



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIOS DE LAS VIBRACIONES  
UNIDIMENSIONALES Y  
BIDIMENSIONALES EN BARRAS  
ELÁSTICAS MEDIANTE MÉTODOS DE  
ELEMENTO FINITO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTAN:

DENISSE JUÁREZ VILLARREAL  
MARCELA CONCEPCIÓN MURILLO VELÁZQUEZ



Ensenada, Baja California, México. Febrero de 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS

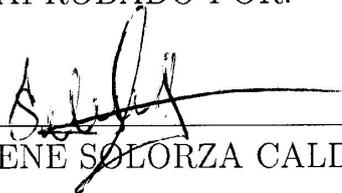
ESTUDIOS DE LAS VIBRACIONES  
UNIDIMENSIONALES Y BIDIMENSIONALES EN BARRAS ELÁSTICAS  
MEDIANTE MÉTODOS DE ELEMENTO FINITO

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTAN

DENISSE JUÁREZ VILLARREAL  
MARCELA CONCEPCIÓN MURILLO VELÁZQUEZ

APROBADO POR:



---

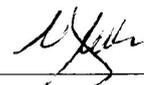
DRA. SELENE SOLORZA CALDERÓN  
PRESIDENTE



---

DR. ALVARO ALVAREZ  
PARRILLA

SECRETARIO



---

M.C. GLORIA ELENA  
RUBÍ VÁZQUEZ

1ER. VOCAL

## *DEDICATORIA*

*Para nuestros padres:*

*Blanca Rosa Villarreal Carmona, Consuelo Velázquez Delgado y Nemesio Murillo Ramos, ejemplo y motivación.*

## AGRADECIMIENTOS

*Queremos dar las gracias primeramente a Dios por prestarnos la vida y darnos la oportunidad de tener esta experiencia.*

*Agradecemos a nuestros padres por su amor y apoyo incondicionales que nos han brindado, no sólo durante nuestra formación académica, sino toda la vida, por creer en nosotras y estar en los momentos difíciles.*

*Yo Denisse quiero dar las gracias a mi madre Blanca Rosa Villarreal Carmona, mis hermanas Jacky y Dalía, mis niños Blanquita y Dieguito y a mi novio Alejandro por su amor y consejos.*

*Yo Marcela deseo dar las gracias a mis padres Consuelo Velázquez Delgado, Nemesio Murillo Ramos, a mis hermanos Verónica y Antonio y mi sobrinita Leia Nair, a quienes amo.*

*Agradecemos a nuestra tutora de tesis Selene Solorza Calderón por tenernos paciencia, animarnos constantemente y por todas sus sugerencias para sacar este proyecto adelante. De la misma manera, reconocemos a todos los maestros que con sus enseñanzas nos ayudaron a madurar académicamente, los estimamos.*

*Y por último pero no menos importante, a todos los amigos y familiares con los que compartimos momentos de alegría que recordaremos siempre.*

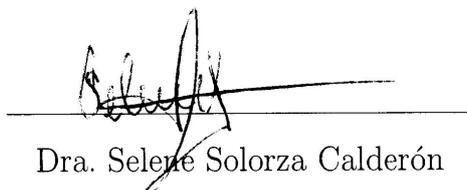
RESUMEN de la Tesis de Denisse Juárez Villarreal y Marcela Concepción Murillo Velázquez presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, febrero de 2010.

ESTUDIOS DE LAS VIBRACIONES UNIDIMENSIONALES Y  
BIDIMENSIONALES EN BARRAS ELÁSTICAS MEDIANTE MÉTODOS DE  
ELEMENTO FINITO

La mayoría de las propiedades cualitativas y cuantitativas de los fenómenos físicos se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales con condiciones de frontera y/o iniciales para algún dominio. Una vez que el modelo matemático está bien definido, el siguiente paso es encontrar su solución analítica. Sin embargo, existen modelos matemáticos cuya solución analítica es desconocida o muy complicada de encontrar y comúnmente se utilizan métodos numéricos para determinarla.

En este trabajo se simularán las vibraciones unidimensionales y bidimensionales de barras elásticas sometidas a diferentes tipos de esfuerzos. Dicha simulación se llevará a cabo por el método de elemento finito, ya que es una herramienta muy flexible para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales con dominios cuya geometría podría ser muy compleja.

Resumen aprobado:



Dra. Selene Solorza Calderón

## Índice general

1.. <i>Introducción</i> . . . . .	1
2.. <i>Teoría de Elasticidad</i> . . . . .	4
2.1. <b>Ley de Hooke</b> . . . . .	4
2.1.1. Tensor de tensiones . . . . .	6
2.1.2. Tensor de deformación . . . . .	7
2.1.3. Ley de Hooke generalizada . . . . .	8
2.2. <b>Tipos de materiales</b> . . . . .	9
3.. <i>Teoría de Vibración</i> . . . . .	11
3.1. Vibraciones libres y forzadas . . . . .	11
3.2. Vibraciones amortiguadas y no amortiguadas . . . . .	11
3.3. Vibraciones lineales y no lineales . . . . .	12
3.4. Modos de vibración . . . . .	13
4.. <i>Descripción del problema</i> . . . . .	14
4.1. <b>Vibración unidimensional</b> . . . . .	15
4.2. <b>Vibración bidimensional</b> . . . . .	16
5.. <i>El método de elemento finito para el estudio de las vibraciones uni-</i> <i>dimensionales y bidimensionales en barras elásticas</i> . . . . .	18
5.1. <b>Forma débil</b> . . . . .	18
5.1.1. Vibraciones unidimensionales de barras elásticas . . . . .	20
5.1.2. Vibraciones bidimensionales de barras elásticas . . . . .	21
5.2. <b>Funciones de aproximación</b> . . . . .	22

5.2.1.	Funciones interpolantes de Lagrange . . . . .	23
5.3.	<b>Discretización del dominio</b> . . . . .	24
5.3.1.	Dominio unidimensional . . . . .	24
5.3.2.	Dominio bidimensional . . . . .	25
5.4.	<b>Funciones de aproximación de los elementos finitos</b> . . . . .	26
5.4.1.	Vibraciones unidimensionales de barras elásticas . . . . .	26
5.4.2.	Vibraciones bidimensionales de barras elásticas . . . . .	27
5.5.	<b>Ecuaciones de los elementos finitos</b> . . . . .	27
5.5.1.	Vibraciones unidimensionales de barras elásticas . . . . .	28
5.5.2.	Vibraciones bidimensionales de barras elásticas . . . . .	28
5.6.	<b>Ensamblado de las ecuaciones de los elementos finitos</b> . . . . .	30
5.6.1.	Vibraciones unidimensionales de barras elásticas . . . . .	30
5.6.2.	Vibraciones bidimensionales de barras elásticas . . . . .	38
5.7.	<b>Problema de eigenvalor</b> . . . . .	39
5.7.1.	Problema de eigenvalor para vibraciones unidimensionales . . . . .	39
5.7.2.	Problema de eigenvalor para vibraciones bidimensionales . . . . .	40
5.8.	<b>Condiciones de frontera</b> . . . . .	40
5.8.1.	Condiciones de frontera libres u homogéneas . . . . .	40
5.8.2.	Condiciones de frontera forzadas o no homogéneas . . . . .	42
6.	<i>Ejemplos numéricos</i> . . . . .	44
6.1.	<b>Vibraciones unidimensionales</b> . . . . .	45
6.1.1.	Vibraciones unidimensionales libres u homogéneas . . . . .	47
6.1.2.	Vibraciones unidimensionales forzadas o no homogéneas . . . . .	49
6.2.	<b>Vibraciones bidimensionales</b> . . . . .	51
6.2.1.	Vibraciones bidimensionales libres u homogéneas . . . . .	51
6.2.2.	Vibraciones bidimensionales forzadas o no homogéneas . . . . .	52
7.	<i>Conclusiones</i> . . . . .	54

---

8.. <i>Anexos</i> . . . . .	56
8.1. <b>Programas principales</b> . . . . .	56
8.2. <b>Funciones</b> . . . . .	63

## Índice de figuras

1.1. Ejemplo de discretización . . . . .	2
2.1. Ejemplo de alargamiento axial y contracción lateral . . . . .	5
2.2. Ley de Hooke . . . . .	6
2.3. Tensor de tensiones . . . . .	7
4.1. Barra elástica e isotrópica con simetría axial. . . . .	14
5.1. Dominio unidimensional . . . . .	23
5.2. Dominio en dos dimensiones . . . . .	24
5.3. (a) Discretización del dominio unidimensional en elemento finitos. (b) El elemento finito $\Omega^k$ . . . . .	25
5.4. (a) Nodos globales. (b) Nodos locales. . . . .	25
5.5. Discretización de un dominio bidimensional . . . . .	26
5.6. Nodos locales (1 al 4) y globales (6 , 7, 10 y 11). . . . .	26
5.7. Dominio con 4 elementos . . . . .	31
5.8. Dirección del flujo de las fuerzas internas en el elemento . . . . .	36
5.9. Desplazamientos en las direcciones $u^e$ y $v^e$ . . . . .	38
6.1. Corte transversal de la barra visto a lo largo del eje $z$ . . . . .	45
6.2. Cuarto modo de vibración para una malla de $8 \times 8$ elementos. . . . .	47
6.3. Quinto modo de vibración para una malla de $8 \times 8$ elementos. . . . .	48
6.4. Cuarto modo de vibración para una malla de $16 \times 8$ elementos. . . . .	49
6.5. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas. . . . .	50
6.6. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas. . . . .	50
6.7. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera libres en la dirección $x$ . . . . .	51

6.8. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera libres en la dirección $y$ .	52
6.9. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas en la dirección $x$ .	53
6.10. Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas en la dirección $y$ .	53

# 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las vibraciones de cuerpos elásticos tiene sus fundamentos a comienzos del siglo XVII, con los trabajos de Robert Hooke, Leonard Euler, Thomas Young y Saint-Venant principalmente, desde entonces se han establecido las formulaciones básicas que relacionan las acciones y las respuestas de los cuerpos elásticos, en particular se ha profundizado en el estudio de las tensiones y compresiones en dichos cuerpos.

Los modelos matemáticos que se han utilizado en la descripción del comportamiento de los cuerpos elásticos, involucran problemas de valor en la frontera que no siempre tienen solución analítica, por lo que se han desarrollado técnicas alternas para aproximarse a la solución, una de ellos es el método de elemento finito (MEF).

Aunque la formulación matemática del MEF se elaboró a partir de 1800, las ideas básicas de discretizar una región de interés se remontan a los tiempos de la antigua cultura egipcia y se empleaban para determinar el volumen de las pirámides. Posteriormente, en el año 250 a.C. Arquímedes utilizó el mismo principio para calcular el valor de  $\pi$ , y para la obtención de áreas y volúmenes de sólidos. La técnica se desarrolló paulatinamente, podemos decir que el comienzo del método como lo conocemos en la actualidad se dio a principios del siglo 20 con los trabajos de Ritz<sup>1</sup> y Galerkin<sup>2</sup>.

El método de estos autores consistió en dividir la región,  $\Omega$ , en subregiones  $\Omega_i$  (a lo que ahora llamamos dominio y elementos), véase Fig. 1.1, y a la ecuación diferencial asociarle un problema variacional mediante la técnica de residuos ponderados, seleccionando como función de ponderación a las funciones de la base de  $\Omega$  para determinar los coeficientes que minimizan el residuo.



Fig. 1.1: Dominio en una dimensión,  $\Omega$ , discretizado en subdominios  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 18$

Al usar las funciones de la base de  $\Omega$  en cada elemento se genera un sistema de ecuaciones que contiene un gran número de incógnitas, un sistema imposible de resolver a principios de 1900, sin embargo con la llegada de las computadoras a mediados del siglo 20, el cálculo matricial avanzó a pasos agigantados, lo que facilitó la solución numérica de dichos sistemas de ecuaciones.

Por ejemplo, Hrennikoff<sup>3</sup> en 1941 y McHenry<sup>4</sup> en 1943 aplicaron el método variacional del Rayleigh-Ritz para calcular los esfuerzos en barras o vigas sólidas, elásticas, homogéneas e isotrópicas asociados a problemas en una dimensión. En ese mismo año, R. Courant<sup>5</sup> utilizó funciones polinómicas, debido a su sencillez de manipulación algebraica, para resolver problemas elásticos en dos dimensiones, utilizando dicho método y dividiendo el dominio en subregiones triangulares. Con este avance se logró analizar el comportamiento de cuerpos bidimensionales más complejos, y en 1956 M. J. Turner desarrolló la metodología para estudiar estructuras conformadas por triángulos y rectángulos sometidos a esfuerzos simples. Con el trabajo en conjunto de Turner, Ray W. Clough, H. C. Martín y L. J. Topp<sup>6</sup> en 1956, el MEF adquirió gran prestigio y se expandió al campo aeroespacial al aplicarlo a la sustentación de la estructura de los aviones.

A pesar de que el MEF se fundamentó a principios del siglo XX, fue hasta 1960 que se introdujo la frase elementos finitos para describir elementos triangulares y rectangulares en el análisis de esfuerzos. En 1961 Melosh<sup>7</sup> publicó su estudio sobre el MEF para placas rectangulares sometidas a flexión, mientras que Martin<sup>8</sup> extendió la aplicación del método a problemas tridimensionales.

Los libros de Przemieniecki<sup>9</sup> y de Olgierd C. Zienkiewicz y Holister<sup>10</sup> presentan la aplicación del MEF al análisis estructural, de hecho, el trabajo de Zienkiewicz se considera el primer escrito sobre el cálculo por elementos finitos.

El MEF es una de las técnicas de simulación que ha sido aprovechada en problemas de distribución de tensiones en un material para predecir las fracturas debidos a tensiones descono-

cidas. Dada su generalidad, el método se utilizó en otros campos como la conducción de calor o la mecánica de fluidos, en donde compite con otros métodos numéricos como el de las diferencias finitas, el cual tiene dificultades de planteamiento para dominios con geometrías complicadas.

Puesto que el objetivo de la simulación es casi siempre la predicción de la respuesta de un sistema a una cierta excitación, es muy común encontrar el MEF en la ingeniería automotriz, la industria aeronáutica, astronáutica, ingeniería civil, acústica y en la de diseño de instrumentos musicales. La meta más común de todas las industrias es mantener las estructuras o ensambles libres de vibraciones indeseables.

## 2. TEORÍA DE ELASTICIDAD

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de elasticidad, necesarios para comprender y describir las ecuaciones de movimiento que se estudiarán. Hacemos énfasis en el hecho de que el trabajo está enfocado en la solución de los modelos matemáticos para las vibraciones unidimensionales y bidimensionales mediante el método de elemento finito y no en describir ha profundidad la interpretación física de las soluciones obtenidas.

### 2.1. Ley de Hooke

Comenzaremos esta sección definiendo dos de los conceptos básicos de la teoría de elasticidad: esfuerzo y tracción.

El concepto de esfuerzo en mecánica del medio continuo, introducido por Agustin Cauchy en 1822, es una medida del aporte promedio de la fuerza ejercida (por unidad de área) en la superficie de un cuerpo deformable en el cual actúan fuerzas internas. Por otra parte, tracción es el esfuerzo a que está sometido un cuerpo por la aplicación de dos fuerzas opuestas que tienden a estirarlo, produciendo un alargamiento sobre una dirección, digamos  $x_1$ , a la vez que se produce una contracción sobre los ejes perpendiculares a  $x_1$ .

Los cuerpos sólidos están expuestos a dos tipos de deformación dependiendo de las fuerzas aplicadas y del material del cual están compuestos. Cuando la deformación se mantiene aún tras cesar el esfuerzo decimos que el cuerpo se comporta de forma plástica, si la deformación no es permanente entonces el cuerpo se comporta de manera elástica de modo que recupera su longitud original. En este trabajo nos enfocaremos a estudiar cuerpos elásticos.

