

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería



Diseño e Implementación de Controladores con Convergencia en Tiempo Finito para Seguimiento de Trayectoria en Sistemas Neumáticos.

Tesis presentada para cubrir parcialmente
los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Por:

Jorge Alberto Chavez Cimentales

Director de Tesis

Raúl Rascón Carmona

Mexicali, Baja California, Diciembre del 2020

RESUMEN de la Tesis de Jorge Alberto Chavez Cimentales, presentada como requisito para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS EN ELÉCTRICA. Mexicali, Baja California, México. Diciembre del 2020.

**Diseño e Implementación de Controladores
con Convergencia en Tiempo Finito para Seguimiento
de Trayectoria en Sistemas Neumáticos.**

Resumen aprobado por:



Raúl Rascón Carmona

Director de Tesis

Esta tesis se enfoca en el diseño e implementación de controladores con convergencia en tiempo finito para el seguimiento de trayectoria, aplicados en sistemas neumáticos. Estos controladores podrán ser utilizados en procesos industriales debido a su robustez y aplicación práctica a pesar de no contarse con un modelo dinámico bien identificado de la planta. Una característica importante de los controladores que se muestran en el presente trabajo de tesis es que no necesitan contar con una medición de velocidad para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria, tampoco se utiliza algún observador de estados, filtro o diferenciador. Otra característica deseable en los algoritmos diseñados es la robustez ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. La metodología de control que se utiliza es control por modos deslizantes SMC. Las pruebas de estabilidad para garantizar la convergencia en tiempo finito se desarrollan utilizando herramientas de Lyapunov y el principio de homogeneidad. Cabe mencionarse que el controlador que se diseña es novedoso y ofrece ciertas ventajas sobre algunos de los controladores previamente publicados. Se hacen simulaciones numéricas y experimentos en tiempo real en una plataforma neumática.

ABSTRACT of the thesis presented by Jorge Alberto Chavez Cimentales, in order to obtain the MASTER of SCIENCE DEGREE in ELECTRIC ENGINEERING. Mexicali, Baja California, México. December, 2020.

**Design and Implementation of Controllers with Finite-Time Convergence
for Trajectory Tracking in Pneumatics Systems**

Approved by:



Raúl Rascón Carmona

Thesis Advisor

This thesis focuses on the design and implementation of controllers with finite-time convergence for trajectory tracking in Pneumatics Systems; these controllers are used in industrial processes due to robustness and practical application despite not having a well-identified dynamic model of the system. An essential characteristic of the controller to design is that it doesn't need to have a velocity measurement to achieve the trajectory tracking, not it is necessary to design and implement a state observer, filter, or differentiator. Another characteristic in the algorithm to be designed is the robustness against external perturbations and parametric uncertainties. The control methodology to be used is the Sliding Mode Control SMC. The stability proofs to guarantee the convergence in finite-time are developed using Lyapunov functions. The designed controller is novel and offers certain advantages over some of the controllers previously published in the literature. Numerical simulations and real-time experiments are carried-out using pneumatic systems.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Raúl Rascón Carmona, director de esta tesis; por creer en este proyecto, por el apoyo personal e institucional, por la guía, formación y enseñanzas.

Al Dr. David Isaías Rosas Almeida, por el apoyo académico y enseñanzas durante mis estudios de posgrado.

Al Dr. Guillermo Galaviz Yáñez, por el apoyo académico y enseñanzas durante mis estudios de posgrado.

Al Ing. Juan Manuel Trejo Garcia por su apoyo económico, laboral y personal a lo largo de estos años.

A mi madre Elizabeth y mis hermanos Fernanda, Andrea y Erick por que sin ellos nada sería posible.

LISTA DE ACRÓNIMOS

- **SMC** Control por Modos Deslizantes
- **PID** Control Proporcional Integral Derivativo
- **CEV** Control de Estructura Variable
- **SEV** Sistemas de Estructura Variable
- **SISO** Single-Input Single-Output

LISTA DE FIGURAS

■ Figura 4.2.1	Trayectoria en un sistema de estructura variable	21
■ Figura 5.1.1	Condición para la existencia del régimen deslizante en S	25
■ Figura 5.5.1	Movimiento en régimen deslizante según el método de Filippov	29
■ Figura 7.1.1.1	Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición de SMC de primer orden	38
■ Figura 7.1.1.2	Error de posición de controlador SMC de primer orden	39
■ Figura 7.1.1.3	Señal de control de SMC de primer orden	39
■ Figura 7.1.1.4	Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC de primer orden	40
■ Figura 7.2.1.1	Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición de SMC cuasi-deslizante	42
■ Figura 7.2.1.2	Error de posición de controlador SMC cuasi-deslizante	43
■ Figura 7.2.1.3	Señal de control de SMC cuasi-deslizante	43
■ Figura 7.2.1.4	Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC cuasi-deslizante	44
■ Figura 7.3.1.1	Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición de SMC asintótico	48
■ Figura 7.3.1.2	Error de posición de controlador SMC asintótico para seguimiento de trayectoria	49
■ Figura 7.3.1.3	Señal de control de SMC asintótico	49
■ Figura 7.3.1.4	Variable deslizante σ de SMC asintótico	50
■ Figura 7.3.1.5	Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC asintótico	50

■ Figura 7.3.2.1	Trayectorias del control SMC de primer orden, cuasi-deslizante y asintótico	51
■ Figura 10.1	Posición vs referencia de controlador para seguimiento de trayectoria	62
■ Figura 10.2	Perturbación desvaneciente w	63
■ Figura 10.3	Entrada de control u	63
■ Figura 10.4	Dinámica del error e_1 vs tiempo	64
■ Figura 10.5	Dinámica del error e_2 vs tiempo	64
■ Figura 10.6	Dinámica del error e_3 vs tiempo	65
■ Figura 10.7	Grafica de fase de los estados e_1 y e_2	65
■ Figura 11.1	Sistema neumático experimental FESTO®	67
■ Figura 11.2	Sensor resistivo y válvula proporcional FESTO®	68
■ Figura 11.3	Modulo de adquisición de datos DSPACE®	68

LISTA DE TABLAS

■ Tabla 1	Parámetros experimentales de señal de referencia	38
■ Tabla 2	Parámetros de ganancias del controlador SMC de primer orden	38
■ Tabla 3	Parámetros de ganancias del controlador SMC Cuasi-deslizante	42
■ Tabla 4	Parámetros de ganancias del controlador SMC Asintótico	48
■ Tabla 5	Parámetros de ganancias del controlador para seguimiento de trayectoria	62

