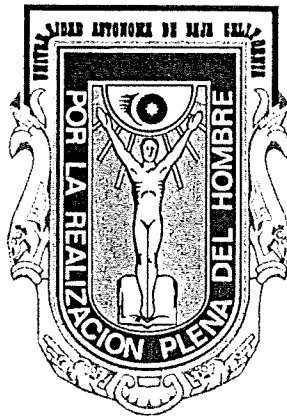


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRES EN ESPECTROS DE
BAJA DISPERSIÓN DE NEBULOSAS PLANETARIAS

TESIS

Que para obtener el título de

LIC. EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta:

MARÍA YANET JIMÉNEZ REYES

Ensenada, Baja California.

Marzo de 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

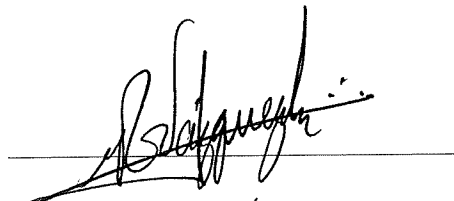
ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRES EN
ESPECTROS DE BAJA DISPERSIÓN DE
NEBULOSAS PLANETARIAS

T E S I S P R O F E S I O N A L

QUE PRESENTA

MARÍA YANET JIMÉNEZ REYES

APROBADO POR:



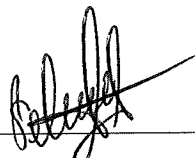
DR. ROBERTO VÁZQUEZ MEZA

PRESIDENTE DEL JURADO



DR. LORENZO OLGUÍN RUIZ

S E C R E T A R I O



DRA. SELENÉ SOLORZA CALDERÓN

1er. V O C A L

Agradecimientos

Agradezco todas las facilidades y recursos que me ha brindado el Instituto de Astronomía de la Universidad Autónoma de México, sede Ensenada y al Observatorio Astronómico Nacional en la Sierra de San Pedro Mártir OAN-SPM.

Agradezco también a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM) por la beca que me fue otorgada para la realización de este trabajo dentro del proyecto PAPIIT IN111903-3.

Gracias también a las personas que adquirieron los datos que se han utilizado en esta tesis: Dr. Roberto Vázquez, Dra. Sandra Ayala, Dr. Lorenzo Olguín, M.C. Saúl Zavala y el Dr. Luis Miranda.

A mis asesores de tesis, al Dr. Lorenzo Olguín y Dr. Roberto Vázquez por todos los conocimientos compartidos y por su paciencia ilimitada al dirigirme en esta tesis.

A la Facultad de Ciencias de la UABC por darme lo mejor de ella, por todas las enseñanzas que me dio (también por las que no) a lo largo de mi carrera, a mi alma mater porque me siento orgullosa de ser una *Cimarrón*.

LOS OTROS AGRADECIMIENTOS

Me resultó difícil escribir una tesis, pero más el tratar de expresar mis sentimientos a tantas personas tan especiales para mí, aunque sé que un par de hojas no bastarán para ello.

A mis padres por el carácter y las ganas de seguir adelante. Por enseñarme que la vida no es tan fácil como la pintan en las películas, pero que hay que disfrutarla al máximo a cada instante, de que debo seguir mis sueños pero sin perderme en ellos, así como a levantar la frente cuando las cosas no van del todo bien. Gracias por apoyarme en todos estos años de estudio, desvelos, enfermedades, triunfos y fracasos.

A mis hermanos Iván, Carmen y Fernando por ser mis aliados en esta larga cruzada, por darme ánimos aún sin expresarlo con palabras, por aguantarme (mejor dicho por soportar mi neurosis) y reír conmigo.

A mis tíos, a los que siempre llevaré en mi corazón, por todas sus muestras de apoyo y alegría.

A Martín Ortiz, un simple te quiero no alcanzaría para agradecer tanto cariño, apoyo, comprensión, entre tantas cosas. Por creer en mí, especialmente cuando yo no lo hacía. Gracias por ser el complemento de este conjunto no vacío.

A Lorenzo Olguín por todos tus conocimientos, tu paciencia, apoyo, así como los regaños bien merecidos (que un buen padre da a sus hijos). También por hacerme sentir aquella frase de Asimov: *El verdadero placer no está en la obtención de resultados sino en la búsqueda.*

A Roberto Vázquez gracias por ser un gran maestro, amigo, padre y confidente para mí. Por tus consejos, tu sabiduría y uno que otro jalón de oreja.

A Selene Solorza, por tus enseñanzas a través de toda la carrera, así como por tus atenciones y amistad brindada. Gracias por los comentarios dirigidos a mejorar

esta tesis.

A Yunuén, Daniel Olguín C. y a mi pequeña Lilo (Victoria Vázquez), por recordarme a mi niño interior, así por aligerar mis problemas y preocupaciones con sólo ver una sonrisa de ustedes. Gracias por iluminar mi existencia.

A Maru Contreras por toda tu simpatía, amistad y cariño. Gracias por ser como una tía para mí, también por los peques que adoro y me vuelven loquita.

A Manuel Lecuanda porque aunque siempre te lo negaba, fuiste quién me introdujo a lo maravilloso de la Estadística, gracias por los buenos momentos compartidos y por tu gran amistad.

A Jorge Martínez Lizama, gracias por compartir tus conocimientos y mostrarme otra faceta de la estadística aplicada.

A mis maestros en la Facultad de Ciencias: Gloria Rubí, Selene Solorza, Roberto Vázquez, Rene Ortiz, Alvaro Alvarez, Juan Tapia, Jesús Lerma, Jorge Villavicencio, Roberto Romo, Manuel Lecuanda, por sus enseñanzas y consejos tan valiosos impartidos en la carrera.

A mi segunda familia, los *Planetosos*: Roberto, Lorenzo, Maru. Tía Sandra, Sazo, Patty, Paco, Mónica, Yuri, Juan José por toda la calidez brindada.

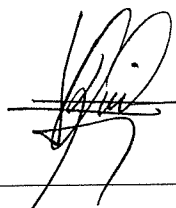
A mis compañeros de cubículo: Yuridia, no se que hubiera sido de mí sin tí, gracias por escucharme, apoyarme y confiar en mí. A Angel Castro, por tus máximas filosóficas "*Descansar es pecado*" y "*Se prohíbe la felicidad en el cubículo*", por tu amistad, galletitas y demás cosas de la alacena. Por hacerme reír con tus ironías y dictaduras, perdón tus mandatos celestiales, así como de tus patoaventuras.

Finalmente, a mis amigos que han estado conmigo en las buenas y en las malas, por las desveladas y los buenos momentos que hemos compartido: Tavo, Aldo, José Luis, Jorge Moreno, Saracho, Vane, Elena, José Manuel, Rene Ortiz.

RESUMEN de la tesis como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas presenta María Yanet Jiménez Reyes. Ensenada, Baja California, México. Marzo del 2008.

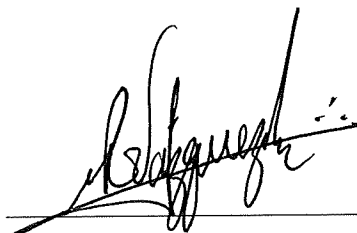
ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRES EN ESPECTROS DE BAJA DISPERSION DE NEBULOSAS PLANETARIAS

Resumen aprobado por:



Dr. Lorenzo Olguín Ruiz

Codirector de tesis



Dr. Roberto Vázquez Meza

Codirector de tesis

Se presenta un análisis de incertidumbres en los parámetros físicos y abundancias químicas de nebulosas planetarias, derivadas a partir de espectros de baja dispersión. En las incertidumbres se consideran dos fuentes de ruido: el de fotones y el de lectura. Siempre que es posible, la propagación de los errores se realiza analíticamente. En caso contrario, se describe el proceso de estimación de incertidumbres. Se presenta la aplicación de una región de las nebulosas NGC 6309 y NGC 7354. El comportamiento de las incertidumbres finales, como función de la señal a ruido (S/N) de las líneas de emisión, muestra que para líneas con $S/N < 50$ las incertidumbres en abundancias iónicas están en el intervalo de 10 a 20 %, mientras que para S/N mayores las incertidumbres son menores al 5 %, concordando con lo que comúnmente se adopta en la literatura. En el caso de las abundancias totales, las incertidumbres son en general menores al 10 % excepto para nitrógeno que depende fuertemente de las incertidumbres en la abundancia de oxígeno a través del factor de corrección por ionización (ICF).

Índice general

Índice de tablas	VIII
Índice de figuras	IX
1. Introducción	1
1.1. Nebulosas Planetarias	3
1.2. Antecedentes	3
2. Marco teórico	6
2.1. Teoría de errores	6
2.1.1. Análisis estadístico de errores aleatorios	6
2.1.2. Teoría general de la propagación de errores	8
2.2. Nebulosas Planetarias	10
2.2.1. Espectro óptico	10
2.2.2. Extinción interestelar	11
2.2.3. Parámetros físicos	12
2.2.4. Abundancias químicas	15
2.2.5. Abundancia de helio	20
2.3. Fuentes de ruido	21
2.3.1. Fuentes de ruido en detectores CCD	21

2.4. Procesamiento digital de datos	23
3. Metodología	30
3.1. Espectros de varianzas	30
3.2. Teoría de errores aplicada al análisis de datos	32
3.2.1. Cociente de flujos	32
3.2.2. Coeficiente de extinción logarítmico	33
3.2.3. Incertidumbre en los flujos desenrojados	34
3.2.4. Incertidumbres en parámetros físicos	35
3.2.5. Incertidumbres en abundancias iónicas	36
3.2.6. Incertidumbres en abundancias totales	38
4. Resultados	50
4.1. Muestra de estudio	50
4.1.1. NGC 6309	50
4.1.2. NGC 7354	51
4.2. Adquisición de datos	52
4.3. Procesamiento digital de los datos	55
4.4. Medición de líneas	55
4.5. Análisis	61
4.5.1. Parámetros físicos	64
4.5.2. Abundancias químicas	65
5. Discusión	69
5.1. NGC 6309	69
5.2. NGC 7354	73
6. Conclusiones	78

Bibliografía	80
A. Glosario de abreviaturas	85
B. Diagrama de diagnóstico de densidad	86
C. Distribución Gaussiana	88
D. Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica	91

Índice de tablas

3.I. Iones de las transiciones más comunes por tipo de ionización nebular.	37
4.I. Información general sobre NGC 6309	50
4.II. Información general sobre NGC 7354	51
4.III. Flujos observados y desenojados con incertidumbres estimadas para NGC 6309.	62
4.IV. Flujos observados y desenojados con incertidumbres estimadas para NGC 7354.	63
4.V. Parámetros físicos derivados para NGC 6309	64
4.VI. Parámetros físicos derivados para NGC 7354	64
4.VII. Abundancias iónicas para NGC 6309.	66
4.VIII. Abundancias iónicas para NGC 7354.	67
4.IX. Abundancias totales para NGC 6309.	68
4.X. Abundancias totales para NGC 7354.	68
5.I. Comparación de incertidumbres en abundancias totales.	77

Índice de figuras

2.1. Espectro de una nebulosa planetaria en la región del óptico (tomada de Gurzadyan, 1997).	10
2.2. Imagen de sesgo (bias)	24
2.3. Imagen de corriente oscura (dark)	25
2.4. Imagen de campo plano (flat)	27
2.5. Imagen de cielo (twilight)	27
2.6. Imagen de un espectro de lámpara de He-Ar.	28
2.7. Imagen de un espectro de estrella estándar de flujo.	29
3.1. Espectro que ilustra dos líneas con el mismo flujo pero situadas en zonas de ruido distintas, lo cual implica un cociente señal a ruido diferente.	38
4.1. Imagen en [O III] para NGC 6309. La región de extracción del espectro estudiado se encuentra contenida en el rectángulo (adaptada de Vázquez et al. 2008).	53
4.2. Imagen en [N II] de NGC 7354. La región de extracción del espectro estudiado está contenida en el rectángulo. La región de extracción fue de 7" (adaptada de Contreras et al. 2008)	54
4.3. Ejemplo de espectro de baja dispersión	56

4.4. (a): Espectro integrado de flujos para NGC 6309. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas de emisión más débiles.	57
4.5. (a): Espectro integrado de varianzas para NGC 6309. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas con varianzas pequeñas.	58
4.6. (a): Espectro integrado de flujos para NGC 7354. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas de emisión más débiles.	59
4.7. (a): Espectro integrado de varianzas para NGC 7354. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas con varianzas pequeñas.	60
4.8. Medición de la varianza de una línea de emisión nebulosa.	61
5.1. Incertidumbre porcentual en la abundancia iónica en función de la S/N para NGC 6309.	70
5.2. Ampliación de la figura 5.1 para líneas con $S/N < 200$	71
5.3. Incertidumbre porcentual en la abundancia iónica en función de la S/N para NGC 7354.	74
5.4. Ampliación de la figura 5.3 para líneas con $S/N < 200$	75
B.1. Diagrama de diagnóstico de densidad para las líneas de [S II]	87
C.1. Localización del FWHM en una Gaussiana.	89
D.1. Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica para $\lambda 7320$ [O III], $\lambda 7320$ es una combinación de las líneas $\lambda 7318.44 + 7319.50$	92
D.2. Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica para $\lambda 7330$ [O III], $\lambda 7330$ es una combinación de las líneas $\lambda 7329.07 + 7330.12$	93

Capítulo 1

Introducción

La Astronomía es quizá la ciencia observacional más antigua. El esfuerzo por entender los misteriosos objetos luminosos en el cielo ha sido un elemento importante de la cultura humana por lo menos durante los últimos 10 000 años.

El primer encuentro de los conceptos estadísticos con los datos astronómicos tiene que ver con la determinación de la media de una serie de observaciones. El griego Hiparco (190-170 a.C.) realizó una de las primeras aplicaciones de los principios matemáticos que hoy se consideran como parte de la estadística. Encontró que la mitad del valor de la dispersión (llamado *rango*) en las mediciones de la longitud de un año era un mejor valor que la media o mediana (Babu 1996).

Astrónomos clásicos como Tolomeo (100-170 d.C.) se interesaron por la presencia y eliminación de errores en las observaciones. En su obra *Almagesto*, se discutía sobre los errores en posición causados por la refracción atmosférica y la paralaje, y se hacía la recomendación de repetir observaciones por períodos de tiempo largos con el fin de reducir los errores.

El astrónomo y matemático Al-Biruni (973-1048 d.C.) discutió sobre los peligros de la propagación de errores para instrumentos imprecisos, observadores distraídos y cálculos inexactos. Tanto Tolomeo como Al-Biruni utilizaban la mejor de una serie de observaciones en lugar del promedio de ellas.

Algunas escuelas medievales se oponían a la adquisición de mediciones repetidas, temiendo que los errores se combinaran empeorando las mediciones en lugar de que se compensaran unos con otros.

Tycho Brahe (1546-1601) demostró la utilidad de la media para incrementar la precisión de las observaciones, promedió mediciones realizadas en distintos años para reducir errores en la ascensión recta y declinación de estrellas estándares.

En la renombrada obra de Galileo Galilei, *Diálogo Concerniente a los Dos Máximos Sistemas del Mundo, Tolemaico y Copernicano* escrita en 1632, se incluía una discusión sobre los errores observacionales con sus respectivos tratamientos. En esta obra, Galileo diferenciaba claramente entre el valor verdadero de una cantidad física, e.g. la distancia angular entre dos estrellas, de las distintas mediciones de esta cantidad, las cuales eran sujetas a errores de medición. Estableció principios básicos de la teoría de medición: que los errores se encuentran distribuidos simétricamente con media cero y que los errores pequeños son más comunes que los errores grandes.

En la segunda mitad del siglo XVIII se fundó la teoría moderna de la estadística, en particular el desarrollo del método de los mínimos cuadrados y la teoría matemática de errores.

En el siglo XIX, Friedrich Bessel trabajó con errores en las mediciones observacionales y fue el primero en utilizar el término *error probable*, así como en probar la validez de la distribución de error normal de Gauss, utilizando mediciones repetidas de las posiciones estelares. Por otra parte, en 1861, George Airy escribió el volumen *Teoría Numérica y Algebraica de Errores en Observaciones y de las Combinaciones en Observaciones*.

En la Astronomía moderna, la estadística ha jugado un papel muy importante. La aparición de más y mejores telescopios en tierra y en el espacio, con una mayor resolución y una instrumentación más precisa, han llevado a producir una gran

cantidad de datos que necesitan ser tratados de una manera más confiable y precisa.

1.1. Nebulosas Planetarias

Charles Messier en 1764 fue el primero en observar una *Nebulosa Planetaria* (NP) utilizando un telescopio. Sin embargo, fue William Herschel el que le dió el nombre de Nebulosa Planetaria, debido a su apariencia de disco verdoso, tal como los planetas lejanos. Es por esa semejanza que se les llamó planetarias, aún sabiendo que no tienen nada que ver con los planetas.

Las NPs son sistemas que corresponden a una de las etapas finales en la evolución estelar. Están formadas por una estrella central caliente (30 000 a 300 000 K), cuya masa original está entre $1 - 10 M/M_{\odot}$, y una envoltente de gas ionizado, producto de la evolución de dicha estrella.

La identificación de una NP se basa en su morfología, determinada por la forma de su envoltente, y su espectro, en el que se observan principalmente líneas de emisión de la recombinación de hidrógeno ($H\alpha$, $H\beta$, etc.), líneas prohibidas de alta excitación ($[O III]$, $[Ar IV]$, etc.), de baja excitación ($[N II]$, $[S II]$, etc.) y radiocontinuo.

1.2. Antecedentes

La Astronomía es una ciencia observacional, es decir, las condiciones de un experimento dado no se encuentran controladas, a diferencia de otras ciencias físicas. Todo esto tiene como consecuencia que exista la posibilidad de que tengamos incertidumbres grandes en las mediciones, por lo que es necesario el tener una estimación más confiable de las mismas y poder realizar inferencias de los resultados en base a éstas. A su vez, para determinar incertidumbres en una medición es necesario entender todas las posibles fuentes de ruido que contribuyan a ella.

Al estudiar una NP, se desea conocer detalladamente sus características más importantes como son parámetros físicos y abundancias químicas; para lograr esto se estudian pequeñas regiones en la NP, en las que ocasionalmente se encuentran variaciones en sus parámetros al compararse unas con otras. La interpretación de estas variaciones depende fuertemente de las incertidumbres, que en muchos casos no se encuentran lo suficientemente bien estimadas como para establecer confiablemente si esas variaciones son reales o no.

Así mismo, cuando se desea comparar los resultados de un estudio con otros es necesario tener una estimación de las incertidumbres para poder afirmar confiablemente si estos valores son consistentes con los demás.

Se han hecho esfuerzos por estimar las incertidumbres en parámetros físicos y químicos mediante modelos de ruido, en los cuales se le asigna una incertidumbre en base a la intensidad de la línea observada con respecto a la línea de emisión en $\lambda 4861\text{\AA}(\text{H}\beta)$ (véase Corradi et. al 1997; Gonçalves et al. 2004).

En la literatura es usual encontrar autores que adoptan una incertidumbre en abundancia iónica del 15 % para aquellas que vienen de líneas débiles y un 10 % para aquellas que se obtienen de líneas intensas. Perinotto et al. (2004) le asocia a cada abundancia una evaluación objetiva de su incertidumbre basada en la propagación de las incertidumbres observacionales a través de todo el procedimiento. Además detalla algunas dificultades por las que considera que la determinación de éstas es una tarea complicada.

Benítez (2003) realiza un cálculo de incertidumbres en las mediciones de los flujos en las líneas espectrales, los cuales se realizan haciendo una clasificación de las líneas de acuerdo al cociente señal a ruido (S/N). Desde diferentes niveles de continuo se obtuvo la media, desviación estándar e incertidumbres asociadas a los valores de flujo. Posteriormente con estos valores se obtiene mediante propagación

de errores no correlacionados, la incertidumbre asociada a la temperatura (T_e) y densidad electrónica (N_e). Las incertidumbres obtenidas no indicaron diferencias significativas en T_e y N_e por efecto de medir el flujo de las líneas desde diferentes niveles de continuo.

En esta tesis se presenta un análisis de incertidumbres mediante teoría de errores, para estimar las incertidumbres en la adquisición, procesamiento y análisis de espectros de baja dispersión en Nebulosas Planetarias y su propagación hacia los parámetros físicos y químicos derivados de ellos (Capítulo 4).

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Teoría de errores

2.1.1. Análisis estadístico de errores aleatorios

Al realizar n mediciones de la cantidad x

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

la mejor estimación de x es usualmente el promedio aritmético (media) de x_1, x_2, \dots, x_n , que nos indica una medida de la tendencia central de los datos. Esto es,

$$x_{\text{mejor}} = \bar{x}$$

en donde

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.1)$$

La desviación estándar de x_1, x_2, \dots, x_n es una medida de la dispersión de las mediciones alrededor del promedio, se representa como σ_x y está definida por

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.2)$$

La desviación estándar puede describirse como la raíz cuadrada media o RMS (por sus siglas en inglés, Root Mean Square) de la desviación de las mediciones x_1, x_2, \dots, x_n al cuadrado. Al cuadrado de σ_x se le llama *varianza*.

En general, el resultado de cualquier medición de la cantidad x se establece por

$$(x \text{ medida}) = x_{\text{mejor}} \pm \sigma_x.$$

Incertidumbre fraccional

La incertidumbre σ_x indica la confiabilidad o precisión de la medición. La calidad de la medición se caracteriza no sólo por la incertidumbre σ_x sino también por el cociente de σ_x con x_{mejor} , lo cual nos lleva a considerar la *incertidumbre fraccional*,

$$\text{incertidumbre fraccional} = \frac{\sigma_x}{|x_{\text{mejor}}|} \quad (2.3)$$

también llamada *incertidumbre relativa* o de *precisión*.

La *incertidumbre porcentual* es un indicador aproximado de la calidad de una medición, independiente del tamaño de la cantidad medida, dada por

$$\sigma(\%) = \frac{\sigma_x}{|x_{\text{mejor}}|} \times 100. \quad (2.4)$$

Promedios pesados

A menudo queremos combinar varias mediciones

$$x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_2, \dots, x_n \pm \sigma_n$$

la mejor estimación de la cantidad de interés es el promedio aritmético. Sin embargo, este promedio es inadecuado para el caso en que las incertidumbres de las mediciones sean distintas.

El promedio aritmético le da la misma importancia a cada una de las mediciones, mientras que es más razonable pensar que a la medición más precisa (con menor σ) debiera dársele más importancia o peso.

Para este tipo de casos, la mejor estimación se obtiene con el promedio pesado, dado por la siguiente expresión (Taylor 1997)

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (2.5)$$

donde w_i es el peso para cada medición.

En el caso particular en que cada medición tenga el mismo peso, i.e. $w_1 = w_2 = \dots = w_n$, el promedio pesado se reduce al promedio aritmético, Eq (2.1).

2.1.2. Teoría general de la propagación de errores

La teoría de errores es el estudio y evaluación de incertidumbres en mediciones. No hay medición que esté libre de incertidumbres, por más cuidadosa que ésta se haya realizado.

Como toda la estructura y aplicación de la ciencia depende de mediciones, resulta crucial poder evaluar las incertidumbres y cuidar que éstas sean mínimas.