Si un cuerpo deformable está sometido a una tracción axial, no sólo se alarga sino que también se contrae lateralmente, por ejemplo, cuando un barra prismática está sometida a una

carga de tracción simple se produce en ella un aumento de longitud en la dirección de la carga, así como una disminución de las dimensiones laterales perpendiculares a la barra. Este cambio se representa en la Fig. 2.1, cuya parte (a) muestra la barra en su posición de equilibrio y la parte (b) después de la tracción.

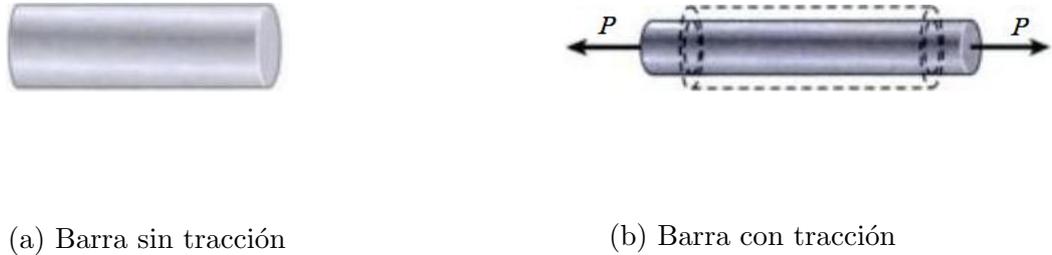


Fig. 2.1: Ejemplo de alargamiento axial y contracción lateral

Considerando que la dirección  $x$  está dada a lo largo de la barra, la deformación en la dirección lateral  $\varepsilon_y$  en cualquier punto de una barra es proporcional a la deformación axial  $\varepsilon_z$  en el mismo punto. La relación de estas deformaciones es una propiedad del material llamada *relación de Poisson* o *razón de Poisson* (denotada por  $\nu$ ) y se puede definir con la ecuación:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y}. \quad (2.1)$$

La mayoría de los materiales exhiben una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación dentro de la región elástica. Por consiguiente, un aumento en el esfuerzo causa un aumento proporcional en la deformación. Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 y se conoce como *Ley de Hooke*, la cual para una dimensión puede expresarse matemáticamente como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo,  $\varepsilon$  la deformación y  $E$  la constante de proporcionalidad llamada módulo de elasticidad o módulo de Young, la ecuación (2.2) representa la pendiente de la recta de Hooke,

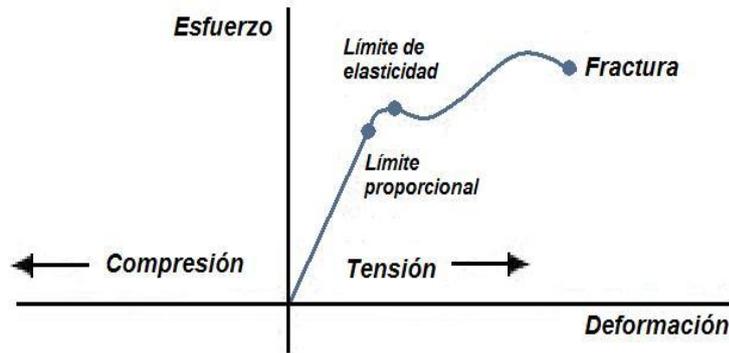


Fig. 2.2: Ley de Hooke

véase Fig. 2.2. El módulo de Young ( $E$ ) caracteriza el comportamiento de un material elástico según la dirección en la que se aplica una fuerza.

Además de la tracción, existen otros tipos de esfuerzos como el de compresión y cizallamiento. En la compresión se aplican dos fuerzas iguales que actúan en dirección la una hacia la otra comprimiendo el cuerpo. Por su parte, el cizallamiento ocurre cuando dos fuerzas paralelas de magnitud igual se aplican en direcciones opuestas<sup>15</sup>.

### 2.1.1. Tensor de tensiones

A la fuerza ejercida sobre la superficie del medio continuo la caracterizamos mediante el tensor de tensiones, y para definirlo nos basaremos en el cubo de la Fig. 2.3. A cada una de las caras le vamos asociar un vector tensión  $\mathbf{t}$ , del cual mostramos sus componentes normal y tangencial. La tensión normal es la fuerza ejercida en la dirección paralela al eje normal a la superficie, por ejemplo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  en la Fig. 2.3. Si consideramos la fuerza ejercida pero ahora en la dirección perpendicular al eje normal a la superficie tendremos las tensiones tangenciales, las cuales son  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  y  $\sigma_{zy}$ . Entonces, en cada una de las caras del cubo se tendrán tres tensiones: una normal y dos tangenciales.

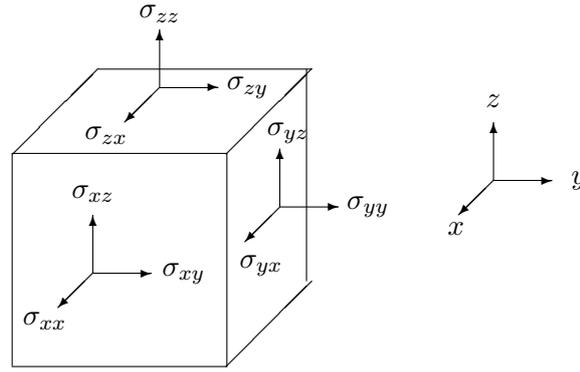


Fig. 2.3: Representación gráfica de las tensiones

Como las componentes normales en el tensor de tensiones representan la variación de la fuerza ejercida en las direcciones paralelas a las normales a la superficie, éstas componentes nos indican el cambio en el volumen del material. Por otro lado, las componentes tangenciales nos proporcionarán información de cómo se deforma el medio. Al conjunto ordenado de estas nueve tensiones se le conoce como *tensor de tensiones* y se representa por la siguiente matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Tensor de deformación

El tensor de deformación o deformaciones es un tensor simétrico usado, en mecánica de medios continuos y mecánica de sólidos deformables, para caracterizar el cambio de forma y volumen de un cuerpo. En tres dimensiones un tensor de deformación tiene la forma general:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

donde cada una de las componentes del tensor, son puntos del cuerpo que caracterizan su deformación.

El tensor de deformaciones está relacionado con el tensor de tensiones mediante las ecuaciones de Hooke generalizadas, que son relaciones de tipo termodinámico o ecuaciones constitutivas para el material del que está hecho el cuerpo.

### 2.1.3. Ley de Hooke generalizada

La ley de Hooke en una dimensión, ecuación (2.2), se puede generalizar para el caso tridimensional en un material elástico, designando a cada componente del tensor de tensiones una combinación lineal de todas las componentes del tensor de deformación, en notación tensorial esto es:

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^6 c_{mn} \varepsilon_n, \quad m = 1, \dots, 6 \quad (2.5)$$

donde  $C_{mn}$  es un tensor que contiene las constantes elásticas y está compuesto por 36 componentes. Pero no es necesario calcular las 36 constantes para determinar la relación entre esfuerzos  $\sigma_m$  y deformaciones  $\varepsilon_n$  en un material.

En primer lugar, se considera la simetría de los tensores de tensiones y deformaciones, lo cual reduce la ecuación (2.5) a 21 componentes linealmente independientes, representándose en notación matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & \text{simetría} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

donde

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_4 = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{yy}, \quad \sigma_5 = \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{zz}, \quad \sigma_6 = \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}. \quad (2.9)$$

## 2.2. Tipos de materiales

Aunque la mayoría de los materiales se comportan diferente bajo condiciones diferentes (temperatura, condiciones de procesado, etcétera), en general se pueden clasificar en cinco tipos<sup>17</sup>:

1. Homogéneos: Sus propiedades son constantes en cualquier punto en una dirección particular del cuerpo.
2. Heterogéneos: Sus propiedades cambian de un punto a otro en la misma dirección, es decir, las propiedades son función de posición en el cuerpo.
3. Isotrópicos: Sus propiedades son las mismas en cualquier dirección o cualquier sección transversal.
4. Anisotrópicos: Sus propiedades difieren en dos o más direcciones.
5. Ortotrópicos: Es un tipo específico de anisotropía, en la cual los planos de los valores extremos son ortogonales.

En un material elástico lineal e isotrópico, se tiene el mismo valor del módulo de Young para una tracción que para una compresión, siendo esta una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda el límite elástico del material. Cuando el material es además homogéneo la ley de Hooke (2.6) se simplifica a:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

en donde  $\lambda$  y  $\mu$ , son las *constantes de Lamé*, las cuales se pueden escribir en términos del módulo de Young y la razón de Poisson como:

$$\lambda = \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \right) \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) \quad \text{y} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.11)$$

### 3. TEORÍA DE VIBRACIÓN

Una vibración se produce cuando el sistema es desplazado de su posición de equilibrio y bajo la acción de fuerzas de restitución elásticas o gravitacionales tiende a retornar a dicha posición, moviéndose de un lado a otro hasta alcanzar su estabilidad. Todo cuerpo elástico con masa es capaz de vibrar, y la teoría de las vibraciones mecánicas es quien se encarga de estudiar los movimientos oscilatorios de cuerpos o sistemas y de las fuerzas asociadas a tal vibración.

#### 3.1. *Vibraciones libres y forzadas*

Las vibraciones mecánicas se clasifican en libres y forzadas. Las vibraciones libres tienen lugar en un sistema en ausencia de fuerzas externas, “las originan y mantienen fuerzas tales como las elásticas o las gravitatorias”<sup>18</sup>. Caso contrario, las vibraciones forzadas tienen lugar en presencia de fuerzas que varían con el tiempo y que no dependen de la posición ni del movimiento; y se pueden clasificar en:

1. Armónicas: varían sinusoidalmente,
2. Periódicas: repiten valores cada cierto tiempo,
3. Impulsos o choques: fuerzas de una gran intensidad que actúan durante tiempos infinitesimales,
4. y en fuerzas que varían de un modo arbitrario con el tiempo.

#### 3.2. *Vibraciones amortiguadas y no amortiguadas*

Las vibraciones también se dividen en amortiguadas y no amortiguadas. Cuando las fuerzas aplicadas se oponen a las fuerzas restauradoras (rozamiento, resistencia del aire, amortiguamien-

---

to viscoso, etcétera) y son despreciables, se dice que la vibración es no amortiguada. Cuando no son despreciables dichas fuerzas de resistencia, se dice que la vibración es amortiguada.

Las vibraciones libres no amortiguadas se repiten periódicamente e indefinidamente, mientras que las libres amortiguadas desaparecen eventualmente. Por otro lado, una vibración forzada con amortiguamiento se mantendrá sólo mientras está aplicada la fuerza que origina la vibración.

Las vibraciones libres no amortiguadas no existen físicamente ya que todo sistema real contiene fuerzas de rozamiento que llegarían a detener las vibraciones, pero en muchos sistemas la pérdida de energía es tan pequeña que el análisis basado en un amortiguamiento despreciable da, a menudo, resultados técnicamente satisfactorios.

### 3.3. *Vibraciones lineales y no lineales*

Otra forma de clasificar las vibraciones es por la linealidad del sistema. Si todos los componentes esenciales de un sistema en vibración se comportan dentro de su intervalo lineal, entonces a la vibración resultante se le conoce como lineal, puesto que las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de dicho sistema son lineales y entonces podremos emplear el principio de superposición. Pero si uno de los componentes básicos del sistema se comporta de manera no lineal, entonces a la vibración se le denomina no lineal.

Las fuentes principales de la no linealidad son tres:

1. Grandes deformaciones: cuando los desplazamientos son grandes, las ecuaciones de equilibrio no se pueden plantear sobre la geometría inicial conocida, sino que se diseña sobre la final. Además, en las relaciones entre la deformación y el desplazamiento deben retenerse los términos cuadráticos, lo que da relaciones no lineales.
2. Determinados tipos de rozamiento o amortiguamiento: como los producidos cuando dos superficies secas se deslizan una respecto a la otra.
3. No linealidad en las ecuaciones constitutivas del material: algunos materiales como el acero, presentan esta no linealidad sólo para valores grandes de los esfuerzos. La plasticidad es un caso típico de la no linealidad.

### 3.4. *Modos de vibración*

Un modo de vibración es un patrón en el que vibra un sistema. La mayoría de los sistemas tienen muchos modos de vibración. Estos son esenciales para describir la naturaleza del movimiento y proporcionan información sobre el comportamiento dinámico del sistema.

Los modos de vibración de un sistema se caracterizan mediante los valores propios (frecuencias naturales del sistema) y los vectores propios ( forma del modo).



#### 4.1. Vibración unidimensional

En el modo de vibración unidimensional sólo hay movimiento en la dirección axial, es decir  $z$ , entonces los desplazamientos tanto en  $x$  como en  $y$  son nulos, esto es  $u_x = u_y = 0$ . Debido a la simetría axial de la barra, el desplazamiento  $u_z(x, y, z, t)$  se simplificará a  $u_z(x, y, t)$ , y la trayectoria que describirá dicho punto durante una vibración en la barra la podemos modelar matemáticamente por<sup>19</sup>

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} \quad (4.1)$$

donde  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  son los esfuerzos definidos por

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

con  $\mu$  representando al módulo de cizallamiento del medio. Sustituyendo las ecuaciones (4.2) en (4.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 u_z \quad (4.3)$$

siendo  $v_s$  la velocidad de la onda S en un medio sólido dada por

$$v_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.4)$$

y  $\rho$  la densidad del medio. A la barra se le pueden aplicar dos tipos de esfuerzos<sup>19</sup>

1) Libres u homogéneos

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} |_{x=0} = \sigma_{xz} |_{x=h} &= 0, \\ \sigma_{yz} |_{y=0} = \sigma_{yz} |_{y=h} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

2) Forzados o no homogéneos

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} |_{x=0} = \sigma_{xz} |_{x=h} &= \alpha, \\ \sigma_{yz} |_{y=0} = \sigma_{yz} |_{y=h} &= \beta \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas.

## 4.2. Vibración bidimensional

Por otro lado, si consideramos que la barra solamente tiene desplazamientos a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$ , es decir, una vibración bidimensional, entonces el vector de desplazamiento se representa por  $\mathbf{u}(x, y, t) = (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t))$ , y la ecuación de movimiento estará dada por<sup>19</sup>

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - v_s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.7)$$

donde  $v_p$  es la velocidad de la onda P dada por

$$v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (4.8)$$

con  $\lambda$  representando al módulo volumétrico del medio elástico, el cuál expresa la resistencia a los cambios elásticos.

Los esfuerzos  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{yy}$  están relacionados con los desplazamientos<sup>19</sup> mediante

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Entonces, a la ecuación de movimiento (4.7) la podemos reescribir en función de los esfuerzos como

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A la barra se le pueden aplicar dos tipos de esfuerzos<sup>19</sup>

1) Libres u homogéneos

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} |_{x=0} &= \sigma_{xx} |_{x=h} = 0, \\ \sigma_{yy} |_{y=0} &= \sigma_{yy} |_{y=L} = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

---

$$\sigma_{xz} = 0 \text{ en } \Gamma$$

donde  $\Gamma$  representa la superficie de la barra.

2) Forzados o no homogéneos

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} |_{x=0} &= \sigma_{xx} |_{x=h} = \alpha, \\ \sigma_{yy} |_{y=0} &= \sigma_{yy} |_{y=L} = \beta, \\ \sigma_{xy} &= \gamma \text{ en } \Gamma\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes positivas.

## 5. EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO PARA EL ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES UNIDIMENSIONALES Y BIDIMENSIONALES EN BARRAS ELÁSTICAS

Elemento finito es un método que nos permite resolver numéricamente modelos matemáticos que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Existen varias formas de construir las ecuaciones de los elementos finitos, por ejemplo mediante mínimos cuadrados, la formulación variacional, los residuos ponderados<sup>12</sup>, entre otras.

