

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



EL TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

L I C E N C I A D O E N M A T E M Á T I C A S A P L I C A D A S

P R E S E N T A

CARLOS ADRIÁN PÉREZ ESTRADA

Ensenada, B.C.

Junio del 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

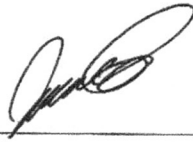
EL TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

TESIS PROFESIONAL

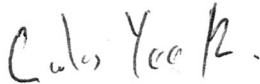
QUE PRESENTA

CARLOS ADRIÁN PÉREZ ESTRADA

APROBADO POR:



Dr. Carlos Villegas Blas
Presidente del jurado



Dr. Carlos Yee Romero
SECRETARIO



Dra. Brenda Leticia De La Rosa Navarro
1ER. VOCAL

Agradecimientos

Aprovecho este espacio para agradecer a todos los que hicieron posible la realización de este trabajo y, en consecuencia, la culminación de mi carrera universitaria.

En primer lugar, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme apoyo económico mediante el proyecto PAPIIT-UNAM IN105718. Esto, desde luego, no hubiera sido posible sin la intervención de mi director de tesis, Carlos Villegas Blas, a quien le gratifico su amabilidad durante los dos veranos que estuve en Cuernavaca. Sin él, el presente trabajo no hubiese sido posible.

También quiero agradecer a mi alma mater, la Universidad Autónoma de Baja California, por la formación profesional que recibí y con la cual pude cumplir mi sueño de estudiar Matemáticas. Agradezco a cada uno de los integrantes de la Academia de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, cada uno de ellos me enseñó lecciones que nunca olvidaré. En especial, le doy las gracias a Carlos Yee por su co-dirección en este trabajo y por todos los consejos que me brindó durante la realización del mismo.

Le agradezco a mis amigos, tanto a los de toda la vida como a los que hice durante la licenciatura, por estar conmigo durante las desgracias y los momentos buenos. Mención especial merece mi novia, Sandy Aguilar, puesto que su amor y comprensión me hicieron salir adelante cuando estaba a punto de rendirme.

Mi estancia en la ciudad de Ensenada no habría sido igual sin mis tíos, Rodolfo Estrada y Ana

Lilia Peralta, les doy las gracias por hacerme sentir en casa cuando estaba lejos de ella. De hecho, no hubiera ni podido estudiar en Baja California de no ser por el apoyo y amor incondicional que mi madre, Laura Estrada, siempre me ha dado. De ella aprendí el valor del trabajo duro y de la disciplina. También le agradezco mucho a mi hermana, Karen Nirilse, por el cariño y la sabiduría que me ha dado durante toda mi vida.

Resumen

El presente trabajo da una demostración de las tres formas en las que se presenta el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados y No Acotados. Para ello, se dan definiciones y resultados referentes al estudio de los espacios de Banach, álgebras de Banach, espacios de Hilbert y espacios de medida.

Con estos preliminares se construye un Cálculo Funcional Continuo para cada operador autoadjunto acotado que está definido en un espacio de Hilbert. Con él se construyen unas medidas, utilizando el Teorema de Riesz-Markov, que lo permite generalizar a un Cálculo Funcional Boreliano que verifica la primera forma del Teorema Espectral. Con las medidas comentadas anteriormente se demuestra la segunda forma y con el Cálculo Funcional Boreliano aplicado a las funciones características sobre borelianos reales se prueba la tercera.

Posteriormente, se generaliza la segunda forma a operadores normales acotados y operadores autoadjuntos no acotados, para luego obtener un Cálculo Funcional Boreliano sobre estos últimos que generalice las otras dos formas del Teorema Espectral para esos operadores.

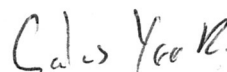
Resumen de la tesis de Carlos Adrián Pérez Estrada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México. Abril del 2020.

El Teorema Espectral Para Operadores Autoadjuntos.

Resumen aprobado:



Dr. Carlos Villegas Blas
DIRECTOR



Dr. Carlos Yee Romero
CO-DIRECTOR

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Espacios de Banach	5
1.2. Álgebras de Banach	29
1.3. Espacios de Hilbert	48
1.4. Espacios de medida	69
2. Teorema Espectral Para Operadores Autoadjuntos Acotados	104
2.1. Forma Del Cálculo Funcional Boreliano	104
2.2. Forma De Multiplicación	115
2.3. Forma De Las Medidas Espectrales	122
2.4. Teorema Espectral Para Operadores Normales Acotados	137
3. Teorema Espectral Para Operadores Autoadjuntos No Acotados	154
3.1. Preliminares	154
3.2. Teorema Espectral	163
Bibliografía	177

Introducción

Una de las relaciones más usuales entre el Álgebra y el Análisis se da con el estudio de los espacios normados. La estructura algebraica de estos se enriquece con las nociones de distancia, convergencia y continuidad que da la métrica inducida por su norma. Un ejemplo de ello es la definición formal de suma infinita (definición 62). Si la norma proviene de un producto interno, adicionalmente se adquieren propiedades geométricas tales como la perpendicularidad y la ley del paralelogramo para vectores.

En el caso particular de $\mathbb{C}^n$, su producto interno usual permite demostrar que toda matriz autoadjunta $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ posee solamente valores propios reales y es diagonalizable mediante una matriz ortogonal (ver [9]). El Teorema Espectral es la generalización de este resultado a cualquier $\mathbb{C}$ -espacio vectorial asociado a un producto interno que hace de éste un espacio métrico completo (ver [14]).

En términos de transformaciones lineales, lo anterior es equivalente a decir que si $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un operador autoadjunto, entonces existe un operador unitario $U: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ y n números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (los valores propios de A) tales que

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i, \quad (1)$$

para cada $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{C}^n$.

Esto se puede generalizar a cualquier $\mathbb{C}$ -espacio vectorial V de dimensión n que tenga asociado algún producto interno. Si $T: V \rightarrow V$ es un operador autoadjunto y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son sus valores propios, existe una base ortonormal de V formada únicamente por vectores propios de T . En consecuencia, el operador unitario $U: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ que manda dicha base de V a la base canónica de

$\mathbb{C}^n$ satisface la ecuación

$$UTU^{-1} = D, \quad (2)$$

en donde $D: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es la transformación para la cual $D(f_1, f_2, \dots, f_n) = (\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2, \dots, \lambda_n f_n)$ para cada $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{C}^n$.

La generalización de lo anterior a $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión infinita es posible con el apoyo de la Teoría de la Medida. El operador $U: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, descrito en el párrafo anterior, es un isomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial n -dimensional V que preserva el producto interno. En este sentido se puede decir que ambos espacios son *isométricamente isomorfos*, vía el *isomorfismo isométrico* U , debido a que las propiedades geométricas que proveen los productos internos serán idénticas en ambos espacios (ver [14], capítulo 2). Ejemplo de esto es la métrica, la cual hace de $\mathbb{C}^n$ y V espacios métricos completos. Si se considera la medida de conteo μ sobre un conjunto X de n elementos, el espacio de funciones de cuadrado integrable asociado al espacio de medida $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, denotado como $L^2(X, \mathcal{P}(X), \mu, \mathbb{C})$ en la definición 99, es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$ (teorema 136). En consecuencia, la ecuación 2 se puede reescribir reemplazando a $\mathbb{C}^n$ con $L^2(\{(\lambda_1, 1), (\lambda_2, 2), \dots, (\lambda_n, n)\})$ y a D por un operador $T_f: L^2 \rightarrow L^2$ que actúa por multiplicación por la proyección a la primera coordenada $f: \{(\lambda_1, 1), (\lambda_2, 2), \dots, (\lambda_n, n)\} \rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interno es un *espacio de Hilbert* si bajo la métrica inducida por éste el espacio métrico resultante es completo (ver [14], capítulo 2, página 39). Apelando al párrafo anterior, se concluye que salvo isomorfismo isométrico, el único espacio de Hilbert n -dimensional es $L^2(\{1, \dots, n\})$ bajo la medida de conteo. Si se asume el axioma de elección, lo cual se hace en este trabajo, todo espacio de Hilbert es isométricamente isomorfo al espacio L^2 basado en algún conjunto ortonormal del mismo, tomando como medida la de conteo (ver [16]). Esto motiva a preguntarse si la ecuación 2 se puede dar en cualquier espacio de Hilbert. El Teorema Espectral en su forma de multiplicación demuestra que la respuesta a esto es afirmativa si se pide que el operador T sea autoadjunto (ver [4]).

El Teorema Espectral se formula en tres formas distintas que resultan ser equivalentes. La primera forma indica que todo operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert está asociado a una función, denominada Cálculo Funcional Boreliano, que cumple ciertas propiedades que se discutirán en la sección 2.1 para operadores acotados y en la sección 3.2 para operadores acotados

y no acotados; la segunda forma muestra que estos operadores están relacionados a unos operadores de multiplicación que serán descritos en la sección 2.2 para operadores continuos y en la 3.2 para operadores no continuos; y la tercera forma establece una biyección, que será construida en la sección 3.1, entre el conjunto de operadores autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert y el conjunto de medidas espectrales reales que se pueden definir en el mismo. En la sección 2.3 se observará que tal biyección asocia operadores autoadjuntos acotados con medidas de soporte compacto y viceversa.

Para trabajar lo anterior es necesario estudiar definiciones y herramientas básicas del Análisis Funcional, lo cual ocupará el primer capítulo. En concreto, dicho capítulo aporta los preliminares necesarios para demostrar el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos, mediante 4 secciones que repasan la teoría acerca de espacios de Banach, espacios de Hilbert, álgebras de Banach y espacios de medida, respectivamente. El segundo capítulo contiene la demostración a dicho teorema para operadores autoadjuntos acotados en sus primeras tres secciones, y la generalización de éste a operadores normales acotados en su cuarta y última sección.

El tercer capítulo sólo contiene dos secciones. La primera da las definiciones y los resultados necesarios que se utilizan en la segunda para generalizar el Teorema Espectral a operadores autoadjuntos no acotados. Para lograr este último objetivo en una cantidad razonable de páginas, los preliminares del primer capítulo se escriben pensando en que el lector tiene conocimiento básico acerca de las teorías que se van a discutir. Por ejemplo, en las secciones 1.1 y 1.2 se asume conocimiento acerca de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados en un espacio métrico, distancia entre un punto y un conjunto, convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, funciones continuas, teoría de funciones holomorfas, entre otros. Para la 1.3 se asumen ciertas propiedades del producto interno tales como la ley del paralelogramo o la identidad de polarización; y al trabajar los espacios de medida que se introducirán en la sección 1.4 se asumen el teorema de la convergencia dominada (TCD) y el teorema de la convergencia monótona (TCM); así como propiedades algebraicas y analíticas de las funciones medibles, funciones simples y funciones características, las cuales se denotarán como $\mathcal{X}_A$ con las consideraciones pertinentes. Al desarrollar la teoría de Gelfand en la sección 1.5 se asumen conocimientos básicos de topología tales como la topología débil generada por una familia de funciones, uso de redes topológicas en cuestiones de convergencia y teoría acerca de los espacios de Hausdorff compactos. Esta última también es fundamental para poder formular el Teorema de Riesz-Markov (teorema 123), mismo que será probado en la sección 1.4.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se dan las herramientas necesarias para formular y demostrar el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados. En la primera sección se habla acerca de espacios de Banach, en la segunda acerca de Álgebras de Banach y C^* -álgebras, en la tercera acerca de espacios de Hilbert, y en la cuarta acerca de espacios de medida.

A partir de este capítulo se referirá como $\mathbb{K}x$ al $\mathbb{K}$ -espacio vectorial generado por un elemento x de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

1.1. Espacios de Banach

En esta sección se introducen las características esenciales de los espacios en los que se basará la mayoría del presente trabajo: los espacios de Banach. Se asume que el lector tiene conocimiento acerca de espacios métricos y de sus principales características. De no ser así, se recomienda la lectura del capítulo 1 de [14], mismo en el que se encuentran las definiciones y los teoremas dados en esta sección.

Definición 1 (Espacios Normados) Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en V si satisface lo siguiente:

1. $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$,
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ para todo $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$.

Si $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en V , se dice que la 4-tupla ordenada $(V, +, *, \|\cdot\|)$ es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado o un $\mathbb{K}$ -espacio normado.

Definición 2 Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales normados. Se define la norma de cualquier operador $T: X \rightarrow Y$ como

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1=1} \|T(x)\|_2.$$

Se dice que T es un operador acotado si y sólo si su norma es un número finito.

Nótese que todo $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado es un espacio métrico bajo la distancia dada por

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Por tanto, se tiene una noción de continuidad para funciones entre espacios normados, que en el caso de las transformaciones lineales, es capturada por los operadores acotados tal y como se muestra a continuación:

Teorema 3 Sean $(V_1, \|\cdot\|_1)$ y $(V_2, \|\cdot\|_2)$ dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales normados y $T: V_1 \rightarrow V_2$ una transformación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. T es continua en algún $x \in V_1$.
2. T es continua.
3. Existe un $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$ para todo $x \in V_1$.

Demostración. Supóngase que se cumple el punto 1. Si $y \in V_1$ es un elemento arbitrario y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1$ es una sucesión convergente a y , $\{y_n - y + x\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$, por lo cual

$$\{T(y_n - y + x)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow T(x).$$

Esto implica que $\{T(y_n) - T(y) + T(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow T(x)$ por lo que $\{T(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow T(y)$ dejando como consecuencia que T sea una función continua.

Si lo anterior es cierto, en particular se cumple que T es continua en 0 por que existe un $\delta > 0$ para el cual

$$x \in V_1 \text{ y } \|x\|_1 < \delta \text{ implica que } \|T(x)\|_2 < 1.$$

Por consiguiente, si $x \in V_1 \setminus \{0\}$, se tiene que

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_1 = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

por lo cual

$$\frac{\delta}{2\|x\|_1} \|T(x)\|_2 = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} T(x) \right\|_2 = \left\| T \left(\frac{\delta}{2\|x\|_{V_1}} x \right) \right\|_2 < 1.$$

Así,

$$\|T(x)\|_2 < \frac{2}{\delta} \|x\|_1, \text{ para cada } x \in V_1 \setminus \{0\},$$

de modo que T resulta ser un operador acotado.

Finalmente, si esta última proposición se cumple, se tiene la existencia de un $C \geq 0$ para el cual $\|T(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$. Entonces, para cualesquiera $p, q \in V_1$

$$\|T(p) - T(q)\|_2 = \|T(p - q)\|_2 \leq C\|p - q\|_1.$$

De ello se observa que T es una función continua en todos los puntos de V_1 . ■

Con los operadores acotados se tiene un primer ejemplo de un $\mathbb{K}$ -espacio normado dado a partir de otros dos. Este espacio será fundamental en la formulación del Teorema Espectral.

Definición 4 Sean X y Y dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales normados. Se define el conjunto

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ es un operador acotado} \}.$$

Si $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$, simplemente se denota a $\mathcal{L}(X, Y)$ como $\mathcal{L}(X)$.

Definición 5 Sean X y Y dos espacios normados. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tiene inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, se dice que T es un isomorfismo entre los espacios normados X y Y , y que estos son isomorfos. Además, si $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ para cada $x \in X$, se dice que X y Y son isométricamente isomorfos y que T es un operador unitario o un isomorfismo isométrico.

Teorema 6 Dados dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales normados X y Y , el conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ hereda una estructura natural de $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado bajo la suma de operadores y multiplicación por escalares usuales, y la norma dada en la definición 2.

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ elementos arbitrarios. Se tiene la existencia de dos $C_1, C_2 \geq 0$ para los cuales

$$\|T_1(x)\|_Y \leq C_1\|x\|_X \text{ y } \|T_2(x)\|_Y \leq C_2\|x\|_X \text{ si } x \in X.$$

Primero, se verifica que $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Para cada $x \in X$

$$\begin{aligned} \|(\alpha T_1 + \beta T_2)(x)\|_Y &= \|\alpha T_1(x) + \beta T_2(x)\|_Y \\ &\leq |\alpha| \|T_1(x)\|_Y + |\beta| \|T_2(x)\|_Y \\ &\leq C_1|\alpha| \|x\|_X + C_2|\beta| \|x\|_X \\ &= (C_1|\alpha| + C_2|\beta|) \|x\|_X. \end{aligned}$$

Esto implica que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial en donde se define la norma de cada operador T como en la definición 2. Sólo queda verificar que $(\mathcal{L}(X, Y), +, \circ, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ es un espacio normado. Para tal fin nótese que

$$\begin{aligned} \|\alpha T_1\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &= \sup_{\|x\|=1} \|\alpha T_1(x)\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|T_1(x)\|_Y \\ &= |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\|_Y \\ &= |\alpha| \|T_1\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\|_{\mathcal{L}(X, Y)} &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1(x)\|_Y + \|T_2(x)\|_Y) \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\|_Y + \sup_{\|x\|=1} \|T_2(x)\|_Y \\ &= \|T_1\|_{\mathcal{L}(X, Y)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(X, Y)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $T_1 = 0$ implica que $T_1(x) = 0$ para cada $x \in X$, de manera que

$$\|T_1\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\|_Y = 0.$$

Recíprocamente, si la igualdad anterior es cierta, para cada $p \in X \setminus \{0\}$ se sigue que

$$\|T_1(p)\|_Y = \|p\|_X \frac{\|T_1(p)\|_Y}{\|p\|_X} = \|p\|_X \left\| T_1 \left(\frac{p}{\|p\|_X} \right) \right\|_Y = \|p\|_X 0 = 0;$$

lo cual implica que $T_1 = 0$. ■

Otros $\mathbb{K}$ -espacios normados que se utilizarán en este trabajo; y que en ocasiones serán referidos como ejemplos de algunas de las estructuras que se definirán posteriormente; son los siguientes:

1. $\mathbb{K}^n$ bajo su norma usual $\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$. Salvo isomorfismo, este es el único $\mathbb{K}$ -espacio normado de dimensión n .
2. $C_b(X, \mathbb{K})$, el espacio de funciones continuas y acotadas $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ con dominio en un espacio topológico, bajo la suma y multiplicación por escalares usuales y la norma infinito $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$. Cuando X es compacto, este espacio coincide con $C(X, \mathbb{K})$, el espacio de funciones continuas $f: X \rightarrow \mathbb{K}$.
3. $X \times Y$, el espacio producto de dos $\mathbb{K}$ -espacios normados, equipado con la suma y multiplicación por escalares usuales y la suma de normas $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

La verificación del ejemplo 1 es consecuencia del teorema de Heine-Borel, la del ejemplo 2 se puede consultar en [14] y la del ejemplo 3 es un ejercicio típico acerca de espacios normados.

Más ejemplos de espacios normados serán dados en las siguientes secciones, cuando se disponga de las herramientas necesarias para ello. Por lo pronto, se enriquecerá la estructura de estos espacios aprovechando las propiedades que tienen como espacios métricos.

Definición 7 Sea X un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado. Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es sumable si la sucesión $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ dada por

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

es convergente. Adicional a esto, se dice que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es absolutamente sumable si la sucesión $\{\|a_n\|\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es sumable.

Definición 8 Un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado es un **$\mathbb{K}$ -espacio de Banach** si resulta ser un espacio métrico completo bajo la métrica asociada por su norma.

Ejemplos de estos espacios son $\mathbb{K}^n$, $C_b(X, \mathbb{K})$, y $X \times Y$ cuando X y Y son espacios de Banach. En general, verificar que un espacio métrico es o no es completo resulta ser una tarea difícil. En el caso de los $\mathbb{K}$ -espacios normados, las sucesiones absolutamente sumables dan una condición necesaria y suficiente para que estos sean $\mathbb{K}$ -espacios de Banach.

Teorema 9 Sea X un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado. Se tiene que X es un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach si y sólo si toda sucesión absolutamente sumable en X es sumable.

Demostración. Primero, supóngase que X es un espacio de Banach. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión absolutamente sumable, la sucesión $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ dada por

$$S_N = \sum_{n=1}^N \|a_n\|$$

es de Cauchy por lo que para todo $\epsilon > 0$ existe un $M \in \mathbb{N}$ para el cual se tiene que si $m \geq n \geq M$, entonces

$$\sum_{i=n+1}^m \|a_i\| = \left| \sum_{i=n+1}^m \|a_i\| \right| = \left| \sum_{i=1}^m \|a_i\| - \sum_{i=1}^n \|a_i\| \right| < \epsilon.$$

Esto implica que si $m \geq n \geq M$, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=1}^n a_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|a_i\| < \epsilon;$$

por lo cual se tiene que la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{n=1}^N a_n\}_{N \in \mathbb{N}} \subset X$ también es de Cauchy. Como este último espacio es de Banach, dicha sucesión converge en X , lo cual indica que $\{a_n\}$ es sumable.

Recíprocamente, supóngase que toda sucesión absolutamente sumable en X es sumable. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión de Cauchy, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $N_k \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k} \text{ si } n, m \geq N_k.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que para todo $k \in \mathbb{N}$, $N_{k+1} \geq N_k$, asegurándose así que

$$\|x_{N_k} - x_{N_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Lo anterior permite utilizar el criterio de la comparación para implicar que la sucesión dada por $\{x_{N_k} - x_{N_{k+1}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es absolutamente sumable por el hecho de que $\{\frac{1}{2^k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es sumable. Entonces, por hipótesis, la sucesión $\{x_{N_k} - x_{N_{k+1}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es sumable por lo que existe un $x \in X$ tal que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_{N_k} - x_{N_{k+1}}) = x$. En consecuencia, se tiene que

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{N_1} - x_{N_{n+1}}) = x_{N_1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{N_{n+1}},$$

implicando que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{N_n} = x_{N_1} - x$. De esto, se tiene que la sucesión $\{x_{N_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge; y al ser ésta una subsucesión de la sucesión de Cauchy $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, se concluye que esta última converge en X . ■

Cuando un espacio métrico resulta ser incompleto se puede pensar que “tiene un hoyo en donde debería de estar el límite de la sucesión de Cauchy que no converge”. Completar el espacio, por tanto, sería el proceso de “llenar todos los hoyos que contiene el mismo”. En el caso de $\mathbb{Q}$, esto da lugar a $\mathbb{R}$ en lo que se concibe como una de las construcciones más famosas de los números reales. El problema que surge al trabajar con un espacio arbitrario es que no siempre se puede contar, a priori, con un conjunto que lo contenga propiamente y que, por tanto, sea un candidato a ser una completación del mismo. El mecanismo adecuado para tal completación será dado en la siguiente definición:

Definición 10 Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se dice que una función $f: X \rightarrow Y$ es una isometría si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Aunado a ello, si f resulta ser biyectiva, se dice que (X, d_X) y (Y, d_Y) son isométricamente isomorfos y que f es un isomorfismo isométrico.

Dos espacios isométricamente isomorfos son esencialmente idénticos como espacios métricos. Cualquier propiedad inherente a la estructura métrica de un espacio será válida para cualquier otro que sea isométricamente isomorfo a él.

Ahora ya se puede precisar el sentido en el que un espacio métrico se puede completar.

Teorema 11 (Completación de un espacio métrico) Para cada espacio métrico (X, d_X) existe, salvo isomorfismo isométrico, un único espacio métrico completo $(\bar{X}, \bar{d})$ para el cual X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de él. Más aún, si un espacio métrico completo (Y, d_Y) tiene un subespacio isométricamente isomorfo a X , $\bar{X}$ será isométricamente isomorfo a

un subespacio cerrado de Y .

Demostración. Se realizará un bosquejo de esta prueba que puede ser consultado en la página 7 de [14].

Sea $\tilde{X}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X . Dos elementos $\{x_n\}, \{y_n\} \in \tilde{X}$ son equivalentes ($\{x_n\} \sim \{y_n\}$ en $\tilde{X}$) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Es fácil probar que $\sim$ es una relación de equivalencia y que el conjunto $\overline{X} := \tilde{X} / \sim$ adquiere una estructura de espacio métrico mediante la función $\bar{d} : \overline{X} \times \overline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{d}([x_n], [y_n]) := \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n).$$

X es isométricamente isomorfo al subespacio $\{[x_n] \in \overline{X} \mid \{x_n\} \subset X \text{ es una sucesión constante}\}$ mediante la identificación canónica; y $(\overline{X}, \bar{d})$ resulta ser un espacio métrico completo en el cual el subespacio definido con anterioridad es denso. Una vez demostrado esto, el resto del teorema se demuestra utilizando argumentos de densidad. ■

Para efectos prácticos, se asumirá que todo espacio métrico (X, d_X) es un subespacio de su completación.

Si se aplica el teorema pasado a cualquier $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, $\overline{X}$ obtiene una estructura de $\mathbb{K}$ -espacio de Banach como consecuencia de la densidad de X en $\overline{X}$. Eso permite establecer un teorema análogo al anterior para $\mathbb{K}$ -espacios normados en donde los $\mathbb{K}$ -espacios de Banach toman el papel de los espacios métricos completos. Agregado a esto, las completaciones de los $\mathbb{K}$ -espacios normados cumplen la siguiente propiedad universal:

Teorema 12 (Teorema del Operador Acotado)

Sean $(V_1, \|\cdot\|_1)$ un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado y $(V_2, \|\cdot\|_2)$ un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach. Si $T : V_1 \rightarrow V_2$ es un operador acotado, entonces existe un único operador acotado $\bar{T} : \overline{V_1} \rightarrow V_2$, con la misma norma que T , tal que $\bar{T}|_{V_1} = T$.

Demostración. Si $T = 0$, la extensión buscada es trivial y es única como consecuencia de que V_1 sea denso en $\overline{V_1}$. Entonces supóngase que $T \neq 0$. Si $x \in \overline{V_1}$ es un elemento arbitrario, se sigue la existencia de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1$ que converge a x y que, por lo mismo, es de Cauchy. Por

tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\|x_m - x_n\|_{V_1} < \frac{\epsilon}{\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \text{ si } n, m \geq N.$$

De esto,

$$\|T(x_m) - T(x_n)\|_{V_2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)} \|x_m - x_n\|_{V_1} < \|T\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)} \frac{\epsilon}{\|T\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)}} = \epsilon \text{ para cada } n, m \geq N.$$

Por consiguiente, la sucesión $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2$ también es de Cauchy por lo que converge en V_2 ya que este último es un espacio métrico completo. Si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1$ es otra sucesión convergente a x , se tiene que la sucesión alternada $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$ también converge a x por lo que un argumento análogo al anterior muestra que

$$\{T(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2 \text{ y } \{T(x_1), T(y_1), T(x_2), T(y_2), \dots\} \subset V_2$$

son sucesiones de Cauchy que, por lo mismo, convergen en V_2 .

Es evidente que las sucesiones $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{T(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ son subsucesiones de la sucesión alternada $\{T(x_1), T(y_1), T(x_2), T(y_2), \dots\}$. Así, las 3 sucesiones convergen al mismo límite, por lo que el operador $\bar{T}$ se puede definir como

$$\bar{T} : x \in \bar{V}_1 \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) \in V_2,$$

en donde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1$ es cualquier sucesión que converge a x . Se procederá a demostrar que esta función es un operador acotado que extiende a T y que conserva su norma:

1. Para cualesquiera $x, y \in \bar{V}_1$ existen dos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\} \subset V_1$ que convergen a x y a y , respectivamente. De esto, se tiene que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\bar{T}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha T(x_n) + \beta T(y_n) = \alpha \bar{T}(x) + \beta \bar{T}(y).$$

2. Para cada $x \in V_1$ la sucesión constante $\{x, x, x, \dots\} \rightarrow x$, lo cual implica que

$$\bar{T}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x) = T(x), \text{ para todo } x \in V_1.$$

3. Finalmente, para verificar que $\overline{T}$ es acotado, se mostrará que

$$\sup_{\|x\|_{\overline{V_1}}=1} \|\overline{T}(x)\| = \sup_{\|x\|_{V_1}=1} \|T(x)\|.$$

Como para cada $x \in \overline{V_1}$ unitario se tiene la existencia de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1 \setminus \{0\}$ que converge a x , en virtud de lo ya desarrollado se tiene que

$$\|x_n\|_{V_1} \rightarrow 1 \text{ y } \|\overline{T}(x_n)\|_{V_2} \rightarrow \|\overline{T}(x)\|_{V_2}.$$

En consecuencia,

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow \frac{x}{\|x\|} = x, \text{ por lo cual } T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \rightarrow \overline{T}(x).$$

Esto muestra que para cada vector unitario $x \in \overline{V_1}$ el vector $\overline{T}(x)$ es el limite de una sucesión $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2$ que es imagen de una sucesión de vectores unitarios en V_1 . Por consiguiente,

$$\left\{ \|\overline{T}(x)\| \mid \|x\|_{\overline{V_1}} = 1 \right\} = \overline{\left\{ \|T(x)\| \mid \|x\|_{V_1} = 1 \right\}},$$

de manera que

$$\sup \left\{ \|\overline{T}(x)\| \mid \|x\|_{\overline{V_1}} = 1 \right\} = \sup \left\{ \|T(x)\| \mid \|x\|_{V_1} = 1 \right\}.$$

Por ende, $\|\overline{T}\|_{\mathcal{L}(\overline{V_1}, V_2)} = \|T\|_{\mathcal{L}(V_1, V_2)}$, implicandose que $\overline{T}$ es un operador acotado que conserva la norma del operador T .

Sólo falta probar que $\overline{T}$ es el único operador que cumple con lo pedido en el enunciado del teorema. Supóngase que $S: \overline{V_1} \rightarrow V_2$ es otro operador acotado para el cual $S|_{V_1} = T$. Si $x \in \overline{V_1}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_1$ es una sucesión convergente a x , al ser $\overline{T} - S$ una función continua,

$$\{(T - S)x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (\overline{T} - S)x.$$

Pero, por otra parte, $(T - S)x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por lo que la unicidad en la convergencia de sucesiones conlleva que $(\overline{T} - S)x = 0$. Al ser $x \in \overline{V_1}$ arbitrario, se concluye que $T = S$. ■

A diferencia de $X \times Y$, para que $\mathcal{L}(X, Y)$ resulte ser de Banach sólo se requiere la completitud de Y .

Teorema 13 Sean X, Y dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales normados. Si Y es de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ también lo es.

Demostración.

Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ una sucesión de Cauchy. Si $\epsilon > 0$, para cada $x \in X \setminus \{0\}$ se tiene la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \frac{\epsilon}{\|x\|_X} \text{ para todo } n, m \geq N.$$

En consecuencia, si $n, m \geq N$,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X < \frac{\epsilon}{\|x\|_X} \|x\|_X = \epsilon;$$

por lo cual la sucesión $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ es de Cauchy para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Si $x = 0$, la aseveración anterior se verifica de manera directa. En consecuencia, para cada $x \in X$ la sucesión $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en Y . Por tanto, el candidato a ser el límite de $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la siguiente función:

$$T: x \in X \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \in Y.$$

Se procede a mostrar que T es un operador acotado:

1. Para cualquiera $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha T_n(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta T_n(y) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(y) = \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

2. Para verificar que T es un operador acotado, se observa que la desigualdad triangular implica que $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Esto significa que la sucesión $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy y, por consiguiente, convergente a un $C \in \mathbb{R}$.

Así, para cada $x \in X$ se llega a que

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n(x)\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\| \|x\| = C\|x\|.$$

Sólo falta corroborar que, en efecto, $T_n \rightarrow T$. Al ser $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_m(x) = T(x)$ para cada $x \in X$, se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|T(x) - T_n(x)\|_Y = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T_m(x) - T_n(x)\|_Y \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X.$$

Esto implica que para todo $x \neq 0$

$$\frac{\|T(x) - T_n(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

dejando como consecuencia que

$$0 \leq \|T - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x) - T_n(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

de manera que $T_n \rightarrow T$ bajo la norma de la definición 2. ■

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que el siguiente espacio resulta ser de Banach:

Definición 14 Si X es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial normado, se define su espacio dual como el $\mathbb{K}$ -espacio $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Los elementos de este último son conocidos como funcionales.

Al ser X^* un $\mathbb{K}$ -espacio normado, X^* tiene un dual, denotado como X^{**} , que se conoce como el bidual de X . Los siguientes teoremas ayudarán a probar que si X es de Banach, entonces éste es isométricamente isomorfo a un subespacio de su bidual. Para demostrar el que viene a continuación, harán falta los teoremas 26 y 152, los cuales no se demuestran en este punto puesto que no se tienen los preliminares necesarios para ello. Estos resultados pueden ser consultados en [13], y las pruebas que se darán de ellos no dependen ni del siguiente teorema ni de ninguna de sus consecuencias.

Teorema 15 (Teorema de Hanh-Banach real) Sean X un $\mathbb{R}$ -espacio de Banach, Y un subespacio vectorial de X y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual

$$p(ax + (1-a)y) \leq ap(x) + (1-a)p(y) \text{ si } x, y \in X \text{ y } a \in [0, 1].$$

Si existe un $\lambda \in Y^*$ para el cual $\lambda \leq p|_Y$, entonces existe un $A \in X^*$ para el cual

$$A \leq p \text{ y } A|_Y = \lambda.$$

Demostración. Si $\bar{Y} = X$, la extensión de λ dada por el teorema del operador acotado (teorema 12) a la completación de X es el funcional buscado.

Si $\bar{Y} \neq X$, se selecciona un $z \in X \setminus \bar{Y}$ arbitrario para extender, primero, a λ al espacio $\tilde{Y} := \bar{Y} + \mathbb{R}z$ y luego, con el Lema de Zorn, a todo X . La elección de z implica que $\bar{Y} \cap \mathbb{R}z = \{0\}$ por lo que si $y_1, y_2 \in \bar{Y}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $\alpha z + y_1 = \beta z + y_2$, entonces $\alpha = \beta$ y $y_1 = y_2$. Además de esto, si $\alpha, \beta > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \beta \lambda(y_1) + \alpha \lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha + \beta) \lambda\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2\right) \leq (\alpha + \beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2\right) \\ &= (\alpha + \beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} (y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (y_2 + \beta z)\right) \leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z). \end{aligned}$$

Esto implica que para cada $\alpha, \beta > 0$ y $y_1, y_2 \in \bar{Y}$ se tiene que

$$\frac{1}{\alpha} (-p(y_1 - \alpha z) + \lambda(y_1)) \leq \frac{1}{\beta} (p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)),$$

por lo cual existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (-p(y - \alpha z) + \lambda(y)) \leq a \leq \inf_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (p(y + \alpha z) - \lambda(y)). \quad (1.1)$$

Con el número anterior se define la asignación

$$\tilde{\lambda}: \tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha z + y \mapsto \alpha + \lambda(y).$$

Por lo comentado al principio de la demostración, $\tilde{\lambda}$ está bien definida y extiende de manera clara a λ . Sólo falta verificar que $\tilde{\lambda} \in \tilde{Y}^*$ y que $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \tilde{Y}$.

Para verificar lo primero, nótese que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $y_1, y_2 \in \bar{Y}$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}((\alpha z + y_1) + (\beta z + y_2)) &= \tilde{\lambda}((\alpha + \beta)z + (y_1 + y_2)) \\ &= (\alpha + \beta)a + \lambda(y_1 + y_2) = (\alpha a + \lambda(y_1)) + (\beta a + \lambda(y_2)),\end{aligned}$$

de manera que $\tilde{\lambda}((\alpha z + y_1) + (\beta z + y_2)) = \tilde{\lambda}(\alpha z + y_1) + \tilde{\lambda}(\beta z + y_2)$. Similarmente,

$$\tilde{\lambda}(\beta(\alpha z + y_1)) = \tilde{\lambda}(\beta\alpha z + \beta y_1) = \beta\alpha a + \lambda(\beta y_1) = \beta\alpha a + \beta\lambda(y_1) = \beta\tilde{\lambda}(\alpha z + y_1).$$

En el teorema 152 se demostrará que por ser $\mathbb{R}z$ de dimensión finita, $\tilde{Y}$ resulta ser cerrado, y en el teorema 26 se verificará que esto último implica la existencia de dos constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ para las cuales

$$\|y\| \leq k_1\|\alpha z + y\| \text{ y } \|\alpha z\| \leq k_2\|\alpha z + y\| \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \bar{Y}.$$

En consecuencia, $\tilde{\lambda}$ es continua ya que para cualquier sucesión $\{\alpha_n z + y_n\} \subset \tilde{Y}$ convergente a 0, $\{\alpha_n z\}$ y $\{y_n\}$ también convergen a 0 por lo que $\{\tilde{\lambda}(\alpha_n z + y_n)\} = \{\alpha_n a + \lambda(y_n)\} \rightarrow 0$.

Ahora se verificará que si $x = \alpha z + y \in \tilde{Y}$, entonces $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$. De la ecuación 1.1 se desprende que

$$\inf_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (p(y - \alpha z) - \lambda(y)) = - \sup_{y \in Y, \alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (-p(y - \alpha z) + \lambda(y)) \geq -a.$$

1. Si $\alpha = 0$, $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(y) \leq p(y) = p(x)$.

2. Si $\alpha > 0$,

$$\tilde{\lambda}(x) = \alpha a + \lambda(y) \leq \alpha \left(\frac{1}{\alpha} p(y + \alpha z) - \lambda(y) \right) + \lambda(y) = p(y + \alpha z) = p(x).$$

3. Si $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$ por lo que

$$\tilde{\lambda}(x) = -\alpha(-a) + \lambda(y) \leq -\alpha \left(\frac{1}{\alpha} p(y + \alpha z) - \lambda(y) \right) + \lambda(y) = p(y + \alpha z) = p(x).$$

Todo esto implica que

$$\tilde{\lambda}(x) \leq p(x) \text{ si } x \in \tilde{Y} \text{ y que } \tilde{\lambda} \in \tilde{Y}^*.$$

Se ha encontrado una extensión de λ , la cual sigue siendo acotada por p , en un subespacio que contiene propiamente a Y . Por consiguiente, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\tilde{\lambda} : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{Y} \text{ es un subespacio de } X \text{ que contiene propiamente a } Y, \lambda = \tilde{\lambda}|_Y, \tilde{\lambda} \leq p|_{\tilde{Y}}\}$$

es no vacío, por lo cual se le puede asociar el siguiente orden parcial: si $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in \mathcal{A}$, $\tilde{\lambda}_2 > \tilde{\lambda}_1$ si $Dom(\tilde{\lambda}_1) \subset Dom(\tilde{\lambda}_2)$ y $\tilde{\lambda}_2|_{Dom(\tilde{\lambda}_1)} = \tilde{\lambda}_1$.

Considérese una cadena ascendente $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $\mathcal{A}$. Para cada $\alpha \in A$ se define $X_\alpha = Dom(e_\alpha)$ con el objetivo de formar la función

$$e : \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \mathbb{R}, \text{ en donde } e|_{X_\alpha} = e_\alpha \text{ si } \alpha \in A.$$

Por la naturaleza de la relación de orden, la función e está bien definida y es tal que $e \leq p|_{Dom(e)}$ y $e|_Y = \lambda$. De esto, $e \in \mathcal{A}$ y $e > e_\alpha$ para cualquier $\alpha \in A$ por lo que esta función es una cota superior de $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Por consiguiente, el Lema de Zorn permite afirmar que $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal B , definido en un subespacio X' , para el cual $B \leq p|_{X'}$ y $B|_Y = \lambda$. Si $X' \neq X$, se puede extender a B de manera análoga a como se hizo con Y , encontrando así un $B' \in \mathcal{A}$ mayor a B , lo cual contradice la maximalidad de éste. Por tanto, X' tiene que ser X . ■

Teorema 16 (Teorema de Hahn-Banach Complejo)

Sea X un $\mathbb{C}$ -espacio de Banach y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) \text{ si } x, y \in X \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ son tales que } |\alpha| + |\beta| = 1.$$

Si Y es un subespacio de X y $\lambda \in Y^*$ cumple con que $|\lambda(x)| \leq p(x)$ si $x \in Y$; entonces existe un $A \in X^*$ para el cual

$$|A(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in X \text{ y } A|_Y = \lambda.$$

Demostración. Como $\lambda \in Y^*$, $Re(\lambda)$ es un funcional real en Y debido a que para cada $x \in Y$ unitario, $|Re(\lambda(x))| \leq |\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{Y^*}$.

En consecuencia, por ser $1 = |\alpha| + |1 - \alpha|$ si $\alpha \in [0, 1]$, el teorema de Hahn-Banach real implica que $Re(\lambda)$ tiene una extensión lineal continua L definida en todo X , para la cual $L(x) \leq p(x)$ si $x \in X$.

En base a esta función se define la transformación lineal

$$A: x \in X \mapsto L(x) - iL(ix) \in \mathbb{C};$$

la cual extiende a λ debido a que para todo $x \in Y$

$$\lambda(x) = \operatorname{Re}(\lambda(x)) + i\operatorname{Im}(\lambda(x)) = \operatorname{Re}(\lambda(x)) - i\operatorname{Re}(\lambda(ix)) = A(x).$$

Para probar que $A \in Y^*$, nótese que si $x \in X$ es un vector unitario,

$$|A(x)| = |L(x) - iL(ix)| \leq |L(x)| + |iL(ix)| \leq 2\|L\| < +\infty.$$

Sólo falta verificar que para cualquier $x \in X$, $|A(x)| \leq p(x)$. Para ello se observa que si $|\alpha| = 1$, entonces

$$p(\alpha x) \leq |\alpha|p(x) = p(x) = p(\alpha^{-1}(\alpha x)) \leq |\alpha^{-1}|p(\alpha x) = p(\alpha x).$$

En consecuencia, si se define $\theta(x) := \operatorname{Arg}(A(x))$ y se observa que $\operatorname{Re}(A) = L$, se concluye que

$$|A(x)| = e^{-i\theta(x)} A(x) = A(e^{-i\theta(x)} x) = L(e^{-i\theta(x)} x) \leq p(e^{-i\theta(x)} x) = p(x).$$

■

La importancia del teorema de Hanh-Banach dentro del Análisis Funcional radica en las consecuencias que trae consigo; las que son importantes para este trabajo se muestran en los siguientes corolarios:

Corolario 1 Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach, Y un subespacio de X y $\lambda \in Y^*$. Entonces existe un $A \in X^*$ que extiende a λ y que conserva su norma (i.e. $A|_{Y^*} = \lambda$ y $\|A\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}$).

Demostración. Considérese la función $p: x \in X \mapsto \|\lambda\|_{Y^*} \|x\|_X \in \mathbb{R}$. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$ se tiene que si $|\alpha| + |\beta| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} p(\alpha x + \beta y) &= \|\lambda\|_{Y^*} \|\alpha x + \beta y\| \leq \|\lambda\|_{Y^*} |\alpha| \|x\| + \|\lambda\|_{Y^*} |\beta| \|y\| \\ &= |\alpha|p(x) + |\beta|p(y). \end{aligned}$$

Además, $|\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{Y^*} \|x\|_X = p(x)$ si $x \in Y$. Entonces, en virtud del teorema de Hanh-Banach, existe un funcional $A \in X^*$ con la propiedad de que $|A| \leq p$ y $A|_Y = \lambda$. Para verificar que $\|\lambda\|_{Y^*} = \|A\|_{X^*}$ considere que

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|_Y=1} |\lambda(y)| = \sup_{\|y\|_Y=1} |A(y)| \leq \sup_{\|x\|_X=1} |A(x)| = \|A\|_{X^*};$$

además de que

$$\|A\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X=1} |A(x)| \leq \sup_{\|x\|_X=1} p(x) = \sup_{\|x\|_X=1} \|\lambda\|_{Y^*} \|x\|_X = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

■

Corolario 2 Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach y $x \in X$ un elemento arbitrario. Se tiene la existencia de un $A \in X^*$ de norma 1 para el cual $A(x) = \|x\|_X$.

Demostración. Si $x = 0$, cualquier $\lambda \in X^*$ normalizado cumple con lo pedido. Entonces se considera que $x \neq 0$ para definir la asignación $\lambda: \alpha x \in \mathbb{K}x \mapsto \alpha \|x\|_X \in \mathbb{K}$.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\alpha x = \beta x$, entonces $(\alpha - \beta)x = 0$ por lo que al ser $x \neq 0$, se llega a que $\alpha = \beta$. Por consiguiente, $\alpha \|x\| = \beta \|x\|$. Esto prueba que λ es función que será elemento de $(\mathbb{K}x)^*$ debido a que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $\lambda(\alpha x + \beta x) = (\alpha + \beta)\|x\| = \alpha\|x\| + \beta\|x\| = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta x)$,
2. $\lambda(\beta(\alpha x)) = \beta\alpha\|x\| = \beta\lambda(\alpha x)$,
3. $|\alpha| \|x\| = \|\alpha x\| = \|\lambda(\alpha x)\|$.

Así, el corolario pasado implica la existencia de un $A \in X^*$ de norma igual a λ y que extiende a este último. El punto 3 indica que $\|\lambda\| = 1$ por lo que $\|A\|_{X^*} = 1$. En consecuencia, $A(x) = \lambda(x) = \|x\|_X$. ■

Ahora ya es fácil verificar que todo espacio de Banach está encajado isométricamente en su bidual de manera natural.

Teorema 17 Sea X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach. Para cada $x \in X$ se tiene que la función

$$\tilde{x}: \lambda \in X^* \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{K}$$

pertenece al espacio X^{**} . El subespacio formado por estas funciones es isometricamente isomorfo a X mediante la asignación $f: x \in X \mapsto \tilde{x} \in X^{**}$.

Demostración. Sea $x \in X$ arbitrario. Para cada $\lambda, \gamma \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que

$$\tilde{x}(\alpha\lambda + \gamma) = (\alpha\lambda + \gamma)x = \alpha\lambda(x) + \gamma(x) = \alpha\tilde{x}(\lambda) + \tilde{x}(\gamma)$$

y que $|\tilde{x}(\lambda)| = |\lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{X^*} \|x\|_X$. Esto conlleva a que $\tilde{x}$ sea un operador acotado de norma $\|\tilde{x}\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$.

Por otra parte, si $y \in X$, se tiene que

$$f(\alpha x + y)\lambda = \lambda(\alpha x + y) = \alpha\lambda(x) + \lambda(y) = \alpha f(x)\lambda + f(y)\lambda$$

por lo que $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.

Finalmente, el segundo corolario del Teorema de Hanh-Banach implica la existencia de un $\lambda \in X^*$ de norma 1 para el cual $\lambda(x) = \|x\|_X$. Por consiguiente,

$$\|\tilde{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\|\lambda\|_{X^*}=1} |\tilde{x}(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\|_{X^*}=1} |\lambda(x)| \geq \|x\|_X,$$

de manera que f resulta ser un operador unitario que encaja a X en X^{**} como subespacio. ■

Cuando X y Y son $\mathbb{K}$ -espacios normados y X resulta ser de Banach, las condiciones para que un subconjunto de $\mathcal{L}(X, Y)$ sea acotado se pueden debilitar notablemente. Para concretar esta aseveración, se necesita el Teorema de Categoría de Baire, el cual constituye uno de los teoremas más importantes del Análisis Funcional debido a que implica hechos importantes como el anteriormente mencionado, y otros que enriquecen la estructura de los operadores acotados que actúan entre $\mathbb{K}$ -espacios de Banach. Para enunciarlo se requiere de la siguiente definición:

Definición 18 Sea M un espacio métrico. Un subconjunto $S \subset M$ es denso en ninguna parte si $(\overline{S})^\circ = \emptyset$.