En ciencia, la palabra *error* no se refiere a la connotación usual de la palabra *equivocación*. Error en las mediciones científicas significa la incertidumbre inevitable que tiene toda medición. Como tal, los errores no son equivocaciones; no se pueden eliminar por más cuidadosos que seamos. Lo mejor que se puede hacer, es asegurarse de que estos errores sean pequeños.

Teoría de errores

Supongamos que $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ son mediciones con incertidumbres $\delta x_1, \dots, \delta x_i, \dots, \delta x_n$; sea q una función que depende de $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Si las incertidumbres $\delta x_1, \dots, \delta x_i, \dots, \delta x_n$ son aleatorias y correlacionadas, entonces la incertidumbre en q estará dada por (Taylor, 1997 y Meyer, 1975):

$$\sigma_q^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial x_j} \right) \sigma_{x_i x_j} \quad (2.6)$$

donde $\sigma_{x_i x_j}$ es llamada *covarianza* de x_i, x_j ; la cual se define como

$$\sigma_{x_i x_j} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (x_i - \bar{x}_i) (x_j - \bar{x}_j) \quad (2.7)$$

La ecuación (2.6) es conocida como *fórmula general para la propagación de errores correlacionados*. En el caso de que $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ sean independientes, la covarianza $\sigma_{x_i x_j} = 0$, para $i \neq j$, por lo que la ecuación (2.6) queda de la siguiente forma

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.8) podemos obtener los siguientes casos particulares:

- *Incertidumbres en funciones de una variable:* Sea q una función de una variable, de lo cual obtenemos

$$\sigma_q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \sigma_x \quad (2.9)$$

- *Incertidumbres en sumas y diferencias:* Sea $q = x_1 + \dots + x_i - (x_j + \dots + x_n)$ la incertidumbre de q estará dada por

$$\sigma_q = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \dots + \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{x_j}^2 + \sigma_{x_n}^2} \quad (2.10)$$

- *Incertidumbres en productos y cocientes:* Sea $q = \frac{x_1 \times \dots \times x_i}{x_j \times \dots \times x_n}$, la incertidumbre fraccional de q está dada por

$$\frac{\sigma_q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_q}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sigma_q}{x_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_q}{x_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sigma_q}{x_n}\right)^2} \quad (2.11)$$

2.2. Nebulosas Planetarias

2.2.1. Espectro óptico

La característica más importante de una NP es su espectro en general y en lo particular sus regiones ópticas. Éstas difieren fuertemente del espectro de estrellas y de otros objetos celestes. Al mismo tiempo, la estructura general del espectro es idéntico para todas las NPs. Debido a esto, siempre es posible distinguir inconfundiblemente el espectro de una NP del de una estrella, aún cuando el tamaño aparente de la NP sea muy pequeño.

El espectro de una NP en la región del óptico consiste en una serie de líneas de emisión débiles e intensas, sobrepuestas en un fondo continuo débil. La estructura general del espectro de una NP en la región del óptico se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.1.

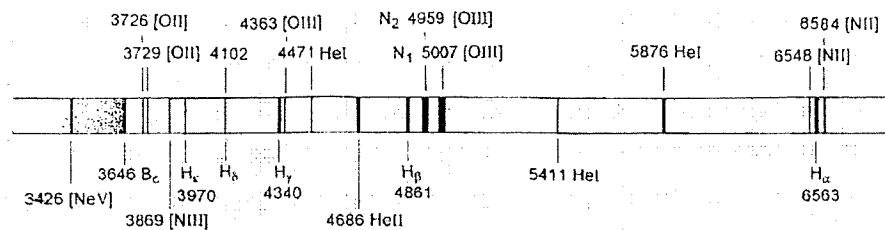


Figura 2.1: Espectro de una nebulosa planetaria en la región del óptico (tomada de Gurzadyan, 1997).

En general las líneas de emisión más brillantes en las NPs de alta excitación son las líneas con longitud de onda 5007Å y 4959Å, ambas producidas por iones de oxígeno doblemente ionizado.

2.2.2. Extinción interestelar

El espacio entre las estrellas no está del todo vacío. Existe gas y polvo interestelar que tienen un efecto cuando realizamos observaciones astronómicas.

El efecto más obvio del polvo interestelar es la extinción de la luz de estrellas y nebulosas distantes. Esta extinción en la región del óptico es en gran parte debida a la dispersión, pero también en parte debida a la absorción. Esto da lugar a la reducción de la cantidad de luz de una fuente brillante a través del polvo interestelar.

La extinción varía según la longitud de onda, siendo más fuerte para longitudes de onda cortas en las cuales se observa un enrojecimiento de la luz. Existen leyes de extinción particulares para diferentes regiones del espectro. Para el caso de la región óptica del espectro se tienen distintas leyes de extinción como las leyes de Kaler (1976), Savage & Mathis (1979), Seaton (1979), Cardelli, Clayton & Mathis (1989) entre otras.

Para el caso de la espectroscopía de líneas de emisión, la extinción se puede calcular a partir de los flujos observados de la línea de emisión H β en $\lambda 4861\text{Å}$ ($F_{H\beta}$) y de la línea H α en $\lambda 6563\text{Å}$ ($F_{H\alpha}$), que están relacionadas mediante el coeficiente de extinción $C_{H\beta}$ dado por

$$C_{H\beta} = -\frac{1}{f(\lambda)} \log \left(\frac{F_{H\alpha} I_{H\beta}}{F_{H\beta} I_{H\alpha}} \right) \quad (2.12)$$

donde $\frac{F_{H\alpha}}{F_{H\beta}}$ es el cociente de flujo observado afectado por extinción interestelar (flujo enrojecido), $\frac{I_{H\beta}}{I_{H\alpha}}$ es el cociente de flujos teórico y $f(\lambda)$ es la ley de extinción.

Una vez conocida la magnitud del coeficiente de extinción $C_{H\beta}$, el valor del flujo corregido por extinción I_λ en la línea λ puede ser obtenido por

$$\frac{I_\lambda}{I_{H\beta}} = \frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} 10^{C_{H\beta}f(\lambda)} \quad (2.13)$$

2.2.3. Parámetros físicos

Adoptamos como *parámetros físicos* a la temperatura (T_e) y densidad electrónica (N_e) del gas de la NP.

Un modelo adecuado para el cálculo de parámetros físicos es aquel que considera el átomo de cinco niveles (por ejemplo Shaw & Dufour 1994; Cook & Vázquez 2002).

El análisis del átomo de cinco niveles que se presenta, describe el cambio en cada nivel poblacional a través del tiempo dado por la siguiente expresión (Kwok, 2000)

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{j>i}^5 A_{ji}n_j - \sum_{j<i}^5 A_{ij}n_i - n_i N_e \sum_{j>i}^5 C_{ij} \quad (2.14)$$

donde n_i es el número de electrones para el i -ésimo nivel, A_{ij} es la tasa de recombinación de electrones del nivel i al j , A_{ji} es la tasa de recombinación de electrones del nivel j al i , C_{ij} es la tasa de excitación colisional de electrones del nivel i al j .

El primer término del lado derecho en la ecuación (2.14) representa a aquellos electrones que entran a ese nivel por emisión espontánea desde niveles superiores de energía, el segundo término denota a aquellos electrones que salen de ese nivel por emisión espontánea hacia niveles inferiores y el tercer término representa a aquellos electrones que salen de ese nivel por excitación colisional hacia niveles superiores.

Se asume que la nebulosa se encuentra en estado estacionario, es decir, que la distribución de población para cada nivel no está cambiando con el tiempo. En este caso, la población en cada nivel se encuentra en equilibrio estadístico donde la tasa

de electrones entrantes a cada nivel i es exactamente balanceado por la tasa de salida de electrones. Entonces la ecuación (2.14) se reduce a

$$\sum_{j>i} A_{ji}n_i - \sum_{j<i} A_{ij}n_i - n_i N_e \sum_{j>i} C_{ij} = 0 \quad (2.15)$$

Así, la distribución de poblaciones de electrones para los niveles 1 a 5 están dadas por las siguientes ecuaciones

$$A_{21}n_2 + A_{31}n_3 + A_{41}n_4 + A_{51}n_5 - N_e n_1 (C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}) = 0,$$

$$A_{32}n_3 + A_{42}n_4 + A_{52}n_5 - A_{21}n_2 - N_e n_2 (C_{23} + C_{24} + C_{25}) + N_e n_1 C_{12} = 0,$$

$$A_{43}n_4 + A_{53}n_5 - (A_{32} + A_{31})n_3 - N_e n_3 (C_{34} + C_{35}) + N_e n_1 C_{13} + N_e n_2 C_{23} = 0,$$

$$A_{54}n_5 - (A_{43} + A_{42} + A_{41})n_4 - N_e n_4 (C_{41} + C_{42} + C_{43}) + N_e (n_1 C_{14} + n_2 C_{24} + n_3 C_{34}) = 0,$$

$$-(A_{54} + A_{53} + A_{52} + A_{51})n_5 + N_e n_1 C_{15} + N_e n_2 C_{25} + N_e n_3 C_{35} + N_e n_4 C_{45} = 0.$$

No conocemos cada n_i pero si podemos conocer los cocientes de poblaciones. Realizando el álgebra correspondiente y reagrupando términos, se llega al siguiente sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{n_1} A_{21} + \frac{n_3}{n_1} A_{31} + \frac{n_4}{n_1} A_{41} + \frac{n_5}{n_1} A_{51} &= N_e (C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}) \\ \frac{n_2}{n_1} [-A_{21} - N_e (C_{23} + C_{24} + C_{25})] + \frac{n_3}{n_1} A_{32} + \frac{n_4}{n_1} A_{42} + \frac{n_5}{n_1} A_{52} &= -N_e C_{12} \\ \frac{n_2}{n_1} N_e C_{23} + \frac{n_3}{n_1} [-A_{32} - A_{31} - N_e (C_{34} + C_{35})] + \frac{n_4}{n_1} A_{43} + \frac{n_5}{n_1} A_{53} &= -N_e C_{13} \\ \frac{n_2}{n_1} N_e C_{24} + \frac{n_3}{n_1} N_e C_{34} + \frac{n_4}{n_1} [-A_{43} - A_{42} - A_{41} - N_e C_{45}] + \frac{n_5}{n_1} A_{54} &= -N_e C_{14} \\ \frac{n_2}{n_1} N_e C_{25} + \frac{n_3}{n_1} N_e C_{35} + \frac{n_4}{n_1} N_e C_{45} + \frac{n_5}{n_1} [-A_{54} - A_{53} - A_{52} - A_{51}] &= -N_e C_{15} \end{aligned}$$

reescribiendo este sistema en forma matricial del tipo $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, tenemos

$$\begin{pmatrix} A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ \Theta_1 & A_{32} & A_{42} & A_{52} \\ N_e C_{23} & \Theta_2 & A_{43} & A_{53} \\ N_e C_{24} & N_e C_{34} & \Theta_3 & A_{54} \\ N_e C_{25} & N_e C_{35} & N_e C_{45} & \Theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n_2}{n_1} \\ \frac{n_3}{n_1} \\ \frac{n_4}{n_1} \\ \frac{n_5}{n_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_5 \\ -N_e C_{12} \\ -N_e C_{13} \\ -N_e C_{14} \\ -N_e C_{15} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

en donde

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= -A_{21} - N_e(C_{23} + C_{24} + C_{25}) \\ \Theta_2 &= -A_{31} - A_{32} - N_e(C_{34} + C_{35}) \\ \Theta_3 &= -A_{43} - A_{42} - A_{41} - N_e C_{45} \\ \Theta_4 &= -A_{54} - A_{53} - A_{52} - A_{51} \\ \Theta_5 &= N_e(C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{15}). \end{aligned}$$

Este sistema matricial se resuelve con ayuda de métodos numéricos (e.g. descomposición LU) para encontrar los cocientes de poblaciones para cada nivel.

Cada cociente de población está relacionado con la ecuación de Boltzmann de la siguiente forma

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{w_i}{w_j} e^{(-\Delta E_{ij}/kT_e)} \quad (2.17)$$

donde w_i/w_j son los pesos estadísticos para el nivel i , ΔE_{ij} es la energía de excitación para el nivel i , k es la constante de Boltzmann y T_e es la temperatura del gas.

La ecuación (2.17) relaciona los cocientes de población en función de la temperatura e implícitamente también depende de la densidad electrónica. Los cocientes de población de dos estados están relacionados con un cociente de intensidades de línea, de acuerdo a la siguiente expresión (Kwok 2000)

$$I_{ji} = \frac{n_j}{n_i} A_{ji} \nu_{ji} \quad (2.18)$$

donde I_{ji} con $j > i$ es la intensidad de línea que se forma de la transición del nivel j al i y ν_{ji} es la frecuencia de la radiación.

La ecuación (2.18) nos da una relación entre intensidades de línea con parámetros físicos. Algunos cocientes de intensidades serán buenos estimadores de T_e o de N_e dependiendo de su energía de excitación del nivel j al i .

En el intervalo óptico del espectro, los estimadores más utilizados para T_e son el cociente de intensidades de las líneas de [O III] $I(\lambda 4959 + \lambda 5007)/I(\lambda 4363)$ y de [N II] $I(\lambda 6548 + \lambda 6583)/I(\lambda 5755)$. Para N_e se utilizan las líneas de [S II] $I(\lambda 6717)/I(\lambda 6731)$, [Cl III] $I(\lambda 5517)/I(\lambda 5537)$ y [Ar IV] $I(\lambda 4711)/I(\lambda 4740)$.

2.2.4. Abundancias químicas

La radiación proveniente de distintos elementos se observa en el espectro óptico de una nebulosa, incluyendo H, He, N, O, S, Ar y Ne.

El análisis del enriquecimiento químico del gas ionizado nos permite determinar el procesamiento nuclear que ha tenido lugar en el interior estelar así como su posterior contribución a la evolución química de la Galaxia (Stasinska, 2002).

Abundancias iónicas

Las abundancias de los iones observados en una nebulosa pueden derivarse de las mediciones de las intensidades relativas de sus líneas de emisión.

La intensidad específica I_λ de una línea de emisión se obtiene de la integral (Osterbrock 2006)

$$I_\lambda = \frac{1}{4\pi} \int n_i N_e h \nu q_{1,2}(T_e) b ds \quad (2.19)$$

donde h es la constante de Planck, ν es la frecuencia de radiación y b es la fracción de excitaciones del nivel 2 que son seguidos por la emisión de un fotón en la línea

observada.

Para la línea de H β tenemos

$$I_{H\beta} = \frac{1}{4\pi} \int N_e n_p h\nu_{H\beta} \alpha_{H\beta}^{eff}(H^0, T_e) ds \quad (2.20)$$

donde n_p es la densidad de protones, $\alpha_{H\beta}^{eff}(H^0, T_e)$ es el coeficiente de recombinación efectiva para H β .

El cociente de intensidad de cualquier línea espectral con respecto a H β se obtiene de la ecuación

$$\frac{I_\lambda}{I_{H\beta}} = \frac{\frac{1}{4\pi} \int n_e n_i h\nu_{q_{1,2}}(T_e) b ds}{\frac{1}{4\pi} \int n_e n_p h\nu_{H\beta} \alpha_{H\beta}^{eff}(H^0, T_e) ds} \quad (2.21)$$

La intensidad promedio de una línea está dada por

$$\langle I_\lambda \rangle = \frac{\int I_\lambda ds}{\int ds}$$

entonces

$$\int I_\lambda ds = \langle I_\lambda \rangle \Delta s$$

Utilizando esta última expresión y sustituyendola en la ec.(2.21) llegamos a

$$\frac{I_\lambda}{I_{H\beta}} = \left[\frac{n_i}{n_p} \right] \left(\frac{\nu}{\nu_{H\beta}} \right) \frac{q_{1,2}(T_e) b}{\alpha_{H\beta}^{eff}(H^0, T_e)} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) representa el cociente de intensidades de línea en función de la abundancia iónica del elemento $\left[\frac{n_i}{n_p} \right]$, es decir, las abundancias iónicas pueden determinarse a partir de las mediciones de las intensidades de las líneas y de los coeficientes de emisión conocidos, los cuales dependen de la temperatura electrónica (T_e) y cuya estimación se realiza de acuerdo a lo descrito en la sección 2.2.3.

Abundancias totales

La abundancia total para un elemento dado relativo al hidrógeno está dada por la suma de las abundancias de todos sus iones. En la práctica, no todos los iones presentes en la nebulosa son observados. En estos casos se deben corregir las abundancias por iones no observables por medio de factores de corrección por ionización (*ICF* por sus siglas en inglés *Ionization Correction Factors*)

A continuación se listan las ecuaciones mediante las cuales se obtienen las abundancias por número de los elementos más comunes en NPs (Kingsburgh & Barlow 1994).

1. Oxígeno

Para los casos donde tenemos O^+ y O^{2+} (espectros ópticos)

$$ICF(O) = \left[\frac{He^+ + He^{2+}}{He^+} \right]^{2/3} \quad (2.23)$$

$$A(O) = ICF(O)(O^+ + O^{2+}) \quad (2.24)$$

2. Nitrógeno

En un espectro óptico el único estado de ionización de este elemento que se puede observar es el de nitrógeno una vez ionizado, entonces para la abundancia de N tenemos

$$ICF(N) = \frac{A(O)}{O^+} \quad (2.25)$$

$$A(N) = ICF(N) \left(\frac{N^+}{H^+} \right) \quad (2.26)$$

donde N^+/H^+ es la abundancia relativa de N^+ , O^+ es la abundancia del oxígeno ionizado y $A(O)$ la abundancia total de oxígeno.

3. Neón

- a) Si se observan todos los estados de ionización, despreciando la contribución de Ne^+ la cual se considera como insignificante en todos los casos, la abundancia total viene dada por

$$A(Ne) = (Ne^{2+} + Ne^{3+} + Ne^{4+}) \quad (2.27)$$

- b) Cuando no se observan las líneas de Ne IV (Ne^{3+})

$$A(Ne) = 1.5 \frac{(Ne^{2+} + Ne^{4+})}{H^+} \quad (2.28)$$

- c) Si sólo se ve Ne III (Ne^{2+})

$$ICF(Ne) = \frac{A(O)}{O^{2+}} \quad (2.29)$$

$$A(N) = ICF(Ne) \left(\frac{Ne^{2+}}{H^+} \right) \quad (2.30)$$

4. Argón

- a) Las líneas de Ar II (Ar^+) no se observan en el óptico ni en el UV por lo que hay que corregir por él. Se asume $f(Ar^+) = f(N^+)$

$$ICF(Ar) = \frac{1}{1 - f(N^+)} \quad (2.31)$$

con

$$f(N^+) = \frac{N^+}{A(N)} \quad (2.32)$$

$$A(Ar) = ICF(Ar) \frac{(Ar^{2+} + Ar^{3+} + Ar^{4+})}{H^+} \quad (2.33)$$

b) Si sólo se observa Ar III (Ar^{2+}), $ICF(\text{Ar})$ es el promedio de una muestra de NPs obtenido por Kingsburgh & Barlow (1994)

$$ICF(\text{Ar}) = 1.87 \pm 0.41 \quad (2.34)$$

$$A(\text{Ar}) = ICF(\text{Ar})(\text{Ar}^{2+}) \quad (2.35)$$

c) En los raros casos en donde sólo se observa Ar IV (Ar^{3+})

$$ICF(\text{Ar}) = \frac{A(\text{Ne})}{\text{Ne}^{2+}} \quad (2.36)$$

$$A(\text{Ar}) = ICF(\text{Ar}) \left(\frac{\text{Ar}^{3+}}{\text{H}^+} \right) \quad (2.37)$$

5. Azufre

a) Cuando tenemos S^+ y S^{2+}

$$ICF(\text{S}) = \left[1 - \left(1 - \frac{\text{O}^+}{A(\text{O})} \right)^3 \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (2.38)$$

$$A(\text{S}) = ICF(\text{S}) \frac{(\text{S}^+ + \text{S}^{2+})}{\text{H}^+} \quad (2.39)$$

b) Si no se tiene S^{2+} , la abundancia se estima de la forma siguiente

$$\text{S}^{2+} = \text{S}^+ \left[4.677 + \left(\frac{\text{O}^{2+}}{\text{O}^+} \right)^{0.433} \right] \quad (2.40)$$

y se usa este valor en la ecuación (2.39).

2.2.5. Abundancia de helio

Hay distintas formas de determinar la abundancia iónica de He I (He^+) para una NP, como en Kingsburgh & Barlow (1994)

$$a_\lambda = \left(\frac{\lambda}{4861} \right) \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right) \left(\frac{I'_\lambda}{I_{\text{H}\beta}} \right) \quad (2.41)$$

en donde $\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}$, $\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}$ se pueden encontrar en Hummer & Storey (1987), Brocklenhurst (1972), Pequignot (1991) o Benjamin (1997).

La ecuación 2.41 comúnmente se corrige para incluir efectos colisionales (p.ej. Vázquez et al. 1998):

$$a_\lambda = \left(\frac{\lambda}{4861} \right) \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right) \left(\frac{I'_\lambda}{I_{\text{H}\beta}} \right) (1 + CR)^{-1} \quad (2.42)$$

donde CR es una corrección por recombinación colisional. Los CR para las principales líneas ópticas de He^+ , están definidos por (Clegg 1987)

$$\begin{aligned} CR_{\lambda 4471} &= \frac{6.11t^{0.02}e^{-4.544/t}}{D} \\ CR_{\lambda 5876} &= \frac{7.12t^{0.14}e^{-3.776/t} + 1.47t^{-0.28}e^{-4.544/t}}{D} \\ CR_{\lambda 6678} &= \frac{3.27t^{-0.41}e^{-3.777/t} + 0.49t^{-0.52}e^{-4.544/t}}{D} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_e}{10^4 \text{ }^\circ\text{K}} \\ D &= 1 + \frac{3110 t^{-0.51}}{N_e}. \end{aligned}$$

Una variación a la ecuación (2.42) es el siguiente ajuste

$$a_\lambda = \frac{I'_\lambda}{100} C_\lambda t^{\eta_\lambda} (1 + CR_\lambda)^{-1} \quad (2.43)$$

con

λ (Å)	C_λ	η_λ
4471	2.043	0.130
5876	0.739	0.231
6678	2.582	0.245

Para la abundancia de He II (He^{2+}) utilizamos la ecuación (2.41), con la línea $\lambda 4686\text{Å}$. Los coeficientes de recombinación efectiva que se usan en este trabajo son tomados de Pequignot (1991)

λ (Å)	$\alpha_{\text{eff}}^\lambda$
H β	3.01×10^{-14}
4471	1.35×10^{-14}
4686	3.62×10^{-13}
5876	4.93×10^{-14}

La abundancia total de helio estará dada por la suma de sus estados de ionización, es decir

$$A(\text{He}) = \text{He}^+ + \text{He}^{2+} \quad (2.44)$$

2.3. Fuentes de ruido

2.3.1. Fuentes de ruido en detectores CCD

Una *fente de ruido* es cualquier fenómeno o proceso que contribuya a la incertidumbre o error de estimación de alguna cantidad de interés, como podría ser por ejemplo la temperatura o la densidad electrónica.

Para la adquisición de datos astronómicos se utilizan detectores CCD que proveen una estimación directa del número de fotones que nos llegan del objeto astronómico

(Gilliland 1992). La utilidad de un detector es determinada la mayoría de las veces por la cantidad de ruido inherente dentro del mismo detector (Howell 2000).