En este trabajo sólo nos enfocaremos en la formulación basada en residuos ponderados, la cuál consiste en asociarle una forma débil al modelo matemático en cuestión y en función de ella construir los elementos finitos.

### 5.1. Forma débil

Utilizando la notación de operadores, representamos los problemas a resolver mediante

$$L(u) = f \tag{5.1}$$

donde  $L$  es el operador lineal que define la ecuación (4.3) ó (4.7),  $f$  una función arbitraria y  $u$  es la función desconocida. En estos casos  $f = 0$  y  $u$  debe satisfacer las condiciones de frontera (4.5) ó (4.6) para la ecuación (4.3) y (4.11) ó (4.12) para la ecuación (4.7).

Todo método numérico busca una expresión aproximada  $U$  de la solución analítica  $u$ , debido a que en la mayoría de los modelos matemáticos asociados a un fenómeno físico no se puede encontrar la solución  $u$ . Por lo general al sustituir la solución aproximada  $U$  en la ecuación (5.1), obtendremos un residuo, matemáticamente representado por

$$R = L(U) - f \neq 0 \tag{5.2}$$

y de todas las soluciones aproximadas que se pueden obtener, la mejor será la que minimiza  $R$  en todos los puntos del dominio. Esta minimización se puede llevar a cabo de diferentes maneras, en este trabajo tomaremos el enfoque de la integral ponderada descrita mediante

$$\int_{\Omega} \omega R d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

donde  $\omega$  es una función de peso. Si la relación (5.3) se cumple para cualquier función de peso  $\omega$ , entonces la ecuación diferencial (5.1) se satisface en todos los puntos de su dominio, el cual es la base rectangular de la barra en el plano  $xy$ .

La idea básica es que podemos multiplicar el residuo  $R$  por una función de peso  $\omega$ , a este producto integrarlo sobre el dominio y forzar que la integral sea nula, esto con el fin de que el error en la ecuación diferencial al sustituir  $u$  por su aproximación  $U$  tienda a cero, y entonces podremos decir que  $U$  satisface la ecuación (5.1) en el sentido de la integral ponderada (5.3).

Para resolver la integral (5.3) se utilizará el teorema del gradiente<sup>12</sup>:

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $F(x, y)$  una función escalar continua en un dominio bidimensional  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$ , entonces*

$$\int_{\Omega} \left( \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} \left( n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} \right) F(x, y) ds, \quad (5.4)$$

donde  $ds$  es la longitud del arco de una línea infinitesimal a lo largo de la frontera  $\Gamma$ ,  $n_x$  y  $n_y$  son las componentes rectangulares del vector unitario

$$\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} \quad (5.5)$$

normal a la superficie de  $\Gamma$ .

Las cuales están descritas como:

$$n_x = \cos(x, \hat{\mathbf{n}}), \quad n_y = \cos(y, \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.6)$$

donde  $\cos(x, \hat{\mathbf{n}})$  es el coseno del ángulo entre la dirección positiva  $x$  y el vector  $\hat{\mathbf{n}}$ , y  $\cos(y, \hat{\mathbf{n}})$  es el coseno del ángulo entre la dirección positiva de  $y$  y el vector  $\hat{\mathbf{n}}$ .

### 5.1.1. Vibraciones unidimensionales de barras elásticas

La ecuación de movimiento (4.3) describe la vibración unidimensional de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas, la cual podemos reescribir como

$$R = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - v_s^2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5.7)$$

Como este problema sólo depende del desplazamiento en la dirección  $z$ , de manera que el único término que aparece es  $u_z$ , para simplificar la notación de aquí en adelante omitiremos el subíndice  $z$ . Entonces la integral de ponderación (4.3) asociada a (5.7) es

$$0 = \int_{\Omega} w \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (5.8)$$

donde  $w$  es un función que depende de  $x$  y de  $y$ .

De la regla de la cadena, sabemos que

$$-w \frac{\partial}{\partial x} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( w v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5.9)$$

$$-w \frac{\partial}{\partial y} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( w v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5.10)$$

Entonces, al sustituir las relaciones (5.9) y (5.10) en la integral (5.8) llegamos a

$$0 = \int_{\Omega} \left[ w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( w v_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( w v_s^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (5.11)$$

y, al usar el teorema del gradiente (5.4) en (5.11), obtenemos :

$$0 = \int_{\Omega} \left[ w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v_s^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy - \oint_{\Gamma} v_s^2 w q_n ds \quad (5.12)$$

donde

$$q_n \equiv \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \quad (5.13)$$

$q_n$  denota la proyección del vector  $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$  a lo largo de  $\hat{\mathbf{n}}$ .

A la ecuación (5.12) se le conoce como la forma débil asociada a (4.3), porque la diferenciación es distribuida entre la variable dependiente  $u$  y la función de peso  $w$ , esto se ve como “una reducción de la continuidad de  $u$  y la imposición de una mayor continuidad de  $w$ ”<sup>12</sup>. Por ejemplo, en la integral ponderada (5.8) se requiere que  $u$  sea de clase  $C^2$ , mientras que en la forma débil (5.12) sólo necesita ser de clase  $C^1$ .

### 5.1.2. Vibraciones bidimensionales de barras elásticas

Para el caso bidimensional las ecuaciones de movimiento (4.10) se pueden reescribir como:

$$R_1 = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} = 0, \quad (5.14)$$

$$R_2 = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} = 0. \quad (5.15)$$

Ya que existen dos desplazamientos, uno en la dirección  $x$  y otro en la dirección  $y$ , simplificaremos la notación de aquí en adelante denotando por  $u$  al desplazamiento en la dirección  $x$  y usaremos  $v$  para el desplazamiento en la dirección  $y$ . Entonces la integral de ponderación (5.3) asociada a (4.10) es

$$0 = \int_{\Omega} w_1 \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right] dx dy, \quad (5.16)$$

$$0 = \int_{\Omega} w_2 \left[ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right] dx dy \quad (5.17)$$

donde  $w_1$  y  $w_2$  son funciones que dependen de  $x$  y  $y$ . Aplicando la regla de la cadena en cada una de las integrales anteriores, obtenemos

$$0 = \int_{\Omega} \rho w_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} (w_1 \sigma_{xx}) + \frac{\partial w_1}{\partial y} \sigma_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} (w_1 \sigma_{xy}) dx dy, \quad (5.18)$$

$$0 = \int_{\Omega} \rho w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \sigma_{xy} - \frac{\partial}{\partial x} (w_2 \sigma_{xy}) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_{yy} - \frac{\partial}{\partial y} (w_2 \sigma_{yy}) dx dy \quad (5.19)$$

y, usando el teorema del gradiente (5.4) llegamos a

$$0 = \int_{\Omega} \rho w_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \sigma_{xy} dx dy - \oint_{\Gamma} w_1 \tau_x ds, \quad (5.20)$$

$$0 = \int_{\Omega} \rho w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \sigma_{xy} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_{yy} dx dy - \oint_{\Gamma} w_2 \tau_y ds \quad (5.21)$$

donde

$$\tau_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y, \quad (5.22)$$

$$\tau_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \quad (5.23)$$

representan las tracciones en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. A las ecuaciones (5.20) y (5.21) se les llama forma débil asociada al problema (4.10).

## 5.2. Funciones de aproximación

La función  $u$  del problema (5.1) se puede aproximar mediante funciones conocidas  $\phi_j$  como

$$u \approx U = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \quad (5.24)$$

para  $a_j$  constantes.

Una de las clases de funciones más útiles y mejor conocidas que manda al conjunto de los números reales sobre sí mismo es la de los polinomios algebraicos. Su importancia se debe a que aproximan de manera uniforme las funciones continuas. Dada una función cualquiera, definida y continua en un intervalo cerrado, existe un polinomio que está tan cerca como se desee (*Teorema de aproximación de Weierstrass*)<sup>20</sup>.

En el caso de los polinomios para la aproximación  $U$ , ecuación (5.24), se deben satisfacer las siguientes condiciones para que  $U$  converja a la solución analítica en la ecuación (5.2) :

1.  $U$  debe ser diferenciable, como se requiere en la forma débil del problema.
2. Los polinomios  $\phi_j$  usados para representar a  $U$  deben formar un conjunto completo.

### 5.2.1. Funciones interpolantes de Lagrange

Un conjunto completo de polinomios algebraicos lo forman los polinomios de Lagrange  $P_{n-1}(x)$ , estos se construyen del hecho que

$$P_{n-1}(x_j) = u(x_j) \equiv u_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (5.25)$$

es decir, el polinomio de Lagrange y la función deben coincidir en los  $n$  puntos en donde se conoce  $u(x)$ .

Entonces, el polinomio de grado a lo más  $n - 1$  en  $x$ , está dado por,

$$P_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x) \quad (5.26)$$

donde

$$\psi_j(x) = \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}. \quad (5.27)$$

Comparando esta última ecuación con la (5.24), tenemos que  $U = P_{n-1}(x)$ ,  $a_j = u_j$  y  $\phi_j = \psi_j(x)$ .

En un dominio unidimensional como el que se muestra en la Fig. 5.1, la función  $u(x)$  está definida en los extremos  $x_1$  y  $x_2$  de la recta



Fig. 5.1: Dominio unidimensional

entonces a la función de aproximación (5.24) la definimos como

$$U(x) = \sum_{j=1}^2 u_j \psi_j(x) \quad (5.28)$$

donde las funciones de Lagrange son

$$\psi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \psi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5.29)$$

En el caso de que se tenga un dominio rectangular como en la Fig. 5.2, la función  $u(x, y)$  está definida en los extremos del rectángulo, cuyas coordenadas son  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_2, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$

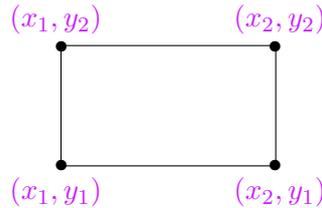


Fig. 5.2: Dominio en dos dimensiones

y la correspondiente función de aproximación (5.24) está dada por

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^4 u_j \psi_j(x, y) \quad (5.30)$$

con los polinomios de Lagrange dados por

$$\psi_1(x, y) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \quad \psi_2(x, y) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \quad (5.31)$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \psi_4(x, y) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

### 5.3. Discretización del dominio

#### 5.3.1. Dominio unidimensional

Sabemos que entre mayor sea el grado del polinomio interpolante más precisa será la aproximación, sin embargo, necesitaríamos conocer a la función en más puntos del dominio. Para el caso del dominio en la Fig. 5.1, tenemos polinomios de interpolación lineal y queremos seguir trabajando con ellos y a la vez disminuir el error en la interpolación. Entonces lo que haremos es dividir el dominio en tantos subdominios, llamados elementos finitos y denotados por  $\Omega^k$ , para

$k > 0$ , como sea necesario, ver Fig. 5.3(a). Cada uno de estos elementos se ven como el que se muestra en la Fig. 5.1, así que para cada uno de los elementos finitos podremos obtener su función de aproximación de la forma de la ecuación (5.28), como dicha aproximación es lineal a dichos elementos se les denomina elementos finitos lineales.

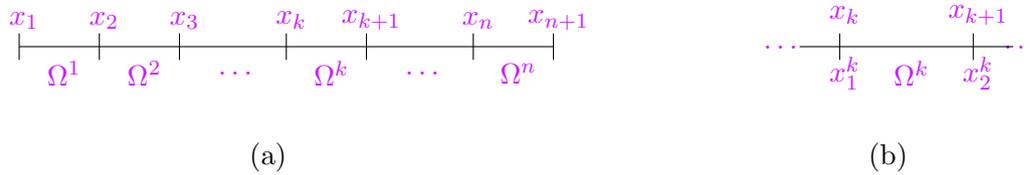


Fig. 5.3: (a) Discretización del dominio unidimensional en elemento finitos. (b) El elemento finito  $\Omega^k$ .

En la Fig. 5.3(a), a los puntos  $x_j$  se le llama nodos globales, y para simplificar la notación los denotaremos por  $j = 1, \dots, n + 1$ , ver Fig. 5.4(a). En la Fig. 5.3(b) se muestra el  $k$ -ésimo elemento finito, los nodos globales están denotados por  $x_k$  y  $x_{k+1}$ , y además se muestran los nodos locales llamados  $x_1^k$  y  $x_2^k$ . Esto mismo se puede hacer para cada uno de los elementos finitos del dominio, es decir, el subíndice siempre será 1 y 2, y lo que cambiará será el superíndice. Entonces por simplicidad de notación a los nodos locales los numeraremos como se muestra en la Fig. 5.4 (b).

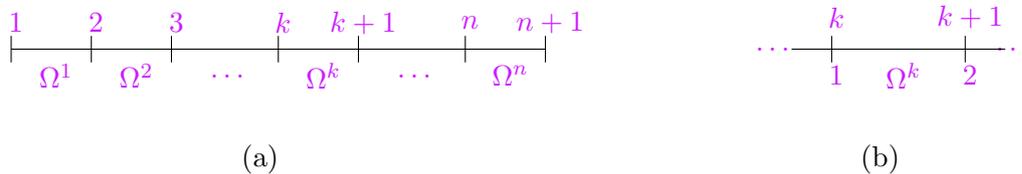


Fig. 5.4: (a) Nodos globales. (b) Nodos locales.

### 5.3.2. Dominio bidimensional

La discretización depende de la forma del dominio, en una dimensión sólo se puede dividir en pequeños segmentos de recta como se mostró en la sección 5.3.1, pero en dos dimensiones hay una variedad de formas geométricas que se pueden utilizar, las más simples son los triángulos y los rectángulos.

Para explicar la discretización de dominios bidimensionales, tomaremos un dominio rectangular y lo dividiremos en subregiones rectangulares  $\Omega^k$ , por ejemplo  $k = 1, \dots, 9$  en la Fig. 5.5.

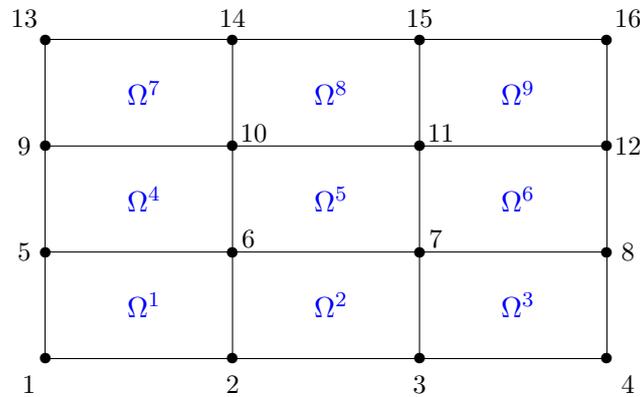


Fig. 5.5: Discretización de un dominio bidimensional

El orden de los nodos locales (1 al 4) y globales (1 al 16) depende de la preferencia de quien diseñe la discretización, en la Fig. 5.6 los nodos locales del elemento  $\Omega^5$  de la Fig. 5.5 están distribuidos en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

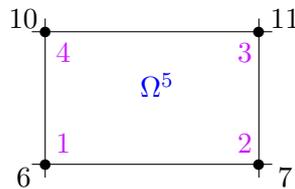


Fig. 5.6: Nodos locales (1 al 4) y globales (6, 7, 10 y 11).

## 5.4. Funciones de aproximación de los elementos finitos

### 5.4.1. Vibraciones unidimensionales de barras elásticas

En la forma débil (5.12) se tiene que el desplazamiento en la dirección axial está representado mediante  $u(x, y, t)$ . Si dividimos el dominio  $\Omega$ , en subdominios  $\Omega^e$  para  $e = 1, \dots, n$ , entonces tenemos que obtener la función de aproximación  $U^e(x, y, t)$  para cada subdominio  $e$ .