Teorema 19 (Teorema de Categoría de Baire)

Un espacio métrico completo no puede ser una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(M)$ una sucesión de subconjuntos densos en ninguna parte. Como $(\overline{A_1})^\circ = \emptyset$, $\overline{A_1} \neq M$ por lo que existen un $x_1 \in M \setminus \overline{A_1}$ y un $r_1 > 0$ para los cuales

$$B_{r_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset.$$

Sin perder generalidad se puede suponer que $r_1 < 1$. Al ser $(\overline{A_2})^\circ$ también vacío, $B_{r_1}(x_1)$ no puede ser un subconjunto de A_2 , por lo cual hay un $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \setminus \overline{A_2}$, el cual es un abierto, y un número $r_2 > 0$, el cual se puede suponer menor a $\frac{1}{2}$, para los cuales

$$\overline{B_{r_2}(x_2)} \subset B_{r_1}(x_1) \text{ y } B_{r_2}(x_2) \cap A_2 = \emptyset.$$

Reiterando este inductivamente, para cada $n \geq 2$ se puede seleccionar un $x_n \in B_{r_{n-1}}(x_{n-1})$ que no está en $\overline{A_n}$ y para el cual existe un $r_n \in (0, 2^{1-n})$ con la propiedad de que

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \text{ y } B_{r_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset.$$

La elección anterior genera una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ que es de Cauchy, pues para $N \in \mathbb{N}$ se cumple que si $n, m \geq N$, entonces $x_n, x_m \in B_{r_N}(x_N)$, de manera que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N) < 2^{1-N} + 2^{1-N} = 2^{2-N}.$$

En consecuencia, como para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > 2^{2-N}$, se tiene que si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) \leq 2^{2-N} < \epsilon$. Al ser M completo, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto x de éste, y es tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_{r_N}(x_N)$ si $n \geq N$. Por consiguiente,

$$x \in B_{r_N}(x_N) \text{ para todo } N \in \mathbb{N},$$

implicándose que $x \notin A_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ por lo que M no puede ser unión de subconjuntos densos en ninguna parte. ■

Teorema 20 (Teorema de Banach-Steinhaus)

Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach, Y un $\mathbb{K}$ -espacio normado y $F \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si para cada $x \in X$

se tiene que

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < +\infty,$$

entonces

$$\sup_{T \in F} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Demostración. Si $n \in \mathbb{N}$, defínase el conjunto

$$X_n := \{x \in X \mid \sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y \leq n\}.$$

Éste resulta ser cerrado en X . Para ver eso considere que si $x \in \overline{X_n}$ y $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X_n$ converge a x , para cada $T \in F$ se cumple que $T(x_m) \rightarrow T(x)$ por lo cual, ciertamente, $\|T(x_m)\|_Y \rightarrow \|T(x)\|_Y$. En consecuencia, al ser $\|T(x_m)\|_Y \leq n$ para cada $m \in \mathbb{N}$, $\|T(x)\|_Y \leq n$ conllevando a que $\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y \leq n$, por lo cual $x \in X_n$.

Por las hipótesis del teorema, X es un espacio de Banach para el cual

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Por lo tanto, el Teorema de Categoría de Baire (teorema 19) implica que algún X_n debe tener un interior no vacío. O sea, que para cierto $n \in \mathbb{N}$ existe un $x \in X_n$ y un $r > 0$ para los cuales $\overline{B_r(x)} \subset X_n$. Por tanto, si $u \in X$ es unitario, se sigue que $\|(x + ru) - x\| = \|ru\| = |r| \|u\| = r$, por lo cual $x + ru \in \overline{B_r(x)}$. Así, para todo $T \in F$ se concluye que

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_Y &= \|r^{-1}T(x + ru - x)\|_Y \leq r^{-1}(\|T(x + ru)\|_Y + \|T(x)\|_Y) \\ &\leq r^{-1}(n + n); \end{aligned}$$

por lo cual

$$\sup_{T \in F} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{T \in F} \sup_{\|u\|_X=1} \|T(u)\|_Y \leq 2r^{-1}n < +\infty.$$

■

Teorema 21 (Teorema del mapeo abierto) Sean X y Y dos $\mathbb{K}$ -espacios de Banach. Si $T: X \rightarrow Y$ es operador acotado y sobreyectivo, entonces T es una función abierta entre espacios topológicos.

Demostración. Primero, se demostrará la existencia de un $r > 0$ para el cual $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$.

Al ser $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^X(0)$ y T una función sobreyectiva, se tiene que

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^X(0)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_n^X(0)).$$

En virtud del Teorema de Categoría de Baire (teorema 19), existe un $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\overline{T(B_n^X(0))}$ tiene un interior no vacío. Esto implica que $\overline{T(B_1^X(0))} = n^{-1}\overline{T(B_n^X(0))}$ también tiene un interior no vacío por lo que existen un $y \in \overline{T(B_1^X(0))}$ y un $\epsilon > 0$ tales que $B_\epsilon^Y(y) \subset \overline{T(B_1^X(0))}$.

Por otra parte, se tiene que

$$\overline{T(B_1^X(0))} - y \subset \overline{T(B_2^X(0))}.$$

Para verificar esto, considérese un $y_0 \in \overline{T(B_1^X(0))}$ arbitrario y una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1^X(0)$ para la cual $T(z_n) \rightarrow y_0$. Como $y \in \overline{T(B_1^X(0))}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1^X(0)$ para la cual $T(x_n) \rightarrow y$. En consecuencia,

$$y_0 - y = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(z_n) - \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(z_n) - T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n - z_n)$$

y $\|x_n - z_n\| \leq \|x_n\| + \|z_n\| < 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{x_n - z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_2^X(0)$ y $y_0 - y \in \overline{T(B_2^X(0))}$. De estas dos últimas contenciones se sigue que

$$B_\epsilon^Y(0) = B_\epsilon^Y(y) - y \subset \overline{T(B_1^X(0))} - y \subset \overline{T(B_2^X(0))}.$$

Más aun, como T es lineal, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$B_{\epsilon/2^n}^Y(0) \subset \overline{T(B_{1/2^{n-1}}^X(0))}.$$

Ahora considérese un $y_0 \in B_{\epsilon/4}^Y(0)$ arbitrario. Como $B_{\epsilon/4}^Y(0) \subset \overline{T(B_{1/2}^X(0))}$, existe un $x_1 \in B_{1/2}^X(0)$ para el cual $\|y_0 - T(x_1)\| < \frac{\epsilon}{8}$, O sea, para el cual $y_0 - T(x_1) \in B_{\epsilon/8}^Y(0)$. Como este último está contenido en $\overline{T(B_{1/4}^X(0))}$, existe un $x_2 \in B_{1/4}^X(0)$ para el cual $\|y_0 - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{\epsilon}{16}$, O sea, para el cual $y_0 - T(x_1) - T(x_2) \in B_{\epsilon/16}^Y(0)$. Reiterando este proceso inductivamente, se llega

al hecho de que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in B_{1/2^n}^X(0)$ tal que

$$\left\| y_0 - \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| < \frac{\epsilon}{2^{n+2}},$$

de modo que $\{T(x_1) + \cdots + T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y_0$. Nótese que si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^m x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m};$$

por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es sumable por ser X un espacio de Banach. El límite de dicha serie, digase $z \in X$, está en $B_1^X(0)$ ya que

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por lo tanto, la continuidad de T implica que $T(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (T(x_1) + \cdots + T(x_n)) = y_0$, haciendo que este último sea elemento de $T(B_1^X(0))$.

Como $y_0 \in B_{\epsilon/4}^Y(0)$ fue arbitrario, lo anterior indica que este último está contenido en $T(B_1^X(0))$. Ahora ya se puede mostrar que si $A \subset X$ es un abierto, entonces $T(A)$ es un abierto en Y simplemente considerando al número $r := \epsilon/4$.

Sea $y \in T(A)$ arbitrario. Se tiene que $y = T(x)$ para cierto $x \in A$ para el que, ciertamente, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta^X(x) \subset A$. Al ser T una transformación lineal, $B_{\delta r}^Y(0) \subset T(B_\delta^X(0))$, teniéndose que

$$B_{\delta r}^Y(y) = B_{\delta r}^Y(0) + y \subset T(B_\delta^X(0)) + T(x) = T(B_\delta^X(0) + x) = T(B_\delta^X(x)) \subset T(A).$$

Esto finalmente implica que T es una función abierta. ■

Corolario 3 (Teorema del mapeo inverso) Sean X y Y dos espacios de Banach. Si $T: X \rightarrow Y$ es un operador acotado invertible, entonces $T^{-1}: Y \rightarrow X$ también es un operador acotado.

Demostración. Como X y Y son espacios de Banach y T es biyectivo, el teorema del mapeo abierto implica que T es una función abierta por lo que T^{-1} es un operador continuo. ■

Una consecuencia importante de este resultado es una caracterización de la continuidad de una transformación lineal que actúa entre espacios de Banach. Para enunciarla se necesita la definición

de gráfica de una función, y una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto del producto de dos espacios vectoriales sea la gráfica de una transformación lineal. Esta última noción será fundamental a la hora de estudiar operadores no acotados en el capítulo 3, razón por la cual se retomará en el mismo.

Definición 22 Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Se define la gráfica de f como el conjunto

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Teorema 23 Sean X y Y dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Un subconjunto $\Gamma \subset X \times Y$ es la gráfica de una transformación lineal $T: D \subset X \rightarrow Y$, con D siendo un subespacio de X , si y sólo si Γ es un subespacio vectorial de $X \times Y$ para el cual la función proyección $\pi_X: \Gamma \rightarrow X$ es inyectiva.

Teorema 24 (Teorema de la gráfica cerrada) Sean X y Y dos $\mathbb{K}$ -espacios de Banach. Si $T: X \rightarrow Y$ es una transformación lineal, entonces T es continua si y sólo si $\Gamma(T)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Demostración. Primero supóngase que T es continua. Si $(x, y) \in \overline{\Gamma(T)}$ es un elemento arbitrario y $\{(x_n, T(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(T)$ es una sucesión que converge al mismo; por la norma que posee $X \times Y$ se cumple que $x_n \rightarrow x$ y $T(x_n) \rightarrow y$, de modo que $T(x_n) \rightarrow T(x)$ por continuidad. En consecuencia, $(x, y) = (x, T(x)) \in \Gamma(T)$ por lo que este último es cerrado.

Ahora supóngase que $\Gamma(T)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Al ser éste un espacio de Banach, $\Gamma(T)$ también lo es, y esto propicia que la proyección $P_x := \pi_x|_{\Gamma(T)}$ sea un operador acotado biyectivo entre espacios de Banach. En consecuencia, el teorema del mapeo inverso (corolario 3) implica que su inversa es continua. Por lo tanto, el operador $T = \pi_y \circ P_x^{-1}$ también es continuo. ■

Se finaliza la presente sección con dos resultados técnicos que resultan útiles para el presente trabajo. El primero de ellos puede consultarse en [1] y el último de ellos, el cual puede revisarse en [13], ayuda a completar la prueba del teorema de Hanh-Banach real (teorema 15).

Teorema 25 Sean X y Y dos $\mathbb{K}$ -espacios de Banach y $T: X \rightarrow Y$ un operador acotado. Se tiene la existencia de una constante $C > 0$ para la cual

$$C\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \text{ si } x \in X, \quad (1.2)$$

si y sólo si $Im(T)$ es un conjunto cerrado en Y y T es inyectiva.

Demostración. Primero, si se supone que $Im(T)$ es cerrado y que $ker(T)$ es trivial, el primero de estos se vuelve un espacio de Banach y el operador $T: X \rightarrow Im(T)$ se vuelve invertible. Por consiguiente, el Teorema del Mapeo Inverso (corolario 3) implica que el operador $T^{-1}: Im(T) \rightarrow X$ es continuo por lo que existe una constante $k \in \mathbb{R}^+$ para la cual

$$\|T^{-1}(y)\|_X \leq k\|y\|_Y \text{ si } y \in Im(T). \quad (1.3)$$

Multiplicando por $C := k^{-1}$ en la ecuación anterior y apelando al hecho de que $Im(T) \longleftrightarrow X$, se obtiene la ecuación (1.2).

Ahora, si se supone que esta última es cierta, no es difícil verificar que T es un operador inyectivo que, por consiguiente, tendrá inversa continua ya que la igualdad (1.3) vuelve a ser válida. Para verificar que $Im(T)$ es cerrado, considerese cualquier punto de acumulación y de $Im(T)$ y a una sucesión $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow y$. Esta sucesión es de Cauchy por lo que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ también lo es debido a que para cada $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(T(x_n) - T(x_m))\| \leq C\|T(x_n) - T(x_m)\|.$$

En consecuencia, $\{x_n\} \rightarrow x$ para cierto que $x \in X$ que cumple con que $T(x) \leftarrow T(x_n) \rightarrow y$. Esto conlleva a que $y \in Im(T)$ de manera que éste último resulta ser cerrado. ■

Teorema 26 Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach y M, N dos subespacios vectoriales cerrados de él con intersección trivial. Se tiene que $M + N$ es un subespacio vectorial cerrado de X si y sólo si existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $m \in M$ y $n \in N$, $\|m\| \leq k\|m + n\|$.

Demostración. Si $M + N$ es cerrado, como espacio vectorial normado es de Banach por lo que la función

$$\begin{aligned} f: M \times N &\longrightarrow M + N \\ (m, n) &\longmapsto m + n \end{aligned}$$

resulta ser un operador acotado biyectivo entre espacios de Banach. En consecuencia, el teorema

anterior implica la existencia de un $k > 0$ para el cual $\|m\| \leq \|m\| + \|n\| \leq k\|m + n\|$ para cualesquiera $m \in M$ y $n \in N$.

Recíprocamente, si la desigualdad planteada en el teorema es cierta, se tiene que para cualquier sucesión de Cauchy $\{m_k + n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M + N$, la sucesión $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ también es de Cauchy. En consecuencia, $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{m_k + n_k - m_k\} \subset N$ también es de Cauchy, por lo cual existen $m \in M$ y $n \in N$ donde $m_k \rightarrow m$ y $n_k \rightarrow n$ dado que estos dos espacios son cerrados. De esto, $m_k + n_k \rightarrow m + n \in M + N$ por lo que este es un espacio de Banach, y por tanto cerrado en X . ■

1.2. Álgebras de Banach

Para poder definir y trabajar el espectro de un operador de una manera general y natural, es necesario considerar a éste como un elemento de un espacio vectorial que cuente con una estructura de anillo con unidad y que sea compatible con su multiplicación por escalares. Una estructura con tales características es llamada Álgebra, y en la presente sección se describirán sus principales propiedades. Se hará énfasis en las $\mathbb{C}$ -álgebras con norma y en aquellas que cuentan con una operación interna análoga a la conjugación de los números complejos. La información que será presentada puede consultarse en [4] y [15].

Definición 27 (Álgebra) Sea $(A, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Se dice que $(A, +, \cdot, *)$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra si $*$: $A \times A \rightarrow A$ es una operación tal que para cada $x, y, z \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

1. $(x + y) * z = x * z + y * z$
2. $z * (x + y) = z * x + z * y$
3. $(\alpha \cdot x) * z = \alpha \cdot (x * z) = x * (\alpha \cdot z)$
4. $(x * y) * z = x * (y * z)$

Si $*$ es conmutativa, A es una álgebra conmutativa y si $A \neq \{0_A\}$ y existe algún $1_A \in A$ tal que $1_A * x = x * 1_A = x$ para cualquier $x \in A$, esta última es una álgebra con unidad. En este caso, $1_A \neq 0_A$ ya que de no ser así, $A = \{0_A\}$.

Algunos ejemplos de $\mathbb{K}$ -álgebras son:

1. $\mathbb{K}^n$ bajo el producto coordenada a coordenada.

2. $\mathbb{K}[x]$, el álgebra de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$
3. $C_b(X, \mathbb{K})$ bajo el producto punto a punto de funciones.
4. $X \times Y$, el espacio producto de dos $\mathbb{K}$ -álgebras.
5. $\mathcal{L}(X)$, donde X es un $\mathbb{K}$ -espacio normado y el producto de operadores se define como la composición de los mismos.

Los primeros tres ejemplos consisten de álgebras conmutativas con unidad. Las características de $X \times Y$ dependen de las de X y Y , y el ejemplo 5 es un álgebra con unidad que generalmente resulta ser no conmutativa. A excepción del segundo ejemplo, las álgebras anteriores son espacios métricos completos bajo su estructura de espacio normado. Este tipo de álgebras son las que se trabajarán en gran medida y reciben un nombre que no es difícil de imaginar:

Definición 28 Sea $(A, +, \cdot, *)$ una $\mathbb{K}$ -álgebra con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Se dice que $(A, +, \cdot, *, \|\cdot\|)$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra normada si $(\mathbb{K}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ es un $\mathbb{K}$ -espacio para el cual

$$\|x * y\| \leq \|x\| \|y\| \text{ si } x, y \in A.$$

Un álgebra normada es una álgebra de Banach si $(\mathbb{K}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

A lo largo de este escrito se asume que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cuando se habla de álgebras normadas. Estas últimas respetan el producto de sucesiones convergentes así como los espacios normados respetan la suma de sucesiones convergentes.

Teorema 29 Sean A una $\mathbb{K}$ -álgebra normada y $\{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones en A . Si existen dos elementos $x, y \in A$ tales que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$, entonces $x_n * y_n \rightarrow x * y$.

Demostración. Como $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$, para todo $\epsilon > 0$ se tiene la existencia de dos números naturales $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ para los cuales

$$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2(\|y\| + 1)} \text{ si } n \geq N_1,$$

$$\|y_n - y\| < \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2(\|x\| + 1)} \right\} \text{ si } n \geq N_2.$$

Esto implica que para cada $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $\|y_n\| - \|y\| \leq \|y_n - y\| < 1$, por lo que $\|y_n\| < 1 + \|y\|$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|x_n y_n - x y_n + x y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + (y_n - y)x\| \\ &\leq \|(x_n - x)\| \|y_n\| + \|(y_n - y)\| \|x\| \\ &< \frac{\epsilon}{2(\|y\| + 1)} (\|y\| + 1) + \frac{\epsilon}{2(\|x\| + 1)} (\|x\| + 1) = \epsilon. \end{aligned}$$

De esto, se concluye que $x_n * y_n \rightarrow x * y$. ■

Corolario 4 Sea X una $\mathbb{K}$ -álgebra normada. Si A es una sub-álgebra de X , entonces $\bar{A}$ también lo es.

Demostración. Considerese cualesquiera dos elementos $x, y \in \bar{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Por las propiedades de $\bar{A}$, se cuenta con la existencia de dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ para las cuales $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$. Entonces, al ser X un álgebra normada, se sigue que

$$x_n + y_n \rightarrow x + y, \quad x_n y_n \rightarrow xy \quad \text{y} \quad \alpha x_n \rightarrow \alpha x;$$

por lo cual $x + y, xy$ y $\alpha x \in \bar{A}$. ■

Una forma muy útil de conocer la relación entre dos álgebras es mediante el estudio de sus morfismos, los cuales son transformaciones lineales que preservan la multiplicación y las unidades cuando éstas existen.

Definición 30 Sean A y B dos $\mathbb{K}$ -álgebras. Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de álgebras si es una transformación lineal con la propiedad de que

$$f(x *_A y) = f(x) *_B f(y), \quad \text{para cualesquiera } x, y \in A.$$

Además, si A y B son álgebras con unidad y $f(1_A) = 1_B$, se dice que f es un homomorfismo de álgebras con unidad.

Un homomorfismo esencial en la formulación del Teorema Espectral es el siguiente:

Definición 31 Sean A una $\mathbb{K}$ -álgebra con unidad y $\mathbb{K}[x]$ el álgebra de polinomios sobre $\mathbb{K}$. Para

cada $z \in A$ se define su función evaluación como

$$\phi_z: \mathbb{K}[x] \rightarrow A$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \mapsto P(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n;$$

en donde $z^0 := 1_A$.

No es difícil verificar que ϕ_z es un homomorfismo entre las álgebras unitarias $\mathbb{K}[x]$ y A .

En lo que sigue, se hablará de los elementos invertibles de una álgebra con unidad y se darán características del conjunto que conforman.

Definición 32 Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra con unidad. Un elemento $x \in A$ es invertible si existe un $y \in A$ para el cual $x * y = y * x = 1_A$. Aunado a ello, se define al conjunto general lineal de A , $GL(A)$, como el conjunto de todos los elementos invertibles de A . Si $GL(A) = A \setminus \{0_A\}$, se dice que A es una $\mathbb{K}$ -álgebra con división,

Es fácil observar que $1_A \in GL(A)$ y que éste contiene a todos los productos e inversos de sus elementos. Esto hace de $GL(A)$ un grupo bajo el producto heradado por A , y si éste último es una $\mathbb{K}$ -álgebra normada, $GL(A)$ es un grupo topológico: el teorema 29 implica que la operación producto es continua y el siguiente lema concluirá que la inversión de elementos también lo es.

Lema 33 Si A es una $\mathbb{K}$ -álgebra normada con unidad, la función

$$f: x \in GL(A) \mapsto x^{-1} \in GL(A)$$

es continua.

Demostración. Sean $p \in GL(A)$ y $\epsilon > 0$. Si $x \in GL(A)$ y

$$\|x - p\| < \min \left\{ \frac{\|p^{-1}\|^{-1}}{2}, \frac{\epsilon \|p^{-1}\|^{-2}}{2} \right\};$$

se sigue que

$$\|x^{-1}\| - \|p^{-1}\| \leq \|x^{-1} - p^{-1}\| = \|x^{-1}(p - x)p^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \|(p - x)\| \|p^{-1}\|.$$

De esto, se llega a que $\|x^{-1}\| - \|p^{-1}\| < \frac{\|x^{-1}\|}{2}$ por lo cual $\|x^{-1} - p^{-1}\| < 2\|p^{-1}\|^2 \|p - x\| < \epsilon$; de modo que f resulta ser continua. ■

Las series geométricas de una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con unidad permiten generar elementos invertibles de manera análoga a como lo hacen las series geométricas complejas.

Lema 34 *Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con unidad. Si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces $1_A - x$ es invertible y su inversa está dada por la serie absolutamente convergente de Neumann*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (1.4)$$

La norma de este último es menor o igual a $\frac{1}{1-\|x\|}$.

Demostración. Como $\|x^n\| \leq \|x\|^n \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|} \in \mathbb{R}.$$

Esto permite utilizar el criterio de la comparación para implicar que la sucesión de sumas parciales $\{B_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, dada por

$$B_N = \sum_{n=0}^N \|x^n\|,$$

es convergente. Eso conlleva a que la sucesión $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sea absolutamente sumable. Al ser A un espacio de Banach, el teorema 9 implica que dicha sucesión es sumable en A , lo cual tiene como consecuencia que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0_A$. Por consiguiente, si $z = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x^n \in A$, entonces

$$\begin{aligned} z * (1_A - x) &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n \right) (1_A - x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N x^n \right) * (1_A - x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1_A - x^{N+1}) = 1_A, \\ (1_A - x) * z &= (1_A - x) * \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (1_A - x) * \sum_{n=0}^N x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (1_A - x^{N+1}) = 1_A. \end{aligned}$$

Esto muestra que $1_A - x$ es invertible con inverso z . La desigualdad del lema se sigue de que

$$\|z\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}.$$

■

Una consecuencia importante de este lema es la siguiente:

Teorema 35 *Si A es una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach unitaria, $GL(A)$ es un conjunto abierto en A .*

Demostración. Sea $x \in GL(A)$ arbitrario. Como $0_A \notin GL(A)$, $x^{-1} \neq 0_A$ por lo que $\|x^{-1}\| \neq 0$. Si $p \in B_{\|x^{-1}\|^{-1}}(x)$ y $h = x - p$, se sigue que $p = x - h = x * (1_A - x^{-1} * h)$ y que

$$\|x^{-1} * h\| \leq \|x^{-1}\| \|h\| < \|x^{-1}\| \|x^{-1}\|^{-1} = 1.$$

Esto significa que $1_A - x^{-1} * h$ es un elemento invertible y que, por tanto, p también lo es por ser producto de dos elementos invertibles. ■

Con estas herramientas ya se puede dar una de las definiciones más importantes del presente escrito, el espectro de un operador acotado, en el contexto de una álgebra unitaria; y exhibir algunas de sus características cuando el álgebra trabajada es de Banach.

Definición 36 *Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra con unidad. Se define el espectro de cada elemento $x \in A$ como el conjunto*

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid x - \lambda 1_A \notin GL(A)\}$$

y a su resolvente como

$$\varphi_A(x) = \mathbb{K} \setminus \sigma_A(x).$$

Se escribe $\sigma(x)$ o $\varphi(x)$, según corresponda, cuando no hay ambigüedad respecto a la álgebra en la que se está considerando el espectro.

Si X es un espacio topológico compacto, el espectro de cada $f \in C(X, \mathbb{K})$ coincide con su imagen ([4]). Si $A = M_n(\mathbb{K})$, el teorema rango-nulidad implica que el espectro de cualquier matriz es el conjunto de sus valores propios. Esto inmediatamente permite hacer la misma conclusión para cualquier operador $T \in \mathcal{L}(X)$ definido en un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial X de dimensión finita. Cuando X es de dimensión infinita, lo anterior generalmente ya no se cumple debido a la existencia de operadores inyectivos que no son sobreyectivos.

Los principales resultados de la teoría espectral conciernen al cálculo de espectros de operadores $T \in \mathcal{L}(X)$ que están definidos en espacios de Banach, y de la información que ellos dan de estos (ver [4] para más información). Si X es un espacio de Hilbert, el Teorema Espectral permite calcular (de manera teórica) el espectro de los operadores normales que están definidos en él; así como de

aquellos que están contenidos en su C^* -álgebra generada (definición 164), si el operador es acotado. Bajo este supuesto, dicho teorema implica que un *operador normal* es *autoadjunto* si y sólo si su espectro es real. En este trabajo esto también será mostrado como una consecuencia directa del teorema de Gelfand-Naimark Conmutativo Unitario (teorema 163), previo a la demostración del Teorema Espectral para Operadores Normales Acotados.

En el caso de las álgebras complejas, se puede calcular el espectro de una combinación lineal de potencias de un elemento conociendo el espectro del mismo.

Lema 37 (*Teorema del mapeo espectral para polinomios*) Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra con unidad. Para cada $z \in A$ y $P \in \mathbb{C}[x]$ se tiene que

$$\sigma(P(z)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(z)\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(z)$. Este número es raíz del polinomio $P(x) - P(\lambda)$, por lo que existe un $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ para el cual $P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x)$. Si se considera el homomorfismo ϕ_z proveniente de la definición 31 y la notación dada para sus imágenes, se sigue que

$$P(z) - P(\lambda)1_A = (z - \lambda 1_A)Q(z) = Q(z)(z - \lambda 1_A).$$

De esto, se concluye que $P(z) - P(\lambda)1_A$ no puede ser invertible ya que de serlo, existiría un $w \in A$ para el cual

$$(z - \lambda 1_A)Q(z)w = (P(z) - P(\lambda)1_A)w = 1_A = w(P(z) - P(\lambda)1_A) = wQ(z)(z - \lambda 1_A);$$

lo cual no puede ser, ya que $z - \lambda 1_A \notin GL(A)$. Por tanto, $P(\lambda) \in \sigma(P(z))$.

Ahora considérese un $\mu \in \sigma(P(z))$ arbitrario. Si $P = \alpha$ es un polinomio constante, entonces $P(z) = \alpha 1_A$ y $P(\lambda) = \alpha$ para cada $\lambda \in \sigma(z)$. Esto implica que

$$(\alpha - \mu)1_A = \alpha 1_A - \mu 1_A = P(z) - \mu 1_A \notin GL(A),$$

por lo que α debe ser μ . Por ello, $\sigma(P(z)) = \{\mu\} = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(z)\}$.

Si P no es un polinomio constante, el teorema fundamental del Álgebra implica la existencia de

unos n números complejos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y un $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para los cuales

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

Lo anterior conlleva a que $P(z) - \mu 1_A = a(z - \lambda_1 1_A)(z - \lambda_2 1_A) \cdots (z - \lambda_n 1_A)$, por lo cual debe de existir algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $z - \lambda_i 1_A$ no es invertible, por el motivo de que $P(z) - \mu 1_A$ no lo es. Por consiguiente, $\mu = P(\lambda_i) \in \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(z)\}$. ■

Teorema 38 *Si A es una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con unidad, entonces para cada $x \in A$ el conjunto $\varphi(x)$ es un abierto en $\mathbb{K}$.*

Demostración. Obsérvese que para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\|x - \lambda_1 1_A - (x - \lambda_2 1_A)\| = |\lambda_1 - \lambda_2| \|1_A\|$. Por consiguiente, la función $f: \lambda \in \mathbb{K} \mapsto x - \lambda 1_A \in A$ es continua y es tal que $f^{-1}(GL(A)) = \varphi(x)$. Al ser $GL(A)$ un abierto en A , como consecuencia del teorema 35, se sigue que $\varphi(x)$ es un abierto en $\mathbb{K}$. ■

Teorema 39 *Si A es una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con unidad, entonces para cada $x \in A$*

$$\sigma(x) \subseteq \overline{B}_{\|x\|}(0).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ con la propiedad de que $|\lambda| > \|x\|$. Se tiene que

$$1 > \frac{\|x\|}{|\lambda|} = \|\lambda^{-1}x\| \text{ y que } x - \lambda 1_A = (-\lambda)(1_A - \lambda^{-1}x);$$

por lo que se tiene que $1_A - \lambda^{-1}x$ es invertible, y al ser $\lambda > 0$, λ es invertible en $\mathbb{K}$. Esto prueba que $x - \lambda 1_A$ es invertible ya que es un múltiplo escalar no nulo de un elemento invertible. ■

Una consecuencia de este resultado es que en una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach los conjuntos resolventes nunca pueden ser vacíos. Lo que es interesante es que el teorema 41 utiliza este hecho para asegurar lo mismo para los espectros complejos. Para llegar a esto, es necesaria la siguiente definición que también depende del resultado anterior.

Definición 40 *Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con unidad. Se define la función resolvente de cualquier $x \in A$ como la función*

$$R_x: \lambda \in \varphi(x) \mapsto (x - \lambda 1_A)^{-1} \in A.$$

Si A es de Banach, la función anterior es continua, diferenciable en el sentido de que

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{R_x(z) - R_x(w)}{z - w} = R_x^2(w),$$

y cumple con que $R_x(z)R_x(w) = R_x(w)R_x(z)$ para todo $z, w \in \varphi(x)$.

La continuidad se sigue del hecho de que R_x es la composición de dos funciones continuas (lema 33 y teorema 38). Por otra parte, si z y $w \in \varphi(x)$, se tiene que

$$x - w * 1_A = x - z * 1_A + (z - w) * 1_A.$$

Multiplicando lo anterior por $R_x(w)$ a la derecha y por $R_x(z)$ a la izquierda,

$$R_x(z) = R_x(w) + (z - w)R_x(z)R_x(w)$$

por lo que

$$\frac{R_x(z) - R_x(w)}{z - w} = R_x(z)R_x(w), \text{ si } z \neq w.$$

Esta última expresión conlleva a que las resolventes $R_x(z)$ y $R_x(w)$ conmuten y que

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{R_x(z) - R_x(w)}{z - w} = \lim_{z \rightarrow w} R_x(z)R_x(w) = R_x(w)R_x(w) = R_x^2(w).$$

En [14] se menciona la existencia de una demostración del Teorema Espectral basada enteramente en las funciones resolventes. En este escrito se utilizan esas funciones para destacar una diferencia fundamental entre los espectros reales y los espectros complejos concernientes a vectores de un álgebra de Banach. Mientras que los primeros pueden ser vacíos (considérese una matriz de entradas reales con puros valores propios no reales), el teorema de Liouville impide que los segundos lo sean (el ejemplo típico de esto es el de las matrices con entradas complejas).

Teorema 41 (*Teorema de Gelfand*)

Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach con unidad y $x \in A$. Se tiene que $\sigma(x)$ es un conjunto compacto no vacío.

Demostración. Al ser $\varphi(x)$ un abierto, $\sigma(x)$ es un cerrado que, en virtud del teorema 39, está contenido en $\overline{B_{\|x\|}(0)}$ por lo que se tiene que es compacto. Ahora, para verificar que $\sigma(x) \neq \emptyset$,

tómese un $l \in A^*$ arbitrario y defínase la función $f := l \circ R_x$. Por el teorema 40, para cualquier $\mu \in \varphi(x)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} l \left(\frac{R_x(\lambda) - R_x(\mu)}{\lambda - \mu} \right) \\ &= l \left(\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{R_x(\lambda) - R_x(\mu)}{\lambda - \mu} \right) \\ &= l(R_x^2(\mu)). \end{aligned}$$

Por consiguiente, f es una función holomorfa en $\varphi(x)$.

Por el teorema 39, f está definida para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ cuya norma sea mayor a $\|x\|$. En tal caso se tiene que

$$\|(x - \lambda 1_A)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \left\| \left(\frac{x}{\lambda} - 1_A \right)^{-1} \right\| = |\lambda|^{-1} \left\| \left(1_A - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|(1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|})} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|};$$

de manera que

$$0 \leq \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|f(\lambda)\| \leq \|l\|_{A^*} \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} = 0.$$

Esto indica que $f(\lambda) \rightarrow 0$ a medida que $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Ahora, si se supone a $\sigma(x)$ como un conjunto vacío, f resulta en una función entera por lo que del párrafo previo se implica que es una función acotada. Por el teorema de Louville, lo anterior conlleva a que f es una constante que, por el mismo párrafo precedente, debe ser igual a 0. Como $l \in A^*$ es arbitrario, se sigue que para cada $l \in A^*$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $l((x - \lambda * 1_A)^{-1}) = 0$. Por otro lado, el corolario 1 implica que para el elemento $(x - \lambda * 1_A)^{-1} \in A$ existe un $l \in A^*$ tal que

$$l((x - \lambda 1_A)^{-1}) = \|(x - \lambda 1_A)^{-1}\|.$$

En consecuencia, $\|(x - \lambda 1_A)^{-1}\| = 0$ por lo que $(x - \lambda 1_A)^{-1} = 0_A$, lo cual es una contradicción puesto que $0_A \notin GL(A)$. ■

Una consecuencia interesante de este resultado es que, salvo isomorfismo, sólo existe una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach con unidad y con división en el sentido de la siguiente definición:

Definición 42 Sean A y B dos álgebras normadas. Se dice que un isomorfismo de álgebras $f: A \rightarrow B$ es un isomorfismo de álgebras normadas si es continuo y tiene una inversa continua.

Gracias al teorema del mapeo inverso (corolario 3), en la definición anterior sólo basta pedir continuidad e invertibilidad si las álgebras consideradas son de Banach.

Corolario 5 *Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach con unidad y con división. Se tiene que A y $\mathbb{C}$ son isomorfos como álgebras normadas.*

Demostración. La función $f: \lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda 1_A \in A$ es un homomorfismo continuo e inyectivo de álgebras normadas con unidad. Sólo falta verificar que sea sobreyectiva. Por el teorema anterior, para cada $x \in A$ existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x - \lambda 1_A \notin GL(A) = A \setminus \{0_A\}$ debido a que $\sigma(x) \neq \emptyset$ y que A es una álgebra con división. Así, $x = \lambda 1_A$ conllevándose que f sea sobreyectiva. ■

El teorema 39 indica que para cada elemento x de una $\mathbb{K}$ -álgebra con unidad, $|\lambda| < \|x\|$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$. Por el teorema 41, tal λ existe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ por lo que la siguiente definición tiene sentido:

Definición 43 *Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach con unidad. Para cada $x \in A$ se define el radio espectral de x como*

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Por la observación anterior, $r(x) \leq \|x\|$. Es fácil deducir una condición suficiente para que esta última expresión sea una igualdad con la siguiente caracterización del radio espectral:

Teorema 44 *Si A es una $\mathbb{C}$ -álgebra normada, para cada $x \in A$ se cumple que*

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demostración. Por el Teorema del Mapeo Espectral (teorema 37), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. En consecuencia, $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq r(x^n) \leq \|x^n\|$, por lo cual $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Esto conduce a que

$$r(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sólo falta demostrar que

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x).$$

Para ello, se selecciona un $\mu \in (r(x), +\infty)$ arbitrario con el objetivo de mostrar que la sucesión $\{\mu^{-(n+1)}x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ está acotada.

Nótese que por ser $\sigma(x) \subset \overline{B_{\|x\|}(0)}$, $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$ es un abierto contenido en $\varphi(x)$. Por ello, para cada $l \in A^*$ la función $f := l \circ R_x$ es holomorfa en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$. En éste se tiene que $|\lambda| > \|x\|$ o, lo que es equivalente, que $\|\lambda^{-1}x\| < 1$ dando lugar a que el lema 34 implique que $1_A - \lambda^{-1}x \in GL(A)$ y que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (\lambda^{-1}x)^n = (1_A - \lambda^{-1}x)^{-1}.$$

En consecuencia, para cada $l \in A^*$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N l((\lambda^{-1}x)^n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} l\left(\sum_{n=0}^N (\lambda^{-1}x)^n\right) = l((1_A - \lambda^{-1}x)^{-1});$$

por lo cual se sigue que para cada $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$

$$f(\lambda) = l((\lambda 1_A - x)^{-1}) = \lambda^{-1}l((1_A - \lambda^{-1}x)^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} l((\lambda^{-(n+1)}x^n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)}l(x^n).$$

Al ser $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$ el complemento de un disco cerrado, la última expresión encontrada representa una serie de Laurent de f válida en tal dominio. Como $\|x\| \geq r(x)$, se tiene que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r(x)\}.$$

Este último es un subconjunto abierto de $\varphi(x)$ por lo que, ciertamente, f será holomorfa en él. Aunado a lo anterior, dicho conjunto también es el complemento de un disco cerrado, de modo f también tendrá en él una representación en serie de Laurent que, por inclusión, también será válida en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$.

Lo anterior implica que f tiene dos representaciones en series de Laurent en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|x\|\}$. Como dicha representación es única, se sigue que ambas representaciones son iguales por lo que la serie

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)}l(x^n)$$

también converge en $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r(x)\}$. En particular, esto conlleva a que

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{-(n+1)} l(x^n),$$

implicándose así que $\{\mu^{-(n+1)} l(x^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. En consecuencia, esta última sucesión es acotada por lo que existe un $C_l \in \mathbb{R}$, dependiente del funcional l , para el cual

$$|l(\mu^{-(n+1)} x^n)| \leq C_l \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $l \in A^*$ fue arbitrario, para todo $n \in \mathbb{N}$ el funcional $(\mu^{-(n+1)} x^n)^* \in A^{**}$ es tal que

$$|(\mu^{-(n+1)} x^n)^* l| = |l(\mu^{-(n+1)} x^n)| \leq C_l, \text{ para cualquier } l \in A^*.$$

Esto permite utilizar el Teorema de Banach Steinhaus (teorema 20) para implicar que la sucesión $\{(\mu^{-(n+1)} x^n)^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A^{**}$ está uniformemente acotada por algún $C \in (1, +\infty)$. Por consiguiente,

$$\|\mu^{-(n+1)} x^n\|_A = \|(\mu^{-(n+1)} x^n)^*\|_{A^{**}} \leq C, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\|x^n\|_A \leq C\mu^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} (C\mu^{n+1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (C\mu^{n+1})^{\frac{1}{n}} = \mu.$$

Como $\mu \in (r(x), +\infty)$ fue arbitrario, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ es una cota inferior de $(r(x), +\infty)$ por lo que $r(x) \geq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. En consecuencia,

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

de modo que $r(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. ■

Una consecuencia inmediata es que si $x \in A$ y $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ es una sucesión creciente para la cual $\|x^{a_n}\| = \|x\|^{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^{a_n}\|^{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\|^{\frac{a_n}{a_n}} = \|x\|.$$

Este resultado será utilizado cuando se calcule la norma de un *elemento normal* de una C^* -álgebra (ver definición 51). Por lo pronto, se dará una descripción parcial del espectro de un operador acotado definido en un espacio de Banach. En concreto, se dará una condición suficiente para que un número pertenezca a su espectro. En la subsección que sigue se impondrán unas hipótesis que hacen suficiente dicha condición (teorema 79).

Teorema 45 Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Si existe una sucesión de vectores unitarios $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ para la cual $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

Demostración.

Si $T - \lambda I$ fuese invertible, por el Teorema del Mapeo Inverso (corolario 3) se tendría que $(T - \lambda I)^{-1}$ es un operador acotado para el cual existiría un $k > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda I)^{-1}x\| \leq k\|x\| \text{ para cada } x \in X.$$

Esto equivale a decir que existe un $k > 0$ para el cual $\|x\| \leq k\|(T - \lambda I)x\|$ para cada $x \in X$. En particular, para todo $x \in X$ unitario se tendría que

$$\frac{1}{k} \leq \|(T - \lambda I)x\|.$$

Por otro lado, la hipótesis del teorema implica la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\|(T - \lambda I)x_n\| < \frac{1}{k} \text{ si } n \geq N.$$

En consecuencia, para cualquier $n \geq N$

$$\frac{1}{k} \leq \|(T - \lambda I)x_n\| < \frac{1}{k},$$

lo cual es imposible. Esto implica que $T - \lambda I$ no es invertible por lo que $\lambda \in \sigma(T)$. ■

Antes de dejar de hablar propiamente de álgebras, se discutirá y demostrará el teorema de Stone-Weierstrass. Dado un espacio métrico compacto X y $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, este importante resultado da una condición suficiente para que una subálgebra de $C_b(X, \mathbb{K})$ sea densa en ésta bajo la norma infinito.

Para tal fin, se demostrarán una serie de lemas que hacen uso del teorema de Stone Weierstrass clásico, el cual puede revisarse en [14] y [17] al igual que la generalización del mismo para el caso real.

Lema 46 Sean X un espacio métrico y A una subálgebra cerrada de $C_b(X, \mathbb{R})$. Si $f, g \in A$, entonces $|f|$, $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\} \in A$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y $M = \|f\|_\infty$. Por el teorema clásico de Stone-Weierstrass, se tiene la existencia de un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $||x| - p(x)| < \epsilon$ si $x \in [-M, M]$. En particular, esto implica que

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon \text{ para cualquier } x \in X.$$

Por tanto, como la función $p \circ f \in A$, por ser esta última una álgebra, y ϵ fue arbitrario, se sigue que $|f|$ es un punto de acumulación de A por lo que, ciertamente, es elemento de A ya que éste subespacio es cerrado.

Esto concluye que $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\} \in A$ ya que

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

$$\min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

■

Lema 47 Sean X un espacio métrico compacto, A una subálgebra cerrada de $C_b(X, \mathbb{R})$ y $f \in C_b(X, \mathbb{R})$. Si para cada $x, y \in X$ existe un $g_{xy} \in A$ para el cual $g_{xy}(x) = f(x)$ y $g_{xy}(y) = f(y)$, entonces $f \in A$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Se demostrará la existencia de un $g \in A$ para el cual

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in X.$$

Dado un $y \in X$, para cada $x \in X$ se puede considerar la función continua g_{xy} de la hipótesis del lema. Como f también es continua, $h_{xy} := f - g_{xy}$ es una función continua para la cual $h_{xy}(x) = 0$.

Por consiguiente, existe un $\delta_x > 0$ tal que

$$h_{xy}(B_{\delta_x}(x)) \subset (-\epsilon, \epsilon).$$

En consecuencia, para cada $z \in B_{\delta_x}(x)$ se tiene que $g_{xy}(z) > f(z) - \epsilon$. Como $x \in B_{\delta_x}(x)$ si $x \in X$, se sigue que $\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta del compacto X . Por esto último, existe una subcubierta finita $\{B_{\delta_{x_i}}(x_i)\}_{i=1}^n \subset \{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in X}$ de X . Con esto se define la función

$$g_y = \max \{g_{x_1 y}, \dots, g_{x_n y}\}.$$

Al ser A un álgebra cerrada, el lema anterior implica que para cada $y \in X$, $g_y \in A$ además de que $g_y(z) > f(z) - \epsilon$ para cada $z \in X$. Por las hipótesis del lema, $g_y(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$ por lo que $h_y := g_y - f$ es una función continua para la cual existe un $\delta_y > 0$ tal que

$$h_y(B_{\delta_y}(y)) \subset (-\epsilon, \epsilon).$$

Esto conlleva a que $g_y(z) < f(z) + \epsilon$ si $z \in B_{\delta_y}(y)$. De manera análoga a lo observado anteriormente, $\{B_{\delta_y}(y)\}_{y \in X}$ es una cubierta abierta de X que, por la compacidad de éste, contendrá una subcubierta finita $\{B_{\delta_{y_j}}(y_j)\}_{j=1}^m$. Entonces se define la función

$$g = \min \{g_{y_1}, \dots, g_{y_m}\};$$

que por el mismo lema anterior está en A y cumple con que $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$ para cada $z \in X$. Esto significa que

$$|g(z) - f(z)| < \epsilon \text{ si } z \in X.$$

Como ϵ fue arbitrario, se concluye que $f \in \overline{A} = A$. ■

Definición 48 Sean X un espacio métrico y A una subálgebra de $C_b(X, \mathbb{R})$. Se dice que A separa puntos si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un $f \in A$ para el cual $f(x) \neq f(y)$.

Teorema 49 (Teorema de Stone-Weierstrass)

Sea X un espacio métrico compacto. Si A es una sub-álgebra de $C_b(X, \mathbb{R})$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes, entonces $\overline{A} = C_b(X, \mathbb{R})$ en la norma infinito.

Demostración. Sea $f \in C_b(X, \mathbb{R})$. Gracias al lema pasado sólo es necesario demostrar que para cualesquiera $x, y \in X$ existe un $g \in \overline{A}$ para el cual $g(x) = f(x)$ y $g(y) = f(y)$.

Sean $x, y \in X$. Si $x = y$, $f(x) = f(y)$ por lo que la función constante

$$g: z \in X \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

es la función buscada. Como A contiene a las funciones constantes y $A \subset \overline{A}$, $g \in \overline{A}$.

Ahora, si $x \neq y$, se tiene la existencia de una función $h \in A$ para la cual $h(x) \neq h(y)$, debido a que A separa puntos. Con dicha función se define la asignación $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(z) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{h(y) - h(x)}(h(z) - h(x)).$$

Como g es una combinación lineal de elementos pertenecientes a A , $g \in A$ además de que $g(x) = f(x)$ y $g(y) = f(y)$. Al ser A una álgebra, se implica que $\overline{A}$ también lo es (corolario 4) por lo que al ser éste último un conjunto cerrado, las funciones construidas con anterioridad permiten utilizar el lema pasado para concluir que $f \in \overline{A}$, por lo cual $\overline{A} = C_b(X, \mathbb{R})$. ■

La versión compleja del teorema de Stone Weierstrass pide que la subálgebra a tratar sea cerrada bajo conjugados complejos. Aun así, se puede demostrar apelando a la versión real.

Teorema 50 (Stone-Weierstrass versión compleja)

Sea X un espacio métrico compacto. Si A es una subálgebra de $C_b(X, \mathbb{C})$ que separa puntos, contiene a las funciones constantes y es cerrada bajo conjugados, entonces $\overline{A} = C_b(X, \mathbb{C})$ en la norma infinito.

Demostración. Sea $\mathcal{R} := \{Re(f) \mid f \in A\}$. Hay que verificar que este conjunto es una $\mathbb{R}$ -álgebra densa en $C_b(X, \mathbb{R})$.

Si $f \in A$, $-i * f \in A$ por lo cual $Im(f) = Re(-i * f) \in \mathcal{R}$ y $Re(f) = \frac{f + \overline{f}}{2} \in A$. En consecuencia, si $f, g \in A$,

1. $Re(f) + Re(g) = Re(Re(f) + Re(g)) \in \mathcal{R}$.
2. $Re(f) * Re(g) = Re(Re(f) * Re(g)) \in \mathcal{R}$
3. para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha Re(f) = Re(\alpha * Re(f)) \in \mathcal{R}$.

4. Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos se tiene la existencia de un $h \in A$ para el cual $h(x) \neq h(y)$. Esto implica que $Re(h(x)) \neq Re(h(y))$ o que $Im(h(x)) \neq Im(h(y))$; por lo que ciertamente existe una función en $\mathcal{R}$ que separa puntos.