La fuente de ruido más básica, de naturaleza irreductible, es el *ruido de fotones* también llamado ruido poissoniano. Este ruido se debe al hecho de que el CCD detecta fotones. Los fotones llegan de manera impredecible en eventos que se pueden describir mediante la estadística de Poisson, la cual nos dice que la incertidumbre en el número de fotones por segundo detectados por un píxel es igual a la raíz cuadrada del número promedio de fotones detectados por segundo.

El *ruido de lectura* se define para un CCD en términos del número de electrones introducidos por píxel en la señal final al efectuar la lectura del detector. El ruido de lectura consiste en dos componentes inseparables. Primero está la conversión de una señal análoga a una digital, la cual no es perfectamente repetible. Segundo, la misma electrónica introduce carga espuria (electrones falsos) en todo el proceso, creando fluctuaciones aleatorias indeseables en la salida.

Estos dos efectos combinados producen una incertidumbre aditiva en la señal final de cada píxel. El nivel promedio de esta incertidumbre es el ruido de lectura y está limitado por las propiedades electrónicas del detector, del amplificador de salida y de la electrónica de salida. El ruido de lectura es uno de los ruidos fundamentales en un CCD y, en algún grado, siempre estará presente. Los CCDs científicos tienen actualmente un ruido de lectura típico de 2 a 3 electrones.

El *ruido por corriente oscura* para un CCD se define como el número de electrones térmicos generados por segundo por píxel. La corriente oscura es análoga al efecto que puede ocurrir en una emulsión fotográfica si a la cámara se le filtra luz. Al igual que el ruido de fotones sigue una estadística de Poisson: el ruido introducido por electrones térmicos a la señal es proporcional a la raíz cuadrada de la corriente oscura.

El cociente señal a ruido (S/N) refleja la calidad de una medición y se refiere a la magnitud relativa de la señal detectada, píxel a píxel, comparada con la incertidumbre (ruido total medido) de la detección de dicha señal. En condiciones de niveles bajos de luz, el ruido de lectura es mucho mayor que el ruido de fotones y se puede decir que la imagen está limitada por ruido de lectura. Si el tiempo de integración se incrementa hasta que el ruido de fotones excede tanto el ruido de lectura como el asociado a la corriente oscura, entonces decimos que los datos se encuentran limitados por ruido de fotones. Una alternativa para incrementar la S/N es utilizar el *binning* que es incrementar el tamaño efectivo del píxel, así se alcanza una señal limitada por fotones más rápidamente a costa de perder resolución espacial.

2.4. Procesamiento digital de datos

El procesamiento digital de datos, que llamaremos de ahora en adelante *reducción*, es el conjunto de pasos adoptados para minimizar la influencia de imperfecciones en la adquisición de datos para la estimación de una cantidad de interés. El proceso de reducción involucra básicamente cinco etapas:

- Sustracción de bias
- Sustracción de corriente oscura
- Aplanado
- Calibración en longitud de onda y corrección por curvatura de línea
- Calibración en flujo

La descripción que a continuación se realiza del proceso de reducción se basa en el proceso particular de los datos que se usan en este trabajo (Olguín 2008).

1. Sustracción de bias

Las imágenes obtenidas con detectores CCD tienen un nivel artificial en la señal al que se le llama comúnmente *bias* (Fig. 2.2). Para corregir los espectros por este nivel artificial se toman varias imágenes (10 ó más) con tiempo de exposición cero, es decir sin exposición a la luz, al inicio y final de cada noche de observación. Se realiza una inspección visual de cada uno de ellos y se obtiene la estadística de su señal para identificar los casos que por alguna razón resultan ser muy diferentes al resto. En algunos casos se deben desechar estos datos de la reducción. Cada noche se obtiene un bias promedio y a partir de éste se obtiene un modelo suave que se sustrae de los espectros de la noche correspondiente. Al promediar los bias se eliminan rayos cósmicos, se reduce el ruido de lectura y fluctuaciones aleatorias que pueden formar parte de una imagen de bias.

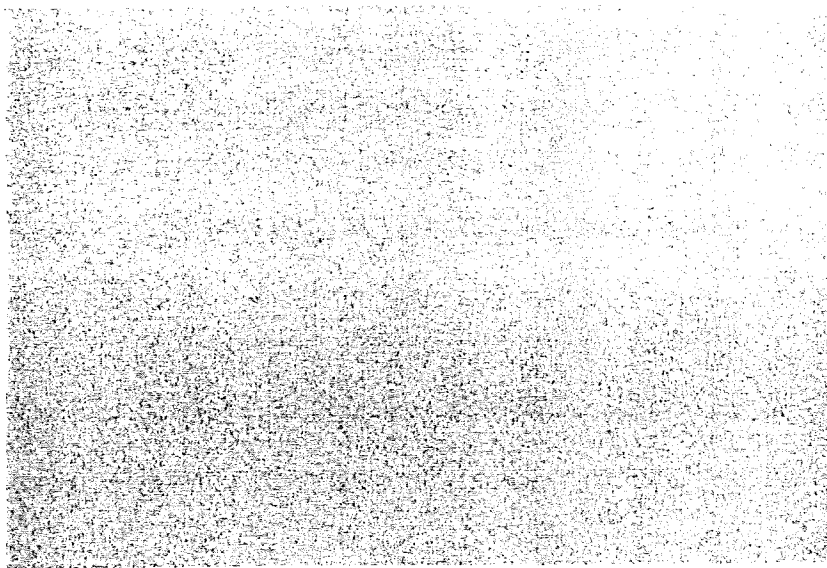


Figura 2.2: Imagen para medir el nivel artificial (bias) en un CCD. Las fluctuaciones de la señal alrededor del valor medio son producto del ruido de lectura.

2. Sustracción de corriente oscura

La corriente oscura acumulada es proporcional al tiempo de exposición. La tasa de acumulación es una función que es sensible a la temperatura del CCD. Las mediciones de corriente oscura se hacen tomando varias imágenes con tiempo de exposición largo (generalmente con un tiempo de exposición igual al de las imágenes del objeto de interés) con el obturador de la cámara CCD cerrado. A las imágenes generadas de esta forma se les denomina *darks* (Fig. 2.3).

Cada noche se obtiene un dark promedio y a partir de éste se obtiene un modelo que se utiliza para sustraer de los espectros de la noche correspondiente. Generalmente, los detectores modernos tienden a tener muy bajo nivel de corriente oscura. Si este es el caso, no se necesita tomar darks cada noche.

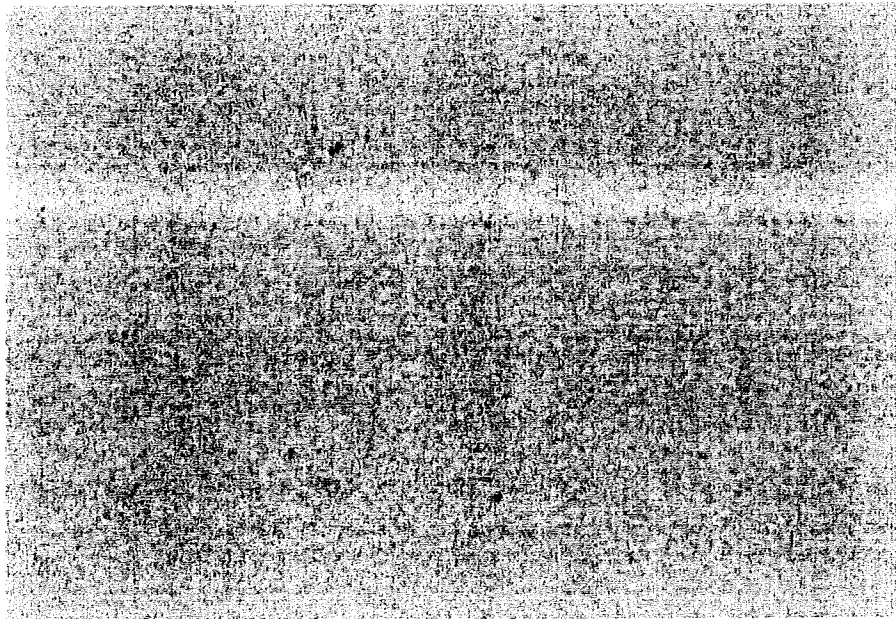


Figura 2.3: Imagen para medir la corriente oscura (dark).

3. Aplanado

Cuando se toma una imagen o espectro con un telescopio y un instrumento conectado a éste, las componentes ópticas introducen deformaciones que pueden corregirse o minimizarse mediante el proceso de aplanado. Para ello se toman imágenes de una fuente de iluminación uniforme que sirve de referencia para encontrar las deformaciones y después se aplican estas correcciones a todos los espectros de los objetos. En las observaciones se utilizan dos tipos de fuentes luminosas: (1) una lámpara de halógeno que se encuentra en el interior del espectrógrafo (a las imágenes que se generan así se les llama *flats*, Fig. 2.4), y (2) la luz dispersa del cielo tanto al atardecer como al amanecer (a las imágenes así obtenidas se les llama *twilights*, Fig. 2.5).

Los espectros obtenidos con la lámpara de halógeno se utilizan para aplanar a lo largo del eje de dispersión (eje de longitud de onda). Los espectros del cielo se usan para aplanar en la dirección espacial.

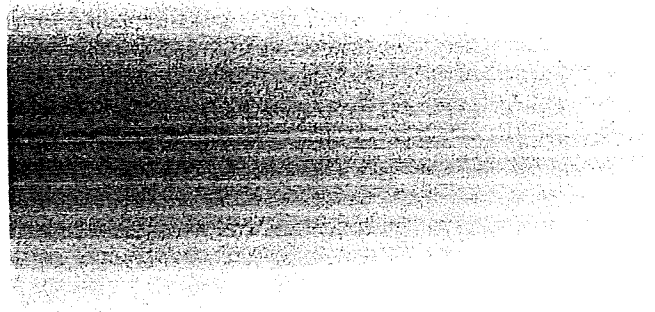


Figura 2.4: Espectro obtenido con la lámpara de halógeno (flat).

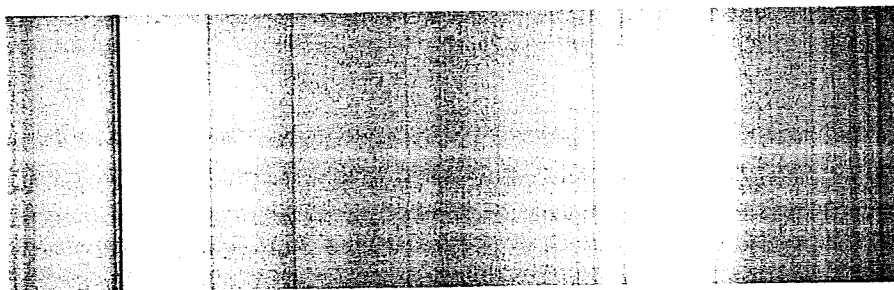


Figura 2.5: Imagen de un espectro de la luz dispersa del cielo (twilight).

4. Calibración en longitud de onda

Para asignar una longitud de onda a cada parte del espectro, se obtienen espectros de una lámpara de comparación de Helio-Argón (Fig. 2.6), la cual emite líneas espectrales a longitudes de onda definidas y cuyos valores se conocen con precisión. De esta manera podemos generar una función que relaciona cada posición del espectro con una longitud de onda.

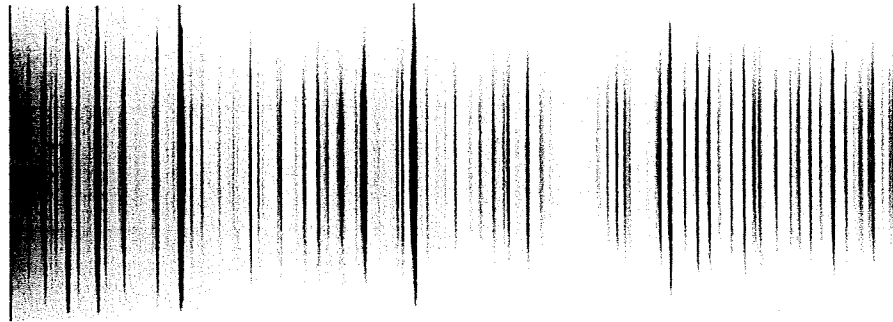


Figura 2.6: Imagen de un espectro de lámpara de He-Ar.

5. Calibración en flujo

Para calibrar en flujo se toman espectros de estrellas estándares de flujo (Fig. 2.7). Éstas tienen espectros cuyos flujos absolutos han sido estudiados previamente y se conocen con bastante precisión. Cada noche de observación se toman espectros de al menos una de las estrellas estándares y los flujos observados se comparan con los flujos absolutos que existen en una base de datos lo que nos permite obtener una función de transformación que se aplica a todos los objetos de esa noche.

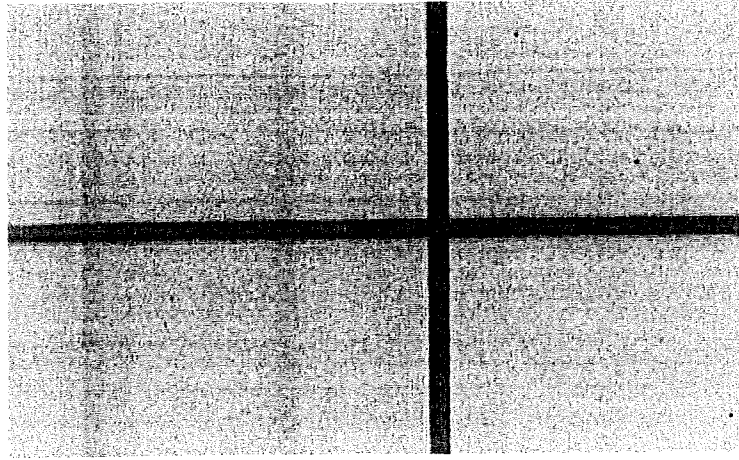


Figura 2.7: Imagen de un espectro de estrella estándar de flujo.

Todo el proceso de reducción también introduce incertidumbres en los valores finales pero no se cuantificarán en este trabajo.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Espectros de varianzas

Al mismo tiempo que se realiza el proceso de reducción, se generan espectros de incertidumbres por cada espectro del objeto de interés, que toma en cuenta básicamente dos fuentes de ruido: el de *lectura* y el de *fotones*. De esta manera, al finalizar la reducción se tiene un espectro que nos permite obtener una estimación de las incertidumbres asociadas a la observación y su propagación durante el proceso de reducción.

El espectro de incertidumbres se lleva a cabo en términos de varianzas porque de esta manera se facilita su cálculo durante el proceso de reducción.

La imagen de varianzas inicial incluye dos *ruidos* básicos:

1. El ruido de lectura del detector que llamaremos σ_{RON} y
2. El ruido de fotones que denominaremos $\sigma_f(r, c)$, donde (r, c) indican las filas y columnas respectivamente de la imagen.

El ruido de lectura se toma del manual técnico del detector ($\sigma_{RON}=6.8 e^-$) mientras que el ruido de fotones se obtiene de asumir que es de naturaleza poissoniano (Gilliland 1992), es decir, su valor es proporcional a la raíz cuadrada del número de

fotones incidentes. De esta manera la varianza total es:

$$\sigma^2(r, c) = \sigma_{RON}^2 + \sigma_f^2(r, c) \quad (3.1)$$

donde el ruido de fotones se calcula en base a la señal en fotones ($I_f(r, c)$)

$$\begin{aligned} \sigma_f(r, c) &= \sqrt{I_f(r, c)} \\ &= \sqrt{G * I_{ADU}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde G, llamada ganancia del detector, es una constante de conversión entre cuentas (o ADUs) y fotones, suponiendo que cada fotón incidente en el detector, produce un número G de electrones en la carga del píxel del detector. I_{ADU} es la señal en cuentas.

La varianza debida a la señal luminosa (o fotones incidentes en el CCD) se obtiene a partir del espectro una vez que se ha sustraído el bias, i.e., suponemos que toda la señal que queda después de corregir por bias proviene de fotones.

Durante el proceso de reducción, las varianzas son transformadas o corregidas de la misma manera que los espectros originales, pero tomando en cuenta la propagación adecuada de errores. La propagación se hace asumiendo errores no correlacionados, tal como se establece en la ecuación (2.8).

El aplanado básicamente es una división por una imagen bidimensional que corrige las variaciones píxel a píxel y las estructuras a pequeña y gran escala del espectro de interés. De esta manera, la imagen de varianzas se transforma de acuerdo a la ecuación:

$$\sigma_F^2(r, c) = \frac{\sigma^2(r, c)}{F^2(r, c)} \quad (3.3)$$

donde $\sigma^2(r, c)$ es el espectro de varianzas y $F(r, c)$ es el campo plano (flat), ambos imágenes bidimensionales.

En este trabajo asumiremos que la calibración en longitud de onda no introduce

a primera aproximación ningún error en el espectro de flujo, por lo que este proceso no altera el espectro de varianzas.

La calibración en flujo implica la multiplicación del espectro observado por una función de la longitud de onda, que transforma la señal del espectro de cuentas a unidades de flujo ($\text{ergs}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$). En este caso, el espectro de varianzas se transforma mediante la ecuación:

$$\sigma_C^2(r, c) = \sigma_F^2(r, c) \times S^2(r, c) \quad (3.4)$$

donde $S(r, c)$ es el espectro de la curva de calibración en flujo (originalmente el espectro de calibración es unidimensional y se le extiende uniformemente para cubrir cada uno de los píxeles de la imagen de varianzas en la dirección espacial).

El espectro de varianzas a este nivel, sirve de base para estudiar las incertidumbres de las líneas espectrales, los parámetros físicos y abundancias químicas derivados a partir de ellas, tal como se describe en el capítulo 2.

3.2. Teoría de errores aplicada al análisis de datos

A continuación se desarrollarán mediante Teoría de Errores (ver sección 2.1.2) las expresiones analíticas para la estimación de incertidumbres.

3.2.1. Cociente de flujos

Los flujos de las diferentes líneas nebulares se estudian relativos al flujo de la línea $H\beta$ en una escala donde $F(\beta) \equiv I(H\beta) = 100$, es decir, con un cociente entre los flujos de cada línea con el de $H\beta$, de la forma

$$\hat{F}_\lambda = \frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} \times 100 \quad (3.5)$$

La incertidumbre en el cociente de flujos se describe por

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\hat{F}_\lambda}^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \hat{F}_\lambda}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \\
 &= \left(\frac{\partial \hat{F}_\lambda}{\partial F_\lambda} \right)^2 \sigma_{F_\lambda}^2 + \left(\frac{\partial \hat{F}_\lambda}{\partial F_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{F_{H\beta}}^2 \\
 &= \left(\frac{100}{F_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{F_\lambda}^2 + \left(-100 \frac{F_\lambda}{F_{H\beta}^2} \right)^2 \sigma_{F_{H\beta}}^2 \\
 &= (100)^2 \left[\frac{\sigma_{F_\lambda}^2}{F_{H\beta}^2} + \left(\frac{F_\lambda}{F_{H\beta}^2} \right)^2 \sigma_{F_{H\beta}}^2 \right]
 \end{aligned}$$

factorizando $F_\lambda^2/F_{H\beta}^2$

$$\begin{aligned}
 &= (100)^2 \left(\frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{F_\lambda}^2}{F_\lambda^2} + \frac{\sigma_{F_{H\beta}}^2}{F_{H\beta}^2} \right] \\
 &= \hat{F}_\lambda^2 \left[\frac{\sigma_{F_\lambda}^2}{F_\lambda^2} + \frac{\sigma_{F_{H\beta}}^2}{F_{H\beta}^2} \right] \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

3.2.2. Coeficiente de extinción logarítmico

El coeficiente de extinción está dado por (ver Sección 2.2.2)

$$C_{H\beta} = -\frac{1}{f(\lambda)} \log \left(\frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} \frac{I_{H\beta}}{I_\lambda} \right) \tag{3.7}$$

donde $F_\lambda/F_{H\beta}$ es el cociente de flujo observado, $I_\lambda/I_{H\beta}$ es el cociente de flujo teórico y $f(\lambda)$ es la ley de extinción a utilizar. Usando la ecuación (3.7)

$$\sigma_{C_{H\beta}}^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial C_{H\beta}}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \tag{3.8}$$

Supondremos que la ley de extinción al igual que el cociente de flujo teórico no presentan errores, es decir

$$\sigma_{f(\lambda)} = \sigma_{(I_\lambda/I_{H\beta})} = 0. \quad (3.9)$$

Entonces la ecuación (3.8) queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sigma_{C_{H\beta}}^2 &= \left(\frac{\partial C_{H\beta}}{\partial F_\lambda/F_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{F_\lambda/F_{H\beta}}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{f(\lambda)} \frac{1}{(F_\lambda/F_{H\beta}) \ln 10} \right)^2 \sigma_{F_\lambda/F_{H\beta}}^2 \end{aligned}$$

factorizando, obtenemos

$$= \frac{1}{(f(\lambda) \ln 10)^2} \left(\frac{\sigma_{F_\lambda/F_{H\beta}}}{F_\lambda/F_{H\beta}} \right)^2. \quad (3.10)$$

La línea que comúnmente se utiliza para determinar $C_{H\beta}$ es $H\alpha$ ($\lambda 6563\text{\AA}$), teniendo

$$\sigma_{C_{H\beta}}^2 = \frac{1}{(f(\lambda 6563\text{\AA}) \ln 10)^2} \left(\frac{\sigma_{F_{H\alpha}/F_{H\beta}}}{F_{H\alpha}/F_{H\beta}} \right)^2 \quad (3.11)$$

3.2.3. Incertidumbre en los flujos desenrojados

Los flujos desenrojados se obtienen mediante la ecuación

$$\frac{I_\lambda}{I_{H\beta}} = \frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} 10^{C_{H\beta} f(\lambda)}. \quad (3.12)$$

La incertidumbre asociada para los flujos relativos desenrojados es

$$\sigma_{I_\lambda/I_{H\beta}}^2 = \left(\frac{\partial I_\lambda/I_{H\beta}}{\partial F_\lambda/F_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{F_\lambda/F_{H\beta}}^2 + \left(\frac{\partial I_\lambda/I_{H\beta}}{\partial C_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{C_{H\beta}}^2 + \left(\frac{\partial I_\lambda/I_{H\beta}}{\partial f(\lambda)} \right)^2 \sigma_{f(\lambda)}^2 \quad (3.13)$$

suponiendo lo mismo que en la ecuación (3.9), que la ley de extinción no presenta errores, entonces la ecuación (3.13) queda de la forma

$$\begin{aligned} \sigma_{I_\lambda/I_{H\beta}}^2 &= (10^{C_{H\beta} f(\lambda)})^2 \sigma_{F_\lambda/F_{H\beta}}^2 \\ &+ \left(\frac{F_\lambda}{F_{H\beta}} f(\lambda) 10^{C_{H\beta} f(\lambda)} \ln 10 \right)^2 \sigma_{C_{H\beta}}^2 \end{aligned}$$

sustituyendo la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned}
 &= (10^{C_{H\beta}f(\lambda)})^2 \sigma_{F_{\lambda}/F_{H\beta}}^2 + \left(\frac{I_{\lambda}}{I_{H\beta}} f(\lambda) \ln 10 \right)^2 \sigma_{C_{H\beta}}^2 \\
 &= \left(\frac{I_{\lambda}/I_{H\beta}}{F_{\lambda}/F_{H\beta}} \right)^2 \sigma_{F_{\lambda}/F_{H\beta}}^2 + \left(\frac{I_{\lambda}}{I_{H\beta}} f(\lambda) \ln 10 \right)^2 \sigma_{C_{H\beta}}^2
 \end{aligned}$$

factorizando $\frac{I_{\lambda}}{I_{H\beta}}$

$$\sigma_{I_{\lambda}/I_{H\beta}}^2 = \left(\frac{I_{\lambda}}{I_{H\beta}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{F_{\lambda}/F_{H\beta}}^2}{(F_{\lambda}/F_{H\beta})^2} + (f(\lambda) \ln 10)^2 \sigma_{C_{H\beta}}^2 \right]$$

finalmente, sustituyendo la ecuación (3.10) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\sigma_{I_{\lambda}/I_{H\beta}}^2 = \left(\frac{I_{\lambda}}{I_{H\beta}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{F_{\lambda}/F_{H\beta}}^2}{(F_{\lambda}/F_{H\beta})^2} + \frac{\sigma_{(F_{\lambda}/F_{H\beta})}^2}{(F_{\lambda}/F_{H\beta})^2} \right]. \quad (3.14)$$

3.2.4. Incertidumbres en parámetros físicos

Temperatura y densidad electrónica

Debido a la complejidad para resolver las ecuaciones de equilibrio estadístico del átomo de cinco niveles (sección 2.2.3), no es posible tener una estimación analítica de las incertidumbres asociadas a estos parámetros.