En la ecuación (5.30) la función de aproximación  $U(x, y)$  para el desplazamiento  $u(x, y)$  depende solamente de dos direcciones, entonces para tener una forma análoga a dicha ecuación y evitar la dependencia temporal en  $U^e(x, y, t)$  proponemos que

$$U^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^4 u_j^e \psi_j^e(x, y) \cos(\omega t) \quad (5.32)$$

donde  $\psi_j^e(x, y)$  son las funciones de interpolación (5.31) y  $u_j^e = u(x_j, y_j)$ .

#### 5.4.2. Vibraciones bidimensionales de barras elásticas

En la forma débil (5.20) el desplazamiento en la dirección  $x$ , está expresado como  $u(x, y, t)$  y el de la dirección  $y$ , ecuación (5.21), como  $v(x, y, t)$ , entonces, análogamente como se hizo en la sección 5.4.1, las respectivas aproximaciones las podemos expresar como

$$U^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^4 u_j^e \psi_j^e(x, y) \cos(\omega t), \quad (5.33)$$

$$V^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^4 v_j^e \psi_j^e(x, y) \cos(\omega t) \quad (5.34)$$

donde  $\psi_j^e(x, y)$  son las funciones (5.31), con  $u_j^e = u^e(x_j, y_j)$  y  $v_j^e = v^e(x_j, y_j)$ .

### 5.5. Ecuaciones de los elementos finitos

Utilizaremos el modelo de Galerkin<sup>12</sup> en las formas débiles (5.12), (5.20) y (5.21), el cual considera la función de peso como

$$w(x, y) = \psi_i^e(x, y). \quad (5.35)$$

Entonces, al sustituir en dichas formas débiles las correspondientes funciones de aproximación (5.32), (5.33) y (5.34), y las funciones de peso (5.35), se da origen a un sistema de ecuaciones para cada elemento.

### 5.5.1. Vibraciones unidimensionales de barras elásticas

A fin encontrar las ecuaciones de los elementos finitos para vibraciones unidimensionales de barras elásticas, sustituimos (5.32) y (5.35) en la forma débil (5.12) y así obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega^e} \left[ -\omega^2 \psi_i^e(x, y) \psi_j^e(x, y) + v_s^2 \left( \frac{\partial \psi_i^e(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i^e(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial y} \right) \right] u_j^e \cos(\omega t) dx dy - \oint_{\Gamma^e} v_s^2 \psi_i^e(x, y) q_n^e ds \quad (5.36)$$

para  $i = 1, \dots, 4$ . En forma matricial el sistema (5.36) se reescribe como

$$(-\omega^2 \mathbf{M}^e + \mathbf{K}^e) \mathbf{u}^e \cos(\omega t) = \mathbf{Q}^e \quad (5.37)$$

donde  $\mathbf{u}^e = (u_1^e, u_2^e, u_3^e, u_4^e)$ ,  $\mathbf{M}^e = (M_{ij}^e)_{i,j=1,\dots,4}$ ,  $\mathbf{K}^e = (K_{ij}^e)_{i,j=1,\dots,4}$  y  $\mathbf{Q}^e = (Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e)$ , cuyas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} \psi_i^e(x, y) \psi_j^e(x, y) dx dy, \\ K_{ij}^e &= v_s^2 \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \psi_i^e(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i^e(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial y} \right] dx dy, \\ Q_i^e &= v_s^2 \oint_{\Gamma^e} \psi_i^e(x, y) q_n^e ds. \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.5.2. Vibraciones bidimensionales de barras elásticas

Consideramos las funciones de peso (5.35) para las formas débiles (5.20) y (5.21), es decir

$$w_1(x, y) = w_2(x, y) = \psi_i^e(x, y). \quad (5.39)$$

De manera análoga a la sección 5.5.1, sustituimos las ecuaciones (5.33), (5.34) y (5.39) en las ecuaciones (5.20) y (5.21), para obtener las ecuaciones de los elementos finitos para vibraciones bidimensionales de barras elásticas como

$$0 = \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega^e} \left( -\omega^2 \rho \psi_i^e \psi_j^e u_j^e + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \tilde{\sigma}_{xx} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \tilde{\sigma}_{xy} \right) \cos(\omega t) dx dy - \oint_{\Gamma^e} \psi_i^e \tau_x^e ds, \quad (5.40)$$

$$0 = \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega^e} \left( -\omega^2 \rho \psi_i^e \psi_j^e v_j^e + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \tilde{\sigma}_{xy} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \tilde{\sigma}_{yy} \right) \cos(\omega t) dx dy - \oint_{\Gamma^e} \psi_i^e \tau_y^e ds$$

para  $i = 1, \dots, 4$  y donde

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= (\lambda + 2\mu) u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + \lambda v_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y}, \\ \tilde{\sigma}_{yy} &= (\lambda + 2\mu) v_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \lambda u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x}, \\ \tilde{\sigma}_{xy} &= \mu \left( v_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

En forma matricial el sistema (5.40) es

$$[-\omega^2 \mathbf{M}^{1,e} \mathbf{u}^e + \mathbf{K}^{11,e} \mathbf{u}^e + \mathbf{K}^{12,e} \mathbf{v}^e] \cos(\omega t) = \mathbf{Q}^{1,e} \quad (5.42)$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M}^{2,e} \mathbf{v}^e + \mathbf{K}^{21,e} \mathbf{u}^e + \mathbf{K}^{22,e} \mathbf{v}^e] \cos(\omega t) = \mathbf{Q}^{2,e}$$

se reescribe como

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{1,e} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{2,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11,e} & \mathbf{K}^{12,e} \\ \mathbf{K}^{21,e} & \mathbf{K}^{22,e} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} \cos(\omega t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^{1,e} \\ \mathbf{Q}^{2,e} \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

donde  $\mathbf{u}^e = (u_1^e, u_2^e, u_3^e, u_4^e)$ ,  $\mathbf{v}^e = (v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e)$ ,  $\mathbf{M}^{m,e} = (M_{ij}^{m,e})_{i,j=1,\dots,4, m=1,2}$ ,  $\mathbf{K}^{mn,e} = (K_{ij}^{mn,e})_{i,j=1,\dots,4, m,n=1,2}$ ,  $\mathbf{Q}^{1,e} = (Q_1^{1,e}, Q_2^{1,e}, Q_3^{1,e}, Q_4^{1,e})$ ,  $\mathbf{Q}^{2,e} = (Q_1^{2,e}, Q_2^{2,e}, Q_3^{2,e}, Q_4^{2,e})$ , cuyas componentes están dadas por

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{1,e} &= M_{ij}^{2,e} = \int_{\Omega^e} \rho \psi_i^e \psi_j^e dx dy, \\
K_{ij}^{11,e} &= \int_{\Omega^e} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right] dx dy, \\
K_{ij}^{12,e} &= K_{ji}^{21,e} = \int_{\Omega^e} \left[ \lambda \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right] dx dy, \\
K_{ij}^{22,e} &= \int_{\Omega^e} \left[ \mu \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right] dx dy, \\
Q_i^{1,e} &= \oint_{\Gamma^e} \tau_x^e \psi_i^e ds, \\
Q_i^{2,e} &= \oint_{\Gamma^e} \tau_y^e \psi_i^e ds.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Ya que  $\mathbf{M}^{1,e} = \mathbf{M}^{2,e}$ , la denotaremos simplemente por  $\mathbf{M}^e$ . En las matrices  $K^{mn,e}$ , el superíndice  $m$  indica el número de ecuación en (5.42) a la que pertenece y el superíndice  $n$  la variable por la cual se multiplica, es decir, 1 corresponde a  $u$  y 2 a la variable  $v$ . Del mismo modo,  $\mathbf{Q}^{1,e}$  proviene de la primera ecuación y  $\mathbf{Q}^{2,e}$  de la segunda.

## 5.6. Ensamblado de las ecuaciones de los elementos finitos

Hasta aquí hemos obtenido la función de aproximación  $U$  elemento por elemento. Recordemos que cada nodo global es la intersección de varios nodos locales de los elementos vecinos, por ejemplo en la Fig. 5.7, el nodo global 5 es la intersección del nodo local 3 del elemento  $\Omega^1$  con el nodo local 4 de  $\Omega^2$ , el nodo local 2 de  $\Omega^3$  y del nodo local 1 de  $\Omega^4$ . Por lo que, el valor de  $U$  en el nodo de elementos adyacentes debe ser el mismo, es decir, existe continuidad en el valor de la función  $U$  en los nodos interiores de los elementos finitos. De este modo podemos hacer un ensamblado de las ecuaciones de los elementos en términos de los nodos globales.

### 5.6.1. Vibraciones unidimensionales de barras elásticas

Para entender mejor el procedimiento de ensamblado de las ecuaciones de los elementos finitos, se tomará el caso más sencillo, el de un dominio bidimensional de 4 elementos finitos como se muestra en la Fig. 5.7.

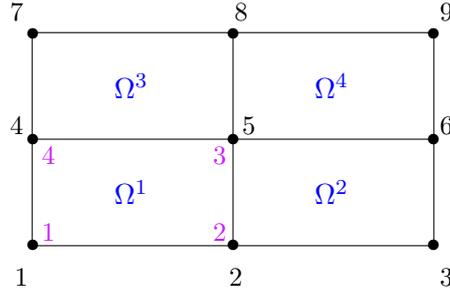


Fig. 5.7: Dominio con 4 elementos

De la ecuación (5.37), para el primer elemento  $\Omega$  se genera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{11}^1 + K_{11}^1)u_1^1 + (-\omega^2 M_{12}^1 + K_{12}^1)u_2^1 + (-\omega^2 M_{13}^1 + K_{13}^1)u_3^1 \\ + (-\omega^2 M_{14}^1 + K_{14}^1)u_4^1] \cos(\omega t) = Q_1^1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{21}^1 + K_{21}^1)u_1^1 + (-\omega^2 M_{22}^1 + K_{22}^1)u_2^1 + (-\omega^2 M_{23}^1 + K_{23}^1)u_3^1 \\ + (-\omega^2 M_{24}^1 + K_{24}^1)u_4^1] \cos(\omega t) = Q_2^1 \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{31}^1 + K_{31}^1)u_1^1 + (-\omega^2 M_{32}^1 + K_{32}^1)u_2^1 + (-\omega^2 M_{33}^1 + K_{33}^1)u_3^1 \\ + (-\omega^2 M_{34}^1 + K_{34}^1)u_4^1] \cos(\omega t) = Q_3^1 \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{41}^1 + K_{41}^1)u_1^1 + (-\omega^2 M_{42}^1 + K_{42}^1)u_2^1 + (-\omega^2 M_{43}^1 + K_{43}^1)u_3^1 \\ + (-\omega^2 M_{44}^1 + K_{44}^1)u_4^1] \cos(\omega t) = Q_4^1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

para el segundo elemento finito las ecuaciones generadas son

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{11}^2 + K_{11}^2)u_1^2 + (-\omega^2 M_{12}^2 + K_{12}^2)u_2^2 + (-\omega^2 M_{13}^2 + K_{13}^2)u_3^2 \\ + (-\omega^2 M_{14}^2 + K_{14}^2)u_4^2] \cos(\omega t) = Q_1^2 \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{21}^2 + K_{21}^2)u_1^2 + (-\omega^2 M_{22}^2 + K_{22}^2)u_2^2 + (-\omega^2 M_{23}^2 + K_{23}^2)u_3^2 \\ + (-\omega^2 M_{24}^2 + K_{24}^2)u_4^2] \cos(\omega t) = Q_2^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} [(-\omega^2 M_{31}^2 + K_{31}^2)u_1^2 + (-\omega^2 M_{32}^2 + K_{32}^2)u_2^2 + (-\omega^2 M_{33}^2 + K_{33}^2)u_3^2 \\ + (-\omega^2 M_{34}^2 + K_{34}^2)u_4^2] \cos(\omega t) = Q_3^2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{41}^2 + K_{41}^2)u_1^2 + (-\omega^2 M_{42}^2 + K_{42}^2)u_2^2 + (-\omega^2 M_{43}^2 + K_{43}^2)u_3^2 \\
& + (-\omega^2 M_{44}^2 + K_{44}^2)u_4^2] \cos(\omega t) = Q_4^2
\end{aligned} \tag{5.52}$$

de la misma manera, para el tercer elemento finito

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{11}^3 + K_{11}^3)u_1^3 + (-\omega^2 M_{12}^3 + K_{12}^3)u_2^3 + (-\omega^2 M_{13}^3 + K_{13}^3)u_3^3 \\
& + (-\omega^2 M_{14}^3 + K_{14}^3)u_4^3] \cos(\omega t) = Q_1^3
\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{21}^3 + K_{21}^3)u_1^3 + (-\omega^2 M_{22}^3 + K_{22}^3)u_2^3 + (-\omega^2 M_{23}^3 + K_{23}^3)u_3^3 \\
& + (-\omega^2 M_{24}^3 + K_{24}^3)u_4^3] \cos(\omega t) = Q_2^3
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{31}^3 + K_{31}^3)u_1^3 + (-\omega^2 M_{32}^3 + K_{32}^3)u_2^3 + (-\omega^2 M_{33}^3 + K_{33}^3)u_3^3 \\
& + (-\omega^2 M_{34}^3 + K_{34}^3)u_4^3] \cos(\omega t) = Q_3^3
\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{41}^3 + K_{41}^3)u_1^3 + (-\omega^2 M_{42}^3 + K_{42}^3)u_2^3 + (-\omega^2 M_{43}^3 + K_{43}^3)u_3^3 \\
& + (-\omega^2 M_{44}^3 + K_{44}^3)u_4^3] \cos(\omega t) = Q_4^3
\end{aligned} \tag{5.56}$$

y por último, para el cuarto elemento finito

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{11}^4 + K_{11}^4)u_1^4 + (-\omega^2 M_{12}^4 + K_{12}^4)u_2^4 + (-\omega^2 M_{13}^4 + K_{13}^4)u_3^4 \\
& + (-\omega^2 M_{14}^4 + K_{14}^4)u_4^4] \cos(\omega t) = Q_1^4
\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{21}^4 + K_{21}^4)u_1^4 + (-\omega^2 M_{22}^4 + K_{22}^4)u_2^4 + (-\omega^2 M_{23}^4 + K_{23}^4)u_3^4 \\
& + (-\omega^2 M_{24}^4 + K_{24}^4)u_4^4] \cos(\omega t) = Q_2^4
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{31}^4 + K_{31}^4)u_1^4 + (-\omega^2 M_{32}^4 + K_{32}^4)u_2^4 + (-\omega^2 M_{33}^4 + K_{33}^4)u_3^4 \\
& + (-\omega^2 M_{34}^4 + K_{34}^4)u_4^4] \cos(\omega t) = Q_3^4
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
& [(-\omega^2 M_{41}^4 + K_{41}^4)u_1^4 + (-\omega^2 M_{42}^4 + K_{42}^4)u_2^4 + (-\omega^2 M_{43}^4 + K_{43}^4)u_3^4 \\
& + (-\omega^2 M_{44}^4 + K_{44}^4)u_4^4] \cos(\omega t) = Q_4^4.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

La siguiente tabla muestra el número de nodo global que corresponde a cada nodo local de los elementos finitos, con la intención de entender cómo se genera el sistema matricial en términos de los nodos globales.