Los apartados anteriores permiten concluir que $\mathcal{R}$ es una subálgebra de $C_b(X, \mathbb{R})$ que separa puntos. Como $Re(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ y A contiene a las funciones constantes, $\mathcal{R}$ contiene a las funciones constantes reales. Por tanto, el teorema de Stone-Weierstrass implica que $\mathcal{R}$ es denso en $C_b(X, \mathbb{R})$. Por lo tanto, para cada $f \in C_b(X, \mathbb{C})$ existen unas sucesiones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R} \subset A$ para las cuales $f_n \rightarrow Re(f)$ y $g_n \rightarrow Im(f)$ en $C_b(X, \mathbb{R})$. Esto conlleva a que $\{f_n + ig_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ y que $f_n + ig_n \rightarrow Re(f) + iIm(f) = f$. Por consiguiente, $\overline{A} = C_b(X, \mathbb{C})$. ■

Para concluir esta subsección, se darán propiedades esenciales de una clase muy particular de $\mathbb{C}$ -álgebras de Banach que intervienen fuertemente en la formulación del Teorema Espectral.

Definición 51 (C^* -álgebra) Sea A una álgebra de Banach compleja. Se dice que A es una C^* -álgebra si existe una función $*$: $A \rightarrow A$, llamada involución, tal que para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x^*)^* = x$
2. $(x + y)^* = x^* + y^*$
3. $(xy)^* = y^*x^*$
4. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$
5. $\|x^*x\| = \|x\|^2$

Si $x \in A$ es tal que $x = x^*$, se dice que x es autoadjunto y si $x^*x = xx^*$, x es normal. Si A tiene unidad y $xx^* = x^*x = 1_A$, se dice que x es un elemento unitario.

Una C^* -álgebra no necesariamente tiene unidad, pero si la tiene, necesariamente ésta debe de ser un elemento autoadjunto de norma 1.

Ejemplos de C^* -álgebras son $\mathbb{C}$ con su conjugación usual y $C_b(X, \mathbb{C})$ bajo la conjugación de funciones. Como ambas álgebras son conmutativas, todos sus elementos son normales y sus elementos autoadjuntos corresponden a los números reales y a las funciones de variable real, respectivamente. En efecto, la descomposición de un número complejo en su parte real e imaginaria no es más que

un caso particular del hecho de que para cada elemento x de una C^* -álgebra,

$$x_1 := \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 := \frac{x - x^*}{2i} \quad (1.5)$$

son los únicos elementos autoadjuntos para los cuales $x = x_1 + ix_2$. Además, se infiere que x es normal si y sólo si $x_1x_2 = x_2x_1$.

Otras dos propiedades importantes acerca de los elementos normales de una C^* -álgebra la da el siguiente resultado:

Teorema 52 *Sea A una C^* -álgebra. Si $x \in A$ es normal, para cada $n \in \mathbb{N}$ x^n es normal y $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

Demostración. La normalidad de x^n se demuestra haciendo inducción sobre n y la otra conclusión del teorema se sigue de que

$$\|x^2\| = \|(x^2)^*x^2\|^{1/2} = \|x^*x^*xx\|^{1/2} = \|x^*xx^*x\|^{1/2} = \|(x^*x)^*(x^*x)\|^{1/2} = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

■

Un argumento inductivo permite derivar de este teorema que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ si x es normal. Por tanto, el teorema 44 implica que el radio espectral de un elemento normal de una C^* -álgebra coincide con la norma del mismo. Por eso y por la misma implicación del teorema anteriormente citado, para todo elemento x de una C^* -álgebra conmutativa se cumple que

$$\|x^2\| = \|x\|^2 \text{ y } r(x) = \|x\|. \quad (1.6)$$

Esto es de suma importancia en la demostración del Teorema de Gelfand-Naimark Conmutativo Unitario (teorema 163), mismo que establece una equivalencia entre C^* -álgebras conmutativas unitarias bajo un morfismo de sus estructuras algebraicas que preserve involuciones. Estos últimos reciben un nombre especial:

Definición 53 *Sean A y B dos C^* -álgebras. Se dice que un homomorfismo de álgebras $f: A \rightarrow B$ es un $*$ -homomorfismo si*

$$f(x^*) = f(x)^*, \text{ para todo } x \in A.$$

Además, si A y B tienen unidades y $f(1_A) = 1_B$, se dice que f es un $*$ -homomorfismo de C^* -álgebras con unidad.

Obsérvese que un $*$ -homomorfismo no tiene porque respetar normas o ser continuo. Sin embargo, esta última propiedad si se tiene si el morfismo en cuestión preserva unidades.

Teorema 54 Sean A y B dos C^* -álgebras con unidad. Si $f : A \rightarrow B$ es un $*$ -homomorfismo de C^* -álgebras con unidad, entonces f es una función continua.

Demostración. Nótese que para cada $x \in A$, $\sigma_B(f(x)) \subset \sigma_A(x)$ y xx^* es autoajunto. Para verificar lo primero, se observa que si $\lambda \notin \sigma_A(x)$, de manera que $x - \lambda 1_A \in GL(A)$, entonces $f(x - \lambda 1_A) = f(x) - \lambda 1_B \in GL(B)$, implicando que $\lambda \notin \sigma_B(f(x))$. La verificación de lo segundo se sigue de que $(xx^*)^* = x^{**}x^* = xx^*$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_B^2 &= \|f(x)f(x)^*\|_B = \|f(xx^*)\|_B = r_B(f(xx^*)) \\ &\leq r_A(xx^*) = \|xx^*\|_A = \|x\|_A^2; \end{aligned}$$

teniéndose así que $\|f(x)\|_B \leq \|x\|_A$ para cualquier $x \in A$. ■

En las siguientes dos secciones se darán otros dos ejemplos de C^* -álgebras que toman un rol activo en el Teorema Espectral. El segundo de estos ejemplos será un espacio de funciones que contendrá a $C_b(X, \mathbb{C})$ como una subálgebra cerrada bajo involuciones (una C^* -subálgebra); y el primero consistirá en el espacio $\mathcal{L}(X)$, donde X será un $\mathbb{K}$ -espacio de Banach gracias a una estructura adicional de producto interno; y los conjugados de los operadores serán sus operadores adjuntos ([4]). Históricamente, las C^* -álgebras nacieron como una abstracción de estos espacios y desde su concepción han tenido grandes aplicaciones en las Matemáticas y en la Física (ver [2]). De hecho, el teorema de Gelfand-Naimark (ver [4]) indica que toda C^* -álgebra es isomorfa a una C^* -subálgebra de alguno de estos espacios.

1.3. Espacios de Hilbert

En la presente sección se mostrará un desarrollo básico de la Teoría de Espacios de Hilbert que recoge ideas y resultados provenientes de [9] y [14]. La importancia de estos espacios en el Teorema Espectral radica en el hecho de que las nociones de operador autoadjunto y operador normal se

formulan en ellos. Es por esto que el Teorema Espectral se enuncia para estos espacios, al igual que los isomorfismos isométricos descritos en la forma de multiplicación del mismo.

Definición 55 (*Espacio pre-Hilbert*) *Un espacio con producto interior (o pre-Hilbert) es una 4-tupla ordenada $(X, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, en donde $(X, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, llamada producto interior (o interno), que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:*

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ pero $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Es conocido que todo espacio pre-Hilbert es un $\mathbb{C}$ -espacio normado bajo la norma dada por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.7)$$

La verificación de que la asignación 1.7 si corresponde a una norma se hace de manera directa con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Teorema 56 (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) *Sea X un espacio pre-Hilbert. Para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Más aún, se tiene que la igualdad sólo se da cuando uno de los vectores es múltiplo escalar del otro.*

Demostración. Si $x = 0$ o $y = 0$, $|\langle x, y \rangle|^2 = 0 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, para el escalar $t := -\langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle$ se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x + ty \rangle + \langle ty, x + ty \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, ty \rangle + \langle ty, x \rangle + \langle ty, ty \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + t \overline{\langle y, x \rangle} + \bar{t} \langle y, x \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle y, x \rangle} \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\overline{\langle y, x \rangle} \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}. \end{aligned}$$

De esto, se concluye que $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ y que la expresión anterior es una igualdad si y sólo si $0 = \langle x + ty, x + ty \rangle$; lo cual sucede si y sólo si $x = -ty$. ■

Definición 57 *Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert que es completo respecto a la métrica asociada por su producto interior.*

Análogo a los espacios normados, dos espacios de Hilbert serán isométricamente isomorfos cuando exista un isomorfismo entre espacios vectoriales que respete los productos internos correspondientes:

Definición 58 *Dos espacios pre-Hilbert H_1 y H_2 son isométricos si existe una transformación lineal $U: H_1 \rightarrow H_2$ para la cual*

$$\langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} = \langle U(x_1), U(x_2) \rangle_{H_2}, \text{ si } x_1, x_2 \in H_1.$$

Si U resulta ser biyectiva, se dice que el operador U es unitario, o un isomorfismo isométrico, y que H_1 y H_2 son isométricamente isomorfos o unitariamente equivalentes.

En la introducción se advirtió que bajo la noción anterior, el único espacio de Hilbert n -dimensional es $\mathbb{C}^n$ mediante el producto interno

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

Bajo este último, las nociones de perpendicularidad, distancia y medida de ángulos en $\mathbb{C}^n$ se definen de manera natural. Por tanto, estos tres conceptos se pueden inducir de manera análoga a cualquier espacio pre-Hilbert.

Definición 59 *Sea H un espacio pre-Hilbert. Se dice que dos vectores $x, y \in H$ son ortogonales, o perpendiculares, si $\langle x, y \rangle_H = 0$. Si $\{x_i\}_{i \in I} \subset H$ es una familia indexada de vectores, se dice que es ortogonal si $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle_H = 0$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ distintos. Más aún, se dice que $\{x_i\}_{i \in I}$ es ortonormal si para cada $\alpha, \beta \in I$ se sigue que $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.*

En el caso de $\mathbb{C}^n$, todo subconjunto ortonormal de él con n elementos es una base. Inversamente, dada una base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{C}^n$, el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt genera un conjunto

ortonormal $\{u_i\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{C}^n$ para el cual

$$\text{gen}(\{v_i\}_{i=1}^m) = \text{gen}(\{u_i\}_{i=1}^m), \text{ para cada } m \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

Lo anterior indica que en $\mathbb{C}^n$ todo conjunto ortonormal está contenido en un conjunto ortonormal de n elementos (una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$) y que un conjunto ortonormal de n elementos no puede estar contenido propiamente en otro conjunto ortonormal. En otras palabras, si $\mathcal{A}$ es la familia de todos los conjuntos ortonormales de $\mathbb{C}^n$, las bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$ son elementos maximales de $\mathcal{A}$ si éste es ordenado mediante la contención de conjuntos.

Otra de las propiedades que tienen las bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$ es la siguiente: para cada $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x \rangle x_i \text{ y } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x_i, x \rangle|^2 \quad (1.9)$$

si $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ es una base ortonormal.

Para cualquier espacio de Hilbert H sería deseable tener un subconjunto de él que permitiera obtener las relaciones anteriores para todos sus elementos. La siguiente definición provee una condición suficiente para que eso ocurra.

Definición 60 Sea H un espacio pre-Hilbert. Si $A \subset H$ es un conjunto ortonormal que no está contenido propiamente en otro conjunto ortonormal $B \subset H$, se dice que A es una base ortonormal de H .

Como se vio con anterioridad, los espacios de Hilbert isométricamente isomorfos a $\mathbb{C}^n$ tienen bases ortonormales. Por tanto, la definición anterior coincide con la dada para los $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Por otra parte, si H es un espacio pre-Hilbert no isomorfo a $\mathbb{C}^n$, no es claro que H tenga una base ortonormal. Para mostrar que la tiene, hay que apelar al Lema de Zorn.

Teorema 61 Todo espacio pre-Hilbert H no trivial tiene una base ortonormal y cualesquiera dos bases ortonormales de éste tienen la misma cardinalidad.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la familia formada por los conjuntos ortonormales de H . $\mathcal{A}$ está ordenado por la inclusión de conjuntos y es no vacío ya que para cada $x \in H \setminus \{0\}$ el singulete $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ es un

conjunto ortonormal. Si $S \subset \mathcal{A}$ es un conjunto totalmente ordenado, se verifica que

$$A := \bigcup_{x \in S} x$$

es un conjunto ortonormal que es cota superior de S en $\mathcal{A}$. Por lo tanto, el lema de Zorn implica la existencia de un elemento maximal $A \in \mathcal{A}$ que, por lo mismo, resulta ser una base ortonormal de H .

Finalmente, la prueba de invarianza en la cardinalidad de bases ortonormales puede ser consultada en [9]. ■

Para obtener unas relaciones análogas a las dadas en la expresión 1.9 en cualquier espacio de Hilbert; es necesario considerar sumas no numerables debido a la existencia de espacios pre-Hilbert con bases ortonormales no contables.

Definición 62 Sea X un $\mathbb{K}$ -espacio normado. Se dice que un subconjunto indexado $\{x_i\}_{i \in I} \subset X$ es sumable con suma $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto $J_0 \subset I$ finito para el cual

$$\left\| x - \sum_{j \in J} x_j \right\| < \epsilon$$

para cada subconjunto finito $J \subset I$ que contiene a J_0 . En tal caso, se dice que $x = \sum_{i \in I} x_i$.

La definición anterior también se puede dar en términos de redes topológicas; para ello es necesario definir para cada conjunto I la familia de subconjuntos

$$\mathcal{P}_{fin}(I) := \{A \subset I \mid A \text{ es finito} \}.$$

Esta última colección tiene estructura de conjunto parcialmente ordenado mediante la inclusión. Más aún, $(\mathcal{P}_{fin}(I), \subset)$ es un sistema dirigido ya que si $A, B \in \mathcal{P}_{fin}(I)$, entonces $A \cup B \in \mathcal{P}_{fin}(I)$ es cota superior de estos. En consecuencia, si $\{x_i\}_{i \in I} \subset X$ y para cada $\alpha \in \mathcal{P}_{fin}(I)$ se define $S_\alpha := \sum_{i \in \alpha} x_i$, se cumple que

$$\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_{fin}(I)} \rightarrow x \in X$$

si y sólo si $\{x_i\}_{i \in I}$ es sumable con suma $x \in X$. Esta caracterización permite demostrar algunas de las propiedades que se enlistan a continuación:

Teorema 63 Sea X un $\mathbb{K}$ -espacio normado. Si $\{x_i\}_{i \in I}, \{t_i\}_{i \in I}$ son dos subconjuntos de X indexados por un mismo conjunto I , se verifica lo siguiente:

1. Si $\{x_i\}$ es sumable con suma x y sumable con suma t , entonces $x = t$ (la suma descrita en la definición pasada es única cuando existe) y el conjunto $\{x_i \mid x_i \neq 0\}$ es numerable.
2. Si $\{x_i\}$ y $\{t_i\}$ son sumables con sumas x y t , respectivamente, entonces $\{\alpha x + \beta t\}$ es sumable con suma $\alpha x + \beta t$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
3. Si I es numerable, $\{x_i\}$ es sumable en el sentido de la definición pasada si y sólo si es absolutamente sumable en el sentido de la definición 7. En dicha situación, si $\{x_i\}$ resulta ser sumable en el sentido de la definición 7, la suma de esta coincide con la suma de la definición anterior.
4. Si X es un espacio pre-Hilbert y $\{x_i\}$ es sumable con suma x , para cualquier $t \in H$ se verifica que $\{\langle x_i, t \rangle\}_{i \in I}$ y $\{\langle t, x_i \rangle\}_{i \in I} \subset \mathbb{C}$ son sumables con sumas $\langle x, t \rangle$ y $\langle t, x \rangle$, respectivamente.

Demostración. Estas propiedades pueden revisarse en [9]. En el presente trabajo sólo se mostrará que si $\{x_i\}$ es sumable con suma x , entonces su intersección con $H \setminus \{0_H\}$ debe ser numerable. De la hipótesis anterior, se infiere que para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $J_\epsilon \subset I$ para el cual $\|x - \sum_{j \in J_0} x_j\| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada conjunto finito $J_\epsilon \subset J_0 \subset I$. En particular, si $K \subset I$ es un subconjunto finito ajeno a J_ϵ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in K} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in J_\epsilon \cup K} x_i - \sum_{i \in J_\epsilon} x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in J_\epsilon \cup K} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i \in J_\epsilon} x_i \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $i \in I$ no pertenece al conjunto numerable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_{\frac{1}{n}}$, $\|x_i\| < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que x_i es nulo. ■

De la propiedad 3 se infiere que cualquier colección finita $\{x_i\}_{i=1}^n$ es sumable con suma $\sum_{i=1}^n x_i$. Adicionalmente, si el espacio H es de Hilbert, dicha propiedad en conjunto con el teorema 9 muestran que cualquier sucesión $\{x_n\}$ sumable en el sentido de la definición anterior es sumable en el sentido usual de la definición 7, y que en tal caso las sumas correspondientes coinciden. Por tal motivo, si I es un conjunto numerable, la sumabilidad de $\{x_i\}_{i \in I}$ será entendida en el sentido de la definición 7, en caso contrario, será entendida en el sentido de la definición pasada.

Teorema 64 Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal del mismo. Para cada $x \in H$ se tiene que

$$x = \sum_{i \in I} \langle x_i, x \rangle x_i \quad y \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x_i, x \rangle|^2. \quad (1.10)$$

La segunda igualdad es conocida como la relación de Parseval y los coeficientes $\langle x_i, x \rangle$ se llaman coeficientes de Fourier ([14]).

Demostración. Nótese que para cada $J \subset I$ finito, $\sum_{\alpha \in J} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (desigualdad de Bessel) y que la red

$$\left\{ \sum_{\alpha \in J} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2 \right\}_{J \in \mathcal{P}_{fin}(I)}$$

es creciente en el sentido de que si $A \subset B$, entonces $\sum_{\alpha \in A} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2 \leq \sum_{\alpha \in B} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2$. Por tanto, esta última converge y el teorema anterior indica que, por lo mismo, el conjunto $\{\alpha \in I \mid \langle x_\alpha, x \rangle \neq 0\}$ es numerable. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ es una enumeración de sus elementos, $\sum_{i=1}^N |\langle x_{\alpha_i}, x \rangle|^2$ converge a un $L \in \mathbb{R}$ cuando $N \rightarrow +\infty$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase el elemento $y_n := \sum_{i=1}^n \langle x_{\alpha_i}, x \rangle x_{\alpha_i}$. Si $n > m$, por la última conclusión del párrafo anterior

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |\langle x_{\alpha_j}, x \rangle|^2 \rightarrow 0,$$

lo cual implica que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ es de Cauchy. Al ser este último un espacio de Hilbert, la sucesión anterior converge a un $y \in H$. Obsérvese que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle x - y, x_{\alpha_m} \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle x - \sum_{j=1}^n \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j}, x_{\alpha_m} \right\rangle \\ &= \langle x, x_{\alpha_m} \rangle - \langle x, x_{\alpha_m} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\alpha \neq \alpha_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, también se llega a que

$$\langle x - y, x_\alpha \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle x - \sum_{j=1}^n \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j}, x_\alpha \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto, $x - y$ es ortogonal a la base ortonormal $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Si éste elemento no fuese cero,

entonces $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \left\{ \frac{x-y}{\|x-y\|} \right\}$ sería un conjunto ortonormal que contiene propiamente a la base ortonormal $\{x_\alpha\}$, lo cual supone una contradicción. De esto, se concluye que

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_{\alpha_n}, x \rangle x_{\alpha_n} = \sum_{i \in I} \langle x_i, x \rangle x_i.$$

Finalmente, la igualdad $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x_i, x \rangle|^2$ se sigue de que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j} \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x_{\alpha_j}, x \rangle|^2 \right) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle x_{\alpha_j}, x \rangle|^2. \end{aligned}$$

■

El Teorema Espectral en su forma de multiplicación necesita considerar sumas no numerables en el sentido de la definición 62 para ser válido en espacios de Hilbert con base ortonormal no numerable. Las razones de esto se discutirán previo a la demostración del mismo, pero de una vez se puede decir que las propiedades vistas en el teorema 63 permiten generalizar la prueba que se dará para *espacios de Hilbert separables* a cualquier espacio pre-Hilbert completo con nula dificultad.

El concepto de separabilidad de espacios métricos provee una caracterización para los espacios de Hilbert con base ortonormal numerable.

Definición 65 *Un espacio topológico es separable si tiene un subespacio denso numerable.*

Teorema 66 *Dado un espacio de Hilbert H , se tiene que éste es separable como espacio métrico si y sólo si tiene una base ortonormal numerable.*

Demostración. Supóngase que H es separable y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso del mismo. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{gen}(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}})$, este último también es denso en H y tiene una base $A \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt en A , se obtiene un conjunto ortonormal $\tilde{A}$ que está en biyección con éste último y que cumple con que $\text{gen}(\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}) = \text{gen}(\tilde{A})$. Por consiguiente, si $x \in H$ es ortogonal a $\tilde{A}$, entonces también es ortogonal a $\text{gen}(\tilde{A})$ por linealidad y a H por densidad y continuidad. Por tanto, $\tilde{A}$ es una base ortonormal de éste.

Recíprocamente, si $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H , entonces para todo $x \in H$ se sigue que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x \rangle x_n$. En consecuencia, el conjunto numerable

$$\left\{ \sum_{k=1}^n q_k x_j \mid j, n \in \mathbb{N} \text{ y } q_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en H puesto que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ lo es en $\mathbb{C}$. ■

Con la noción de suma generalizada dada en la definición 62, se puede derivar una suma directa de una familia arbitraria de espacios de Hilbert $\{H_i\}_{i \in I}$ que resulta análoga al concepto de suma directa finita.

Definición 67 Sea $\{H_i\}_{i \in I}$ una colección de espacios de Hilbert. Se define la suma directa de tal colección como el conjunto

$$\bigoplus_{i \in I} H_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid \{\|x_i\|^2\}_{i \in I} \text{ es sumable}\}.$$

Utilizando las propiedades anteriores y la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 56), se verifica que la suma directa adquiere una estructura de espacio de Hilbert bajo las operaciones usuales y el producto interno

$$\langle (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}. \quad (1.11)$$

En la construcción anterior se observa que los espacios de Hilbert H_i están encajados en su suma directa, de manera canónica, como subespacios de Hilbert que resultan ser ortogonales entre sí. Por tanto, mediante un abuso de notación se puede escribir a cada elemento $(x_i)_{i \in I}$ de la suma directa como

$$(x_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} x_i.$$

Esta descomposición como suma de elementos $x_i \in H_i$ resulta única como consecuencia de la ortogonalidad de los espacios H_i . Este fenómeno se presenta de manera inversa. Si H es un espacio de Hilbert y $\{H_i\}_{i \in I}$ es una colección de subespacios del mismo para la cual la descomposición

anterior se da para cada $x \in H$;

$$H \cong \bigoplus_{i \in I} H_i$$

como espacios de Hilbert si los subespacios H_i son ortogonales entre ellos. En ambas situaciones, las bases ortonormales de los miembros de una suma directa dan una base ortonormal de ésta, así como se menciona en [9].

En lo que sigue, se describirá una descomposición de un espacio de Hilbert H como suma directa de dos subespacios cerrados de él sujetos a unas relaciones que se precisarán a continuación.

Definición 68 Sea H un espacio pre-Hilbert y W un subespacio vectorial de éste. Se define el complemento ortogonal de W como

$$W^\perp := \{x \in W \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in W\}.$$

Es fácil verificar que $W^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H cuya intersección con W resulta ser trivial.

Teorema 69 Sea H un espacio de Hilbert y W un subespacio vectorial cerrado de éste. Para cada $x \in H$ existe un único $z \in W$ para el cual

$$\|x - z\| = \inf_{y \in W} \|x - y\| = \text{dist}(x, W).$$

Demostración. Sean $d = \text{dist}(x, W)$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ una sucesión para la cual $\|x - y_n\|_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow d$.

Como $\frac{y_n + y_m}{2} \in W$, se tiene que

$$\left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x \right\|^2 \geq d^2$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) - (y_n - x)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - \|y_m + y_n - 2x\|^2 \text{ (por la ley del paralelogramo)} \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4\left\| \frac{y_m + y_n}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2\|(y_m - x)\|^2 + 2\|(y_n - x)\|^2 - 4d^2. \end{aligned}$$

De esto,

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \|y_m - y_n\|^2 \leq \lim_{n,m \rightarrow +\infty} (2\|(y_m - x)\|^2 + 2\|(y_n - x)\|^2 - 4d^2) = 0,$$

lo cual indica que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en W . Como este ultimo es cerrado, la sucesión ya mencionada converge a un $z \in W$ para el cual $x - y_n \rightarrow x - z$ y, por tal motivo,

$$\inf_{y \in W} \|x - y\| = d \leftarrow \|x - y_n\| \rightarrow \|x - z\|.$$

Para corroborar la unicidad de este elemento, notese que si para un $w \in W$ también se satisface lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} \|z - w\|^2 &= \|(z - x) - (w - x)\|^2 = 2\|z - x\|^2 + 2\|w - x\|^2 - \|z + w - 2x\|^2 \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0; \end{aligned}$$

de manera que $z = w$. ■

Teorema 70 (Teorema de la proyección) Sean H un espacio de Hilbert y W un subespacio vectorial de éste. Si W es cerrado, entonces $H \cong W \oplus W^\perp$.

Demostración. Sea $x \in H$ arbitrario. Como W es cerrado, el lema anterior implica la existencia de un único $z \in W$ para el cual

$$\|x - z\| = \inf_{y \in W} \|x - y\|.$$

Basta probar que si $w := x - z$, entonces $w \in W^\perp$. Para ello, considérese a cualesquiera $y \in W \setminus \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$ para destacar que

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &\leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = \|w\|^2 + \langle w, -ty \rangle + \langle -ty, w \rangle + \|-ty\|^2 \\ &= \|w\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle + t^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\|y\|^2 \left(t - \frac{\operatorname{Re} \langle w, y \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 - \frac{\operatorname{Re}^2 \langle w, y \rangle}{\|y\|^2} = t^2 \|y\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle \geq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

En particular, si

$$t = \frac{\operatorname{Re}\langle w, y \rangle}{\|y\|^2},$$

la ecuación anterior conlleva a que $\operatorname{Re}^2\langle w, y \rangle \leq 0$ implicando que $\operatorname{Re}\langle w, y \rangle = 0$. Un argumento análogo usando it en vez de t muestra que $\operatorname{Im}\langle w, y \rangle = 0$, permitiendo concluir que $w \perp W$. La unicidad de esta descomposición del vector x es consecuencia inmediata de que $W \cap W^\perp = \{0\}$. ■

Este resultado se generaliza por si mismo a cualquier subespacio vectorial $W \subset H$ al aplicarse sobre $W^\perp$. La pieza faltante es la siguiente:

Teorema 71 *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada subespacio vectorial $W \subset H$ se tiene que $\overline{W} = W^{\perp\perp}$.*

Demostración. La inclusión $\overline{W} \subset W^{\perp\perp}$ es obvia puesto que este último es un cerrado que contiene a W . Para verificar la otra contención, úsese el mismo Teorema de la Proyección en cada $x \in W^{\perp\perp}$ para obtener la existencia de unos únicos $y \in \overline{W}$ y $z \in \overline{W}^\perp \subset W^\perp$ para los cuales $x = y + z$. Hay que verificar que z sea nulo, lo cual se sigue de que

$$\langle z, z \rangle = \langle z, x - y \rangle = \langle z, x \rangle - \langle z, y \rangle = 0.$$

■

Otra consecuencia del Teorema de la Proyección es el Lema de Riesz, el cual permite identificar a todo espacio de Hilbert con su dual.

Lema 72 (Lema de Riesz) *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $T \in H^*$ existe un único $y_T \in H$ tal que $T(x) = \langle y_T, x \rangle$ para cualquier $x \in H$. Además, $\|y_T\|_H = \|T\|_{H^*}$.*

Demostración. Si $T = 0$, entonces $T(x) = 0 = \langle 0_H, x \rangle$ para todo $x \in H$, por lo que 0_H sería el vector buscado.

Entonces supóngase que $T \neq 0$. Al ser T un operador acotado, $\ker(T)$ es un subespacio vectorial cerrado propio de H . Por consiguiente, si $y \in H \setminus \ker(T)$, el Teorema de la Proyección (teorema 70) trae como consecuencia la existencia unos únicos $x \in \ker(T)$ y $x_0 \in \ker(T)^\perp$ para los cuales $y = x + x_0$. x_0 tiene que ser no nulo ya que de no ser así, y estaría en $\ker(T)$. Por lo tanto, se puede definir el elemento

$$y_T := \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0.$$

y_T es un múltiplo escalar de x_0 por lo que es un elemento de $\ker(T)^\perp$. Así,

$$T(x) = 0 = \langle y_T, x \rangle \text{ si } x \in \ker(T).$$

Por otra parte, para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\langle y_T, \alpha x_0 \rangle = \left\langle \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0, \alpha x_0 \right\rangle = \alpha \frac{T(x_0)}{\|x_0\|^2} \langle x_0, x_0 \rangle = \alpha T(x_0) = T(\alpha x_0).$$

Esto implica que los operadores T y $\langle y_T, \cdot \rangle$ coinciden en $\ker(T)$ y en $\mathbb{C}x_0$ por lo que también coinciden en $\ker(T) + \mathbb{C}x_0$. Este último subespacio coincide con H ya que todo vector y perteneciente a este último puede ser reescrito como

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0 \right) + \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0,$$

en donde

$$T\left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0\right) = T(y) - \frac{T(y)}{T(x_0)} T(x_0) = 0.$$

Lo anterior confirma que $T(x) = \langle y_T, x \rangle$ para todo $x \in H$. Si existiese otro $y \in H$ con esta propiedad, se implicaría que $\langle y - y_T, y - y_T \rangle = 0$, por lo que, ciertamente, $y = y_T$.

Finalmente, para demostrar que $\|T\|_{H^*} = \|y_T\|_H$, se observa que

$$\|T\|_{H^*} = \sup_{\|x\|=1} |T(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle y_T, x \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|y_T\| \|x\| = \|y_T\|$$

y que

$$\|T\|_{H^*} \geq \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right) \right| = \left| \left\langle y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|} \right\rangle \right| = \frac{\|y_T\|^2}{\|y_T\|} = \|y_T\|.$$

■

El recíproco de este lema también es cierto: cada $y \in H$ define un único elemento en H^* . Esto permite demostrar que un espacio de Hilbert es isométricamente isomorfo conjugado a su espacio dual H^* en el sentido de la siguiente definición.

Definición 73 Sean V_1 y V_2 dos $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales. Se dice que una función aditiva $f: V_1 \rightarrow V_2$ es conjugada lineal si para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in V_1$ se cumple que $T(\alpha x) = \overline{\alpha} T(x)$. Si T es biyectiva, se dice que T es un isomorfismo conjugado y que V_1 y V_2 son isomorfos conjugados.

Teorema 74 (Recíproco del lema de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $y \in H$ se tiene que la función $T_y : x \in H \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbb{C}$ es un elemento de H^* . Más aun, la asignación $C : y \in H \mapsto T_y \in H^*$ es un isomorfismo isométrico conjugado entre H y H^* .

Demostración. Sean $x, y, z \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se tiene que $T_z \in H^*$ por el hecho de que

$$\begin{aligned} T_z(\alpha x + \beta y) &= \langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle = \alpha T_z(x) + \beta T_z(y), \\ |T_z(x)| &= |\langle z, x \rangle| \leq \|z\| * \|x\|. \end{aligned}$$

Análogamente, se observa que C es conjugada lineal ya que

$$C(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, \cdot \rangle = \bar{\alpha} \langle x, \cdot \rangle + \bar{\beta} \langle y, \cdot \rangle = \bar{\alpha} C(x) + \bar{\beta} C(y).$$

Finalmente, el Lema de Riesz implica que C es un isomorfismo isométrico conjugado. ■

Estos dos últimos resultados son de los más importantes dentro de la Teoría de los espacios de Hilbert. De ellos se sabe que

1. Todo espacio pre-Hilbert completo H es reflexivo. Esto significa que la inyección canónica de H en su bidual, vista en el teorema 17, es sobreyectiva (ver [14]).
2. Cualquier *forma sesquilineal* de H (i.e. una función $B : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ bilineal en la segunda entrada, conjugada lineal en la primera y acotada) es la composición del producto interno de éste con un operador acotado $T : H \rightarrow H$.
3. Para cada operador $T : H \rightarrow H$ existe un único operador $T^* : H \rightarrow H$ para el cual

$$\langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle, \quad \text{para cada } x, y \in H.$$

Este último corolario permite concebir los operadores autoadjuntos que el Teorema Espectral trata en su formulación, tal y como se verá más adelante. En el siguiente resultado se demuestra el apartado dos y luego se procede a realizar la construcción del operador descrito en el apartado tres.

Corolario 6 (Lema de Riesz para Formas Sesquilineales) Sean H un espacio de Hilbert

y $B: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ una función para la cual existe un $C \geq 0$ con la propiedad de que para cada $x, y, z \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$1. B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z),$$

$$2. B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x, z) + \bar{\beta} B(y, z),$$

$$3. |B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Se tiene la existencia de un único operador $A \in \mathcal{L}(H)$ para el cual

$$B(x, y) = \langle A(x), y \rangle, \text{ para todo } x, y \in H.$$

Demostración. Sea $x \in H$ arbitrario. Por hipótesis, la función $T_x: y \in H \mapsto B(x, y) \in \mathbb{C}$ es un elemento de H^* por lo que el lema de Riesz permite asegurar la existencia de un único $x' \in H$ para el cual $T_x = \langle x', \cdot \rangle$. Con esto, se puede definir la asignación

$$A: x \in H \mapsto x' \in H,$$

para la cual se cumple que si $y \in H$, $\langle A(x), y \rangle = T_x(y) = B(x, y)$.

Se comprueba que $A \in \mathcal{L}(H)$ en los siguientes dos apartados:

1. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle A(\alpha x + \beta y), \cdot \rangle = B(\alpha x + \beta y, \cdot) = \bar{\alpha} B(x, \cdot) + \bar{\beta} B(y, \cdot) = \bar{\alpha} \langle A(x), \cdot \rangle + \bar{\beta} \langle A(y), \cdot \rangle = \langle \alpha A(x) + \beta A(y), \cdot \rangle;$$

de lo cual se sigue que

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

2. Por el lema de Riesz,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_H = \sup_{\|x\|=1} \|T_x\|_{H^*} = \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_{\|y\|=1} |T_x(y)| \right) = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)|.$$

Como $|B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)| \leq \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} C \|x\| \|y\| = C.$$

Entonces $A \in \mathcal{L}(H)$ cumple con que $B(x, y) = \langle A(x), y \rangle$ para cualesquiera $x, y \in H$. Si existiese otro $T \in \mathcal{L}(H)$ con las propiedades anteriores, se tendría que

$$\langle T(x), y \rangle = B(x, y) = \langle A(x), y \rangle \text{ para todo } x, y \in H;$$

por lo que T sería igual a A . ■

Teorema 75 (*Existencia del Operador Adjunto*) Sean X y Y dos espacios de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene la existencia de un único $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, denominado operador adjunto de T , con la propiedad de que

$$\langle y, T(x) \rangle_Y = \langle T^*(y), x \rangle_X, \text{ para cualesquiera } x \in X, y \in Y.$$

Demostración. Para cada $y \in Y$ se define la función $f_y: x \in X \mapsto \langle y, T(x) \rangle_Y \in \mathbb{C}$; la cual es fácil comprobar como elemento de X^* . Entonces, el Lema de Riesz asevera la existencia de un único $u_y \in X$ para el cual $f_y = \langle u_y, \cdot \rangle_X$. Esto significa que para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $y \in Y$ existe un único $u_y \in X$ para el cual

$$\langle y, T(x) \rangle_Y = \langle u_y, x \rangle_X, \text{ para todo } x \in X. \quad (1.12)$$

Con la información anterior se puede definir el operador adjunto de T como la función

$$T^*: y \in Y \mapsto u_y \in X,$$

en donde para cada $y \in Y$, $u_y \in X$ es el único elemento para el cual la ecuación 1.12 se cumple para cualquier $x \in X$.

Sólo falta verificar que $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$. T^* es una transformación lineal ya que para cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$, $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle T^*(\alpha y_1 + y_2), x \rangle_X &= \langle \alpha y_1 + y_2, T(x) \rangle_Y = \bar{\alpha} \langle y_1, T(x) \rangle_Y + \langle y_2, T(x) \rangle_Y \\ &= \bar{\alpha} \langle T^*(y_1), x \rangle_X + \langle T^*(y_2), x \rangle_X = \langle \alpha T^*(y_1) + T^*(y_2), x \rangle_X. \end{aligned}$$

Por tanto, tiene sentido hablar de la norma de T^* en el sentido de la definición 2. Dicha norma,

por el lema de Riesz, cumple con que

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \sup_{\|y\|_Y=1} \|T^*(y)\| = \sup_{\|y\|_Y=1} \|f_y\|_{X^*} = \sup_{\|y\|_Y=1} \sup_{\|x\|_X=1} |\langle x, T(y) \rangle_Y|.$$

Al ser $|\langle y, T(x) \rangle_Y| \leq \|y\|_Y \|T(x)\|_Y$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 56), la igualdad anterior implica que

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sup_{\|y\|_Y=1} \sup_{\|x\|_X=1} \|y\|_Y \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\| = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Esto asegura que $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$, lo cual conlleva que $T^* \in \mathcal{L}(Y,X)$. ■

Teorema 76 (*Propiedades del Operador Adjunto*) Sean $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ y $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ dos espacios de Hilbert, y $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se tiene que

1. Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X) = (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$, $(TS)^* = S^*T^*$.
2. $(T^*)^* = T$.
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$.
4. La función $f : T \mapsto T^*$ es un isomorfismo isométrico conjugado entre los espacios $\mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathcal{L}(Y, X)$.
5. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es invertible si y solo si T^* también es invertible y en dicha situación $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
6. Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X) = (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Demostración. Sean $x \in X$, $y \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ elementos arbitrarios. Se tiene que

$$\langle y, T(x) \rangle_Y = \langle T^*(y), x \rangle_X = \langle y, (T^*)^*x \rangle_Y;$$

de manera que $(T^*)^* = T$. Además, si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X) = (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$,

$$\langle (ST)^*y, x \rangle_X = \langle y, (ST)x \rangle_X = \langle S^*(y), T(x) \rangle_X = \langle (T^*S^*)y, x \rangle_X;$$

por lo que $(ST)^* = T^*S^*$ en tal caso.

Para verificar los puntos 3 y 4, recuérdese que por el teorema pasado $\|T^*\|_{L(Y,X)} \leq \|T\|_{L(X,Y)}$. Como $(T^*)^* = T$; ese mismo teorema afirma que $\|T\|_{L(X,Y)} = \|(T^*)^*\|_{L(X,Y)} \leq \|T^*\|_{L(Y,X)}$; teniéndose así la igualdad entre la norma de un operador y su adjunto. Esto implica que la función f del punto 4 es una isometría conjugada lineal debido a que

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T + S)^*(y), x \rangle_X &= \langle y, (\alpha T + S)(x) \rangle_Y = \alpha \langle y, T(x) \rangle_Y + \langle y, S(x) \rangle_Y \\ &= \bar{\alpha} \langle T^*(y), x \rangle_X + \langle S^*(y), x \rangle_X = \langle \bar{\alpha} T^*(y) + S^*(y), x \rangle_X; \end{aligned}$$

de lo cual se infiere que

$$f(\alpha T + S) = \bar{\alpha} f(T) + f(S).$$

Corroborar que f es sobreyectiva es fácil debido a que para cada $P \in \mathcal{L}(Y, X)$, $P^* \in \mathcal{L}(X, Y)$ de modo que $f(P^*) = (P^*)^* = P$.

Si T resulta ser un operador invertible, se tiene que $I_X = I_X^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*$. Así, T^* es invertible y su inversa es $(T^{-1})^*$. Recíprocamente, si T es tal que T^* es invertible con inversa S , entonces $I_X = I_X^* = (ST^*)^* = TS^*$, implicándose que T es invertible con inversa S^* . De esto último se concluye que $(T^*)^{-1} = S = S^{**} = (T^{-1})^*$.

Por último, se destaca que si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X) = (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$, $T^* T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador con norma $\|T\|^2$ como consecuencia de que

$$\begin{aligned} \|T^* T\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\|=1} \|T^* T(x)\|_X = \sup_{\|x\|=1} \|T^*(T(x))\|_X \leq \sup_{\|x\|=1} \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|T(x)\|_Y \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2; \end{aligned}$$

y de que

$$\begin{aligned} \|T^* T\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|x\|=1} \|T^* T(x)\|_X = \sup_{\|x\|=1} \|T^* T(x)\|_X \|x\|_X \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle x, T^* T(x) \rangle_X| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_Y^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_Y \right)^2 = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2. \end{aligned}$$

■

Estas propiedades traen como consecuencia una estructura de C^* -álgebra en el espacio $\mathcal{L}(H)$ cuando H es un espacio de Hilbert. La involución dada asigna a cada operador acotado T su

operador adjunto T^* . Ésta es una de las C^* -álgebras que se advirtió en la sección pasada, y bajo ella se dan las nociones de operador autoadjunto y operador normal que generalizan a las que se tienen para transformaciones lineales definidas en $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Como es de esperar, un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es autoadjunto si $T = T^*$, normal si $TT^* = T^*T$ y unitario si $T^*T = TT^* = I$. Esta última noción coincide con la dada en la definición 58.

En lo que sigue, se discuten algunas propiedades acerca de los espectros de los operadores autoadjuntos y normales.

Lema 77 *Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, $\sigma(T) \subset W(T) := \overline{\{\langle x, T(x) \rangle : \|x\| = 1\}}$.*

Demostración. Supóngase que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus W(T)$. Si $d := \text{dist}(\lambda, W(T))$, el cual resulta ser un número positivo, para cualquier vector unitario $x \in H$ se sigue que

$$\begin{aligned} d &\leq |\lambda - \langle x, T(x) \rangle| = |\lambda \langle x, x \rangle - \langle x, T(x) \rangle| = |\langle x, \lambda x - T(x) \rangle| \\ &\leq \|\lambda x - T(x)\| \cdot \|x\| = \|(\lambda I - T)x\|; \end{aligned}$$

de manera que si $x \in X \setminus \{0\}$, $d\|x\| \leq \|(\lambda I - T)x\|$ por lo que el teorema 25 implica que el operador $T - \lambda I$ es inyectivo y que tiene una imagen cerrada.

Ahora, suponga que existe un vector unitario $x \in \text{Im}(\lambda I - T)^\perp$. Esto conlleva a que

$$0 = \langle x, (\lambda I - T)x \rangle = \lambda - \langle T(x), x \rangle,$$

implicando que existe un vector unitario x para el cual $\lambda = \langle T(x), x \rangle$, lo cual es imposible. En consecuencia,

$$\text{Im}(\lambda I - T) = \overline{\text{Im}(\lambda I - T)} = \text{Im}(\lambda I - T)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X,$$

por lo cual $\lambda I - T$ resulta ser una función biyectiva. Así, $\lambda \in \varphi(T)$. ■

Lema 78 *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Si T es un operador normal, entonces*

$$\|T(x)\| = \|T^*(x)\| \text{ para cualquier } x \in H$$

y T^ es inyectivo si y sólo si T lo es.*

Demostración. Para cada $x \in H$ se sigue que

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^* \circ T(x) \rangle = \langle x, T \circ T^*(x) \rangle = \langle T^*(x), T^*(x) \rangle = \|T^*(x)\|^2;$$

de manera que $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ implicando así que $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^*)$. ■

Teorema 79 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Se tiene que

1. Si T es autoadjunto, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
2. Si T es normal, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si existe una sucesión de vectores unitarios $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ para la cual $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$.

Demostración. Si T es autoadjunto, para todo $x \in H$ se tiene que $\overline{\langle x, T(x) \rangle} = \langle T(x), x \rangle = \langle T^*(x), x \rangle = \langle x, T(x) \rangle$; de manera que $W(T) \subset \mathbb{R}$ ya que este último es cerrado en $\mathbb{C}$. De esto, se concluye que $\sigma(T) \subset W(T) \subset \mathbb{R}$.

Ahora supóngase que T es normal y que $\lambda \in \sigma(T)$. Se demostrará la existencia de una sucesión que exhibe las características descritas en el inciso 2 de este teorema. Esto completará la demostración del mismo ya que la implicación recíproca del consecuente del mismo es una aplicación directa del teorema 45.

Por hipótesis, $T - \lambda I$ no es invertible por lo que no es inyectivo o no es sobreyectivo. Si no es inyectivo, existe un $x \in H$ unitario para el cual $(T - \lambda I)x = 0$. De esto, se sigue que la sucesión constante $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x, x, x, \dots\}$ es una sucesión de vectores unitarios para la cual $\|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$.

Si $T - \lambda I$ resulta ser inyectivo, se tiene que $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$. Como T es un operador normal, $T - \lambda I$ también lo es debido a que

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda}I) \\ &= TT^* - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + |\lambda|^2 I \\ &= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2 I \\ &= (T^* - \bar{\lambda}I)(T - \lambda I) \\ &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I). \end{aligned}$$

Entonces, en virtud del lema anterior, $\{0\} = \ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \bar{\lambda}I)$ dando lugar a que

$$\overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = \operatorname{Im}(T - \lambda I)^{\perp\perp} = \ker(T^* - \bar{\lambda}I)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

Por consiguiente, si $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ fuese cerrado, $\operatorname{Im}(T - \lambda I) = \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)}$ sería igual a H , dejando como consecuencia que $T - \lambda I$ sea una función sobreyectiva, lo cual no puede ser. Por ende, el operador $(T - \lambda I)^{-1}: \operatorname{Im}(T - \lambda I) \rightarrow H$ es biyectivo pero no acotado, ya que de serlo el teorema 25 conllevaría a que $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ fuese un conjunto cerrado. Esto implica que

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T - \lambda I)^{-1}(x)\| = +\infty,$$

por lo que se puede encontrar una sucesión de vectores unitarios $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \operatorname{Im}((T - \lambda I)^{-1})$ para la cual $\|(T - \lambda I)^{-1}(y_n)\| \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ dada por

$$x_n = \frac{(T - \lambda I)^{-1}y_n}{\|(T - \lambda I)^{-1}y_n\|}$$

está conformada por puros vectores unitarios y cumple con que

$$\|(T - \lambda I)x_n\| = \frac{\|y_n\|}{\|(T - \lambda I)^{-1}y_n\|} \rightarrow 0.$$

■

Se puede definir lo que es un operador autoadjunto sin necesidad del teorema 75. En efecto, se dice que un operador T definido en un espacio pre-Hilbert X es autoadjunto si para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $\langle x, T(y) \rangle_X = \langle T(x), y \rangle_X$. En este trabajo se optó por basar esta definición en la estructura que aportan las C^* -álgebras, debido a que esto permite inferir propiedades importantes acerca de tales operadores cuando son acotados y están definidos en espacios de Hilbert. Un ejemplo de esto es el punto 1 del teorema 45, el cual es generalizable a elementos autoadjuntos de cualquier C^* -álgebra tal y como se verá en el corolario 9 contenido en la última sección del siguiente capítulo.

Para el caso de un espacio de Hilbert H , la autoadjuntez de un operador es suficiente para que éste sea acotado.

Teorema 80 (Teorema de Hellinger-Toeplitz)

Sean H un espacio de Hilbert y $T: H \rightarrow H$ una transformación lineal. Si $\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$

para cada $x, y \in H$, entonces T es un operador acotado.