La estimación de parámetros físicos se lleva a cabo usando la rutina STSDAS/NEBULAR de IRAF¹ v2.10.2. La tarea TEMDEN de esta rutina emplea el método del átomo de cinco niveles (De Robertis, Dufour & Hunt 1987) y, dando los cocientes de líneas apropiados, calcula las temperaturas y densidades electrónicas del gas (Shaw & Dufour 1994).

¹El paquete de software IRAF (*Image Reduction and Analysis Facility*) es distribuido por NOAO (National Optical Astronomy Observatories), institución operada por la Association of Universities for Research in Astronomy, Inc. bajo acuerdo cooperativo con la National Science Foundation.

Se obtienen los valores máximos y mínimos para cada uno de los parámetros físicos, utilizando combinaciones de los distintos factores que intervienen en su determinación, como lo son el cociente de intensidades de línea, la temperatura y la densidad electrónica. De estos valores se obtiene un intervalo de variación (arriba y abajo del valor medio) y se adopta el promedio de éstos como la incertidumbre asociada al parámetro físico en cuestión.

Para la estimación del valor promedio de temperatura, se deja fijo inicialmente el valor de N_e a 1000 cm^{-3} , posteriormente con el valor calculado de T_e se calcula el valor de N_e , y se procede de manera iterativa, hasta obtener valores de T_e y N_e que sean consistentes entre sí.

En el Apéndice A se presentan las combinaciones óptimas para determinar los valores máximo y mínimo para el caso del diagnóstico de densidad de [S II], el valor máximo se obtiene de la combinación de los valores de temperatura máxima y del cociente de intensidades mínimo y viceversa para determinar el valor mínimo para la densidad. Los diagnósticos de densidad de [Cl III] y de [Ar IV] son análogos al de [S II].

3.2.5. Incertidumbres en abundancias iónicas

Para las abundancias iónicas, al igual que para los parámetros físicos, no se pueden deducir expresiones analíticas que nos permitan estimar sus incertidumbres, por lo cual se procede de forma similar que en el caso de los parámetros físicos, es decir, a base de combinaciones de los distintos factores que intervienen en su determinación ($I(\lambda)$, T_e , N_e) y se obtiene un promedio de ellos. El cálculo de las abundancias iónicas se realiza con la tarea IONIC de la rutina STSDAS/ANALYSIS/NEBULAR. Esta tarea emplea el método del átomo de cinco niveles y, dando temperatura y densidad electrónica, longitud de onda y el flujo relativo a cada línea, calcula la abundancia

iónica relativa al hidrógeno ionizado (Shaw & Dufour 1994).

Cada línea, dependiendo del ion que la produce, utiliza distintas combinaciones de T_e y N_e para determinar su abundancia. Las abundancias de aquellos iones de baja ionización se calculan con los parámetros físicos de T_e [N II] y N_e [S II], para las de mediana ionización se emplean T_e [O III] y N_e [Cl III] y para las de alta ionización se utiliza T_e [O III] y N_e [Ar IV]. En el caso de que no se cuente con alguno de estos parámetros, la estimación de abundancias iónicas se realiza con los parámetros disponibles.

Los iones de las transiciones más comunes, las longitudes de onda de las líneas que producen y el tipo de ionización nebular al cual el ion es atribuido, se listan en la tabla 3.1.

Ion	Estado de ionización	Transiciones	Tipo de Ionización
N ⁰	[N I]	5198+5200	Baja
N ⁺	[N II]	5755, 6548, 6583	Baja
O ⁰	[O I]	6300, 6363	Baja
O ⁺	[O II]	3726, 3729, 7320, 7330	Baja
O ²⁺	[O III]	4363, 4959, 5007	Mediana
Ne ²⁺	[Ne III]	3869, 3968	Mediana
Ne ³⁺	[Ne IV]	4724, 4725	Alta
S ⁺	[S II]	4068, 4076, 6716, 6731	Baja
S ²⁺	[S III]	6312	Mediana
Cl ⁺	[Cl II]	3679, 5807	Baja
Cl ²⁺	[Cl III]	5517, 5537	Mediana
Cl ³⁺	[Cl IV]	5323, 7531	Mediana
Ar ²⁺	[Ar III]	5192, 7136, 7751	Mediana
Ar ³⁺	[Ar IV]	4711, 4740, 7170	Mediana
Ar ⁴⁺	[Ar V]	4626, 6435, 7006	Alta
K ³⁺	[K IV]	4511, 6102, 6796	Alta
K ⁴⁺	[K V]	4123, 4163	Alta
Ca ⁴⁺	[Ca V]	3996, 5309, 6087	Alta

Tabla 3.1: Iones de las transiciones más comunes por tipo de ionización nebular.

Para el caso de iones con más de una transición, e.g. [S II] λ 6717 y λ 6731, la abundancia iónica vendrá dada por el promedio pesado (ver Sección 2.1.1) por S/N, la cual nos permite darle mayor peso a las líneas que tenga mejor calidad (S/N mayor). En la figura 3.1 se muestra un ejemplo de un espectro señalando dos líneas

con el mismo flujo pero en distintas zonas de ruido, por lo cual tendrán distinta S/N.

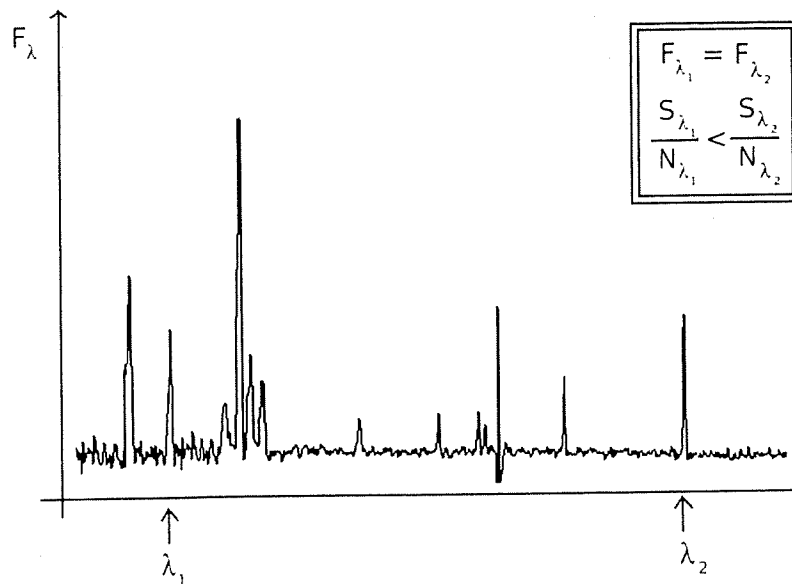


Figura 3.1: Espectro que ilustra dos líneas con el mismo flujo pero situadas en zonas de ruido distintas, lo cual implica un cociente señal a ruido diferente.

3.2.6. Incertidumbres en abundancias totales

Existen distintos métodos para determinar abundancias totales, eg. Peimbert & Torres-Peimbert (1977), Freitas Pacheco et al. (1993), Kingsburgh & Barlow (1994), entre otros, para este estudio se utilizan las ecuaciones desarrolladas por Kingsburgh & Barlow (1994). A continuación se desarrollan las ecuaciones para determinar incertidumbres en abundancias totales.

1. Helio

He I

- a) Para el caso en que se utilice la ecuación (2.42) para determinar la abundancia de He I (CASO I)

$$a_\lambda = \left(\frac{\lambda}{4861} \right) \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right) \left(\frac{I'_\lambda}{I_{\text{H}\beta}} \right).$$

Incertidumbre en la abundancia

$$\begin{aligned} \sigma_{a_\lambda}^2 &= \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial I'_\lambda} \right)^2 \sigma_{I'_\lambda}^2 + \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial I_{\text{H}\beta}} \right)^2 \sigma_{I_{\text{H}\beta}}^2 \\ &= \left(\frac{\lambda}{4861} \right)^2 \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right)^2 (1 + CR)^{-2} \left[\left(\frac{1}{I_{\text{H}\beta}} \right)^2 \sigma_{I'_\lambda}^2 + \left(-\frac{I'_\lambda}{(I_{\text{H}\beta})^2} \right)^2 \sigma_{I_{\text{H}\beta}}^2 \right] \\ &= \left(\frac{\lambda}{4861} \right)^2 \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right)^2 (1 + CR)^{-2} \left[\frac{\sigma_{I'_\lambda}^2}{(I_{\text{H}\beta})^2} + \frac{(I'_\lambda)^2 \sigma_{I_{\text{H}\beta}}^2}{(I_{\text{H}\beta})^4} \right] \end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\lambda}{4861} \right)^2 \left(\frac{\alpha_{\text{eff}}^{\text{H}\beta}}{\alpha_{\text{eff}}^{\text{He}^+}} \right)^2 (1 + CR)^{-2} \left(\frac{I'_\lambda}{I_{\text{H}\beta}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{I'_\lambda}^2}{(I'_\lambda)^2} + \frac{\sigma_{I_{\text{H}\beta}}^2}{(I_{\text{H}\beta})^2} \right] \\ &= a_\lambda^2 \left[\frac{\sigma_{I'_\lambda}^2}{(I'_\lambda)^2} + \frac{\sigma_{I_{\text{H}\beta}}^2}{(I_{\text{H}\beta})^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

- b) En el caso de que se utilice la ecuación (2.43) (CASO II)

$$a_\lambda = \frac{I'_\lambda}{100} C_\lambda t^{m_\lambda} (1 + CR_\lambda)^{-1}$$

Incertidumbre en la abundancia

$$\sigma_{a_\lambda}^2 = \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial I'_\lambda} \right)^2 \sigma_{I'_\lambda}^2 + \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial t} \right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial N_e} \right)^2 \sigma_{N_e}^2$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_\lambda}{\partial I'_\lambda} &= \frac{a_\lambda}{I'_\lambda} \\ \frac{\partial a_\lambda}{\partial N_e} &= -a_\lambda (1 + CR_\lambda)^{-1} \frac{\partial CR_\lambda}{\partial N_e} \\ \frac{\partial a_\lambda}{\partial t} &= a_\lambda \left[\eta_\lambda t^{-1} - (1 + CR_\lambda)^{-1} \frac{\partial CR_\lambda}{\partial t} \right]\end{aligned}$$

con

$$\frac{\partial CR_\lambda}{\partial N_e} = -CR_\lambda \frac{1}{D} (-0.51) \left[\frac{D-1}{t} \right]$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial CR_{\lambda 4471}}{\partial t} &= CR_{\lambda 4471} \left[4.544 t^{-2} + 0.02 t^{-1} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial CR_{\lambda 5876}}{\partial t} &= \frac{1}{t} \left[\frac{7.12 t^{0.14} e^{-3.776/t}}{D} \right] \left[\frac{3.776}{t} + 0.14 - \frac{t}{D} \frac{\partial D}{\partial t} \right] + \\ &+ \frac{1}{t} \left[\frac{1.47 t^{-0.28} e^{-4.544/t}}{D} \right] \left[\frac{4.544}{t} - 0.28 - \frac{t}{D} \frac{\partial D}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial CR_{\lambda 6678}}{\partial t} &= \frac{1}{tD} \left[3.27 e^{-3.777/t} t^{-0.41} \left(\frac{3.777}{t} - 0.41 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{tD} \left[0.49 \left(\frac{4.544}{t} - 0.52 \right) e^{-4.544/t} t^{-0.52} \right] - \\ &- \left(\frac{3.27 e^{-3.777/t} t^{-0.41} + 0.49 e^{-4.544/t} t^{-0.52}}{D} \right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial t}\end{aligned}$$

c) La incertidumbre en la abundancia de He II es análoga a la ecuación (3.15).

La abundancia total de He está dado por la ecuación (2.44)

$$A(\text{He}) = \text{He}^+ + \text{He}^{2+} \quad (3.16)$$

Incertidumbre en la abundancia

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{He}}^2 &= \left(\frac{\partial A(\text{He})}{\partial \text{He}^+} \right)^2 \sigma_{\text{He}^+}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{He})}{\partial \text{He}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{He}^{2+}}^2 \\ &= \sigma_{\text{He}^+}^2 + \sigma_{\text{He}^{2+}}^2\end{aligned}\quad (3.17)$$

2. Oxígeno

Para los casos donde tenemos O^+ y O^{2+} (espectros ópticos)

$$ICF(\text{O}) = \left[\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right]^{2/3} \quad (3.18)$$

$$A(\text{O}) = ICF(\text{O})(\text{O}^+ + \text{O}^{2+}) \quad (3.19)$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\begin{aligned}\sigma_{ICF(\text{O})}^2 &= \left(\frac{\partial ICF(\text{O})}{\partial \text{He}^+} \right)^2 \sigma_{\text{He}^+}^2 + \left(\frac{\partial ICF(\text{O})}{\partial \text{He}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{He}^{2+}}^2 \\ &= \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^{-1/3} \left(-\frac{\text{He}^{2+}}{(\text{He}^+)^2} \right) \right]^2 \sigma_{\text{He}^+}^2 \\ &\quad + \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^{-1/3} \left(-\frac{1}{\text{He}^+} \right) \right]^2 \sigma_{\text{He}^{2+}}^2 \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^{-2/3} \left(\frac{\text{He}^{2+}}{(\text{He}^+)^2} \right)^2 \sigma_{\text{He}^+}^2 \\ &\quad + \frac{4}{9} \left(\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^{-2/3} \left(\frac{1}{\text{He}^+} \right)^2 \sigma_{\text{He}^{2+}}^2\end{aligned}$$

factorizando $\frac{4}{9} \left(\frac{\text{He}^+ + \text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^{-2/3} \left(\frac{\text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^2$

$$\sigma_{ICF(\text{O})}^2 = \frac{4}{9} \frac{1}{ICF(\text{O})} \left(\frac{\text{He}^{2+}}{\text{He}^+} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{\text{He}^+}^2}{(\text{He}^+)^2} + \frac{\sigma_{\text{He}^{2+}}^2}{(\text{He}^{2+})^2} \right]. \quad (3.20)$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned}\sigma_{A(\text{O})}^2 &= \left(\frac{\partial A(\text{O})}{\partial ICF(\text{O})} \right)^2 \sigma_{ICF(\text{O})}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{O})}{\partial \text{O}^+} \right)^2 \sigma_{\text{O}^+}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{O})}{\partial \text{O}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{O}^{2+}}^2 \\ &= (\text{O}^+ + \text{O}^{2+})^2 \sigma_{ICF(\text{O})}^2 + ICF(\text{O})^2 \sigma_{\text{O}^+}^2 + ICF(\text{O})^2 \sigma_{\text{O}^{2+}}^2\end{aligned}$$

factorizando $\left[ICF(O) \left(\frac{O^+ + O^{2+}}{H^+}\right)\right]^2$ y reacomodando términos obtenemos

$$\sigma_{A(O)}^2 = [ICF(O) (O^+ + O^{2+})]^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(O)}^2}{ICF(O)^2} + \frac{\sigma_{O^+}^2 + \sigma_{O^{2+}}^2}{(O^+ + O^{2+})^2} \right]$$

sustituyendo $A(O)$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\sigma_{A(O)}^2 = A(O)^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(O)}^2}{ICF(O)^2} + \frac{\sigma_{O^+}^2 + \sigma_{O^{2+}}^2}{(O^+ + O^{2+})^2} \right]. \quad (3.21)$$

3. Nitrógeno

$$ICF(N) = \frac{A(O)}{O^+} \quad (3.22)$$

$$A(N) = ICF(N) (N^+). \quad (3.23)$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\begin{aligned} \sigma_{ICF(N)}^2 &= \left(\frac{\partial ICF(N)}{\partial A(O)} \right)^2 \sigma_{A(O)}^2 + \left(\frac{\partial ICF(N)}{\partial O^+} \right)^2 \sigma_{O^+}^2 \\ &= \left(\frac{1}{O^+} \right)^2 \sigma_{A(O)}^2 + \left(-\frac{A(O)}{(O^+)^2} \right)^2 \sigma_{O^+}^2 \end{aligned}$$

factorizando $\left(\frac{O}{O^+}\right)^2$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{A(O)}{O^+} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{A(O)}^2}{A(O)^2} + \frac{\sigma_{O^+}^2}{(O^+)^2} \right] \\ &= ICF(N)^2 \left[\frac{\sigma_{A(O)}^2}{A(O)^2} + \frac{\sigma_{O^+}^2}{(O^+)^2} \right]. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned} \sigma_{A(N)}^2 &= \left(\frac{\partial A(N)}{\partial ICF(N)} \right)^2 \sigma_{ICF(N)}^2 + \left(\frac{\partial A(N)}{\partial N^+} \right)^2 \sigma_{N^+}^2 \\ &= (N^+)^2 \sigma_{ICF(N)}^2 + ICF(N)^2 \sigma_{N^+}^2 \end{aligned}$$

factorizando $ICF(N)^2(N^+)^2$

$$\begin{aligned}
 &= [ICF(N)(N^+)]^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(N)}^2}{ICF(N)^2} + \frac{\sigma_{N^+}^2}{(N^+)^2} \right] \\
 &= A(N)^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(N)}^2}{ICF(N)^2} + \frac{\sigma_{N^+}^2}{(N^+)^2} \right] \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

4. Neón

- a) Se asume que la contribución de Ne^+ es insignificante para todos los casos. Si todos los estados de ionización son observados, la abundancia total es la suma de todos los estados de ionización, es decir:

$$A(Ne) = (Ne^{2+} + Ne^{3+} + Ne^{4+}). \quad (3.26)$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\sigma_{A(Ne)}^2 = \sigma_{Ne^{2+}}^2 + \sigma_{Ne^{3+}}^2 + \sigma_{Ne^{4+}}^2. \quad (3.27)$$

- b) Cuando no se ven las líneas de Ne^{3+}

$$A(Ne) = 1.5 (Ne^{2+} + Ne^{4+}). \quad (3.28)$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{A(Ne)}^2 &= \left(\frac{\partial A(Ne)}{\partial Ne^{2+}} \right)^2 \sigma_{Ne^{2+}}^2 + \left(\frac{\partial A(Ne)}{\partial Ne^{4+}} \right)^2 \sigma_{Ne^{4+}}^2 \\
 &= (1.5)^2 \sigma_{Ne^{2+}}^2 + (1.5)^2 \sigma_{Ne^{4+}}^2 \\
 &= 2.25 (\sigma_{Ne^{2+}}^2 + \sigma_{Ne^{4+}}^2) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

c) Si solo se ve Ne^{2+}

$$ICF(\text{Ne}) = \frac{A(\text{O})}{\text{O}^{2+}} \quad (3.30)$$

$$A(\text{N}) = ICF(\text{Ne}) (\text{Ne}^{2+}). \quad (3.31)$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\begin{aligned} \sigma_{ICF(\text{Ne})}^2 &= \left(\frac{\partial ICF(\text{Ne})}{\partial A(\text{O})} \right)^2 \sigma_{A(\text{O})}^2 + \left(\frac{\partial ICF(\text{Ne})}{\partial \text{O}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{O}^{2+}}^2 \\ &= \frac{1}{(\text{O}^{2+})^2} \sigma_{A(\text{O})}^2 + \left(-\frac{A(\text{O})}{(\text{O}^{2+})^2} \right)^2 \sigma_{\text{O}^{2+}}^2 \end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{A(\text{O})}{\text{O}^{2+}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{A(\text{O})}^2}{A(\text{O})^2} + \frac{\sigma_{\text{O}^{2+}}^2}{(\text{O}^{2+})^2} \right] \\ &= ICF(\text{Ne})^2 \left[\frac{\sigma_{A(\text{O})}^2}{A(\text{O})^2} + \frac{\sigma_{\text{O}^{2+}}^2}{(\text{O}^{2+})^2} \right]. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned} \sigma_{A(\text{Ne})}^2 &= \left(\frac{\partial A(\text{Ne})}{\partial ICF(\text{Ne})} \right)^2 \sigma_{ICF(\text{Ne})}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{Ne})}{\partial \text{Ne}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2 \\ &= (\text{Ne}^{2+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ne})}^2 + ICF(\text{Ne})^2 \sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2 \quad (3.33) \end{aligned}$$

factorizando obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{A(\text{Ne})}^2 &= [ICF(\text{Ne})(\text{Ne}^{2+})]^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ne})}^2}{ICF(\text{Ne})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2}{(\text{Ne}^{2+})^2} \right] \\ &= A(\text{Ne})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ne})}^2}{ICF(\text{Ne})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2}{(\text{Ne}^{2+})^2} \right]. \quad (3.34) \end{aligned}$$

