella sin nodo maestro, mostrada en la figura 138(a), se emplearon las ecuaciones (68)-(72) con las señales de entrada (73). Se utilizaron las siguientes condiciones iniciales: $x_{11}(0) = 0.14$, $x_{12}(0) = 0.5$, $x_{13}(0) = 0.1$, $x_{21}(0) = 0.15$, $x_{22}(0) = 0.6$, $x_{23}(0) = 0.2$, $x_{31}(0) = 0.16$, $x_{32}(0) = 0.7$, $x_{33}(0) = 0.05$, $x_{41}(0) = 0.13$, $x_{42}(0) = 0.4$, $x_{43}(0) = 0.25$, $x_{51}(0) = 0.12$, $x_{52}(0) = 0.45$ y $x_{53}(0) = 0.3$. Con $d = 1$ se pudieron estabilizar a cero todos los estados de un nodo aislado. Con $\bar{d} = -1$, podemos obtener de la ecuación (10), $c \geq 1$, para las simulaciones en computadora se utilizó $c = 70$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización de la red de 5 nodos. La figura 139 muestra sincronización en el primer estado de los 5 nodos de la red, x_{i1}, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y el atractor caótico correspondiente a un nuevo comportamiento colectivo de la red dinámica (68)-(72) con señales de entrada (73), proyectado en el espacio $\left(x_{11}, x_{12}, x_{13}\right)$.

Caso 2 (Red en estrella con nodo maestro): *5 nodos caóticos CNN en 3D, desacoplados (18)-(19), serán sincronizados en una configuración de red en estrella con nodo maestro, ver figura 138(b).*

Para construir el arreglo propuesto se utilizaron las señales de acoplamiento x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ de los 5 nodos CNN en 3D. Para esto se diseñaron las señales de entrada $u_{i1} =$

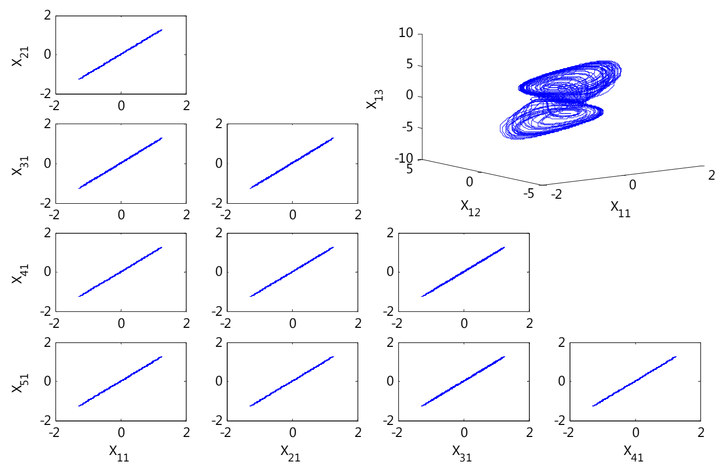

Figura 139: Sincronización del primer estado (x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración en estrella sin nodo maestro y el nuevo atractor caótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

$g(x_{i1}; c)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0, \\ u_{21} &= c\left(x_{11} - x_{21}\right), \\ u_{31} &= c\left(x_{11} - x_{31}\right), \\ u_{41} &= c\left(x_{11} - x_{41}\right), \\ u_{51} &= c\left(x_{11} - x_{51}\right). \end{aligned} \tag{74}$$

Ahora, usando (68)-(72) con señales de entrada (74) para los nodos caóticos, hemos construido la red en estrella con nodo 1 maestro mostrada en la figura 138(b). La matriz de acoplamiento para esta red es

$$\mathbf{A}_{st}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$. Las condiciones iniciales y las constantes $\bar{d}$ y d son las mismas que en el caso previo y con constante de acoplamiento $c = 2$. Con estos valores, el teorema 1 garantiza la sincronización caótica en la red dinámica con 5 nodos. La figura. 140 muestra la sincronización del primer estado de cada uno de los 5 nodos, es decir, x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ y el atractor caótico del *comportamiento colectivo impuesto por el nodo maestro* en la red dinámica, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

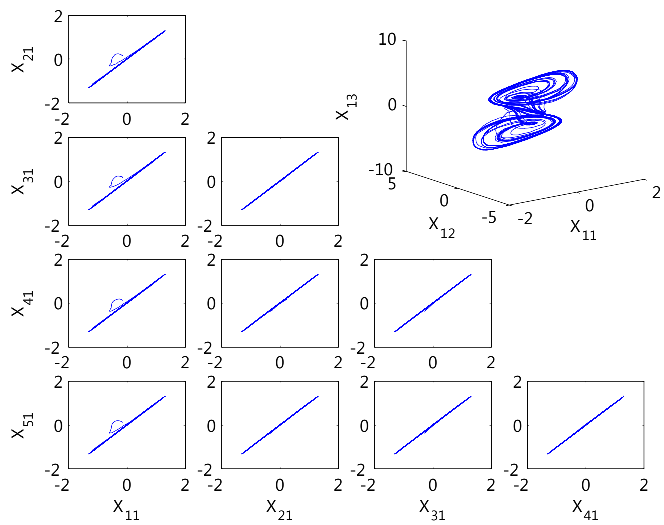

Figura 140: Sincronización del primer estado (x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración en estrella con nodo maestro y el nuevo atractor caótico del comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

Nota: *Es importante mencionar que la sincronización sólo fue alcanzada en el primer estado de los nodos de la red, en la red sin nodo maestro (es decir, en el segundo y tercer estado la sincronización es aproximada, que quiere decir que el error de sincronización es aproximadamente cero). Mientras en el segundo caso con el nodo 1 como nodo maestro, se logró una sincronización exacta en todos los estados. Esta es una propiedad a enfatizar que puede ser aplicada en el diseño sistemas de comunicación de redes.*

VI.1.1. Conclusiones

En esta sección, se presentó la sincronización de múltiples CNNs en 3D acopladas. Se logró la sincronización de la red compleja en estrella diseñada en dos escenarios, con y sin nodo maestro caótico. Se mostró que es posible alcanzar sincronización completa en la red con nodo maestro caótico, donde el comportamiento colectivo en la red es impuesto por el nodo maestro caótico. Mientras que para la red sin nodo maestro, la sincronización en los segundo y terceros estados es sólo aproximada, y el comportamiento colectivo de la red es un nuevo estado caótico.

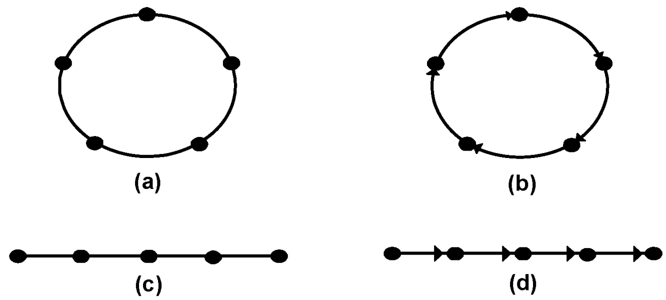

Figura 141: a) Red con acoplamiento de vecino más cercano, b) Red con acoplamiento de anillo dirigido, c) Red con acoplamiento de anillo abierto (camino) y d) Red con acoplamiento de camino dirigido.

VI.2. Sincronización de CNNs en 3D acopladas en configuración de vecino más cercano

En esta sección se estudia numéricamente la sincronización de redes neuronales celulares (CNNs) en arreglos acoplados en configuración de vecino más cercano. Usando la teoría de sistemas complejos se logra la sincronización de múltiples CNNs. En particular, consideramos redes dinámicas compuestas por CNNs en 3D descritas por (18)-(19)), como nodo fundamental de la red, donde las interacciones en las redes se definen por el acoplamiento del primer estado de cada nodo de la red. Se consideran cuatro casos de interés: i) sincronización sin maestro caótico, ii) configuración maestro y esclavo (anillo dirigido), iii) configuración de anillo abierto (camino) y iv) configuración de camino dirigido (ver figura 141).

Como en esta sección se utilizará el mismo sistema dinámico que la sección anterior como nodo fundamental de la red. Las ecuaciones de la red son las mismas que en (66) y (67) y las ecuaciones desarrolladas de la red, las mismas que (68)-(72). En los siguientes casos que se verán la topología de acoplamiento de la red la dará la configuración de las entradas u_{i1} para cada caso.