Demostración. En virtud del teorema de la gráfica cerrada (teorema 24), sólo es necesario demostrar que $\Gamma(T)$ es un subespacio cerrado en $H \times H$. Si $(\alpha, \beta) \in \overline{\Gamma(T)}$, de manera que existe una sucesión $\{(x_n, T(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma(T)$ que converge a (α, β) ; se tiene que para todo $z \in H$

$$\langle z, \beta \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle z, T(x_n) \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T(z), x_n \rangle = \langle T(z), \alpha \rangle = \langle z, T(\alpha) \rangle.$$

Esto último conlleva a que $T(\alpha) = \beta$ por lo que $(\alpha, \beta) = (\alpha, T(\alpha)) \in \Gamma(T)$. Así, $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$ implicándose así que este último conjunto es cerrado en $H \times H$. ■

Este teorema trae consigo algunas complicaciones técnicas en la Mecánica Cuántica; debido a la existencia de transformaciones lineales no acotadas, como el operador energía, para las cuales se requiere que se satisfaga la ecuación $\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ para todos los elementos de su dominio (para más detalles consultar [14] y [7]). Lo que se acaba de probar es que tal dominio no puede ser un espacio de Hilbert si se cumple tal propiedad. El remedio ante dicha situación es la restricción adecuada del dominio del operador no acotado en cuestión, a un subespacio apropiado de un espacio pre-Hilbert completo en donde el operador en cuestión si sea autoadjunto. Dicha selección es no trivial en la mayoría de aplicaciones y a menudo se dificulta la aritmética básica de los operadores no continuos, como la adición y composición de los mismos, como consecuencia de tener dominios restringidos. Aun así, la mayoría de los resultados y conceptos expuestos en este capítulo son generalizables a dichas transformaciones lineales, tal y como se verá en el capítulo 3 cuando se discutan estas cuestiones con más detalle.

1.4. Espacios de medida

La Forma de Multiplicación del Teorema Espectral se puede derivar de la primera versión del mismo mediante unas medidas con valores en $\mathbb{C}$, que se obtienen del Teorema de Riesz Markov en su versión compleja (teorema 123). Estas últimas se denominan medidas espectrales en la definición 128 y también son necesarias para probar la tercera versión del Teorema Espectral.

Debido a que las medidas se suelen definir como funciones con valores en $[0, +\infty]$ y no con valores en $\mathbb{C}$, se ha optado por hacer un repaso de los espacios de medida con valores complejos enfocado en los preliminares necesarios para enunciar el Teorema de Riesz-Markov. Un tratamiento

similar se realiza con los espacios medibles con el objetivo de exhibir una propiedad fundamental del conjunto de funciones medibles y acotadas $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ con dominio en un espacio métrico. La demostración de esta propiedad está basada en el lema VII.1.5 de [19] y todas las otras definiciones y proposiciones fueron obtenidas de [10], [14], [16] y [20].

A lo largo de esta sección se volverá a suponer que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definición 81 Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X si se cumple que

1. Si $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
2. Para cada colección numerable $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ se tiene que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}.$$

Si esta última condición solo es válida para uniones finitas, se dice que $\mathcal{A}$ es una álgebra. En ambos casos el par $(X, \mathcal{A})$ se denomina espacio medible y los elementos de $\mathcal{A}$ se conocen como conjuntos medibles o simplemente como medibles. Si $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ es una colección numerable de medibles disjuntos y $A = \bigcup \{A_i\}$, se dice que $\{A_i\}$ es una partición de A .

El inciso 1 hace que el inciso 2 sea equivalente a su análogo para intersecciones. A su vez, estos dos propician que la condición de que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ sea equivalente a que $X \in \mathcal{A}$, lo cual se vuelve equivalente a que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Dado un conjunto no vacío X , el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra de él y cualquier intersección arbitraria de σ -álgebras de X resulta en una σ -álgebra del mismo. Por tanto, para cada $A \subset \mathcal{P}(X)$ se define la σ -álgebra de X generada por A como

$$\sigma(A) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra de } X \text{ que tiene como subconjunto a } A\}.$$

En particular, si $(X, \mathcal{T}_X)$ es un espacio topológico, el conjunto $\sigma(\mathcal{T}_X)$ es conocido como la σ -álgebra de Borel generada por $\mathcal{T}_X$ y se denota como $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}_X)$ o simplemente como $\mathcal{B}(X)$ si la topología sobre el espacio X es clara. El espacio medible $(X, \mathcal{B}(X))$ es el que se trabajará en el presente escrito y en lo que sigue se darán algunas propiedades inherentes a él. Para ello, se mostrarán algunas relaciones entre las álgebras de conjuntos y las $\mathbb{K}$ -álgebras.

Lema 82 Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathbb{K}^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es una función}\}$. Si $\mathcal{A}$ contiene a las funciones constantes, $\mathcal{F} = \{S \subset X \mid \mathcal{X}_S \in \mathcal{A}\}$ es una álgebra de subconjuntos de X .

Demostración. $X \in \mathcal{F}$ ya que $\mathcal{X}_X = 1 \in \mathcal{A}$. Por tanto, para cada $E, F \in \mathcal{F}$ se sigue que $\mathcal{X}_{E^c} = 1 - \mathcal{X}_E \in \mathcal{A}$ al igual que $\mathcal{X}_{E \cap F} = \mathcal{X}_E \mathcal{X}_F$, por lo cual $E^c, E \cap F \in \mathcal{F}$. ■

Definición 83 Sean X un conjunto no vacío y $S \subset \mathbb{K}^X$. Se dice que S es cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas si para toda sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ uniformemente acotada se tiene que $f \in S$ si $f_n \rightarrow f$ puntualmente.

Lema 84 Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathbb{K}^X$. Si $\mathcal{A}$ contiene a las funciones constantes y es cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas, entonces $\mathcal{F} = \{S \subset X \mid \mathcal{X}_S \in \mathcal{A}\}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X .

Demostración. Por la proposición pasada, $\mathcal{F}$ es una álgebra de subconjuntos de X por lo que sólo queda asegurar que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Para tal objetivo defínanse los conjuntos

$$E_n = \bigcap_{k=1}^n A_k, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como $E_{n+1} \subset E_n$, $\bigcap_{k=1}^n E_k = \bigcap_{k=1}^n A_k$ y

$$E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Además, $\|\mathcal{X}_{E_n}\|_\infty = 1$ de manera que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{X}_{E_n}\|_\infty = 1$; y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_{E_n}(x) = \mathcal{X}_E(x)$ para todo $x \in X$. Esto implica, por las hipótesis sobre $\mathcal{A}$, que $\mathcal{X}_E \in \mathcal{A}$ trayendo como consecuencia que

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

■

Al igual que las estructuras algebraicas y los espacios topológicos, los espacios medibles cuentan con unos morfismos que se definen de manera análoga a las funciones continuas.

Definición 85 Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(\Omega, \mathcal{F})$ un par de espacios medibles. Una función $f: X \rightarrow \Omega$ es medible si $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para cada $A \in \mathcal{F}$. En particular, si los pares anteriores corresponden a

espacios topológicos asociados a sus respectivas σ -álgebras de Borel, se dice que f es una función boreliana.

Ahondando más en este caso, para cada espacio topológico X se definen los conjuntos

$$B(X, \mathbb{K}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X) \text{ para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{K})\},$$

$$B_b(X, \mathbb{K}) := \{f \in B(X, \mathbb{K}) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

Los elementos de estos conjuntos son conocidos como funciones borelianas reales o complejas segun corresponda.

Es fácil comprobar que una función $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ es boreliana si y solo si $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ para cada $A \subset \mathbb{K}$ abierto. En consecuencia, toda función $f \in C(X, \mathbb{K})$ es boreliana por lo que $C(X, \mathbb{K}) \subset B(X, \mathbb{K})$ al igual que $C_b(X, \mathbb{K}) \subset B_b(X, \mathbb{K})$. En general, esta última contención es propia debido a la existencia de espacios topológicos X para los cuales $C_b(X, \mathbb{K})$ no es cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas, mientras que $B_b(X, \mathbb{K})$ siempre cumple la propiedad anterior para todo espacio X .

Al igual que $C_b(X, \mathbb{K})$, $B_b(X, \mathbb{K})$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach con la norma infinito, y por lo comentado en el parrafo anterior, tiene como subálgebra de Banach a $C_b(X, \mathbb{K})$ (consultar [20] para más detalles). Más aun, se tiene que si X es un espacio métrico, entonces $B_b(X, \mathbb{K})$ es el conjunto más pequeño que contiene a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que resulta ser cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas. Se demostrará este hecho con el apoyo del siguiente resultado:

Lema 86 *Sea X un espacio métrico. Se tiene que $B_b(X, \mathbb{K})$ es la álgebra más pequeña que contiene a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que resulta ser cerrada bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas.*

Demostración. Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra que contiene como subálgebra a $C_b(X, \mathbb{K})$. Hay que probar que si A es un conjunto cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas, entonces $B_b(X, \mathbb{K}) \subset A$.

Como $C_b(X, \mathbb{K})$ es subálgebra de A , este último contiene a las funciones constantes por lo que al ser cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas, $\mathcal{F} = \{S \subset X \mid \chi_S \in A\}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X (lema 84). Por consiguiente, se demostrará que esta σ -álgebra contiene a los borelianos de X verificando que A contiene a las funciones características de los conjuntos cerrados de éste.

Sea $F \subset X$ un cerrado arbitrario. Si $F = X$, se tiene que $\mathcal{X}_F = 1 \in C_b(X, \mathbb{K}) \subset A$. Si F es un subconjunto propio de X , para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$F_n := \{x \in X \mid \text{dist}(x, F) \geq 1/n\}$$

y la función $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{\text{dist}(x, F_n)}{\text{dist}(x, F_n) + \text{dist}(x, F)}.$$

Las funciones previamente definidas están bien definidas, tienen norma menor o igual a 1 y son continuas ya que $F \cap F_n = \emptyset$, por lo que su denominador nunca es 0 y siempre es, al igual que su numerador, un elemento de $C_b(X, \mathbb{K})$. Esto conlleva a que $f_n \in A$ si $n \in \mathbb{N}$.

Se observa que $f_n \rightarrow \mathcal{X}_F$ puntualmente. Si $x \in F$, $\text{dist}(x, F) = 0$ y $\text{dist}(x, F_n) > 0$ por lo cual $f_n(x) = 0$, conllevando a que $f_n(x) \rightarrow 0 = \mathcal{X}_F(x)$. Si $x \notin F$, $\text{dist}(x, F) > 0$ dando lugar a que $\text{dist}(x, F) \geq 1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Al ser

$$n < n+1, \text{ se tiene que } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

de manera que $x \in F_m$ para todo $m \geq n$, lo cual indica que $f_m(x) = 0$ si $m \geq n$ y, en consecuencia con lo anterior, que $f_n(x) \rightarrow 0 = \mathcal{X}_F(x)$. Por consiguiente, $\mathcal{X}_F \in A$ por ser el límite puntual de una sucesión uniformemente acotada contenida en éste.

Lo anterior implica que $\mathcal{F}$ contiene a los conjuntos cerrados de X por lo que también contiene a la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$. De esto, se tiene que A contiene a las funciones características de conjuntos borealianos y combinaciones lineales de éstas: funciones simples. Como toda función borealiana y acotada es el límite puntual de una sucesión uniformemente acotada de funciones simples, se implica que $B_b(X, \mathbb{K}) \subset A$. ■

Teorema 87 *Sea X un espacio métrico. Se tiene que $B_b(X, \mathbb{K})$ es el conjunto más pequeño que contiene a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que resulta ser cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas.*

Demostración. Sea E la intersección de todos los conjuntos que contienen a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que son cerrados bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas. Se sigue que E contiene a

$C_b(X, \mathbb{K})$ y que es cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas. Se mostrará que E es una $\mathbb{K}$ -álgebra. Para ello, considérese un $f \in E$ y defínase el conjunto

$$E_f := \{g \in E \mid f + g \in E\}.$$

Si f es continua, $C_b(X, \mathbb{K}) \subset E_f$. Además, si se supone la existencia de una sucesión uniformemente acotada $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E_f$ que converge puntualmente a una función g , se llega a que $\{f + g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f + g$ puntualmente y que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f + g_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\| < +\infty;$$

de manera que $f + g \in E$ por lo que $g \in E_f$. Por ende, $E_f = E$ debido a que es un subconjunto de E que contiene a $C_b(X, \mathbb{K})$ y es cerrado bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas. Si f no es continua, el aserto anterior garantiza que $C_b(X, \mathbb{K}) \subset E_f$ y un argumento análogo a él conlleva a que en este caso también $E = E_f$. Como consecuencia de esto, se tiene que si $f \in E$, entonces $f + g \in E$ para cada $g \in E$.

De manera análoga se prueba que si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in E$, λf y $fg \in E$ por lo que este último es una $\mathbb{K}$ -álgebra que contiene a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que es cerrada bajo límites puntuales de funciones uniformemente acotadas. En consecuencia, el lema anterior garantiza que $B_b(X, \mathbb{K}) \subset E$. Como éste es la intersección de todos los conjuntos que contienen a $C_b(X, \mathbb{K})$ y que son cerrados bajo límites puntuales de sucesiones uniformemente acotadas, se tiene que todos estos contienen a $B_b(X, \mathbb{K})$. ■

El espacio $B_b(X, \mathbb{C})$ juega un rol central en la formulación del Teorema Espectral en su Forma del Cálculo Funcional Boreliano, y el resultado que se acaba de demostrar permitirá derivar muchas propiedades de él mediante la verificación de las mismas para $C_b(X, \mathbb{C})$. Esto facilitará enormemente la prueba de que existe un único Cálculo Funcional Boreliano para cada operador autoadjunto que está definido en un Espacio de Hilbert.

En lo que sigue, se hablará de los otros dos pilares de la Teoría de la Medida: Espacios de Medida e Integral de Lebesgue.

Definición 88 (*Espacios de medida*) Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ es una premedida, o premedida compleja, asociada a $(X, \mathcal{A})$ si

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Para cualquier sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ con $\cup\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Si μ cumple esta propiedad, se dice que es σ -aditiva. Además, si μ sólo toma valores reales se dice que es una premedida real y si bajo este supuesto no toma valores negativos, se dice que es una premedida real positiva. A la tripleta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le conoce como espacio de premedida y si $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra, se dice que μ es una medida y que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

Nótese que en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, la definición anterior no permite que un conjunto medible tenga medida infinita positiva; lo cual contrasta con la definición dada en la mayoría de los textos básicos de Análisis ([10] y [16] por ejemplo) en los cuales una medida es considerada como una función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ σ -aditiva que anula al vacío. En el presente trabajo esas funciones serán conocidas como *medidas positivas no finitas* si $\mu^{-1}(\{+\infty\}) \neq \emptyset$.

Hay tres razones por las cuales se decidió no adoptar los términos convencionales para las definiciones pasadas. La primera de ellas es que sería complicado definir una medida que tome valores complejos e infinitos por el hecho de tener que lidiar con la suma de números imaginarios con números no finitos. Esto dificultaría enormemente enunciar la condición de σ -aditividad, por ejemplo. La segunda es el hecho de que los espacios de medida real positiva son suficientes para enunciar y demostrar el Teorema Espectral para espacios de Hilbert separables, lo cual es suficiente para las aplicaciones físicas del mismo (ver [4], [7] y [14] para más detalles). Es la generalización de este teorema a espacios de Hilbert no separables la que necesita considerar espacios de medida positiva no necesariamente finita. O sea, tripletas de la forma $(X, \mathcal{A}, \mu)$, en donde $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible, $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra y $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ es una función σ -aditiva que anula el vacío, independiente de que exista o no un medible con medida infinita. A lo largo de este trabajo estas medidas serán conocidas como *medidas positivas*.

Finalmente, si la definición de medida evita que éstas tomen valores infinitos, entonces el conjunto que se definirá a continuación adquiere una estructura natural de $\mathbb{K}$ -espacio vectorial:

Definición 89 Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mathcal{F}$ una σ -álgebra. Se define el conjunto

$$m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K}) := \{\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{K} \mid \mu \text{ es una medida asociada a } (\Omega, \mathcal{F})\}.$$

La definición 88 confirma que $m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$ tiene estructura de $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, bajo las operaciones usuales, por el hecho de que combinaciones lineales de medidas resultan en medidas. Otra ventaja de esta definición es que hace que cualquier función $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ σ -aditiva sea una medida. Esto, a su vez, propicia que toda medida sea aditiva. O sea, que la medida de cualquier unión finita disjunta sea la suma de las medidas individuales. Si μ es una medida positiva, lo anterior conlleva a que μ sea monótona y que, por tanto, $\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{F}\} \subset [0, \mu(X)]$ dando lugar a que μ sea una medida acotada si sólo toma valores reales. Esta última afirmación implica que cualquier medida $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ también es acotada, tal y como se probará en el siguiente teorema cuando se le dote de una norma al $\mathbb{K}$ -espacio $m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$. Para ello, es necesario el siguiente lema:

Lema 90 Si $\{z_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, entonces existe un $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Demostración. Sean $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $R(z_k) = \max(0, \operatorname{Re}(z_k))$. Al ser $[0, 2\pi]$ un conjunto compacto, la función continua $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \sum_{k=1}^n R(e^{ix} z_k)$$

alcanza su valor máximo en algún $\theta \in [0, 2\pi]$. En consecuencia, se tiene que

$$2\pi F(\theta) \geq \int_0^{2\pi} F(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} R(e^{ix} z_k) dx = \sum_{k=1}^n |z_k| \int_0^\pi \sin(x) dx = \sum_{k=1}^n 2|z_k|,$$

lo cual da cabida a que $F(\theta) \geq \pi^{-1} \sum_{k=1}^n |z_k|$. Por lo tanto, si $S(\theta) := \{k \mid R(e^{i\theta} z_k) > 0\}$, se sigue que

$$\left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S(\theta)} e^{i\theta} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{k \in S(\theta)} e^{i\theta} z_k = \sum_{k=1}^n R(e^{i\theta} z_k) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

■

Definición 91 Sean Ω un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ -álgebra de éste. Para cada $\mu \in m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ se define su variación como la función $|\mu|: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)| \mid \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \text{ es una colección disjunta para la cual } \cup A_i = A \right\}.$$

Aunado a esto, se define la variación total de μ como $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$.

Teorema 92 Para cada $\mu \in m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ la variación $|\mu|$ es la medida real positiva mas pequeña para la cual $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ para cada $A \in \mathcal{F}$.

Demostración. Sean $E \in \mathcal{F}$ y $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una partición de éste. Si para cada $i \in \mathbb{N}$ se selecciona una partición $\{A_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de E_i , entonces $\{A_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ también resulta ser una partición de E . De esto, se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{+\infty} |\mu(A_{i,j})| \leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |\mu(A_{i,j})| \leq |\mu|(E),$$

de modo que $\sum_{i=1}^n |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)$, lo cual conlleva que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E)$.

Para probar la otra desigualdad considérese cualquier partición $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de E . Se sigue que para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$, $\cup\{A_j \cap E_i\}_{i \in \mathbb{N}} = A_j$ y $\cup\{A_j \cap E_i\}_{j \in \mathbb{N}} = E_i$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu(A_j)| &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_j \cap E_i) \right| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu|(E_i); \end{aligned}$$

lo cual indica que $|\mu|(E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu|(E_i)$ y que, por la desigualdad anterior, $|\mu|$ es una medida positiva.

Para probar que $|\mu|$ es finita, se procede por contradicción suponiendo la existencia de un $E \in \mathcal{F}$ con $|\mu|(E) = +\infty$. Si $t = \pi(1 + |\mu|(E)|)$, entonces $|\mu|(E) > t$ por lo que existe una partición $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de E con la propiedad de que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu(E_i)| \geq \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > t$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Si se aplica el lema anterior a la colección $\{\mu(E_i)\}_{i=1}^n$, se llega a la existencia de un $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$\left| \sum_{j \in S} \mu(E_j) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| > \frac{t}{\pi} > 1.$$

Por ende, si se definen los medibles $A_1 := \cup\{E_j\}_{j \in S}$ y $B_1 := E \setminus A_1$, entonces

$$|\mu(B_1)| = |\mu(E) - \mu(A_1)| \geq |\mu(A_1)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

Se ha partido a E en dos conjuntos disjuntos A_1 y B_1 con $|\mu(A_1)| > 1$ y $|\mu(B_1)| > 1$. Al ser E de medida $|\mu|$ infinita, alguno de esos medibles también debe tener medida $|\mu|$ infinita. Supóngase que ese medible es B_1 ; al realizar el proceso anterior en éste, se obtiene una partición $\{A_2, B_2\}$ del mismo con $|\mu(A_2)| > 1$ y $|\mu|(B_2) = +\infty$. Se vuelve a repetir el proceso en B_2 para obtener una partición $\{A_3, B_3\}$ de éste con $|\mu(A_3)| > 1$ y $|\mu|(B_3) = +\infty$. Realizando lo anterior de manera inductiva se obtiene una sucesión $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de medibles disjuntos con la propiedad de que $|\mu(A_i)| > 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra, la σ -aditividad de μ indica que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right),$$

de modo que $\mu(A_i) \rightarrow 0$, lo cual es una contradicción a lo anteriormente dicho.

Finalmente, para corroborar la propiedad minimal de $|\mu|$, considérese una medida real positiva $m: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(A) \geq |\mu(A)|$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Si $E \in \mathcal{F}$ y $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ resulta ser una partición de este, se llega a que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(E_n)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n) = m(E).$$

De esto, se concluye que $|\mu|(E) \leq m(E)$.

■

El hecho de que $|\mu|$ sea minimal entre las medidas $m \in m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$ que satisfacen que $|\mu(E)| \leq m(E)$ para cada $E \in \mathcal{F}$; trae como consecuencia directa una estructura de $\mathbb{K}$ -espacio normado en $m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$ mediante la variación total.

Corolario 7 *Si Ω es un conjunto y $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra de éste, entonces para cada $\mu_1, \mu_2 \in m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$ se tiene que*

1. $\mu_1 = 0$ si y sólo si $|\mu_1| = 0$,
2. $|\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$,

3. $|\alpha\mu_1| = |\alpha||\mu_1|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Por consiguiente, la variación total $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ es una norma en $m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{K})$.

La variación de una medida permite definir la integración de una función medible compleja con respecto a una medida compleja de una manera muy natural. Como antecedente de eso, se define la integral de una función de tal tipo respecto a una medida positiva apelando a las integrales de su parte real e imaginaria. Tan sólo es necesario que dichas integrales sean finitas.

Definición 93 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Si $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representan la parte real e imaginaria de f , respectivamente, se define la integral de f sobre cualquier medible $E \subset \Omega$ respecto a μ como

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f_1 \, d\mu + i \int_E f_2 \, d\mu;$$

siempre que ambas integrales sean finitas. En tal caso, se dice que f es integrable.

Dada una medida compleja μ , su parte real e imaginaria son medidas reales para las cuales $\mu = \operatorname{Re}(\mu) + i\operatorname{Im}(\mu)$. A su vez, $\operatorname{Re}(\mu)$ y $\operatorname{Im}(\mu)$ pueden expresarse como una diferencia de dos medidas reales positivas de una manera canónica.

Definición 94 Sean Ω un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ -álgebra de éste. Si $\mu \in m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$, se definen su parte positiva y su parte negativa, respectivamente, como las medidas

$$\mu^+ := \frac{|\mu| + \mu}{2}, \quad \mu^- := \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Nótese que estas dos medidas reales positivas cumplen con que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Esto concuerda con la descomposición de un número real como resta de dos números positivos; por lo mismo, $|\mu|$ se puede interpretar como “el valor absoluto de μ ”, de ahí la motivación de su notación.

Con esta descomposición de medidas reales ya se puede explicar, de una manera razonable y esperada, lo que se entiende por integración de funciones medibles complejas respecto a medidas complejas.

Definición 95 Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida compleja y $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Si $\mu_1, \mu_2: X \rightarrow \mathbb{R}$ representan la parte real e imaginaria de μ , respectivamente, se define la integral

de f sobre cualquier medible $E \subset X$ respecto a μ como

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f \, d\mu_1^+ - \int_E f_2 \, d\mu_1^- + i \int_E f \, d\mu_2^+ - i \int_E f_2 \, d\mu_2^-;$$

siempre que las 4 integrales sean finitas. En tal caso, se dice que f es integrable sobre E con respecto a μ .

Es fácil constatar que la combinación lineal de funciones integrables es una función integrable como consecuencia de que la integral previamente definida separa sumas y saca escalares. Esto da lugar a una gran cantidad de $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales en donde la integral funge como una transformación lineal.

Definición 96 Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida compleja y $E \in \mathcal{F}$, para cada $p \in [1, +\infty)$ se define el conjunto

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K}) := \{f : E \rightarrow \mathbb{K} \mid |f|^p \text{ es una función integrable}\}.$$

Analogamente, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva, se define el espacio $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$ de igual manera.

Una condición necesaria y suficiente para que la potencia p -ésima de una función medible $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ sea integrable es que $|f|^p$ también lo sea (ver [14]). La ventaja de considerar la integración de la función anterior en la definición que se acaba de dar es la visualización de una norma natural para dicho espacio. Lo ideal sería que la norma de una función $f \in \mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu)$ fuese la raíz p -ésima de la integral de $|f|^p$. Lamentablemente, eso no siempre es posible puesto que no hay garantía de que la integral de una función no negativa resulte en un valor no negativo si se integra respecto a una medida que no sea positiva; ni de que la integral de una función no nula sea diferente de 0. Para resolver estos problemas, en vez de intentar normar a $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$ para cualquier medida μ , se va a normar un espacio cociente del mismo cuando μ sea una medida positiva. La construcción de ese cociente se hará identificando funciones con integrales iguales mediante el siguiente criterio:

Definición 97 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Si P es una proposición que se puede enunciar para los puntos de Ω , se dice que P es cierta para casi todo $x \in \Omega$ respecto a μ o que es

cierta $\mu - c.t.p$ en Ω si el conjunto

$$\{x \in \Omega \mid P(x) \text{ es falso} \}$$

es un subconjunto de algún conjunto de medida cero $E \in \mathcal{F}$.

Dos funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dicen ser iguales $\mu - c.t.p$ si $f(x) = g(x)$ $\mu - c.t.p$ en Ω .

Teorema 98 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva y $E \in \mathcal{F}$. Si $f_1, f_2, g_1, g_2 : E \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones para las cuales $f_1 = f_2$ $\mu - c.t.p$ y $g_1 = g_2$ $\mu - c.t.p$, entonces

$$f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \quad \mu - c.t.p, \quad f_1 g_1 = f_2 g_2 \quad \mu - c.t.p \quad \text{y} \quad \alpha f_1 = \alpha f_2 \quad \mu - c.t.p \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Más aún, si $f, g : E \rightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones integrables, $f = g$ $\mu - c.t.p$ si y sólo si

$$\int_E |f - g| d\mu = 0.$$

Demostración. Estas propiedades son fáciles de demostrar. Las primeras cuatro se encuentran en [20] y la última se menciona en [14] y [10]. ■

La noción anterior induce la siguiente relación de equivalencia en el $\mathbb{K}$ -espacio $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$: $f \sim g$ si $f = g$ $\mu - c.t.p$ con respecto a E . El teorema anterior indica que esta relación respeta sumas y producto por escalares, y que la integral de una función f sólo es cero cuando $f = 0$ $\mu - c.t.p$. Con esta información el cociente discutido previo a la definición 97 ya puede ser construido.

Teorema 99 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva, $p \in [1, +\infty)$, $E \in \mathcal{F}$ y $\sim$ la relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$ del parrafo anterior. El conjunto

$$L^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K}) := \frac{\mathcal{L}^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})}{\sim}$$

es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial cociente que adquiere una estructura de $\mathbb{K}$ -espacio de Banach mediante la norma

$$\| [f] \|_p := \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.13)$$

Demostración. La demostración puede ser consultada en [14]. ■

Nótese que los elementos de $L^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$ no son funciones f , sino que son clases de equivalencia de funciones $[f]$ que son iguales en casi todas partes. Aun así, a lo largo de este trabajo se hará referencia a los elementos de los espacios L^p como funciones f con el fin de economizar lenguaje y notación. En este contexto, los valores particulares $f(x)$ que puede tomar una función que es p -integrable carecen de importancia; y dos funciones f, g que sean iguales en L^p son, a priori, sólo iguales en casi todo punto.

En el caso particular de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, solamente para $p = 2$ se tiene que $L^p(E, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert. En tal caso el producto interno está dado por

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_E \bar{f} g \, d\mu.$$

En cierto sentido se cumple el recíproco de lo anterior ya que, salvo isomorfismo isométrico, los únicos espacios de Hilbert son los espacios L^2 .

Es posible extender la definición 96 para el caso $p = +\infty$ apelando a la siguiente definición:

Definición 100 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. El supremo esencial de una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ se define como

$$\text{ess sup}_\mu(f) := \inf \left\{ \sup_{x \in E} |f(x)| \mid E \in \mathcal{F} \text{ y } \mu(\Omega \setminus E) = 0 \right\}.$$

En base a ello, se define el conjunto

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es medible y } \text{ess sup}_\mu(f) < +\infty\}$$

y su conjunto cociente

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K}) := \frac{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})}{\sim},$$

en donde $f \sim g$ en $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{K})$ si $f = g$ μ -c.t.p.

Es fácil observar que los conjuntos $\mathcal{L}^\infty$ tienen estructura de $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales bajo las operaciones usuales. Por el teorema 98, los cocientes L^∞ heredan dicha estructura de $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y de acuerdo a [4] y [14], se vuelven espacios de Banach bajo la norma $\|f\|_\mu := \text{ess sup}_\mu(f)$.

Al igual que para $p \in [1, +\infty)$, para $p = +\infty$ también se referirán a los elementos de $\mathcal{L}^\infty$ como funciones y no como clases de equivalencias. Si se quieren basar estos espacios en algún $E \in \mathcal{F} \setminus \{\Omega\}$, sólo hay que considerar la σ -álgebra $\mathcal{F}_E := \{A \cap E \mid A \in \mathcal{F}\}$ y la medida $\mu|_{\mathcal{F}_E}$ en las definiciones que se han dado.

Los espacios $\mathcal{L}^\infty$ admiten una estructura natural de $\mathbb{K}$ -álgebras mediante la multiplicación usual de funciones. Por el teorema 98, esto induce una estructura de $\mathbb{K}$ -álgebra de Banach en los espacios L^∞ . Más aún, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, estos últimos son C^* -álgebras mediante la conjugación compleja de funciones. En lo que sigue, se definirá un tipo de espacio de medida positiva en donde $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ resulta ser una C^* -álgebra isomorfa a una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra $\mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}))$.

Definición 101 (*Espacio de medida positiva semifinita*) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Si para cada $E \in \mathcal{F}$ con medida positiva existe un $F \subset E$ medible con medida finita positiva, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva semifinita. Más aún, si existe una colección $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de medibles con medida finita para la cual $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva σ -finita.

La definición que se mostrará a continuación se encuentra en [14], [3] y [4], y en estos últimos dos se puede corroborar el teorema que le sigue.

Definición 102 Dado un espacio de medida positiva $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, para cada función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se define el subespacio

$$D(T_f) := \{g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) \mid fg \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})\}$$

para definir el operador de multiplicación

$$T_f: g \in D(T_f) \mapsto fg \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}).$$

Teorema 103 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva semifinita. Se tiene que el operador de multiplicación T_f es acotado si y sólo si $\|f\|_\mu < +\infty$. En ambos casos se tiene que $\|T_f\| = \|f\|_\mu$ y que $\overline{D(T_f)} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$.

Demostración. Para cada $E \in \mathcal{F}$ con complemento de medida cero y $g \in D(T_f)$ se sigue que

$$\|T_f(g)\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 |g|^2 d\mu = \int_E |f|^2 |g|^2 d\mu \leq \sup_{x \in E} |f(x)|^2 \int_E |g|^2 d\mu = \sup_{x \in E} |f(x)|^2 \|g\|_{L^2}^2.$$

Por tanto, $\|T_f\| \leq \sup_{x \in E} |f(x)|$ para cada $E \in \mathcal{F}$ con complemento de medida cero. Por consiguiente, $\|T_f\| \leq \|f\|_{\mu} \leq +\infty$; lo cual indica que el operador T_f es acotado si esta última desigualdad es estricta.

La desigualdad anterior prueba la otra desigualdad buscada si $\|f\|_{\mu} = 0$. Por tanto, sólo falta verificar esta última cuando $\|f\|_{\mu} > 0$. Si dicha norma es finita, se fija un $\epsilon \in (0, \|f\|_{\mu})$ y se define el conjunto $E := \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \|f\|_{\mu} - \epsilon\}$. Este medible necesariamente debe tener medida positiva ya que de no ser así,

$$\|f\|_{\mu} \leq \sup_{x \in E^c} |f(x)| \leq \|f\|_{\mu} - \epsilon, \quad (1.14)$$

lo cual no puede ser. Por consiguiente, la semifinitud de μ implica la existencia de un medible $F \subset E$ con medida finita positiva. Así, $g := \chi_F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) = D(T_f)$ y se verifica que

$$\|T_f(g)\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 |g|^2 d\mu = \int_F |f|^2 |g|^2 d\mu \geq (\|f\|_{\mu} - \epsilon)^2 \int_F |g|^2 d\mu = (\|f\|_{\mu} - \epsilon)^2 \|g\|_{L^2}^2. \quad (1.15)$$

Esto implica que

$$\|T_f\| \geq \|f\|_{\mu} - \epsilon$$

para cada $\epsilon \in (0, \|f\|_{\mu})$ por lo que $\|T_f\| = \|f\|_{\mu}$ en virtud de la desigualdad anterior.

En el caso de que $\|f\|_{\mu} = +\infty$, para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ el medible $E_{\epsilon} := \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \epsilon\}$ debe de tener medida positiva. Si eso no fuese así, para algún $\epsilon > 0$ se cumpliría que

$$\|f\|_{\mu} \leq \sup_{x \in E_{\epsilon}^c} |f(x)| \leq \epsilon,$$

lo cual no puede ser. La semifinitud de μ vuelve a implicar la existencia de un medible $F \subset E_{\epsilon}$ con medida finita positiva para el cual $g_{\epsilon} := \chi_F \in D(T_f)$ y

$$\|T_f(g_{\epsilon})\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 |g_{\epsilon}|^2 d\mu = \int_F |f|^2 |g_{\epsilon}|^2 d\mu \geq \epsilon^2 \int_F |g_{\epsilon}|^2 d\mu = \epsilon^2 \|g_{\epsilon}\|_{L^2}^2. \quad (1.16)$$

De esto, se tiene que

$$\|T_f(g_\epsilon)\|_{L^2} \geq \epsilon \|g_\epsilon\|_{L^2}. \quad (1.17)$$

En consecuencia, T_f no es un operador acotado si $\|f\|_\mu = +\infty$.

Finalmente, para corroborar que para cada $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medible $D(T_f)$ es denso en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, se selecciona cualquier elemento g de este último y se define para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$E_n := \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq n\}$$

y la función $g_n := g \chi_{E_n}$. La sucesión $\{g_n\} \subset D(T_f)$ y converge puntualmente a g . Por tanto, al ser $|g_n| \leq |g|$, el teorema de la convergencia dominada permite concluir que $g_n \rightarrow g$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. ■

Corolario 8 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva semifinita. Se tiene que la función

$$T: f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) \mapsto T_f \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}))$$

es un $*$ -homomorfismo que preserva normas.

Demostración. Por el teorema pasado y el teorema 98 se implica que T es una función bien definida que preserva normas. Sólo falta corroborar que T es un $*$ -homomorfismo.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ elementos arbitrarios. Se verifica que

1. $T_{\alpha f_1 + f_2}(g) = (\alpha f_1 + f_2)g = \alpha f_1 g + f_2 g = \alpha T_{f_1}(g) + T_{f_2}g.$
2. $T_{f_1 f_2}(g) = (f_1 f_2)g = f_1(f_2 g) = T_{f_1}(f_2 g) = T_{f_1}(T_{f_2}(g)) = T_{f_1} \circ T_{f_2}(g).$
3. $T_1(g) = 1g = g.$

Además, se tiene que para cada $h \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$

$$\langle T_{f_1}(g), h \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} \overline{f_1} g h \, d\mu = \int_{\Omega} \overline{g} \overline{f_1} h \, d\mu = \langle g, T_{\overline{f_1}}(h) \rangle_{L^2};$$

de manera que $T_f^* = T_{\overline{f}}$. Por lo tanto, T es un $*$ -isomorfismo entre la C^* -álgebra $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y una C^* -subálgebra de la C^* -álgebra $\mathcal{L}(L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}))$. ■

Una consecuencia de este resultado es que para cada $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, $\sigma_{L^\infty}(f) = \sigma_{\mathcal{L}(L^2)}(T_f)$ si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva semifinita. A continuación se caracterizará dicho espectro con ayuda de las medidas “Pushforward”: para cada función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ considérese la medida $m_f: \mathcal{B}(\mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty]$ dada por

$$m_f(A) := m(f^{-1}(A)).$$

De acuerdo a [4], si $f = g$ m -c.t.p, entonces $m_f = m_g$; y siempre existe un abierto de medida m_f -nula maximal como corolario del siguiente resultado:

Lema 104 *Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Para cada medida positiva $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{K}) \rightarrow [0, +\infty]$ se cumple que la unión arbitraria de abiertos de medida cero es un abierto de medida cero.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de abiertos de $\mathbb{K}$ con medida nula. Como $\mathbb{K}$ cumple el segundo axioma de numerabilidad, existe una sucesión de abiertos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para la cual

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n. \quad (1.18)$$

Como cada B_n cumple la propiedad de Lindelöf, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una colección numerable $\{A_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \{A_i\}_{i \in I}$ que cubre a B_n . En consecuencia,

$$0 \leq \mu(B_n) \leq \mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{nm}\right) \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_{nm}) = 0.$$

El mismo razonamiento aplicado a la expresión 1.18 implica que $\mu(A) = 0$. ■

Una consecuencia inmediata de este resultado es que el medible que se definirá a continuación tiene medida total:

Definición 105 *Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{K}) \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida positiva, se define su soporte como*

$$\text{supp}(\mu) := \mathbb{K} \setminus \bigcup \{A \subset \mathbb{K} \text{ abierto} \mid \mu(A) = 0\}.$$

Aunado a ello, si m_f es una medida “Pushforward”, se dice que $\text{supp}(m_f)$ es el rango esencial de f .

Dados un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, m)$ y una función medible $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, es fácil confirmar que un número complejo λ pertenece a $\text{supp}(m_f)$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$

$$m(\{p \in X : |f(p) - \lambda| < \epsilon\}) > 0.$$

Más aún, si $(X, \mathcal{A}, m)$ es un espacio de medida positiva semifinita, λ cumple la última propiedad anterior si y sólo si pertenece a $\sigma(T_f)$. La prueba que se dará de este aserto se encuentra en [4] para operadores T_f acotados, y en este escrito se generalizará para operadores no acotados considerando los preliminares del capítulo 3. El lector no familiarizado con estos puede seguir la siguiente prueba para el caso acotado y generalizarla al caso no acotado cuando sea pertinente.

Teorema 106 *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida positiva semifinita, para cada función medible $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se sigue que $\text{supp}(m_f) = \sigma(T_f)$.*

Demostración. Si $\lambda \notin \text{supp}(m_f)$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $m(\{p \in X : |f(p) - \lambda| < \epsilon\}) = 0$. Por consiguiente, $|f(p) - \lambda| \geq \epsilon$ para casi todo punto con respecto a m_f , por lo que se puede definir la función $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(p) = \frac{1}{f(p) - \lambda}$$

en casi todas partes. La primera oración de la demostración implica que $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, y un poco de aritmética indica que T_g es la función inversa de $T_f - \lambda Id_{L^2}$. Por tanto, $\lambda \notin \sigma(T_f)$.

Recíprocamente, supóngase que $\lambda \in \text{supp}(m_f)$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\{p \in X : |f(p) - \lambda| \leq 1/n\}$$

es un conjunto de medida positiva que, por la semifinitud de m , contiene a un subconjunto medible F_n de medida real positiva. En consecuencia, si $\varphi_n = m(F_n)^{-1/2} \chi_{F_n}$, entonces $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T_f)$ es una sucesión de vectores unitarios para la cual

$$\|T_f(\varphi_n) - \lambda \varphi_n\|_{L^2}^2 = \int_X |(f(p) - \lambda)\varphi_n(p)|^2 dm \leq n^{-1} \int_{F_n} |\varphi_n|^2 dm = n^{-1} \rightarrow 0.$$

Si T_f es acotado, se concluye que $\lambda \in \sigma(T_f)$ por el teorema 45. En caso contrario, se puede

concluir con un argumento totalmente análogo al del teorema anteriormente mencionado, apelando al hecho de que T_f es de gráfica cerrada y al teorema 24. ■

Combinando este resultado con la Forma de Multiplicación del Teorema Espectral (teoremas 136, 171 y 181), se obtendrá un cálculo teórico del espectro de un operador normal acotado y un operador autoadjunto. Además, el Cálculo Funcional Continuo para operadores normales acotados (teoremas 132 y 168) permitirá extender dicho cálculo teórico a todos los operadores que se obtienen mediante él. Otra ventaja de este resultado es que verificará que el Cálculo Funcional Boreliano que se definirá para operadores autoadjuntos en los teoremas 132 y 182 puede ser pensando en $B_b(\sigma(T), \mathbb{C})$ o en $B_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sin perder generalidad. Por ello, no hay problema en usar a $\sigma(T)$ para el caso acotado y a $\mathbb{R}$ para el caso general dejándose guiar por las herramientas que se quieren utilizar para demostrar la Forma del Cálculo Funcional de las versiones del Teorema Espectral que se trabajaran en subsecciones posteriores.

La herramienta faltante para las demostraciones de los teoremas comentados en el párrafo anterior es el Teorema de Riesz-Markov en su versión real (teorema 122) y en su versión compleja (teorema 123). Este resultado determina un isomorfismo isométrico entre $C(X, \mathbb{K})^*$ y $m(X, \mathcal{F}, \mathbb{K})$, en donde X es un espacio de Hausdorff compacto asociado a una σ -álgebra que se discutirá a continuación. Dicho isomorfismo es natural puesto que a cada $l \in C(X, \mathbb{K})^*$ lo relaciona con una medida μ' para la cual

$$l(f) = \int_{\Omega} f \, d\mu', \text{ para todo } f \in C(X, \mathbb{K}).$$

Para poder establecer lo anterior es necesario determinar una σ -álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ para la cual toda función $f \in C(X, \mathbb{K})$ sea integrable para cada $\mu \in m(X, \mathcal{F}, \mathbb{K})$. Un candidato sería la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$, pero se optará por otra σ -álgebra de momento.

Definición 107 Si X es un espacio topológico, un subconjunto $A \subset X$ es un G_δ si A es una intersección numerable de abiertos en la topología de X .

Lema 108 Si X es un espacio compacto y $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces $f^{-1}([a, +\infty))$ es un G_δ compacto de X para cada $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $f^{-1}([a, +\infty))$ es cerrado en X , se tiene que es compacto puesto que X

también lo es. Lo de ser G_δ se sigue de que

$$f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}((a - 1/n, +\infty)).$$

■

Un corolario de este lema es que un espacio compacto X solo necesita estar asociado a una σ -álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ que contenga a todos sus G_δ 's compactos para que toda función $f \in C(X, \mathbb{R})$ sea medible. Como toda función $f \in C(X, \mathbb{C})$ es medible si y sólo si sus partes real e imaginaria $Re(f), Im(f) \in C(X, \mathbb{R})$ también lo son, esta condición sobre $\mathcal{F}$ también implica la medibilidad de dichas funciones.

Definición 109 Sea X un espacio topológico. La σ -álgebra $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ generada por los G_δ 's compactos de X es conocida como la σ -álgebra de Baire de X . Las funciones $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) medibles respecto a $\mathcal{A}(X)$ son funciones de Baire (reales o complejas según corresponda).

Teorema 110 Si X es un espacio de Hausdorff compacto y $(X, \mathcal{A}(X), \mu)$ es un espacio de medida real positiva, $C(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathcal{A}(X), \mu, \mathbb{C})$ para todo $p \in [1, +\infty]$ y es denso en el mismo si p es finito (aquí se abusa del lenguaje al escribir inclusión en vez de encaje).

Demostración. Este teorema puede constatarse en [14]. ■

Esto motiva la elección de los conjuntos de Baire sobre los de Borel. Para que el resultado anterior sea cierto en $\mathcal{B}(X)$ es necesario y suficiente que la medida μ sea regular; lo cual siempre ocurre con las medidas reales positivas asociadas a una σ -álgebra de Baire tal y como se muestra a continuación.

Teorema 111 Si X es un espacio de Hausdorff compacto, toda medida positiva $\mu \in m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R})$ es regular. O sea, que para cada $E \in \mathcal{A}(X)$ la medida μ verifica que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset E \text{ es un conjunto de Baire compacto}\} \\ &= \inf\{\mu(A) \mid E \subset A \text{ es un conjunto de Baire abierto}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Considere la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{A}(X) \mid \mu(E) \text{ satisface las dos igualdades del teorema}\}.$$

Para probar que $\mathcal{A}$ coincide con $\mathcal{A}(X)$, sólo es necesario probar que es una σ -álgebra que contiene a los G_δ 's compactos de X . Un paso previo a lo primero es verificar que $\mathcal{A}$ es una álgebra. Claramente todo conjunto de Baire compacto y abierto está en $\mathcal{A}$, en particular lo están $\emptyset$ y X . Ahora, si se consideran dos medibles $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ y un $\epsilon > 0$, se tiene la existencia de dos compactos K_1, K_2 y dos abiertos A_1, A_2 con la propiedad de que

$$K_i \subset E_i \subset A_i \text{ y } \mu(A_i \setminus K_i) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para } i = 1, 2.$$

Por tanto, si se considera el compacto $K = K_1 \cup K_2$ y el abierto $A = A_1 \cup A_2$, entonces se sigue que $K \subset E := E_1 \cup E_2 \subset A$ y que

$$\mu(A \setminus K) \leq \mu(A_1 \setminus K) + \mu(A_2 \setminus K) \leq \mu(A_1 \setminus K_1) + \mu(A_2 \setminus K_2) < \epsilon.$$

De esto, $\mu(A \setminus E) \leq \mu(A \setminus K) < \epsilon$ y $\mu(E \setminus K) \leq \mu(A \setminus K) < \epsilon$, lo cual implica que $E = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Por otro lado, como X es un espacio de Hausdorff compacto, $A_1^c = X \setminus A_1$ es un compacto y $K_1^c = X \setminus K_1$ es un abierto para los cuales $A_1^c \subset E_1^c \subset K_1^c$ y $\mu(K_1^c \setminus A_1^c) = \mu(A_1 \setminus K_1) < \epsilon$. Por lo mismo, $\mu(E_1^c \setminus A_1^c) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\mu(K_1^c \setminus E_1^c) < \frac{\epsilon}{2}$, lo cual propicia que $E_1^c \in \mathcal{A}$.

Lo anterior indica que $\mathcal{A}$ es σ -álgebra si éste es cerrado bajo uniones de cadenas ascendentes numerables; pues si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y $B_n := \cup \{A_i\}_{i=1}^n$, entonces

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

En tal situación se tiene que $\mu(B_n) \rightarrow \mu(A)$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu(B_n) &= \sup \{ \mu(K) \mid K \subset B_n \text{ es un conjunto de Baire compacto} \} \\ &\leq \sup \{ \mu(K) \mid K \subset A \text{ es un conjunto de Baire compacto} \} \\ &\leq \mu(A). \end{aligned}$$

Si la desigualdad anterior fuese estricta, para el promedio de ambas cantidades, r , existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B_n) \in (r, r + \mu(A))$, lo cual supone una contradicción. Para corroborar la otra igualdad, considérese que por ser $B_n \in \mathcal{A}$, para todo $\epsilon > 0$ hay un abierto $V_n \subset X$ que contiene a B_n y que

cumple con que $\mu(V_n) - \mu(B_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Por lo tanto, si $V = \cup\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $A \subset V$ y

$$\mu(V) - \mu(A) = \mu(V \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n \cap A^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n \cap B_n^c) \leq \epsilon.$$

Por ende, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es un conjunto de Baire abierto}\}$ por un argumento análogo al dado para la otra igualdad.