Índice

1. INTRODUCCIÓN	10
1.1. Planteamiento del problema	12
1.2. Objetivos	14
1.2.1. Objetivos Generales	14
1.2.2. Objetivos específicos	14
1.2.3. Plan de análisis	14
2. ANTECEDENTES	15
3. INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS	19
4. INTRODUCCIÓN A MODOS DESLIZANTES	20
4.1. Propiedad de existencia del modo deslizante	20
4.2. Propiedad de alcanzabilidad del modo deslizante	20
5. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES	22
5.1. Modo deslizante de primer orden	22
5.2. Derivada de Lie	25
5.3. Condición de transversalidad	27
5.4. Regularización del movimiento deslizante	27
5.5. Método de Filippov	28
6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV	30
6.1. Estado de equilibrio	30
6.2. Función de Lyapunov	33
7. APLICACIÓN EN SISTEMAS NEUMÁTICOS DE 1 G.D.L	34
7.1. Controlador por modos deslizantes de primer orden	34
7.1.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales	37

7.1.2. Comentarios	40
7.2. Controlador Cuasi-deslizante	41
7.2.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales	42
7.2.2. Comentarios	44
7.3. Controlador por modos deslizantes asintótico	45
7.3.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales	48
7.3.2. Comentarios	51
8. CONTROL PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CON CONVERGENCIA EN TIEMPO FINITO UTILIZANDO SOLO MEDICIÓN DE LA POSICIÓN.	52
8.1. Diseño del control	54
8.2. Puntos de equilibrio	55
9. PRUEBA DE ESTABILIDAD	56
9.1. Estabilidad por Lyapunov	56
9.2. Selección de una función de Lyapunov	56
9.3. Principio de homogeneidad	60
10. SIMULACIÓN NUMÉRICA	62
11.DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO EXPERIMENTAL	66
12.CONCLUSIÓN	68

1. INTRODUCCIÓN

La teoría e implementación de sistemas de control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles. Las ventajas de usar controladores robustos en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los materiales de desecho y mayores niveles de seguridad en el proceso véase [2][4].

Uno de los controladores ampliamente utilizados en plantas dinámicas industriales es el control PID; principalmente usado en aplicaciones de regulación con actuadores eléctricos como motores de CA y CD donde estos controladores logran precisiones suficientemente altas, sin embargo en aplicaciones donde se requiere del uso de actuadores neumáticos es una tarea complicada debido a las no linealidades del actuador producidas por la compresibilidad del aire así como los retardos generados por las válvulas. Se ha demostrado que con el uso de controladores discontinuos podemos obtener un resultado robusto ante este tipo de incertidumbres paramétricas y/o perturbaciones externas véase [2][18].

Existe una diferencia importante entre usar un controlador continuo y uno discontinuo. Una entrada de control discontinua puede eliminar el efecto de perturbaciones acopladas estáticas que no necesariamente se desvanecen y que por el contrario un controlador continuo jamás podrá compensar. El desarrollo de controladores discontinuos, que aseguran convergencia en tiempo finito en el esquema de control, provee ventajas notables: el objetivo de control se alcanza en tiempo finito, hay mejor robustez y rechazo a cierta clase de perturbaciones véase [8].

El propósito principal del diseño de estos controladores robustos con convergencia en tiempo finito es reducir o contrarrestar el efecto de las incertidumbres y/o perturbaciones, mientras se trata de mantener el seguimiento de trayectorias.

En el presente trabajo de tesis se presentan métodos de control para diseñar algoritmos que aseguren convergencia en tiempo finito para seguimiento de trayectoria en sistemas neumáticos, sin contar con mediciones de velocidad para ser utilizadas como retroalimentación, utilizando la técnica de control por modos deslizantes SMC véase [13][39].

Se diseñan algoritmos de control por modos deslizantes estudiados en la literatura véase [35]. Se muestra una comparación de tres controladores por modos deslizantes de primer orden. Se realizan simulaciones numéricas en MatLab y pruebas experimentales en un sistema neumático, ver Figura (11.1). Se diseña un controlador innovador que garantiza que las trayectorias converjan a una referencia de posición en tiempo finito, y es robusto ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Finalmente se diseña su prueba de estabilidad en lazo cerrado utilizando herramientas de Lyapunov véase [3][12][27][33].

1.1. Planteamiento del problema

En diversas aplicaciones de automatización industrial se requieren sistemas con un alto desempeño; en particular, es deseable contar con actuadores de bajo peso, que puedan generar fuerzas de grandes magnitudes así como tener una respuesta lineal rápida y precisa con la menor fricción posible. Los motores eléctricos son los actuadores comúnmente utilizados en aplicaciones de automatización industrial, a pesar de que su peso es relativamente alto en relación al par que pueden generar y su costo elevado cuando se necesitan características de desempeño lineal y de alta precisión.

Los cilindros neumáticos pueden ser una mejor alternativa ya que ofrecen una alta potencia de salida con un actuador de bajo peso, además de no generar calor en su operación y su bajo costo en comparación con sistemas eléctricos. Los actuadores neumáticos son ampliamente usados en aplicaciones industriales de baja frecuencia, principalmente en aplicaciones de regulación véase [12], en donde controladores del tipo PID logran precisiones suficientemente altas, sin embargo en aplicaciones de seguimiento de trayectorias, es una tarea complicada debido a las no linealidades del actuador .

Dados los antecedentes y considerando que el sector industrial necesita algoritmos de control robusto que ofrezcan mayores y mejores prestaciones comparados con el tradicional PID véase [21] , es de gran importancia estudiar y diseñar algoritmos de control donde a pesar de no contarse con ninguna medición de la velocidad como retroalimentación en el sistema, podamos controlar trayectorias que converjan hacia una referencia en un tiempo finito y que sea estable véase [19].

Se diseña un controlador robusto y con convergencia en tiempo finito hacia la referencia, el cual es un diseño novedoso y no publicado previamente en la literatura hasta donde sabemos, dicho controlador puede ser implementado en algunos dispositivos electromecánicos y neumáticos actualmente utilizados en la industria.

El diseño de un controlador con estas características conlleva a una optimización con respecto a los algoritmos de control previamente existentes, lo que probablemente podría impactar en una reducción de costos en aplicaciones industriales al ser implementados en sistemas neumáticos.

Una motivación para el desarrollo de este proyecto de tesis, es la implementación de estos controladores en aplicaciones industriales, proponiendo nuevas alternativas de control con sistemas neumáticos que ofrezcan un buen desempeño y un menor costo en comparación con los controladores que actualmente se utilizan en el sector industrial.

Por otra parte los resultados de este trabajo dan pie a desarrollar y fortalecer una línea de investigación enfocada al diseño de controladores robustos para seguimiento de trayectoria en sistemas neumáticos. Conforme a la visión de la Universidad Autónoma de Baja California, el desarrollo de este trabajo de tesis impacta directamente en la generación de conocimiento científico, así como de aplicaciones para el sector industrial.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos Generales

Resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria para un sistemas neumático, en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. El objetivo de control es garantizar que la trayectoria converja hacia una referencia de posición en tiempo finito, sin contar con mediciones de velocidad para ser utilizadas como retroalimentación. La técnica de control que se aborda es modos deslizantes.