Caso 1 (Red sin nodo maestro): *5 nodos caóticos CNNs en 3D desacoplados (18)-(19) serán sincronizados en una red dinámica con configuración de vecino más cercano sin nodo maestro, ver figura 141(a).*

La matriz de acoplamiento definida por (11) para este caso con $K = 2$, está dada por

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

y el segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{2/2} \sin^2 (j\pi/5) = -1.382.$$

Para construir el arreglo anterior, se han diseñado las señales de entrada $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, las cuales están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_{11} &= c(-2x_{11} + x_{21} + x_{51}), \\ u_{21} &= c(x_{11} - 2x_{21} + x_{31}), \\ u_{31} &= c(x_{21} - 2x_{31} + x_{41}), \\ u_{41} &= c(x_{31} - 2x_{41} + x_{51}), \\ u_{51} &= c(x_{41} - 2x_{51} + x_{11}). \end{aligned} \tag{75}$$

Para construir la red con acoplamiento de vecino más cercano sin nodo maestro mostrada en la figura 141(a), usamos las ecuaciones (68)-(72) con señales de entrada (75). Tomamos las siguientes condiciones iniciales: $x_{11}(0) = 0.14$, $x_{12}(0) = 0.5$, $x_{13}(0) = 0.1$, $x_{21}(0) = 0.15$, $x_{22}(0) = 0.6$, $x_{23}(0) = 0.2$, $x_{31}(0) = 0.16$, $x_{32}(0) = 0.7$, $x_{33}(0) = 0.05$, $x_{41}(0) = 0.13$, $x_{42}(0) = 0.4$, $x_{43}(0) = 0.25$, $x_{51}(0) = 0.12$, $x_{52}(0) = 0.45$ y $x_{53}(0) = 0.3$. Con $d = -1$ podemos estabilizar a cero todos los estados de un nodo aislado. Con $\bar{d} = -1$, podemos obtener de la ecuación (10), $c \geq 0.7236$, para las simulaciones por computadora usaremos la constante de acoplamiento $c = 70$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización de la red de 5 nodos caóticos. La figura 142 muestra sincronización caótica en el primer estado de los 5 nodos de la red, x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$ y el atractor caótico corresponde a un *comportamiento caótico colectivo nuevo* en la red dinámica (68)-(72) con señales de entrada (75), proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}). Las figuras 143 y 144 muestran los diagramas de fase de los segundos y terceros estados respectivamente, de estas figuras podemos observar que los segundos y terceros estado de los nodos de la red no sincronizan.

Caso 2 (Anillo dirigido): *5 nodos caóticos CNNs en 3D desacoplados(18)-(19) a ser sincronizados en una red de vecino más cercano con configuración de anillo dirigido, ver figura 141(b).*

Para construir el arreglo propuesto, se usaron las señales de acoplamiento x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ para los 5 nodos CNN en 3D. Para este propósito, se diseñaron las señales de entrada $u_{i1} = g(x_{i1}; c)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ que explícitamente están dadas por

$$\begin{aligned} u_{11} &= c(-x_{11} + x_{51}), \\ u_{21} &= c(x_{11} - x_{21}), \\ u_{31} &= c(x_{21} - x_{31}), \\ u_{41} &= c(x_{31} - x_{41}), \\ u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}). \end{aligned} \tag{76}$$

Ahora, usando las ecuaciones (68)-(72) con señales de entrada (76), se construyó la red de vecino más cercano con configuración de anillo dirigido que se muestra en la figura 141(b) a ser sincronizada. Para esta red la correspondiente matriz de acoplamiento está dada por

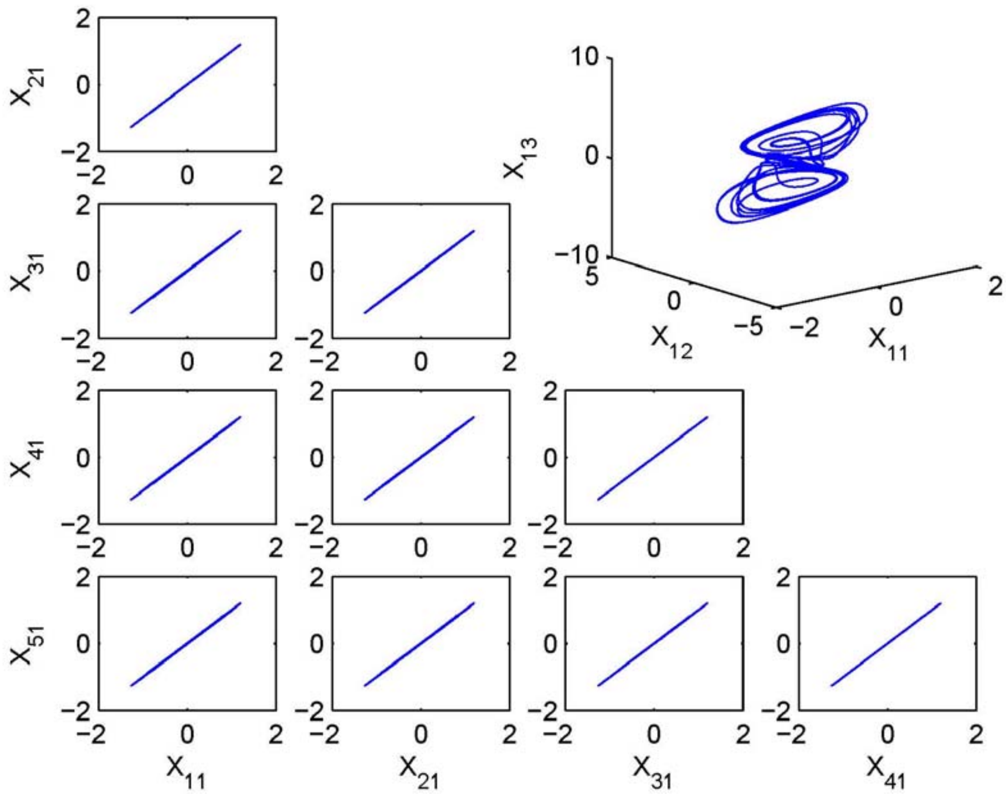

Figura 142: Sincronización del primer estado ($x_{i1},\ i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano sin nodo maestro, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

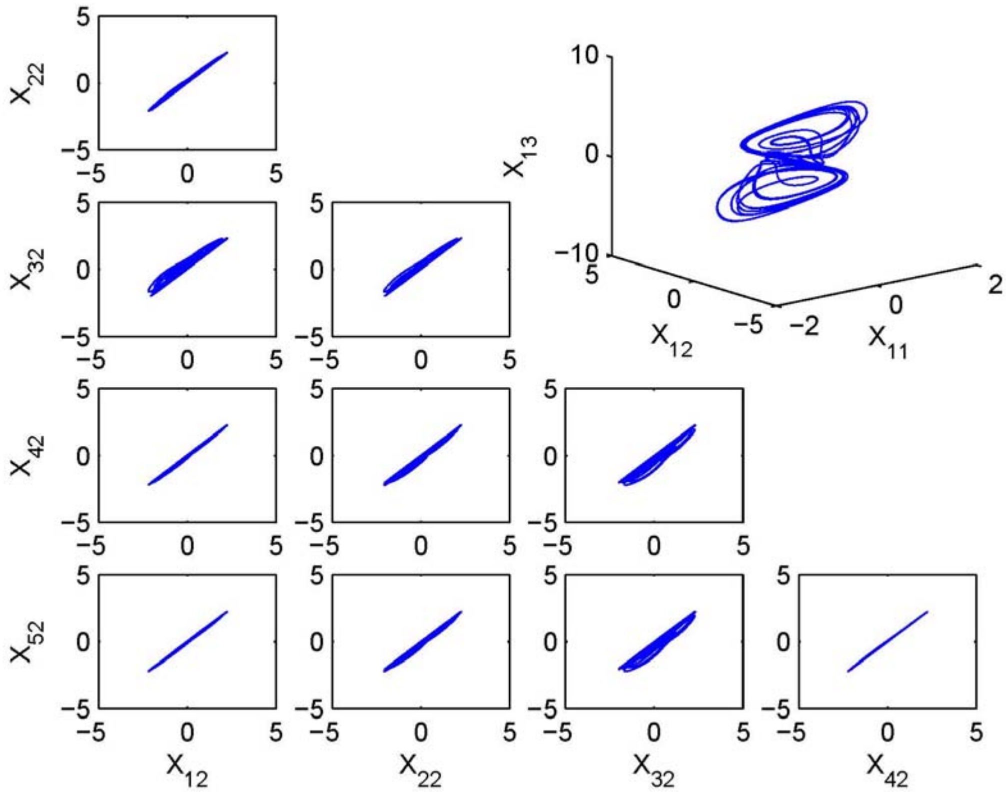

Figura 143: Diagramas de fase del segundo estado (x_{i2}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano sin nodo maestro, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

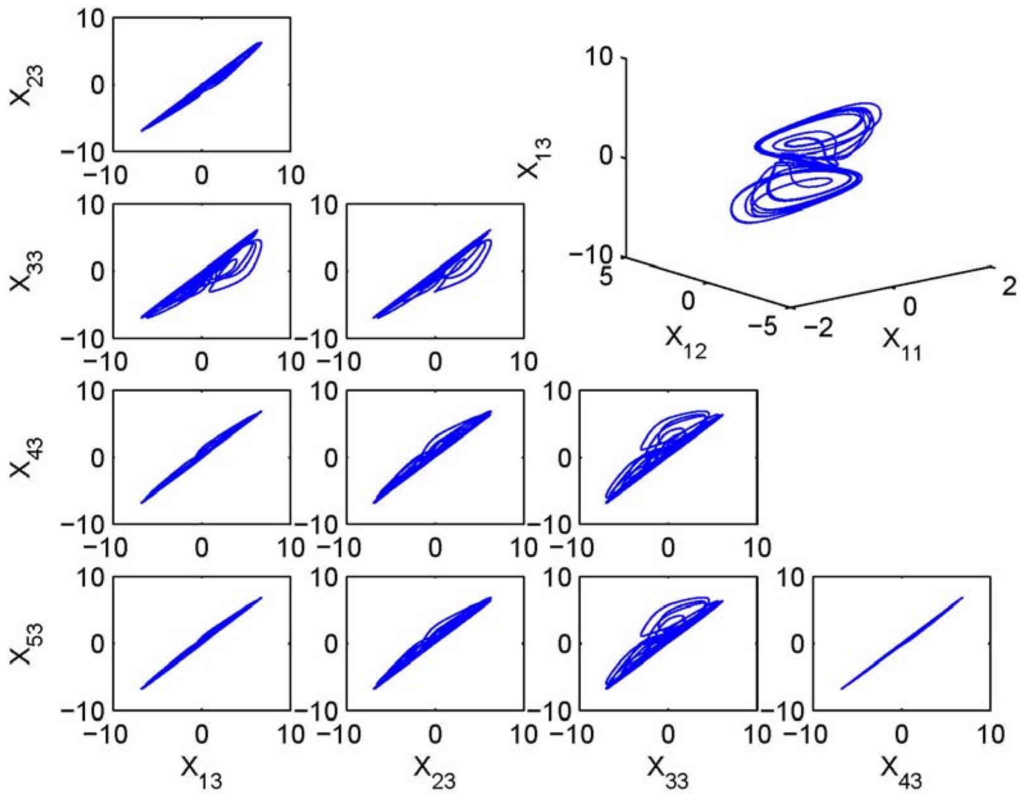

Figura 144: Diagrama de fase del tercer estado (x_{i3}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano sin nodo maestro, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