Sólo queda mostrar que la σ -álgebra $\mathcal{A}$ contiene a cada G_δ 's compacto de X . Sea $A = \cap\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto compacto con A_i abierto para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la monotonía de μ , es fácil concluir que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \text{máx}\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ es un conjunto de Baire compacto}\} \\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ es un conjunto de Baire compacto}\}. \end{aligned}$$

Para demostrar la otra igualdad considérese los conjuntos compactos y abiertos $B_n := \cap\{A_i\}_{i=1}^n$. Claramente $A = \cap\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por lo que $\mu(B_n) \rightarrow \mu(A)$ por la finitud de μ , y

$$\begin{aligned} \mu(B_n) &= \inf\{\mu(U) \mid B_n \subset U \text{ es un conjunto de Baire abierto}\} \\ &\geq \inf\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es un conjunto de Baire abierto}\} \\ &\geq \mu(A). \end{aligned}$$

Con un argumento dado previamente se puede concluir que la última desigualdad no puede ser estricta. ■

Hay espacios topológicos para los cuales los conjuntos de Baire coinciden con los borelianos. Tal es el caso de los espacios métricos compactos como consecuencia de la siguiente proposición.

Lema 112 *Sea X un espacio métrico. Para cada $A \subset X$ se tiene que $\overline{A}$ es un G_δ .*

Demostración. Sea $p \in X$. Se tiene que $p \in \overline{A}$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \cap B_{\frac{1}{n}}(p) \neq \emptyset$, lo cual únicamente sucede si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in A$ con la propiedad de que $p \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$. Como esta última condición es equivalente a que $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in A} B_{\frac{1}{n}}(x)$, se sigue que

$$\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in A} B_{\frac{1}{n}}(x).$$

■

Como todo subespacio compacto de un espacio métrico es cerrado en el mismo, este lema trae como consecuencia que los G_δ 's compactos de un espacio métrico compacto sean los subespacios compactos del mismo. Estos últimos coinciden con los subespacios cerrados como consecuencia de la compacidad del espacio métrico. Por consiguiente, la σ -álgebra de Baire de un espacio métrico compacto coincide con su σ -álgebra de Borel. Esto será muy útil cuando se utilice el Teorema de Riesz-Markov para estudiar el espectro de los operadores acotados definidos en espacios de Hilbert.

Dado un espacio topológico compacto X y cualquier medida $\mu \in m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{K})$, la función

$$\begin{aligned} l_\mu: C(X, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \int_X f \, d\mu \end{aligned} \tag{1.19}$$

resulta ser lineal y continua debido a que, por el contenido de la página 343 de [20], la medida μ cumple con la propiedad de que para cada $f \in C(X, \mathbb{K})$

$$|l_\mu(f)| = \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d|\mu| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X). \tag{1.20}$$

Más aun, si μ es positiva,

$$\|l_\mu\|_{C^*(X, \mathbb{K})} \leq \mu(X) = |l_\mu(1)| \leq \sup_{\|f\|_{C(X, \mathbb{K})}=1} |l(f)| = \|l_\mu\|_{C^*(X, \mathbb{K})}. \tag{1.21}$$

Además, en este caso se sigue que para cada $f \geq 0$, $l_\mu(f) \geq 0$. Los funcionales del espacio $C(X, \mathbb{K})$ que cumplen esta propiedad reciben un nombre especial:

Definición 113 Sea X un espacio topológico. Un funcional lineal positivo del espacio $C(X, \mathbb{K})$ es una transformación lineal $l: C(X, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ para la cual $l(f) \geq 0$ si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in X$.

Teorema 114 Si l es un funcional lineal positivo de $C(X, \mathbb{K})$, $l \in C(X, \mathbb{K})^*$ y $\|l\|_{C(X, \mathbb{K})^*} = l(1)$.

Demostración. Sea $f \in C(X, \mathbb{K})$. Si f es de variable real, se cumple que $|f| \leq \|f\|_\infty$ por lo que $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$. Así, $-l(1)\|f\|_\infty \leq l(f) \leq l(1)\|f\|_\infty$, de manera que $|l(f)| \leq \|f\|_\infty l(1)$.

Ahora, si f es arbitraria, $l(f) = e^{i\theta}r$ para ciertos $r, \theta \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. Por tanto,

$$|l(f)| = |e^{i\theta}r| = r = l(e^{-i\theta}f) = l(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)) + il(\operatorname{Im}(e^{-i\theta}f));$$

lo cual implica que $l(\operatorname{Im}(e^{-i\theta}f)) = 0$. Así,

$$|l(f)| = l(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}f)) \leq \| \operatorname{Re}(e^{-i\theta}f) \|_{\infty} l(1) \leq \| e^{-i\theta}f \|_{\infty} l(1) = \|f\|_{\infty} l(1).$$

La prueba de que $\|l\|_{C^*(X, \mathbb{R})} = l(1)$ es el contenido de la ecuación 1.21. ■

Los funcionales lineales positivos dan una descomposición canónica de cualquier funcional continuo que, en cierto sentido, es equivalente a la descomposición que presentan las medidas reales con respecto a las medidas reales positivas. Tal equivalencia se refleja en el teorema de Riesz-Markov, el cual necesita la descomposición comentada para ser mostrado. Para ello, hay que descomponer funciones continuas en el siguiente sentido:

Lema 115 *Sea X un espacio topológico. Si $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ son no negativas y $h \in C(X, \mathbb{R})$ es tal que $0 \leq h \leq f + g$, entonces existen dos funciones $h_1, h_2 \in C(X, \mathbb{R})$ para las cuales $0 \leq h_1 \leq f$, $0 \leq h_2 \leq g$ y $h = h_1 + h_2$.*

Demostración. Sean $h_1 := \min\{f, h\}$, $h_2 := h - h_1$ y $x \in X$. Se sigue que $0 \leq h_1 \leq f$ y que $h_2 \geq 0$. Si $h_1(x) = h(x)$, entonces $h_2(x) = h(x) - h(x) = 0 \leq g(x)$, y si $h_1(x) = f(x)$, entonces $h_2(x) = h(x) - f(x) \leq g(x)$. Así, $h_2 \leq g$, $h_1 \leq f$ y $0 \leq h_1 + h_2 = h = f + g$. ■

Teorema 116 *Sea X un espacio topológico. Para cada $l \in C(X, \mathbb{R})^*$ existen unos funcionales lineales positivos $l_+, l_- \in C(X, \mathbb{R})^*$ para los cuales*

$$l = l_+ - l_- \text{ y } l_+(1) + l_-(1) = \|l\|_{C(X, \mathbb{R})^*}.$$

Demostración. Considérese el conjunto $C(X)_+ := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f \geq 0\}$ y defínase primeramente a l_+ como la función

$$l_+ : f \in C(X)_+ \mapsto \sup\{l(h) \mid h \in C(X)_+ \text{ y } h \leq f\} \in \mathbb{R}$$

l_+ está bien definida debido a que para cada $h \in C(X)_+$ con $h \leq f$ se sigue que

$$|l(h)| \leq \|l\| \|h\|_{\infty} \leq \|l\| \|f\|_{\infty} < +\infty.$$

Hay una clara similitud entre las definiciones de l_+ y de la integral de Lebesgue de funciones

no negativas sobre medidas positivas. Por lo mismo, demostrar que $l_+(tf) = tl_+(f)$ para todo $f \in C_+(X)$ y $t > 0$ se verifica con argumentos conocidos. Caso contrario es la aditividad de l_+ , la cual requiere del lema previo para su verificación.

Sean $f, g \in C(X)_+$ arbitrarios. Si $h_1, h_2 \in C(X)_+$ cumplen con que $h_1 \leq f$ y $h_2 \leq g$, entonces $h_1 + h_2 \leq f + g$, por lo cual $l_+(f) + l_+(g) \leq l_+(f + g)$. Para checar la otra desigualdad considérese un $h \in C(X)_+$ tal que $h \leq f + g$. Del lema pasado se sigue la existencia de unos $h_1, h_2 \in C(X)_+$ con la propiedad de que $h_1 \leq f$, $h_2 \leq g$ y $h = h_1 + h_2$. De esto, $l(h) = l(h_1) + l(h_2) \leq l_+(f) + l_+(g)$, por lo cual $l_+(f + g) \leq l_+(f) + l_+(g)$.

Ahora, si para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ se considera su parte positiva $f_+ := \max\{f, 0\}$ y su parte negativa $f_- := -\min\{f, 0\}$, se extiende la función l_+ a la función

$$l_+ : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto l_+(f_+) - l_+(f_-).$$

La demostración de que la extensión es lineal es análoga a la dada para la integral de Lebesgue. Además, l_+ y $l_- := l_+ - l$ son funcionales lineales positivos debido a que para cada $f \in C(X)_+$ se tiene que $l_+(f) \geq \max\{l(f), l(0)\} \geq 0$. Por consiguiente, del teorema 114 se deduce que

$$\|l\| \leq \|l_+\| + \|l_-\| = l_+(1) + l_-(1).$$

Para probar la otra desigualdad, es necesario saber que si $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} l_-(f) &= l_+(f) - l(f) = \sup\{l(h) \mid 0 \leq h \leq f\} - l(f) \\ &= \sup\{l(h) - l(f) \mid 0 \leq h \leq f\} = \sup\{l(k) \mid -f \leq k \leq 0\}. \end{aligned}$$

De esto, se sigue que

$$\begin{aligned} l_+(1) + l_-(1) &= \sup\{l(h) \mid 0 \leq h \leq 1\} + \sup\{l(k) \mid -1 \leq k \leq 0\} = \sup\{l(g) \mid -1 \leq g \leq 1\} \\ &\leq \|l\| \sup\{\|g\|_\infty \mid -1 \leq g \leq 1\} = \|l\|. \end{aligned}$$

■

Con este resultado ya se puede mostrar el Teorema de Riesz-Markov en su versión real. La prueba que se dará fue hecha por D.J.H. Garling en [8] y fue resumida por Donald G. Hartig en [11] y por Richard B. Holmes en [12]. La misma se basa en probar el aserto primeramente en los espacios *extremadamente desconexos*.

Definición 117 *Un espacio topológico X es extremadamente desconexo, si cada abierto $A \subset X$ tiene una cerradura abierta.*

Lema 118 *Si X es un espacio de Hausdorff compacto extremadamente desconexo, $\mathcal{A}(X)$ está generada por la álgebra de los aberrados (conjuntos abiertos y cerrados a la vez) de X y las funciones simples basadas en estos son uniformemente densas en $C(X, \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la σ -álgebra generada por la álgebra de los aberrados en X . Como éste es compacto y de Hausdorff, todo aberrado es un G_δ compacto por lo que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(X)$. Para mostrar la inclusión contraria primero hay que mostrar que cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ es medible respecto a $\mathcal{B}$. Si $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario, la continuidad de f implica que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f^{-1}((-\infty, c + 1/n)) \subset \overline{f^{-1}((-\infty, c + 1/n))} \subset f^{-1}((-\infty, c + 1/n]).$$

En consecuencia,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}((-\infty, c + 1/n)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^{-1}((-\infty, c + 1/n))} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}((-\infty, c + 1/n]),$$

lo cual indica que $f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f^{-1}((-\infty, c + 1/n))}$ es una intersección numerable de aberrados. De esto, se concluye que $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ para cada boreliano real B .

Ahora, si $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un G_δ compacto, el lema de Urysohn (ver [14] para más referencia) dice que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tal que

$$K \subset f_n^{-1}(\{1\}) \text{ y } X \setminus A_n \subset f_n^{-1}(\{0\}).$$

Así,

$$K \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}((1/2, +\infty)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = K,$$

por lo cual $K \in \mathcal{B}$ en virtud de lo visto en el párrafo anterior. Esto permite concluir que $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$.

Para probar la segunda parte del lema, considérese para cada $k \in \mathbb{Z}$ el conjunto

$$B_k := \overline{\left\{ x \in X \mid \frac{k}{n} < f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}}.$$

Por hipótesis, B_k es un aberrado y por ser la imagen de f un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} \mid B_k \neq \emptyset\}$ es finito, lo cual conlleva a que $B = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ también sea un aberrado. De esto, el conjunto $C_k := \{x \in X \setminus B \mid f(x) = k/n\}$ resulta ser un aberrado y por un argumento ya dado el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} \mid C_k \neq \emptyset\}$ es finito. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede definir la función $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n} (\chi_{B_k} + \chi_{C_k})$$

que resulta ser continua y que cumple con que $\|f - g_n\| \leq 1/n$. ■

Teorema 119 *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Si X es extremadamente desconexo, para cada $l \in C(X, \mathbb{R})^*$ existe una única medida $\mu \in m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R})$ para la cual*

$$l(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{para cada } f \in C(X, \mathbb{R}). \quad (1.22)$$

Más aún, la función

$$\begin{aligned} \phi: m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R}) &\longrightarrow C(X, \mathbb{R})^* \\ \mu &\longmapsto \phi_\mu \end{aligned}$$

para la cual $\phi_\mu: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

funge como un isomorfismo isométrico entre ambos espacios.

Demostración. Como la integral de Lebesgue es un operador lineal respecto a la medida sobre la que se integra, ϕ es una transformación lineal. Para ver que preserva normas sólo falta probar que $\|\phi_\mu\| \geq \|\mu\|$ debido a que la otra desigualdad es una consecuencia directa de la ecuación 1.20. Para

tal fin considérese cualquier $\epsilon > 0$ y unos $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}(X)$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ y } \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| > |\mu|(X) - \epsilon.$$

Al ser μ una medida regular, existe una colección de compactos ajenos $\{C_i\}_{i=1}^n$ y otra de abiertos disjuntos $\{O_i\}_{i=1}^n$ con la propiedad de que

$$C_i \subset A_i \cap O_i \text{ y } |\mu|(A_i \setminus C_i), |\mu|(O_i \setminus C_i) \in \left(0, \frac{\epsilon}{3n}\right).$$

No es difícil verificar que $X \setminus C_i$ y O_i son abiertos disjuntos, por lo que el lema de Urysohn implica la existencia de una colección de funciones $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C(X, [0, 1])$ para las cuales $f_i|_{C_i} = 1$ y $f_i|_{X \setminus O_i} = 0$. Si se define la función $f := \sum_{i=1}^n \text{sign}(\mu(C_i)) f_i$, en donde

$$\text{sign}(\mu(C_i)) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu(C_i) < 0, \\ 0 & \text{si } \mu(C_i) = 0, \\ 1 & \text{si } \mu(C_i) > 0, \end{cases}$$

se tiene que $\|f\|_\infty = 1$ y que $|\phi_\mu(f)| - |\mu|(X) < \epsilon$. Lo primero se debe a que para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distintos

$$\max_{x \in X} f_i(x) = 1 \text{ y } f_i^{-1}((0, 1]) \cap f_j^{-1}((0, 1]) = \emptyset.$$

Lo segundo se verifica directamente mediante la desigualdad triangular. Si $D := X \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$, entonces

$$\begin{aligned} |\phi_\mu(f)| - |\mu|(X) &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f d\mu + \int_D f d\mu - |\mu|(X) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f d\mu - |\mu|(X) + \int_D f d\mu \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f d\mu - \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \right| + \left| \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| - |\mu|(X) \right| + \left| \int_D f d\mu \right| \\ &< \left| \sum_{i=1}^n \text{sign}(\mu(C_i)) \mu(C_i) - \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \right| + \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n \int_{O_i \setminus C_i} f d\mu \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n |\mu(C_i)| - |\mu(A_i)| \right| + \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n \mu(O_i \setminus C_i) \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $\|\mu\| > \|\phi_\mu\|_\infty$, lo anterior garantiza la existencia de un $f \in C(X, \mathbb{R})$ de norma 1 para el cual $|\phi_\mu(f)| \in (\|\phi_\mu\|, \|\mu\| + \|\phi_\mu\|)$, lo cual da lugar a una contradicción y termina por concluir que $\|\phi_\mu\| = \|\mu\|$.

Para ver que ϕ es sobreyectiva, únicamente hay que verificar que cada funcional positivo esté relacionado a una medida que haga válida la expresión 1.22 para el mismo. El caso general se sigue por linealidad al utilizar el teorema 116 para descomponer un funcional arbitrario como resta de funcionales positivos.

Sean $l \in C(X, \mathbb{R})^*$ un funcional positivo y $\mathbb{B}$ la álgebra de los aberrados de X . Conviene definir primeramente a μ en $\mathbb{B}$ mediante la asignación $\mu(A) := l(\chi_A)$. Es fácil corroborar que esto hace de μ una premedida real finitamente aditiva. Para corroborar que es σ -aditiva, supóngase que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección disjunta de aberrados para la cual $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ resulta ser un aberrado. Por la compacidad de X , A es compacto por lo que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid A_n \neq \emptyset\}$ es finito ya que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de A . En consecuencia, $\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ por lo que el Teorema de Extensión de Caratheodory (el cual puede consultarse en [20]) y el lema pasado permiten extender la premedida μ a una medida en $\mathcal{A}(X)$ de manera única.

Si $f \in C(X, \mathbb{R})$, el lema anterior también indica la existencia de una sucesión de funciones simples basadas en aberrados $\{s_n\} \subset C(X, \mathbb{R})$ que converge uniformemente a f y que está acotada superiormente por éste. En consecuencia, el TCD permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{N_n} \alpha_{n,m} \mu(E_{n,m}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{N_n} \alpha_{n,m} l(\chi_{E_{n,m}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(s_n) = l(f). \end{aligned}$$

■

La generalización de este resultado a cualquier espacio de Hausdorff compacto se sigue del hecho de que cada uno de estos es la imagen continua de algún espacio de Hausdorff compacto extremadamente disconexo. Para confirmar lo anterior es necesario recurrir a la *compactificación de Stone-Čech* de los espacios tipo T_4 .

Teorema 120 (Compactificación de Stone-Čech) *Si X es un espacio topológico tipo T_4 , entonces existe, salvo homeomorfismo, un único espacio de Hausdorff compacto βX que tiene un subespacio denso homeomorfo a X y que cumple la siguiente propiedad universal: si K es un espa-*

cio de Hausdorff compacto y $f: X \rightarrow K$ es una función continua, existe una única función continua $\beta f: \beta X \rightarrow Y$ para la cual $\beta f|_X = f$.

Demostración. Si βX y $\beta X'$ son espacios que contienen un subespacio denso homeomorfo a X y cumplen la propiedad universal descrita en el teorema, esta misma implica de manera sencilla que βX y $\beta X'$ son homeomorfos. Por tanto, sólo hay que verificar la existencia de un espacio con tales características.

Sea $C = \{f: X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ es continua}\}$. El lema de Urysohn indica que para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un $f \in C$ tal que $f(x) = 0 < 1 = f(y)$. En consecuencia, la función $\varphi: X \rightarrow [0, 1]^C$ dada por $\varphi(x) = (f(x))_{f \in C}$ es inyectiva, continua y de inversa continua debido a la topología producto de $[0, 1]^C$, la cual, además, hace de éste cubo un espacio de Hausdorff compacto. Con esto se define a βX como la cerradura de $\varphi(X)$ en $[0, 1]^C$. Es claro que X es homeomorfo a un subespacio denso de βX por lo que la unicidad de la función βf es clara, únicamente queda verificar su existencia.

Sea $g: X \rightarrow K$ una función continua. Para cada $f \in D = \{f: K \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ es continua}\}$ se tiene que $f \circ g \in C$. Por consiguiente, al ser $K \xrightarrow{\varphi} [0, 1]^D$ mediante la aplicación φ definida en el párrafo anterior, se induce una función

$$\begin{aligned} \beta f: \beta X &\longrightarrow K \\ (h(x))_{h \in C} &\longmapsto (f(g(x)))_{f \in D} \quad \text{si } x \in X, \end{aligned}$$

que por densidad se extiende a βX y que cumple con la propiedad universal pedida. ■

Lema 121 *La compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto es un espacio extremadamente desconexo.*

Demostración. Sean X un espacio discreto y $A \subset \beta X$ un abierto. Al ser $A \cap X \subset A$, $\overline{A \cap X} \subset \overline{A}$. Además, si $x \in A$, la densidad de X en βX implica la existencia de una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a x . Al ser A un abierto, $\{x_n\}$ está eventualmente en A por lo que se puede suponer que está totalmente contenida en el mismo sin perder generalidad. Esto último conlleva a que $A \subset \overline{A \cap X}$ de modo que $\overline{A} = \overline{A \cap X}$.

Por otra parte, si $A \neq \emptyset$, la topología de X hace de la función $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \cap A \\ 1 & \text{si } x \notin X \cap A \end{cases}$$

una aplicación continua que, por lo mismo, se extiende de manera única a una función continua $\beta f: \beta X \rightarrow \{0, 1\}$. Por la caracterización de $\bar{A}$ del párrafo anterior, es claro que éste último está contenido en $\beta f^{-1}(\{0\})$. Recíprocamente, si $x \in \beta f^{-1}(\{0\})$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge a éste, entonces $\{x_n\}$ está eventualmente en $\beta f^{-1}(\{0\})$ por ser éste un abierto. En consecuencia, se puede volver a suponer que $\{x_n\} \subset \beta f^{-1}(\{0\})$ de manera que $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $x_n \in X \cap A$. De esto, $x \in \overline{X \cap A} = \bar{A}$ y se sigue que este último coincide con el aberrado $\beta f^{-1}(\{0\})$. ■

Teorema 122 (Teorema de Riesz-Markov) Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Para cada $l \in C(X, \mathbb{R})^*$ existe una única medida $\mu \in m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R})$ para la cual

$$l(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{para cada } f \in C(X, \mathbb{R}). \quad (1.23)$$

Más aún, la función

$$\begin{aligned} \phi: m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R}) &\longrightarrow C(X, \mathbb{R})^* \\ \mu &\longmapsto \phi_\mu \end{aligned}$$

para la cual $\phi_\mu: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$\phi_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

funge como un isomorfismo isométrico entre ambos espacios.

Demostración. El hecho de que ϕ es una isometría lineal se demuestra de la misma forma en la que se hizo en el teorema 119. Por consiguiente, únicamente queda verificar que es sobreyectiva.

Si se considera a X_d como el espacio topológico cuyo conjunto base es X y su topología es la discreta, el teorema anterior indica que βX_d es un espacio extremadamente desconexo. El teorema

120 aplicado a la función identidad $i : X_d \rightarrow X$ implica la existencia de una función $\beta i : \beta X_d \rightarrow X$ que extiende a i y que, por lo mismo, es sobreyectiva. Esto induce un morfismo de álgebras unitarias

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}i : C(X, \mathbb{R}) &\longrightarrow C(\beta X_d, \mathbb{R}) \\ h &\longmapsto h \circ \beta i\end{aligned}$$

que preserva normas ya que para cada $h \in C(X, \mathbb{R})$ se cumple que

$$\begin{aligned}\|h \circ \beta i\|_\infty &= \sup_{p \in \beta X_d} |h \circ \beta i(p)| \leq \sup_{x \in X} |h(x)| = \|h\|_\infty \\ &= \sup_{x \in X} |h(\beta i(x))| \leq \sup_{p \in \beta X_d} |h \circ \beta i(p)| = \|h \circ \beta i\|_\infty.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\tilde{\beta}i$ tiene una inversa $\tilde{\beta}i^{-1} : \beta i(C(X, \mathbb{R})) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$ que también preserva normas y para la cual se sigue que para cada $l \in C(X, \mathbb{R})^*$, $l \circ \tilde{\beta}i^{-1} \in \tilde{\beta}i(C(X, \mathbb{R}))^*$ es un funcional con la misma norma que l que puede extenderse con el teorema de Hahn-Banach real (teorema 15) a un funcional $l' \in C(\beta X_d, \mathbb{R})$ que posee la misma norma que l .

Apelando al teorema de Riesz-Markov para espacios extremadamente desconexos (teorema 119), se implica la existencia de una medida $\mu' \in m(\beta X_d, \mathcal{A}(\beta X_d), \mathbb{R})$ para la cual

$$\int_{\beta X_d} f d\mu' = l'(f) \text{ si } f \in C(\beta X_d, \mathbb{R}).$$

Para obtener un resultado análogo con el funcional l , se relaciona a éste con una medida “pushout” dada por βi . Para esto es necesario verificar que para cada $A \subset \mathcal{A}(X)$, $\beta i^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\beta X_d)$, lo cual se sigue del hecho de que $\{A \subset X \mid \beta i^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\beta X_d)\}$ es una σ -álgebra que contiene a todos los G_δ ’s compactos de X . Por ende, la función $\mu : \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu(A) := \mu'(\beta i^{-1}(A))$ está bien definida, es una medida real en el espacio medible $(X, \mathcal{A}(X))$, y con ella se verifica que para cada $h \in C(X, \mathbb{R})$

$$\int_X h d\mu = \int_{\beta X_d} h \circ \beta i d\mu' = l'(h \circ \beta i) = l \circ \tilde{\beta}i^{-1}(h \circ \beta i) = l(h).$$

■

Teorema 123 (Teorema de Riesz-Markov Complejo) Sea X un espacio de Hausdorff com-

pacto. Para cada $l \in C(X, \mathbb{C})^*$ existe una única medida $\mu \in m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{C})$ para la cual

$$l(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{para cada } f \in C(X, \mathbb{C}). \quad (1.24)$$

Más aún, la función

$$\begin{aligned} \phi: m(X, \mathcal{A}(X), \mathbb{C}) &\longrightarrow C(X, \mathbb{C})^* \\ \mu &\longmapsto \phi_\mu \end{aligned}$$

para la cual $\phi_\mu: C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$\phi_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

funge como un isomorfismo isométrico entre ambos espacios.

Demostración. La preservación de normas de ϕ se demuestra de manera análoga a como se hizo en el teorema 119, tan sólo hay redefinir a la función $sign: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como $sign(z) := \overline{Arg(z)}$. La linealidad de ϕ es consecuencia directa de la linealidad de la integral de Lebesgue respecto a la medida con la que se integra. Por tanto, solamente queda probar que ϕ es sobreyectiva.

Sea $l \in C(X, \mathbb{C})^*$. Si $J := l|_{C(X, \mathbb{R})}$, $J_1 := Re(J)$ y $J_2 := Im(J)$, se sigue que $J_1, J_2 \in C(X, \mathbb{R})^*$ por lo que el teorema 116 implica la existencia de unos funcionales lineales positivos $J_i^+, J_i^- \in C(X, \mathbb{R})^*$ para los cuales $J_i = J_i^+ - J_i^-$ para $i = 1, 2$. Por consiguiente, para cada $f = f_1 + if_2 \in C(X, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} l(f) &= l(f_1) + il(f_2) = J(f_1) + iJ(f_2) \\ &= J_1(f_1) + iJ_2(f_1) + i(J_1(f_2) + iJ_2(f_2)) \\ &= J_1^+(f_1) - J_1^-(f_1) + i(J_2^+(f_1) - J_2^-(f_1)) + i\left(J_1^+(f_2) - J_1^-(f_2) + i(J_2^+(f_2) - J_2^-(f_2))\right). \end{aligned}$$

Apelando al teorema de Riesz-Markov, existen medidas positivas $\mu_i^\pm \in (X, \mathcal{A}(X), \mathbb{R})$ que verifican que

$$J_i^\pm = \int_X f \, d\mu_i^\pm.$$

En consecuencia, si $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, se sigue que

$$\begin{aligned} l(f) &= \int_X f_1 d\mu_1^+ - \int_X f_1 d\mu_1^- + i \left(\int_X f_1 d\mu_2^+ - \int_X f_1 d\mu_2^- \right) \\ &\quad + i \left(\int_X f_2 d\mu_1^+ - \int_X f_2 d\mu_1^- + i \left(\int_X f_2 d\mu_2^+ - \int_X f_2 d\mu_2^- \right) \right) \\ &= \int_X f_1 d\mu + i \int_X f_2 d\mu = \int_X f d\mu. \end{aligned}$$

■

Con este resultado y los otros que se han expuesto a lo largo de esta subsección, ya se tienen los preliminares necesarios para demostrar el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados. Realmente esto se pudo haber dicho al haber enunciado el Teorema de Riesz Markov ya que la forma de multiplicación del Teorema Espectral sólo necesita del teorema 122 para generar el espacio L^2 que se encuentra en su formulación. Con dicha forma se demuestra la versión del Cálculo Funcional Boreliano y con ésta se deriva la versión que habla de medidas espectrales. Este panorama es el que se seguirá cuando se generalice el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos no Acotados en el capítulo 3. Para la versión acotada del mismo, se ha optado por usar el teorema 123 para demostrar la forma del Cálculo Funcional Boreliano sin necesidad de recurrir a la forma de multiplicación. Aun así, estas dos versiones del teorema espectral están basadas en un Cálculo Funcional Continuo, el cual se construirá en la primera parte del subsecuente capítulo.

Capítulo 2

Teorema Espectral Para Operadores Autoadjuntos Acotados

En el presente capítulo por fin se demuestra el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados, apelando a las demostraciones hechas en [14] y [4]. Primero se procede con la construcción de un Cálculo Funcional Continuo que da lugar a un Cálculo Funcional Boreliano; posteriormente, se utiliza este Cálculo Funcional para demostrar que todo operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert es, en cierto sentido, equivalente a un operador de multiplicación definido en un espacio L^2 isométricamente isomorfo al mismo; y finalmente se establece una biyección entre el conjunto de operadores autoadjuntos acotados que están definidos en un espacio de Hilbert y el conjunto de medidas espectrales reales de soporte compacto que se pueden definir en el mismo. A partir de este capítulo, para cada espacio topológico X los conjuntos $C(X, \mathbb{C})$, $C_b(X, \mathbb{C})$, $B_b(X, \mathbb{C})$ y $B(X, \mathbb{C})$ simplemente se escribirán como $C(X)$, $C_b(X)$, $B_b(X)$ y $B(X)$, respectivamente.

2.1. Forma Del Cálculo Funcional Boreliano

El Teorema Espectral en su forma del Cálculo Funcional Boreliano declara que si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto, entonces hay un $*$ -homomorfismo entre las

C^* -álgebras $B_b(\sigma(T))$ y $\mathcal{L}(H)$ que se denomina Cálculo Funcional Boreliano. Para demostrar eso, primero se definirá tal función en el conjunto de funciones polinomiales de coeficientes complejos con dominio restringido a $\sigma(T)$, el cual se denotará como $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$, y se mostrarán propiedades que luego, en virtud del teorema de Stone-Weierstrass, se extenderán a todo $C(\sigma(T))$. Posteriormente se discutirá la extensión de todo lo anterior al conjunto $B_b(\sigma(T))$.

Lema 124 Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y $P \in \mathbb{C}[x]$. Si $\phi_T: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ es el homomorfismo visto en la definición 31, entonces

$$\|\phi_T(P)\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|.$$

Demostración. La autoadjuntez de T implica que si

$$P = \sum_{n=0}^N a_n x^n \text{ y } P' := \sum_{n=0}^N \overline{a_n} x^n,$$

entonces $\phi_T(P') = \phi_T(P)^*$. Por consiguiente, los teoremas 37 y 52 indican que

$$\begin{aligned} \|P(T)\|^2 &= \|P'(T) \circ P(T)\| = \|\phi_T(P'P)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\phi_T(P'P))\} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |(P'P)(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|^2 = \left(\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\phi_T(P)\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{|P(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$. ■

Este resultado permite definir, de una manera muy natural, lo que se entiende por el *Cálculo Funcional Polinomial* del operador autoadjunto T .

Definición 125 (Cálculo Funcional Polinomial) Sea H un espacio de Hilbert. Para cada operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ se define la función

$$\begin{aligned} \phi_T: \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n &\mapsto P(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n. \end{aligned}$$

Lema 126 ϕ_T es una isometría lineal multiplicativa entre las álgebras normadas $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ y $\mathcal{L}(H)$ que respeta involuciones (i.e. para cada $P \in \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$, $\phi_T(\overline{P}) = \phi_T(P)^*$).

Demostración. Dado que T es un operador autoadjunto, el teorema anterior indica que ϕ_T es una función bien definida y el teorema 79 muestra que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Esto último conlleva a que para cada $P \in C_{\sigma(T)}[x]$ la función polinomial $\overline{P}$ coincida con la función polinomial P' definida en el teorema pasado. Por consiguiente, $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es cerrado bajo complejos conjugados.

Por otro lado, la asignación de ϕ_T es análoga a la del homomorfismo descrito en la definición 31, con la sutil diferencia de que en este caso los polinomios con coeficientes complejos son considerados como funciones polinomiales con dominio restringido a $\sigma(T)$. Como esto no altera su aritmética, ϕ_T sigue siendo un homomorfismo de álgebras y el teorema anterior verifica que preserva normas e involuciones. ■

Ahora ya se puede demostrar la existencia y unicidad del *Cálculo Funcional Continuo* del operador autadjunto T .

Teorema 127 (Cálculo Funcional Continuo) Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Se tiene la existencia de una única aplicación $\phi_T: C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ que extiende al Cálculo Funcional Polinomial (definición 125) y que cumple las siguientes propiedades para todo $f \in C(\sigma(T))$:

1. ϕ_T es un $*$ -homomorfismo que preserva unidades.
2. $\|\phi_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\infty}$.
3. Si $T(x) = \lambda x$, $\phi_T(f)x = f(\lambda)x$.
4. $\sigma(\phi_T(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$.
5. $\phi_T(f)$ es un operador normal y es autoadjunto si y sólo si f toma únicamente valores reales.
6. $f \geq 0$ si y sólo si $\langle x, \phi_T(f)x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$.

Esta función ϕ_T es el denominado *Cálculo Funcional Continuo* del operador autoadjunto T .

Demostración. Considérese la función $\phi_T: \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ de la definición 125. El lema 124 establece que dicho operador es unitario. Al ser H un espacio de Hilbert, el teorema 13 implica que $\mathcal{L}(H)$ es un espacio de Banach por lo que el teorema del operador acotado (teorema 12) permite extender a ϕ_T de manera única a la completación de $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ como un operador unitario. Como éste espacio es una subálgebra de $C(\sigma(T))$ que separa puntos, contiene a las funciones constantes y

es cerrada bajo complejos conjugados (debido a que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ por ser T autoadjunto); el teorema de Stone-Weierstrass (teorema 50) asegura que su completación coincide con $C(\sigma(T))$, ya que $\sigma(T)$ es compacto.

Lo anterior indica que el operador unitario $\phi_T: \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ se extiende de manera única a un operador $\phi_T: C(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ que, por lo mismo, será continuo y unitario. Las otras propiedades de *-homomorfismo son fáciles de comprobar apelando al hecho de que $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es denso en $C(\sigma(T))$. Esta última afirmación asegura que si $f, g \in C(\sigma(T))$, entonces existen dos sucesiones $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ tales que $p_n \rightarrow f$ y $q_n \rightarrow g$. De esto, se implica que $p_n q_n \rightarrow fg$ (teorema 29), $\phi_T(p_n q_n) \rightarrow \phi_T(fg)$, $\phi_T(p_n) \rightarrow \phi_T(f)$ y $\phi_T(q_n) \rightarrow \phi_T(g)$ por ser ϕ_T continua. Así, $\phi_T(p_n) \circ \phi_T(q_n) \rightarrow \phi_T(f) \circ \phi_T(g)$ por el mismo teorema 29. Recuerdese que ϕ_T restringida a $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$ es un *-homomorfismo (lema 126); por lo tanto, $\phi_T(p_n) \circ \phi_T(q_n) = \phi_T(p_n q_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluyéndose así que $\phi(fg)$ y $\phi(f) \circ \phi(g)$ son límites de la misma sucesión y, por lo mismo, iguales.

Por otra parte, las funciones $x \in \mathbb{C} \mapsto \bar{x} \in \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(H) \mapsto T^* \in \mathcal{L}(H)$ son continuas, lo cual da cabida a que

$$\phi_T(f)^* \leftarrow \phi_T(p_n)^* = \phi_T(\overline{p_n}) \rightarrow \phi_T(\bar{f}).$$

Ahora, para probar el punto número 3 hay que recalcar 2 cuestiones: si una sucesión de operadores $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(H)$ converge a un operador A bajo la norma del teorema 3, entonces la sucesión $\{A_n(x)\} \subset H$ converge a $A(x)$ para todo $x \in H$; y la convergencia en $C(\sigma(T))$ bajo la norma infinito es equivalente a la convergencia uniforme de funciones de ese mismo espacio. Por tanto, si existen $x \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T(x) = \lambda x$, entonces

$$\phi_T(f)x \leftarrow \phi_T(p_n)x = p_n(\lambda)x \rightarrow f(\lambda)x.$$

Para mostrar el apartado 4, se utilizará el criterio de Weyl (teorema 79) y el apartado 5 de este teorema. Sean $f \in C(\sigma(T))$ y $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$. La función $f - \mu \in C(\sigma(T))$ nunca es cero por lo que $g := (f - \mu)^{-1} \in C(\sigma(T))$. Al ser $g(f - \mu) = 1 = (f - \mu)g$, se llega a que

$$I = \phi_T(1) = \phi_T((f - \mu)g) = \phi_T(f - \mu) \circ \phi_T(g),$$

$$I = \phi_T(1) = \phi_T(g(f - \mu)) = \phi_T(g) \circ \phi_T(f - \mu),$$

teniéndose que $\phi_T(f - \mu) = \phi_T(f) - \mu I$ es un operador invertible y, por tanto, que $\mu \notin \sigma(\phi_T(f))$.

Inversamente, seleccionando a cualquier $\lambda \in \sigma(T)$ y a cualquier sucesión de polinomios $\{p_n\} \rightarrow f$ para la cual $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, se verifica que

$$|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n} \text{ y } \|\phi_T(f) - \phi_T(p_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Por el lema 37 se sabe que $p_n(\lambda) \in \sigma(\phi_T(p_n))$, por lo que el criterio de Weyl asegura la existencia de una sucesión de vectores unitarios $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ para los cuales

$$\|(\phi_T(p_n) - p_n(\lambda))x_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Todo esto conlleva a que

$$\begin{aligned} \|(\phi_T(f) - f(\lambda))x_n\| &\leq \|(\phi_T(f) - \phi_T(p_n))x_n\| + \|(\phi_T(p_n) - p_n(\lambda))x_n\| + \|(p_n(\lambda) - f(\lambda))x_n\| \\ &\leq \frac{3}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, el criterio de Weyl implica que $f(\lambda) \in \sigma(\phi_T(f))$ debido a que $\phi_T(f)$ es un operador normal como consecuencia de los incisos 1 y 2 de este teorema, y de que f sea normal en $C(\sigma(T))$.

Ahondando más en la afirmación anterior, se sabe que cada $f \in C(\sigma(T))$ es un elemento autoadjunto si y sólo si toma únicamente valores reales. Por tanto, los incisos 1 y 2 del teorema también permiten deducir lo mismo de $\phi_T(f)$.

Finalmente, nótese que si $f \geq 0$, entonces $g := \sqrt{f} \in C(\sigma(T))$ y sólo toma valores reales por lo que para cada $x \in H$,

$$\langle x, \phi_T(f)x \rangle = \langle x, \phi_T(g)\phi_T(g)x \rangle = \langle \phi_T(g)^*x, \phi_T(g)x \rangle = \langle \phi_T(g)x, \phi_T(g)x \rangle \geq 0.$$

Recíprocamente, si la última desigualdad se da para cada $x \in H$, el lema 77 y el inciso 4 de este teorema conllevan a que $\{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} = \sigma(\phi_T(f)) \subset \overline{W(\phi_T(f))} \subset \mathbb{R} \cup \{0\}$, lo cual permite concluir que $f \geq 0$. ■

En concordancia con la notación adoptada para el homomorfismo $\phi_T: \mathbb{C}_{\sigma(T)}[x] \rightarrow \mathcal{L}(H)$ desde la definición 31, para cualquier $f \in C(\sigma(T))$ se denotará a $\phi_T(f)$ como $f(T)$.

A continuación se construirán ciertas medidas utilizando la función definida en el teorema ante-

rior, para luego construir unas integrales que permitan la definición de ϕ_T para funciones borelianas y acotadas sobre $\sigma(T)$. Para ello, considérese un espacio de Hilbert H y un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$. Para cualesquiera $x, y \in H$ se define la función

$$\omega_{x,y} : f \in C(\sigma(T)) \mapsto \langle x, f(T)y \rangle \in \mathbb{C}.$$

Por las propiedades del teorema anterior y la desigualdad de Cauchy Schwartz, $\omega_{x,y} \in C(\sigma(T))^*$ tiene norma acotada por $\|x\| \|y\|$. Por lo tanto, el Teorema de Riesz-Markov (teorema 123) implica la existencia de una única medida compleja $\mu_{x,y} \in m(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), \mathbb{C})$ para la cual $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$ y

$$\langle x, f(T)y \rangle = \omega_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ para todo } f \in C(\sigma(T)).$$

Definición 128 Para cada $x, y \in H$ las medidas anteriores, $\mu_{x,y}$, son denominadas medidas espectrales. Si $x = y$, se escribe μ_x en vez de $\mu_{x,x}$.

Lema 129 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Para cada $x, y, z \in H$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ las medidas espectrales cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mu_{x, \lambda_1 y + \lambda_2 z} = \lambda_1 \mu_{x,y} + \lambda_2 \mu_{x,z},$
2. $\mu_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, z} = \overline{\lambda_1} \mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} \mu_{y,z},$
3. $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}.$

Demostración. Sea $f \in C(\sigma(T))$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x, \lambda_1 y + \lambda_2 z} &= \langle x, f(T)(\lambda_1 y + \lambda_2 z) \rangle = \lambda_1 \langle x, f(T)y \rangle + \lambda_2 \langle x, f(T)z \rangle \\ &= \lambda_1 \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} + \lambda_2 \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,z} = \int_{\sigma(T)} f d(\lambda_1 \mu_{x,y} + \lambda_2 \mu_{x,z}), \\ \int_{\sigma(T)} f d\mu_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, z} &= \langle \lambda_1 x + \lambda_2 y, f(T)(z) \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, f(T)z \rangle + \overline{\lambda_2} \langle y, f(T)z \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} \int_{\sigma(T)} f d\mu_{y,z} = \int_{\sigma(T)} f d(\overline{\lambda_1} \mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} \mu_{y,z}). \end{aligned}$$

Por tanto, como el teorema de Riesz-Markov asegura que la medida que representa al funcional $\omega_{x,y}$ es única, se concluye que $\mu_{x, \lambda_1 y + \lambda_2 z} = \lambda_1 \mu_{x,y} + \lambda_2 \mu_{x,z}$ y $\mu_{\lambda_1 x + \lambda_2 y, z} = \overline{\lambda_1} \mu_{x,z} + \overline{\lambda_2} \mu_{y,z}$.

Para probar el punto 3, obsérvese que

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} &= \langle x, f(T)y \rangle = \langle (f(T))^* x, y \rangle = \langle \bar{f}(T)x, y \rangle = \overline{\langle y, \bar{f}(T)x \rangle} = \overline{\int_{\sigma(T)} \bar{f} d\mu_{y,x}} \\
&= \overline{\int_{\sigma(T)} \operatorname{Re}(f) d\mu_{y,x} - i \int_{\sigma(T)} \operatorname{Im}(f) d\mu_{y,x}} \\
&= \int_{\sigma(T)} \operatorname{Re}(f) d\operatorname{Re}(\mu_{y,x}) - i \int_{\sigma(T)} \operatorname{Re}(f) d\operatorname{Im}(\mu_{y,x}) \\
&\quad + i \left(\int_{\sigma(T)} \operatorname{Im}(f) d\operatorname{Re}(\mu_{y,x}) + i \int_{\sigma(T)} \operatorname{Im}(f) d\operatorname{Im}(\mu_{y,x}) \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} &= \int_{\sigma(T)} \operatorname{Re}(f) d\operatorname{Re}(\mu_{y,x}) - i \int_{\sigma(T)} \operatorname{Re}(f) d\operatorname{Im}(\mu_{y,x}) \\
&\quad + i \left(\int_{\sigma(T)} \operatorname{Im}(f) d\operatorname{Re}(\mu_{y,x}) - i \int_{\sigma(T)} \operatorname{Im}(f) d\operatorname{Im}(\mu_{y,x}) \right) \\
&= \int_{\sigma(T)} f d\operatorname{Re}(\mu_{y,x}) - i \int_{\sigma(T)} f d\operatorname{Im}(\mu_{y,x}) = \int_{\sigma(T)} f d\overline{\mu_{y,x}};
\end{aligned}$$

demostrándose así que $\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$. ■

El teorema anterior y la desigualdad de Schwartz implican que para cada $f \in B_b(\sigma(T))$ la función

$$\begin{aligned}
\alpha_f: H \times H &\rightarrow \mathbb{C} \\
(x, y) &\mapsto \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}
\end{aligned}$$

es conjugada lineal en la primera entrada, lineal en la segunda y es acotada por $\|f\|_\infty$ debido a que, por el contenido de la página 343 de [20], la medida compleja $\mu_{x,y}$ verifica que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \right| &\leq \int_{\sigma(T)} |f| d|\mu_{x,y}| \leq \|f\|_\infty |\mu_{x,y}|(\sigma(T)) \\
&= \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|x\| \|y\|.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el lema de representación de Riesz para formas sesquilineales (corolario 6) implica

la existencia de un único $f(T) \in \mathcal{L}(H)$ para el cual

$$\langle x, f(T)y \rangle = \alpha_f(x, y) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ para cualesquiera } x, y \in H.$$

Este operador es el que permite conseguir la tan ansiada extensión del cálculo funcional del conjunto de funciones continuas $C(\sigma(T))$ al conjunto de funciones borelianas y acotadas $B_b(\sigma(T))$.

Definición 130 Sea H un espacio de Hilbert. Para cada operador $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto se define la función

$$\begin{aligned} \phi_T: B_b(\sigma(T)) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\longmapsto f(T), \end{aligned}$$

en donde

$$\langle x, f(T)y \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \text{ para cada } x, y \in H.$$

No es difícil ver que si $f \in C(\sigma(T))$, la definición anterior coincide con la del teorema del Cálculo Funcional Continuo (teorema 127).

Lema 131 Sean $x, y \in H$ arbitrarios.

1. Si $f \in B_b(\sigma(T))$ y $g \in C(\sigma(T))$, entonces

$$\int_{\sigma(T)} fg d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,g(T)y}.$$

2. Si $f, g \in B_b(\sigma(T))$, entonces

$$\int_{\sigma(T)} fg d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} g d\mu_{(f(T))^*x,y}.$$

Demostración. Para probar el punto 1, primero supóngase que f es continua. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} fg d\mu_{x,y} &= \langle x, \phi_T(fg)y \rangle = \langle x, (\phi_T(f) \circ \phi_T(g))y \rangle \\ &= \langle x, \phi_T(f)(\phi_T(g)y) \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,g(T)y}. \end{aligned}$$

Para el caso general considérese el conjunto

$$U_g = \left\{ f \in B_b(\sigma(T)) \mid \int_{\sigma(T)} fg \, d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,g(T)y} \right\}.$$

Por lo anterior $C(\sigma(T)) \subset U_g$. Si $\{f_n\} \subset U_g$ es una sucesión uniformemente acotada y convergente a una función f de manera puntual; el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int_{\sigma(T)} fg \, d\mu_{x,y} \leftarrow \int_{\sigma(T)} f_n g \, d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f_n \, d\mu_{x,g(T)y} \rightarrow \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,g(T)y}$$

ya que para cualquier $x, y \in H$ se tiene que $|\mu_{x,y}|(\sigma(T)) < +\infty$. Por tanto, $f \in U_g$ teniéndose así, en virtud del teorema 87, que $U_g = B_b(\sigma(T))$.

La verificación del punto 2 es análoga. Si g es una función continua, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} fg \, d\mu_{x,y} &= \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,g(T)y} = \langle x, \phi_T(f)(\phi_T(g)y) \rangle = \langle x, (\phi_T(f) \circ \phi_T(g))y \rangle \\ &= \langle (\phi_T(f))^* x, \phi_T(g)y \rangle = \int_{\sigma(T)} g \, d\mu_{(\phi_T(f))^* x, y}; \end{aligned}$$

y la generalización de lo anterior para cada $g \in B_b(\sigma(T))$ se realiza con el mismo argumento del punto 1. ■

Ya está listo todo lo necesario para enunciar y demostrar la primera forma del Teorema Espectral:

Teorema 132 (Teorema Espectral: Forma del Cálculo Funcional Boreliano) Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Existe una única aplicación $\phi_T: B_b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ que extiende el cálculo funcional continuo de T y que cumple las siguientes propiedades para cada $f \in B_b(\sigma(T))$:

1. ϕ_T es un $*$ -homomorfismo unitario.
2. Si $\{f_n\} \subset B_b(\sigma(T))$ es uniformemente acotada y converge a f puntualmente, entonces $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$ puntualmente.