1.2.2. Objetivos específicos

- **Control por modos deslizantes**

Resolver el problema de control de seguimiento de trayectoria en un sistema neumático, en presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, se utiliza la técnica de control por modos deslizantes para resolver el problema.

- **Prueba de estabilidad**

Diseñar la prueba de estabilidad utilizando herramientas de Lyapunov.

1.2.3. Plan de análisis

El análisis del sistema dinámico en lazo cerrado se hará utilizando herramientas de Lyapunov, con las cuales se puede demostrar de manera formal que las trayectorias en lazo cerrado del sistema convergen en tiempo finito [16]. Por otro lado se llevan a cabo simulaciones numéricas en Matlab. Finalmente se hacen pruebas experimentales en un sistema neumático, utilizando los algoritmos de control por modos deslizantes con los que se ha demostrado estabilidad en lazo cerrado[3][27].

2. ANTECEDENTES

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado véase [28]. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento véase [21].

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación usando un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones diferenciales véase [10].

La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos son lineales. Los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles véase [32]. Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos véase [20][36][45], se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de aviones véase [26][34][43].

Muchos sistemas físicos naturalmente requieren el uso de términos discontinuos en sus modelos dinámicos. Este es, por ejemplo, el caso de sistemas mecánicos con fricción véase [38]. Este hecho fue reconocido y aprovechado ventajosamente desde el comienzo mismo del siglo XX para la regulación de una gran variedad de sistemas dinámicos. La clave de este nuevo enfoque era la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo utilizada por primera vez por grupos académicos de la antigua Unión Soviética véase [39].

Sobre esta base, las estrategias de control discontinuo aparecieron a mediados del siglo XX bajo el nombre de teoría de sistemas de estructura variable véase [1][17]. Dentro de este punto de vista, las entradas de control toman valores de un conjunto discreto, como los límites extremos de un relevador. Basados en estos principios, una de las técnicas más populares fue creada y desarrollada desde los 1950's y popularizado por el artículo véase [37]. La característica esencial de esta técnica es la elección de una superficie deslizante en función del espacio de estados acorde con las especificaciones de la dinámica deseada del sistema en lazo cerrado. La lógica de conmutación, y así la ley de control, son diseñadas tal que las trayectorias de estados alcancen la superficie y permanezcan en ella véase [11].

Los sistemas físicos descritos dinámicamente por ecuaciones diferenciales que dependen en forma discontinua del estado actual del sistema, es decir ecuaciones con lado derecho discontinuo, se los denomina sistemas de estructura variable SEV. Tanto en los SEV como en algunos sistemas continuos, el control tiene también la posibilidad de cambiar de estructura. El control por estructura variable CEV consiste en diseñar los parámetros de cada una de tales estructuras y además, su lógica de conmutación, para lograr determinado comportamiento de un SEV. Generalmente, las leyes de CEV son funciones discontinuas de los estados del sistema véase [19][22][41].

Los sistemas de estructura variable son un tipo de sistemas no lineales en los que la dinámica del sistema en lazo cerrado adopta dos o más estructuras diferentes según el valor de la entrada de control. El control por modos deslizantes SMC es un tipo especial de control de estructura variable, en el cual la dinámica del sistema es atraída hacia una superficie en el espacio de estado conocida como superficie de deslizamiento. Cuando se satisfacen ciertas condiciones, la dinámica del sistema en lazo cerrado “desliza” sobre esta superficie permaneciendo insensible a variaciones en los parámetros de la planta y a las perturbaciones externas. Esta última propiedad es la característica fundamental para su aplicación en los sistemas de control no lineal.

El control por modos deslizantes SMC es reconocido por ser una herramienta eficiente para diseñar controladores robustos para plantas dinámicas no lineales de alto orden las cuales operan bajo condiciones de incertidumbre. La investigación en esta área fue iniciada en la antigua Unión Soviética hace alrededor de 60 años y ha recibido mucha más atención de la comunidad de control internacional dentro de las dos últimas décadas véase [39]. La mayor ventaja de los modos deslizantes es la baja sensibilidad respecto a variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones, las cuales eliminan la necesidad de un modelo exacto véase [5][25].

El control por modos deslizantes supone que las acciones de control son funciones de estados discontinuos los cuales pueden ser fácilmente implementados por convertidores de energía convencionales con ‘encendido-apagado’ como el único modo de operación véase [42]. Por ello la investigación ha ido creciendo ya que ha demostrado ser aplicable para un amplio rango de problemas como en robótica, control de procesos, vehículos y control de movimiento, entre otros véase [5][9].

La idea básica del control por modos deslizantes SMC consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una variedad o superficie de deslizamiento y forzarlas a evolucionar sobre ella. Así, el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De este modo, plasmando los objetivos de control en tales ecuaciones mediante un diseño adecuado de las mismas, es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables véase [44].

Un SMC requiere esencialmente que solo existan perturbaciones acopladas es decir que la entrada de control y la perturbación entren al sistema a través de los mismos canales. El diseño por modos deslizantes consta de dos pasos: el diseño de la superficie deslizante, donde se incluyen los criterios de desempeño que se desean o se requieren para el sistema, y el diseño de la entrada control, la cual asegura que cualquier trayectoria de sistema sea forzada a converger en tiempo finito y se mantenga ahí, una vez iniciado el modo deslizante véase [20][22][40].

Se explora la aplicación de la teoría de control por modos deslizantes SMC véase [41] para garantizar robustez ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas. Se diseña una función de Lyapunov véase [6][7][24] para probar estabilidad en lazo cerrado y convergencia en tiempo finito véase [19] y finalmente los algoritmos estudiados donde haya sido demostrado su factibilidad de implementación de manera teórica véase [35] , se implementan de manera experimental en un sistema neumático, ver figura (11.1.2).

3. INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se le llama sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones, y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. Un sistema dinámico da una descripción funcional de la solución de un problema físico o del modelo matemático que describe el problema físico.

El estado de un sistema dinámico se refiere al conjunto más pequeño de variables de estado de modo que el conocimiento de estas variables en conjunto con el conocimiento de la entrada para un tiempo $t \geq t_0$ determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Matemáticamente hablando, un sistema dinámico es una función $\phi(t, x)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, el cual describe como los puntos $x \in E$ se mueven con respecto al tiempo.

Un sistema dinámico en E es una función $\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ de clase C^1 donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ entonces ϕ_t satisface $\phi_0(x) = x$, para toda $x \in E$, donde ϕ_t es definido como el flujo del campo vectorial $f(x)$.