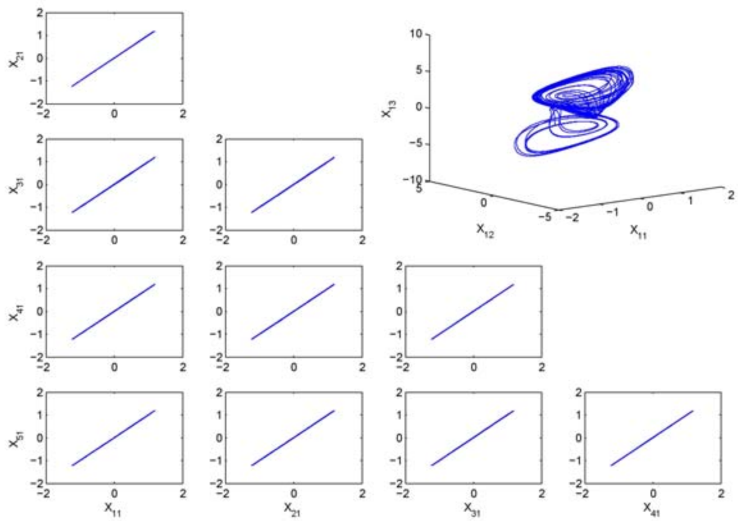

Figura 145: Sincronización del primer estado (x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano con configuración de anillo dirigido, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.691 + 0.9511j$, $\lambda_3 = -0.691 - 0.9511j$, $\lambda_4 = -1.809 + 0.5878j$ y $\lambda_5 = \lambda_4 = -1.809 - 0.5878j$. La matriz $\mathbf{A}$ ya no es simétrica, sin embargo, sus valores propios no nulos tienen parte real negativa, por lo que el teorema 1 todavía es válido. Las condiciones iniciales y las constantes $\bar{d}$ y d son las mismas que en el caso previo y con una constante de acoplamiento $c = 70$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización en la red dinámica de 5 CNNs en 3D como nodos de la red. La figura 145 muestra la sincronización caótica en el primer estado de los 5 nodos CNNs en 3D, es decir, x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ y el atractor caótico del *comportamiento colectivo impuesto por el nodo maestro* en la red dinámica proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

Caso 3 (Anillo abierto (camino)): *5 nodos caóticos CNN en 3D desacoplados (18)-(19) a ser sincronizados en una red de vecino más cercano con configuración de anillo abierto, ver figura 141(c).*

Para construir el arreglo propuesto, se usaron las señales de acoplamiento x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ para los 5 nodos CNN en 3D. Para este propósito, se diseñaron las señales de entrada $u_{i1} = g\left(x_{i1}; c\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, que explícitamente están dadas por

$$\begin{aligned}
u_{11} &= c\left(-x_{11} + x_{21}\right), \\
u_{21} &= c\left(x_{11} - 2x_{21} + x_{31}\right), \\
u_{31} &= c\left(x_{21} - 2x_{31} + x_{41}\right), \\
u_{41} &= c\left(x_{31} - 2x_{41} + x_{51}\right), \\
u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{77}$$

Ahora, usando las ecuaciones (68)-(72) con señales de entrada (77), se construyó la red de vecino más cercano con configuración de anillo abierto que se muestra en la figura 141(c) a ser sincronizada. Para esta red la correspondiente matriz de acoplamiento está dada por

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.382$, $\lambda_3 = -1.382$, $\lambda_4 = -2.618$ y $\lambda_5 = -3.618$. Las condiciones iniciales y las constantes $\bar{d}$ y d son las mismas que en el caso previo, y con una constante de acoplamiento $c = 70$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización en la red dinámica de 5 CNNs en 3D como nodos de la red. La figura 146 muestra la sincronización caótica en el primer estado de los 5 nodos CNN en 3D, es decir, x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ y el atractor caótico del *comportamiento colectivo impuesto por el nodo maestro* en la red dinámica proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

Caso 4 (Camino dirigido): *5 nodos caóticos CNN en 3D desacoplados (18)-(19) a ser sincronizados en una red de vecino más cercano con configuración de camino dirigido ver figura 141(d).*

Para construir el arreglo propuesto, se usaron las señales de acoplamiento x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ para los 5 nodos CNNs en 3D. Para este propósito, se diseñaron las señales de entrada $u_{i1} = g\left(x_{i1}; c\right)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, que explícitamente están dadas por

$$\begin{aligned}
u_{11} &= 0, \\
u_{21} &= cx_{11} - x_{21}), \\
u_{31} &= c\left(x_{21} - x_{31}\right), \\
u_{41} &= c\left(x_{31} - x_{41}\right), \\
u_{51} &= c(x_{41} - x_{51}).
\end{aligned} \tag{78}$$

En este caso, $u_{11} = 0$ debido a que el nodo 1 es el nodo maestro, es decir, no recibe ninguna señal de entrada de ningún nodo de la red; el papel del nodo 1 es manejar o controlar a los otros nodos de la red. Ahora, usando las ecuaciones (68)-(72) con señales de entrada (78), se construyó la red de vecino más cercano con configuración de camino dirigido que se muestra en

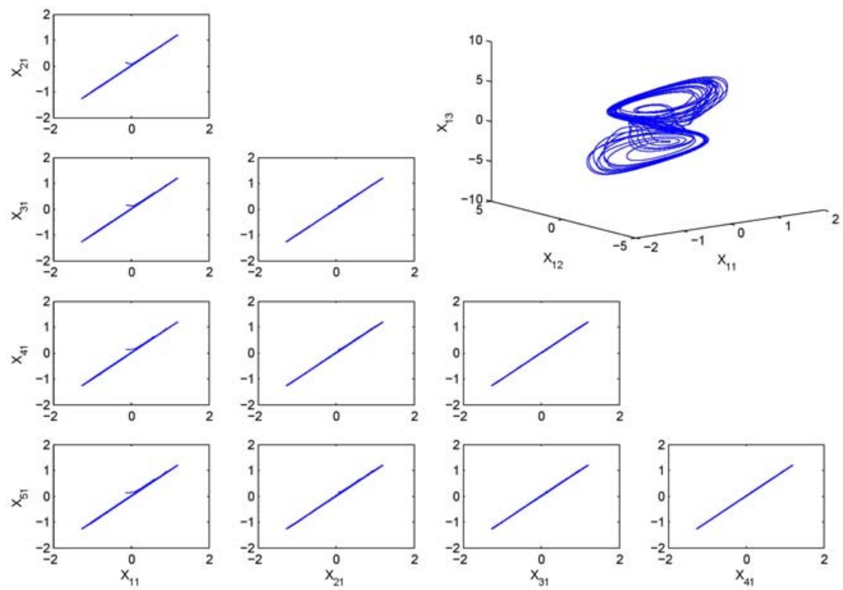

Figura 146: Sincronización del primer estado (x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano con configuración de anillo abierto, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

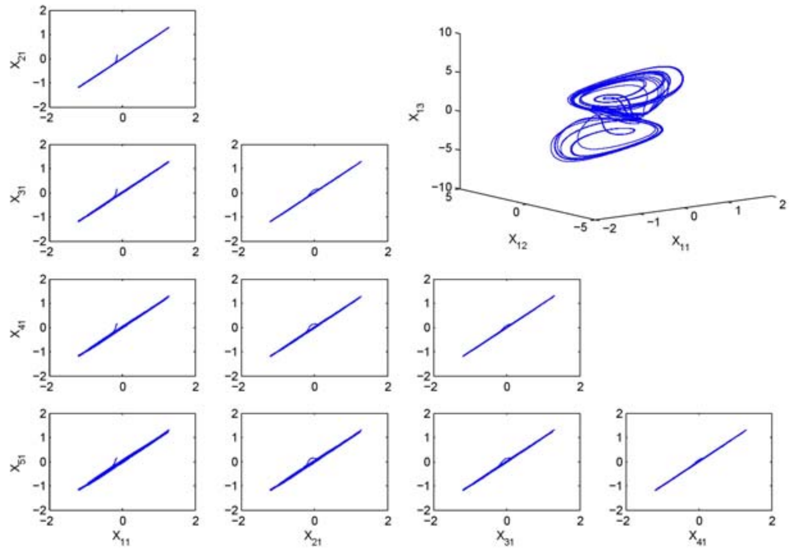

Figura 147: Sincronización del primer estado (x_{i1}, $i = 1, \ldots, 5$) de las 5 CNNs en 3D en configuración de vecino más cercano con configuración de camino dirigido, y el nuevo atractor caótico del nuevo comportamiento colectivo de la red, proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

la figura 141(d) a ser sincronizada. Para esta red la correspondiente matriz de acoplamiento está dada por

$$\mathbf{A}_{nc}(\mathbf{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$. La matriz $\mathbf{A}$ ya no es simétrica, sin embargo sus valores propios no nulos tienen parte real negativa, por lo que el teorema 1 todavía es válido. Las condiciones iniciales y las constantes $\bar{d}$ y d son las mismas que en el caso previo y con una constante de acoplamiento $c = 70$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización en la red dinámica de 5 CNNs en 3D como nodos de la red. La figura 147 muestra la sincronización caótica en el primer estado de los 5 nodos CNN en 3D, es decir, x_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, 5$ y el atractor caótico del *comportamiento colectivo impuesto por el nodo maestro* en la red dinámica proyectado en el espacio (x_{11}, x_{12}, x_{13}).