Además, esta única aplicación tiene las siguientes propiedades:

3. Si $T(x) = \lambda x$, entonces $\phi(f)x = f(\lambda)x$.

4. $\phi_T(f)$ es normal y es autoadjunto si f toma únicamente valores reales.

5. Si $f \geq 0$, entonces $\langle x, \phi_T(f)x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$.

6. Si $BT = TB$, entonces $\phi_T(f)B = B\phi_T(f)$.

Demostración. Primero se demostrará que la aplicación $\phi_T: B_b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definida con anterioridad cumple las hipótesis del teorema.

Si $f, g \in B_b(\sigma(T))$, para todo $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha\phi_T(f)y + \phi_T(g)y \rangle &= \alpha\langle x, \phi_T(f)y \rangle + \langle x, \phi_T(g)y \rangle = \alpha \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y} + \int_{\sigma(T)} g \, d\mu_{x,y} \\ &= \int_{\sigma(T)} (\alpha f + g) \, d\mu_{x,y} = \langle x, \phi_T(\alpha f + g)y \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, \phi_T(fg)y \rangle &= \int_{\sigma(T)} fg \, d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} g \, d\mu_{\phi_T(f)^*x,y} = \langle \phi_T(f)^*x, \phi_T(g)y \rangle \\ &= \langle x, \phi_T(f) \circ \phi_T(g)y \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, \phi_T(f)^*y \rangle &= \langle \phi_T(f)x, y \rangle = \overline{\langle y, \phi_T(f)x \rangle} = \overline{\int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{y,x}} \\ &= \int_{\sigma(T)} \bar{f} \, d\overline{\mu_{y,x}} = \int_{\sigma(T)} \bar{f} \, d\mu_{x,y} = \langle x, \phi_T(\bar{f})y \rangle. \end{aligned}$$

Esto trae como conclusión que ϕ_T sea un $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras con unidad que, por el teorema 54, es continuo.

Ahora considérense las hipótesis del inciso 2. Por ellas se tiene la existencia de una función constante $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ que, por ser $\mu_x(\sigma(T)) < +\infty$, es elemento del espacio $L^2(\sigma(T), \mu_x)$ para cualquier $x \in H$. En consecuencia, como $f_n \rightarrow f$ puntualmente, el teorema de la convergencia dominada implica que para cada $x \in H$

$$\begin{aligned} \|f_n(T)x - f(T)x\| &= \langle (f_n - f)(T)x, (f_n - f)(T)x \rangle = \langle x, (f_n - f)(T)^* \circ (f_n - f)(T)x \rangle \\ &= \langle x, \overline{(f_n - f)(T)} \circ (f_n - f)(T)x \rangle = \langle x, (|f_n - f|^2)(T)x \rangle \\ &= \int_{\sigma(T)} |f_n - f|^2 d\mu_x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para probar el tercer inciso defínase el conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) \mid \phi_T(f)x = f(\lambda)x\}.$$

Por el teorema 127 $C(\sigma(T)) \subset U$. Ahora considérese una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual. En virtud del punto anterior, se puede afirmar que $\phi_T(f_n) \rightarrow \phi_T(f)$ de manera puntual por lo que

$$\phi_T(f)(x) \leftarrow \phi_T(f_n)(x) = f_n(\lambda)x \rightarrow f(\lambda)x$$

conllevando a que $f \in U$ y, por tanto, a que $U = B_b(\sigma(T))$.

La demostración de los incisos 4 y 5 se sigue de los puntos anteriores; por lo que sólo queda probar el inciso 6. Para ello, considérese un operador $B \in \mathcal{L}(H)$ y obsérvese que si f es un polinomio, entonces

$$f(T) \circ B = \left(\sum_{n=0}^N a_n T^n \right) \circ B = \left(\sum_{n=0}^N a_n T^n \circ B \right) = \left(\sum_{n=0}^N a_n B \circ T^n \right) = B \circ f(T).$$

Si f es una función continua, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ convergente a f . Entonces $P_n(T) \rightarrow f(T)$ por lo que

$$f(T) \circ B \leftarrow p_n(T) \circ B = B \circ p_n(T) \rightarrow B \circ f(T).$$

Sólo queda extender la proposición anterior para las funciones $f \in B_b(\sigma(T))$. Al igual que en casos anteriores, se hará con la ayuda del conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) \mid f(T) \circ B = B \circ f(T)\}$$

considerando una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual. Por el punto 2 se tiene que $f_n(T) \rightarrow f(T)$ puntualmente por lo que

$$B \circ f(T) \leftarrow B \circ f_n(T) = f_n(T) \circ B \rightarrow f(T) \circ B.$$

Ahora se demostrará que el operador ϕ_T es el único $*$ -homomorfismo que extiende al Cálculo Funcional Continuo de T y que cumple los incisos 1 y 2 de este teorema. Para hacerlo, supóngase que existe otro operador $\phi : B_b(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ que cumple tales propiedades y defínase el conjunto

$$U := \{f \in B_b(\sigma(T)) \mid \phi_T(f) = \phi(f)\}.$$

Por hipótesis $C(\sigma(T)) \subset U$. Ahora, si existe una sucesión $\{f_n\} \subset U_g$ uniformemente acotada convergente a una función f de manera puntual; $\phi_T(f_n) \rightarrow \phi_T(f)$ y $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$, donde la convergencia es de manera puntual. Así,

$$\phi_T(f) \leftarrow \phi_T(f_n) = \phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$$

conllevando a que $U = B_b(\sigma(T))$. De esto, se concluye que $\phi_T = \phi$. ■

Se tiene existencia y unicidad de un operador que extiende el Cálculo Funcional Continuo de T al conjunto $B_b(\sigma(T))$. Tal extensión será conocida como el Cálculo Funcional Boreliano de T .

2.2. Forma De Multiplicación

Con la herramienta del Cálculo Funcional Boreliano ya se puede dar la generalización que se comentó en la introducción, la cual corresponde a la forma de multiplicación del Teorema Espectral. Para ello es necesaria la definición de vector cíclico.

Definición 133 Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Se dice que $x \in H$ es un vector cíclico de T si

$$H = \overline{\text{gen}(\{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}})}.$$

Lema 134 Sea H un espacio de Hilbert y sea $x \in H$ un vector cíclico de un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$. Se tiene la existencia de un operador unitario $U : H \rightarrow L^2(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), \mu_x, \mathbb{C})$ para el cual

$$UTU^{-1}f = Id_{\sigma(T)}f, \text{ para cada } f \in L^2(\sigma(T), \mu_x).$$

Demostración. Defínase la asignación

$$U: \{f(T)x \mid f \in C(\sigma(T))\} \longrightarrow L^2(\sigma(T), \mu_x)$$

$$f(T)x \longmapsto f.$$

Para corroborar que la asignación anterior está bien definida, nótese que para cada $f \in C(\sigma(T))$

$$\begin{aligned} \|f(T)x\|^2 &= \langle f(T)x, f(T)x \rangle = \langle x, f(T)^* \circ f(T)x \rangle = \langle x, \bar{f}(T) \circ f(T)x \rangle \\ &= \langle x, |f|^2(T)x \rangle = \int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_x. \end{aligned}$$

Por tanto, si f y g fuesen dos funciones continuas para las cuales $f(T)x = g(T)x$,

$$0 = \|(f - g)(T)x\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f - g|^2 d\mu_x,$$

de modo que f y g serían iguales en $L^2(\sigma(T), \mu_x)$. Esto corrobora que U sí es función.

Ahora, si además de dos funciones $f, g \in C(\sigma(T))$ se consideran dos números complejos α y β , se verifica que U es un operador ya que

$$\begin{aligned} U(\alpha f(T)x + \beta g(T)x) &= U((\alpha f + \beta g)(T)x) \\ &= \alpha f + \beta g \\ &= \alpha U(f(T)x) + \beta U(g(T)x). \end{aligned}$$

Más aun, se tiene que U es una isometría ya que para todo $f \in C(\sigma(T))$

$$\|f(T)x\|_H = \sqrt{\int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_x} = \|f\|_{L^2(\sigma(T), \mu_x)}.$$

Esto permite usar el teorema del operador acotado (teorema 12) para extender el dominio de la función U al espacio $\overline{\{f(T)x \mid f \in C(\sigma(T))\}}$, el cual será todo el espacio H ya que x es un vector cíclico de T . Para demostrarlo, se utiliza el hecho de que x es vector cíclico de H para implicar que si $y \in H$, entonces existe una sucesión de polinomios $\{p_n(T)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f(T)x \mid f \in C(\sigma(T))\}$ para la cual $p_n(T)x \rightarrow y$. Así, $H = \overline{\{f(T)x \mid f \in C(\sigma(T))\}}$.

Solo falta corroborar que U es un operador sobreyectivo. Para ello considérese cualquier fun-

ción $f \in L^2$ arbitraria. Como $\sigma(T)$ es un espacio métrico compacto, el teorema 110 indica que $C(\sigma(T))$ es denso en $L^2(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), \mu_x, \mathbb{C})$. Por consiguiente, se tiene la existencia de una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\sigma(T))$ para la cual $f_n \rightarrow f$ en L^2 . Esto implica que $\{f_n\} = \{U(f_n(T)x)\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 por lo que $\{f_n(T)x\}$ también será de Cauchy, pero en H debido a que U es un operador de norma 1. Como H es un espacio de Hilbert, lo anterior implica la existencia de un $t \in H$ para el cual $\{f_n(T)x\} \rightarrow t$. Por tanto,

$$U(t) = U\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(T)x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f_n(T)x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Con esto y por la identidad de polarización (ver [14] para más información) se llega a la conclusión de que U es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert H y $L^2(\sigma(T), \mu_x)$.

Ahora ya se puede mostrar que para todo $f \in L^2$ y para casi todo $\lambda \in \sigma(T)$ con respecto a μ_x se cumple que $(UTU^{-1}f)\lambda = \lambda f(\lambda)$. Primero, si $f \in C(\sigma(T))$, se verifica que

$$\begin{aligned} (UTU^{-1}f)(\lambda) &= (UT\phi_T(f)x)\lambda = (U\phi_T(Id_{\sigma(T)})\phi_T(f)x)\lambda = (U\phi_T(Id_{\sigma(T)}f)x)\lambda \\ &= (Id_{\sigma(T)}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda). \end{aligned}$$

Luego, si $f \in L^2$, de manera que existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ convergente a f en L^2 ;

$$UTU^{-1}(f) = UTU^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} UTU^{-1}(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Id_{\sigma(T)}f_n,$$

ya que el operador UTU^{-1} es una composición de funciones continuas. Como $\sigma(T)$ es compacto, existe un $M \in \mathbb{R}$ para el cual $|Id_{\sigma(T)}| \leq M$. En consecuencia:

$$\|Id_{\sigma(T)}f_n - Id_{\sigma(T)}f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\sigma(T)} |Id_{\sigma(T)}(f_n - f)|^2 d\mu_x} \leq M \sqrt{\int_{\sigma(T)} |f_n - f|^2 d\mu_x} \rightarrow 0$$

por lo que $Id_{\sigma(T)}f_n \rightarrow Id_{\sigma(T)}f$ en L^2 , lo cual indica que

$$UTU^{-1}(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Id_{\sigma(T)}f_n = Id_{\sigma(T)}f \text{ en } L^2.$$

■

Desafortunadamente, no todo operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ tiene un vector cíclico en H .

Pero siempre se puede descomponer a este último en una suma de subespacios T -invariantes en donde dicho operador tiene un vector cíclico en cada uno de ellos.

Lema 135 Sea T un operador acotado autoadjunto definido en un espacio de Hilbert H . Se tiene la existencia de una descomposición de H :

$$H = \bigoplus_{\alpha \in I} H_{\alpha} \quad (2.1)$$

tal que para todo $\alpha \in I$

1. $T(H_{\alpha}) \subset H_{\alpha}$,
2. existe un $x_{\alpha} \in H_{\alpha}$ que es vector cíclico de $T|_{H_{\alpha}}$ (i.e. $H_{\alpha} = \overline{\{f(T)x_{\alpha} : f \in \mathbb{C}[x]\}}$).

Demostración. Este resultado es una aplicación típica del Lema de Zorn. Se va a demostrar que el conjunto $\mathcal{A}$ conformado por todos los subespacios de Hilbert que cumplen con las condiciones descritas en el lema tiene como elemento maximal a H . Tal conjunto es no vacío ya que contiene al subespacio trivial. Por ende, se puede ordenar declarando que $K_1 \leq K_2$ si K_1 es un subespacio de K_2 y la descomposición del primero está incluida en la del segundo. Es fácil corroborar que $(\mathcal{A}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora considérese cualquier conjunto linealmente ordenado $\{K_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{A}$. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, $K_{\alpha} \leq K_{\beta}$ o $K_{\beta} \leq K_{\alpha}$. En consecuencia, si L y J son dos subespacios de Hilbert de H contenidos en la descomposición de K_{α} y K_{β} , respectivamente, y $K_{\alpha} \leq K_{\beta}$, L también estará en la descomposición de K_{β} por lo que $L = J$ o $L \perp J$ en H . De esto, se verifica que

$$K := \bigoplus \left\{ L \mid \text{existe } \alpha \in I \text{ para el cual } L \text{ está en la descomposición de } K_{\alpha} \right\}$$

es un elemento de $\mathcal{A}$ que es cota superior de $\{K_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$. Entonces, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $A \in \mathcal{A}$. Supóngase que $A \neq H$, de manera que existe un $\psi \in A^{\perp}$ no nulo. Si $B := \overline{\text{gen}(\{T^n(\psi) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})}$, se tiene que $A \perp B$ ya que para cada $x \in A$ y $y \in B$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n a_i T^{n_i}(\psi) \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle x, T^{n_i}(\psi) \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle T^{n_i}(x), \psi \rangle = 0$$

como consecuencia de que A sea T -invariante. Además, ψ es un vector cíclico de T en B . Esto con-

lleva a que $A \oplus B$ sea un elemento de $\mathcal{A}$ estrictamente mayor a A , lo cual contradice la maximalidad de éste. Por lo tanto, $H = A \in \mathcal{A}$. ■

Nótese que el conjunto que indexa la descomposición mostrada en el lema puede tener cualquier cardinalidad. Sin embargo, si H es separable, la cardinalidad de tal conjunto debe de ser numerable ya que cada base ortonormal de cualquier componente de la descomposición es subconjunto de alguna base ortonormal de H .

Cuando se definió el concepto de separabilidad en un espacio de Hilbert, se mencionó que la Forma de Multiplicación del Teorema Espectral es más fácil de trabajar cuando se consideran espacios de Hilbert separables. El motivo de ello quedará claro en el siguiente teorema, el cual sólo se enunciará y mostrará para estos espacios. Al termino de la demostración, se comentarán los detalles técnicos que hay que cambiar en el enunciado que se dará del mismo para que este sea valido en cualquier espacio de Hilbert.

Teorema 136 (Teorema Espectral: Forma de Multiplicación)

Sean H un espacio de Hilbert **separable** y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Se tiene la existencia de un espacio de medida real positiva (M, μ) ; una función de variable real $f \in L^\infty(M, \mu, \mathbb{C})$ y un operador unitario $U: H \rightarrow L^2(M, \mu, \mathbb{C})$ para los cuales

$$UTU^{-1} = T_f.$$

Demostración. Si H es de dimensión finita, dígase n , éste admite una base ortonormal conformada únicamente por vectores propios del operador autoadjunto T . En consecuencia, existe un operador unitario $W: H \rightarrow \mathbb{C}^n$ que manda dicha base a la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Si $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, se tiene que

$$(WTW^{-1}\varphi)_i = \lambda_i\varphi_i, \tag{2.2}$$

para cada $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^t \in \mathbb{C}^n$. Si se considera el espacio de medida $(M_n, \mathcal{P}(M_n), \mu)$ con

$$M_n := \{(\lambda_1, 1), (\lambda_2, 2), \dots, (\lambda_n, n)\} \text{ y } \mu: A \in \mathcal{P}(M_n) \mapsto |A| \in \mathbb{R},$$

se obtiene un espacio L^2 que es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}^n$ via la función

$$V: f \in L^2(M_n, d\mu) \mapsto (f(\lambda_1, 1), f(\lambda_2, 2), \dots, f(\lambda_n, n)) \in \mathbb{C}^n.$$

V preserva el producto interno ya que para cualesquiera $f, g \in L^2(M_n, d\mu)$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle_{L^2(M_n, d\mu)} &= \int_{M_n} \bar{f}g = \sum_{i=1}^n \int_{\{(\lambda_i, i)\}} \bar{f}g = \sum_{i=1}^n \overline{f(\lambda_i, i)}g(\lambda_i, i) \\ &= \langle V(f), V(g) \rangle_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, apelando a la ecuación 2.2, definiendo la función $f: M_n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(\lambda_i, i) = \lambda_i$, y al operador $U := V^{-1}W$, se puede reescribir tal ecuación como

$$UTU^{-1} = T_f.$$

Si H es de dimensión infinita, se utiliza la descomposición de H dada por el lema anterior definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T_n := T|_{H_n}, \quad E_n := \sigma_{H_n}(T_n) \times \{n\}, \quad E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad (2.3)$$

y para cada función $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ su restricción estricta a E_n como la función $f_n^*: E \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n^*(x, m) = \delta_{nm}f(x, m)$. La notación σ_{H_n} se utiliza para enfatizar el dominio del operador T_n .

Si ψ_n es un vector cíclico de T_n en E_n , por el teorema 127 se tiene la existencia de una medida μ_{ψ_n} definida en $\mathcal{B}(\sigma_{H_n}(T_n))$ para la cual

$$\mu_{\psi_n}(\sigma_{H_n}(T_n)) = \|\psi_n\|^2. \quad (2.4)$$

Sin perder generalidad, se puede suponer que $\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, nótese que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(E_n) &= \sigma\left(\mathcal{B}(\sigma_{H_n}(T_n)) \otimes \mathcal{B}(\{n\})\right) \\ &= \sigma\left(\{A \times \{n\} \mid A \in \mathcal{B}(\sigma_{H_n}(T_n))\}\right) \\ &= \{A \times \{n\} \mid A \in \mathcal{B}(\sigma_{H_n}(T_n))\}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, se pueden definir las medidas $\mu_n: \mathcal{B}(E_n) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\mu_n(A \times \{n\}) = \mu_{\psi_n}(A)$

para definir la medida

$$\mu: \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.5)$$

$$A \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A \cap E_n).$$

Apelando al lema 134, existen operadores unitarios $U_n: H_n \mapsto L^2(\sigma_{H_n}(T_n), \mu_{\psi_n})$ tales que para cada $f \in L^2(\sigma_{H_n}(T_n))$, $(U_n T_n U_n^{-1} f)\lambda = \lambda f(\lambda)$, $\mu_{\psi_n} - c.t.p.$ Aunado a eso, por la forma en la que están definidos los conjuntos E_n y las medidas μ_n , se tiene que

$$L^2(E, \mu) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L^2(E_n, \mu_n),$$

ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in L^2(E, \mu)$ se cumple que $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n^*$ y $L^2(E_n, \mu_n) \subset L^2(E, \mu)$; y que existe un operador unitario $U_n': L^2(\sigma_{H_n}(T_n), \mu_{\psi_n}) \mapsto L^2(E_n, \mu_n)$ que hace que el operador $W_n := U_n' U_n$ sea un isomorfismo isométrico entre H_n y $L^2(E_n, \mu_n)$. Además, como

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

la aplicación $U = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_n$ hace de H y $L^2(E, \mu)$ espacios isométricamente isomorfos. Por consiguiente, si se define la función boreliana $f: (x, n) \in E \mapsto x \in \mathbb{R}$, para cada $\varphi \in L^2(E, \mu)$

$$\begin{aligned} UTU^{-1}(\varphi) &= UTU^{-1}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n^*\right) = UT\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} W_n^{-1}(\varphi_n^*)\right) \\ &= U\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} TW_n^{-1}(\varphi_n^*)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_n T_n W_n^{-1}(\varphi_n^*) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^* \varphi_n^* = f\varphi. \end{aligned}$$

■

La medida μ dada en la expresión 2.5 pudo haberse definido sin necesidad de suponer que las medidas dadas en la expresión 2.4 fuesen acotadas por $\frac{1}{2^n}$, respectivamente. Lo único que podría cambiar es que μ no fuese finita, pero se seguiría cumpliendo que es una medida σ -finita. Por lo tanto, el teorema anterior se podría haber enunciado con un espacio de medida positiva σ -finita sin necesidad de hacer suposiciones adicionales sobre las medidas de la expresión 2.4.

Para generalizar el teorema anterior a espacios de Hilbert no separables, hay que recurrir a los espacios de medida positiva semifinita. Si H es un espacio de Hilbert de este tipo, su descomposición como suma directa de subespacios que admiten vectores cíclicos

$$H = \bigoplus_{\alpha \in I} H_{\alpha}$$

dada en el lema pasado, podría no ser numerable. Por lo mismo, dicha descomposición incita a que las expresiones dadas en 2.3 se definan como

$$T_{\alpha} := T|_{H_{\alpha}}, \quad E_{\alpha} := \sigma_{H_{\alpha}}(T_{\alpha}) \times \{\alpha\}, \quad E := \bigcup_{\alpha \in I} E_{\alpha}.$$

El resto de la prueba seguiría igual, reemplazando las sumas directas numerables por sumas indexadas por I , a excepción de la definición de la medida μ dada en 2.5, la cual se escribiría como una suma sobre el índice I en el sentido de la definición 62. Por tanto, la medida μ sería una suma no numerable de medidas finitas, por lo que ya no se podría hacer finita mediante el truco de normalizar cada uno de sus sumandos. Esto podría dar lugar a que μ fuese no finita o, peor aún, que no fuese σ -finita. Aun así, para $A \in E$ medible se tiene que $A \cap E_{\alpha}$ es un conjunto medible con medida positiva finita. Entonces sólo basta enunciar el teorema anterior con espacios de medida positiva semifinita para hacerlo valido para espacios de Hilbert no separables.

En el siguiente capítulo se utilizará esta versión del Teorema Espectral para generalizar al mismo en el caso de Operadores Autoadjuntos no Acotados. Se asumirá, por tanto, que se ha validado el teorema para cualquier espacio de Hilbert.

2.3. Forma De Las Medidas Espectrales

En esta sección se enunciará y se mostrará la tercera y última forma del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados. Dado un espacio de Hilbert H , dicha forma del Teorema Espectral permite, en cierto sentido, derivar del Cálculo Funcional Boreliano de un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ (teorema 132) una medida que toma valores en $\mathcal{L}(H)$ en vez de $\mathbb{C}$. Tales medidas son conocidas como medidas espectrales sobre H , y el teorema espectral indica que el conjunto formado por las *medidas espectrales de soporte compacto* está en biyección con el conjunto

de operadores autoadjuntos pertenecientes a $\mathcal{L}(H)$. Las definiciones y los teoremas de esta sección pueden consultarse en [3], [4], [6], [14] y [18].

Definición 137 Sean $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y H un espacio de Hilbert. Una aplicación

$$\begin{aligned} E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ A &\longmapsto E_A \end{aligned}$$

es una medida espectral (real) si

1. E_A es una proyección ortogonal para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (i.e. $E_A = E_A^2 = E_A^*$).
2. $E_\emptyset = 0$ y $E_\mathbb{R} = I$
3. para cada $x \in H$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ partición de éste, se cumple que

$$E_A(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E_{A_i}(x).$$

Aunado a esto, se define el soporte de la medida espectral E como el conjunto

$$\sigma(E) := \mathbb{R} \setminus \cup \{A \subset \mathbb{R} \text{ abierto} \mid E_A = 0\}.$$

Si este último es compacto, se dice que la medida espectral es de soporte compacto.

Cada operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ provee la siguiente medida espectral:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_T: \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ A &\longmapsto \phi_T(\mathcal{X}_{A \cap \sigma(T)}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como $\mathcal{B}(\sigma(T)) = \{A \cap \sigma(T) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, es fácil corroborar que $\mathcal{X}_T$ es una medida espectral si se analizan los borelianos contenidos en $\sigma(T)$. Por ejemplo, las propiedades de las funciones características indican que para cada $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$

$$\mathcal{X}_T(A)^2 = \phi_T(\mathcal{X}_A^2) = \phi_T(\mathcal{X}_A) = \mathcal{X}_T(A) = \phi_T(\overline{\mathcal{X}_A}) = \mathcal{X}_T(A)^*.$$

En particular, para el conjunto vacío se tiene que $\mathcal{X}_T(\emptyset) = \phi_T(\mathcal{X}_\emptyset) = \phi_T(0) = 0$ y como para cada $x, y \in H$

$$\langle x, \phi_T(\mathcal{X}_{\sigma(T)})y \rangle = \int_{\sigma(T)} \mathcal{X}_{\sigma(T)} d\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} 1 d\mu_{x,y} = \langle x, I(y) \rangle,$$

se concluye que $\mathcal{X}_T(\sigma(T)) = \phi_T(\mathcal{X}_{\sigma(T)}) = I$.

Por otra parte, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\sigma(T))$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos y $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, para cada $p \in \sigma(T)$ la sucesión

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{A_i}(p) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{X}_A(p)$$

por lo que el punto 2 del Teorema Espectral en su versión del Cálculo Funcional Borealino (teorema 132) permite concluir que para cada $x \in H$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_T(A_i)(x) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{X}_T(A)(x).$$

En el lema 140 se mostrará que $\sigma(\mathcal{X}_T) = \sigma(T)$, de manera que estas medidas siempre serán de soporte compacto. El resultado principal de esta subsección dirá que todas las medidas espectrales de soporte compacto en $\mathcal{L}(H)$ son de esta forma. Más aún, se observará que para cada medida espectral de soporte compacto $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, existe un único $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto para el cual $E = \mathcal{X}_T$. Para llegar a ello, se mostrarán algunas propiedades de las medidas espectrales con ayuda del siguiente lema técnico.

Lema 138 Sean H un espacio de Hilbert y $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ proyecciones ortogonales. Se tiene que

1. PQ es una proyección ortogonal si y sólo si $PQ = QP$.
2. $P + Q$ es una proyección ortogonal si y sólo si $PQ = 0$.

Demostración. Si PQ es una proyección ortogonal, entonces $PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$. Recíprocamente, si esta última igualdad se da, PQ es una proyección ortogonal debido a que

$$\begin{aligned} (PQ)^* &= Q^*P^* = QP = PQ, \\ (PQ)^2 &= (PQ)(PQ) = P(QP)Q = P(PQ)Q = P^2Q^2 = PQ. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se supone que $PQ = 0$, se obtiene que $0 = 0^* = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$ por lo cual

$$(P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q,$$

$$(P + Q)^* = P^* + Q^* = P + Q,$$

teniéndose así que $P + Q$ es una proyección ortogonal.

Para demostrar el recíproco de la proposición anterior, nótese que

$$P + Q = (P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q + PQ + QP$$

implica que $PQ + QP = 0$ y, por tanto, que $PQ = -QP$. De esto, $PQ = PPQQ = -PQPQ$ y

$$PQP = PPQP = -PQPP = -PQP,$$

por lo cual $PQP = 0$ y $PQPQ = 0$. Así, se concluye que $PQ = -PQPQ = 0$.

■

Teorema 139 Si $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ es una medida espectral, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $x, y \in H$ se cumple que:

1. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $E_A + E_B = E_{A \cup B}$ y $E_A E_B = 0$.
2. $E_A + E_B = E_{A \cap B} + E_{A-B} + E_B = E_{A \cup B} + E_{A \cap B}$.
3. Si $A \subset B$, entonces $E_{B \setminus A} = E_B - E_A$, $\langle x, (E_B - E_A)(x) \rangle \geq 0$ y $E_B E_A = E_A E_B = E_A$.
4. $E_A E_B = E_{A \cap B}$ y si $A \cap B = \emptyset$, $\langle E_A(x), E_B(y) \rangle = 0$.

Demostración.

1. Si $A_1 := A, A_2 := B$ y $A_n := \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, se obtiene que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A \cup B$ por lo que para cada $x \in H$ se verifica que

$$E_A(x) + E_B(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} E_{A_i}(x) = E_{A \cup B}(x),$$

teniéndose así que $E_{A \cup B} = E_A + E_B$. Como $E_{A \cup B}$ es una proyección ortogonal, $E_A + E_B$ también lo es por lo que del lema anterior se sigue que $E_A E_B = 0$.

2. Como $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ y $(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$, $E_A = E_{A \cap B} + E_{A - B}$ por lo cual

$$E_A + E_B = E_{A \cap B} + E_{A - B} + E_B;$$

y al ser $A \cup B = (A - B) \cup B$ y $(A - B) \cap B = \emptyset$, $E_{A - B} + E_B = E_{A \cup B}$ por lo que se concluye que

$$E_A + E_B = E_{A \cup B} + E_{A \cap B}.$$

3. Si $A \subset B$, entonces $B = B \cup A = (B \setminus A) \cup A$ y al ser $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $E_B = E_{B - A} + E_A$ y, por tanto, $E_{B \setminus A} = E_B - E_A$. Por consiguiente, para cada $x \in H$

$$\begin{aligned} \langle x, (E_B - E_A)(x) \rangle &= \langle x, E_{B - A}(x) \rangle = \langle x, E_{B - A}^2(x) \rangle = \langle E_{B - A}^*(x), E_{B - A}(x) \rangle \\ &= \langle E_{B - A}(x), E_{B - A}(x) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, por el inciso 1 se tiene que

$$\begin{aligned} E_B E_A &= (E_{B \setminus A} + E_A) E_A = E_{B \setminus A} E_A + E_A^2 = E_{B \setminus A} E_A + E_A = E_A \\ &= E_A E_{B \setminus A} + E_A = E_A E_{B \setminus A} + E_A^2 = E_A (E_{B \setminus A} + E_A) = E_A E_B. \end{aligned}$$

4. Por hipótesis, $E_A E_B = E_A (E_{B \setminus A} + E_{A \cap B}) = E_A E_{B \setminus A} + E_A E_{A \cap B}$. Del inciso 1, $E_A E_{B \setminus A} = 0$ y por el hecho de que $A \cap B \subset A$, el inciso anterior implica que $E_A E_{A \cap B} = E_{A \cap B}$, por lo cual $E_A E_B = E_{A \cap B}$. En particular, si $A \cap B = \emptyset$, para cada $x, y \in H$

$$\langle E_A(x), E_B(y) \rangle = \langle E_B^* E_A(x), y \rangle = \langle E_B E_A(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$

■

Las propiedades 1 y 2 son análogas a las que se presentan para las medidas convencionales. Una conexión más profunda, entre estas últimas y las medidas espectrales, está contenida en el siguiente resultado:

Lema 140 *Sea H un espacio de Hilbert. Una función $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ es una medida espectral*

si y sólo si para cualesquiera $x, y \in H$ la función

$$m_{x,y}: A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \langle x, E_A(y) \rangle \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

resulta ser una medida para la cual $m_{x,x}(\mathbb{R}) = \|x\|^2$. Si E resulta ser medida espectral, se tiene que $E_{\sigma(E)} = I$.

Demostración. La primera parte del lema es consecuencia directa de las propiedades de las medidas, por lo que sólo corresponde corroborar que $E_{\sigma(E)} = I$.

Para ello se probará que $E_{\mathbb{R} \setminus \sigma(E)} = 0$. Como $\mathbb{R} \setminus \sigma(E)$ es la unión de los abiertos de medida espectral 0, existe una sucesión de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cuya unión resulta en este último; el cual, por lo mismo, funge como una cubierta abierta de cada I_i . Al ser $\mathbb{R}$ de Lindelöf, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una colección de abiertos $\{A_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \sigma(E))$ que cubre a I_i . En consecuencia, para cada $x \in H$

$$0 \leq \langle x, E_{I_i}(x) \rangle \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x, E_{A_{ij}}(x) \rangle = 0$$

por lo que $E_{I_i} = 0$. El mismo argumento se puede aplicar en $\mathbb{R} \setminus \sigma(E)$ para corroborar que $E_{\mathbb{R} \setminus \sigma(E)}$ también es 0. Por consiguiente, $E_{\sigma(E)} = E_{\mathbb{R}} - E_{\mathbb{R} \setminus \sigma(E)} = I$. ■

Como es de esperar, se puede definir la integral de una función $f \in B_b(\mathbb{R})$ respecto a una medida espectral E , utilizando un argumento inspirado en el procedimiento que se sigue para construir la integral de Lebesgue: definir la integral respecto de E para funciones simples y luego extender dicha definición a cualquier función borealiana y acotada utilizando un argumento de continuidad. Para lograr lo primero, se necesita el siguiente teorema cuya demostración es análoga a su versión para medidas convencionales debido a las propiedades exhibidas en el teorema 139.

Teorema 141 Sean H un espacio de Hilbert, E una medida espectral y $s \in B_b(\mathbb{R})$ una función simple. Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ son dos familias de conjuntos borelianos para las cuales

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j} ,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j E_{B_j} .$$

Ahora es fácil deducir como será la integral de una función simple:

Definición 142 Si $s \in B_b(\mathbb{R})$ es una función simple, su integral en $\mathcal{L}(H)$ bajo la medida espectral E se define como

$$\int s \, dE := \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i},$$

en donde $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ es cualquier combinación lineal de funciones características que define a s .

Por el teorema anterior, se tiene la garantía de que la integral de cualquier función simple está bien definida.

Teorema 143 Sean H un espacio de Hilbert y E una medida espectral. Si S es el conjunto de funciones simples con dominio $\mathbb{R}$ y contradominio $\mathbb{C}$, la aplicación

$$\varphi : s \in S \mapsto \int s \, dE \in \mathcal{L}(H)$$

es un homomorfismo continuo que preserva unidades e involuciones.

Demostración. Sean $\alpha, \in \mathbb{C}$ y $s_1, s_2 \in B_b(\mathbb{R})$ dos funciones simples con las representaciones

$$s_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \text{ y } s_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j B_j.$$

Se tiene que

$$\alpha s_1 + s_2 = \alpha \alpha_1 \mathcal{X}_{A_1} + \cdots + \alpha \alpha_n \mathcal{X}_{A_n} + \beta_1 \mathcal{X}_{B_1} + \cdots + \beta_m \mathcal{X}_{B_m},$$

por lo que el lado derecho de la ecuación anterior brinda una combinación lineal de funciones características que describe a $\alpha s_1 + s_2$. Por lo tanto,

$$\int (\alpha s_1 + s_2) \, dE = \alpha \alpha_1 E_{A_1} + \cdots + \alpha \alpha_n E_{A_n} + \beta_1 E_{B_1} + \cdots + \beta_m E_{B_m} = \alpha \int s_1 \, dE + \int s_2 \, dE.$$

Similarmente,

$$s_1 s_2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{A_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{X}_{B_j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mathcal{X}_{A_i} \mathcal{X}_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mathcal{X}_{A_i \cap B_j};$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int s_1 s_2 dE &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j E_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j E_{A_i} E_{B_j} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i} \right) \circ \left(\sum_{j=1}^m \beta_j E_{B_j} \right) = \int s_1 dE \circ \int s_2 dE. \end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que por ser

$$\bar{s} = \overline{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i \mathcal{X}_{A_i}} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \mathcal{X}_{A_i},$$

se verifica que

$$\int \bar{s} dE = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} E_{A_i} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} E_{A_i}^* = \sum_{i=1}^n (\alpha_i E_{A_i})^* = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i} \right)^* = \left(\int s dE \right)^*.$$

Sólo falta ver la continuidad de φ . Para ello obsérvese que si $s \in S$, entonces existe una colección de conjuntos borelianos $\{A_i\}_{i=1}^n$ disjuntos dos a dos y una colección de números complejos $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ para los cuales

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i.$$

Por consiguiente, si x es un vector unitario,

$$\left\| \left(\int s dE \right) x \right\|_H^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i}(x) \right\|_H^2.$$

Además, por ser $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $\langle E_{A_i}(x), E_{A_j}(x) \rangle = 0$, por lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i}(x) \right\|_H^2 &= \sum_{i=1}^n \|\alpha_i E_{A_i}(x)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|E_{A_i}(x)\|^2 \\ &\leq \max_{i=1,2,\dots,n} |\alpha_i|^2 \sum_{i=1}^n \|E_{A_i}(x)\|^2 \\ &= \left(\max_{i=1,2,\dots,n} |\alpha_i| \right)^2 \left\| \sum_{i=1}^n E_{A_i}(x) \right\|_H^2. \end{aligned}$$

Aunado a esto, como $\left(\max_{i=1,2,\dots,n} |\alpha_i|\right)^2 = \|s\|_\infty^2$ y $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbb{R}$, se cumple que $\sum_{i=1}^n E_{A_i} = E_{\mathbb{R}}$ por lo cual

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i}(x) \right\|^2 \leq \|s\|^2 \|E_{\mathbb{R}}(x)\|^2 \leq \|s\|^2 \|x\|^2 \leq \|s\|^2$$

para cualquier vector unitario $x \in H$. Por consiguiente,

$$\left\| \int s \, dE \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|s\|_\infty.$$

■

Al ser $B_b(\mathbb{R})$ la completación de S bajo la norma infinito, este teorema permite utilizar el Teorema del Operador Acotado (teorema 12) sobre φ para definir la integral con respecto a E de una función boreliana y acotada.

Definición 144 Sea $f \in B_b(\mathbb{R})$. Se define la integral de f en $\mathcal{L}(H)$ bajo la medida E como

$$\int f \, dE := \varphi(f),$$

en donde φ es la extensión a $B_b(\mathbb{R})$ comentada previamente.

Teorema 145 Sean H un espacio de Hilbert y $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ una medida espectral. Se tiene que la aplicación

$$\varphi: B_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

es un $*$ -homomorfismo que respeta unidades. Aunado a esto, $\varphi(f)$ es un operador normal para todo $f \in B_b(\mathbb{R})$ y es autoadjunto si f sólo toma valores reales.

Demostración. Como φ es una extensión continua del $*$ -homomorfismo visto en el teorema 143, unos argumentos análogos a los dados en el punto 1 del teorema 127 permiten concluir que φ sigue siendo un homomorfismo entre C^* -álgebras. Por ende, para cualquier $f \in B_b(\mathbb{R})$ se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi(f) \circ \varphi(f)^* &= \varphi(f) \circ \varphi(\bar{f}) = \varphi(f\bar{f}) = \varphi(\bar{f}f) = \varphi(\bar{f}) \circ \varphi(f) \\ &= \varphi(f)^* \circ \varphi(f). \end{aligned}$$

En particular, si f sólo toma valores reales $\varphi(f)^* = \varphi(\bar{f}) = \varphi(f)$. ■

Así como las medidas espectrales están relacionadas con las medidas convencionales mediante la ecuación 5.2, las integrales espectrales (aquellas que se hacen con respecto a las medidas espectrales) están relacionadas con las integrales convencionales tal y como lo muestra el siguiente resultado:

Lema 146 Sean H un espacio de Hilbert y $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ una medida espectral. Para cualesquiera $x, y \in H$ y $f \in B_b(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\langle x, \varphi(f)y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f dm_{x,y}, \quad (2.8)$$

en donde $m_{x,y}$ es la medida dada por la expresión 2.7.

Demostración.

1. Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A dm_{x,y} = m_{x,y}(A) = \langle x, E_A(y) \rangle = \langle x, \varphi(\chi_A)(y) \rangle.$$

2. Si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ es una función simple, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f dm_{x,y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_{x,y}(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, E_{A_i}(y) \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i} \right\rangle = \langle x, \varphi(f)y \rangle.$$

3. Por último, si $f \in B_b(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ que converge uniformemente a f y para la cual

$$|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como f es acotada, existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f| \leq M$, por lo que el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\int_{\mathbb{R}} f dm_{x,y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm_{x,y},$$

pues $|\mu_{x,y}|(\mathbb{R}) < +\infty$. Esto permite concluir que

$$\int_{\mathbb{R}} f dm_{x,y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, \varphi(f_n)y \rangle = \langle x, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n)y \rangle = \langle x, \varphi(f)y \rangle.$$

■

Este lema indica que para cada $x \in H$ y $f \in B_b(\mathbb{R})$ se satisfacen las siguientes dos igualdades:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm_x = \langle x, \varphi(|f|^2)x \rangle = \langle \varphi(f)x, \varphi(f)x \rangle = \|\varphi(f)(x)\|^2, \quad (2.9)$$

$$\langle x, \varphi(f)x \rangle = \int_{\mathbb{R}} f dm_x = \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{X}_{\sigma(E)} dm_x = \langle x, \varphi(f \mathcal{X}_{\sigma(E)})x \rangle. \quad (2.10)$$

La última ecuación conlleva a que $\varphi(f) = \varphi(f \mathcal{X}_{\sigma(E)})$. En consecuencia, se puede trabajar solamente con las funciones borealianas y acotadas definidas sobre $\sigma(E)$. Más aún, si $f \in B(\mathbb{R})$ es tal que $f \mathcal{X}_{\sigma(E)} \in B_b(\sigma(E))$, entonces se puede definir $\varphi(f) := \varphi(f \mathcal{X}_E)$, puesto que lo único que importa de una función para que ésta pueda ser integrada con respecto a E es que sea medible y acotada sobre $\sigma(E)$.

Con estas observaciones ya se puede dar la biyección entre el conjunto de operadores continuos y autoadjuntos de un espacio de Hilbert H y las medidas espectrales de soporte compacto definidas en éste. Para ello se utilizarán los siguientes 2 teoremas:

Teorema 147 Sean H un espacio de Hilbert y $E: B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ una medida espectral de soporte compacto. Si

$$T := \int \lambda dE_{\lambda},$$

entonces $\sigma(E) = \sigma(T)$ y la asignación

$$\begin{aligned} \varphi: B_b(\sigma(T)) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\longmapsto \int f dE \end{aligned}$$

coincide con el cálculo funcional borealino ϕ_T de T .

Demostración. Primero hay que probar que $\sigma(E) = \sigma(T)$. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(E)$, se puede afirmar la existencia de un $\delta > 0$ para el cual $B := B_{\delta}(\lambda) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(E)$. De esto, $0 = E_{\mathbb{R} \setminus \sigma(E)} \circ E_B = E_B$ por lo que para cada $x \in H$

$$\begin{aligned} \|T(x) - \lambda x\|^2 &= \langle \varphi(Id_{\mathbb{R}} - \lambda)x, \varphi(Id_{\mathbb{R}} - \lambda)x \rangle \\ &= \langle x, \varphi(|Id_{\mathbb{R}} - \lambda|^2)x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} |z - \lambda|^2 dm_x(z). \end{aligned}$$

Como $\mu_x(B) = \langle x, E_B x \rangle = 0$ y $\mu_x(\mathbb{R}) = \|x\|^2$, la ecuación anterior implica que

$$\|T(x) - \lambda(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R} \setminus B} |z - \lambda|^2 dm_x(z) \geq \int_{\mathbb{R} \setminus B} \delta^2 dm_x(z) = \delta^2 \|x\|^2, \quad (2.11)$$

por lo que el teorema 25 indica que $T - \lambda I$ es inyectiva y que su imagen es cerrada. Agregado a esto, la expresión 2.11 también implica que $T - \lambda I$ es sobreyectiva, ya que si se toma a cualquier $x \in \text{Im}(T - \lambda I)^\perp = \ker(T^* - \bar{\lambda}I) = \ker(T - \lambda I)$, se llega a que

$$0 = \|T(x) - \lambda(x)\|^2 \geq \delta^2 \|x\|^2,$$

por lo cual $H = \{0\}^\perp = \text{Im}(T - \lambda I)^{\perp\perp} = \text{Im}(T - \lambda I)$.

Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma(E)$, para cualquier $\delta \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $B := B_{\delta/2}(\lambda)$ no es un conjunto de medida espectral nula, por lo que $\text{Im}(E_B)$ contiene un vector unitario $x \in H$. Al ser $x = E_B(v)$ para algún $v \in H$, $m_x(\mathbb{R} \setminus B) = \langle x, E_{\mathbb{R} \setminus B}(x) \rangle = \langle x, E_{\mathbb{R} \setminus B} E_B(v) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$. Por consiguiente,

$$\|T(x) - \lambda(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |z - \lambda|^2 dm_x(z) = \int_B |z - \lambda|^2 dm_x(z) \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\delta}{2} \right|^2 dm_x(z) = \frac{\delta^2 \|x\|^2}{4} < \delta^2 \|x\|^2.$$

Esto muestra que $T - \lambda I$ no puede ser acotado por abajo, por lo que se concluye que tampoco puede ser invertible. De serlo, el Teorema del Mapeo Inverso (corolario 3) implicaría que dicho operador tendría que estar acotado por abajo, lo cual, como se acaba de verificar, es falso.

Ahora se mostrará que $\varphi = \phi_T$ verificando que φ también extiende al cálculo funcional continuo de T (teorema 127) cumpliendo la propiedad 2 enunciada en el teorema 132. Un paso previo es probar que φ extiende el cálculo funcional polinomial de T (teorema 125). Para ello, defínanse las funciones $f_n: \lambda \in \sigma(T) \mapsto \lambda^n \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$,

$$\varphi(f_1) = \int \lambda dE(\lambda) = T = \phi_T(f_1).$$

Utilizando inducción matemática al suponer que existe un $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\varphi(f_n) = \phi_T(f_n)$, se sigue que

$$\varphi(f_{n+1}) = \varphi(f_n f) = \varphi(f_n) \circ \varphi(f) = \phi_T(f_n) \circ \phi_T(f) = \phi_T(f_n f) = \phi_T(f_{n+1})$$

por lo que $\varphi(f_n) = \phi_T(f_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, la linealidad de φ y ϕ_T implica que ambas funciones coinciden en $\mathbb{C}_{\sigma(T)}[x]$.

Finalmente, si $f \in C(\sigma(T))$, por el teorema de Stone-Weierstrass (teorema 50) existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a f . Esto conlleva a que

$$\varphi(f) \leftarrow \varphi(p_n) = \phi_T(p_n) \rightarrow \phi_T(f)$$

por lo que φ extiende al Cálculo Funcional Continuo de T .

Para concluir, nótese que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\sigma(T))$ es una sucesión uniformemente acotada que converge puntualmente a otra función f , entonces $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ de manera puntual debido a que para cada $x \in H$

$$\|\varphi(f_n)x - \varphi(f)x\|^2 = \langle x, \varphi(|f_n - f|^2)x \rangle = \int_{\sigma(T)} |f_n - f|^2 dm_x \rightarrow 0$$

como consecuencia de que φ sea un $*$ -homomorfismo y que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \in L^2(\sigma(T), \mu_x)$. Así, una aplicación directa del mismo teorema 132 permite concluir que $\varphi = \phi_T$. ■

Teorema 148 *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Existe una única medida espectral $E : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(H)$ de soporte compacto para la cual*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Además, la aplicación

$$f \in B_b(\sigma(T)) \mapsto \int f dE \in \mathcal{L}(H)$$

coincide con el Cálculo Funcional Borealino de T .