5. Argón

- a) El Ar^+ no se observa en el óptico ni en el UV por lo que hay que corregir por él. Se asume $f(\text{Ar}^+) = f(\text{N}^+)$

$$ICF(\text{Ar}) = \frac{1}{1 - f(\text{N}^+)} \quad (3.35)$$

con

$$f(\text{N}^+) = \frac{\text{N}^+}{A(\text{N})}$$

$$A(\text{Ar}) = ICF(\text{Ar}) (\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+}). \quad (3.36)$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\begin{aligned} \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 &= \left(\frac{\partial ICF(\text{Ar})}{\partial f(\text{N}^+)} \right)^2 \sigma_{f(\text{N}^+)}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{(1 - f(\text{N}^+))^2} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial f(\text{N}^+)}{\partial \text{N}^+} \right)^2 \sigma_{\text{N}^+}^2 + \left(\frac{\partial f(\text{N}^+)}{\partial A(\text{N})} \right)^2 \sigma_{A(\text{N})}^2 \right] \\ &= \frac{1}{(1 - f(\text{N}^+))^4} \left[\frac{\sigma_{\text{N}^+}^2}{A(\text{N})^2} + \left(\frac{\text{N}^+}{A(\text{N})^2} \right)^2 \sigma_{A(\text{N})}^2 \right] \end{aligned}$$

factorizando $(\text{N}^+/A(\text{N}))^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1 - f(\text{N}^+))^4} \left(\frac{\text{N}^+}{A(\text{N})} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{\text{N}^+}^2}{(\text{N}^+)^2} + \frac{\sigma_{A(\text{N})}^2}{A(\text{N})^2} \right] \\ &= ICF(\text{Ar})^4 f(\text{N}^+)^2 \left[\frac{\sigma_{\text{N}^+}^2}{(\text{N}^+)^2} + \frac{\sigma_{A(\text{N})}^2}{A(\text{N})^2} \right]. \quad (3.37) \end{aligned}$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned}
\sigma_{A(\text{Ar})}^2 &= \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial ICF(\text{Ar})} \right)^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial (\text{Ar}^{2+})} \right)^2 \sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial (\text{Ar}^{3+})} \right)^2 \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial (\text{Ar}^{4+})} \right)^2 \sigma_{\text{Ar}^{4+}}^2 \\
&= (\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + ICF(\text{Ar})^2 \sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 \\
&\quad + ICF(\text{Ar})^2 \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 + ICF(\text{Ar})^2 \sigma_{\text{Ar}^{4+}}^2 \\
&= (\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 \\
&\quad + ICF(\text{Ar})^2 [\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{4+}}^2]
\end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned}
&= (\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+})^2 ICF(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{4+}}^2}{(\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+})^2} \right] \\
\sigma_{A(\text{Ar})}^2 &= A(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 + \sigma_{\text{Ar}^{4+}}^2}{(\text{Ar}^{2+} + \text{Ar}^{3+} + \text{Ar}^{4+})^2} \right]. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

b) Si solo se observa Ar^{2+}

El $ICF(\text{Ar})$ es un promedio obtenido por Kingsburgh & Barlow (1994). Aquí tomaremos la dispersión de sus datos como la incertidumbre en el $ICF(\text{Ar})$

$$ICF(\text{Ar}) = 1.87 \pm 0.41$$

$$A(\text{Ar}) = ICF(\text{Ar})(\text{Ar}^{2+}).$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 = 0.1681. \quad (3.39)$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned} \sigma_{A(\text{Ar})}^2 &= \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial ICF(\text{Ar})} \right)^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial \text{Ar}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 \\ &= (\text{Ar}^{2+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + ICF(\text{Ar})^2 \sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2 \end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned} &= (\text{Ar}^{2+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2}{(\text{Ar}^{2+})^2} \right] \\ &= A(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2}{(\text{Ar}^{2+})^2} \right] \\ \sigma_{A(\text{Ar})}^2 &= A(\text{Ar})^2 \left[0.048 + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{2+}}^2}{(\text{Ar}^{2+})^2} \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

c) En los raros casos donde solo se observa Ar^{3+}

$$\begin{aligned} ICF(\text{Ar}) &= \frac{A(\text{Ne})}{\text{Ne}^{2+}} \\ A(\text{Ar}) &= ICF(\text{Ar}) \left(\frac{\text{Ar}^{3+}}{\text{H}^+} \right). \end{aligned}$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\begin{aligned} \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 &= \left(\frac{\partial ICF(\text{Ar})}{\partial A(\text{Ne})} \right)^2 \sigma_{A(\text{Ne})}^2 + \left(\frac{\partial ICF(\text{Ar})}{\partial \text{Ne}^{2+}} \right)^2 \sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2 \\ &= \left(\frac{1}{\text{Ne}^{2+}} \right)^2 \sigma_{A(\text{Ne})}^2 + \left(\frac{A(\text{Ne})}{(\text{Ne}^{2+})^2} \right)^2 \sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{factorizando } \left(\frac{A(\text{Ne})}{\text{Ne}^{2+}} \right)^2 \\
& = \left(\frac{A(\text{Ne})}{\text{Ne}^{2+}} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{A(\text{Ne})}^2}{A(\text{Ne})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2}{(\text{Ne}^{2+})^2} \right] \\
& = ICF(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{A(\text{Ne})}^2}{A(\text{Ne})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ne}^{2+}}^2}{(\text{Ne}^{2+})^2} \right]. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\begin{aligned}
\sigma_{A(\text{Ar})}^2 & = \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial ICF(\text{Ar})} \right)^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + \left(\frac{\partial A(\text{Ar})}{\partial \text{Ar}^{3+}} \right)^2 \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2 \\
& = (\text{Ar}^{3+})^2 \sigma_{ICF(\text{Ar})}^2 + ICF(\text{Ar})^2 \sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2
\end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned}
& = (\text{Ar}^{3+})^2 ICF(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2}{(\text{Ar}^{3+})^2} \right] \\
& = A(\text{Ar})^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(\text{Ar})}^2}{ICF(\text{Ar})^2} + \frac{\sigma_{\text{Ar}^{3+}}^2}{(\text{Ar}^{3+})^2} \right]. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

6. Azufre

a) Cuando tenemos S^+ y S^{2+}

$$ICF(\text{S}) = \left[1 - \left(1 - \frac{\text{O}^+}{A(\text{O})} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

$$A(\text{S}) = ICF(\text{S})(\text{S}^+ + \text{S}^{2+}).$$

Incertidumbre en el ICF:

$$\sigma_{ICF(S)}^2 = \left(\frac{\partial ICF(S)}{\partial O^+} \right)^2 + \left(\frac{ICF(S)}{\partial A(O)} \right)^2$$

$$\sigma_{ICF(S)}^2 = \left(\frac{O^+}{A(O)} \right)^2 \left(1 - \frac{O^+}{A(O)} \right)^4 ICF(S)^8 \left[\frac{\sigma_{A(O)}^2}{A(O)^2} + \frac{\sigma_{O^+}^2}{(O^+)^2} \right]. \quad (3.43)$$

Incertidumbre en la abundancia:

$$\sigma_{A(S)}^2 = A(S)^2 \left[\frac{\sigma_{ICF(S)}^2}{ICF(S)^2} + \frac{\sigma_{S^+}^2 + \sigma_{S^{2+}}^2}{(S^+ + S^{2+})^2} \right]. \quad (3.44)$$

b) Si no se tiene S^{2+}

La abundancia de S^{2+} se estima de la forma siguiente

$$S^{2+} = S^+ \left[4.677 + \left(\frac{O^{2+}}{O^+} \right)^{0.433} \right] \quad (3.45)$$

y la incertidumbre en S^{2+}

$$\begin{aligned} \sigma_{S^{2+}}^2 &= \left[4.677 + \left(\frac{O^{2+}}{O^+} \right)^{0.433} \right]^2 \sigma_{S^+}^2 + \\ &+ \left[0.433 S^+ \left(\frac{O^{2+}}{O^+} \right)^{0.567} \right]^2 \left(\frac{O^{2+}}{O^+} \right)^2 \left[\frac{\sigma_{O^+}^2}{(O^+)^2} + \frac{\sigma_{O^{2+}}^2}{(O^{2+})^2} \right] \end{aligned}$$

factorizando y simplificando, obtenemos

$$= (S^{2+})^2 \frac{\sigma_{S^+}^2}{(S^+)^2} + (0.433 S^+)^2 \left(\frac{O^{2+}}{O^+} \right)^{3.134} \left[\frac{\sigma_{O^+}^2}{(O^+)^2} + \frac{\sigma_{O^{2+}}^2}{(O^{2+})^2} \right]. \quad (3.46)$$

Se usan estos valores en las expresiones derivadas en la ecuación 3.44.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se analizará una región de cada una de las NPs *NGC 6309* y *NGC 7354*, para determinar las incertidumbres asociadas a parámetros físicos y abundancias químicas.

4.1. Muestra de estudio

4.1.1. NGC 6309

NGC 6309 es una NP cuadrupolar cuya morfología está formada por un anillo central brillante, dos sistemas de lóbulos bipolares orientados a diferentes direcciones y estructuras con simetría puntual dentro de éstos (Vázquez et al. 2008). En la tabla 4.1 se presentan los datos generales de NGC 6309.

Ascensión recta	17 14 04.32
Declinación	-12 54 37.71
Distancia	2kpc
Otros nombres	Box Nebula IRAS 17112-1251 Hen 2-206

Tabla 4.1: Información general sobre NGC 6309

Armour y Kingsburgh (2001) determinaron los siguientes parámetros físicos y abundancias químicas para distintas regiones de la NP: $C_{H\beta} \approx 0.8-0.95$, $T_e[\text{O III}] \approx 12,000$ K, $T_e[\text{N II}] \approx 9800$ K, $N_e[\text{O II}] \approx 10,000$ cm⁻³.

Gorny et al. (2005) encuentran valores de $N_e[\text{S II}] = 2600$ cm⁻³, $T_e[\text{N II}] = 12,097$ K, $T_e[\text{O III}] = 11,845$ K, $C_{H\beta} = 0.88$, y los cocientes elementales He/H=0.1, N/H=8.2, O/H=8.64, Ne/H=7.82 y S/H=6.49, expresados en forma logarítmica $\log(X/H) + 12$.

Vázquez et al. (2008) estiman los siguientes parámetros físicos de $T_e[\text{O III}] = 10,600-10,900$ K, $T_e[\text{N II}] = 10,100-11,800$ K, $N_e[\text{S II}] = 1400-4000$ cm⁻³, $N_e[\text{Cl III}] = 1700-2600$ cm⁻³, $N_e[\text{Ar IV}] = 1000-1700$ cm⁻³, así como un $C_{H\beta}$ de 0.70-0.97.

4.1.2. NGC 7354

NGC 7354 ha sido clasificada como una NP elíptica, aunque por su estructura se le ha llamado como de *doble envoltura*. Contreras et al. (2008) describen a esta estructura como de *doble barril*, con sus ejes principales casi perpendiculares a la línea de visión. Asimismo presenta dos estructuras asimétricas tipo *jets* (chorros), las cuales no se encuentran alineadas con ninguno de los ejes de las estructuras del barril.

Su estrella central posee una temperatura efectiva de 64,600 K (Hajian 1997) mientras que la envoltura gaseosa tiene una edad cinemática de 1800 años. En la Tabla 4.II se presentan los datos generales de NGC 7354.

Ascensión recta	22 40 19.94
Declinación	+61 17 08.10
Tamaño (")	25
Distancia	2.5kpc
Otros nombres	IRAS 22384-16101 PK 107+02 1

Tabla 4.II: Información general sobre NGC 7354

Estudios previos de Hajian (1997), encuentran un $C_{H\beta} = 1.78$, $N_e[\text{S II}] = 2740 \text{ cm}^{-3}$, $T_e[\text{N II}] = 11,900 \text{ K}$, $T_e[\text{O III}] = 10,200$, así como las abundancias totales de $\text{He}/\text{H} = 0.1$, $\text{N}/\text{H} = 8.04$, $\text{O}/\text{H} = 8.75$, $\text{Ne}/\text{H} = 7.85$, $\text{Ar}/\text{H} = 6.32$ y $\text{S}/\text{H} = 7.08$, expresados en forma logarítmica $\log(X/\text{H}) + 12$.

Contreras et al. (2008) determinan valores de $9140 < T_e[\text{O III}] < 19,420 \text{ K}$, $10,370 < T_e[\text{N II}] < 16,205 \text{ K}$, $700 < N_e[\text{S II}] < 3530 \text{ cm}^{-3}$, $1938 < N_e[\text{Cl III}] < 2976 \text{ cm}^{-3}$, $1589 < N_e[\text{Ar IV}] < 3502 \text{ cm}^{-3}$.

4.2. Adquisición de datos

La espectroscopía de baja dispersión se obtuvo con el espectrómetro Boller & Chivens montado en el telescopio de 2.1m del Observatorio Astronómico Nacional en la Sierra de San Pedro Mártir (OAN-SPM)¹. La adquisición de los datos se realizó para ambas NPs el 8 de agosto de 2002. Se utilizó una rejilla de difracción de 400 líneas/mm con un detector CCD Tek de 1024 x 1024 pixeles. El intervalo de longitud de onda va de los 4300 Å hasta los 7390 Å, con una dispersión de 3 Å pix⁻¹. El ancho de la rendija fue de 1.6" (220 μm).

En la figura 4.1 se muestra la imagen de NGC 6309 en el filtro [O III], indicando la posición de la rendija y la región de integración. El tamaño de esta región es de 14".

En la figura 4.2 se muestra esquemáticamente la posición de la rendija sobre la imagen tomada con el filtro [N II] para NGC 7354, ambas imágenes fueron obtenidas con el telescopio de 1.5m del Observatorio de Sierra Nevada², en Granada, España.

¹El OAN-SPM es operado por el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México.

²El Observatorio de Sierra Nevada es operado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas a través del Instituto de Astrofísica de Andalucía (Granada, España)

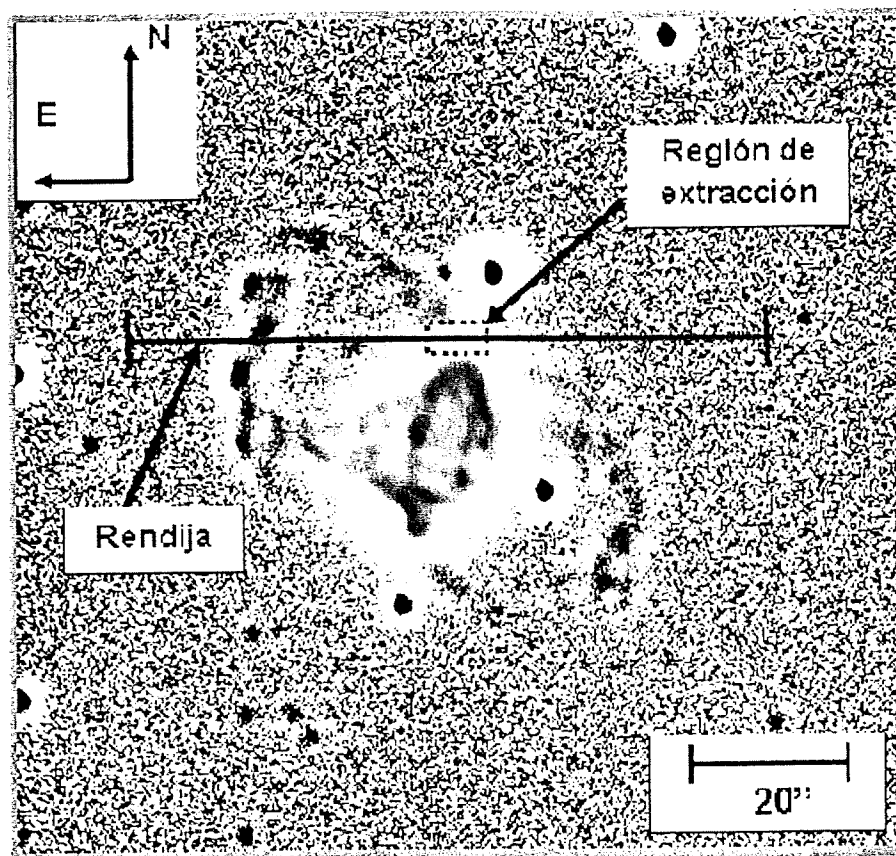


Figura 4.1: Imagen en $[\text{O III}]$ para NGC 6309. La región de extracción del espectro estudiado se encuentra contenida en el rectángulo (adaptada de Vázquez et al. 2008).

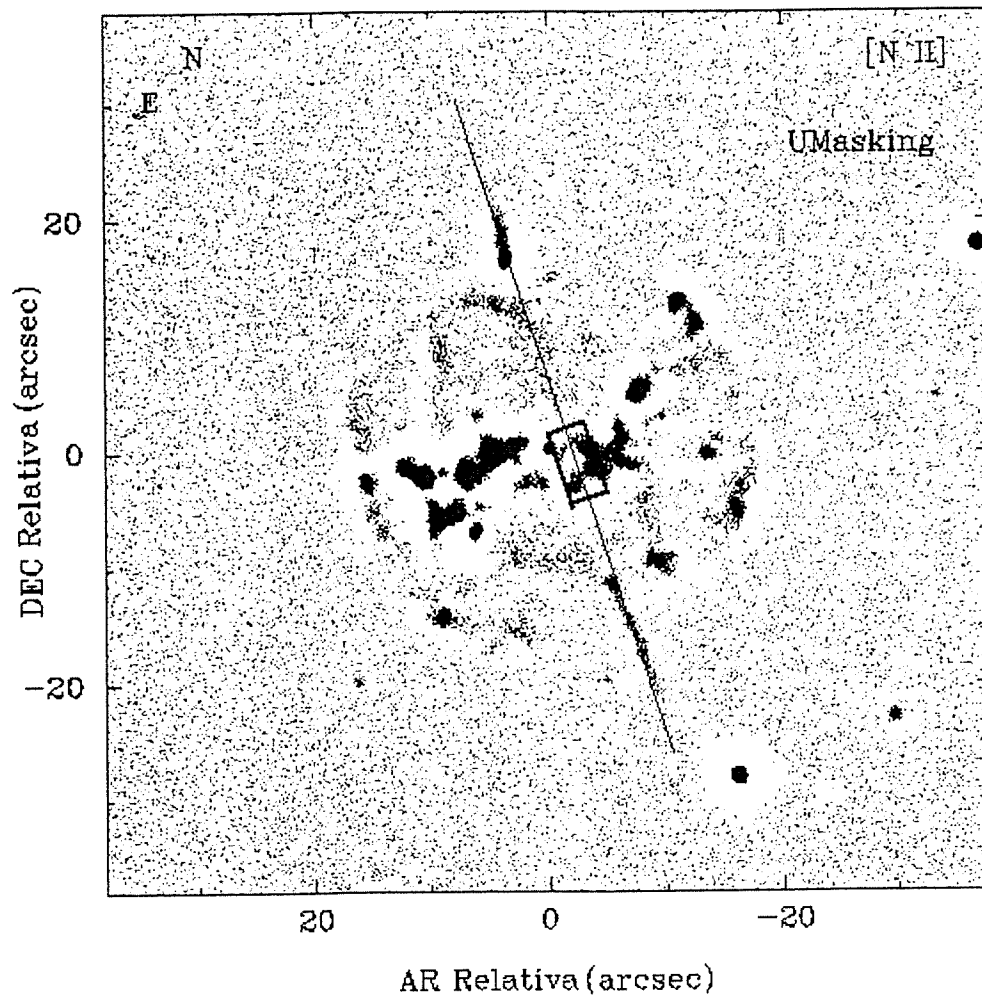


Figura 4.2: Imagen en [N II] de NGC 7354. La región de extracción del espectro estudiado está contenida en el rectángulo. La región de extracción fue de $7''$ (adaptada de Contreras et al. 2008)

4.3. Procesamiento digital de los datos

La reducción de los datos fue realizada por el Dr. Lorenzo Olguín utilizando el programa XVISTA³, se corrigieron los espectros por bias y aplanado. La corrección por corriente oscura no se efectuó debido a que es muy pequeña (<1 electrón por píxel en $t = 1\text{hr}$), además se calibraron los espectros en longitud de onda y en flujo. A la par con el proceso de reducción se generaron los espectros de varianzas.

En la figura 4.3 se muestra un ejemplo del espectro de flujo de la NP sin cielo, así como su espectro de varianzas, al finalizar el proceso de reducción. Para el espectro de varianzas se conservan los rayos cósmicos y el nivel del cielo.

4.4. Medición de líneas

La identificación y medición de los flujos de las líneas presentes en el espectro se efectuó mediante la rutina SPLOT del programa IRAF. En las figuras 4.4 y 4.5 se presentan los espectros integrados de flujos y varianzas de la región de estudio para NGC 6309 y en las figuras 4.6 y 4.7 para NGC 7354.

En las figuras 4.5 y 4.7 se presenta un levantamiento en la zona azul y roja del espectro, esto debido principalmente al efecto del flat.

Las mediciones de los flujos se realizan con ajustes gaussianos a cada uno de los perfiles de las líneas identificadas. Este ajuste se hace en el caso del espectro de flujos a partir del nivel del continuo, el área contenida bajo el ajuste nos indica la emisión proveniente de la NP. En cambio, para el caso del espectro de varianzas, el ajuste se debe realizar de tal manera que contenga toda la emisión que se encuentra debajo

³XVISTA fue desarrollado originalmente por estudiantes graduados y personal de la Universidad de California en Santa Cruz. Actualmente es distribuido y actualizado por Jon Holtzman de la Universidad Estatal de Nuevo Mexico <http://astro.nmsu.edu/~holtz/vista>

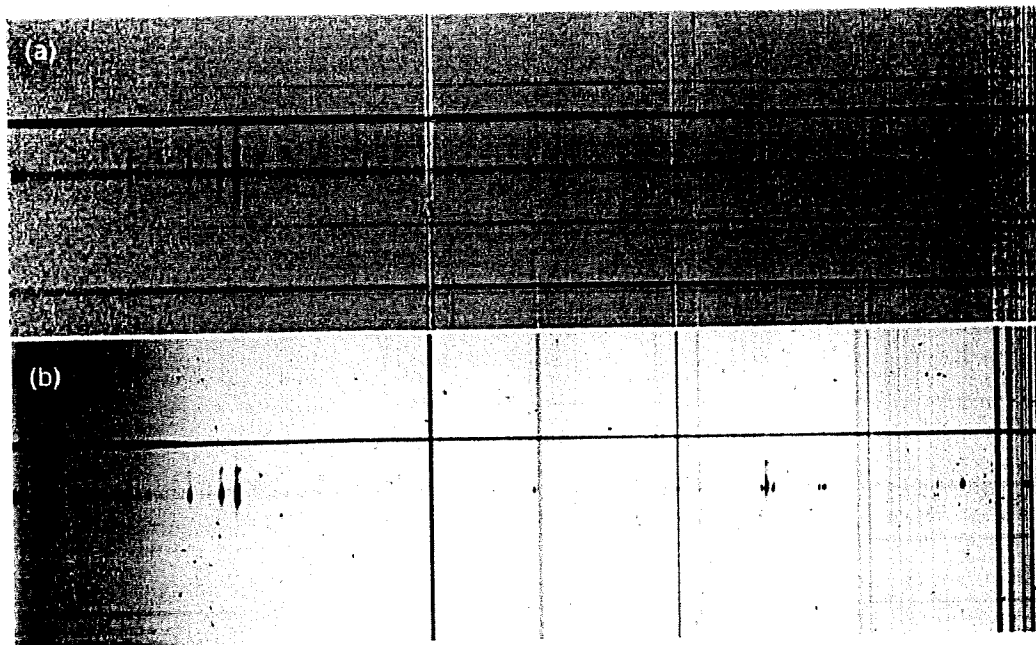


Figura 4.3: (a): Espectro de baja dispersión de NGC 6309 después del proceso de reducción. (b): Espectro de varianzas generado en el proceso de reducción.

del perfil, la cual incluirá la varianza debida a la contribución del cielo, del continuo de la estrella, de la NP y posiblemente rayos cósmicos.

En el programa IRAF/SPLIT el ajuste se realiza únicamente a partir del nivel del continuo, lo cual nos genera un problema al no permitirnos medir de manera inmediata el flujo que se encuentra debajo de este nivel. Para resolver esto, calculamos la parte faltante de la varianza de la línea multiplicando la varianza al nivel del continuo y una región de tamaño 6σ centrado en la línea.

El valor de σ se obtiene del ajuste, usando la relación $\sigma = FWHM/2.35$. Esta relación es válida para una gaussiana, tal como se muestra en el apéndice B. El proceso de cálculo se ilustra en la figura 4.8.