Nota 2: *Es importante mencionar que sólo se alcanzó sincronía exacta en los primeros* *estados de los nodos de la red, en los cuatro casos (es decir, en el segundo y tercer estado la sincronización es aproximada, que quiere decir que el error de sincronización es aproximadamente cero). Las figuras 143 y 144 muestran los diagramas de fase del segundo y tercer estado para el primer caso de estudio. De estas figuras podemos ver que el segundo y tercer estado no sincronizan. Este comportamiento del segundo y tercer estado se repite en los siguientes tres casos de estudio, por este motivo no se presentaron las gráficas de esos estados en los casos 2, 3 y 4.*

VI.2.1. Conclusiones

En esta sección, se presentó la sincronización de múltiples CNNs en 3D caóticas. Se logró la sincronización en las redes complejas de vecino más cercano diseñadas en cuatro escenarios, sin nodo maestro, en configuración de anillo dirigido, en configuración de anillo abierto (camino) y configuración de camino dirigido. Se mostró, que en los últimos tres casos presentados, la sincronización en el segundo y tercer estado es sólo aproximada, mientras que el primer estado sincroniza, en el primer escenario la sincronización es completa, es decir, sincronizan los tres estados.

VI.3. Conclusiones

En este capítulo, se presentó la sincronización de múltiples CNNs 3D en dos configuraciones básicas: en estrella y en vecino más cercano, en ambas configuraciones se vieron diferentes casos para comprobar la sincronía. De los resultados obtenidos en este capítulo, podemos realizar una aplicación a la comunicación encriptada de información para redes seguras, como veremos en el siguiente capítulo.

Capítulo VII

Aplicación a redes de comunicaciones encriptadas por caos

En este capítulo, se presenta una aplicación a las comunicaciones seguras, mediante la transmisión de una imagen jpg encriptada por caos, a través de los nodos de una red. Para esto, se utilizarán dos topologías de redes vistas en el capítulo VI: red en estrella con el nodo 1 como nodo maestro y red en topología de camino dirigido.

VII.1. Comunicaciones encriptadas en una red con acoplamiento en estrella

En esta sección, aplicaremos la sincronización de 5 CNNs en 3D caóticas en configuración estrella con el nodo 1 como maestro, a la comunicación segura de información confidencial. En particular, se construirá una red de comunicación caótica con nodos acoplados en estrella para transmitir imágenes jpg encriptadas como información. Debido a la topología en estrella en la red dinámica, el propósito es transmitir imágenes jpg como mensajes secretos desde un transmisor (nodo maestro caótico, nodo 1) a múltiples receptores remotos (nodos esclavos 2, 3, 4 y 5) a través de canales públicos.

La figura 148 muestra el esquema de comunicación caótica para transmitir imágenes jpg como mensajes encriptados desde un nodo central, nodo 1 (transmisor) hacia múltiples receptores remotos. La transmisión se logra mediante el uso de la técnica de conmutación caótica, ver por ejemplo [Cruz-Hernández 2004; Cruz-Hernández *et al.* 2005; Cruz-Hernández y Martynyuk 2010; Cruz-Hernández 2008; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2005a; Posadas *et al.* 2008a; Serrano-Guerrero *et al.* 2010; Serrano-Guerrero *et al.* 2012]. En esta técnica de comunicación, se usa una señal binaria $m(t)$ para modular un parámetro del transmisor (nodo central 1). De acuerdo con el valor de $m(t)$ en cualquier tiempo t, el nodo transmisor tiene uno de los dos parámetros p o p'. Por ejemplo, sí se tiene un '0' lógico para transmisión, entonces el nodo transmisor tiene el parámetro p, en caso contrario el valor del parámetro es p', es decir, cuando se transmite un '1' lógico. Es decir, $m(t)$ controla un interruptor cuya acción cambia el valor del parámetro entre p y p' en el nodo transmisor, mientras que los múltiples nodos receptores remotos tienen todo el tiempo el parámetro p. El error de sincronización $e_i(t) = x_{11}(m(t)) - x_{i1}(t)$, $i = 2, 3, 4, 5$ decide si la señal recibida en los receptores $y(m(t)) = x_{11}(m(t))$ corresponde a un '0' o un '1' lógico. Entonces, cuando el transmisor y cada receptor sincronizan (es decir, cuando $e_i(t) = 0$, $i = 2, 3, 4, 5$) puede ser interpretado como un '0' lógico, y cuando el transmisor y los receptores no sincronizan (es

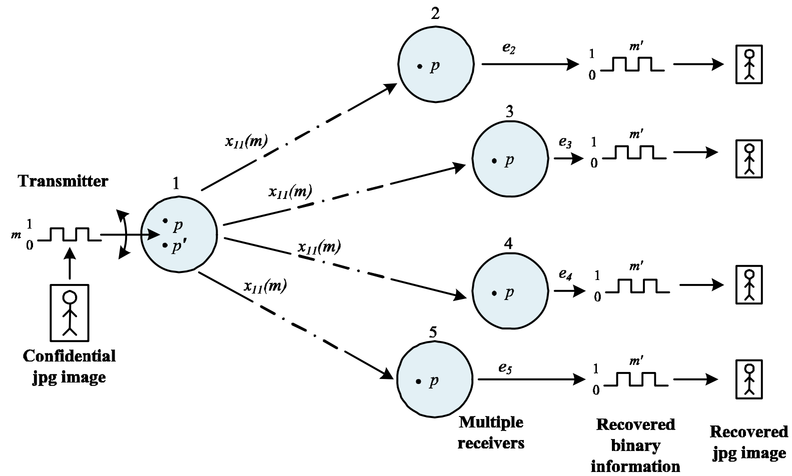

Figura 148: Sistema de red de comunicación caótica para transmitir información de imágenes jpg encriptadas.

decir, cuando $e_i(t) \neq 0$, $i = 2, 3, 4, 5$) se interpretará como un '1' lógico.

En este trabajo doctoral, para transmitir una imagen jpg encriptada empleando conmutación caótica, sea T_{11} el parámetro a ser modulado en el nodo maestro (68), nodo 1, con $u_{11} = 0$. La información binaria $m(t)$ se incorpora al parámetro T_{11} como sigue, $T_{11}(t) = T_{11} + r \cdot m(t)$, donde $r = 0.01$ y $t = 0.5$ s. Previamente, en el proceso de encriptado, la imagen jpg se convierte a una secuencia binaria para obtener $m(t)$. Consideremos la imagen jpg mostrada en la figura 149 como el mensaje confidencial a ser transmitido. Mientras que la figura 150 ilustra la imagen encriptada transmitida por un canal inseguro en la red de comunicación, cuando el parámetro T_{11} en el transmisor (nodo central 1, (68), con $u_{11} = 0$) es conmutado entre $T_{11} = 1.49$ (para codificar un '0' lógico) y $T'_{11} = 1.5$ (para codificar una '1' lógico). Del lado de los múltiples receptores remotos, se detecta el error de sincronización $e_i(t) = x_{11}(m(t)) - x_{i1}(t)$, $i = 2, 3, 4, 5$ con lo que se recupera la secuencia binaria $m'(t)$ después de una etapa de filtrado. Finalmente, al tener $m'(t)$ se puede recuperar la imagen jpg, en la figura 151 se puede ver la imagen recuperada. La regla para obtener la secuencia binaria $m'(t)$ se basa en la detección del error de sincronización $e_i(t)$, $i = 2, 3, 4, 5$ para detectar cada periodo de un '0' o '1' lógico, como sigue: cuando en la parte del receptor tenemos que $e_i(t) \neq 0$ entonces es un '1' lógico y cuando $e_i(t) = 0$, entonces es un '0' lógico. Note que un intruso (ubicado en cualquier canal público de la red de comunicación) obtendrá por ejemplo, la imagen encriptada que se muestra en la figura 150, construida de la señal caótica transmitida $x_{11}(m(t))$.

Figura 149: Imagen jpg confidencial a ser encriptada y transmitida por el nodo central 1 a múltiples receptores remotos.

Figura 150: Imagen jpg encriptada con caos y transmitida a través de los canales públicos de la red de comunicación.

Figura 151: Imagen jpg recuperada en cada uno de los receptores remotos.