Demostración. Considerando la medida espectral $\mathcal{X}_T$ de la definición 2.6, se define el operador

$$S := \int \lambda dE_\lambda.$$

Hay que verificar que $T = S$. Para ello, considere que por ser $g := Id_{\sigma(T)} \in B_b(\sigma(T))$, para cada $\epsilon > 0$ existe una función simple f para la cual $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Por ende, si ϕ_T es el Cálculo Funcional

Boreliano de T y ϕ_S es el Cálculo Funcional Boreliano de S , por continuidad se sigue que

$$\|T - \phi_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\phi_T(g) - \phi_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\phi_T(g - f)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|g - f\|_{\infty} < \epsilon/2.$$

$$\|\phi_S(f) - S\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\phi_S(f) - \phi_S(g)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\phi_S(f - g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|f - g\|_{\infty} < \epsilon/2.$$

Como f es una función simple, existen unos números complejos $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \sigma(T)$ para los cuales

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

Entonces,

$$\phi_T(f) = \phi_T\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_T(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^n a_i E_{A_i};$$

pero por el teorema anterior,

$$\phi_S(f) = \int f \, dE = \sum_{i=1}^n a_i E_{A_i}$$

por lo que $\|\phi_T(f) - \phi_S(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|T - S\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq \|T - \phi_T(f)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|\phi_T(f) - \phi_S(f)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|\phi_S(f) - S\|_{\mathcal{L}(H)} \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon; \end{aligned}$$

implicándose así que $T = S = \int \lambda \, dE_{\lambda}$. Esto permite aplicar el teorema anterior al operador T para verificar que

$$\phi_T(f) = \int f \, dE = \varphi_E(f) \text{ para cada } f \in B_b(\sigma(T)).$$

Por otro lado, si E es una medida espectral para la cual

$$T = \int \lambda \, dE(\lambda),$$

el teorema anterior y lo previamente comentado indican que para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\chi_T(A) = \int \chi_A \, d\chi_T = \phi_T(\chi_A) = \int \chi_A \, dE = E_A.$$

Esto conlleva a que $\chi_T = E$. ■

La consecuencia inmediata de estos teoremas es la tercer versión del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados:

Teorema 149 (Teorema Espectral: Forma de la Medida Espectral) Sea H un espacio de Hilbert. Los conjuntos

$$N := \{T \in \mathcal{L}(H) \mid T = T^*\} \text{ y } M := \{E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H) \mid E \text{ es una medida espectral de soporte compacto}\}$$

están en biyección mediante el siguiente par de funciones que son inversas una de la otra:

$$P : T \in N \mapsto \mathcal{X}_T \in M, \quad Q : E \in M \mapsto \int \lambda dE_\lambda \in N.$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto arbitrario. Se tiene que

$$P(T) = \mathcal{X}_T \text{ y } QP(T) = \int \lambda d\phi_T(\mathcal{X}_\lambda).$$

Por el teorema anterior,

$$T = \int \lambda d\phi_T(\mathcal{X}_\lambda)$$

por lo que ciertamente $QP(T) = T$, implicándose así que $QP = Id_N$. Por otra parte, si E una medida espectral, se observa que

$$Q(E) = \int \lambda dE(\lambda) \text{ y } PQ(E) = \mathcal{X}_{Q(E)}.$$

Una aplicación directa del teorema pasado indica que

$$Q(E) = \int \lambda d\phi_{Q(E)}(\mathcal{X}_\lambda),$$

por lo cual dicho teorema permite concluir que $E = \mathcal{X}_{Q(E)} = PQ(E)$, trayendo como consecuencia que $PQ = Id_M$. ■

Se puede obtener una biyección análoga para el conjunto de todas las medidas espectrales $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ al extender la definición de operador autoadjunto, lo cual se hará en el siguiente

capítulo. Esto último será la generalización de esta forma del Teorema Espectral para operadores autoadjuntos no acotados.

Si se quiere generalizar en otra dirección, se pueden definir medidas espectrales complejas $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, así como en la definición 137, y obtener una biyección que relacione las medidas de soporte compacto complejas con el conjunto de operadores normales acotados actuando en H . En [9] se realiza lo anterior con el teorema que se acaba de probar. Con esta versión generalizada para operadores normales, se obtiene un Cálculo Funcional Boreliano para estos y con ello se generaliza la forma de multiplicación del Teorema Espectral para esta clase de operadores.

En el presente trabajo sólo hay interés por realizar la extensión a operadores autoadjuntos no acotados; pero para ello es necesario contar con la forma de multiplicación del Teorema Espectral para Operadores Normales. La siguiente sección está dedicada a este último objetivo y lo hará con una metodología diferente a la propuesta en el párrafo anterior.

2.4. Teorema Espectral Para Operadores Normales Acotados

En la presente sección se sigue el trabajo realizado en [4] y [15] para demostrar el Teorema Espectral para Operadores Normales Acotados. Lo que se realizará es la construcción de un Cálculo Funcional Continuo para cualquier elemento normal de una C^* -álgebra unitaria. Al particularizar éste a un operador normal acotado actuando en un espacio de Hilbert, la forma de multiplicación del Teorema Espectral se obtendrá de manera análoga a la sección antepasada.

Para ello es necesario estudiar las álgebras cocientes de una álgebra de Banach conmutativa; lo cual requiere un estudio preliminar acerca de los espacios cocientes de un espacio vectorial.

Definición 150 Sean X un espacio vectorial y M un subespacio vectorial de éste. Para cada $x \in X$ se define la clase lateral $[x]_M := x + M = \{x + m \mid m \in M\}$ y al conjunto de éstas como el espacio cociente

$$X/M := \{[x]_M \mid x \in X\}.$$

Es fácil verificar que las operaciones

$$[x]_M + [y]_M := [x + y]_M \quad \text{y} \quad \alpha[x]_M := [\alpha x]_M$$

están bien definidas y hacen del espacio cociente un espacio vectorial sobre el mismo campo en el que está basado V (ver [14]). La relación entre éste y los espacios X y M se revela en la siguiente sucesión exacta:

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\pi} X/M \longrightarrow \{0\}, \quad (2.12)$$

en donde φ y π fungen como las proyecciones canónicas de sus respectivos dominios en sus contra-dominios correspondientes.

Si X es un $\mathbb{K}$ -espacio normado, se puede enriquecer la estructura del espacio cociente si se cocienta con un subespacio vectorial cerrado (i.e. con un subespacio vectorial W tal que $W = \overline{W}$).

Teorema 151 *Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de éste. Se tiene que el espacio cociente X/M es un $\mathbb{K}$ -espacio normado bajo la norma*

$$\|x + M\|_1 := \inf_{m \in M} \|x + m\|_X = \inf_{m \in M} \|x - m\|_X = \text{dist}(x, M). \quad (2.13)$$

Además, si X es de Banach, el cociente también lo es.

Demostración. Nótese que la propuesta de norma para cualquier clase $x + M$ está bien definida, ya que simplemente se está considerando el ínfimo de las normas de cada elemento que pertenece a ella. Las igualdades expuestas para dicha propuesta prueban de manera rápida que $\|\cdot\|_1$ es una norma en X/M .

Ahora supongase que X es de Banach. Para probar que el espacio normado $(X/M, \|\cdot\|_1)$ es de Banach se usará el teorema 9.

Sea $\{x_n + M\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X/M$ una sucesión absolutamente sumable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se selecciona un $m_n \in M$ para el cual

$$\|x_n - m_n\|_X \leq 2 \inf_{m \in M} \|x_n - m\|_X.$$

De esto, la sucesión $\{x_n - m_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es absolutamente sumable, por lo que el mismo teorema 9 implica que es sumable en X . Por tanto, si $y = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - m_n)$, se verifica que para $N \rightarrow +\infty$,

$$\left\| \sum_{n=1}^N [x_n]_M - [y]_M \right\|_1 = \inf_{m \in M} \left\| \left(\sum_{n=1}^N x_n - y \right) - m \right\|_X \leq \left\| \sum_{n=1}^N x_n - y - \sum_{n=1}^N m_n \right\|_X \longrightarrow 0.$$

Esto prueba que $\{[x_n]_M\}_{n \in \mathbb{N}}$ es sumable, concluyéndose así que X/M es un espacio de Banach. ■

Con las hipótesis y la conclusión del teorema anterior, la expresión 2.12 se torna en una sucesión exacta entre espacios de Banach para la cual $\|\pi\| \leq 1$.

La construcción del espacio normado cociente permite completar la prueba del teorema de Hanh Banach Real mediante el siguiente resultado:

Teorema 152 Sean X un $\mathbb{K}$ -espacio normado y M y N subespacios vectoriales de éste. Si M es cerrado y N es de dimensión finita, $M + N$ es un subespacio cerrado de X .

Demostración. Considérese la proyección canónica π al espacio cociente X/M . Como N es de dimensión finita, $\pi(N)$ también es de dimensión finita como subespacio vectorial del cociente. En consecuencia, dicho subespacio es cerrado en X/M por lo que $\pi^{-1}(\pi(N))$ es un cerrado en X . Por ende, sólo falta demostrar que este último coincide con $M + N$. Para ello, obsérvese que $x \in \pi^{-1}(\pi(N))$ si y sólo si $x + M = \pi(x) \in \pi(N)$, lo cual únicamente sucede si existe un $n \in N$ tal que $x - n \in M$. Como esto último es equivalente a que $x \in M + N$, se concluye que $M + N = \pi^{-1}(\pi(N))$ es cerrado en X . ■

Para el caso de las $\mathbb{K}$ -álgebras, los espacios cocientes adquieren estructura de $\mathbb{K}$ -álgebra cuando el subespacio por el que se cocienta resulta ser un *ideal*.

Definición 153 Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra. Se dice que un subespacio vectorial $I \subset A$ es un ideal de A si $IA + AI \subset A$. Si $I \neq A$, el ideal I es propio y si los únicos ideales de A son él mismo y el ideal $\{0_A\}$, A es una álgebra simple.

Dado un ideal I de A , el espacio cociente A/I hereda una estructura de $\mathbb{K}$ -álgebra mediante la operación bien definida

$$[x]_I * [y]_I := [x * y]_I,$$

de manera que la expresión 2.12 se vuelve una sucesión exacta entre $\mathbb{K}$ -álgebras. Además, si A tiene unidad 1_A , la álgebra A/I tendrá unidad $[1_A]_I$ y si A es una álgebra normada, la norma dada en el teorema 151 hará de A/I una álgebra normada si I es cerrado. Para corroborar esto, nótese que si $x, y \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \|xy + I\|_{A/I} &= \inf_{z \in I} \|xy - z\|_A \leq \inf_{z_1, z_2 \in I} \|xy + xz_2 + z_1y + z_1z_2\| = \inf_{z_1, z_2 \in I} \|(x + z_1)(y + z_2)\| \\ &= \inf_{z_1 \in I} \|x - z_1\|_A \inf_{z_2 \in I} \|y - z_2\|_A = \|x + A\|_{A/I} \|y + A\|_{A/I}. \end{aligned}$$

Un argumento análogo al dado en el corolario 4, muestra que la cerradura de cualquier ideal es un ideal. Además, si A es una álgebra de Banach e I es un ideal cerrado de ella, el teorema 151 implica que el álgebra A/I también es de Banach. Aunado a ello, si A tiene una unidad de norma 1 e I es propio, el álgebra cociente también tendrá una unidad de norma 1, pues

$$1 = \|1_A\|_A \geq \inf_{z \in I} \|1 + z\|_A = \|1_A + I\|_{A/I} \geq 1$$

como consecuencia del siguiente lema:

Lema 154 *Sea A una álgebra de Banach con una unidad de norma 1. Si I es un ideal propio de A , $\bar{I}$ también lo es y para cada $z \in I$ se sigue que $\|1_A + z\| \geq 1$.*

Demostración. Si existiese un elemento $z \in I$ para el $\|1_A + z\| < 1$, el lema 34 implicaría que z es invertible en A por lo que $1_A = zz^{-1} \in I$, lo cual no puede ser. Eso también implica que $\|1_A + z\| \geq 1$ para cada $z \in \bar{I}$ por un argumento de continuidad. En consecuencia, este último ideal también es propio. ■

Si A y B son dos $\mathbb{K}$ -álgebras y $\omega: A \rightarrow B$ es un homomorfismo entre ellas, $\ker(\omega)$ es un ideal de A y la función

$$\begin{aligned} \omega' : \frac{A}{\ker(\omega)} &\rightarrow B \\ x + \ker(\omega) &\mapsto \omega(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

es el único monomorfismo para el cual $\omega = \omega' \circ \pi$. Si se agregan las hipótesis de que A y B sean álgebras normadas y de que ω sea continua, $\ker(\omega)$ es un ideal cerrado y $\|\omega\| = \|\omega'\|$. Para corroborar esto último, obsérvese que $\|\omega\| \leq \|\omega'\| \|\pi\| \leq \|\omega'\|$ y que para cada $x \in A$ y $z \in \ker(\omega)$

$$\|\omega'(x + \ker(\omega))\| = \|\omega(x)\| = \|\omega(x + z)\| \leq \|\omega\| \|x + z\|,$$

de manera que $\|\omega'(x + \ker(\omega))\| \leq \|\omega\| \|x + \ker(\omega)\|$ conllevando que $\|\omega'\| \leq \|\omega\|$.

Para el caso particular de $B = \mathbb{K}$, $\ker(\omega)$ hereda la característica que se describe a continuación si ω no es trivial y A es una álgebra de Banach conmutativa con unidad.

Definición 155 (Ideal Maximal) *Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra e I un ideal propio de A . Se dice que I*

es un ideal maximal de A si para cualquier ideal $J \subset A$ que contiene a I se sigue que $J \in \{I, A\}$.

Teorema 156 Sea A una $\mathbb{K}$ -álgebra con unidad. Cada ideal propio de A está contenido en un ideal maximal de éste último. Además, si A es una álgebra de Banach, todo ideal maximal es cerrado.

Demostración. La primera aseveración es análoga a la versión enunciada para anillos con unidad, por lo que las pruebas son idénticas (ver [4]). Para la segunda afirmación, obsevese que todo ideal I está contenido en el ideal $\bar{I}$. Por consiguiente, si I es maximal, $I = \bar{I}$ ó $\bar{I} = A$, pero al ser I propio, el lema 154 indica que $\bar{I}$ también lo es, por lo que la última opción no es posible. ■

Cuando A es una $\mathbb{C}$ -álgebra conmutativa de Banach con unidad normalizada, todos sus ideales maximales son el kernel de algún homomorfismo de álgebras complejas $\omega: A \rightarrow \mathbb{C}$ no trivial. De aquí en adelante $sp(A)$, el espectro de Gelfand de A , será conocido como el conjunto formado por estos últimos. A continuación se mostrará la relación biunívoca entre éste y el conjunto de ideales maximales de A , así como otra propiedad que será muy útil para el teorema 163. Pero antes de ello, observese que para cada $\omega \in sp(A)$ y $x \in A$, $\omega(x) = \omega(x * 1_A) = \omega(x)\omega(1_A)$; dando cabida a que ω preserve unidades por ser no nulo. A su vez, esto conlleva que ω sea sobreyectivo debido a que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\omega(\lambda 1_A) = \lambda\omega(1_A) = \lambda$.

Teorema 157 Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra conmutativa de Banach con unidad normalizada. Se tiene que $sp(A)$ es un subconjunto de la bola unitaria cerrada de A^* , y que está en biyección con el conjunto de los ideales maximales de A .

Demostración. Sea $\omega \in sp(A)$. Considerando la factorización canónica $\omega = \omega' \circ \pi$, la observación previa al teorema, permite usar el primer teorema de isomorfismos de anillos adaptado a álgebras complejas para implicar que $A/\ker(\omega) \cong \mathbb{C}$ mediante la aplicación ω' . Esto hace de $\ker(\omega)$ un ideal maximal de A y de cada clase lateral $x + \ker(\omega)$ un múltiplo escalar de $1_A + \ker(\omega)$. Al ser $\omega(1_A) = 1$, para cada λ complejo se verifica que $\omega'(\lambda 1_A + \ker(\omega)) = \lambda$, por lo cual

$$\|\omega\| = \|\omega'\| = \sup_{\|\lambda 1_A\|=1} |\omega'(\lambda 1_A + \ker(\omega))| = \sup_{|\lambda|=1} |\lambda| = 1.$$

Por otra parte, si M es cualquier ideal maximal de A , el teorema 156 indica que es un ideal cerrado por lo que A/M es una álgebra de Banach con unidad y división. En consecuencia, el corolario 5 implica que $A/M \cong \mathbb{C}$ mediante una aplicación φ que se puede usar para definir la

función $\omega: x \in A \mapsto \varphi(x + M) \in \mathbb{C}$. Es fácil verificar que ω es un homomorfismo de álgebras no trivial que tiene como kernel al ideal M .

Finalmente, supóngase que $\omega_1, \omega_2 \in sp(A)$ son dos homomorfismos con el mismo kernel. Como para cada $x \in A$ se sigue que

$$\omega_1(x - \omega_1(x)1_A) = \omega_1(x) - \omega_1(x)\omega_1(1_A) = 0;$$

de la suposición hecha se concluye que

$$\omega_2(x) = \omega_2(x - \omega_1(x)1_A) + \omega_2(\omega_1(x)1_A) = \omega_1(x)\omega_2(1_A) = \omega_1(x).$$

■

En virtud de este teorema, $sp(A)$ hereda una topología como subespacio de A^* bajo la topología dada por la norma de la definición 2. Lamentablemente, en dicha topología la bola unitaria cerrada de A^* sólo es compacta cuando éste es de dimensión finita como espacio vectorial (ver [14]). Por consiguiente, se definirá una topología más gruesa para A^* en la cual la bola unitaria cerrada siempre sea compacta si se asume el axioma de elección.

Definición 158 *Sea X un espacio de Banach complejo. Se define la topología *-débil de X^* como la topología más gruesa para la cual todos los funcionales $\tilde{x} \in X^{**}$ (definición 17) son continuos.*

Es fácil percatarse que la topología anterior tiene como subbase al conjunto

$$\left\{ \tilde{x}^{-1}(A) \mid x \in X \text{ y } A \subset \mathbb{C} \text{ es abierto} \right\}. \quad (2.15)$$

Esto trae como consecuencia una caracterización de convergencia en dicha topología; que, entre otras virtudes, indica que X^* un espacio de Hausdorff con respecto a esta última tal y como se verifica a continuación.

Teorema 159 *Sea X un $\mathbb{C}$ -espacio de Banach. Se tiene que X^* es un espacio de Hausdorff bajo la topología *-débil y que una red $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X^*$ converge a un $f \in X^*$ en esta misma si y sólo si para cada $x \in X$ se cumple que $\tilde{x}(f_\alpha) \rightarrow \tilde{x}(f)$.*

Demostración. Sea $x \in X$ un elemento arbitrario. Por la forma en la que está construida la topología *-débil de X^* , la función $\tilde{x}$ es continua, lo cual implica que $\tilde{x}(f_\alpha) \rightarrow \tilde{x}(f)$ si $f_\alpha \rightarrow f$. De

esto, se sigue que X^* bajo esta topología es un espacio tipo T_2 , ya que si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge a f y a f' en la misma, entonces $f'(x) \leftarrow f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$, lo cual indica que $f = f'$ debido a que $x \in X$ es arbitrario y $\mathbb{C}$ es un espacio de Hausdorff.

Por otro lado, si para cada $x \in X$ se cumple que $\tilde{x}(f_\alpha) \rightarrow \tilde{x}(f)$, se tiene que para toda vecindad abierta $A \subset \mathbb{C}$ de $f(x)$ existe un $\beta_x(A) \in I$ tal que $f_\alpha(x) \in A$ si $\alpha \geq \beta_x(A)$. Decir esto es lo mismo que afirmar que si $f \in \tilde{x}^{-1}(A)$, entonces $f_\alpha \in \tilde{x}^{-1}(A)$ para cada $\alpha \geq \beta_x(A)$, lo cual indica que $f_\alpha \rightarrow f$ en X^* en la topología *-débil por la observación previa al teorema. ■

Con este resultado ya se puede enunciar la propiedad más importante de la topología *-débil.

Teorema 160 (Teorema de Banach-Alaoglu) *Sea X un $\mathbb{C}$ -espacio de Banach. Se tiene que la bola unitaria cerrada de X^* es compacta en la topología *-débil de ésta.*

Demostración. Apelando al teorema de Tychonoff para productos arbitrarios (ver [14] para más información), el espacio producto

$$A := \prod_{x \in X} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$$

es compacto (recuérdese que el espacio producto tiene la topología más gruesa para la cual las proyecciones a cada factor son continuas). Si B es la bola unitaria cerrada de X^* , la función $\psi: B \rightarrow A$ dada por $\psi(f) := (f(x))_{x \in X}$ es biyectiva y el teorema anterior garantiza que tanto ella como su inversa son continuas. ■

Si A es una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach conmutativa con unidad normalizada y se considera a A^* con la topología *-débil, es sencillo corroborar que el teorema 159 implica que la topología heredada a $sp(A)$ es tal que la convergencia de los elementos en éste es equivalente a la convergencia puntual de los mismos. El teorema de Banach-Alaoglu y el teorema 157 implican que bajo la topología *-débil el espectro de Gelfand, $sp(A)$, es un espacio de Hausdorff compacto. Para ver eso considérese una red $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset sp(A)$ convergente a un $f \in A^*$. Si $x, y \in A$, se tiene que

$$f(xy) \leftarrow f_\alpha(xy) = f_\alpha(x)f_\alpha(y) \rightarrow f(x)f(y),$$

$$f(1_A) \leftarrow f_\alpha(1_A) = 1,$$

lo cual indica que $f \in sp(A)$ y que, por tanto, éste es un subespacio cerrado de un espacio de Hausdorff compacto.

Con estos preliminares ya se puede hablar de la función que permite obtener la versión del Teorema Espectral para Operadores Normales Acotados: *la función de Gelfand*, la cual se define como $f: x \in A \mapsto \tilde{x} \in C(sp(A))$. f es un homomorfismo entre álgebras normadas con unidad ya que para cualesquiera $x, y \in A$ y $\omega \in sp(A)$

$$\tilde{x}(\omega)\tilde{y}(\omega) = \omega(x)\omega(y) = \omega(xy) = \widetilde{xy}(\omega), \quad (2.16)$$

$$\widetilde{1_A}(\omega) = \omega(1_A) = 1, \quad (2.17)$$

$$\|\tilde{x}\|_{C(sp(A))} = \sup_{\omega \in sp(A)} |\tilde{x}(\omega)| = \sup_{\omega \in sp(A)} |\omega(x)| \leq \|x\|_A. \quad (2.18)$$

Estas propiedades ponen en evidencia la utilidad del espectro de Gelfand y de la función de Gelfand en el cálculo de los espectros convencionales:

Teorema 161 *Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma 1. Para cada $x \in A$ se tiene que*

$$\sigma(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in sp(A)\}.$$

Demostración. No es difícil verificar que para cada $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sigma(x - \lambda 1_A) = \sigma(x) - \lambda$, por lo que el teorema quedará demostrado al verificar que cualquier $x \in A$ es invertible si y sólo si $\tilde{x}$ no tiene ceros en $sp(A)$.

Si $x \in GL(A)$, de manera que existe un $y \in A$ para el cual $xy = 1_A$, las ecuaciones 2.16 y 2.17 indican que $\tilde{x}$ nunca se anula. Recíprocamente, si $x \notin GL(A)$, el ideal $xA = \{xa \mid a \in A\}$ es propio por lo que existe un ideal maximal que lo contiene. Al ser éste el kernel de un $\omega \in sp(A)$, $\tilde{x}(\omega) = \omega(x) = 0$ debido a que $x \in xA$. ■

Esta caracterización del espectro de un elemento en términos del espectro de Gelfand indica cuando la función de Gelfand es una isometría.

Lema 162 *Sea A una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach conmutativa con unidad de norma 1. La función de Gelfand*

$$f: x \in A \mapsto \tilde{x} \in C(sp(A))$$

es una isometría si y sólo si para todo $x \in A$ se cumple que $\|x^2\| = \|x\|^2$.

Demostración. Sea $x \in A$. Como $C(sp(A))$ es una álgebra conmutativa, el teorema 52 implica que $\|\tilde{x}^2\|_\infty = \|\tilde{x}\|_\infty^2$. En consecuencia, si f es una isometría, se sigue que $\|x^2\| = \|x\|^2$.

Recíprocamente, si esta última igualdad se cumple para cada $x \in A$, el teorema anterior y el teorema 44 verifican que

$$\begin{aligned} \|x\|_A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\|^{\frac{2^n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = r(x) \\ &= \sup_{\omega \in sp(A)} |\omega(x)| = \sup_{\omega \in sp(A)} |\tilde{x}(\omega)| = \|\tilde{x}\|_\infty. \end{aligned}$$

■

En lo que sigue, se definirá la función exponencial sobre cualquier álgebra de Banach unitaria A con el objetivo de mostrar que la función de Gelfand es un *-isomorfismo si A es una C^* -álgebra.

Para cada $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\|x^n\|_A}{n!} \leq \frac{\|x\|_A^n}{n!}, \quad (2.19)$$

por lo que al ser $\{\|x\|^n/n!\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sumable, la sucesión $\{x^n/n!\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ es absolutamente sumable y, por lo mismo, sumable. Entonces se puede definir a la exponencial de x como

$$e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La desigualdad anterior indica que necesariamente $\|e^x\|_A \leq e^{\|x\|_A}$, y la convergencia absoluta de la exponencial implica que para cualesquiera $x, y \in A$ la serie asociada a la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ dada por

$$c_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \quad (2.20)$$

converge a $e^x e^y$. Por tanto, si A es una álgebra conmutativa, el binomio de Newton verifica que

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Ya se tiene todo lo necesario para verificar el siguiente teorema de caracterización para C^* -álgebras conmutativas con unidad.

Teorema 163 (Teorema de Gelfand-Naimark Conmutativo Unitario)

Si A es una C^* -álgebra conmutativa con unidad, la función de Gelfand funge como un *-isomorfismo isométrico entre A y $C(sp(A))$.

Demostración. Hay que demostrar que la función de Gelfand $f: x \in A \mapsto \tilde{x} \in C(sp(A))$ preserva normas e involuciones. Lo primero es cierto ya que al ser A una álgebra conmutativa, el teorema 52 implica que $\|x^2\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$. Esto indica que f es una isometría que hace corresponder a la álgebra de Banach A con la álgebra normada $\{\tilde{x} \mid x \in A\}$. Por tanto, esta última es una subálgebra de Banach de $C(sp(A))$.

Por otro lado, para probar la preservación de las involuciones, es suficiente verificar que para todo $\omega \in sp(A)$ y $y \in A$ autoadjunto $\omega(y)$ es real. En tal escenario, la descomposición $x = x_1 + ix_2$ descrita en la expresión 1.5 de cada elemento $x \in A$ conlleva a que

$$\begin{aligned}\overline{f(x)\omega} &= \overline{\omega(x)} = \overline{\omega(x_1 + ix_2)} = \overline{\omega(x_1) + i\omega(x_2)} = \overline{\omega(x_1)} - i\overline{\omega(x_2)} \\ &= \omega(x_1 - ix_2) = \omega(x^*) = f(x^*)\omega,\end{aligned}$$

de manera que $\overline{f(x)} = f(x^*)$.

Para mostrar tal aserto, considerese para cualesquiera $y \in A$ autoadjunto y $t \in \mathbb{R}$ el elemento

$$u_t := e^{ity} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} y^n.$$

Nótese que

$$\omega(u_t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \omega(y^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \omega(y)^n = e^{it\omega(y)}$$

y que

$$u_t^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{(it)^n}}{n!} (y^n)^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-it)^n}{n!} y^n = e^{-ity} = u_{-t}$$

por lo que $u_t u_t^* = e^{ity} e^{-ity} = e^{0_A} = 1_A$. Por tanto, al ser $Re(itf(y)) = -tIm(f(y))$, se llega a que

$$e^{-tIm(\omega(y))} = e^{Re(it\omega(y))} = |e^{it\omega(y)}| = |\omega(u_t)| \leq \|u_t\|_A = 1.$$

Como $t \in \mathbb{R}$ fue arbitrario, $Im(\omega(y))$ debe ser 0, probando así que $\omega(y)$ es real. Esto implica que $\{\tilde{x} \mid x \in A\}$ es una subálgebra de $C(sp(A))$ que es cerrada bajo conjugados, contiene a las funciones constantes y separa puntos. Por consiguiente, el teorema de Stone-Weierstrass (teorema 50) implica

que dicha subálgebra es densa en $C(sp(A))$ bajo la norma infinito. Como también es cerrada, coincide con $C(sp(A))$. En consecuencia, f es sobreyectiva y, por lo mismo, es un *-isomorfismo isométrico entre C^* -álgebras unitarias. ■

Una consecuencia importante de este teorema es la generalización del punto 1 del teorema 79 a cualquier C^* -álgebra unitaria. Para mostrar esto, es necesaria la siguiente definición:

Definición 164 Sea A una C^* -álgebra con unidad. La C^* -álgebra unitaria generada por $x \in A$, $\mathcal{A}(x)$, es la intersección de todas las C^* -subálgebras de A que contienen a x y a 1_A .

Es fácil verificar que

$$\mathcal{A}(x) = \overline{\text{gen}\{1_A, x^n x^{*m}\}_{n,m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}}, \quad (2.21)$$

de modo que x es normal si y sólo si $\mathcal{A}(x)$ es una álgebra conmutativa. En este caso los elementos de la forma

$$p(x) = \sum_{n,m=0}^N c_{mn} x^n (x^*)^m \quad (2.22)$$

forman un subespacio denso de $\mathcal{A}(x)$ puesto que el conjunto que forman coincide con $\text{gen}\{1_A, x^n x^{*m}\}$.

Corolario 9 Sean A una C^* -álgebra con unidad y $x \in A$. Si x es autoadjunto, entonces $\sigma_A(x) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $B = \mathcal{A}(x)$. Claramente $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ y por la autoadjuntez de x , B resulta ser una álgebra conmutativa. En consecuencia, por la demostración del teorema anterior se asegura que $\omega(x) \subset \mathbb{R}$ para cada $\omega \in sp(B)$, y por el teorema 161 se llega a que

$$\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in sp(B)\} \subset \mathbb{R}.$$

■

Una consecuencia de este resultado es que el cálculo de espectros en una C^* -álgebra se puede realizar en C^* -subálgebras de ésta. Un antecedente de esto lo da el siguiente resultado técnico.

Teorema 165 Sea B una subálgebra de Banach de una $\mathbb{C}$ -álgebra de Banach A con unidad de norma 1. Si $1_A \in B$, para cada $x \in B$ se tiene que

$$\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x).$$

Demostración. Sean $\lambda \in \partial\sigma_B(x)$ y $p = x - \lambda 1_A$. Se tiene la existencia de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varphi_B(x) \subset \varphi_A(x)$ para la cual $\{\lambda_n\} \rightarrow \lambda$. Si $\lambda \notin \sigma_A(x)$, se implica que $p \in GL(A)$ por lo que la demostración del teorema 38 garantiza que $(x - \lambda_n 1_A)^{-1} \in B \subset A$ converge a $p^{-1} \in A$. En consecuencia, $p^{-1} \in \overline{B} = B$, lo cual contradice la suposición realizada. ■

Corolario 10 Sean A una C^* -álgebra con unidad y B una C^* -subálgebra de A que contiene a 1_A . Si $x \in B$, entonces $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

Demostración. Como $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ sólo hay que verificar que $\varphi_A(x) \subset \varphi_B(x)$. Para ello es suficiente demostrar que si $x \in GL(A) \cap B$, entonces $x^{-1} \in B$. Si se fija un $x \in GL(A) \cap B$, $x^* \in GL(A) \cap B$ ya que $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ y B preserva involuciones. En consecuencia, x^*x es un elemento autoadjunto de B que es invertible en A . Por el corolario precedente, $\sigma_B(x^*x) \subset \mathbb{R}$, lo cual indica que

$$\partial\sigma_B(x^*x) = \overline{\sigma_B(x^*x)} \setminus \sigma_B(x^*x)^\circ = \sigma_B(x^*x),$$

ya que de existir un $x_0 \in (\sigma_B(x^*x))^\circ$, $\sigma_B(x^*x) \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$. Esto permite usar el teorema 165 para verificar que $\sigma_B(x^*x) = \partial\sigma_B(x^*x) \subset \sigma_A(x^*x)$. Como 0 no está en este último, $0 \notin \sigma_B(x^*x)$ por lo que $(x^*x)^{-1} \in B$ al igual que x^{-1} ya que al ser $(x^*x)^{-1}x^*x = 1_A$, $x^{-1} = (x^*x)^{-1}x^* \in B$. ■

Con estos resultados se puede mostrar un recíproco del corolario 9.

Teorema 166 Sean A un C^* -álgebra con unidad y $x \in A$ un elemento normal. Se tiene que x es autoadjunto si y sólo si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Una implicación es el mismo corolario 9, por lo que sólo quedar probar que si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$, entonces x es autoadjunto.

Si $B = \mathcal{A}(x)$, la normalidad de x implica la conmutatividad de esta álgebra. Por tanto, el teorema 161 y el corolario 10 conllevan a que

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(x) = \{\omega(x) \mid \omega \in sp(B)\} = \{\tilde{x}(\omega) \mid \omega \in sp(B)\} = \tilde{x}(sp(B)).$$

Las igualdades anteriores evidencian que $\tilde{x}$ sólo toma valores reales. Por tanto, $\tilde{x}$ es un elemento autoadjunto en $C(sp(B))$; y por el *-isomorfismo entre éste y B dado en el teorema 163, x es autoadjunto en B . Por consiguiente, x es autoadjunto en A . ■

Ya se tiene todo lo necesario para definir un Cálculo Funcional Continuo para elementos normales de una C^* -álgebra unitaria con ayuda del teorema 163.

Teorema 167 (*Cálculo Funcional Continuo para elementos normales de una C^* -álgebra unitaria*)

Sean A una C^* -álgebra unitaria y $x \in A$ un elemento normal. Existe una única aplicación $\phi_x: C(\sigma(x)) \rightarrow A$ que cumple las siguientes 3 propiedades para cada $f \in C(\sigma(x))$:

1. ϕ_x es un $*$ -homomorfismo que preserva unidades.
2. $\|\phi_x(f)\|_A = \|f\|_\infty$.
3. $\phi_x(id_{\sigma(x)}) = x$.

Además, esta única aplicación cumple con que

4. $\sigma(\phi_x(f)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$.
5. $\phi_x(f)$ es un elemento normal y es autoadjunto si y sólo f toma únicamente valores reales.

Demostración. Primero se demostrará la existencia de un único homomorfismo que cumple los primeros tres puntos del teorema.

Denótese como $\mathcal{A}$ a la C^* -álgebra unitaria generada por x . Hay que demostrar que la función

$$\tilde{x} : \omega \in sp(\mathcal{A}) \mapsto \omega(x) \in \mathbb{C}$$

es un homeomorfismo entre $sp(\mathcal{A})$ y $\sigma(x)$. Por la topología del primero, $\tilde{x}$ es continua y por el teorema 161, $\tilde{x}(sp(\mathcal{A})) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. El teorema 163 implica que $\tilde{x}$ es inyectiva, ya que si $\omega_1, \omega_2 \in sp(\mathcal{A})$ son dos elementos para los cuales $\omega_1(x) = \omega_2(x)$,

$$\omega_1(x^*) = \overline{\omega_1(x)} = \overline{\omega_2(x)} = \omega_2(x^*),$$

de manera que ω_1 y ω_2 coinciden en la álgebra conformada por los elementos de la forma vista en 2.22; la cual constituye una álgebra densa de $\mathcal{A}$. La compacidad de $sp(\mathcal{A})$ permite concluir que $\tilde{x}$ es un homeomorfismo entre $sp(\mathcal{A})$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ que, por el corolario 10, coincide con $\sigma(x)$.

El homeomorfismo anterior induce el siguiente $*$ -isomorfismo de C^* -álgebras unitarias

$$\tilde{x}^*: h \in C(\sigma(x)) \mapsto h \circ \tilde{x} \in C(sp(\mathcal{A})).$$

Es fácil corroborar la última afirmación, y que $\tilde{x}^*$ preserva normas por el hecho de que para cada $h \in C(\sigma(x))$

$$\|h\| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |h(\lambda)| = \sup_{\omega \in sp(\mathcal{A})} |h(\omega(x))| = \sup_{\omega \in sp(\mathcal{A})} |h(\tilde{x}(\omega))| = \|h \circ \tilde{x}\|.$$

En consecuencia, si g es la inversa de la función de Gelfand vista en el teorema 163, se puede definir el Cálculo Funcional Continuo de x como

$$\phi_x := g \circ \tilde{x}^*.$$

Esta función resulta en un $*$ -isomorfismo isométrico entre las C^* -álgebras unitarias $C(\sigma(x))$ y $\mathcal{A}$, la cual está contenida en A , que cumple con la condición 1 y 2 del teorema. La condición 3 también la cumple puesto que para cada $\omega \in sp(\mathcal{A})$

$$\tilde{x}^*(id_{\sigma(x)})\omega = id_{\sigma(x)} \circ \tilde{x}(\omega) = id_{\sigma(x)}(\tilde{x}(\omega)) = \tilde{x}(\omega),$$

de manera que $\tilde{x}^*(id_{\sigma(x)}) = \tilde{x}$, por lo cual $\phi_x(id_{\sigma(x)}) = g(\tilde{x}) = x$.

Si se adopta la notación $\phi_x(f) = f(x)$ tal y como se hizo para el Cálculo Funcional definido para operadores autoadjuntos, se tiene que para cada polinomio p de la forma dada en la expresión 2.22,

$$p(x) = \sum_{n,m=0}^N c_{mn} x^n (x^*)^m.$$

Si $\varphi: C(\sigma(x)) \rightarrow A$ fuese otro $*$ -homomorfismo, para el cual también se cumpliesen los puntos anteriores, φ y ϕ_x serían iguales en todo $C(\sigma(x))$, puesto que los polinomios de la forma vista en 2.22 son densos en éste por el teorema de Stone-Weierstrass.

Sólo queda probar los puntos 4 y 5 del teorema. Si $f \in C(\sigma(x))$, el corolario 10 implica que

$$\sigma(\phi_x(f)) = \sigma_{\mathcal{A}}(\phi_x(f)) = \sigma_{C(\sigma_{\mathcal{A}}(x))}(f) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)\} = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Por otra parte, $f \in C(\sigma(x))$ siempre es un elemento normal y sólo es autoadjunto si toma únicamente valores reales. Al ser ϕ_x un *-isomorfismo, lo mismo se cumple para $\phi_x(f)$. ■

Si H es un espacio de Hilbert, la particularización de este teorema a la C^* -álgebra $\mathcal{L}(H)$ otorga el tan ansiado Cálculo Funcional Continuo para Operadores Normales:

Teorema 168 (Cálculo Funcional Continuo para Operadores Normales Acotados)

Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal. El Cálculo Funcional Continuo de T cumple las siguientes dos propiedades para cada $f \in C(\sigma(T))$:

1. Si $x \in H$ y $T(x) = \lambda x$, entonces $\phi_T(f)x = f(\lambda)x$.
2. $f \geq 0$ si y sólo si $\langle x, \phi_T(f)x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

Demostración. Análoga a lo hecho en el teorema 127. ■

De este Cálculo Funcional Continuo se puede derivar la forma de multiplicación del Teorema Espectral para Operadores Normales Acotados, de una forma equivalente a la vista para operadores autoadjuntos: dados un espacio de Hilbert H y un operador normal $T \in \mathcal{L}(H)$, para cualesquiera $x, y \in H$ se define la función

$$\omega_{x,y}: f \in C(\sigma(T)) \mapsto \langle x, \phi_T(f)y \rangle \in \mathbb{C}.$$

Por las propiedades del teorema anterior y la desigualdad de Cauchy Schwartz, $\omega_{x,y} \in C(\sigma(T))^*$ por lo que el Teorema de Riesz-Markov (teorema 123) implica la existencia de una única medida compleja $\mu_{x,y} \in m(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), \mathbb{C})$ para la cual

$$\langle x, f(T)y \rangle = \omega_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}, \text{ para cada } f \in C(\sigma(T)).$$

Dichas medidas serán conocidas como medidas espectrales y se denotan como μ_x cuando $x = y$. Con éstas se puede formular un lema cuya demostración es igual a la del lema 134 (ver [4] para más detalles).

Lema 169 Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal y $\mathcal{A}$ la C^* -álgebra unitaria generada por T . Si existe un $x \in H$ tal que $H = \overline{\{S(x) \mid S \in \mathcal{A}\}}$, se tiene la existencia de un operador unitario $U: H \rightarrow L^2(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), \mu_x, \mathbb{C})$ para el cual

$$UTU^{-1}f = Id_{\sigma(T)}f, \text{ para todo } f \in L^2(\sigma(T), \mu_x, \mathbb{C}).$$

La extensión de esto a cualquier espacio de Hilbert se basa en el siguiente lema cuya prueba, similar a la del lema 135 salvo unos pequeños cambios, puede ser consultada en [4].

Lema 170 Sea T un operador acotado normal definido en un espacio de Hilbert H . Si $\mathcal{A}$ es su C^* -álgebra unitaria generada, existe una descomposición de H :

$$H = \bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$$

tal que para todo $\alpha \in I$

1. $S(H_\alpha) \subset H_\alpha$.
2. existe un $x_\alpha \in H_\alpha$ tal que $H_\alpha = \overline{\{S(x_\alpha) \mid S \in \mathcal{A}\}}$.

Combinando estos dos resultados se puede demostrar el tan ansiado Teorema Espectral para Operadores Acotados Normales en su Forma de Multiplicación.

Teorema 171 (Teorema Espectral para Operadores Normales en su Forma de Multiplicación.)

Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal. Se tiene la existencia de un espacio de medida positiva semifinita (M, μ) ; una función $f \in L^\infty(M, \mu, \mathbb{C})$ y un operador unitario $U: H \rightarrow L^2(M, \mu, \mathbb{C})$ para los cuales

$$UTU^{-1} = T_f.$$

Si H es separable, el espacio de medida (M, μ) es σ -finito, pero puede hacerse de medida finita redefiniendo convenientemente a μ .

Demostración. Igual que la del teorema 136. ■

A partir de esta forma del Teorema Espectral se pueden derivar las otras dos sin problemas. La ventaja de repetir ese mensaje en este punto es que ya se cuenta con un Cálculo Funcional

Continuo para Operadores Normales. Con él se puede definir un Cálculo Funcional Boreliano para Operadores Normales, así como se hizo en la primera sección del presente capítulo; o bien, éste se puede definir en términos de la función f del teorema anterior. Con el Cálculo Funcional Boreliano se construyen medidas espectrales de soporte compacto con valores en $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ que, en compañía del conjunto de operadores normales en $\mathcal{L}(H)$, son protagonistas de la forma del Teorema Espectral que habla de medidas espectrales. Con este enfoque no dependiente del teorema 149, el desarrollo de los preliminares de esta última forma son análogos a los de la sección pasada, así como la demostración de la misma.

Con respecto al Cálculo Funcional Boreliano, se podría pensar que es más fácil derivarlo de la Forma de Multiplicación del Teorema Espectral que del teorema de Riesz-Markov Complejo; y no se estaría equivocado. En el siguiente capítulo se tomará ese camino. La razón por la que no se realizó así antes fue la de presentar que ambas formas del Teorema Espectral son equivalentes y que pueden mostrarse sin recurrir a la otra.

Con la función de Gelfand no sólo se ha logrado demostrar el Teorema Espectral para operadores normales sin utilizar los teoremas 132, 136 o 149, sino que se ha desarrollado una herramienta que da lugar a otros resultados muy importantes dentro de la Matemática. Por ejemplo, el Teorema de Gelfand-Naimark o el hecho de que cualquier espacio topológico de Hausdorff compacto X sea homeomorfo a $sp(C(X))$. El lector interesado en estos temas debería de consultar [4] y [5]. Este último es especial ya que aplica la teoría de esta subsección a la Física y a la Teoría de Cohomología.

Capítulo 3

Teorema Espectral Para Operadores Autoadjuntos No Acotados

En este capítulo se generalizan los teoremas 132, 136 y 149 para operadores autoadjuntos no necesariamente acotados que actúan en espacios de Hilbert. En primera instancia, este objetivo no estaría bien formulado puesto que el Teorema de Hellinger-Toeplitz (teorema 80) indica que un operador $T: H \rightarrow H$ para el cual $\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ para cada $x, y \in H$, es necesariamente acotado. Por consiguiente, para que un operador no acotado pueda cumplir la condición anterior, debe ser restringido a un subespacio vectorial D de H no cerrado. En la sección 3.1, se discutirá porque dicho subespacio debe ser denso si se quiere que el operador sea autoadjunto en el sentido generalizado que se dará en la misma sección; la cual está encargada de dar los resultados y las definiciones necesarias para demostrar las tres formas del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos en la sección 3.2.

3.1. Preliminares

La presente sección generaliza varias de las definiciones y construcciones del capítulo 1 para operadores no acotados. Las ideas que se desarrollan en la misma pueden encontrarse en [14], salvo

la construcción del operador autoadjunto generalizado. En [14], dicho operador se construye de una manera más directa que a mi parecer, le provee de muy poca estructura. En el presente trabajo ese operador se construye a partir de otro que es conocido como Adjunto Banach (ver [14]).

Desde un punto de vista práctico, vale la pena generalizar la teoría en torno al Teorema Espectral para transformaciones lineales no acotadas, puesto que muchos de los operadores que se trabajan en Matemáticas y Física no son continuos (ver [14] y [7]). Ejemplos de estos son los operadores relacionados con derivadas o ciertos operadores de multiplicación definidos en espacios L^2 .

En el presente capítulo, dados dos espacios de Banach X y Y , un operador definido en X con contradominio Y será una transformación lineal $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$, con $D(T)$ siendo un subespacio vectorial de X y $\Gamma(T)$ la gráfica de T . Se dice que este último está densamente definido si $\overline{D(T)} = X$ y que es de gráfica cerrada si $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(T)$. Esto último es equivalente a pedir que si $\{x_n\} \subset D(T)$, entonces

$$x_n \rightarrow x \text{ y } T(x_n) \rightarrow y \text{ implica que } x \in D(T) \text{ y } T(x) = y. \quad (3.1)$$

Esto no indica que T sea continua ni que $D(T)$ sea cerrado, ya que para ello se necesitaría que la condición “ $x_n \rightarrow x$ ” fuese suficiente para que $x \in D(T)$ ó $T(x_n) \rightarrow T(x)$. Lo que se garantiza cuando T es de gráfica cerrada, es que si se sabe que $\{x_n\} \subset D(T)$ converge a un $x \in X$ y $\{T(x_n)\}$ converge a un $y \in Y$, se puede asegurar que $x \in D(T)$ y que $T(x) = y$.

Para ilustrar lo anterior considérese el operador derivada $D: C^1([0, 1]) \subset C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$. La sucesión de funciones $\{f_n\} \subset C^1([0, 1])$ dadas por

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(n^2\pi x)}{n},$$

converge a 0 en $C^1[0, 1]$, debido a que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Sin embargo, $D(f_n)x = n\pi\cos(n^2\pi x)$ por lo que $\|D(f_n)\| = n\pi$. Esto conlleva a que D sea un operador no acotado. Aun así, $\Gamma(D)$ es un conjunto cerrado, ya que si $\{f_n\} \subset C^1([0, 1])$ converge de manera puntual a una función $f \in C([0, 1])$ y f'_n converge uniformemente a una función continua g , entonces para cada $x \in [0, 1]$

$$\int_0^x g(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f'_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(0)) = f(x) - f(0),$$

de manera que $D(f) = f' = g$. Esto permite ver que D es un operador no acotado de gráfica cerrada que, por el teorema de Stone-Weierstrass, está densamente definido.

Si T y S son operadores definidos en un espacio de Banach X y $\lambda \in \mathbb{C}$, se definen los operadores

$$\lambda T : D(T) \subset X \rightarrow Y \text{ y } T + S : D(T) \cap D(S) \subset X \rightarrow Y$$

bajo las asignaciones obvias; y se dice que

$$T \subset S \text{ si } D(T) \subset D(S) \text{ y } S|_{D(T)} = T.$$

Si se da la igualdad en los dominios, se tiene que $T = S$.

La primera definición que se generalizará es la de Adjunto Banach (la cual se estudia en [14]) para operadores densamente definidos.