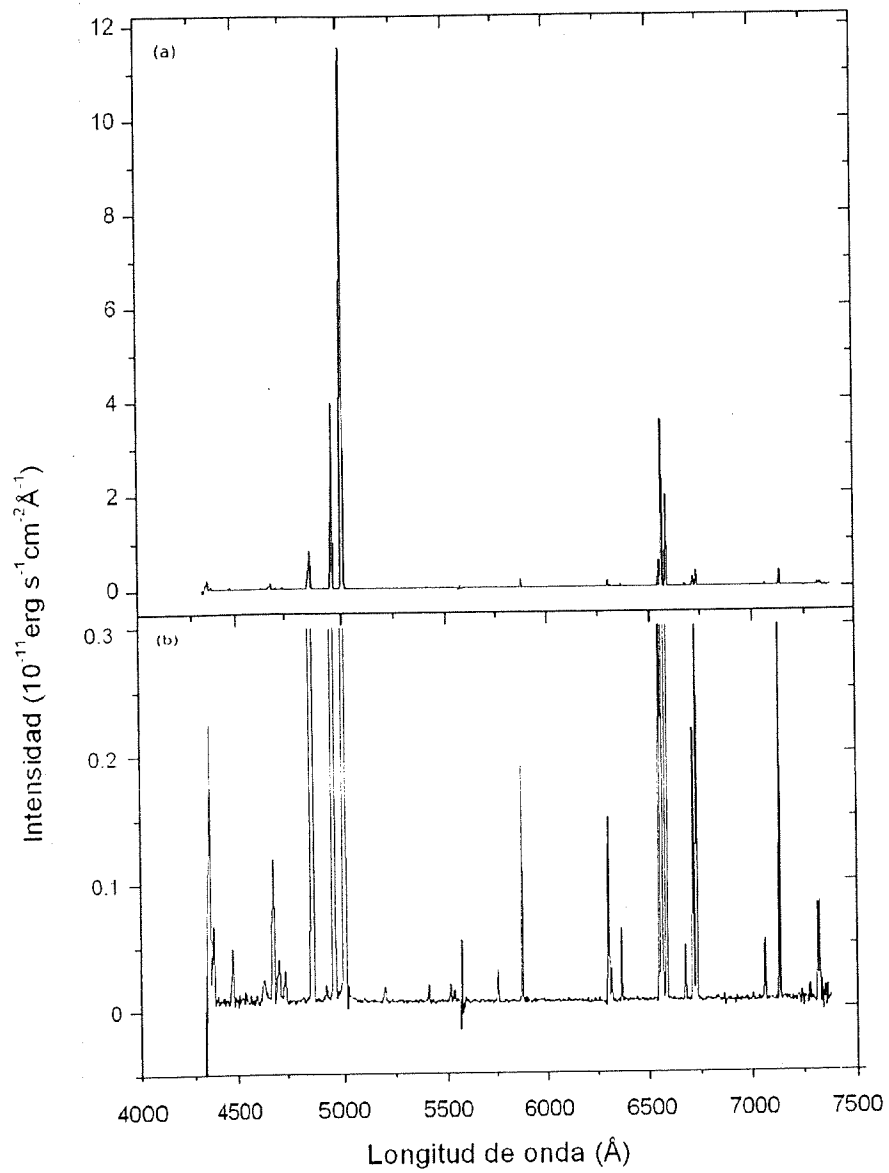


Figura 4.4: (a): Espectro integrado de flujos para NGC 6309. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas de emisión más débiles.

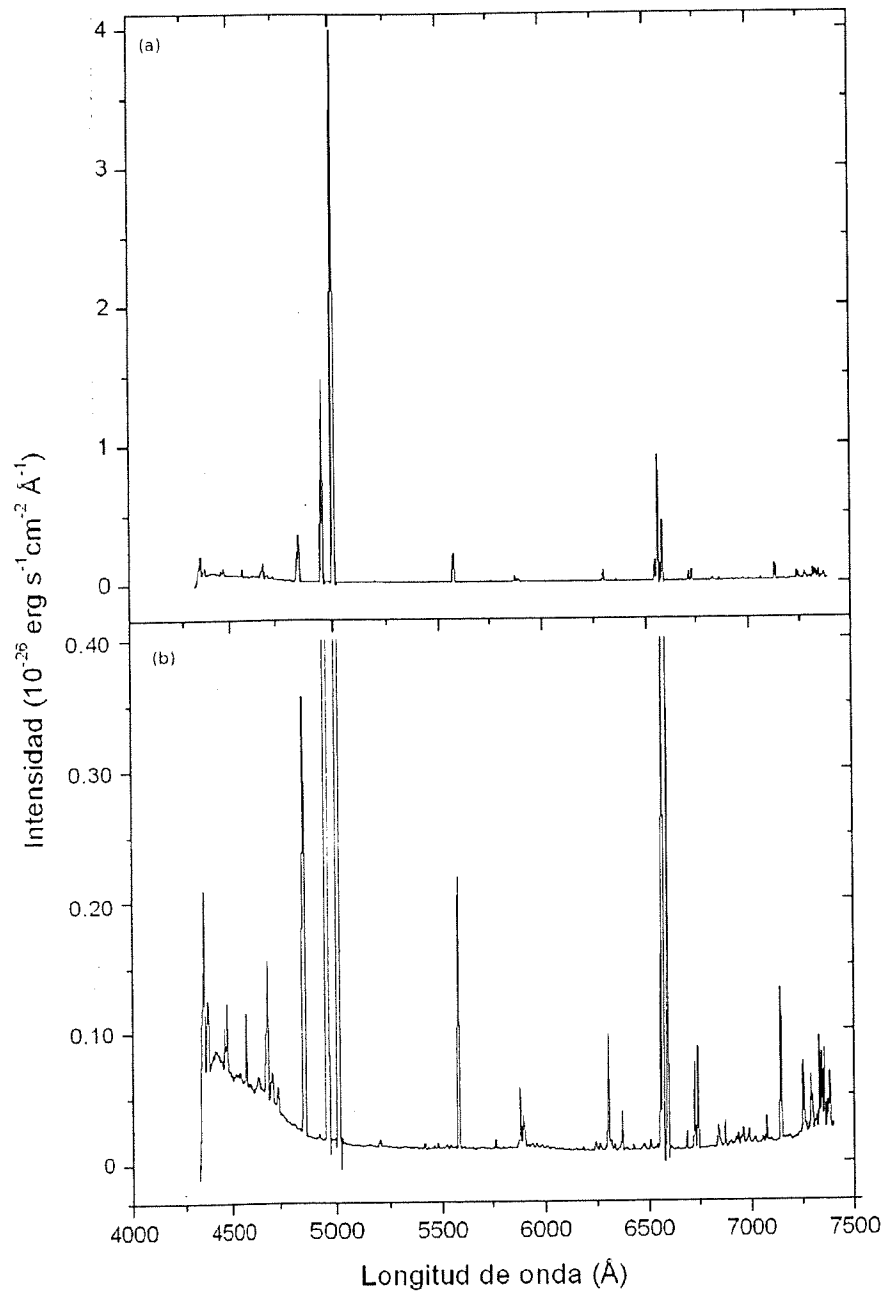


Figura 4.5: (a): Espectro integrado de varianzas para NGC 6309. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas con varianzas pequeñas.

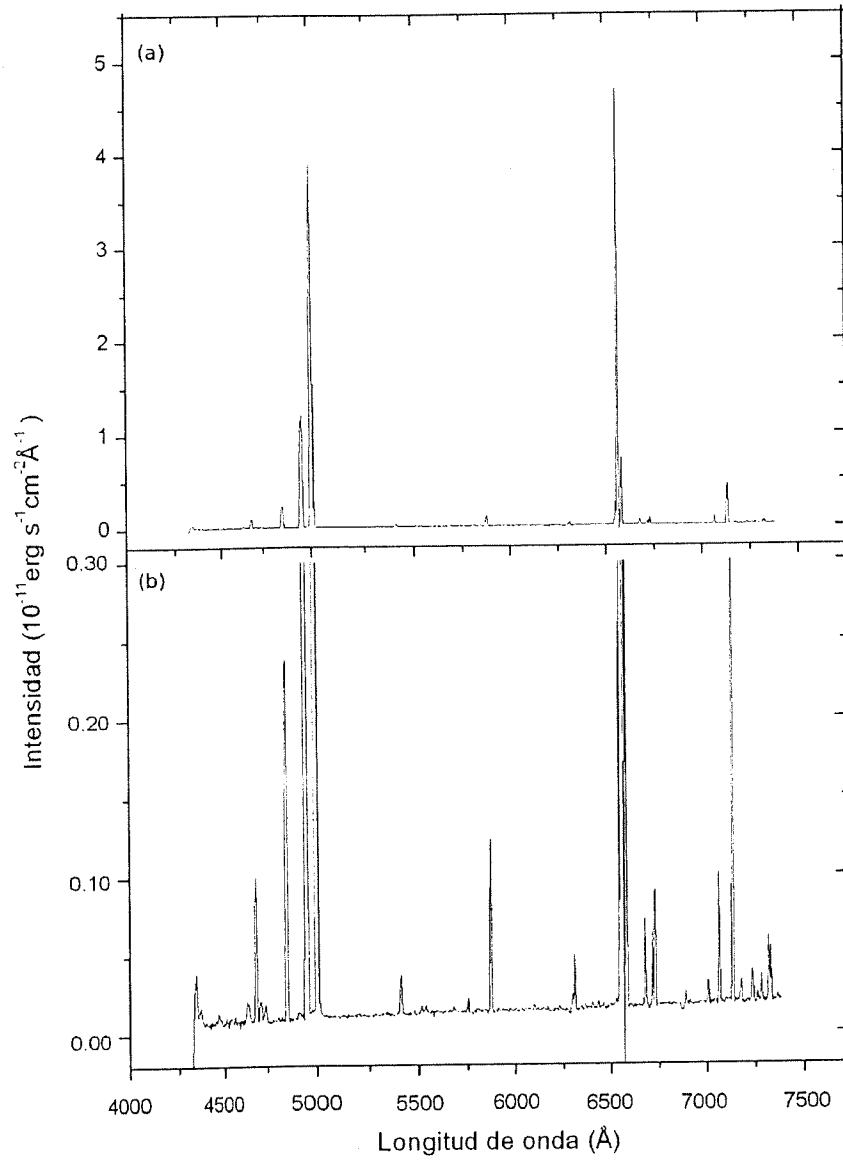


Figura 4.6: (a): Espectro integrado de flujos para NGC 7354. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas de emisión más débiles.

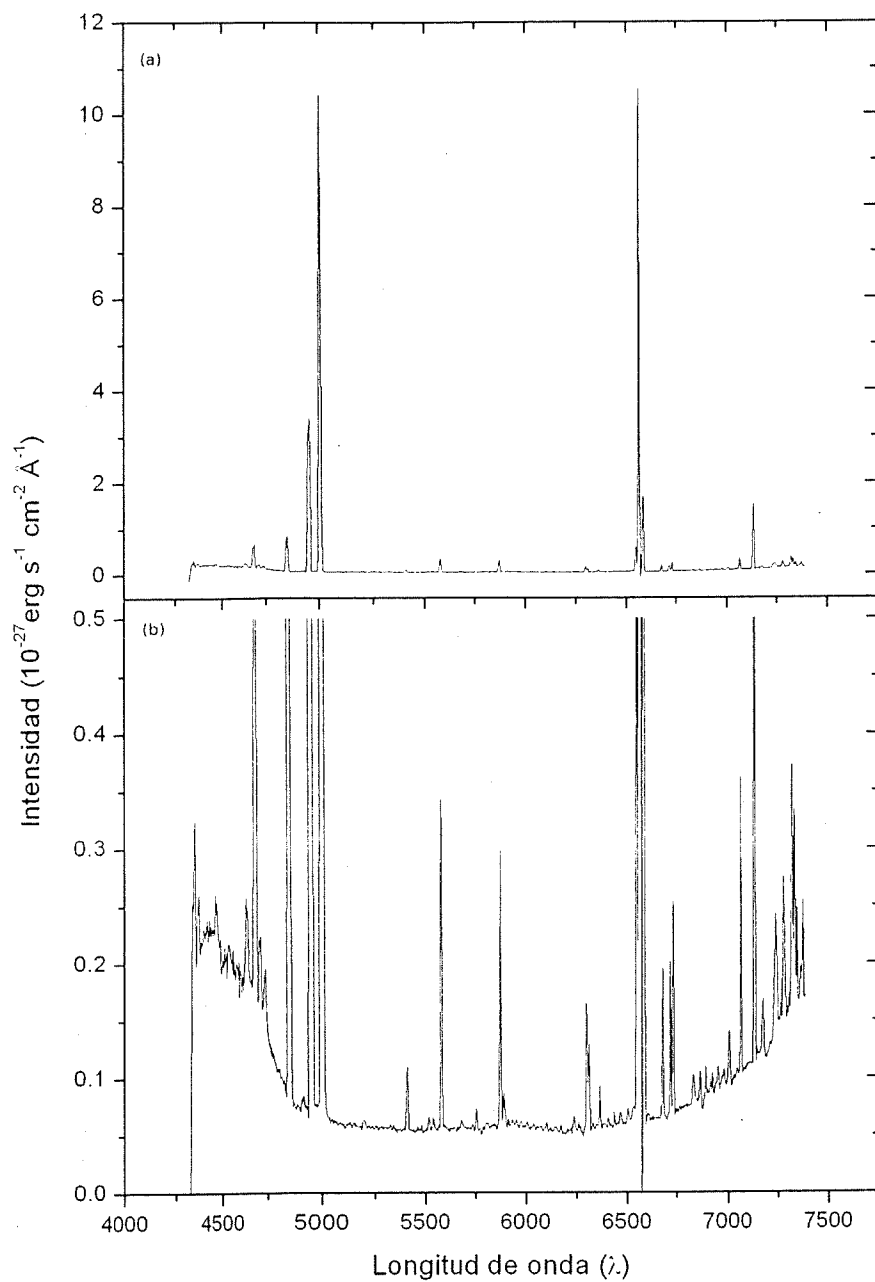


Figura 4.7: (a): Espectro integrado de varianzas para NGC 7354. (b): El mismo espectro pero amplificado para mostrar las líneas con varianzas pequeñas.

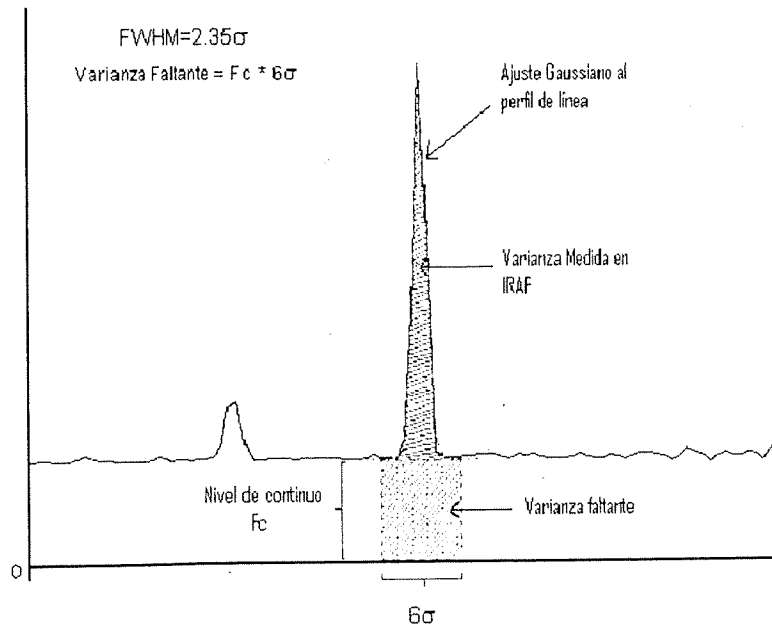


Figura 4.8: Medición de la varianza de una línea de emisión nebular.

4.5. Análisis

En las tablas 4.III y 4.IV se presentan los flujos observados de las líneas espectrales medidas sobre los espectros de NGC 6309 y NGC 7354 respectivamente. Los flujos se reportan relativos al flujo de $H\beta$ y se multiplican por 100. Se muestran las incertidumbres asociadas, las cuales son obtenidas mediante teoría de errores (ecuación 3.6), para cada una de las líneas espectrales.

Los flujos fueron corregidos por extinción. El coeficiente de extinción ($C_{H\beta}$) se obtuvo con la ecuación (2.12), usando la ley de extinción de Cardelli, Clayton & Mathis (1989). En la parte inferior de las tablas 4.III y 4.IV se muestran el $C_{H\beta}$ calculado y su incertidumbre. Las incertidumbres en los flujos desenojados fueron calculados tomando en cuenta las ecuaciones que se presentan en la sección 3.2.3.

Íon	λ (Å)	$F(\lambda)$ ($\times 10^{-12}$)	$\sigma_{F(\lambda)}$ ($\times 10^{-12}$)	S/N	$\frac{F(\lambda)}{F(H\beta)}$	σ	$f(\lambda)$	$I(\lambda)$	$\sigma_{I(\lambda)}$
H γ	4340	28.57	0.18	157.85	36.25	0.25	0.16	36.78	0.26
[O III]	4363	8.12	0.15	52.50	10.29	0.20	0.15	10.43	0.20
He I	4471	3.66	0.14	27.20	4.64	0.17	0.12	4.69	0.17
N III	4640	1.75	0.14	12.27	2.22	0.18	0.06	2.23	0.18
He II	4686	13.29	0.17	80.74	16.86	0.21	0.05	16.93	0.21
[Ar IV]	4711	3.82	0.13	29.23	4.84	0.17	0.04	4.86	0.17
[Ar IV]	4740	3.26	0.12	27.11	4.13	0.15	0.03	4.15	0.15
H β	4861	78.89	0.20	393.86	100.00	0.36	0	100	0.36
[O III]	4959	377.60	0.38	990.82	479.09	1.31	-0.03	477.9	1.31
[O III]	5007	1117.80	0.63	1762.26	1419.52	3.69	-0.04	1415	3.71
[N I]	5199	1.08	0.06	17.35	1.37	0.08	-0.08	1.36	0.08
He II	5411	0.997	0.05	18.74	1.26	0.07	-0.13	1.25	0.07
[Cl III]	5517	0.96	0.05	19.17	1.21	0.06	-0.15	1.20	0.06
[Cl III]	5537	0.72	0.05	14.28	0.91	0.06	-0.15	0.90	0.06
[O I]	5577	1.63	0.15	10.89	2.07	0.19	-0.16	2.04	0.19
[N II]	5755	1.89	0.05	38.12	2.40	0.06	-0.19	2.36	0.06
He I	5876	11.56	0.08	148.43	14.70	0.11	-0.20	14.43	0.11
[O I]	6300	9.98	0.09	113.29	12.65	0.12	-0.26	12.34	0.12
[S III]	6312	1.96	0.05	42.55	2.48	0.06	-0.26	2.42	0.06
[O I]	6364	3.35	0.06	56.03	4.25	0.08	-0.27	4.14	0.08
[N II]	6548	39.28	0.11	366.76	49.81	0.19	-0.30	48.46	0.22
H α	6563	232.10	0.26	904.87	294.04	0.81	-0.30	286	1.12
[N II]	6583	118.50	0.18	676.76	150.82	0.44	-0.30	146.7	0.59
He I	6678	3.31	0.05	70.00	4.20	0.06	-0.31	4.08	0.06
[S II]	6717	15.42	0.07	210.66	19.52	0.11	-0.32	18.95	0.12
[S II]	6731	21.46	0.08	257.44	27.25	0.13	-0.32	26.45	0.15
He I	7065	3.58	0.06	58.23	4.54	0.08	-0.36	4.39	0.08
[Ar III]	7135	19.81	0.10	194.79	25.10	0.14	-0.37	24.24	0.16
[O II]	7320	6.03	0.10	62.21	7.64	0.12	-0.40	7.37	0.12
[O II]	7330	4.99	0.09	56.43	6.32	0.11	-0.40	6.10	0.11
$C_{H\beta}$	0.04								
$\sigma_{C_{H\beta}}$	4.04E-03								

Tabla 4.III: Flujos observados y desrojados con incertidumbres estimadas para NGC 6309.

Íón	λ (Å)	$F(\lambda)$ ($\times 10^{-12}$)	$\sigma_{F(\lambda)}$ ($\times 10^{-12}$)	S/N	$\frac{F(\lambda)}{F(H\beta)}$	σ	$f\lambda$	$I(\lambda)$	$\sigma_{I(\lambda)}$
H γ	4340	3.41	0.08	43.14	9.92	0.05	0.16	20.00	0.47
[O III]	4363	1.58	0.08	20.98	4.59	0.05	0.15	8.93	0.43
He I	4471	0.14	0.05	2.97	0.41	0.02	0.12	0.69	0.23
He II	4686	14.05	0.12	120.18	40.87	0.14	0.05	51.09	0.49
[Ar IV]	4711	2.12	0.08	26.26	6.18	0.06	0.04	7.45	0.28
[Ar IV]	4740	1.90	0.08	24.85	5.52	0.05	0.03	6.43	0.26
H β	4861	34.38	0.12	292.91	100.00	0.23	0.00	100.00	0.59
[O III]	4959	158.00	0.21	738.79	459.57	2.85	-0.03	409.18	2.06
[O III]	5007	488.40	0.36	1342.89	1420.59	24.64	-0.04	1198.81	5.88
[Cl III]	5517	0.67	0.04	18.60	1.96	0.01	-0.15	1.03	0.06
[Cl III]	5537	0.68	0.04	16.05	1.99	0.02	-0.15	1.02	0.06
[O I]	5577	0.43	0.06	7.02	1.24	0.03	-0.16	0.62	0.09
[N II]	5755	0.72	0.04	20.13	2.09	0.01	-0.19	0.91	0.05
He I	5876	9.45	0.06	169.01	27.49	0.04	-0.20	11.10	0.09
[O I]	6300	0.79	0.04	18.73	2.30	0.02	-0.26	0.71	0.04
[S III]	6312	2.70	0.04	70.31	7.87	0.01	-0.26	2.42	0.04
[O I]	6363	0.39	0.04	11.03	1.13	0.01	-0.27	0.34	0.03
[Ar V]	6435	0.67	0.03	20.14	1.95	0.01	-0.28	0.56	0.03
[N II]	6548	18.91	0.07	264.54	55.00	0.08	-0.30	14.66	0.09
H α	6563	371.20	0.29	1279.79	1079.70	14.30	-0.30	285.22	1.40
[N II]	6583	57.64	0.12	488.93	167.66	0.45	-0.30	43.90	0.23
He I	6678	4.30	0.05	93.12	12.50	0.02	-0.31	3.09	0.04
[S II]	6716	3.86	0.05	85.68	11.23	0.02	-0.32	2.71	0.03
[S II]	6731	5.83	0.05	116.92	16.97	0.02	-0.32	4.06	0.04
[Ar V]	7005	1.25	0.05	26.56	3.65	0.02	-0.36	0.74	0.03
He I	7065	5.61	0.06	98.98	16.31	0.03	-0.36	3.21	0.04
[Ar III]	7136	31.35	0.11	284.80	91.19	0.20	-0.37	17.15	0.10
[Ar IV]	7170	0.47	0.04	10.85	1.38	0.02	-0.38	0.25	0.02
[Ar IV]	7236	2.20	0.08	27.10	6.40	0.06	-0.39	1.14	0.04
[Ar IV]	7264	0.52	0.04	14.47	1.50	0.01	-0.39	0.26	0.02
He I	7281	1.21	0.07	17.67	3.51	0.04	-0.39	0.61	0.03
[O II]	7320	2.91	0.06	45.61	8.48	0.04	-0.40	1.43	0.03
[O II]	7330	2.63	0.06	42.61	7.64	0.03	-0.40	1.28	0.03
$C_{H\beta}$	1.94								
$\sigma_{C_{H\beta}}$	5.10E-03								

Tabla 4.IV: Flujos observados y desrojados con incertidumbres estimadas para NGC 7354.