Algunos sistemas dinámicos contienen términos discontinuos, sea por naturaleza propia o por diseño, que al conmutar a frecuencias teóricamente infinitas llevan las trayectorias del estado a una superficie de deslizamiento, a esta dinámica del sistema dentro de la superficie se le denomina modo deslizante.

4. INTRODUCCIÓN A MODOS DESLIZANTES

Existe un tipo de control no lineal denominado *control de estructura variable* CEV, en el que la estructura del controlador varía de tal forma que en un punto representativo del estado de sistema sigue una trayectoria definida en el espacio de estados.

Los sistemas de control por modos deslizantes conocidos en la literatura como SMC por sus siglas en inglés (*Sliding Mode Control*), son un tipo especial de sistemas de estructura variable, en los cuales el estado del sistema es atraído por un “hiperplano” conocido como *superficie de deslizamiento*. Cuando se satisfacen ciertas condiciones el estado del sistema “desliza” sobre esta superficie, permaneciendo insensible a variaciones en los parámetros de la planta y las perturbaciones externas. Estas condiciones son:

4.1. Propiedad de existencia del modo deslizante

El modo deslizante existirá si y solo si cualquier trayectoria en un punto representativo del sistema intercepta a la superficie de conmutación (definida como $\sigma(x) = 0$), y luego permanece sobre ella. Esto será posible si se comprueba la estabilidad local del sistema, en la vecindad de la superficie de conmutación. Esta propiedad puede verificarse mediante una función de Lyapunov.

4.2. Propiedad de alcanzabilidad del modo deslizante

Si un sistema con condiciones iniciales arbitrarias en un dominio de atracción, posee trayectorias que convergen hacia un modo deslizante, para $t > 0$, se dice que este modo deslizante es alcanzable. Se puede elegir una función de Lyapunov del tipo $V(x) = \sigma^T \sigma$ y la condición de alcance estará dada por $\dot{V}(x) < 0$ (cuando $\sigma \neq 0$).

Una de las maneras más efectivas de realizar un CEV consiste en plasmar el objetivo de control como una función de los estados. Luego, mediante conmutaciones a frecuencia muy elevada, idealmente infinita, se fuerza a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la superficie determinada por la restricción planteada, en el espacio de estados. A este modo de funcionamiento se lo denomina operación por modos deslizantes. Cuando la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la superficie de deslizamiento. A este fenómeno se lo denomina efecto de chattering y constituye el principal defecto de los modos deslizantes, ilustrado en la Figura (4.2.1).

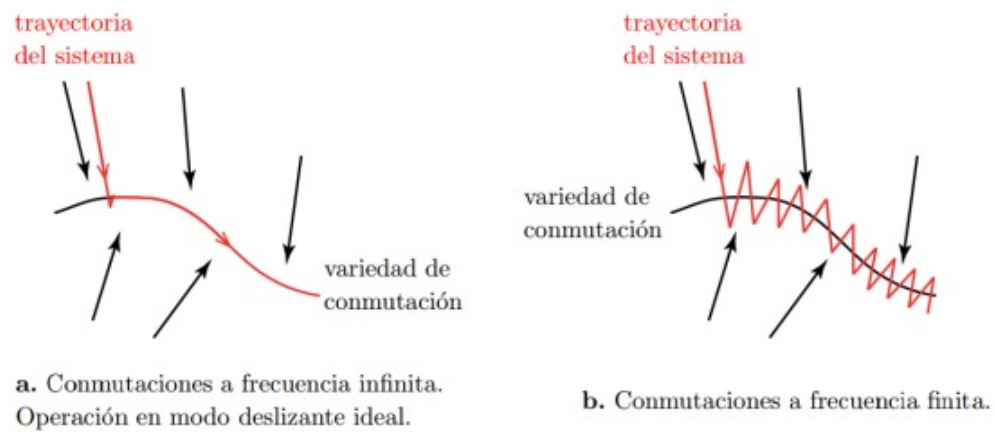


Figura 4.2.1: Trayectoria en un sistema de estructura variable

5. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

De forma general, el control por modos deslizantes consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una superficie llamada superficie deslizante y forzarle a mantenerse sobre ella. Así, el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De tal manera que diseñando tales ecuaciones en base a los objetivos de control es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables.

5.1. Modo deslizante de primer orden

Considérese un sistema no lineal SISO por sus siglas en inglés (**Single input - Single output**), tal que la dinámica de los estados pueda describirse a través del conjunto de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, en la forma más general:

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{5.1.1}$$

donde $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de control, posiblemente discontinua, por lo que el campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tendrá discontinuidades en algún conjunto del espacio $\mathbb{X}$.

Se define una función suave de los estados compatible con algún objetivo de control deseado, $\sigma : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, a partir de la cual se determina el conjunto:

$$\sigma = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\} \tag{5.1.2}$$

que representa la superficie de conmutación en el espacio de estados $n - dimensional$.

La misma es de dimensión $n - 1$ en el caso **SISO** .

La ley de control de estructura variable CEV más sencilla que puede plantearse, con la idea de lograr que el sistema opere sobre la superficie deslizante, consiste en alterar los valores de $u(x)$ entre dos valores posibles, según el signo de $\sigma(x)$:

$$\begin{cases} u^+(x), & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{si } \sigma(x) < 0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Donde los dos niveles de u son funciones suaves de los estados que no se cruzan (para ningún $x \in \mathbb{X}$). En estas condiciones, el sistema controlado podrá expresarse a través de dos subsistemas continuos, dependiendo del signo de $\sigma(x)$

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+), & F^+(x) \text{ si } \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-), & F^-(x) \text{ si } \sigma(x) < 0. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Se dice que existe un régimen deslizante sobre la superficie σ , cuando la aplicación de la ley de control (5.1.3) resulta en que las trayectorias alcanzan tal superficie y se mantienen localmente en su entorno. Para que esto suceda, los campos vectoriales controlados de los dos subsistemas continuos, deben apuntar localmente a σ , como se muestra en la Figura (5.1.1). Para que esto ocurra, es necesario que en el sistema controlado se satisfagan las siguientes desigualdades en las proximidades de σ :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(x) < 0, & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \dot{\sigma}(x) > 0, & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