VII.1.1. Conclusiones

En esta sección, con base en la sincronización de múltiples CNNs en 3D en redes con acoplamiento en estrella, se presentó una aplicación de comunicaciones caóticas al transmitir un mensaje de una imagen jpg, desde un sólo transmisor (nodo maestro) a múltiples receptores remotos (nodos esclavos 2, 3, 4 y 5) a través de canales públicos.

VII.2. Comunicaciones encriptadas en una red con acoplamiento de camino dirigido

En esta sección, se aplica la sincronización de 5 CNNs en 3D con configuración de camino dirigido vista en el capítulo VI (ver figura 141(d)), a la comunicación segura de información confidencial. En particular, se construyó una red de comunicación caótica para transmitir un tren de pulsos encriptado como información. El propósito es mandar un tren de pulsos, desde un nodo transmisor (nodo caótico 1) hacia cada receptor (nodos N_2, N_3, N_4 y N_5) a través de canales públicos.

La figura 152 muestra el esquema de comunicación caótica para transmitir mensajes ocultos desde el nodo N_1 (transmisor) hacia 4 receptores remotos. La transmisión se logra usando la técnica de conmutación caótica, ver por ejemplo [Cruz-Hernández 2004; Cruz-Hernández *et*

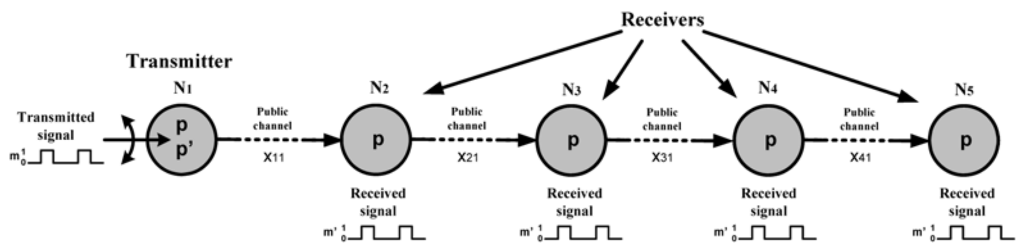

Figura 152: Red de comunicación caótica para transmitir mensajes encriptados.

al. 2005; Cruz-Hernández y Martynyuk 2009; Cruz-Hernández 2008; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2005a; Posadas *et al.* 2008a; Serrano-Guerrero *et al.* 2010; Serrano-Guerrero *et al.* 2012].

En esta técnica, se usa una señal binaria $m(t)$ para modular un parámetro del transmisor (nodo central 1). De acuerdo con el valor de $m(t)$ en cualquier tiempo t, el transmisor tiene uno de los dos parámetros p o p'. Por ejemplo, sí se tienen un '0' lógico para transmisión, entonces el transmisor tiene el parámetro p, en caso contrario el valor del parámetro es p'. Es decir, $m(t)$ controla un interruptor cuya acción cambia el valor del parámetro entre p y p' en el transmisor, mientras que en los múltiples receptores remotos tiene todo el tiempo el parámetro p. El error de sincronización $e_i\left(t\right) = x_{11}\left(m\left(t\right)\right) - x_{i1}\left(t\right)$, $i = 2, 3, 4, 5$ decide si la señal recibida $y\left(m\left(t\right)\right) = x_{11}\left(m\left(t\right)\right)$ corresponde a un '0' o un '1' lógico. Entonces, cuando el transmisor y cada receptor sincronizan ($e_i\left(t\right) = 0$, $i = 2, 3, 4, 5$) puede ser interpretado como un '0' lógico, y cuando el transmisor y los receptores no sincronizan ($e_i\left(t\right) \neq 0$, $i = 2, 3, 4, 5$) se interpretará como un '1' lógico. La diferencia entre p y p' debe ser pequeña, de tal manera que el transmisor no pierda su comportamiento caótico, pero suficientemente grande para producir una momentánea pérdida de sincronía con los otros nodos de la red (receptores). Esta momentánea pérdida de sincronía puede ser detectada en el error de sincronía. El valor correcto de p' se seleccionó experimentalmente.

En este trabajo doctoral, para transmitir una imagen jpg encriptada empleando conmutación caótica, sea T_{11} el parámetro a ser modulado en la CNN en 3D (68) nodo N_1. La información binaria $m(t)$ se incorpora a T_{11} como sigue, $T_{11}\left(t\right) = T_{11} + r \cdot m\left(t\right)$, donde $r = 0.01$. Consideremos el tren de pulsos mostrado en la figura 153(a) como el mensaje confidencial a ser transmitido. En la figura 153(b) el primer estado del nodo N_1 es mostrado sin la señal de información. La figura 153(c) ilustra la transmisión del tren de pulsos a través de un canal inseguro en la red de comunicación, cuando el parámetro T_{11} en el transmisor (nodo N_1) es conmutado entre $T_{11} = 1.49$ (para codificar un '0' lógico) y $T' = 1.5$ (para codificar a un '1' lógico). En el extremo de los receptores remotos, la detección del error de sincronización $e_i(t) = x_{i,1}\left(m\left(t\right)\right) - x_{i+1,1}\left(t\right)$, $i = 1, 2, 3, 4$ se logra al recobrar la secuencia binaria $m'(t)$, después de una etapa de filtrado pasa-bajas. Finalmente, el mensaje de tren de pulsos recuperado se muestra en la figura 154. La regla para obtener la secuencia binaria

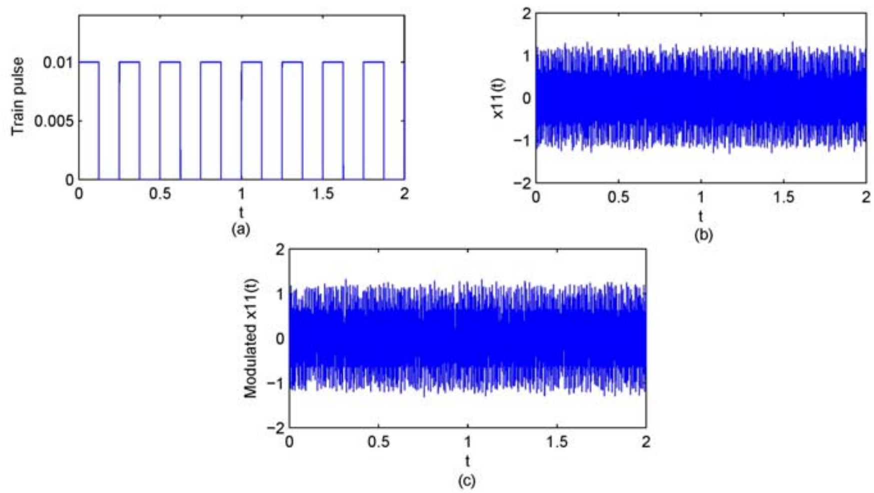

Figura 153: (a) Tren de pulsos $m(t)$ a ser transmitido, (b) Primer estado del nodo transmisor N_1 sin modular, (c) Primer estado del nodo transmisor N_1 modulado con el mensaje, esta señal es la que se transmite a través de un canal inseguro.

$m'(t)$ está basada en la detección del error de sincronización $e_i(t)$, $i = 2, 3, 4, 5$ para detectar cada periodo de un '0' o '1' lógico, como sigue: cuando en el lado del receptor tenemos que $e_i\,(t) \neq 0$ entonces es un '1' lógico y cuando $e_i(t) = 0$, entonces es un '0' lógico. Note que un intruso (en cualquier canal público de la red de comunicación) obtendrá por ejemplo, la imagen encriptada que se muestra en la figura 153(c), construida de la señal caótica transmitida $x_{11}\,(m\,(t))$.

A continuación, utilizando la misma red de comunicación caótica (ver figura 152), se ilustra la transmisión de una imagen encriptada. Previamente, en el proceso de encriptamiento, la imagen jpg se convierte a una secuencia binaria para obtener $m(t)$. La figura 155 muestra la imagen que se enviará al conjunto de receptores remotos, la figura 156 muestra la imagen con encriptamiento caótico y la figura 157 muestra la imagen recuperada de $m'\,(t)$ en los nodos N_2, N_3, N_4 y N_5.

Si se usara un nodo diferente para transmitir el mensaje solo los nodos vecinos recobrarán el mensaje, en la tabla I se muestra una relación de este proceso. Sí se quisiera transmitir un mensaje a un nodo anterior, se necesitaría otra red de camino dirigido en dirección contraria para poder tener una conexión de dos vías.

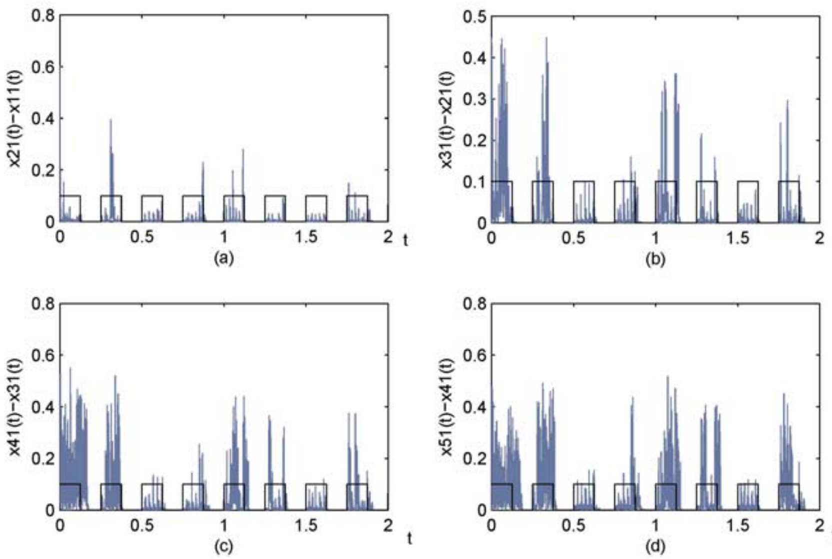

Figura 154: Error de sincronización en cada uno de los receptores remotos.