Elemento	Nodo local	Nodo global
1	$1 = u_1^1$	$1 = U_1$
	$2 = u_2^1$	$2 = U_2$
	$3 = u_3^1$	$5 = U_5$
	$4 = u_4^1$	$4 = U_4$
2	$1 = u_1^2$	$2 = U_2$
	$2 = u_2^2$	$3 = U_3$
	$3 = u_3^2$	$6 = U_6$
	$4 = u_4^2$	$5 = U_5$
3	$1 = u_1^3$	$4 = U_4$
	$2 = u_2^3$	$5 = U_5$
	$3 = u_3^3$	$8 = U_8$
	$4 = u_4^3$	$7 = U_7$
4	$1 = u_1^4$	$5 = U_5$
	$2 = u_2^4$	$6 = U_6$
	$3 = u_3^4$	$9 = U_9$
	$4 = u_4^4$	$8 = U_8$

Tab. 5.1: Nodos locales de los elementos finitos en términos de nodos globales

De la Tabla 5.1 obtenemos las relaciones entre nodos, por ejemplo, para el nodo global 2,  $U_2$ , se tiene que  $u_2^1 = u_1^2$ , entonces podemos sumar la ecuación (5.46) donde aparece  $u_2^1$  y la (5.49) pues contiene a  $u_1^2$  para producir una nueva ecuación correspondiente al nodo 2, es decir,

se obtiene la siguiente ecuación

$$[(-\omega^2 M_{21}^1 + K_{21}^1)u_1^1 + (-\omega^2(M_{22}^1 + M_{11}^2) + K_{22}^1 + K_{11}^2)U_2 + (-\omega^2 M_{23}^1 + K_{23}^1)u_3^1 + (-\omega^2 M_{24}^1 + K_{24}^1)u_4^1 + (-\omega^2 M_{12}^2 + K_{12}^2)u_2^2 + (-\omega^2 M_{13}^2 + K_{13}^2)u_3^2 + (-\omega^2 M_{14}^2 + K_{14}^2)u_4^2] \cos(\omega t) = (Q_1^2 + Q_2^1). \quad (5.61)$$

A su vez  $u_4^2 = u_3^1 = U_5$ , y usando las relaciones entre nodos locales y nodos globales expresadas en la Tabla 5.1, la ecuación (5.61) se puede reescribir como

$$[(-\omega^2 M_{21}^1 + K_{21}^1)U_1 + (-\omega^2(M_{22}^1 + M_{11}^2) + K_{22}^1 + K_{11}^2)U_2 + (-\omega^2(M_{23}^1 + M_{14}^2) + K_{23}^1 + K_{14}^2)U_5 + (-\omega^2 M_{24}^1 + K_{24}^1)U_4 + (-\omega^2 + K_{12}^2)U_3 + (-\omega^2 M_{13}^2 + K_{13}^2)U_6] \cos(\omega t) = (Q_1^2 + Q_2^1). \quad (5.62)$$

Para el nodo 5, seguimos el mismo procedimiento, en este caso se tiene que  $u_3^1 = u_4^2 = u_5^3 = u_1^4 = U_5$ , por lo que podemos sumar las ecuaciones (5.47), (5.52), (5.54) y (5.57) y así generar la ecuación que represente las contribución del nodo 5 y usando la información de la Tabla 5.1 obtenemos la siguiente ecuación

$$[(-\omega^2 M_{31}^1 + K_{31}^1)U_1 + (-\omega^2(M_{32}^1 + M_{41}^2) + K_{32}^1 + K_{41}^2)U_2 + (-\omega^2 M_{42}^2 + K_{42}^2)U_3 + (-\omega^2(M_{34}^1 + M_{21}^3) + K_{34}^1 + K_{21}^3)U_4 + (-\omega^2(M_{33}^1 + M_{44}^2 + M_{22}^3 + M_{11}^4) + K_{33}^1 + K_{44}^2 + K_{22}^3 + K_{11}^4)U_5 + (-\omega^2(M_{43}^2 + M_{12}^4) + K_{43}^2 + K_{12}^4)U_6 + (-\omega^2 M_{24}^3 + K_{24}^3)U_7 + (-\omega^2(M_{23}^3 + M_{14}^4) + K_{23}^3 + K_{14}^4)U_8 + (-\omega^2 M_{13}^4 + K_{13}^4)U_9] \cos(\omega t) = (Q_3^1 + Q_4^2 + Q_2^3 + Q_1^4). \quad (5.63)$$

Haciendo lo anterior para cada uno de los nodos se obtiene el sistema

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} \cos(\omega t) = \mathbf{Q} \quad (5.64)$$

donde la matriz  $\mathbf{M}$ , también llamada matriz de masas, es de la siguiente forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & M_{14}^1 & M_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_{21}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & M_{24}^1 & M_{23}^1 + M_{14}^2 & M_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 & 0 & M_{14}^2 & M_{23}^2 & 0 & 0 & 0 \\
M_{41}^1 & M_{42}^1 & 0 & M_{44}^1 + M_{11}^3 & M_{43}^1 + M_{12}^3 & 0 & M_{24}^2 & M_{23}^2 + M_{14}^3 & M_{13}^3 \\
M_{31}^1 & M_{32}^1 + M_{41}^2 & M_{42}^2 & M_{34}^1 + M_{21}^3 & M_{33}^1 + M_{44}^2 + M_{22}^3 + M_{11}^4 & M_{43}^2 + M_{12}^4 & M_{24}^3 & M_{23}^3 + M_{14}^4 & M_{13}^4 \\
0 & k_{31}^2 & M_{32}^2 & 0 & M_{34}^2 + M_{21}^4 & M_{33}^2 + M_2^4 & 0 & M_{24}^4 & M_{23}^4 \\
0 & 0 & 0 & M_{41}^3 & M_{42}^3 & 0 & M_{44}^3 & M_{43}^3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & M_{31}^3 & M_{32}^3 + k_{41}^4 & M_{42}^4 & M_{34}^3 & M_{33}^3 + M_{44}^4 & M_{43}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_{31}^4 & M_{32}^4 & 0 & M_{34}^4 & M_{33}^4
\end{bmatrix}$$

(5.65)

y la distribución de los componentes de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , son

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{14}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{24}^1 & K_{23}^1 + K_{14}^2 & K_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & K_{14}^2 & K_{23}^2 & 0 & 0 & 0 \\
K_{41}^1 & K_{42}^1 & 0 & K_{44}^1 + K_{11}^3 & K_{43}^1 + K_{12}^3 & 0 & K_{24}^2 & K_{23}^2 + K_{14}^3 & K_{13}^3 \\
K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{34}^1 + K_{21}^3 & K_{33}^1 + k_{44}^2 + K_{22}^3 + K_{11}^4 & K_{43}^2 + K_{12}^4 & K_{24}^3 & K_{23}^3 + K_{14}^4 & K_{13}^4 \\
0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & 0 & K_{34}^2 + K_{21}^4 & K_{33}^2 + K_2^4 & 0 & K_{24}^4 & K_{23}^4 \\
0 & 0 & 0 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & 0 & K_{44}^3 & k_{43}^3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_{31}^3 & K_{32}^3 + k_{41}^4 & K_{42}^4 & K_{34}^3 & K_{33}^3 + K_{44}^4 & K_{43}^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^4 & K_{32}^4 & 0 & K_{34}^4 & K_{33}^4
\end{bmatrix}$$

(5.66)

Notemos que por la manera en que están construidas, las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  son simétricas, ecuaciones (5.38).

El vector de incógnitas  $\mathbf{U}$  y el vector de fuerzas internas  $\mathbf{Q}$  están dados por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

La continuidad de los elementos también afecta a el vector de fuerzas internas, por lo que debe de existir un balance de fuerzas entre las fronteras de los elementos finitos. En la Fig. 5.8, los lados de los elementos son numerados en la misma dirección en que están distribuidos los nodos locales.

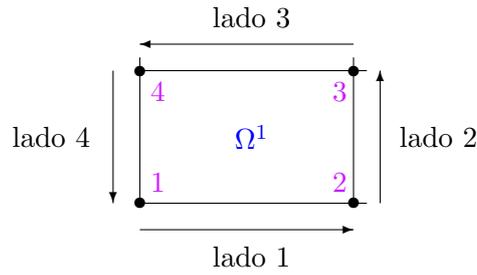


Fig. 5.8: Dirección del flujo de las fuerzas internas en el elemento

Del conjunto de ecuaciones (5.38),  $Q_i^e$  se puede expresar como

$$Q_i^e = \sum_{J=1}^4 Q_{iJ}^e \quad (5.68)$$

donde  $J$  representa los lados del elemento y las integrales explícitamente son

$$Q_i^e = v_s^2 \left\{ \int_{1-2} [q_n^e \psi_i^e(x, y)]_{y=y_1} dx + \int_{2-3} [q_n^e \psi_i^e(x, y)]_{x=x_1+h_x} dy \right. \\ \left. + \int_{3-4} [q_n^e \psi_i^e(x, y)]_{y=y_1+h_y} dx + \int_{4-1} [q_n^e \psi_i^e(x, y)]_{x=x_1} dy \right\} \quad (5.69)$$

con  $h_x$  y  $h_y$  representando las distancias de los nodos 1 al 2 y de 1 al 4, respectivamente.

Volviendo a la ecuación generada por el nodo 2, ecuación (5.62), tenemos la suma para  $Q_2^1 + Q_1^2$ , que en términos de la ecuación (5.68) se expresa como

$$Q_2^1 + Q_1^2 = Q_{21}^1 + Q_{22}^1 + Q_{23}^1 + Q_{24}^1 + Q_{11}^2 + Q_{12}^2 + Q_{13}^2 + Q_{14}^2. \quad (5.70)$$

Pero por el balance que debe de existir en los elementos, el valor  $Q_{22}^1 = -Q_{14}^2$ , puesto que la integral  $Q_{22}^1$  está en el lado 2 del elemento 1 y  $Q_{14}^2$  en lado 4 del elemento 2, y visto globalmente ambas integrales están en la misma línea pero con dirección contraria, esto nos lleva a que la suma  $Q_{22}^1 + Q_{14}^2$  es cero, y de esta manera la ecuación (5.70) se simplifica como

$$Q_2^1 + Q_1^2 = Q_{21}^1 + Q_{23}^1 + Q_{24}^1 + Q_{11}^2 + Q_{12}^2 + Q_{13}^2. \quad (5.71)$$

En los nodos no sólo afecta el balance de las fuerzas internas, sino también la forma de las funciones de interpolación  $\psi_i^e(x, y)$  dadas por (5.30). Por ejemplo, para el nodo 2 en la ecuación (5.71) se tiene que el valor de  $\psi_2^1(x, y)$  en  $Q_{2J}^1$  es 0 para los lados 3 y 4, puesto que  $\psi_2^1(x_1, y) = \psi_2^1(x, y_2) = 0$ . Del mismo modo,  $\psi_1^2(x, y)$  en  $Q_{1J}^2$  es 0 para los lados 2 y 3.

Haciendo esto para todos los nodos, el vector  $\mathbf{Q}$  se simplifica a

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 = Q_{11}^1 + Q_{14}^1 \\ Q_2 = Q_{21}^1 + Q_{11}^2 \\ Q_3 = Q_{21}^2 + Q_{22}^2 \\ Q_4 = Q_{44}^1 + Q_{14}^3 \\ Q_5 = 0 \\ Q_6 = Q_{32}^2 + Q_{22}^4 \\ Q_7 = Q_{43}^3 + Q_{44}^3 \\ Q_8 = Q_{33}^3 + Q_{43}^4 \\ Q_9 = Q_{32}^4 + Q_{33}^4 \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Notemos que  $Q_5$  es cero por el balance de las fuerzas internas en el nodo 5, Fig. 5.7. En general, el valor de todos los  $Q_i$  que provengan de nodos internos, aquellos que no se encuentren

en la frontera del dominio, siempre serán cero.

Entonces, el sistema (5.64) asociado al ejemplo de la Fig. 5.7, tiene como incógnitas a  $\omega$ , el vector  $\mathbf{U}$  y las componentes no cero de los vectores  $\mathbf{Q}$ , es decir, se tiene 18 incógnitas y como sólo se tiene 9 ecuaciones el sistema no tiene solución única.

### 5.6.2. Vibraciones bidimensionales de barras elásticas

Para las vibraciones bidimensionales se tiene el mismo dominio que para las vibraciones unidimensionales, pero en este caso se tiene desplazamiento en dos direcciones, como se muestra en la Fig. 5.9.

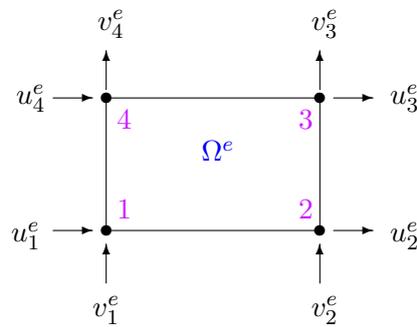


Fig. 5.9: Desplazamientos en las direcciones  $u^e$  y  $v^e$ .

Las ecuaciones (5.42) se pueden ver como la ecuación para el caso unidimensional (5.37) con un término extra, ya que ahora tenemos el efecto del desplazamiento en dos direcciones. Puesto que tanto el desplazamiento en la dirección  $u^e$  como en  $v^e$  deben tener continuidad en los nodos, seguimos el proceso de ensamblado descrito en la sección 5.6.1 pero ahora para las vibraciones bidimensionales. Entonces, el sistema que resulta de ensamblar las ecuaciones de los elementos (5.43) es

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \cos(\omega t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^1 \\ \mathbf{Q}^2 \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de ensamble de todas las matrices de masas de los elementos  $\mathbf{M}^e$ . La matriz  $\mathbf{M}$  es de la forma de la matriz (5.65) haciendo  $M_{ij}^e = M_{ij}^{1,e} = M_{ij}^{2,e}$ , para  $M_{ij}^{1,e}$  y  $M_{ij}^{2,e}$  dadas en las ecuaciones (5.44).

Las componentes de la matriz de rigidez asociada al sistema (5.73) están dadas por las submatrices  $\mathbf{K}^{mn}$ , para  $m, n = 1, 2$ . Esas submatrices tienen la estructura de la matriz (5.66) al hacer la correspondencia de las componentes de esa matriz con las de las submatrices dadas en (5.44), es decir,  $K_{ij}^e = K_{ij}^{mn,e}$ .

Por otra parte, a las componentes de  $\mathbf{Q}^m$  (para  $m = 1, 2$ ) las obtenemos de la ecuación (5.73) al hacer  $Q_i^e = Q_i^{m,e}$ , donde  $Q_i^{m,e}$  están dados en (5.44). Por último,  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_9)$  y  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_9)$ .

Debido a que los sistemas (5.64) y (5.73) dependen de la constante  $\omega$ , es necesario conocer su valor. A los problemas de ese tipo se les conoce como problemas de eigenvalor.

### 5.7. Problema de eigenvalor

Llamamos *problema de eigenvalor* a la determinación de los valores  $\lambda$  y  $\mathbf{v} \neq 0$  tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v} \quad (5.74)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B} \in M_{n \times n}$ . Los valores  $\lambda$  son llamados *eigenvalores* y los vectores no nulos  $\mathbf{v}$  asociadas a  $\lambda$  son llamados *eigenvectores*.

El que  $\mathbf{v}$  sea no nulo y  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{v} = 0$  implica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}) = 0 \quad (5.75)$$

de lo cual obtenemos el polinomio característico  $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})$  de grado  $n$ . Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación (5.74) tiene como máximo  $n$  eigenvalores distintos.

#### 5.7.1. Problema de eigenvalor para vibraciones unidimensionales

Consideraremos la parte homogénea de la ecuación (5.64), es decir, cuando el vector  $\mathbf{Q} = 0$  y  $\cos(\omega t)$  no es cero, ya que no deseamos obtener la solución trivial, por lo que tenemos el siguiente problema de eigenvalor dado por

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} = 0. \quad (5.76)$$

Entonces, podemos determinar los valores  $\omega$ .

### 5.7.2. Problema de eigenvalor para vibraciones bidimensionales

La ecuación (5.73) también es un problema de eigenvalor al hacer  $\mathbf{Q}^1$  y  $\mathbf{Q}^2$  ambos cero, es decir

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = 0. \quad (5.77)$$

Como las matrices de masa y de rigidez asociadas al sistema (5.77) son matrices de tamaño  $18 \times 18$ , entonces se tienen a lo más 18 eigenvalores distintos.