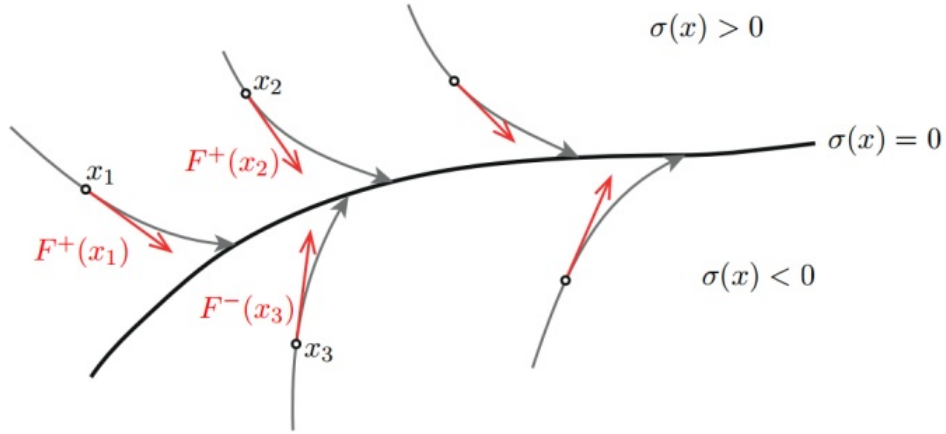


Figura 5.1.1: Condición para la existencia del régimen deslizante en σ

Estas condiciones son las necesarias para la convergencia a la superficie deslizante y la permanencia en una vecindad de la misma. Las desigualdades anteriores pueden representarse también como:

$$\dot{\sigma}(x)\sigma(x) < 0 \quad (5.1.6)$$

que debe cumplirse al menos en las vecindades de σ .

5.2. Derivada de Lie

En el estudio de sistemas dinámicos es normal el uso de la derivada direccional o derivada de Lie, la cual representa una notación compacta para las derivadas de funciones escalares en dirección de uno o más campos vectoriales.

Dados un campo escalar $h(x)$ y un campo vectorial $f(x)$ en el espacio de estados con $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La derivada de Lie se define como la función escalar $L_f h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$L_f h(x) = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] f(x) \quad (5.2.1)$$

que indica la derivada de $h(x)$ en la dirección de $f(x)$. Se puede definir el gradiente de $h(x)$, tal que :

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad (5.2.3)$$

es el vector que indica para cada punto x , la dirección en la cual $h(x)$ varía más rápidamente y con qué ritmo cambia esa dirección.

Notando que $L_f h(x)$ es una función escalar, esta derivada direccional puede aplicarse de manera recursiva, en dirección del mismo campo vectorial tal que:

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f^{k-1} h(x)) f(x) \quad (5.2.4)$$

y también está el caso de aplicarse de manera recursiva en diferentes campos vectoriales, por ejemplo dos campos $f(x)$ y $g(x)$ distintos:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f h(x)) g(x) \quad (5.2.5)$$

La derivada de la función de conmutación puede expresarse empleando la derivada de Lie tal que:

$$\dot{\sigma}(x) = L_F \sigma(x) = \frac{dh}{dx} f(x) \quad (5.2.6)$$

a partir de esto, la condición de existencia de régimen deslizante de (5.1.1) queda expresada de la manera

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_F + \dot{\sigma}(x) < 0, & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ L_F - \dot{\sigma}(x) > 0, & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{array} \right. \quad (5.2.7)$$

Esto implica que la variación de la función de restricción $\sigma(x)$ en la dirección del campo controlado siempre se opone al signo de $\sigma(x)$ con lo cual se garantiza el cruce de la superficie σ desde ambos lados.

5.3. Condición de transversalidad

Dado el sistema (5.1.1) podemos describir la dinámica de los estados de la manera

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5.3.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se denomina vector de campo de derivada y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vector de campo de control.

Con lo que desarrollando podemos definir la condición de transversalidad de la siguiente forma:

$$L_F \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad (5.3.2)$$

la cual es necesaria para la existencia de un régimen deslizante. La misma permite influenciar $\dot{\sigma}$ y en particular el signo de la misma, a través de la acción de control u .

Geoméricamente, esta condición demuestra que el campo vectorial $g(x)$ no puede ser tangencial a la superficie de deslizamiento; si esto ocurriera no podría forzarse a las trayectorias a cruzar la superficie.

En términos de sistemas de control, pedir que se cumpla la condición de transversalidad es equivalente a pedir que la función de conmutación $\sigma(x)$ sea de grado relativo 1 con respecto a la entrada de control u .

5.4. Regularización del movimiento deslizante

El comportamiento del sistema controlado por modos deslizantes es descrito mediante ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. Por esta razón se dice que no es Lipschitz, es decir, no cumple con las condiciones de existencia y unicidad en el sentido usual. En consecuencia, el problema de describir el movimiento del sistema durante el régimen deslizante no es sencillo.

Durante décadas en la literatura, se han realizado diversas propuestas, en las que se involucra hacer alguna concesión, llevando al sistema a alguna forma que permita encontrar una solución cercana a la del sistema original y que permita el uso de técnicas de control clásicas, a este mecanismo se le suele llamar regularización. Entre las más importantes se encuentra el método de Filippov.

5.5. Método de Filippov

Este concepto fue propuesto por Filippov en 1964 para las ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, en el cual se construye una solución que es el promedio de las soluciones obtenidas de acercarse al punto de discontinuidad desde diferentes direcciones, es decir; una solución se define en el sentido de Filippov si:

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.5.1}$$

su lado derecho $f(x)$, presenta discontinuidades en conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$.

La solución de (5.5.1) fuera del centro donde se presenta las discontinuidades es de la forma usual. En el conjunto donde hay discontinuidades, la expresión (5.5.1) se transforma en una inclusión diferencial.

$$\dot{x} \in f(x) \Rightarrow \text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{para } > 0 \\ \sigma & \text{para } = 0 \\ -1, & \text{para } < 0 \end{cases} \tag{5.5.2}$$

donde $\sigma \in [1, -1]$.

El campo de velocidad de los estados en régimen deslizante estándar puede expresarse según el metodo de Filippov como:

$$\dot{x} = F^{MD} = \mu F^+ + (1 - \mu) F^- \tag{5.5.3}$$

donde el valor del parámetro μ se obtiene por despeje de la condición que define que durante el régimen deslizante las trayectorias permanecen sobre $\sigma(x) = 0$.

Este valor de μ es el necesario para que el campo de velocidad de los estados para cualquier punto de sobre la superficie deslizante, pertenezca al plano tangente a la misma en ese punto, como se ilustra en la Figura (5.5.1).