Figura 155: Imagen original ("mimo") a ser enviada como mensaje encriptado.

Figura 156: Imagen con encriptamiento caótico, enviada como mensaje a través de los canales públicos de la red con nodos acoplados en cadena.

Figura 157: Imagen recuperada ("mimo") en los receptores.

Nodo transmisor	Nodos receptores
N_1	N_2, N_3, N_4 y N_5
N_2	N_3, N_4 y N_5
N_3	N_4 y N_5
N_4	N_5
N_5	ninguno

Tabla I: Esquema de transmisión.

VII.2.1. Conclusiones

En esta sección, con base en la sincronización de múltiples CNNs en 3D en redes con acoplamiento de vecino más cercano, se presentó una aplicación de comunicaciones caóticas al transmitir un tren de pulso como mensaje, desde un transmisor (nodo N_1) hacia múltiples receptores remotos (nodos N_2, N_3, N_4 y N_5) con topología de camino dirigido, a través de canales públicos. También se dio un ejemplo transmitiendo una imagen encriptada por la red de comunicación.

VII.3. Conclusiones

En este capítulo, se mostró la posibilidad de transmitir señales digitales en una red formada por múltiples CNNs 3D en régimen caótico, utilizando dos topologías distintas: en estrella y camino dirigido (ver figuras 138(a) y 141), también se ilustró con un ejemplo de transmisión de una imagen jpg a través de las dos configuraciones de redes complejas presentadas.

Capítulo VIII

Conclusiones generales

En este trabajo de tesis doctoral, se realizó un estudio sobre la sincronización de redes complejas. En particular, se estudió la sincronización de redes complejas conformadas por nodos que exhiben dinámicas extremadamente complejas, como caos e hipercaos. Los nodos hipercaótico y caótico seleccionados respectivamente para formar las redes fueron: oscilador de Chua con retardo de tiempo y redes neuronales celulares CNNs. Se abordó la sincronización de redes complejas en diferentes topologías regulares e irregulares.

Se realizó un estudio numérico sobre la robustez de la sincronía de redes complejas frente a perturbaciones en los parámetros de los nodos, utilizando diferentes topologías de acoplamiento: global, anillo estrella e irregular. Con estos estudios se muestra que topologías de acoplamiento son robustas frente a perturbaciones paramétricas y cuales no, cuando se utilizan en particular estos nodos.

Utillizando las teorías conocidas de estabilidad de sistemas perturbados y de Lyapunov, se establecieron condiciones analíticas para determinar la estabilidad de la sincronía de una red de dos nodos frente a perturbaciones paramétricas, de tipo desvanecientes y no desvanecientes.

Se mostró la sincronización de redes neuronales celulares en diferentes topologías en estrella (con y sin nodo maestro) y anillo (anillo, anillo dirigido, anillo abierto (camino) y camino dirigido).

También se mostró la transmisión de información digital (por medio de una imagen jpg digitalizada) desde un nodo de la red a múltiples nodos remotos, utilizando redes complejas formadas por CNNs (redes celulares neuronales). Con esto se demuestra que es posible la transmisión de información digital en redes de comunicación.

VIII.1. Principales contribuciones de este trabajo doctoral

Un resumen a modo de puntuario, de las principales contribuciones de este trabajo de investigación, se da a continuación:

- *Análisis numérico de la sincronización en diferentes topologías de redes complejas frente a perturbaciones paramétricas.*

- *Análisis teórico de estabilidad de los errores de sincronización de una red de dos nodos hipercaóticos y de dimensión infinita (oscilador de Chua con retardo de tiempo) utilizando la teoría de sistemas perturbados.*

- *Estudio de sincronización de redes complejas formadas por CNNs (redes celulares neuronales) en diferentes configuraciones de red en anillo y estrella.*

- *Transmición de información digital (imagen jpg) desde un nodo a multiples nodos de manera simultanea, en redes complejas formadas por CNNs (redes neuronales celulares).*

VIII.2. Problemas abiertos

El estudio de los sistemas complejos se encuentra en pleno auge. Así lo muestran las numerosas investigaciones sobre el tópico. En la literatura y congresos se reportan estas contribuciones. Las aplicaciones a distintas disciplinas científicas y tecnológicas va en aumento.

A continuación, se mencionan brevemente algunos problemas abiertos detectados al realizar esta investigación y que representan trabajo a futuro en esta dirección:

- Extender los resultados obtenidos de sincronización a redes de mundo pequeño, redes de libre escala, redes aleatorias, etc.

- Extender el análisis teórico de estabilidad de sistemas perturbados a redes de más de dos nodos.

- Analizar la sincronización de redes complejas considerando retrasos de tiempo en la señal acoplante.

- Analizar la sincronización de redes complejas considerando diferentes "pesos", es decir, diferentes fuerzas de acoplamiento.

- Implementar físicamente la sincronización de redes complejas formadas por circuitos caóticos e hipercaóticos.

- Analizar la sincronización de redes complejas en el caso que se tenga perturbaciones en la señal acoplante.

- Aplicación de la sincronización de redes complejas a equipos de trabajo formados por robots manipuladores o móviles.

- Aplicación de la sincronización a modelos de redes sociales y biológicas.

- Sincronizar redes complejas empleando control "pinning".

- Extender estos resultados a la sincronización de redes con "cientos" o "miles" de nodos.

- Analizar la sincronía de estas redes ante fallas en los nodos y en las conexiones.

VIII.3. Productos derivados de este trabajo doctoral

Las principales aportaciones que arrojó este trabajo de investigación a la sincronización de sistemas complejos, se resumen a continuación:

VIII.3.1. Artículos en revistas en Journal Citation Reports (JCR) de Thomson Reuters (ISI):

1.- **H. Serrano-Guerrero**, C. Cruz-Hernández, R.M. López-Gutiérrez, C. Posadas-Castillo, E. Inzunza-González (2010) “Chaotic Synchronization in Star Coupled Networks of Three-Dimensional Cellular Neural Networks and Its Application in Communications”, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 11(8), pp. 571-580.

2.- **H. Serrano-Guerrero**, C. Cruz-Hernández, R.M. López-Gutiérrez, L. Cardoza-Avendaño y R.A. Chávez-Pérez (2013) “Chaotic Synchronization in Nearest-Neighbor Coupled Networks of 3D CNNs”, por aparecer Journal of Applied Research and Technology.

3.- **H. Serrano-Guerrero**, Cruz-Hernández C, et al. (2012) “Robust synchronization of time-delay Chua’s oscillators”, Applied Mathematics and Computation. (sometido)

4.- **H. Serrano-Guerrero**, C. Cruz-Hernández, et al. (2012) “Experimental realization of chaotic encryption”, Digital Signal Processing. (sometido)

VIII.3.2. Participación en congresos

1.- **Serrano-Guerrero H.**, Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Acosta del Campo O.R., Arellano-Delgado A. y Cardoza-Avendaño L. "Synchronization in complex networks of time-delay Chua’s oscillators", Symposium on Low Dimensional Systems & Workshop on Complex Systems, 150th Orbit of Alexander von Humboldt, 7 al 11 de junio de 2010, Habana, Cuba.

2.- **Serrano-Guerrero H.**, Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Acosta del Campo O.R. y Arellano-Delgado A. "Synchronization in complex networks with nearest-neighbor coupling configuration". First International Conference on Complex Systems Design and Management (CSDM 2010). 27 al 29 de octubre de 2010, Paris, Francia.

3.- **Serrano-Guerrero H.**, Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Acosta del Campo O.R, Arellano-Delgado A. y Cardoza-Avendaño L. "Synchronization in perturbed complex networks with star coupling configuration", DYNAMICS DAYS SOUTH AMERICA 2010, International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics, 26 al 31 de julio de 2010, San José dos Campos, SP, Brasil.

VIII.3.3. Participación en trabajos de investigación como complemento a la formación doctoral:

1.- Cruz-Hernández C., Inzunza-González E., López-Gutiérrez R.M., **Serrano-Guerrero H.**, García-Guerrero E.E. "Encrypted audio communication based on synchronized unified chaotic systems". International Conference on Computer, Electrical and Systems Science, and Engineering (ICCESSE 2010). Jun 28-30, 2010 WSET, p. 869-874, Paris, Francia.

2.- Inzunza-González E., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R. M., García-Guerrero E. E., Cardoza-Avendaño L. y **Serrano-Guerrero H.** (2009), Software to encrypt messages using public-key cryptography”, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vo. 54, pp. 623-627

3.- E. Inzunza-González, C. Cruz-Hernández, **H. Serrano-Guerrero** (2012) "Hyperchaotic encryption: An application in biometric systems based on face Recognition", AEUE International Journal of Electronics and Communications. (sometido)

Literatura Citada

Acosta del Campo O.R., García Guerrero E.E. y Cruz-Hernández C. (2008) "Encriptado de Información Confidencial Empleando Hipercaos", Congreso *SOMI XXIII*, 1 al 3 de octubre, Xalapa, Ver. México.