Teorema 172 *Sean X y Y dos espacios de Banach. Si $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ es un operador densamente definido, el conjunto*

$$\Gamma(T)' := \{(l, m) \in Y^* \times X^* \mid l \circ T = m\}.$$

es un cerrado que corresponde a la gráfica de un operador definido en Y^ con contradominio X^* .*

Demostración. Es fácil corroborar que $\Gamma(T)'$ es un subespacio vectorial de $Y^* \times X^*$. Si $l \in Y^*$ y $m_1, m_2 \in X^*$ son tales que (l, m_1) y $(l, m_2) \in \Gamma(T)'$,

$$m_1(x) = l(T(x)) = m_2(x), \text{ para todo } x \in D(T).$$

Como este último es denso en X , para cada $p \in X$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset D(T)$ convergente a p por lo que,

$$m_1(p) \leftarrow m_1(x) = m_2(x) \rightarrow m_2(p).$$

Esto implica que $m_1 = m_2$, por lo que el teorema 23 implica que $\Gamma(T)'$ es la gráfica de un operador definido en Y^* , que resulta ser de gráfica cerrada por un argumento análogo al previamente expuesto.

■

Definición 173 *El operador encontrado en el teorema pasado será denominado operador adjunto Banach de T y se denotará como T' .*

Apelando al mismo teorema, se observa que

$$D(T') = \{l \in Y^* \mid \text{existe } m \in X^* \text{ para el cual } l(T(x)) = m(x) \text{ si } x \in D(T)\},$$

en donde dicho m es único e igual a $T'(l)$.

Si X y Y son espacios de Hilbert, el Lema de Riesz (lema 72) da una identificación natural de estos espacios con sus duales mediante las aplicaciones $C_X: x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_X$ y $C_Y: y \mapsto \langle y, \cdot \rangle_Y$, respectivamente. En tal caso, se puede reescribir la igualdad anterior como

$$D(T') = \{l \in Y^* \mid \text{existe } u \in X \text{ para el cual } l(T(x)) = \langle u, x \rangle_X \text{ si } x \in D(T)\}. \quad (3.2)$$

Si se define el conjunto

$$\begin{aligned} E &:= \{v \in Y \mid \langle v, \cdot \rangle_Y \in D(T')\} \\ &= \{v \in Y \mid \text{existe } u \in X \text{ para el cual } \langle v, T(x) \rangle_Y = \langle u, x \rangle_X \text{ si } x \in D(T)\}, \end{aligned}$$

se observa que está en biyección con $D(T')$ via la aplicación $C_Y|_E$, por lo que coincide con el dominio del operador

$$T^* := C_X^{-1} \circ T' \circ C_Y|_E, \quad (3.3)$$

el cual será conocido como el operador adjunto de T . Por lo comentando anteriormente, este operador es el único para el que se cumple que

$$\langle v, T(x) \rangle_Y = \langle T^*(v), x \rangle_X \text{ para cada } x \in D(T) \text{ y } v \in E = D(T^*).$$

Como los tres operadores compuestos en la definición de T^* son de gráfica cerrada, este último también lo es. En lo sucesivo se enlistan algunas propiedades de los operadores adjuntos que resultan análogas a las mencionadas en el capítulo pasado:

Teorema 174 Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, X y Y espacios de Hilbert, y T y S dos operadores densamente definidos en X con contradominio en Y . Se tiene que

$$1. \ker(T^*) = (\text{Im}(T))^\perp.$$

2. Si $\overline{D(T^*)} = Y$, entonces $T \subset T^{**}$.
3. T es acotado si y sólo si T^* también lo es y en tal caso $\|T\| = \|T^*\|$ y $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
4. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
5. Si $T + S$ está densamente definido, entonces $S^* + T^* \subset (S + T)^*$, y si T es acotado, esta última contención se vuelve igualdad.
6. Si T es inyectivo y $\overline{Im(T)} = Y$, entonces T^* también es inyectivo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demostración. Los primeros cuatro puntos son fáciles de verificar por lo que sólo se mostrarán los últimos.

1. Si $y \in D(T^*) \cap D(S^*)$, para cada $x \in D(T + S)$

$$\begin{aligned}
 \langle y, (T + S)x \rangle_Y &= \langle y, T(x) \rangle_Y + \langle y, S(x) \rangle_Y \\
 &= \langle T^*(y), x \rangle_X + \langle S^*(y), x \rangle_X \\
 &= \langle (T^* + S^*)y, x \rangle_X;
 \end{aligned}$$

de manera que $T^* + S^* \subset (T + S)^*$. Si T es continuo, se puede suponer que $D(T) = X$ por el Teorema del Operador Acotado (teorema 12). En consecuencia, $D(S) \subset D(T)$ y $D(S^*) \subset D(T^*) = Y$, por lo que para todo $y \in D((T + S)^*)$ y $x \in D(T + S)$

$$\begin{aligned}
 \langle y, S(x) \rangle_Y &= \langle y, S(x) + T(x) - T(x) \rangle_Y \\
 &= \langle (T + S)^*y, x \rangle_X - \langle T^*(y), x \rangle_X \\
 &= \langle (T^* + S^*)y - T^*(y), x \rangle_X.
 \end{aligned}$$

Esto muestra que $D((T + S)^*) \subset D(T^*) \cap D(S^*)$, mostrando así la igualdad $T^* + S^* = (T + S)^*$.

2. Como $\overline{Im(T)} = X$, $ker(T^*) = (Im(T))^\perp = \{0\}$ y $T^{-1}: Im(T) \rightarrow D(T)$ tiene un operador adjunto $(T^{-1})^*$ que coincide con $(T^*)^{-1}$.

Para verificar que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, nótese que $x \in D((T^{-1})^*)$ si y sólo si existe $u_x \in Y$ tal que

$$\langle x, T^{-1}y \rangle = \langle u_x, y \rangle = \langle u_x, T(T^{-1}(y)) \rangle \text{ para cada } y \in Im(T),$$

lo cual únicamente ocurre cuando $x \in \text{Im}(T^*) = D((T^*)^{-1})$. Por tanto, si $x \in D((T^{-1})^*)$, $x = T^*(u_x)$ y $(T^{-1})^*(x) = u_x$.

■

La definición generalizada de operador autoadjunto ya se puede dar de manera natural:

Definición 175 Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que un operador densamente definido $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ es simétrico (o hermitiano) si $T \subset T^*$. Si $T = T^*$, se dice que el operador es autoadjunto.

Las últimas definiciones no requieren que los operadores trabajados sean continuos sino que sean densamente definidos, lo cual claramente sucede cuando su dominio es total. Si esto último es el caso de un operador autoadjunto, necesariamente éste debe de ser acotado ya que su gráfica siempre será cerrada (teorema 24).

La siguiente definición que se discutirá es la del espectro y resolvente de un operador:

Definición 176 Sean X un espacio de Banach y $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ un operador. Se define el conjunto resolvente de T como

$$\varphi(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

y al espectro de T como $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varphi(T)$.

Una consecuencia del teorema 41 y del corolario 3 es que el espectro de un operador acotado es no vacío. En cambio, para un operador no continuo si hay posibilidad de que su espectro no tenga elementos. Afortunadamente, en este trabajo no habrán problemas de este tipo puesto que el espectro de un operador autoadjunto siempre resulta ser no vacío.

Lema 177 Sean H un espacio de Hilbert y $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Se sigue que $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Supóngase que el espectro de T es vacío. Esto implica que T es un operador invertible al igual que $\frac{1}{\lambda}I - T$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este último caso, $(\frac{1}{\lambda}I - T)^{-1}$ está definido en todo H y su rango coincide con $D(T)$. Además, como T es autoadjunto, $\frac{1}{\lambda}I - T$ es de gráfica cerrada al igual que su inverso. Esto trae como consecuencia que $\frac{1}{\lambda}T(\frac{1}{\lambda}I - T)^{-1}$ sea

un operador definido en todo H con gráfica cerrada; por tanto, el teorema de la gráfica cerrada (teorema 24) indica que es acotado. Por consiguiente, $\sigma(T^{-1}) \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \emptyset$ ya que

$$(T^{-1} - \lambda I) \frac{1}{\lambda} T \left(\frac{1}{\lambda} I - T \right)^{-1} = ((I - \lambda T) T^{-1}) \frac{1}{\lambda} T \left(\frac{1}{\lambda} I - T \right)^{-1} = I.$$

Por otro lado, el teorema 41 indica que $\sigma(T^{-1}) \neq \emptyset$, lo cual da lugar a que $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$ y que, por lo mismo, el radio espectral de T^{-1} sea 0. Aunado a esto, T^{-1} es autoadjunto debido a que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$ (teorema 174). Por tanto, el teorema 44 implica que $\|T^{-1}\| = r(T) = 0$. De esto, $T = 0$ y se obtiene una contradicción por el hecho de que 0 es un valor propio del operador nulo. ■

Siguiendo con la idea de dar generalizaciones de definiciones pasadas a la nueva clase de operadores recién estudiados, se define la resolvente de un operador T de manera análoga a como se hizo en el teorema 40. Las propiedades enunciadas en este último se siguen cumpliendo y ayudan a demostrar que $\varphi(T)$ es un conjunto abierto. La prueba de ello es, en cierto sentido, la misma que se dio en la sección pasada tal y como se verá a continuación:

Teorema 178 *Sean X un espacio de Banach y $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ un operador. Se tiene que $\varphi(T)$ es un abierto en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongase que $w \in \varphi(T)$ y que $z \in B_{\|R_T(w)\|^{-1}}(w)$, en donde R_T es la resolvente de T . Esto conlleva a que

$$\|(z - w)R_T(w)\| = |z - w| \|R_T(w)\| < 1,$$

por lo que el lema 34 implica que $I - (z - w)R_T(w) \in GL(\mathcal{L}(H))$ y que su inversa está dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (z - w)^n R_T(w)^n.$$

Al ser $T - zI = (I - (z - w)R_T(w)) \circ (T - wI)$, su inversa es

$$R_T(w) \sum_{n=0}^{+\infty} (z - w)^n R_T(w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - w)^n R_T(w)^{n+1};$$

el cual corresponde a un operador continuo con dominio X . Por tanto, $z \in \varphi(T)$ dando lugar a que

este último sea un abierto en $\mathbb{C}$. ■

Un operador invertible $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ no necesariamente es de inversa continua. Sin embargo, si resulta ser de gráfica cerrada, su inversa también tiene una gráfica cerrada por lo que el teorema 24 implica que también es continua. Este es el caso de los operadores autoadjuntos, para los cuales el punto 1 del teorema 79 sigue siendo válido.

Teorema 179 Sean H un espacio de Hilbert y $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Se tiene que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ y que si $c = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $\|(T - cI)^{-1}\| \leq |b|^{-1}$.

Demostración. Sean $g \in D(T)$ y $f := (T - cI)g = (T - aI)g - ibg$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle (T - aI)g - ibg, (T - aI)g - ibg \rangle \\ &= \|(T - aI)g - ibg\|^2 + b^2\|g\|^2 + \langle (T - aI)g, -ibg \rangle + \langle -ibg, (T - aI)g \rangle \\ &= \|(T - aI)g - ibg\|^2 + b^2\|g\|^2 - ib\langle (T - aI)g, g \rangle + ib\langle g, (T - aI)g \rangle \\ &\geq b^2\|g\|^2. \end{aligned}$$

Esto implica que $T - cI$ es un operador inyectivo por lo que $(T - cI)^{-1}: \text{Im}(T - cI) \rightarrow H$ es un operador para el cual

$$\|x\|^2 \geq b^2\|(T - cI)^{-1}x\|^2, \text{ si } x \in \text{Im}(T - cI).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{|b|} \geq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(T - cI)^{-1}x\|}{\|x\|}. \quad (3.4)$$

Ahora, para verificar la sobreyectividad de $T - cI$ considérese un $y \in \text{Im}(T - cI)^\perp$ y nótese que para cada $x \in D(T)$

$$\langle T(x), y \rangle = \langle (T - cI + cI)x, y \rangle = \langle (T - cI)x, y \rangle + \langle cx, y \rangle = \langle x, \bar{c}y \rangle.$$

Así, $y \in D(T^*) = D(T)$ y $T(y) = T^*(y) = \bar{c}y$. Por tanto,

$$\bar{c}\langle y, y \rangle = \langle y, \bar{c}y \rangle = \langle y, T(y) \rangle = \langle T(y), y \rangle = \langle \bar{c}y, y \rangle = c\langle y, y \rangle.$$

Como $c \notin \mathbb{R}$, se concluye que $\langle y, y \rangle = 0$ por lo cual $\text{Im}(T - cI)^\perp = \{0\}$.

Lo anterior garantiza que para cada $y \in H$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset D(T)$ para la cual $(T - cI)x_n \rightarrow y$. En tal caso, dicha sucesión es de Cauchy, lo cual conlleva que $\{x_n\}$ también lo sea, pues si $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - x_m\| \leq |b|^{-1} \|(T - cI)(x_n - x_m)\| = |b|^{-1} \|(T - cI)x_n - (T - cI)x_m\|,$$

como corolario de la ecuación 3.4. El elemento $x := \lim x_n \in H$ es tal que $T(x_n) = (T - cI)x_n + cx_n \rightarrow y + cx \in H$ implicandose que $x \in D(T) = D(T - cI)$ y que $T(x) = y + cx$ debido a que T es de gráfica cerrada. En consecuencia, $(T - cI)x = y$ dando lugar a que $T - cI$ sea un operador biyectivo cuya gráfica, como se acaba de corroborar, resulta ser cerrada. ■

La definición 100 brinda muchos ejemplos de operadores densamente definidos (teorema 103) y de gráfica cerrada para los cuales su operador adjunto será de gran interés para la formulación del Teorema Espectral.

Teorema 180 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva semifinita y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Se tiene que $T_f^* = T_{\bar{f}}$

Demostración. Es claro que $D(T_f) = D(T_{\bar{f}})$ y que $T_{\bar{f}} \subset T_f^*$, por lo que sólo queda corroborar que $D(T_f^*) \subset D(T_{\bar{f}})$. Sean $g \in D(T_f^*)$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_n := \{x \in \Omega : |f(x)| \leq n\}$. Es fácil ver que para cada $\varphi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\varphi \chi_{A_n} \in D(T_f)$ y que $\{\chi_{A_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 1$. En consecuencia, el TCM implica que

$$\begin{aligned} \|T_f^*(g)\|_{L^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_f^*(g)\chi_{A_n}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}=1} |\langle \varphi, T_f^*(g)\chi_{A_n} \rangle| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}=1} |\langle \chi_{A_n}\varphi, T_f^*(g) \rangle| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}=1} |\langle T_f(\chi_{A_n}\varphi), g \rangle| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{L^2}=1} |\langle \varphi, \bar{f}g\chi_{A_n} \rangle| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\bar{f}g\chi_{A_n}\|_{L^2} \\ &= \|\bar{f}g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Esto conlleva a que $\bar{f}g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ por lo cual $g \in D(T_{\bar{f}})$. ■

Un corolario evidente es que el operador de multiplicación T_f siempre conmuta con su adjunto, y que f toma valores reales μ -c.t.p si y sólo si $T_f = T_f^*$. El Teorema Espectral indica que estos son los únicos operadores que conmutan con su adjunto, en el sentido de que cualquier otro operador con esta característica es conjugado a un operador de multiplicación. Este último será autoadjunto

si y sólo si es conjugado de algún operador autoadjunto.

3.2. Teorema Espectral

Con el trabajo de la sección pasada ya se puede formular y demostrar el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos en la presente sección. Para ello se siguió el trabajo visto en [3], [6], [7], [14] y [18]. Como se advirtió al término del capítulo pasado, primero se procederá con la Forma De Multiplicación:

Teorema 181 (Teorema Espectral: Forma de Multiplicación) Sean H un espacio de Hilbert y $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Se tiene la existencia de un espacio de medida positiva semifinita (M, m) , un operador unitario $U: H \rightarrow L^2(M, m, \mathbb{C})$ y una función medible $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ para los cuales

$$x \in D(T) \text{ si y sólo si } U(x) \in D(T_f) \text{ y } UTU^{-1} = T_f. \quad (3.5)$$

Si H es separable, el espacio de medida puede suponerse finito sin perder generalidad.

Demostración. Por el teorema 179 $\pm i \in \varphi(T)$, por lo que las resolventes $(T + iI)^{-1}$ y $(T - iI)^{-1}$ conmutan. Utilizando el teorema 174 se verifica que

$$((T + iI)^{-1})^* = ((T + iI)^*)^{-1} = (T - iI)^{-1}$$

dejando como consecuencia que $(T + iI)^{-1}$ sea normal. Esto permite usar el Teorema Espectral para Operadores Normales Acotados (teorema 171) para implicar la existencia de un espacio de medida positiva semifinita (M, m) , un operador unitario $U: H \rightarrow L^2(M, m, \mathbb{C})$ y una función $g \in L^\infty(M, m, \mathbb{C})$ para la cual

$$U(T + iI)^{-1}U^{-1} = T_g. \quad (3.6)$$

De dicho teorema se tiene la premisa de que si H es separable, el espacio de medida (M, m) puede escogerse finito sin perder generalidad.

Como $(T + iI)^{-1}$ es una función biyectiva, T_g también lo es. En consecuencia, $m(g^{-1}(\{0\})) = 0$ ya que de no ser ese el caso, la semifinitud de m implicaría la existencia de un medible con medida

real positiva $F \subset g^{-1}(\{0\})$ para el cual $\mathcal{X}_F \in L^2(M, m) \setminus \{0\}$ y $T_g(\mathcal{X}_F) = 0$. Por consiguiente, $g \neq 0$ m -c.t.p por lo que, sin perder generalidad, se hace la suposición de que g nunca es cero para definir en base a ella la función $f := g^{-1} - i$.

Si $x \in D(T)$, existe un $\varphi \in H$ tal que $x = (T + iI)^{-1}\varphi$. De esto,

$$U(x) = U(T + iI)^{-1}\varphi = T_g U(\varphi).$$

Al ser $+\infty > \|(T + iI)^{-1}\| = \|T_g\| = \|g\|_m$ y $fg = (g^{-1} - i)g = 1 - ig$, se tiene que $\|fg\|_m \leq 1 + \|g\|_m < +\infty$ implicando, con ayuda del teorema 103, que $fU(x) = fgU(\varphi) \in L^2(M, m)$. Recíprocamente, si $U(x) \in D(T_f)$, existe $\varphi \in H$ para el cual $U(\varphi) = (f + i)U(x)$ ya que U es sobreyectiva. Así,

$$U(T + iI)^{-1}\varphi = gU(\varphi) = g(f + i)U(x) = U(x),$$

lo cual da cabida a que $x \in D(T)$ por ser $x = (T + iI)^{-1}\varphi$. Esto último indica que $D(T_f) = U(D(T))$ y que $T(x) = \varphi - ix$ por lo cual

$$U(T(x)) = U(\varphi) - U(ix) = T_{g^{-1}}U(x) - iU(x) = T_f(U(x)).$$

Al ser la igualdad anterior valida para cada $x \in D(T)$, se tiene que $UTU^{-1} = T_f$. f es real m -c.t.p debido a que por ser U un operador unitario,

$$T_{\bar{f}} = (T_f)^* = (UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1} = UTU^{-1} = T_f.$$

Por tanto, se hace la suposición de que f sólo toma valores reales sin temor a perder generalidad.

■

Por el teorema 103, se afirma que la función f definida en la proposición pasada pertenece a $L^\infty(M, \mu, \mathbb{C})$ si y sólo si T es un operador acotado. Es por este motivo que el Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos Acotados es un caso particular del que se acaba de probar.

Otra de las virtudes de la función f antes mencionada es que da lugar a un Cálculo Funcional Boreliano del operador autoadjunto T al que está asociado.

Teorema 182 (Teorema Espectral: Forma del Cálculo Funcional Boreliano) Sean H un espacio de Hilbert y $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Se tiene la existencia de una

única aplicación $\phi_T: B_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ para la cual se cumplen las siguientes propiedades para cada $h \in B_b(\mathbb{R})$:

1. ϕ_T es un $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras unitarias.
2. Si $\{h_n\} \subset B_b(\mathbb{R})$ es uniformemente acotada y converge puntualmente a h , entonces $\phi_T(h_n) \rightarrow \phi_T(h)$ de manera puntual.
3. Si $\{h_n\} \subset B_b(\mathbb{R})$ es tal que $h_n(x) \rightarrow x$ y $|h_n(x)| \leq |x|$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $\phi_T(h_n)\psi \rightarrow T(\psi)$ para todo $\psi \in D(T)$.

Además, esta única aplicación tiene las siguientes propiedades:

4. Si $T(x) = \lambda x$, se tiene que $\phi_T(h)x = h(\lambda)x$.
5. $\phi_T(h)$ es normal y es autoadjunto si h toma únicamente valores reales.
6. Si $h \geq 0$, entonces $\langle x, \phi_T(h)x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$.

Demostración. Apelando al teorema anterior y a su notación, se tiene que para cada $h \in B_b(\mathbb{R})$, $h \circ f \in L^\infty(M, m, \mathbb{C})$. Por el mismo teorema 103, esto conlleva a que $T_{h \circ f}: L^2 \rightarrow L^2$ sea un operador acotado y que, por tanto, $UT_{h \circ f}U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Entonces se define el Cálculo Funcional Boreliano de T como

$$\begin{aligned}\phi_T: B_b(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ h &\longmapsto U^{-1}T_{h \circ f}U.\end{aligned}$$

Primero, hay que demostrar que esta función si corresponde a un $*$ -homomorfismo que preserva unidades. Sean $h_1, h_2 \in B_b(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Del teorema 103 se sigue que:

$$\begin{aligned}\phi_T(\alpha h_1 + h_2) &= U^{-1}T_{(\alpha h_1 + h_2) \circ f}U = U^{-1}(\alpha T_{h_1 \circ f} + T_{h_2 \circ f})U \\ &= \alpha U^{-1}T_{h_1 \circ f}U + U^{-1}T_{h_2 \circ f}U = \alpha \phi_T(h_1) + \phi_T(h_2). \\ \phi_T(h_1 h_2) &= U^{-1}T_{(h_1 h_2) \circ f}U = U^{-1}T_{(h_1 \circ f)(h_2 \circ f)}U = U^{-1}T_{h_1 \circ f}T_{h_2 \circ f}U \\ &= U^{-1}T_{h_1 \circ f}U \circ U^{-1}T_{h_2 \circ f}U = \phi_T(h_1) \circ \phi_T(h_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_T(1) &= U^{-1}T_{1 \circ f}U = U^{-1}T_1U = I_H, \\
\phi_T(h_1)^* &= (U^{-1}T_{(h_1) \circ f}U)^* = U^{-1}T_{h_1 \circ f}^*U = U^{-1}T_{\overline{h_1 \circ f}}U \\
&= U^{-1}T_{\overline{h_1} \circ f}U = \phi_T(\overline{h_1}).
\end{aligned}$$

Luego, hay que probar que este homomorfismo es el único que cumple las propiedades 2 y 3 del teorema. Suponiendo las hipótesis de la primera de éstas, si $N := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|_\infty$, para cada $\varphi \in L^2$ la sucesión $\{(h_n \circ f)\varphi\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(M, m)$ está dominada por $N\varphi \in L^2(M, m)$. Por tanto, el TCD implica que

$$(h_n \circ f)\varphi \rightarrow (h \circ f)\varphi \text{ en } L^2(M, m).$$

En consecuencia, para cada $x \in H$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|\phi_T(h_n)x - \phi_T(h)x\|_H^2 &= \|\phi_T(h_n - h)x\|_H^2 = \|(h_n - h) \circ f * U(x)\|_{L^2}^2 \\
&= \int_M |h_n \circ f * U(x) - h \circ f * U(x)|^2 dm \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

conllevándose así que $\phi_T(h_n) \rightarrow \phi_T(h)$ puntualmente.

Por otra parte, al suponer las hipótesis del punto 3, $h_n \circ f * \varphi \rightarrow f * \varphi$ para cada $\varphi \in D(T_f)$. Entonces, si $\psi \in D(T)$, el TCD implica que

$$\begin{aligned}
\|\phi_T(h_n)\psi - T(\psi)\|_H^2 &= \|h_n \circ f * U(\psi) - UT(\psi)\|_{L^2}^2 \\
&= \|h_n \circ f * U(\psi) - f * U(\psi)\|_{L^2}^2 \\
&\rightarrow 0,
\end{aligned}$$

de manera que $\phi_T(h_n)|_{D(T)} \rightarrow T$ puntualmente.

Para mostrar la unicidad de este Cálculo Funcional Boreliano supóngase que existe otro $*$ -homomorfismo $\psi: B_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ que cumple las propiedades anteriores y defínase para cada $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la función

$$f_{z_0}: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Esta última es continua y, por tanto, boreliana. Además, resulta que es acotada, pues por ser

$dist(z_0, \mathbb{R}) > 0$ se sigue que $|x - z_0|^{-1} \leq dist(z_0, \mathbb{R})^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen las funciones $h_n := Id_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_{[-n, n]}$. No es difícil notar que la sucesión $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple la propiedad 3 del teorema, por lo que si $x \in D(T)$, entonces $\phi_T(h_n)x \rightarrow T(x)$. Por consiguiente,

$$\phi(h_n - z_0)x \rightarrow (T - z_0 I)x \text{ y } \phi_T(f_{z_0})\phi_T(h_n - z_0)x \rightarrow \phi(f_{z_0})(T - z_0 I)x. \quad (3.7)$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_{z_0}(x)(h_n(x) - z_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-n, n] \\ \frac{-z_0}{x - z_0} & \text{si } x \notin [-n, n] \end{cases}$$

por lo que la sucesión $\{f_{z_0}(h_n - z_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ converge a 1 puntualmente y está uniformemente acotada por la constante

$$\max \left\{ 1, \frac{|z_0|}{dist(\mathbb{R}, z_0)} \right\}.$$

Apelando a la propiedad 2 del teorema, para todo $x \in H$, $\phi_T(f_{z_0}(h_n - z_0))x \rightarrow \phi_T(1)x = x$. En particular, si $x \in D(T)$, la expresión 3.7 indica que

$$\phi_T(f_{z_0})(T - z_0 I)x \leftarrow \phi_T(f_{z_0})\phi_T(h_n - z_0)x = \phi_T(f_{z_0}(h_n - z_0))x \rightarrow x.$$

De manera análoga se prueba que también $\phi_T(h_n - z_0)\phi_T(f_{z_0}) = x$, por lo cual $z_0 \in \varphi(T)$ y $\phi_T(f_{z_0}) = (T - z_0 I)^{-1}$. Repitiendo los mismos argumentos para ψ , se llega a que $\psi(f_{z_0})$ también coincide con $(T - z_0 I)^{-1}$. Al ser ϕ_T y ψ homomorfismos entre álgebras, la igualdad anterior implica que para cada $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\phi_T(P \circ f_{z_0}) = \psi(P \circ f_{z_0}).$$

Si $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, $h \circ f_{z_0} \in B_b(\mathbb{R})$ y existe una sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[X]$ que converge uniformemente a h en $B_{\|f_{z_0}\|_{\infty}}(0)$. Esto implica que la sucesión $\{p_n \circ f_{z_0}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ converge a $h \circ f_{z_0}$ bajo la norma de este último por lo que

$$\phi_T(h \circ f_{z_0}) \leftarrow \phi_T(p_n \circ f_{z_0}) = \psi(p_n \circ f_{z_0}) \rightarrow \psi(h \circ f_{z_0}).$$

Se extiende la igualdad anterior a cualquier función boreliana y acotada con la ayuda del siguiente conjunto:

$$V := \{f \in B_b(\mathbb{C}) \mid \phi_T(h \circ f_{z_0}) = \psi(h \circ f_{z_0})\}.$$

Lo anterior conlleva a que $C_b(\mathbb{C}) \subset V$. Si se considera una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ uniformemente acotada y convergente a una función f de manera puntual, la aplicación del punto 2 del teorema a la sucesión $\{f_n \circ f_{z_0}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ implica que

$$\phi_T(f \circ f_{z_0}) \leftarrow \phi_T(f_n \circ f_{z_0}) = \psi(f_n \circ f_{z_0}) \rightarrow \psi(f \circ f_{z_0}).$$

Por tanto, $f \in V$ y el teorema 87 indica, por lo mismo, que $V = B_b(\mathbb{C})$. Así, se concluye que $\phi_T = \psi$ debido a que para cualquier $g \in B_b(\mathbb{R})$ la función $h \in B_b(\mathbb{C})$ dada por

$$h(z) = \begin{cases} g(\operatorname{Re}(\frac{1}{z} + z_0)) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es tal que $h \circ f_{z_0} = g$.

Finalmente, hay que verificar que se cumple la propiedad 4 del teorema ya que la constatación de las propiedades 5 y 6 se sigue de los puntos anteriores. Si $x \in D(T)$ es un vector propio de T asociado al valor propio λ , entonces $\varphi = U(x)$ es un vector propio de T_f asociado al mismo valor propio como consecuencia de que

$$T_f U(x) = U T(x) = U(\lambda(x)) = \lambda U(x). \quad (3.8)$$

Esto conlleva a que el conjunto $\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus f^{-1}(\{\lambda\}) = \{m \in M \mid f(m)\varphi(m) \neq \lambda\varphi(m)\}$, sea un subconjunto de un conjunto de medida cero. Además, como $f^{-1}(\{\lambda\}) \subset (h \circ f)^{-1}(\{h(\lambda)\})$, se sigue que

$$\begin{aligned} \{m \in M \mid (h \circ f)(m)\varphi(m) \neq h(\lambda)\varphi(m)\} &= \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus (h \circ f)^{-1}(\{h(\lambda)\}) \\ &\subset \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus f^{-1}(\{\lambda\}); \end{aligned}$$

de modo que $T_{h \circ f}(\varphi) = (h \circ f)\varphi = h(\lambda)\varphi$ m -c.t.p. Por tal motivo, las funciones anteriores son

iguales en $L^2(M, m, \mathbb{C})$. Con un argumento análogo al de la expresión 3.8 se concluye que x es un vector propio de $\phi_T(h)$ asociado al valor propio $h(\lambda)$. ■

Tal y como se mencionó al termino del teorema 106, el Cálculo Funcional Boreliano de T se puede definir sobre $B_b(\mathbb{R})$, como en el teorema anterior, o sobre $B_b(\sigma(T))$ así como en el teorema 132. La razón de ello es que

$$\begin{aligned} m(\{x \in M \mid f(x) \notin \sigma(T)\}) &= m(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \sigma(T))) = m(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \text{supp}(m_f))) \\ &= m_f(\mathbb{C} \setminus \text{supp}(m_f)) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede asumir sin perder generalidad que $f(M) \subset \sigma(T)$, lo cual propicia que $D(\phi_T) = B_b(\sigma(T))$ sin alterar la teoría que se desarrolla en base al teorema pasado.

La última observación queda más clara con la Forma del Teorema Espectral que habla sobre medidas espectrales, debido a que las integrales que se realizan sobre la medida espectral asociada a T se anulan en $\mathbb{R} \setminus \sigma(T)$. Mostrar que dicha medida asociada a T existe, es el objetivo final del presente trabajo. Con ello se demostrará la existencia de una relación biunívoca entre el conjunto de operadores autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert H y el conjunto de las medidas espectrales definidas en este último. Las medidas de soporte compacto estarán relacionadas con operadores acotados y viceversa, en virtud del teorema 149.

Para esto, es necesario definir una nueva clase de operadores que estén relacionados con las medidas espectrales. Las siguientes definiciones serán de ayuda para ello:

Definición 183 Para cada $f \in B(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$F_n(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq n\}$$

y la función

$$f_n := f \chi_{F_n(f)}.$$

Definición 184 Dada una medida espectral $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$, se define para cada $f \in B(\mathbb{R})$ el conjunto

$$D_f := \{x \in H \mid f \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_x)\},$$

en donde m_x denota la medida dada por la expresión 2.7.

Al ser $|f_n| \leq |f|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el TCD implica que para cada $x \in D_f$

$$f_n \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_x) \text{ y } \|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Lema 185 *Para cada $f \in B(\mathbb{R})$ se tiene que D_f es un subespacio vectorial denso en H .*

Demostración. Primero se mostrará que D_f es un espacio vectorial. Para ello, nótese que si $x \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que $m_{\alpha x}(A) = \langle \alpha x, E_A(\alpha x) \rangle = |\alpha|^2 \langle x, E_A(x) \rangle = |\alpha|^2 m_x(A)$. Por consiguiente, si $x \in D_f$, se sigue que $\alpha x \in D_f$, pues

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\alpha x} = |\alpha|^2 \int_{\mathbb{R}} f d\mu_x < +\infty.$$

Aunado a esto, si $y \in H$ es otro elemento arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \langle x + y, E_A(x + y) \rangle &= \langle x, E_A(x) \rangle + \langle y, E_A(y) \rangle + \langle x, E_A(y) \rangle + \langle y, E_A(x) \rangle \\ &= \langle x, E_A(x) \rangle + \langle y, E_A(y) \rangle + \langle E_A(x), E_A(y) \rangle + \overline{\langle E_A(x), E_A(y) \rangle} \\ &\leq \langle x, E_A(x) \rangle + \langle y, E_A(y) \rangle + 2\sqrt{\langle E_A(x), E_A(x) \rangle} \sqrt{\langle E_A(y), E_A(y) \rangle} \\ &\leq \langle x, E_A(x) \rangle + \langle y, E_A(y) \rangle + \langle E_A(x), E_A(x) \rangle + \langle E_A(y), E_A(y) \rangle \\ &= 2\langle x, E_A(x) \rangle + 2\langle y, E_A(y) \rangle. \end{aligned}$$

Así, $m_{x+y} \leq 2(m_x + m_y)$ por lo que si $x, y \in D_f$, entonces $x + y \in D_f$ por un argumento análogo al ya dado.

Ahora se verificará que $\overline{D_f} = H$. Al ser $f \in B(\mathbb{R})$, $F_n(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\mathcal{X}_{F_n(f)} \in B_b(\mathbb{R})$ y $\mathcal{X}_{F_n(f)} \rightarrow 1$ puntalmente. Esto último conlleva a que para todo $x \in H$, $E_{F_n(f)}(x) \rightarrow x$. Sólo falta probar que $E_{F_n(f)}(x) \in D_f$, lo cual se sigue de que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm_{E_{F_n(f)}(x)} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_m(f)} dm_{E_{F_n(f)}(x)} \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle E_{F_n(f)}(x), \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_m(f)} dE \circ E_{F_n(f)}(x) \rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle x, \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_m(f)} \mathcal{X}_{F_n(f)} dE(x) \rangle = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle x, \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_{\min\{m, n\}}(f)}(x) \rangle \\ &= \langle x, \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_n(f)}(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_n(f)} dm_x \leq n^2 m_x(F_n(f)) < +\infty. \end{aligned}$$

Lo anterior permite concluir que $x \in \overline{D_f}$ por ser el límite de una sucesión contenida en éste último.

■

Al considerar las integrales espectrales de la definición 144 y la notación dada para ellas, se observa que para cada $f \in B(\mathbb{R})$, $x \in D_f$ y $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi(f_n)x - \varphi(f_m)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_m|^2 dm_x.$$

Como la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_x)$, se tiene que ésta es de Cauchy por lo cual la ecuación anterior conlleva a que $\{\varphi(f_n)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ también lo sea en H . Al ser este un espacio de Hilbert, esta última sucesión converge en H . Además, si $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ fuese otra sucesión para la cual $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_x)$, un argumento análogo al anterior implicaría que las sucesiones $\{\varphi(g_n)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\varphi(f_n)x, \varphi(g_n)x\}_{n \in \mathbb{N}}$ también convergen en H y que, por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(g_n)x.$$

Esto motiva lo siguiente:

Definición 186 Sean H un espacio de Hilbert y $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ una medida espectral. Para cada $f \in B(\mathbb{R})$ se define la integral espectral de f respecto de E como la función

$$\begin{aligned} \int f dE: D_f &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n dE x, \end{aligned}$$

en donde $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ converge a f en $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_x)$ para cada $x \in D_f$.

Es fácil notar que la integral de f es un operador, el cual será denotado como $\varphi(f)$ en virtud de la misma definición 144, debido a que si $f \in B_b(\mathbb{R})$, las dos definiciones de integral espectral de f coinciden. Mientras que la integral espectral del capítulo pasado tiene como dominio a $B_b(\mathbb{R})$ y contradominio a $\mathcal{L}(H)$, la integral que se acaba de introducir tiene como dominio a $B(\mathbb{R})$ y contradominio al conjunto conformado por los operadores definidos en H con contradominio en este mismo. Las diferencias que usualmente presentan los dominios de dos funciones borelianas distintas propician, en general, que φ no separe sumas o productos. Lo que se puede hacer es imponer condiciones para las cuales φ si realice lo anterior. Para el Teorema Espectral sólo es

necesario verificar cuando ocurre lo último. Previo a ello, hay que destacar para cada $x \in D_f$

$$\|\varphi(f)x\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi(f_n)x\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n|^2 dm_x = \int |f|^2 dm_x.$$

Lema 187 Sean $f \in B(\mathbb{R})$ y $g \in B_b(\mathbb{R})$. Se tiene que $D_f \subset D_{fg}$ y que

$$\varphi(f) \circ \varphi(g) = \varphi(fg).$$

Demostración. Si $x \in D_f, x \in D_{fg}$ como consecuencia de que

$$\int_{\mathbb{R}} |fg|^2 dm_x \leq \|g\|_{\infty}^2 \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm_x < +\infty.$$

A su vez, $x \in D_{fg}$ si y sólo si $\varphi(g)x \in D_f$ por el hecho de que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm_{\varphi(g)x} &= \langle \varphi(g)x, \varphi(|f|^2) \circ \varphi(g)x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi(g)x, \varphi(|f_n|^2) \circ \varphi(g)x \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, \varphi(|f_n|^2 |g|^2)x \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 |g|^2 dm_x = \int_{\mathbb{R}} |fg|^2 dm_x. \end{aligned}$$

Esto indica que $D(\varphi(fg)) = D(\varphi(f) \circ \varphi(g))$ por lo que la igualdad del lema se sigue del hecho de que para cada $x \in D_{fg}$

$$\varphi(f) \circ \varphi(g)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n) \circ \varphi(g)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n g)x = \varphi(fg)x.$$

■

Una consecuencia de este lema es que la integral espectral sigue respetando las involuciones:

Teorema 188 $\varphi^*(f) = \varphi(\bar{f})$ para cada $f \in B(\mathbb{R})$.

Demostración. Para cada $x, y \in D_f$ se cumple que

$$\langle x, \varphi(f)y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, \varphi(f_n)y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi(\bar{f}_n)x, y \rangle = \langle \varphi(\bar{f})x, y \rangle;$$

de manera que $\varphi(\bar{f}) \subset \varphi(f)^*$. Por otro lado, si se considera a cualquier $x \in D(\varphi(f)^*)$, se tiene que

para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_n(f)} dm_x &= \|\varphi(\bar{f} \mathcal{X}_{F_n(f)})x\|^2 = \|\varphi(f \mathcal{X}_{F_n(f)})^* x\|^2 = \|(\varphi(f) \varphi(\mathcal{X}_{F_n(f)}))^* x\|^2 \\ &= \|\varphi(\mathcal{X}_{F_n(f)})^* \varphi(f)^* x\|^2 \leq \|\varphi(f)^* x\|^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \mathcal{X}_{F_n(f)} dm_x \leq \|\varphi(f)^* x\|^2 < +\infty,$$

por lo que $x \in D_f$ y, por lo mismo, $\varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$. ■

Un corolario de lo anterior es que para cada $f \in B(\mathbb{R})$, $\varphi(f)$ es de gráfica cerrada y autoadjunto cuando f sólo toma valores reales. Estas propiedades también las exhibe el Cálculo Funcional mostrado en el teorema 182 debido a que, en virtud de la versión del Teorema Espectral que está por demostrarse, toda integral espectral es el Cálculo Funcional Boreliano de un único operador autoadjunto T . Para llegar a esto, se demostrarán los siguientes teoremas que son análogos a las proposiciones 147 y 148, respectivamente:

Teorema 189 Sean H un espacio de Hilbert y $E: B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ una medida espectral. Si

$$T := \int \lambda dE_\lambda,$$

entonces $\sigma(E) = \sigma(T)$ y la asignación

$$\begin{aligned} \varphi: B_b(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\longmapsto \int f dE \end{aligned}$$

coincide con el cálculo funcional boreliano ϕ_T de T .

Demostración. La igualdad entre el soporte de E y el espectro de T es análoga a la dada en el teorema 147. Para el caso de ϕ_T y φ , la igualdad entre ambos se probará verificando que esta última función cumple con las primeras tres hipótesis del teorema 182. La primera de éstas es obvia, puesto que φ coincide con la integral espectral del teorema 147. Ahora, si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ es una sucesión uniformemente acotada que converge de manera puntual a una función h , el TCD implica

que h_n y $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_\psi)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\psi \in H$, y que $h_n \rightarrow h$ en cada uno de estos espacios L^2 . Esto conlleva a que, por definición, $\varphi(h_n) \rightarrow \varphi(h)$ de manera puntual. Finalmente, si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ es tal que $h_n \rightarrow Id_{\mathbb{R}}$ puntualmente y $|h_n| \leq |Id_{\mathbb{R}}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el mismo TCD indica que para cada $\psi \in D(T)$, $\{h_n\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_\psi)$ dándose la convergencia $h_n \rightarrow Id_{\mathbb{R}}$ en todos estos. En consecuencia,

$$\|\varphi(h_n)\psi - \varphi(Id_{\mathbb{R}})\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |h_n(\lambda) - \lambda|^2 dm_\psi(\lambda) \rightarrow 0.$$

■

Teorema 190 Sean H un espacio de Hilbert y $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Se tiene la existencia de una única medida espectral $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ para la cual

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Además, la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : B_b(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\longmapsto \int f dE \end{aligned}$$

coincide con el cálculo funcional boreliano de T .

Demostración. Considerando la medida espectral

$$\mathcal{X}_T : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \phi_T(\mathcal{X}_A) \in \mathcal{L}(H)$$

se define el operador

$$S := \int \lambda dE_\lambda.$$

Hay que demostrar que $T = S$.

Si $\psi \in D(T)$ y $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_b(\mathbb{R})$ es una sucesión de funciones simples que converge a $Id_{\mathbb{R}}$ de manera puntual y para la cual $|h_n| \leq |h_{n+1}| \leq Id_{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|\phi_T(h_n)\psi\|^2 \rightarrow \|T(\psi)\|^2$.

Como h_n es una función simple, existen $\{\alpha_{n_i}\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ y $\{A_{n_i}\}_{i=1}^m \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tales que

$$h_n = \sum_{i=1}^m \alpha_{n_i} \chi_{A_{n_i}}.$$

Por tanto,

$$\phi_T(h_n) = \phi_T\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{n_i} \chi_{A_{n_i}}\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{n_i} \chi_T(A_{n_i}) = \int h_n dE$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dm_\psi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_n|^2 dm_\psi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int h_n dE \psi \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \phi_T(h_n) \psi \right\|^2 = \|T(\psi)\|^2.$$

Esto indica que $\psi \in D(S)$ por lo que $D(T) \subset D(S)$. Además,

$$\int \lambda dE_\lambda \psi \leftarrow \int h_n dE \psi = \phi(h_n) \psi \rightarrow T(\psi)$$

para cada $\psi \in D(T)$ teniéndose así que $T \subset \int \lambda dE_\lambda$.

Sólo queda verificar que $D(S) \subset D(T)$. Para ello considérese un $\psi \in D(S)$ y obsérvese que por ser S un operador autoadjunto se sigue que

$$\left\langle \int \lambda dE_\lambda \psi, x \right\rangle = \left\langle \psi, \int \lambda dE_\lambda x \right\rangle, \text{ para cada } x \in D(S).$$

En particular, al ser $T \subset \int \lambda dE_\lambda$, se implica que $\psi \in D(T^*) = D(T)$. Por consiguiente, $T = S$ por lo que el teorema anterior asegura que $\phi_T(f) = \int f dE$, para todo $f \in B_b(\mathbb{R})$. En consecuencia, si E es una medida espectral para la cual $T = \int \lambda dE(\lambda)$, se tiene que para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\chi_T(A) = \int \chi_A d\chi_T = \phi_T(\chi_A) = \int \chi_A dE = E_A,$$

como corolario del teorema anterior y de lo previamente comentado. Así, $\chi_T = E$. ■

Con estos teoremas ya se puede dar una demostración de la tercera versión del Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos no Acotados que resulta análoga a la dada para la versión acotada (teorema 149). Por tal motivo, el siguiente teorema sólo será enunciado.

Teorema 191 (*Teorema Espectral: Forma de la Medida Espectral*) Sea H un espacio de Hilbert. Los conjuntos

$$N := \{T \mid T \text{ es un operador autoadjunto de } H\} \text{ y } M := \{E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H) \mid E \text{ es una medida espectral} \}$$

están en biyección mediante el siguiente par de funciones que resultan ser inversas una de la otra:

$$P: T \in N \mapsto \mathcal{X}_T \in M, \quad Q: E \in M \mapsto \int \lambda dE_\lambda \in N.$$

Bibliografía

- [1] Abramovich, Y. y Aliprantis, C. (2002). An Invitation to Operator Theory. Estados Unidos: American Mathematical Society.
- [2] Araki, H. y Kadison, R. (1977). C^* -Algebras and Applications to Physics. Los Angeles, Estados Unidos: Springer Verlag New York Inc.
- [3] Attal, S. (2013). OPERATOR AND SPECTRAL THEORY. Recuperado el 26 de febrero del 2018 de http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf
- [4] Arveson, W. (2002). A Short Course on Spectral Theory. Nueva York, Estados Unidos: Springer Verlag New York Inc.
- [5] Connes, A. (1994). Noncommutative Geometry. Francia: InterEditions Paris.
- [6] Davies, E. (1995). Spectral Theory and Differential Operators. Inglaterra: Cambridge University Press.
- [7] de Oliveira, C. (Segunda Edición). (1957). Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics. Alemania: Springer Science & Business Media, 2008.
- [8] Garling, D. (1973). A ‘short’ proof of the Riesz representation theorem. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 73(3), 459-460. doi:10.1017/S0305004100077021. Recuperado el 2 de febrero del 2020 de www.cambridge.org/core/journals/mathematical-proceedings-of-the-cambridge-philosophical-society/article/short-proof-of-the-riesz-representation-theorem/E394998BB2CB26E95847F3A6B2E30D18.

- [9] Halmos, P. (Segunda Edición). (1957). Introduction To HILBERT SPACE AND THE THEORY OF SPECTRAL MULTIPLICITY. Nueva York, Estados Unidos: Chelsea Publishing Company.
- [10] Halmos, P. (1974). Measure Theory. Estados Unidos: Springer-Verlag New York Inc.
- [11] Hartig, D. (1983). The Riesz Representation Theorem Revisited. The American Mathematical Monthly, 90(4), 277-280. doi:10.2307/2975760. Recuperado el 2 de febrero del 2020 de https://www.jstor.org/stable/2975760?seq=1metadata_info_tab_contents.
- [12] Holmes, R. (1975). Geometric Functional Analysis and its Applications. Estados Unidos: Springer-Verlag New York Inc.
- [13] Luxemburg, W. (1985). A note on the sum of two closed linear subspaces. Recuperado el 2 de junio del 2019 de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1385725885900113>
- [14] Michael, R. y Barry, S. (Segunda Edición). (1980). METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS. Estados Unidos: Academic Press, inc.
- [15] Lax, P. (2002). FUNCTIONAL ANALYSIS. Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
- [16] Rudin. W. (Tercera Edición). (1986). REAL AND COMPLEX ANALYSIS. Estados Unidos: McGraw-Hill Book Company.
- [17] Sáenz, R. (sf). Análisis Real: Primer Curso. Recuperado el 15 de enero del 2019 de <https://docplayer.es/18337229-Analisis-real-primer-curso-ricardo-a-saenz.html>
- [18] Weidmann, J. (1980). Linear Operators in Hilbert Spaces. Nueva York, Estados Unidos: Springer Verlag New York Inc.
- [19] Werner, D. (2007). Funktionalanalysis. Alemania: Springer-Verlag Berlin Inc.
- [20] Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura. (2018). Apuntes de Teoría de la Medida. Recuperado el 6 de Agosto del 2018 de <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf>.