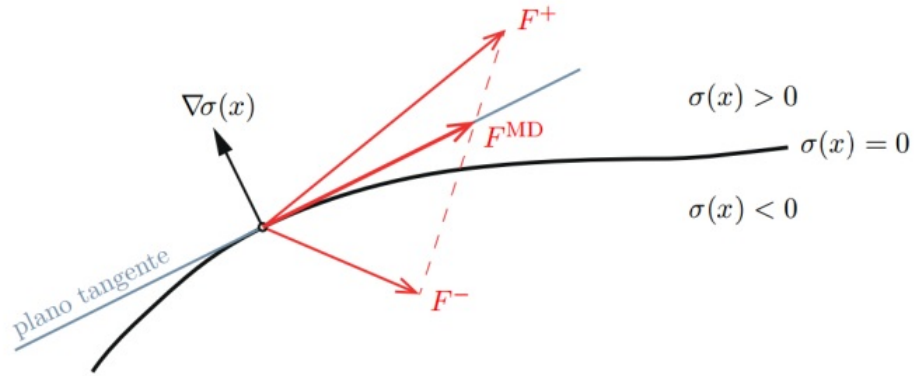


Figura 5.5.1: Movimiento en régimen deslizante según el método de Filippov

6. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

6.1. Estado de equilibrio

Definición 1. (Puntos de equilibrio). Un punto x^* en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (5.5.1) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es x^* , el estado permanece en x^* para todo tiempo futuro.

Un buen lugar para empezar a analizar sistemas no-lineales es determinar los estados de equilibrio de (5.5.1) y describir el comportamiento de (5.5.1) cerca de sus estados de equilibrio. Así mismo el comportamiento de un sistema no lineal como (5.5.1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 es cualitativamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \tag{6.1.1}$$

con la matriz $A = Df(x_0)$, cerca del origen. La función lineal $Ax = Df(x_0)x$ es llamada la parte lineal de f en x_0 .

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamado un punto de equilibrio o punto crítico de (5.5.1) si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 es llamado un punto de equilibrio hiperbólico de (5.5.1) si ninguno de los eigenvalores de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema lineal (6.1.1) con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamada la linealización de (5.5.1) en x_0 .

La estabilidad de puntos de equilibrio no hiperbólico es típicamente más difícil de determinar. Un método debido a Lyapunov, el cual es muy útil para decidir la estabilidad de puntos de equilibrio no hiperbólicos se presenta enseguida:

El método de Lyapunov puede ser utilizado para determinar la estabilidad de puntos fijos cuando la información de linealización es inconclusa. La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, el cual nos dice que un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inician en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable.

Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio, no solo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima al infinito. Los teoremas de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Vamos a definir estabilidad del origen como una propiedad uniforme con respecto al instante inicial.

El estado de equilibrio $x = 0$ de (5.5.1) es llamado un estado de equilibrio:

- Estable si, para todo $t_0 \geq 0$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta(t_0, \varepsilon)$ tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x_t\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

(6.1.2)

- Uniformemente estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ independientemente de t_0 tal que (6.1.2) se satisface.

- Inestable, si no es estable.

- Asintóticamente estable, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $\|x(t_0)\| < c$.

- Uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y existe $c > 0$ independientemente de t_0 tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, uniformemente en t_0 ; es decir para cada $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon)$ tal que

$$\|x_t\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 + T(\varepsilon) \quad \forall \|x_{t_0}\| < c$$

(6.1.3)

- Globalmente uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y para cada par de numeros positivos ε y c , existe $T(\varepsilon, c)$ tal que

$$\|x_t\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 + T(\varepsilon, c) \quad \forall \|x_{t_0}\| < c$$

(6.1.4)

6.2. Función de Lyapunov

Para contestar la cuestión de si un punto de equilibrio no hiperbólico es estable, asintóticamente estable o inestable, el método de Lyapunov nos da respuesta a esta cuestión.

Si $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ y ϕ_t es el flujo de la ecuación diferencial (5.5.1), entonces para $x \in E$ la derivada de la función $V(x)$ a lo largo de la solución ϕ_t

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))|_{t=0} = DV(x)f(x). \quad (6.2.1)$$

Esta última igualdad sigue la regla de la cadena. Si $V(x)$ es negativa en E entonces $V(x)$ decrece a lo largo de la solución $\phi_t(x_0)$ para $x_0 \in E$ en $t = 0$. Además en $\mathbb{R}^2$, si $V(x) \leq 0$ con la igualdad solo en $x = 0$, entonces para números pequeños positivos C , la familia de curvas $V(x) = C$ constituye una familia de curvas cerradas, encerrando el origen y las trayectorias de (5.5.1) a través de estas curvas desde su exterior hasta su interior conforme se incrementa el tiempo t . Es decir es asintóticamente estable. Una función: $V \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la hipótesis del siguiente teorema que es llamado función de Lyapunov.

Teorema 1. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo x_0 . Suponga que $f \in C^1(E)$ y que $f(x_0) = 0$. Suponga además que existe una función valuada real $V \in C^1(E)$ que satisface $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$, entonces:

- A) si $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in E$, x_0 es estable.
- B) si $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \in E \sim \{x_0\}$, x_0 es asintóticamente estable.
- C) si $\dot{V}(x) > 0$ para todo $x \in E \sim \{x_0\}$, x_0 es inestable.

7. APLICACIÓN EN SISTEMAS NEUMÁTICOS DE 1 G.D.L

Se presenta el diseño e implementación de tres controladores por modos deslizantes, basados en la teoría presentada en [35], se utiliza como plataforma experimental un sistema neumático de un grado de libertad, ver Figura (11.1). El objetivo es el seguimiento de trayectoria de una posición deseada, para el diseño del modelo dinámico no se consideran los parámetros de la planta, las no linealidades debido a las fuerzas de fricción ni otros términos que definen la dinámica de la planta.

7.1. Controlador por modos deslizantes de primer orden

Considérese una descripción de las variables de estado para el sistema neumático, ver Figura (11.1) tal que su dinámica pueda definirse por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo en el sentido de Filippov:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son la posición y velocidad del sistema respectivamente y $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control.

Definimos las variables de error e_1 y e_2 , tal que:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - xd \\ e_2 &= x_2 - \dot{x}d \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

y su dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= u - \ddot{x}d\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

donde $\ddot{x}d$ es la señal de referencia y (7.1.2) los errores de seguimiento. El primer paso para diseñar el control por modos deslizantes es seleccionar la función de conmutación. Se propone el diseño de la superficie deslizante en términos de los errores, de esta manera la selección típica de σ está dada por

$$\sigma = e_1 + e_2\tag{7.1.4}$$

y su derivada

$$\dot{\sigma} = e_2 + u - \ddot{x}d.\tag{7.1.5}$$

Existen dos fases en el diseño de control por modos deslizantes. La primera etapa se llama fase de alcance, es donde las trayectorias (x_1, x_2) son atraídas hacia la superficie deslizante $\sigma = 0$. La segunda etapa se conoce como modo deslizante, donde el vector de error se "desliza" por la superficie hasta alcanzar el punto de equilibrio $(0, 0)$.