## 5.8. Condiciones de frontera

Hasta este punto, las condiciones de frontera de los problemas planteados no han sido usadas en el desarrollo de los modelos de elemento finito. Al imponer las condiciones de frontera en un conjunto de ecuaciones algebraicas ensambladas obtendremos un sistema cerrado.

Las condiciones de frontera (4.5) y (4.6) planteadas en el capítulo 4 para las vibraciones unidimensionales, y para las bidimensionales, ecuaciones (4.11) y (4.12), son de tipo Neumann, ya que sólo conocemos el valor de la derivada de la función en la frontera del dominio. Aunque cabe aclarar, que esta metodología también funciona para condiciones de frontera de Dirichlet o mixtas<sup>12</sup>.

### 5.8.1. Condiciones de frontera libres u homogéneas

Llamamos condiciones de frontera homogéneas a aquellas en el que el sistema está libre de fuerzas externas. Entonces, con este tipo de condiciones de frontera analizamos los modos naturales de vibración de los sistemas.

#### *Vibraciones unidimensionales de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas*

Al sustituir las condiciones de frontera (4.5) en la ecuación (5.13), obtenemos que el vector de fuerzas internas es nulo y el valor del desplazamiento en los nodos estará dado al resolver la siguiente ecuación,

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{U} \cos(\omega t) = 0. \quad (5.78)$$

El sistema (5.76) se puede resolver numéricamente ya que contiene un número igual de ecuaciones e incógnitas.

El problema de eigenvalor proporciona un eigenvector  $\Phi_i$  por cada eigenvalor  $\omega_i$ , y con ellos se forma la siguiente matriz modal

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_9 \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

Por lo tanto la solución aproximada en el sentido de integral ponderada para la ecuación diferencial (4.3) es de la forma

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^9 \Phi_i \cos(\omega_i t) \quad (5.80)$$

donde  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_9)$  es un vector cuyas componentes son los valores de la función en los nodos  $U_i \approx u(x_i, y_i, t)$ , entonces hemos encontrado el valor del desplazamiento en la dirección axial.

#### *Vibraciones bidimensionales de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas*

Análogamente a las vibraciones unidimensionales, sustituimos las condiciones de frontera (4.11) en las ecuaciones (5.22) y (5.23), obteniendo que los vectores  $\mathbf{Q}^1$  y  $\mathbf{Q}^2$  son nulos y, determinado el valor  $\omega$  de la ecuación (5.77), el sistema a resolver es

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} \cos(\omega t) = 0. \quad (5.81)$$

El sistema (5.81) se puede resolver ya que es un sistema cerrado. Al proponer la matriz modal del sistema como sigue

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{18} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_{18} \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Los desplazamientos en los nodos del dominio, en las direcciones  $u$  y  $v$  están dados por

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{18} \Phi_i \cos(\omega_i t) \quad (5.83)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{18} \Psi_i \cos(\omega_i t). \quad (5.84)$$

### 5.8.2. Condiciones de frontera forzadas o no homogéneas

Cuando se aplican condiciones de frontera no homogéneas, el comportamiento de la función se ajusta a los valores asignados en la frontera, por lo que el sistema vibra de manera distinta a los modos naturales de vibración.

#### *Vibraciones unidimensionales de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas*

Al sustituir las condiciones de frontera (4.6) en la ecuación (5.13), se determina el valor del vector  $\mathbf{Q}$ , dejando como únicas incógnitas las componentes del vector  $\mathbf{U}$ , para así obtener el sistema consistente

$$\Phi_i = (-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{Q} \quad (5.85)$$

entonces la solución está dada por

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^9 \Phi_i \cos(\omega_i t). \quad (5.86)$$

#### *Vibraciones bidimensionales de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas*

Los valores de los vectores  $\mathbf{Q}^1$  y  $\mathbf{Q}^2$  son obtenidos al sustituir las condiciones de frontera (4.12) en las ecuaciones (5.22) y (5.23), dejando como únicas incógnitas a las componentes de los vectores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ , para así obtener un sistema consistente dado por

$$\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Psi_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{18} \tilde{\mathbf{T}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{Q}} \quad (5.87)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{T}}_i = -\omega_i^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

y

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^1 \\ \mathbf{Q}^2 \end{Bmatrix}. \quad (5.89)$$

---

Por consiguiente, los valores de los desplazamientos en las direcciones  $u$  y  $v$ , en los nodos del dominio, para condiciones de frontera forzadas están dadas por

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{18} \Phi_i \cos(\omega_i t), \quad (5.90)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{18} \Psi_i \cos(\omega_i t). \quad (5.91)$$

Una vez obtenidos los modelos de elemento finito para vibraciones unidimensionales (4.3) y bidimensionales (4.10), bajo condiciones de frontera libres y forzadas planteados en el capítulo 4, el siguiente paso es realizar los análisis numéricos con ejemplos específicos para cada uno de los 4 casos.

## 6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el análisis numérico de vibraciones unidimensionales y bidimensionales en barras elásticas homogéneas e isotrópicas, es necesario especificar las propiedades del material y las dimensiones de la barra para establecer la discretización del dominio y que los resultados sean apegados a la realidad física. Las ecuaciones (4.3) y (4.10) requieren datos como el módulo de cizallamiento, el módulo volumétrico y la densidad del medio.

Para hacer el análisis numérico consideraremos una barra constituida de arenisca cuyas características se muestran en la siguiente tabla

Dato	
Altura	4 <i>cm</i>
Longitud base	2.5 <i>cm</i>
Densidad	$\rho = 2.65 \times 10^{-3} \text{ Kg/cm}^3$
Módulo de cizallamiento	$\mu = 7.17 \times 10^8 \text{ Kg/cm s}^2$
Módulo volumétrico	$\lambda = 7.17 \times 10^8 \text{ Kg/cm s}^2$

Tab. 6.1: Dimensiones y propiedades de la barra de arenisca.

Como la barra es isotrópica y tiene simetría axial, entonces la cortamos transversalmente como se muestra en la Fig. 6.1, y estudiaremos el movimiento de dos puntos contenidos en dicha sección de la barra. De ese análisis podremos inferir cómo se mueve la barra en su entidad completa.

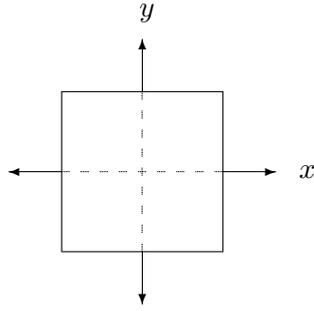


Fig. 6.1: Corte transversal de la barra visto a lo largo del eje  $z$ .

### 6.1. Vibraciones unidimensionales

Por ejemplo, para una barra de arenisca con las propiedades y dimensiones descritas en la Tabla 6.1, y considerando una malla de  $2 \times 2$  elementos, como en la Fig. 5.7, la matriz de masa  $\mathbf{M}$ , ecuación (5.65), es

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,1736 & 0,0868 & 0 & 0,0868 & 0,0434 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0868 & 0,3472 & 0,0868 & 0,0434 & 0,1736 & 0,0434 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0868 & 0,1736 & 0 & 0,0434 & 0,0868 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0868 & 0,0434 & 0 & 0,3472 & 0,1736 & 0 & 0,0868 & 0,0434 & 0 \\ 0,0434 & 0,1736 & 0,0434 & 0,1736 & 0,6944 & 0,1736 & 0,0434 & 0,1736 & 0,0434 \\ 0 & 0,0434 & 0,0868 & 0 & 0,1736 & 0,3472 & 0 & 0,0434 & 0,0868 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0868 & 0,0434 & 0 & 0,1736 & 0,0868 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0434 & 0,1736 & 0,0434 & 0,0868 & 0,3472 & 0,0868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0434 & 0,0868 & 0 & 0,0868 & 0,1736 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

y la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , ecuación (5.66), está dada por

$$\mathbf{K} = 10^{11} \begin{bmatrix} 0,3082 & -0,0770 & 0 & -0,0770 & -0,1541 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0770 & 0,6164 & -0,0770 & -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0770 & 0,3082 & 0 & -0,1541 & -0,0770 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0770 & -0,1541 & 0 & 0,6164 & -0,1541 & 0 & -0,0770 & -0,1541 & 0 \\ -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 & 1,2327 & -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 \\ 0 & -0,1541 & -0,0770 & 0 & -0,1541 & 0,6164 & 0 & -0,1541 & -0,0770 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0770 & -0,1541 & 0 & 0,3082 & -0,0770 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1541 & -0,1541 & -0,1541 & -0,0770 & 0,6164 & -0,0770 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1541 & -0,0770 & 0 & -0,0770 & 0,3082 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Puesto que la matriz  $\mathbf{M}$  es definida positiva y la matriz  $\mathbf{K}$  es por lo menos semidefinida positiva, ya que todos los elementos de su diagonal principal son no negativos, entonces todos los eigenvalores  $\omega$  en la ecuación (5.64) son constantes reales no negativas. La Tabla 6.2 muestra los primeros 9 eigenvalores para el dominio discretizado en mallas de  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  y  $8 \times 8$ .

$\omega_i$	$2 \times 2$	$4 \times 4$	$8 \times 8$
$\omega_1$	0	0	0
$\omega_2$	$2.9792 \times 10^5$	$2.7717 \times 10^5$	$2.7192 \times 10^5$
$\omega_3$	$2.9792 \times 10^5$	$2.7717 \times 10^5$	$2.7192 \times 10^5$
$\omega_4$	$4.2132 \times 10^5$	$3.9197 \times 10^5$	$3.8455 \times 10^5$
$\omega_5$	$5.9588 \times 10^5$	$5.9583 \times 10^5$	$5.5434 \times 10^5$
$\omega_6$	$5.9588 \times 10^5$	$5.9583 \times 10^5$	$5.5434 \times 10^5$
$\omega_7$	$6.6616 \times 10^5$	$6.5715 \times 10^5$	$6.1744 \times 10^5$
$\omega_8$	$6.6616 \times 10^5$	$6.5715 \times 10^5$	$6.1744 \times 10^5$
$\omega_9$	$8.4264 \times 10^5$	$8.4264 \times 10^5$	$7.8395 \times 10^5$

Tab. 6.2: Frecuencias naturales para la vibración unidimensional de barras elásticas, homogéneas e isotrópicas calculadas usando tres tipos de mallas rectangulares.

Cabe resaltar que entre más nodos se tengan, los resultados serán más exactos, sin embargo, se requerirá un mayor número de cálculos numéricos, lo que implicará mayor tiempo de cómputo.

### 6.1.1. Vibraciones unidimensionales libres u homogéneas

En esta sección se resolverá el sistema (5.64) que corresponde a las vibraciones unidimensionales con condiciones de frontera libres u homogéneas dadas por las ecuaciones (4.5).

Para la malla rectangular de  $8 \times 8$  elementos, las Fig. 6.2 y Fig. 6.3 muestran para el cuarto  $\omega_4$  y el quinto modo  $\omega_5$ , respectivamente, la trayectoria de dos partículas al vibrar la barra de arenisca en la dirección axial,  $z$ , por 3 segundos. En ambas figuras, la curva continua azul describe el movimiento que presenta la partícula localizada cerca de la frontera de la sección transversal, en la posición  $(0.9375, 0.9375)$  y la curva continua roja la otra que está cerca del centro de dicho corte en la posición  $(0.3125, 0.3125)$ .

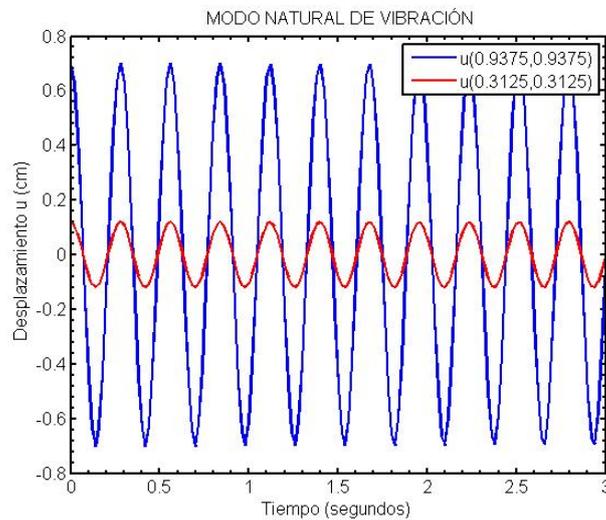


Fig. 6.2: Cuarto modo de vibración para una malla de  $8 \times 8$  elementos.

Las trayectorias en la Fig. 6.2 son periódicas, ambas con periodo de  $0.24$  s, y dicha figura muestra que el desplazamiento en la dirección axial del punto localizado cerca de la frontera alcanza una amplitud máxima de  $1.4012$  cm, mientras que el del punto cercano al centro es de  $0.2404$  cm. Al considerar que la barra tiene una altura de  $4$  cm, la amplitud máxima es superior al desplazamiento físicamente posible, por lo que no podemos excitar el cuarto modo natural de vibración en la barra pues el material se rompería. Simplemente, el punto localizado en  $(0.9375, 0.9375)$  se mueve en la dirección axial hacia arriba y hacia abajo de hasta  $0.7002$  cm.

Para el quinto modo natural de vibración, las trayectorias en la Fig. 6.3 tienen periodo de 4.23 s y el desplazamiento de ambas partículas tiene una amplitud de 1.1898 cm. Ambas partículas presentan el mismo tipo de desplazamiento, pero con un desfase de medio periodo entre ellas.

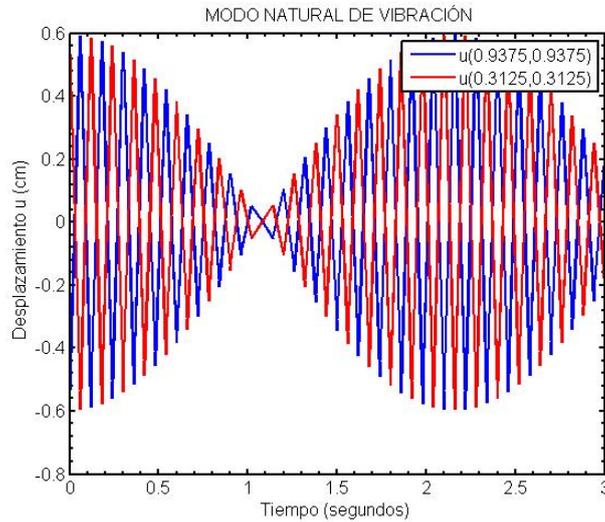


Fig. 6.3: Quinto modo de vibración para una malla de  $8 \times 8$  elementos.

Análogamente al caso anterior, el material se rompería al excitar este modo de vibración, pues las partículas describen un desplazamiento máximo en la dirección axial de 0.5949 cm hacia arriba y hacia abajo.

Siguiendo con los experimentos numéricos, compararemos los resultados anteriores usando una malla más fina para simular el cuarto modo natural de vibración. Para poder comparar se debe elegir una malla de manera que la anterior de  $8 \times 8$  elementos coincida en los dos puntos del dominio utilizados en la Fig. 6.2, por eso fué que seleccionamos una malla de  $16 \times 8$  elementos, aparte de que el tiempo de cómputo es menor que con una de  $16 \times 16$ . La Fig. 6.4 muestra la trayectoria de los puntos (0.3125,0.3125) y (0.9375,0.9375) en la malla de  $16 \times 8$ .

El punto localizado cerca de la frontera alcanza un amplitud de 1.4733 cm, mientras que la del punto cercano al centro es de 0.3457 cm. Ambos puntos oscilan con un periodo de 0.14s, lo que indica que al hacer más fina la malla la amplitud del movimiento de las partículas incrementa

y disminuye el periodo.