4.5.1. Parámetros físicos

La estimación de parámetros físicos se lleva a cabo usando la tarea de la rutina STSDAS/NEBULAR/TEM DEN de IRAF v2.10.2.

En las Tablas 4.v y 4.vi se reportan las temperaturas, densidades electrónicas e incertidumbres estimadas para NGC 6309 y NGC 7354 respectivamente. Las temperaturas y densidades se dedujeron como sigue: N_e [S II] se deriva utilizando T_e [N II] y para N_e [Cl III] y N_e [Ar IV] se usa T_e [O III].

Parámetro	Ion	Valor	σ	σ (%)
T_e (K)	[N II]	10379	119	1
	[O III]	10412	60	< 1
N_e (cm ⁻³)	[S II]	2079	96	5
	[Ar IV]	2130	881	41

Tabla 4.v: Parámetros físicos derivados para NGC 6309

Parámetro	Ion	Valor	σ	σ (%)
T_e (K)	[N II]	11506	249	2
	[O III]	10430	156	1
N_e (cm ⁻³)	[S II]	2809	267	10
	[Cl III]	2523	1156	46
	[Ar IV]	2273	1002	44

Tabla 4.vi: Parámetros físicos derivados para NGC 7354

Como se mencionó en la sección 3.2.4 el proceso de obtención de T_e y N_e se hace de forma iterativa para obtener valores consistentes entre sí. Si no se efectuaran las

iteraciones se encuentra para NGC 6309 una sobreestimación del 1% en el valor medio de $N_e[\text{S II}]$, una sobreestimación en la variación del 16% para $T_e[\text{N II}]$, del 3% para $N_e[\text{S II}]$ y del 19% en $T_e[\text{O III}]$. En el caso de NGC 7354 se obtiene una sobreestimación en el valor medio de $T_e[\text{N II}]$ del 4%, en $N_e[\text{S II}]$ de 1%, así como una sobreestimación en la variación de $T_e[\text{N II}]$ en un 23%, para $T_e[\text{O III}]$ del 11% y del orden de 3% para $N_e[\text{S II}]$.

4.5.2. Abundancias químicas

El cálculo de las abundancias iónicas se realizó con la tarea IONIC de la rutina STSDAS/ANALYSIS/NEBULAR. Las abundancias iónicas por número, incertidumbres asociadas, S/N de las líneas de emisión en NGC 6309 y NGC 7354 se muestran en las tablas 4.VII y 4.VIII respectivamente.

Los promedios calculados en estas tablas son promedios de las abundancias iónicas de las líneas que conforman al ion pesados por S/N (tal como se describe en la sección 2.1.1), el pesar de esta forma nos permite darle mayor importancia a aquellas líneas que se encuentren bien definidas en zonas de menor ruido.

Ion	λ	S/N	N(ion)/N(H ⁺)	σ_N	σ_N (%)
He ²⁺	4686	80.74	0.0136	1.757E-04	1
He ⁺	4471	27.20	0.0933	3.398E-03	4
	5876	148.43	0.0983	8.290E-04	1
PROMEDIO			0.0976	8.763E-04	1
O ²⁺	4363	52.50	4.309E-04	2.675E-05	6
	4959	990.82	4.226E-04	9.650E-06	2
	5007	1762.26	4.338E-04	9.800E-06	2
PROMEDIO			4.298E-04	1.006E-05	2
O ⁺	7320	62.21	1.029E-04	1.027E-05	10
	7330	56.43	1.048E-04	1.060E-05	10
PROMEDIO			1.038E-04	1.043E-05	10
O ⁰	6300	113.29	2.074E-05	1.070E-06	5
	6363	56.03	2.179E-05	1.320E-06	6
PROMEDIO			2.109E-05	1.153E-06	6
Ar ³⁺	4711	29.23	7.294E-07	6.795E-08	9
	4740	27.11	7.294E-07	6.090E-08	8
PROMEDIO			7.294E-07	6.456E-08	9
Ar ²⁺	7136	194.79	2.031E-06	4.100E-08	2
N ⁺	5755	38.12	2.656E-05	2.275E-06	9
	6548	366.76	2.604E-05	9.200E-07	4
	6583	676.76	2.673E-05	9.300E-07	4
PROMEDIO			2.649E-05	9.740E-07	4
S ²⁺	6312	42.55	4.861E-06	2.710E-07	6
S ⁺	6716	210.66	1.316E-06	7.050E-08	5
	6731	257.44	1.316E-06	5.150E-08	4
PROMEDIO			1.316E-06	6.005E-08	5
Cl ²⁺	5517	19.17	1.367E-07	1.940E-08	14
	5537	14.28	1.072E-07	1.214E-08	11
PROMEDIO			1.241E-07	1.630E-08	13

Tabla 4.VII: Abundancias iónicas para NGC 6309.

Ion	λ	S/N	$N(\text{ion})/N(\text{H}^+)$	σ_N	$\sigma_N(\%)$
He ²⁺	4686	120.18	0.0410	4.640E-04	1
He ⁺	4471	2.97	0.0133	4.480E-03	34
	5876	169.01	0.0714	6.876E-04	1
PROMEDIO			0.0704	6.801E-04	1
O ²⁺	4363	21.00	3.639E-04	5.535E-05	15
	4959	738.80	3.597E-04	2.005E-05	6
	5007	1342.90	3.653E-04	2.035E-05	6
PROMEDIO			3.633E-04	2.059E-05	6
O ⁺	7320	45.60	1.018E-05	1.734E-06	17
	7330	42.60	1.118E-05	1.922E-06	17
PROMEDIO			1.066E-05	1.825E-06	17
O ⁰	6300	18.70	8.263E-07	1.064E-07	13
	6363	11.00	1.226E-06	2.035E-07	17
PROMEDIO			9.743E-07	1.424E-07	15
Ar ⁴⁺	6435	20.14	2.637E-07	2.505E-08	10
	7006	26.56	1.317E-07	1.095E-08	8
PROMEDIO			1.886E-07	1.703E-08	9
Ar ³⁺	4711	26.30	1.119E-06	1.465E-07	13
	4740	24.80	1.119E-06	1.326E-07	12
PROMEDIO			1.119E-06	1.397E-07	13
Ar ²⁺	7136	284.80	1.431E-06	5.750E-08	4
N ⁺	5755	20.10	6.229E-06	9.610E-07	15
	6548	264.50	6.156E-06	3.760E-07	6
	6583	488.90	6.250E-06	3.765E-07	6
PROMEDIO			6.217E-06	3.915E-07	6
K ³⁺	6102	9.30	2.161E-08	3.235E-09	15
S ²⁺	6312	70.30	4.802E-06	4.160E-07	9
S ⁺	6716	85.70	1.697E-07	1.805E-08	11
	6731	116.90	1.697E-07	1.305E-08	8
PROMEDIO			1.697E-07	1.517E-08	9
Cl ²⁺	5517	18.60	1.205E-07	2.281E-08	19
	5537	16.00	1.206E-07	2.348E-08	19
PROMEDIO			1.205E-07	2.312E-08	19

Tabla 4.viii: Abundancias iónicas para NGC 7354.

Abundancias totales

Las abundancias totales se derivan utilizando las ecuaciones de Kingsburgh & Barlow (1994), con excepción de Helio (ver sección 2.2.5). El valor de He^+ se tomó del caso I. Las incertidumbres en abundancias totales se estimaron de acuerdo a las ecuaciones para cada elemento (3.15 – 3.46).

En las tablas 4.IX y 4.X se presentan las abundancias totales para NGC 6309 y NGC 7354 respectivamente. Se reporta el ICF estimado para cada elemento así como su incertidumbre, en la séptima columna se muestra la abundancia total en forma logarítmica como es usada comúnmente en la literatura, la cual se expresa por $A_t \equiv \log(A_t) + 12$ y su incertidumbre está dada por

$$\sigma_{A_t} = \frac{1}{\ln^2 10} \left(\frac{\sigma_{A_T}}{A_T} \right)^2.$$

Elemento	ICF	σ_{ICF}	A_T	σ_{A_T}	$\sigma\%$	A_t	σ_{A_t}
He/H ⁺	—	—	0.111	0.001	1	—	—
O/H ⁺	1.087	0.001	5.800×10^{-4}	0.158×10^{-4}	3	8.763	0.012
N/H ⁺	5.589	0.582	1.481×10^{-4}	0.164×10^{-4}	11	8.171	0.048
Ar/H ⁺	1.218	0.031	3.362×10^{-6}	0.127×10^{-6}	4	6.527	0.016
S/H ⁺	1.308	0.037	8.080×10^{-6}	0.429×10^{-6}	5	6.907	0.023

Tabla 4.IX: Abundancias totales para NGC 6309.

Elemento	ICF	σ_{ICF}	A_T	σ_{A_T}	$\sigma\%$	A_t	σ_{A_t}
He/H ⁺	—	—	0.111	0.001	1	—	—
O/H ⁺	1.358	0.005	5.078×10^{-4}	0.281×10^{-4}	6	8.706	0.024
N/H ⁺	47.64	8.531	2.962×10^{-4}	0.562×10^{-4}	19	8.472	0.082
Ar/H ⁺	1.022	0.004	2.800×10^{-6}	0.156×10^{-6}	6	6.447	0.024
S/H ⁺	2.531	0.155	1.258×10^{-5}	0.131×10^{-5}	10	7.100	0.045

Tabla 4.X: Abundancias totales para NGC 7354.

Capítulo 5

Discusión

5.1. NGC 6309

Las incertidumbres estimadas para los flujos desenrojados se pueden agrupar de la siguiente manera:

- <1% para líneas muy intensas ($S/N > 100$)
- 1-2% para líneas intensas ($30 < S/N < 100$)
- 4-9% para líneas débiles ($S/N < 30$).

Las incertidumbres en parámetros físicos están dominadas básicamente por el efecto del ruido de fotones. Para el caso de esta NP, los valores determinados de $T_e[\text{O III}]$ y $T_e[\text{N II}]$ no se vieron fuertemente afectados por las líneas $\lambda 4363$ de $[\text{O III}]$ y $\lambda 5755$ de $[\text{N II}]$ respectivamente, debido a que estas líneas se encontraron bien definidas (con $S/N > 30$) en el espectro.

El valor de $N_e[\text{Ar IV}]$ se encuentra mal determinado por el hecho de que la línea $\lambda 4711$ esta mezclada con la línea de He I $\lambda 4713$ (esto debido a la baja resolución espectral) dando un flujo sobreestimado de esta línea, afectando principalmente a $N_e[\text{Ar IV}]$ y por ende a su incertidumbre (Wang et al. 2004).

Un análisis del comportamiento de la incertidumbre porcentual de las abundancias iónicas en función de la S/N para cada línea (figura 5.1), nos muestra una tendencia decreciente de ésta, sin embargo hay algunas líneas que no siguen esta tendencia como son $\lambda 7320$, 7330 [O II] y $\lambda 7136$ [Ar III] (figura 5.2). Las líneas de [O II] $\lambda 7320$, 7330\AA son líneas intrínsecamente débiles mas sensibles a densidad que a temperatura, como se puede apreciar en las figuras D.1 y D.2 del apéndice D.

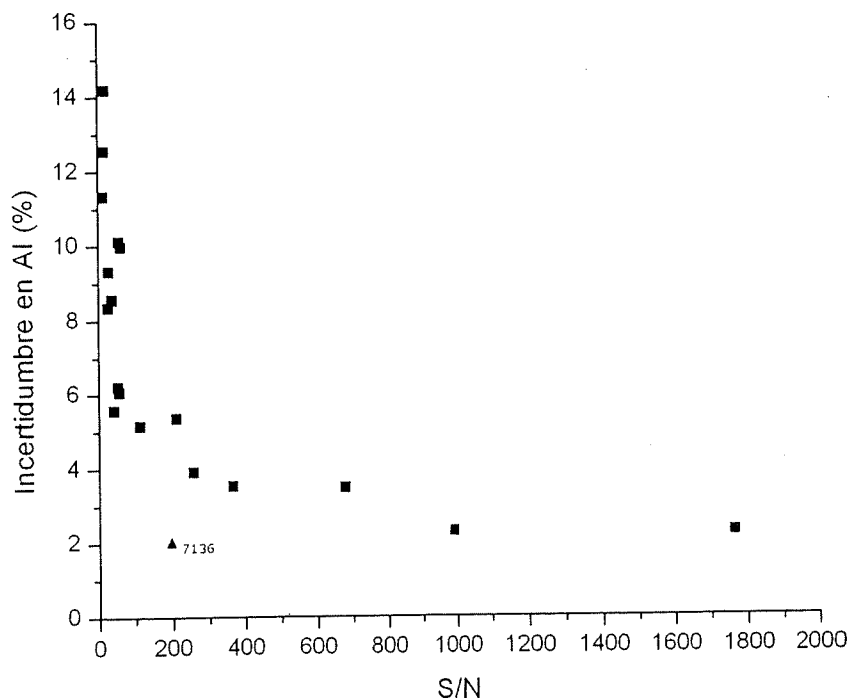


Figura 5.1: Incertidumbre porcentual en la abundancia iónica en función de la S/N para NGC 6309.

De esta tendencia podemos diferenciar tres grupos:

- Líneas con $S/N > 200$ (líneas muy intensas) presentan una incertidumbre promedio del 2-6 %

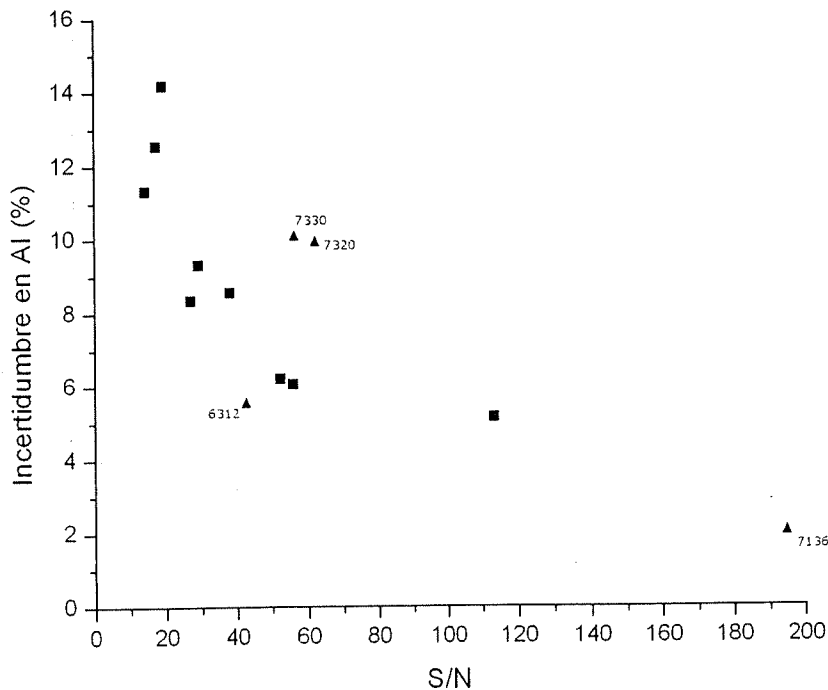


Figura 5.2: Ampliación de la figura 5.1 para líneas con $S/N < 200$. Se puede apreciar claramente como las líneas $\lambda 7320$, 7330 no siguen el comportamiento del resto de las líneas.

- Líneas con $30 < S/N < 200$ (líneas intensas) presentan una incertidumbre promedio del 8-10 %
- Líneas con $S/N < 30$ (líneas débiles) presentan una incertidumbre promedio del 11-15 %

Esta tendencia se ajusta muy bien de acuerdo a lo que comúnmente se adopta en la literatura (10 % líneas intensas y 15 % líneas débiles).

La abundancia promedio para aquellos iones que presentan transiciones con incertidumbres considerables como $[O III] \lambda 4363$, $[N II] \lambda 5755$ y $He I \lambda 4471$ no se ven afectadas por estas líneas, debido a la elección de la función de peso (S/N) para

obtener el promedio pesado.

La abundancia de He I derivada a partir de la ecuación (2.42, caso I) es un 2% mayor que la derivada con la ecuación (2.43, caso II), esto debido a que en el caso I no se contempla la contribución de $\lambda 6678$. No se toma en cuenta esta línea ya que en Pequignot (1991) no se presenta un coeficiente de recombinación efectiva para ella.

Analizando los intervalos de variación de las abundancias obtenidos con cada método, para determinar consistencias en los valores medios, se encontró que dichos intervalos no se empalman entre sí por una diferencia mínima del 3%, concluyendo que ambos métodos no son consistentes entre sí.

Clegg (1987) comenta que debido al hecho de no considerar la corrección por recombinación colisional en la determinación de la abundancia de He I (ecuación 2.41), sus resultados serán típicamente un 9% más altos. En nuestro caso al no considerar esta corrección la abundancia resulta un 8% más alta, concordando de buena manera con Clegg. Hay que dejar en claro que una cosa es la variación por considerar la recombinación colisional y otra la incertidumbre producto de las características de las observaciones.

Se encontró una incertidumbre pequeña en la abundancia de oxígeno (3%), la cual es mayormente afectada por la incertidumbre en O^+ (52%), conformada por la incertidumbre en $\lambda 7320$ y 7330 , seguida por la incertidumbre en O^{2+} (47%).

La incertidumbre de nitrógeno es la más considerable de todos los demás elementos (11%). Ésta se ve afectada principalmente por el efecto de la incertidumbre en O^+ a través de su ICF (89%). Esto nos hace reflexionar en el cuidado que se debe tener con el tratamiento de estas líneas.

Para la incertidumbre de argón notemos que a pesar de que depende mayormente de la incertidumbre de nitrógeno a través del ICF (46%), obtenemos una incertidumbre pequeña del 4%.

En el caso de azufre, se determinó una incertidumbre del 5 %, la cual depende en mayor manera de la incertidumbre en S^{2+} (70 %), seguido por el efecto de O^+ (27 %) a través del ICF.

5.2. NGC 7354

Particularmente para esta NP, los flujos de líneas en zonas ruidosas, i.e. S/N baja, se encuentran subestimadas debido a problemas con el enfoque del espectrógrafo en la parte azul del espectro.

Al igual que en NGC 6309, se encuentra una tendencia para las incertidumbres en los flujos desenrojecidos, descrita como sigue:

- <1 % para líneas muy intensas ($S/N > 100$)
- 1-2 % para líneas intensas ($30 < S/N < 100$)
- 4-30 % para líneas débiles ($S/N < 30$).

Podemos notar que esta tendencia se asemeja mucho a la encontrada en NGC 6309, en el caso de las líneas débiles no concuerda debido al problema de desenfoque del espectro.

En parámetros físicos encontramos que las incertidumbres en T_e son pequeños, 1 % para $T_e[O III]$ y del 2 % para $T_e[N II]$. Así mismo, vemos que la mayor variación en parámetros físicos se presentan para las N_e derivadas con $[Cl III]$ y $[Ar IV]$, las líneas en $[Cl III]$ y $[Ar IV]$ presentan S/N bajas (< 30), además sin olvidar que el valor de $N_e[Ar IV]$ se encuentra mal determinado (página 69).

Realizando el mismo análisis del comportamiento de la incertidumbre en función de la S/N para cada línea (Fig. 5.3), podemos apreciar la misma tendencia decreciente de este al aumentar la S/N que en NGC 6309, también podemos ver el

mismo comportamiento de las líneas $\lambda 7320-7330$ [O II], $\lambda 7136$ [Ar IV] y $\lambda 6435-7006$ (figura 5.4).

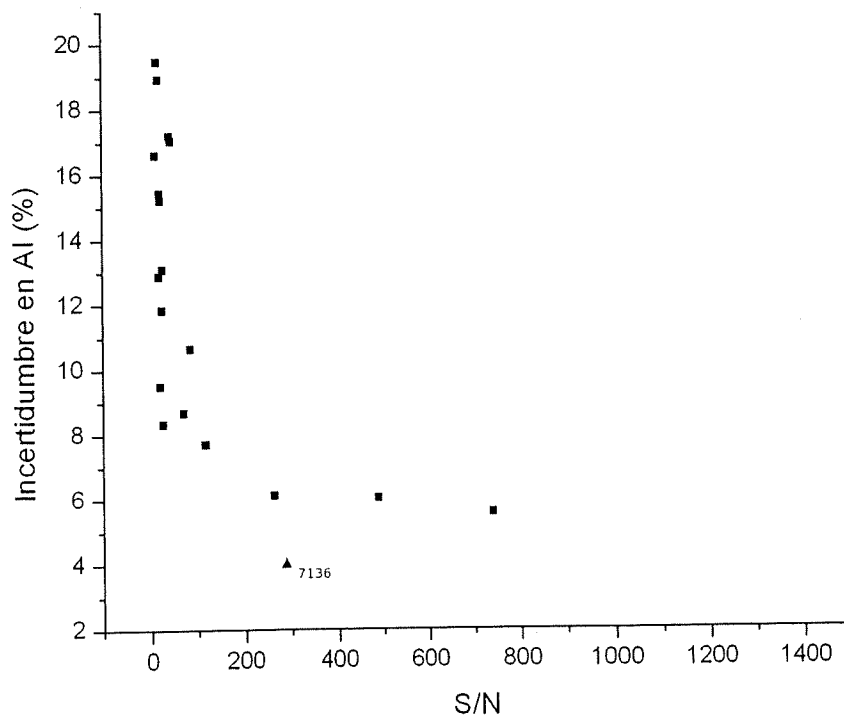


Figura 5.3: Incertidumbre porcentual en la abundancia iónica en función de la S/N para NGC 7354.

Podemos englobar esta tendencia en tres grupos:

- Líneas con $S/N > 200$ (líneas muy intensas) presentan una incertidumbre promedio del 4-6 %
- Líneas con $30 < S/N < 200$ (líneas intensas) presentan una incertidumbre promedio del 7-13 %
- Líneas con $S/N < 30$ (líneas débiles) presentan una incertidumbre promedio del 14-19 %

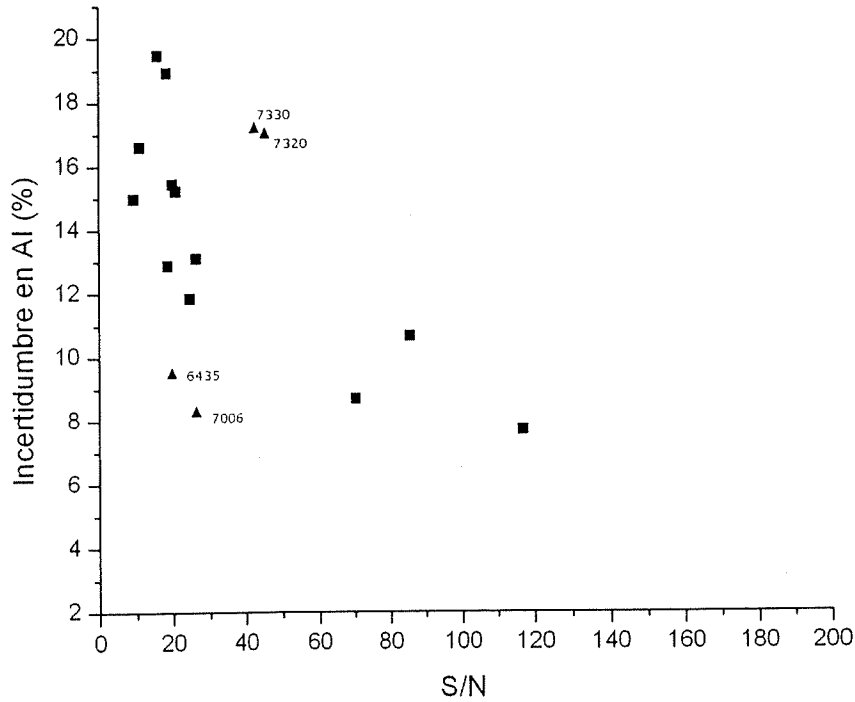


Figura 5.4: Ampliación de la figura 5.3 para líneas con $S/N < 200$.