Basándonos en la teoría presentada en el capítulo 5. La ley de control debe ser diseñada de tal forma que la condición (5.1.6), también llamada condición de alcanzabilidad se cumpla para todo tiempo . Estas condiciones son necesarias para la convergencia hacia la superficie deslizante y permanencia en una vecindad de la misma. De esta forma las trayectorias del sistema (7.1.1) convergen hacia la superficie $\sigma = 0$ en tiempo finito t_r y permanecen en ella, mientras la condición (7.1.6) permanezca válida.

$$\sigma \dot{\sigma} = -\rho |\sigma| - \lambda \sigma^2 < 0 \tag{7.1.6}$$

Una vez que ha sido seleccionada la superficie deslizante, el siguiente paso es diseñar la ley de control u la cual permitirá que las trayectorias alcancen la superficie deslizante en tiempo finito.

Dada la ecuación (7.1.5) y la condición de alcanzabilidad (7.1.6). La ley de control u queda expresado de la siguiente forma:

$$u = \ddot{x}d - e_2 - \rho \text{sign}(\sigma) - \lambda \sigma \quad (7.1.7)$$

donde ρ y λ son constantes positivas; las cuales serán sintonizadas para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante y la expresión $\text{sign}(\sigma)$ denota la función signo, la cual es definida en (5.5.2) de esta forma las trayectorias alcanzan la superficie deslizante en tiempo finito y el error converge a cero mientras que las trayectorias no escapen de ésta.

7.1.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales

Se pone a prueba el desempeño del controlador por modos deslizantes de primer orden implementado en un sistema neumático *FESTO*[®], ver Figura (11.1.2) a través de experimentos utilizando la tarjeta de adquisición de datos *DSPACE*[®] mostrado en la Figura (11.1.3); la plataforma está conectada a una computadora y se utiliza como interfaz *SIMULINK*[®], la tasa de muestreo se fijó en $1 \times 10^{-3} \text{s}$.

La señal de referencia deseada se establece de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_d &= A \sin(wt) \\ \dot{x}_d &= w A \cos(wt) \\ \ddot{x}_d &= -w^2 A \sin(wt) \end{aligned} \quad (7.1.1.1)$$

donde A es la amplitud y w la frecuencia, considerando los valores asignados para el experimento que se ilustran en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros experimentales de señal de referencia

Notación	Descripción	Valor	Unidades
A	Amplitud	.100	m
w	Frecuencia	0.040	rad/seg

Los resultados experimentales se muestran a continuación, considerando una señal de referencia con los valores propuestos en la Tabla 1. El parámetro de ganancia ρ de la función signo y el parámetro de ganancia λ del controlador se sintoniza de manera que las trayectorias del sistema converjan a la referencia de posición, buscando obtener un error lo más cercano a cero.

Tabla 2: Parámetros de ganancias del controlador SMC de primer orden

Notación	Valor
σ	.525
λ	.003

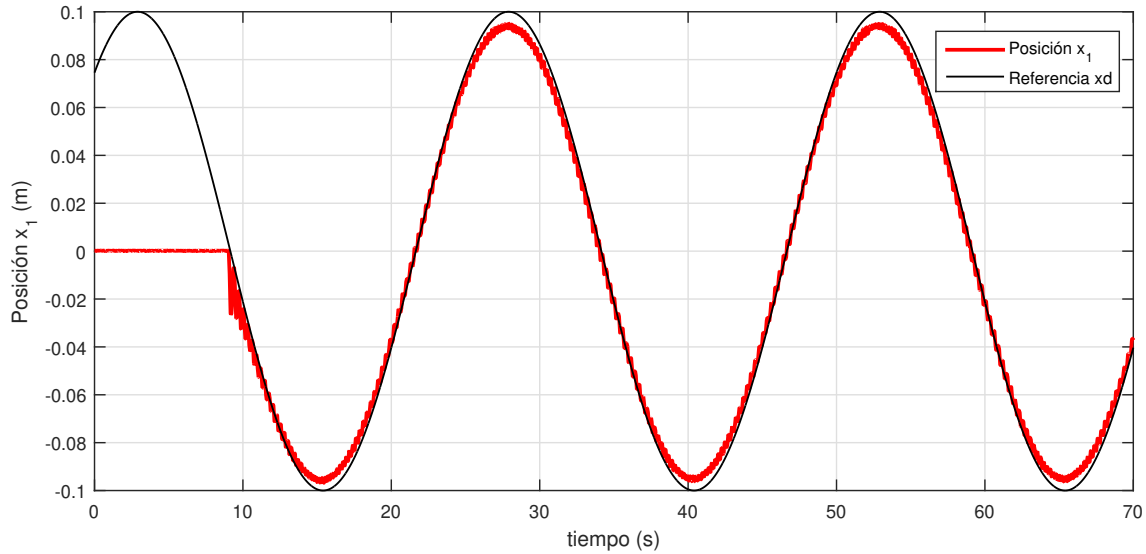


Figura 7.1.1.1: Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición de SMC de primer orden