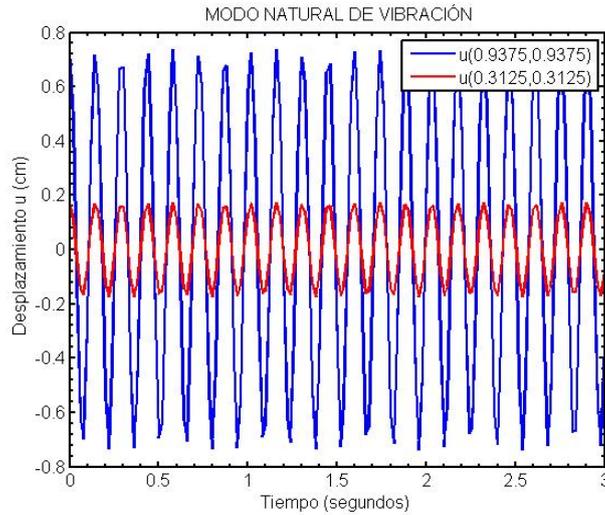


Fig. 6.4: Cuarto modo de vibración para una malla de  $16 \times 8$  elementos.

### 6.1.2. Vibraciones unidimensionales forzadas o no homogéneas

Ahora se analizarán las vibraciones unidimensionales con condiciones forzadas o no homogéneas dadas por (4.6). Al asignar valores a las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ , y sustituirlos en las integrales del vector  $\mathbf{Q}$ , ecuación (5.69), podemos resolver el sistema (5.85), con las matrices de masa  $\mathbf{M}$  y rigidez  $\mathbf{K}$  dadas en (6.1) y (6.2), respectivamente.

Para una malla de  $8 \times 8$  elementos analizaremos el cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas dadas por  $\alpha = \beta = 8 \times 10^5$ . En la Fig. 6.5 se muestra el movimiento que describen las mismas partículas de la sección anterior, es decir, las localizadas en  $(0.3125, 0.3125)$  y  $(0.9375, 0.9375)$  pero ahora cuando la barra está sujeta a esfuerzos en la frontera.

La curva azul en la Fig. 6.5, representa el desplazamiento de la partícula localizada cerca de la frontera y tiene una amplitud de  $15.5652 \times 10^{-13}$ , mientras la curva roja que simula el movimiento de la partícula cerca del centro es de  $5.1980 \times 10^{-13}$ , ambas con periodo de 0.28s.

Al incrementar la fuerza en la frontera, es decir, el valor de las constantes  $\alpha = \beta = 8 \times 10^{15}$ , vemos en la Fig. 6.6 que el periodo no varía. Las amplitudes  $s$  del desplazamiento de las partículas

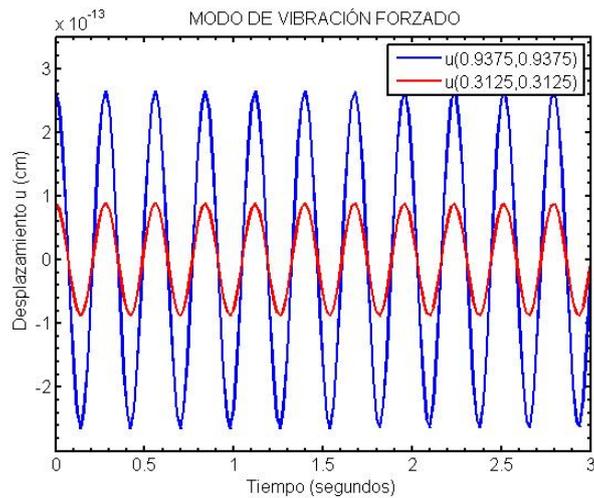


Fig. 6.5: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas.

incrementaron un poco a  $15.6 \times 10^{-3}$  y  $5.2 \times 10^{-3}$ , para la partícula que se encuentra cerca del centro y para la que está cerca de la frontera, respectivamente.

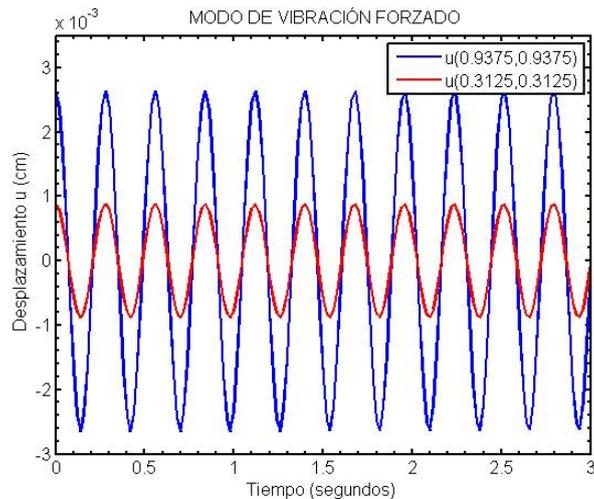


Fig. 6.6: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas.

Al comparar las Fig. 6.5 y Fig. 6.6, vemos que al imponer diferentes valores de esfuerzos en la frontera de la barra, el periodo del movimiento de las partículas es el mismo y que entre mayor sea el valor de los esfuerzos mayor será la amplitud de los movimientos.

## 6.2. Vibraciones bidimensionales

En esta sección se resolverá el sistema (5.73) que corresponde a las vibraciones bidimensionales. Análogamente al caso unidimensional, como la barra es isotrópica y simétrica, sólo es necesario analizar el movimiento de las partículas en un corte transversal de la barra.

### 6.2.1. Vibraciones bidimensionales libres u homogéneas

Al aplicar las condiciones de frontera libres u homogéneas dadas por las ecuaciones (4.11) para la malla rectangular de  $8 \times 8$  elementos, las Fig. 6.7 y Fig. 6.8 muestran para el cuarto modo de vibración  $\omega_4$ , la trayectoria en las direcciones  $x$  y  $y$  de dos partículas al vibrar la barra de arenisca por 3 segundos. En ambas figuras, la curva continua azul describe el movimiento que presenta una partícula localizada cerca de la frontera del dominio, en la posición  $(0.3125, 0.3125)$  y la curva continua roja otra cerca del centro, en la posición  $(0.9375, 0.9375)$ . Notemos que se seleccionaron las dos partículas cuyo comportamiento se estudió en la sección anterior.

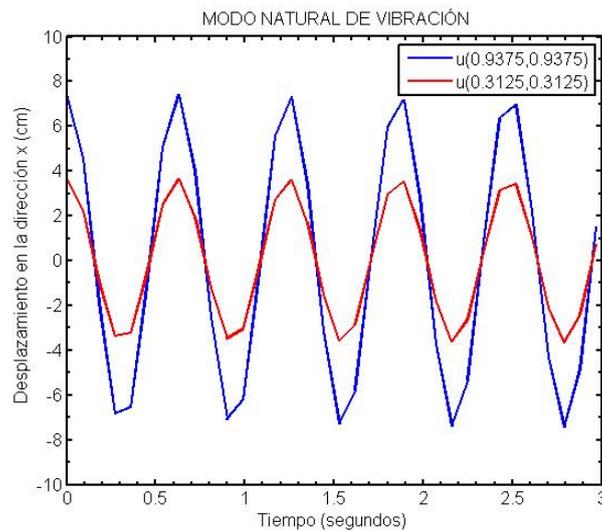


Fig. 6.7: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera libres en la dirección  $x$ .

La Fig. 6.7 muestra las trayectorias de ambas partículas en la dirección  $x$  y la Fig. 6.8 en la dirección  $y$ , ambas gráficas tienen periodo de  $0.63s$  y una amplitud en ambas direcciones para el punto cercano a la frontera de  $14.9128$  y para el punto cercano al centro de  $7.3331$ . Por lo que

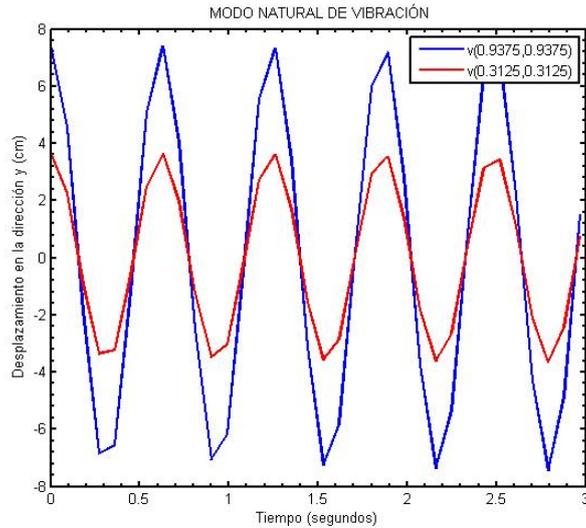


Fig. 6.8: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera libres en la dirección  $y$ .

si intentáramos excitar este modo de vibración la barra se rompería.

### 6.2.2. Vibraciones bidimensionales forzadas o no homogéneas

Aplicamos condiciones de frontera forzadas o no homogéneas dadas por las ecuaciones (4.12) para la misma malla de la sección anterior, las Fig. 6.8 y Fig. 6.9 muestran para el cuarto modo de vibración  $\omega_4$ , la trayectoria de las dos partículas cuyo comportamiento se estudió en la sección anterior.

En las gráficas de las Fig. 6.9 y Fig. 6.10, la amplitud en ambas direcciones para el punto cercano a la frontera es de  $8.4 \times 10^{-3}$  y del cercano al centro es de  $2.8 \times 10^{-3}$ .

Entonces, mediante el método de elemento finito hemos simulado cómo se desplazarían los puntos al vibrar una barra de arenisca. Estas simulaciones nos indican que si quisiéramos experimentar en el laboratorio no podríamos excitar el cuarto o el quinto modo natural de vibración con condiciones de frontera homogéneas porque el material se rompería, sin embargo si podremos poner a vibrar a la barra al imponer esfuerzos en la frontera ya que estos limitan el desplazamiento.

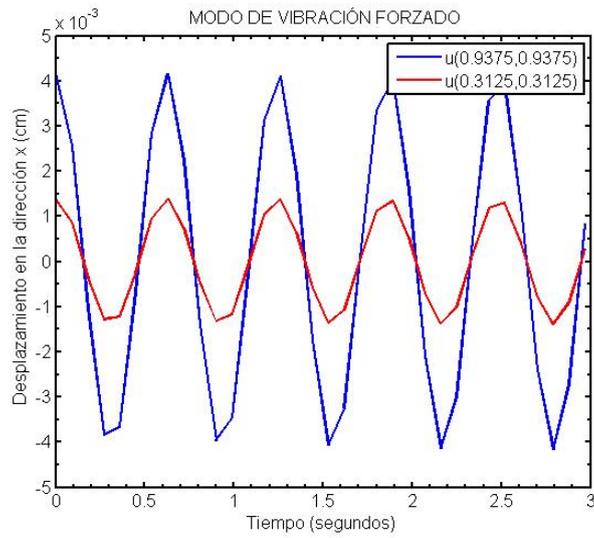


Fig. 6.9: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas en la dirección  $x$ .

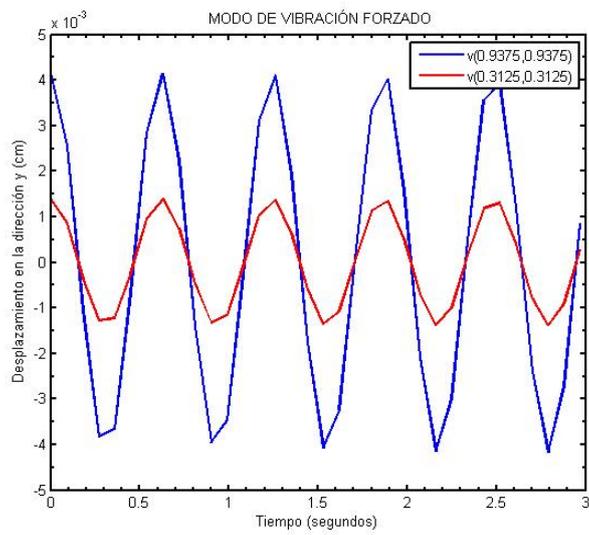


Fig. 6.10: Cuarto modo de vibración con condiciones de frontera forzadas en la dirección  $y$ .

## 7. CONCLUSIONES

En lugar de resolver analíticamente las ecuaciones que representan las vibraciones unidimensionales, ecuación (3.3), y bidimensionales, ecuación (3.10), en barras elásticas e isotrópicas para calcular los desplazamientos y los modos de vibración, se resolvieron numéricamente mediante el método de elemento finito.

El método de elemento finito es una buena técnica numérica para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Elegimos trabajar con este método porque, a diferencia de otros métodos numéricos, es flexible y ofrece varias opciones como lo son:

- Formas de construir las ecuaciones: mínimos cuadrados, formulación variacional, residuos ponderados, etcétera.
- Tipos de elementos: triangulares, rectangulares, etcétera.
- Elección de las funciones de interpolación: Lagrange, Hermite, etcétera.
- Polinomio de interpolación: lineal, cuadrático.

Dependiendo de la estructura de interés y exactitud deseada, se tomarán las opciones convenientes. En este trabajo utilizamos elementos finitos rectangulares en un dominio rectangular y funciones de aproximación lineales a fin de dar a entender las bases del método.

Obtener resultados numéricos es sólo una parte del trabajo, para poder interpretarlos se requiere conocimiento de otras áreas de la ciencia e ingeniería, así como las limitaciones de cada suposición hecha en el modelo. Hay que tener en cuenta que todo dato requerido como entrada es una fuente de error, incluso la geometría es una fuente de variación ya que en una estructura de dimensiones muy pequeñas no es común esperar datos precisos de altura, longitud o grosor.

Las condiciones de frontera especifican el problema a resolver y son aplicadas como limitaciones. En las vibraciones libres la aplicación externa de cargas es cero y la estructura vibra bajo sus frecuencias naturales. En la mayoría de los casos el dominio es sujeto a las cargas externas diferentes de cero, sin embargo, la solución del problema de las vibraciones sin amortiguamiento proveen las características dinámicas más importantes de una estructura: las frecuencias naturales y las formas de los modos.

Al no ser aplicadas condiciones iniciales a ninguno de los casos estudiados, en especial a los homogéneos, donde las soluciones son múltiplos de los eigenvectores, la ausencia de estas condiciones afecta las amplitudes de la solución, por lo que la información relevante en estos casos son el movimiento oscilatorio y el periodo.

Las simulaciones numéricas mostradas en este trabajo sirvieron para verificar cuales fuerzas pueden ser aplicadas de manera que las estructuras no rebasen su límite de elasticidad, esto es, que el desplazamiento de los puntos del dominio sea físicamente posible.

Este estudio de vibraciones unidimensionales y bidimensionales es una base para un estudio posterior de estructuras más complejas. El análisis puede ser aplicado a problemas de pequeña escala, como es el caso de este trabajo, o de grandes escalas como en estructuras de ingeniería tales como puentes y edificios.