Las incertidumbres porcentuales en las abundancias iónicas de NGC 7354 se presentan más altas en comparación a NGC 6309, debido al efecto de subestimación en los flujos de estas líneas.

La incertidumbre en la abundancia para iones cuyas líneas tienen incertidumbres considerables como $[O\ III] \lambda 4363$, $[N\ II] \lambda 5755$ y $He\ I \lambda 4471$ no se ven afectadas por estas líneas, esto debido a la función de peso adoptada (S/N) para obtener el promedio.

En cuanto a la abundancia de He I estimada con el caso II es mayor en un 6% que en el caso I, esto sólo debido a la contribución de $\lambda 6678$, al igual que en NGC 6309 encontramos que los valores obtenidos por ambos métodos no son consistentes entre sí por las incertidumbres estimadas. Las incertidumbres en ambos casos son

pequeñas (1%), debido a que $\lambda 5876$ domina por ser una línea intensa ($S/N = 169$).

Al analizar la abundancia de este ión sin considerar la corrección por recombinación colisional obtenemos valores un 15% más altos en ésta.

La incertidumbre en la abundancia de oxígeno resultó considerable, 6%, afectada principalmente por la incertidumbre en O^{2+} (98%), lo cual resulta todo lo contrario al caso de NGC 6309, esto podría ser por el hecho de que en esta NP la incertidumbre en O^{2+} es más grande en un factor de 2 que O^+ .

La incertidumbre en abundancia más alta reportada le corresponde a nitrógeno, 19%, la cual depende en mayor grado de la incertidumbre en O^+ (89%) y menormente por la incertidumbre en N^+ (11%).

La incertidumbre en argón se ve afectada en mayor medida por la incertidumbre en Ar^{3+} (84%) y en menor medida por la incertidumbre en la abundancia de nitrógeno a través del ICF, todo lo contrario a lo que sucede en NGC 6309. La abundancia de Ar^{4+} se determinó con $N_e[Ar IV]$, por ende la abundancia de argón está mal determinada.

En el caso de azufre su incertidumbre resultó considerable (10%), debido a que la incertidumbre de S^{2+} contribuye de mayor manera en un 65%, seguida por la incertidumbre en O^+ a través del ICF.

Gonçalves et al. (2003) comenta que los errores típicos resultantes en las abundancias totales son menores de 10% para helio, de 10-20% para oxígeno, menor de 35% para neón y de 25-40% para nitrógeno y azufre. Mientras que en Stanghellini et al. (2006) estiman que las incertidumbres típicas son del orden del 10% para oxígeno, nitrógeno, helio y del 15-20% para las abundancias de neón y argón. En nuestro caso para ambas NP se ajustan bien nuestras incertidumbres para oxígeno con ambas referencias, mientras que para nitrógeno, azufre y argón con Stanghellini (tabla 5.1). Notemos que para helio nuestro resultado es menor que los reportados por estos

autores, debido a que no se considera la contribución de la línea $\lambda 6678$, generando un posible efecto de subestimación en las abundancias de los demás elementos y por ende en sus incertidumbres.

Elemento	G03 ^a	S06 ^b	E08 ^c
He	<10 %	10 %	1 %
O	10-20 %	20 %	<10 %
N	25-40 %	15-20 %	15 %
Ne	<35 %	15-20 %	—
Ar	—	15-20 %	<10 %
S	25-40 %	—	<10 %

^aTomado de Gonçalves et al. (2003)

^bTomado de Stanghellini et al. (2006)

^cValor promedio de este estudio

Tabla 5.1: Comparación de incertidumbres en abundancias totales.

Capítulo 6

Conclusiones

Se ha realizado un análisis de incertidumbres en espectros de baja dispersión. Este análisis consistió en estimar las incertidumbres asociadas a flujos desenrojados, parámetros físicos y químicos por medio de teoría de errores. Se presentó una aplicación para una región de las NPs NGC 6309 y NGC 7354.

- Se encontró para ambas NPs que en promedio las incertidumbres en los flujos desenrojados son del orden del 4–9 % para líneas débiles (con $S/N < 30$), del 1–2 % para líneas intensas ($30 < S/N < 100$) y < 1 % para líneas muy intensas ($S/N > 100$).
- Para ambas NPs no se encontró una variación significativa en las incertidumbres de T_e por el efecto de las incertidumbres en las líneas [N II] $\lambda 5755$ y [O III] $\lambda 4363$.
- En cambio, para N_e se encontraron variaciones del orden del 7 % para [S II], del 45 % para [Cl III] y del 40 % para [Ar IV] (esto debido en mayor parte al efecto del ruido de fotones en los flujos de las líneas).
- Se encontró una tendencia promedio de la incertidumbre en abundancia iónica en función de la S/N como sigue: 15 % para líneas débiles ($S/N < 30$), 10 % para líneas intensas ($30 < S/N < 200$) y del 5 % para líneas muy intensas ($S/N > 200$).

- Hemos encontrado una concordancia de nuestros resultados con los que se adoptan usualmente en la literatura.
- Se encontró que la incertidumbre en O^{2+} no se ve afectada por la incertidumbre de la línea $\lambda 4363$, igualmente para N^+ con $\lambda 5755$, esto debido a la elección de la función de peso (S/N) para obtener el promedio.
- La incertidumbre en O^+ es considerable, debido en mayor parte a que sus líneas se encuentran en una zona ruidosa del espectro, además de ser sensibles a las variaciones en densidad.
- La abundancia de He I se encuentra subestimada en promedio en un 4 %, debido a que no se considera la contribución de $\lambda 6678$.
- Encontramos que los valores para He I obtenidos por ambos métodos no son consistentes entre sí.
- Se encontró que la incertidumbre en la abundancia de oxígeno para NGC 6309 se ve afectada principalmente por la incertidumbre en O^+ , y para NGC 7354 por la incertidumbre en O^{2+} .
- La incertidumbre en la abundancia de nitrógeno para ambas NPs es la más alta en comparación con los demás elementos, ya que dependen fuertemente de la incertidumbre en O^+ por medio del *ICF*.
- Se encontró que la incertidumbre en la abundancia de argón para NGC 7354 no se ve afectada por la incertidumbre de la abundancia de nitrógeno (a través del *ICF*), ya que influye de mayor manera la incertidumbre en Ar^{3+} , mientras que para NGC 6309 sucede lo contrario.

- Se encontró que la incertidumbre en la abundancia de azufre depende principalmente por la incertidumbre en S^{2+} seguida por la incertidumbre en O^+ a través del ICF.

Bibliografía

- [1] Armour, M. H., Kingsburgh, R. L., 2001, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, Serie de Conferencias*, 10, 38.
- [2] Babu, G. J., Feigelson, E. D., 1996, *Astrostatistics*, Chapman & Hall, Londres.
- [3] Benjamin, R., Skillman, E., Smits, D., 1999, *The Astrophysical Journal*, 514, 307.
- [4] Benítez, G., 2003, *Tesis de Licenciatura*, Universidad Autónoma de Baja California, 50-56, 86, 118-121 pp.
- [5] Brocklenhurst, M., 1972, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 157, 211.
- [6] Cardelli, J., Clayton, G., Mathis, J., 1989, *The Astrophysical Journal*, 345, 245.
- [7] Clegg, R. E. S., 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 229, 31.
- [8] Contreras, M., Olguín, L., Vázquez, R., Zavala, S., Ayala, S., Miranda, L. F., 2008, en preparación.
- [9] Cook, R., Vázquez, R., 2002, *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 12, 38.

- [10] Corradi, R., Perinotto, M., Schwarz, H., Claeskens, J. F., 1997, *Astronomy and Astrophysics*, 322, 975.
- [11] De Robertis, M. M., Dufour, R. J., Hunt, R. W., 1987, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 81, 195.
- [12] Feigelson, E. D., Babu, G. J., 1993, *Statistical Challenges in Modern Astronomy*, Springer-Verlag, Nueva York.
- [13] Gilliland, R. L., 1992, *Astronomical CCD Observing and Reduction Techniques*, ASP Conference Series, 23, 68.
- [14] Gonçalves, D., Corradi, R., Mampaso, A., Perinotto, M., 2003, *The Astrophysical Journal*, 597, 975.
- [15] Freitas Pacheco, J. A., Barbuy, B., Costa, R. D. D., & Idiart, T., 1993, *Astronomy and Astrophysics*, 271, 429.
- [16] Gorny, S. K., Stasinska, G., Escudero, A., Costa, R., 2004, *Astronomy and Astrophysics*, 427, 231.
- [17] Gurzadyan, G. A., 1997, *The physics and Dynamics of Planetary Nebulae*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [18] Hajian, A., Balick, B., Terzian, Y., Perinotto, M., 1997, *The Astrophysical Journal*, 487, 304.
- [19] Howell, S. B., 2000, *Handbook of CCD Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [20] Hummer, D., Storey, P., 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 224, 801.

- [21] Kingsburgh, R., Barlow, M. J., 1994, *Montly Notices of the Royal Astonomical Society*, 271, 257.
- [22] Kwok, S., 2000, *The Origin and Evolution of Planetary Nebulae*, Cambridge University Press.
- [23] Luridiana, V., 1999, *Tesis de Doctorado*, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [24] Meyer, S. L., 1992, *Data Analysis for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons.
- [25] Osterbrock, D. E., 2006, *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei*. University Science Books, Mill Valley, California.
- [26] Olguín, L., 2008, *Tesis de doctorado*, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [27] Peimbert, M., Torres-Peimbert, S., 1977, *Montly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179, 217.
- [28] Pequignot, D., Petitjean, P., Boisson, C., 1991, *Astronomy and Astrophysics*, 251, 680.
- [29] Perinotto, M., Morbidelli, L., Scatarzi, A., 2004, *Montly Notices of the Royal Astonomical Society*, 349, 793.
- [30] Shaw, R. A., Dufour, R. J., 1994, *Astronomical Data Analysis Software and Systems III*, *A. S. P. Conference Series*, 61, 327.
- [31] Stanghellini, L., Guerrero, M., Cunha, K., Manchado, A., Villaver, E., 2006, *The Astrophysical Journal*, 651, 898.

- [32] Stasinska, G., 2002, *Proceedings of the XIII Canary Islands Winter School of Astrophysics*, 207, 500.
- [33] Taylor, J. R., 1997, *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, Mill Valley, California.
- [34] Vázquez, R., Kingsburgh, L., López, J.A., 1998, *Montly Notices of the Royal Astonomical Society*, 296, 564
- [35] Vázquez, R., Miranda, L. F., Olgúin, L., Ayala, S., Torrelles, J. M., Guillén, P. F., *Astronomy & Astrophysics*, 2008.
- [36] Wang, W., Liu, X.-W., Zhang, Y., Barlow, M. J., 2004, *Astronomy and Astrophysics*, 427, 873.

Apéndice A

Glosario de abreviaturas

FWHM Ancho total a media altura.

$H\beta$ Línea de emisión en $\lambda 4861 \text{ \AA}$.

$H\alpha$ Línea de emisión en $\lambda 6543 \text{ \AA}$.

ICF Factor de corrección por ionización.

M_{\odot} Masa solar.

N_e Densidad electrónica.

NP Nebulosa Planetaria.

T_e Temperatura electrónica.

S/N Cociente Señal a Ruido.

Apéndice B

Diagrama de diagnóstico de densidad

Los diagramas de diagnóstico de densidad combinan toda la información de T_e y de los cocientes de líneas sensibles a densidad; estos se pueden construir para una nebulosa dada, trazando para cada par de líneas de diagnóstico, la curva en el plano (T_e, N_e) que correspondan al valor observado. Estas curvas proveen una estimación visual de las incertidumbres en los valores adoptados de T_e y N_e (Stasinska. 2002).

Se generó un diagrama de diagnóstico de densidad para las líneas de [S II] (figura B.1) en un rango amplio de temperaturas y cocientes de flujos, con ayuda de la rutina NEBULAR de IRAF.

Podemos apreciar en el diagrama que si consideramos dos cocientes de flujo, F_1, F_2 , donde $F_2 > F_1$ y dos temperaturas electrónicas, T_1, T_2 , donde $T_2 > T_1$, la máxima densidad que podemos obtener resulta de la combinación de F_1, T_2 y la mínima con F_2, T_1 .

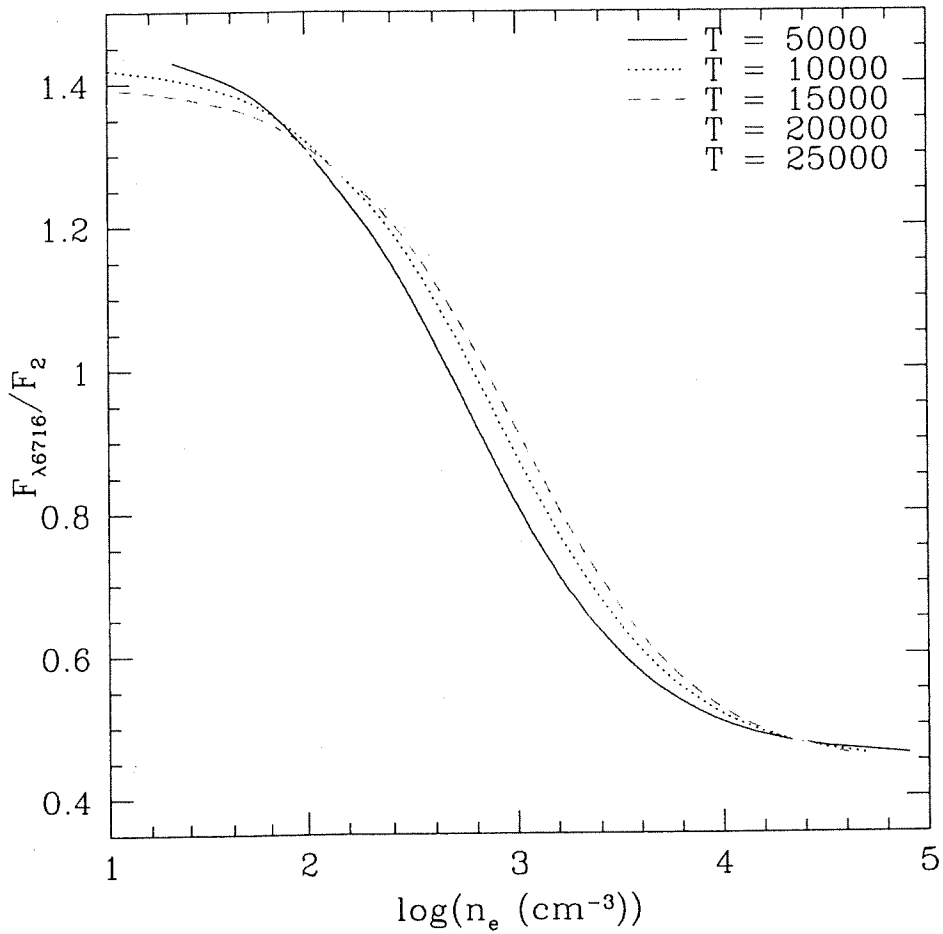


Figura B.1: Diagrama de diagnóstico de densidad para las líneas de [S II]

Apéndice C

Distribución Gaussiana

La función de distribución de probabilidad Gaussiana (también conocida como distribución Normal) se encuentra definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{C.1})$$

donde $N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ es un factor de normalización para que esta función cumpla con las propiedades de una función de distribución de probabilidad.

El ancho de una distribución Gaussiana es usualmente caracterizada por el parámetro σ . Un parámetro alternativo con una interpretación geométrica simple es el FWHM (por sus siglas en inglés *Full Width at Half Maximum*). Este parámetro representa la distancia que hay entre dos puntos x en donde $f(x)$ sea la mitad de su valor máximo (figura C.1).

En el caso en que sólo conozcamos el parámetro FWHM podemos conocer el valor σ , mediante la siguiente relación:

$$FWHM = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 2.35\sigma \quad (\text{C.2})$$

$$\sigma = \frac{FWHM}{2.35} \quad (\text{C.3})$$

Demostración de C.2:

por propiedades de los logaritmos tenemos

$$\begin{aligned}2\sigma^2(\ln 1 - \ln 2) &= -(x - \mu)^2; & \ln 1 &= 0 \\ \Rightarrow -2\sigma^2 \ln 2 &= -(x - \mu)^2 \\ \pm\sqrt{2\sigma^2 \ln 2} &= x - \mu \\ \Rightarrow x &= \pm\sigma\sqrt{2\ln 2} + \mu\end{aligned}$$

Como sabemos, el FWHM es el rango entre los puntos x_1 y x_2

$$\begin{aligned}\Rightarrow FWHM &= x_2 - x_1 \\ &= \left(\sigma\sqrt{2\ln 2} + \mu\right) - \left(-\sigma\sqrt{2\ln 2} + \mu\right) \\ &= \sigma\sqrt{2\ln 2} + \mu + \sigma\sqrt{2\ln 2} - \mu \\ &= 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 2.35\sigma\end{aligned}$$

Apéndice D

Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica

Al igual que los diagramas de diagnóstico de densidad, los diagnósticos de abundancias iónicas combinan toda la información de T_e , N_e y de la intensidad de la línea en cuestión.

Se generaron los diagnósticos de abundancias iónicas para las líneas [O III] $\lambda 7320$ (figura D.1), $\lambda 7330$ (figura D.2) con la rutina NEBULAR del programa IRAF. Estos diagnósticos proveen una estimación visual de las incertidumbres en los valores adoptados de T_e , N_e y de la intensidad de la línea.

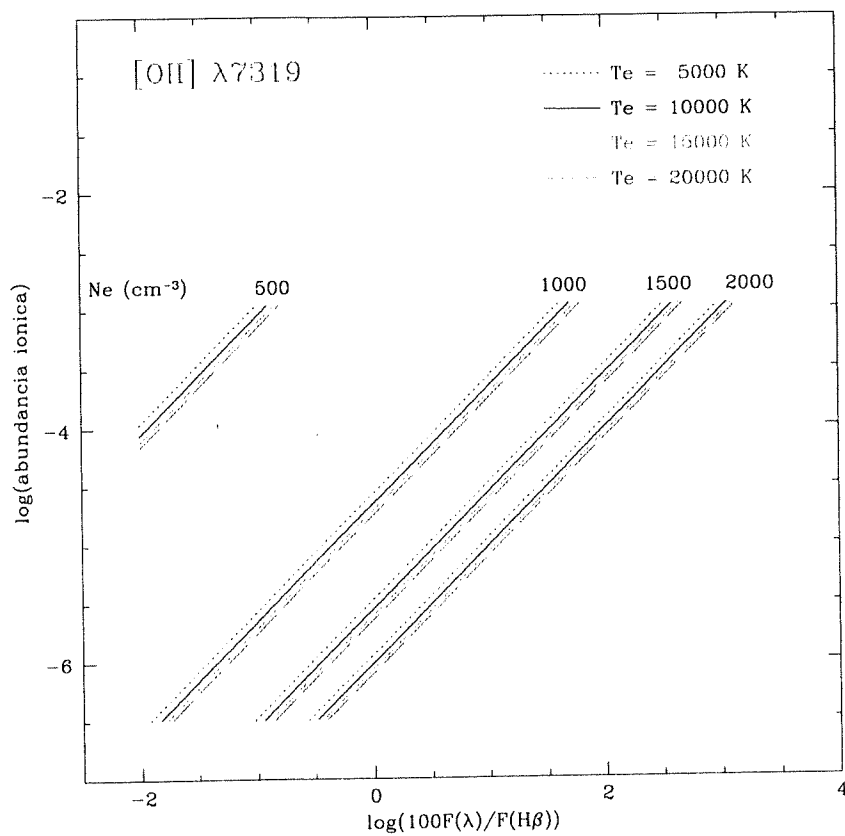


Figura D.1: Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica para $\lambda 7320$ [O III], $\lambda 7320$ es una combinación de las líneas $\lambda 7318.44 + 7319.50$

APÉNDICE D. DIAGRAMA DE DIAGNÓSTICO DE ABUNDANCIA IÓNICA 93

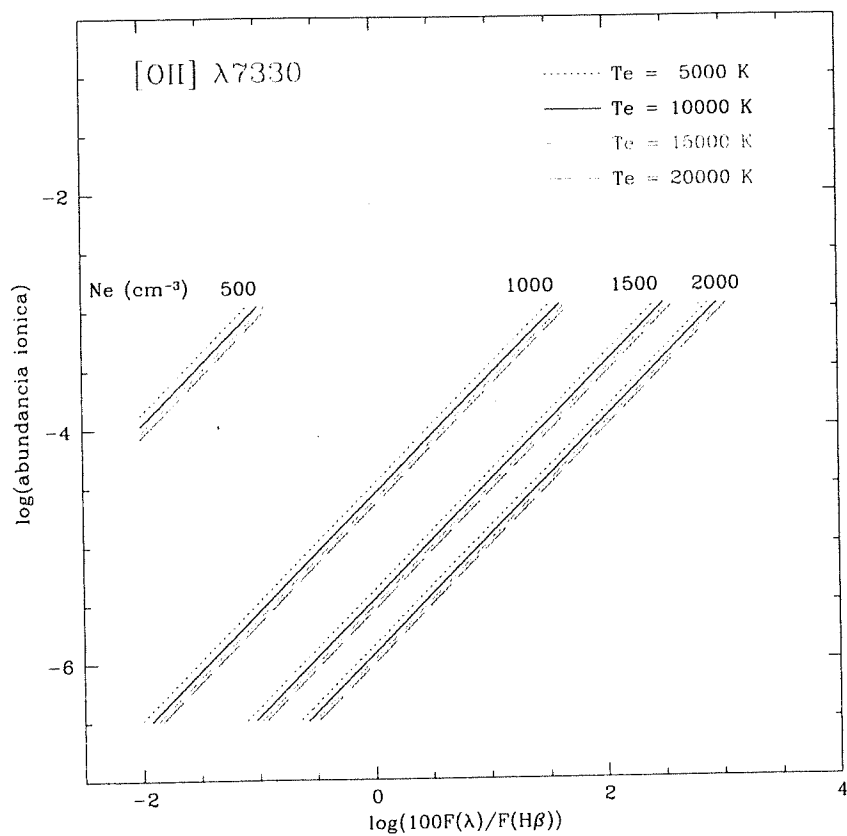


Figura D.2: Diagrama de diagnóstico de abundancia iónica para $\lambda 7330[\text{O III}]$, $\lambda 7330$ es una combinación de las líneas $\lambda 7329.07 + 7330.12$