Aguilar-Bustos A.Y. y Cruz-Hernández C. (2002) "Synchronization of two hyperchaotic *Rössler systems: Model-matching approach", WSEAS Transactions on Systems*, **1**(2), pp. 198-203.

Aguilar-Bustos A.Y. y Cruz-Hernández C. (2006) "Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems through extended Kalman filtering", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **6**(4), pp. 319-336.

Aguilar-Bustos A.Y. y Cruz-Hernández C. (2008) "Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems: An application in communications", *Chaos, Solitons & Fractals*, en prensa doi:10.1016/j.chaos.2008.05.012.

Aguilar-Bustos A.Y., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., Posadas-Castillo C. y Tlelo-Cuautle E. (2008a) "Hyperchaotic encryption for secure e-mail communication", aceptado como capítulo de libro en *Emerget Web Intelligent*, Springer-Verlag.

Barabasi A.L. y Albert R. (1999) "Emergence of scaling in random networks", *Science*, 286, pp. 509-512.

Barabasi A.L., Albert R. y Jeong H. (1999) "Meanfield theory for scale-free random networks", *Physica A*, 272, pp. 173-187.

Albert R., Albert I., y Nakarado G.L.(2004) "Structural vulnerability of the North American power grid", *Physical Review E*, **69**(2), pp. 25103.

Beggs J.M. y Plenz D. (2003) "Neuronal Avalanches in Neocortical Circuits. Journal of Neuroscience, **23**(35), pp. 11167-11177.

Belykh I., Hasler M., Laurent M. y Nijmeijer H. (2005) "Synchronization and graph topology", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**(11), pp. 3423-3433.

Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H. y Pogromsky A. (1997) "On self-synchronization and controlled synchronization" *Syst. Control Lett.*, **31**(5), pp. 299-306.

Bowong Samuel (2007) "Adaptive synchronization between two different chaotic dynamical systems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **12**(6), pp. 976-985.

Chen G. y Dong X. (1993a) "Controlling Chua's circuit", *Journal Circuits Syst. Computers,* **3**(1), pp. 139-149.

Chen G. y Dong X. (1993b) "From chaos to order: perspectives and methodologies in controlling nonlinear dinamical systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos,* **3**, pp. 1343-1389.

Chen G. y Dong X. (1998) *From Chaos to Order-Perspectives, Methodologies, and Applications*, World Scientific Pub. Co. Singapore.

Chow T.W.S., Jiu-Chao F. y Ng K.T. (2001) "Chaotic network synchronization with application to communications", *International Journal Commun. Syst.,* **14**, pp. 217-230.

Chua L.O. (1998). “CNN: A Paradigm for Complexity”, World Scientific, Singapore.

Chua L.O. y Yang L. (1988) “Cellular Neural Networks: Theory”, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **35**(10), pp. 1257-1272.

Collins F.S., Green E.D., Guttmacher A. E. y Guyer M.S. (2003) “A vision for the future of genomics research”, *Nature*, 422.

Costa L.F. (2008) “Avalanches of Activation and Spikes in Neuronal Complex Networks”, Arxiv preprint arXiv:0802.042108.

Cruz Hernandez C. (2004) “Synchronization of time-delay Chua´s oscillator with application to secure communication”, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **4**(1), pp. 1-13

Cruz Hernandez C. y Nijmeijer H. (1999) *Synchronization through extended kalma filtering*. En: H. Nijmeijer and T. I. Fossen., Editores, "New Trends in Nonlinear Observer Design". Springer, pp 469-490

Cruz Hernandez C. y Nijmeijer H. (2000) “Synchronization through filtering”, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **10**,(4,), pp 763-775.

Cruz-Hernández C., Nijmeijer H. y Aguilar-Bustos A.Y (2001). “Synchronization of a Noisy Chua Circuit”, *Instrumentation & Development*, **5**(3), pp. 162-16.

Cruz-Hernández C., Posadas–Castillo C. y Sira-Ramírez H. (2002) “Synchronization of two hyperchaotic Chua circuits: A generalized Hamiltonian systems approach”, *Proceedings of the 15th IFAC World Congress 2002*, 21-26 de julio, Barcelona, España. Paper identification number 2720.

Cruz-Hernández C., López-Mancilla D., García V., Serrano-Guerrero H. y Núñez R. (2005) “Experimental realization of binary signals transmission using chaos”, *Journal of Circuits, Systems, and Computers,* **14**(3), pp. 453-468.

Cruz-Hernández C. y Romero-Haros N. (2008) “Communicating via synchronized time-delay Chua’s circuits”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(3), pp. 645–659.

Cruz-Hernández C. y Martynyuk A.A. (2010) *Advances in chaotic systems with applications*, *Series on Stability, Oscillations, and Optimization of Systems*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.

Feldmann U., Hasler M. y Schwarz W. (1996) “Communication by chaotic signals: the inverse system approach”, *International Journal Circuits Theory and Applications*, **24**, pp. 551-579.

Fradkov A. L. y Markov A.Y. (1997) “Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, **44**(10), pp. 905-917.

Fradkov A.L. y Pogromsky A.Y. (1998) *Introduction to control of oscillations and chaos*, World Scientific Publishers, Singapure.

Fujisaka H. y Yamada T. (1983) “Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems”, *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1), pp. 32-47.

Gámez-Guzmán L., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M. y García-Guerrero E.E. (2008) “Synchronization of multi-scroll chaos generators: application to prívate communication”, *Revista Mexicana de Física*, por publicarse.

Gámez-Guzmán L., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M. y Gracía-Guerrero E.E. (2008a) "Synchronization of Chua's circuits with multi-scroll attractors: application to communication", por publicarse en *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.

González-Miranda J.M. (2004) *Synchronization and control of chaos: an introduction for scientists and engineers*, Imperial College Press, Singapore.

Grassi G. y Mascolo S. (1999) "Synchronization of high-dimensional chaos generators by observer design", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(6), pp. 1175-1180.

Hayes B. (2000) "Graph theory in practice: Part II", *Am. Sci.*, **88**(2), pp. 104-109.

Itoh M., Yang T y Chua L.O.(1999a) "Experimental study of impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic circuits", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(7), pp. 1393-1424.

Itoh M., Yamamoto N., Yang T y Chua L.O. (1999b) "Performance Analysis of Impulsive Synchronization", *Proc. of the 1999 European Conf. on Circuit Theory and Design*, pp. 353-356.

Itoh M., Yang T. y Chua L.O. (2001) "Conditions for Impulsive Synchronization of Chaotic and Hyperchaotic Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(2), pp. 551-560.

Khalil H. (2002) *Nonlinear systems*, Mcmillan Publishing Company.

Kocarev Lj., Halle K.S., Eckert K. y Chua L.O. (1992) "Experimental demostration of secure communications via chaotic synchronization", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**(3), pp. 709-713.

Khadra A., Liu X.Z. y Shen X. (2003a) "Application of impulsive synchronization to communication security", *IEEE Trans. Circuits and Sys.-I*, **50**(3), pp. 341-351.

Khadra A., Liu X.Z. y Shen X. (2003b) "Robust impulsive synchronization and application to communication security", *DCDIS, Series B: Applications & Algorithms*, **10**, pp. 403-416.

Kitano H. (2002) "Systems Biology: A Brief Overview", *Science*, 295.

Kouomou Y.C. y Woafo P. (2003) "Cluster synchronization in coupled chaotic semiconductor lasers and application to switching in chaos-secured communication networks", *Optics Communications*, **223**(4-6), pp. 283-293.

Liljeros F. (2004) "Sexual networks in contemporary western societies", *Physica A*, 338, pp. 238-245.

Li X. y Chen G. (2003) "Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: an engineering viewpoint", *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, **50**(11), pp. 1381-1390.

López-Gutiérrez R.M., Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2008a) "Communicating via robust synchronization of chaotic lasers", Por publicarse en *Chaos Solitons & Fractals*.

López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C., Posadas-Castillo C., García-Guerrero E.E. e Inzunza-González E. (2008b) "Encriptamiento de información utilizando circuitos y láseres caóticos", *V Encuentro, Participación de la Mujer en la Ciencia*, León, Guanajuato, 21 al 23 de mayo.

López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C., Posadas-Castillo C., García-Guerrero E.E. (2008c) "Encrypted audio transmission using synchronized Nd:YAG lasers", *Proceedings of*

World Academy of Science, Engineering and Technology, **30**, pp. 1032-1036.

López-Mancilla D. y Cruz-Hernandez C. (2004) "An analysis of robustness on the synchronization of chaotic systems under nonvanishing perturbations using modes", *WSEAS Transactions on Mathematics* **3**(2), pp. 364-369.

López Mancilla D. y Cruz-Hernández C. (2005a) "Output synchronization of chaotic systems: Model-matching approach with application to secure communication," *Nonlinear Dynamics & Systems Theory*, **5**(2), pp. 141-156.

López-Mancilla D. y Cruz-Hernández C. (2005b) "A note on chaos-based communication schemes", *Revista Mexicana de Física*, **51**(3), pp. 265-269.

López-Mancilla D. y Cruz-Hernández C. (2008) "Output synchronization of chaotic systems under nonvanishing perturbations", *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**(4), pp. 1172-1186.

Lu J. y Chen G. (2004) "Chaos synchronization of general complex dynamical networks", *Phys. A*, 334, pp. 281-302.