## 8. ANEXOS

### 8.1. Programas principales

```
% DEFORMACION UNIDIMENSIONAL
clear all
clc
% Constantes ecuación diferencial
rho = 2.65e-3;           % Densidad del medio ( $Kg/cm^3$ ).
mu = 7.17e8;           % Módulo de cizallamiento ( $Kg/cms^2$ ).
vs2 = mu/rho;         % Velocidad de onda s ( $cm/s$ ).
% Condiciones de frontera no homogéneas
alpha = 8e5;
beta = 8e5;
c1 = alpha/mu;
c2 = beta/mu;
% Dimensiones de la barra
A = 2.5;               % Longitud en x ( $cm$ ).
B = 2.5;               % Longitud en y ( $cm$ ).
% Elementos finitos
m = 8;  a = A/m;
n = 8;  b = B/n;
% Intervalos de espacio y tiempo
x = 0:a:m*a;
y = 0:b:n*b;
t = 0:.02:63;
```

---

```

% Modo de vibración
ESPERA = 4;
% Funciones interpolantes
[ Psii,dpsiidx,dpsiidy ] = psii(a,b,m,n);
% Cálculo de integrales
[IK1] = Integral(a,b,m*n,dpsiidx,dpsiidx);
[IK2] = Integral(a,b,m*n,dpsiidy,dpsiidy);
    I = vs2*(IK1+IK2);
[IM] = Integral(a,b,m*n,Psii,Psii);
[IQ] = IntegralQ(m,n,a,b,Psii,c1,c2);

% Ensamble
[K] = ensamble(I,m,n);           % Matriz de rigidez
[M] = ensamble(IM,m,n);         % Matriz de masa
[Q] = vectorQ(m,n,IQ);          % Vector de condiciones no homogéneas

% Problema eigenvalor
omega = sqrt(eig(K,M));          % Eigenvalores del sistema
[V, D] = eig(K,M);              % Matriz de eigenvectores (V) y matriz diagonal de eigenvalores (D)

uno = inv(-omega(ESPERA)*M+K)*Q;

for tt =1:length(t)
    for j =1:n+1
        for ii =1:m+1
            %Solución caso homogéneo
            u1(ii,j,tt) =V(ii+(j-1)*(m+1),ESPERA*cos(omega(ESPERA)*t(tt)));
            %Solución caso no homogéneo
            u2(ii,j,tt) = uno(ii+(j-1)*(m+1)*cos(omega(ESPERA)*t(tt)));
        end
    end
end

```

```

    end
end

% Gráficas
for pt =1:length(t)
    subplot(211); surf(y,x,u1(:,:,pt));
    title(' MODO NATURAL DE VIBRACION'), axis([0 B 0 A -20 20]);
    xlabel(' x '),ylabel(' z'),zlabel(' u_y');
    subplot(212); surf(y,x,u2(:,:,pt));
    title(' MODO FORZADO DE VIBRACION'), axis([0 B 0 A -1 1]);
    xlabel(' x '),ylabel(' z'),zlabel(' u_y');
    getframe();
end

for ii=1:length(t)
    un1(ii)=u1(8,8,ii);
    un3(ii)=u1(6,6,ii);
end

maxu1=max(max(max(u1)));
minu1=min(min(min(u1)));
figure1 = figure;

plot(t,un1,'b',t,un3,'r','LineWidth',2);
title(' MODO NATURAL DE VIBRACIÓN'),
legend('u(0.9375,0.9375) ', 'u(0.3125,0.3125)');
xlabel(' Tiempo (segundos) '),ylabel(' Desplazamiento u (cm)');
% axis([ 0 3 -3e-3 3.5e-3]);

set(gca,'XminorTick','on','YminorTick','on');
```

\*\*\*\*\*

## % DEFORMACION BIDIMENSIONAL

clear all

clc

% Constantes ecuación diferencial

lambda = 1.4e8; % Módulo volumétrico ( $Kg/cm^2$ ).  
rho = 2.85e-3; % Densidad del medio ( $Kg/cm^3$ ).  
mu = 7.17e8; % Módulo de cizallamiento ( $Kg/cm^2$ ).  
vs2 = mu/rho; % Velocidad de onda s ( $cm/s$ ).  
vp2 = (lambda+mu)/rho; % Velocidad de onda p ( $cm/s$ ).

% Condiciones de frontera no homogéneas

alpha = 8e15;  
beta = 8e15;  
c1 = alpha/(lambda-mu);  
c2 = beta/mu;

% Dimensiones de la barra

A = 2.5; % Longitud en x ( $cm$ ).  
B = 2.5; % Longitud en y ( $cm$ ).

% Elementos finitos

m = 8; a = A/m;  
n = 8; b = B/n;

% Intervalos de espacio y tiempo

x = 0:a:m\*a;  
y = 0:b:n\*b;  
t = 0:.02:3;

---

```
% Modo de vibración
```

```
ESPERA = 4;
```

```
% Funciones interpolantes
```

```
[Psii,dpsiidx,dpsiidy] = psii(a,b,m,n);
```

```
% Cálculo de integrales
```

```
[IK11] = Integral(a,b,m*n,dpsiidx,dpsiidx);
```

```
[IK12] = Integral(a,b,m*n,dpsiidx,dpsiidy);
```

```
[IK21] = Integral(a,b,m*n,dpsiidy,dpsiidx);
```

```
[IK22] = Integral(a,b,m*n,dpsiidy,dpsiidy);
```

```
k11 = vp2*IK11 + vs2*IK22;
```

```
k12 = vp2*IK12 - vs2*IK21;
```

```
k22 = vp2*IK22 + vs2*IK11;
```

```
[IM] = Integral(a,b,m*n,Psii,Psii);
```

```
[IQ] = IntegralQ(m,n,a,b,Psii,c1,c2);
```

```
% Primer ensamble
```

```
[K11] = ensamble(k11,n,m);
```

```
[K12] = ensamble(k12,n,m);
```

```
[K21] = K12';
```

```
[K22] = ensamble(k22,n,m);
```

```
[M] = ensamble(IM,n,m);
```

```
[Q]= vectorQ(m,n,IQ);
```

```
% Segundo ensamble
```

```
N = zeros((m+1)*(n+1),(m+1)*(n+1));
```

```
[KK] = [K11 K12; K21 K22];
```

```
% Matriz de rigidez
```

```
[MM] = [M N; N M];
```

```
% Matriz de masa
```

---

```

[QQ] = [Q; Q];                                %Vector de condiciones no homogéneas

% Problema eigenvalor
omega = sqrt(eig(KK,MM));                      % Eigenvalores del sistema
[V, D] = eig(KK,MM);

uno = inv(-omega(ESPERA)*MM+KK)*QQ;

% Solución caso homogéneo
for tt =1:length(t)
    for j =1:n+1
        for ii =1:m+1
            %Desplazamiento en dirección x
            u1x(ii,j,tt) = V(ii+(j-1)*(m-1),ESPERA)*cos(*omega(ESPERA)*t(tt));
            %Desplazamiento en dirección y
            u1y(ii,j,tt) = V(ii+(j-1)*(m-1)+(m+1)*(n+1),ESPERA)*cos(*omega(ESPERA)*t(tt));
        end
    end
end

% Solución caso no homogéneo
for tt =1:length(t)
    for j =1:n+1
        for ii =1:m+1
            %Desplazamiento en dirección x
            u2x(ii,j,tt) = uno(ii+(j-1)*(m-1))*cos(*omega(ESPERA)*t(tt));
            %Desplazamiento en dirección y
            u2y(ii,j,tt) = uno(ii+(j-1)*(m-1)+(m+1)*(n+1))*cos(*omega(ESPERA)*t(tt));
        end
    end
end

```

---

end

% Gráficas

for pt =1:length(t)

% subplot(221),surf(y,x,uz1( :,:,pt)), title(' ELEMENTO FINITO',axis([0 B 0 A -0.5 .5])

% subplot(222),surf(y,x,uz(:, :,pt)), title(' ELEMENTO FINITO'),axis([0 B 0 A -.5 .5])

% subplot(223),surf(y,x,ux1(:, :,pt)), title(' ELEMENTO FINITO'),axis([0 B 0 A -0.00001 .00003])

% subplot(224),surf(y,x,uz1(:, :,pt)), title(' ELEMENTO FINITO'),axis([0 B 0 A -.00001 .000005])

% getframe();

% end

% Puntos iniciales

% for i=1:m+1

%     for j=1:n+1

%             uz2((i-1)\*(n+1)+j,1)=y(j);

%             ux2((i-1)\*(n+1)+j,1)=x(i);

%     end

% end

% for tt=2:length(t)

%     for j=1:n+1

%         for i=1:m+1

%             uz2((j-1)\*(m+1)+i,tt)=ux(i,j,tt)+uz2((j-1)\*(m+1)+i,1);

%             uz2((j-1)\*(m+1)+i,tt)=uz(i,j,tt)+uz2((j-1)\*(m+1)+i,1);

%         end

%     end

% end

% minu=min(min(ux2));

% maxu=max(max(ux2));

---

```

% minv=min(min(uz2));
% maxv=max(max(uz2));

% for pt=1:length(t)
% plot(ux2(:,pt),uz2(:,pt),'r*'),axis([minu-5 maxu+5 minv-5 maxv+5])
% pause(0.3)
% getframe();
% end

for ii=1:length(t)
    unx1(ii)=ux1(8,8,ii);
    unx3(ii)=ux1(6,6,ii);
    unz1(ii)=uz(8,8,ii);
    unz3(ii)=uz(6,6,ii);
end

plot(t,unz1,'b',t,unz3,'r','LineWidth',2);
title(' MODO NATURAL DE VIBRACIÓN'),
%axis([ 0 3 -10 10]);
set(gca,'XminorTick','on','YminorTick','on');
xlabel(' Tiempo (segundos) '),ylabel(' Desplazamiento en la dirección y (cm)');
legend('v(0.9375,0.9375) ', 'v(0.3125,0.3125)');

```

## 8.2. Funciones

```

% Función que calcula las funciones de interpolación.
function [Psii, dPsiidx, dPsiidy] = psii(a,b,m,n)
for j =1:m
    for i =1:n
        for k =1:2

```

---

```

        x1(k*k,m*(j-1)+i)=0;
        x1(1+k,m*(j-1)+i)=a;
        y1(k,m*(j-1)+i)=0;
        y1(2+k,m*(j-1)+i)=b;
    end
end
end
for e =1:m*n
    x = [x1(1,e):a/2:x1(2,e)];
    y = [y1(1,e):b/2:y1(4,e)];
    for k =1:4
        for i =1:3
            for j =1:3
                Psii(i,j,k,e) = ((-1)^(k+1))*(1-(x(i)+x1(k,e))/a)*(1-(y(j)+y1(k,e))/b);
                dPsiidx(i,j,k,e) = ((-1)^k)*(1/a)*(1-(y(j)+y1(k,e))/b);
                dPsiidy(i,j,k,e) = ((-1)^k)*(1/b)*(1-(x(j)+x1(k,e))/a);
            end
        end
    end
end
end
*****
% Función para la obtención de las integrales necesarias para la construcción de las matrices K
y M.
function [I] = Integral(a,b,element,f1,f2)
h = a*b/36;
for e =1:element
    for i =1:4
        for j =1:4
            f(:,i,j,e)=f1(:,i,e).*f2(:,j,e);
            I(i,j,e) = h*( f(1,1,i,j,e)+f(1,3,i,j,e)+f(3,1,i,j,e)+f(3,3,i,j,e)+ ...

```

---

```

    4*(f(1,2,i,j,e)+f(2,1,i,j,e)+f(2,3,i,j,e)+f(3,2,i,j,e)) + 16*f(2,2,i,j,e));
    end
end
end
*****
% Función para la obtención de las integrales necesarias para la construcción del vector Q.
function [Q] = IntegralQ(m,n,h1,h2,Psii,c1,c2)
Q = zeros(m*n,4);
Q(1,4) = c1*(h1/6)*(Psii(1,1,4,1)+4*Psii(1,2,4,1)+Psii(1,3,4,1));
Q(m,3) = c1*(h1/6)*(Psii(3,1,3,1)+4*Psii(3,2,3,1)+Psii(3,3,3,1));
% Lado izquierdo
for e =1:m:(n-1)*m+1
    for i =1:3:4
        Q(e,i) = c1*(h1/6)*(Psii(1,1,i,e)+4*Psii(1,2,i,e)+Psii(1,3,i,e));
    end
end
% Lado derecho
for e =m:m:n*m
    for i =2:3
        Q(e,i) = c1*(h1/6)*(Psii(3,1,i,e)+4*Psii(3,2,i,e)+Psii(3,3,i,e));
    end
end
% Arriba
for e =(n-1)*m+1:n*m
    for i =3:4
        Q(e,i) = c2*(h1/6)*(Psii(1,3,i,e)+4*Psii(2,3,i,e)+Psii(3,3,i,e));
    end
end
end

```

---

```

% Abajo
for e =2:m
    for i =2
        Q(e,i) = c2*(h1/6)*(Psii(1,3,i,e)+4*Psii(2,3,i,e)+Psii(3,3,i,e));
    end
end
end
*****

% Función que ensambla las matrices K y M.
function [K] = ensamble(f,m,n)

elementos = n*m;
d =-1;

if (elementos==1)
    d =0;
end
for e=1:elementos
    if (mod(e,m)==1)
        d=d+1;
    end
    for i =1:2
        for j =1:2
            k(i+e-1+d,j+e-1+d,e) = f(i,j,e);
            k(i+e-1+d,j+e+m+d,e) = f(i,5-j,e);
            k(i+e+m+d,j+e-1+d,e) = f(5-i,j,e);
            k(i+e+m+d,j+e+m+d,e) = f(5-i,5-j,e);
        end
    end
end
end
end

```

---

```

K1(:,:,1) = k(:,:,1);
for e = 1:elementos-1
    K1(:,:,e+1) = k(:,:,e+1)+K1(:,:,e);
end
K(:,:) = K1(:,:,elementos);
*****
% Función que ensambla los esfuerzos en los nodos de la frontera de la malla.
function [F] = vectorQ(m,n,f)

r3 = -1;

for e = 1:m*n
    if (mod(e-1,m)==0)
        r3=r3+1;
    end
    for j=1:2
        r1=(j+r3+e-1)+(j-1)*m;
        r2=(j+r3+e)+(j-1)*m;
        VF(e,r1)=f(e,j*j);
        VF(e,r2)=f(e,j+1);
    end
end

F=VF'*ones(m*n,1);

```

## Bibliografía

- [1] *Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik* , J. Reine. Angew. Math. 1909.
- [2] *Solución en serie de algunos problemas de equilibrio estático en barras y placas*, Vestn. Inzn. Tech. 1915.
- [3] *Solution of Problems of Elasticity by the Frame-Work Method* ,1941.
- [4] *A lattice analogy for the solution of plane stress problems* , J. Inst. Civ. Eng. 1943.
- [5] *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration* , Bull. Am. Math. Soc. 1943.
- [6] *Stiffnes and deflection analysis of complex structures*, J. Aero. Sci., 1956.
- [7] *Basis of derivation of matrices for the direct stiffness analysis*, J.A.I.A.A., 1963.
- [8] *Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method, The Trend in Engineering*, Vol.13,5a-19no, 1961.
- [9] *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
- [10] *Stress Analysis*, John Wiley and Sons Inc. New York, 1965.
- [11] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M., *Teoría de la elasticidad*, vol. 7: Física teórica. Editorial Reverté.
- [12] Reddy, J.N., *An introduction to the finite element method*, Editorial McGraw-Hill Inc., segunda edición.

- 
- [13] Love, A. E. H., 1944. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, New York Dover publications, New York, EUA.
- [14] Adams, Vince y Askenazi, Abraham. *Building better products with Finite Element Analysis*, OnWord Press, 1999.
- [15] Trew, Marion y Everett, Tony. *Fundamentos del cuerpo humano*, MASSON, 2006, 5.<sup>a</sup> edición.
- [16] Bhatia, A. B. y Singh, R. N.. *Mechanics of Deformable Media*, Adam Hilger, Bristol and Boston, 1986.
- [17] Viladoms Weber, Juan José . *Análisis de las propiedades de los materiales compuestos sometidos a tensión ó flexión*, Tesis en Ingeniería Mecánica, Universidad de las Américas Puebla, INC., Cholula, Puebla, 2003.
- [18] Riley, William F. y D. Sturges., Leroy *Ingeniería mecánica: dinámica*, ACADEMIC PRESS, INC., 1975.
- [19] A. Cemal Eringen y Erdogan S. Suhubi. *Elastodynamics volume II Linear Theory*, Editorial Reverté, 2005.
- [20] L. Burden, Richard y Douglas Faires, J.. *Análisis numérico*, International Thompson Editores, 2001, Séptima edición.