Marubia S.C., Mikhailov A.S. y Zanette D.H. (2004) *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems*, World Scientific Publishing Co. Ltd., Singapore.

Milgram, S. (1967) "The small-world problem", *Psychol.Today*, 2, pp. 60-67.

Mirasso C.R., Colet P. y García-Fernández P. (1996) "Synchronization of chaotic semiconductor lasers: Application to encoded communications", *Phot. Technol Lett*, **8**(2), pp. 299–301.

Morgül Ö., Solak E. y Akgül M. (2003) "Observer based chaotic message transmission", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**(4), pp. 1003-1017.

Newman M.E.J. y Watts D.J. (1999a) "Renormalization group analysis of the small-world networkmodel", *Phys. Lett. A*, 263, pp. 341-346.

Newman M.E.J. y Watts D.J. (1999b) "Scaling and percolation in the small-world network model", *Phys. Rev. E*, 60, pp. 7332-7342.

Nijmeijer H. y Mareels I.M.Y. (1997) "An observer looks at synchronization", *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, **44**(10), pp. 882-890.

Ormerod P. y Roach A.P. (2004) "The medieval inquisition: scale-free networks and the suppression of heresy", *Physica A*, 339, pp. 645-652.

Pecora L.M. y Carroll T.L. (1990) "Synchronization in chaotic systems", *Phys. Rev. Lett.*, **64**(8), pp. 821-824.

Pikovsky A., Rosenblum M. y Kurths J. (2001) *Syncronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, United Kingdom.

Posadas-Castillo C. y Cruz-Hernández C. (2001) "Transmisión de Información Privada Sincronizando Osciladores Caóticos Hamiltonianos", *Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, A.C.*, 3 y 4 de mayo de 2001, San Luis Potosí, S.L.P., México.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2005a) "Synchronization of chaotic neural networks: A generalized Hamiltonian systems approach", *International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks and Genetic Algorithms (FNG 2005)*, Tijuana, México, 13 al 14 octubre.

Posadas-Castillo C., López-Gutierrez R.M. y Cruz-Hernández C. (2006a) "Secure communication based on synchronized solid state Nd:YAG laser", *10th World Multi –Conference on Systemics, Cybernetics, and Informatics*, Orlando Fl, USA, 16 al 19 de julio.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M (2006b) “Realización y sincronización experimental de una red de circuitos de Chua” *Memorias del Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana de Instrumentación SOMI XXI*, Ensenada Baja California, México, 22 al 25 de octubre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006c) “Synchronization in a network of Chua's circuits”, *The Fourth IASTED, International Conference on Circuits, Signals, and Systems*, San Francisco, California, USA, 20 al 22 de noviembre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006d) “Red compleja de circuitos de Chua: construcción y sincronización”, *2da Conferencia Internacional de Diseño Electrónico ICED*, Veracruz, México, 21 al 23 de noviembre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006e) “Synchronization in a network of Chua's circuits”, *9th Experimental Chaos Conference*, San Jose dos Campos, Sao Paulo, Brasil.(Poster #84), 29 de mayo al 1 de junio.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2007a) “Synchronization of chaotic neural networks: A generalized Hamiltonian systems approach”, *Hybrid Intelligent Systems Analisis and Design*, Springer Verlag, New York.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2007b) “Synchronization in arrays of Chaotic Neural Networks”, *Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing*, Springer Verlag, pp. 743-754.

Posadas-Castillo C., López-Gutierrez R.M. y Cruz-Hernández C. (2008a) “Synchronization of chaotic solid-state Nd:YAG lasers: Application to secure communication”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(8), pp. 1655-1667.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M (2008b) “Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes”, *Chaos, Solitons & Fractals*. Por publicarse, doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutierrez R.M. (2008c) “Synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks”, *Applied Mathematics and Computation*, en prensa, doi: 10.1016/j.amc.2008.08.015.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008d) “Synchronization of 3D CNNs in irregulars array”, *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, Corsica, France, 25 al 27 de junio, pp. 321-325.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008e) “Synchronization in a network of chaotic solid-state ND:YAG lasers”, *17th IFAC World Congress*, Seul Korea, 6 al 11 de julio, pp. 1565-1570.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutierrez R.M. (2008h) “Partial synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks”, sometido a *Chaos, Solitons & Fractals*.

Rafikov M. y Balthazar J.M. (2008) “On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(7), pp. 1246-1255.

Rodríguez-Angeles A. y Nijmeijer, H. (2004) “Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **12**(4), pp. 542-554.

Rodríguez-Orozco E., López-Gutiérrez R.M. y Cruz-Hernández C. (2008) "Comunicación Secreta con Base en Sincronía de Atractores Caóticos con Múltiples Enrollamientos", Congreso *SOMI XXIII*, 1 al 3 de octubre, Xalapa, Ver. México.

Sánchez-Díaz A., Mirasso C., Colet P. y García-Fernández P. (1999) "Encoded Gbits digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers", *IEEE Journal Quant Electron*, **35**(3), pp. 292–297.

Schechter B. (1996) "How the brain gets rhythm", *Science*, **274**(5286), doi: 10.1126/science.274.5286.339, pp. 339-340.

Schiff S.J., So P., Chang T., Burke R.E. y Sauer T. (1996) *Phys. Rev. E*, **54**(6), pp.6708.

Serrano-Guerrero H. y Cruz-Hernández C. (2002) "Dos sistemas de encriptamiento con base en la sincronía de circuitos de Chua", Memorias del *X Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA2002*, 3-6 diciembre, Guadalajara Jal., México.

Serrano-Guerrero H. y Cruz-Hernández C. (2002a) "Sistema encriptador con base en la sincronía de circuitos de Chua", Proceedings of the *2nd International Conference on Automatic Control*, Julio 17-19, Santiago de Cuba, Cuba.

Serrano-Guerrero H., Cruz-Hernández C.,. López-Gutiérrez R.M, Posadas-Castillo C. y Inzunza-González E. (2010) "Chaotic Synchronization in Star Coupled Networks of 3D CNNs and its Application in Communications", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, **11**(8), pp. 571-580.

Serrano-Guerrero H., Cruz-Hernández C.,. López-Gutiérrez R.M y García-Guerrero E. (2012) "Chaotic Synchronization in Nearest-Neighbor Coupled Networks of 3D CNNs", aceptado en *Journal of Applied Research and Technology.*

Sira-Ramírez H. y Cruz Hernández C. (2001) "Synchronization of chaotc systems: A generalized hamiltonian systems approach", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(5), pp. 1381-1395.

Sobiski D. J. y Thorp J. S. (1998) "Chaotic communication via the extended Kalman Filter", *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, **45**(2), pp. 194-197.

Stojanovski T., Kocarev L. y Parlitz U. (1996) "Driving and Synchronizing by Chaotic Impulses", *Phys. Rev. E*, **54**(2), pp. 2128-2131.

Tech-Lu Lioa y Shin-Hwa Tsai (2000) "Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications", *Chaos, Solitons & Fractals* **11**(9), pp. 1387-1396.

Terry J. R. (2002) "A comparative analysis of Rössler type dynamics and laser systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(3), pp. 495-509.

Ushio T. (1996) "Synthesis of synchronized chaotic systems based on observers", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(3), pp. 541-546.

Van den Hoven Eric J.P. y Cruz–Hernández C. (2007) "Synchronization of Complex Networks", DCT 2007.033, Technische Universiteit Eindhoven, Holanda.

Vogelstein B., Lane D. y Levine A.J. "Surfing the p53 network" Nature, 408, pp. 307-310.

Wagg D.J. (2002) "Partial synchronization of nonidentical chaotic systems via adaptive control with applications to modeling coupled nonlinear systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(3), pp. 561-570.

Wang X. F. (2002) "Complex networks: Topology, dynamics and synchronization", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(5), pp. 885-916.

Wang X. F. y Chen G. (2002a) “Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility,” *IEEE Trans. Circuits Syst.I*, **49**(1), pp. 54-62.

Wang X. F. y Chen G. (2002b) “Synchronization in small-world dynamical networks”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(1), pp. 187-192.

Wang X.F., Zhong G.Q., Tang K.F. y Liu Z.F. (2001) “Generating chaos in Chua’s circuit via time-delay feedback”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, **48**(9), pp. 1151-1156.

Watts D. J. y Strogatz S. H.(1998) “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *Nature*, **393**(6684), pp. 440-442.

Werblin F., Roska T. y Chua, L.O. (1994) “The analogic cellular neural network as a bionic eye”, *Int. J. Circuit Th. Appl.*, 23, pp. 541-569.

Wu C.W. y Chua L.O. (1995) “Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems”, *IEEE Trans. Circuits Sist. I*, **42**(8), pp 430-447.

Wu X., Cai J. y Zhao Y. (2006) “Some new algebraic criteria for chaos synchronization of Chua’s circuits by linear state error feedback control”, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, **34**, pp. 265-280.

Yamamoto S., Hino T. y Ushio T. (2002) “Delayed feedback control with a minimal-order observer for stabilization of chaotic discrete-time systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(5), pp. 1047-1055.

Yalcin M.E., Suykens J. A. K. y Vandewalle J.P.L. (2005) *Cellular neural networks, multi-scrol chaos and synchronization*, World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore.

Yang T. y Chua L.O. (1997) “Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication”, *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, **44**(10), pp. 976-988.

Yang X.S y Li Q. (2006) “Horseshoe chaos in cellular neural networks”, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **16** (1), pp. 157-161.