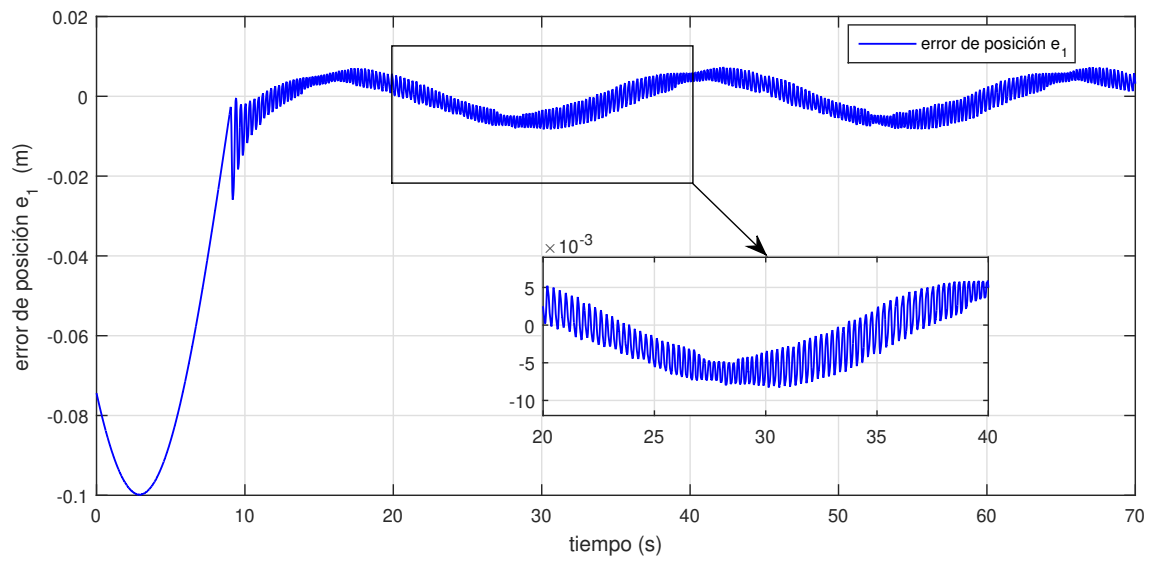


Figura 7.1.1.2: Error de posición del controlador SMC de primer orden

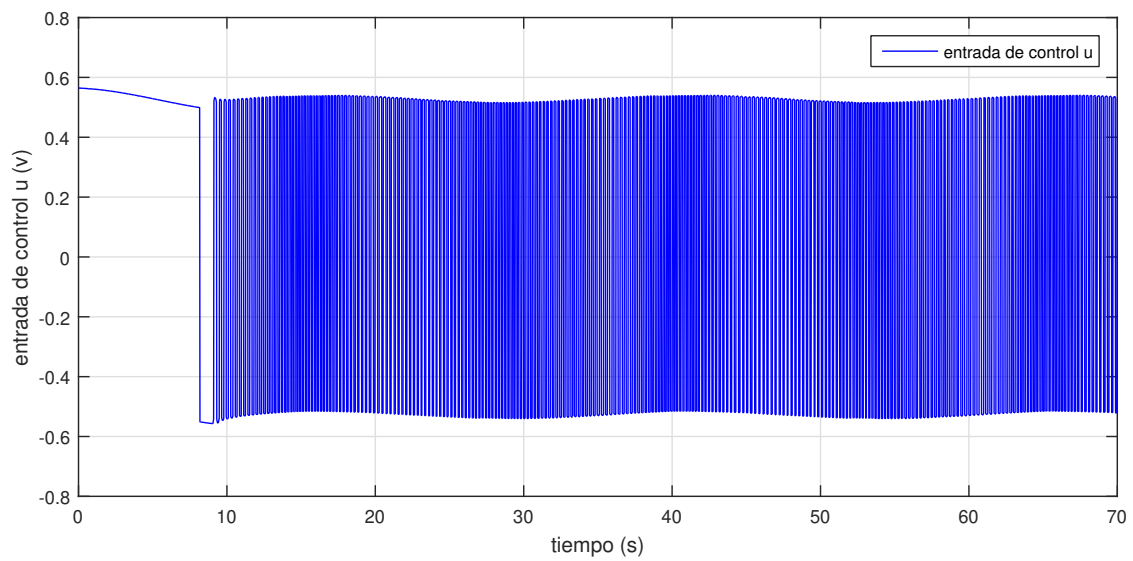


Figura 7.1.1.3: Señal de control de SMC de primer orden

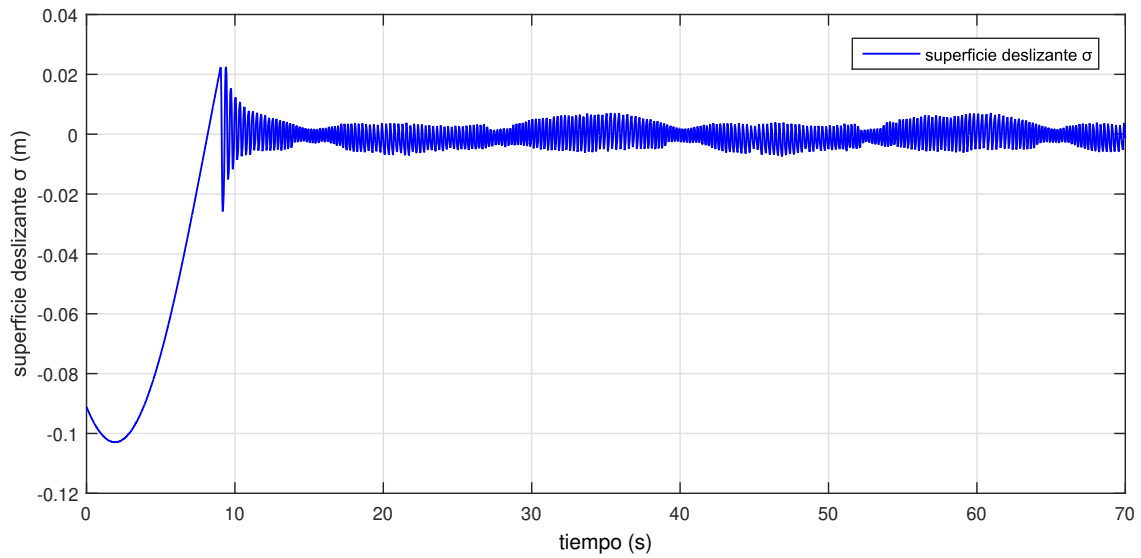


Figura 7.1.1.4: Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC de primer orden

7.1.2. Comentarios

Como podemos notar en la Figura (7.1.1.1), la trayectoria de posición tarda en alcanzar la referencia deseada, sin embargo, al alcanzarla se mantiene en la misma ver Figura (7.1.1.4), el error de posición se presenta en la Figura (7.1.1.2). Aunque sabemos que no se añadió ruido a las mediciones de posición, la magnitud de la señal de error de posición permanece acotada en $\pm 7mm$. Vale la pena notar que la señal de control presenta un contenido de altas frecuencias ver Figura (7.1.1.3) lo cual será un tema importante en los siguientes desarrollos.

7.2. Controlador Cuasi-deslizante

Se aborda el concepto modo cuasi-deslizante presentado en la literatura [35] a partir de este enfoque, se propone una nueva ley de control para el sistema (7.1.1) con una función suave que nos permite disminuir el efecto chattering.

Una solución para hacer que la función de control sea suave es aproximar la función discontinua $sign(\sigma)$ por alguna función continua; por ejemplo una función sigmoide la cual se describe como:

$$sign(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} \quad (7.2.1)$$

donde ϵ es un pequeño escalar positivo y se puede observar de manera puntual como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} = sign(\sigma) \quad (7.2.2)$$

para $\sigma \neq 0$ el valor de ϵ debe seleccionarse para compensar el requisito de mantener un rendimiento ideal con el fin de asegurar una acción de control suave.

Aplicando estos términos para el sistema (7.1.1) sustituimos la función discontinua $sign(\sigma)$ por la función sigmoide en (7.1.6), obteniendo:

$$\sigma \dot{\sigma} = -\rho \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} - \lambda \sigma^2 < 0 \quad (7.2.3)$$

entonces una nueva ley de control u con una función suave a partir de (7.1.7) , se define de la siguiente forma

$$u = \ddot{x}d - e_2 - \rho \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} - \lambda \sigma \quad (7.2.4)$$

donde ϵ es una constante positiva que ayuda a atenuar el efecto chattering.

7.2.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales

Los resultados experimentales se muestran a continuación, considerando una señal de referencia con los valores propuestos en la Tabla 1. El parámetro de ganancia ρ de la función sigmoide, la ganancia λ del controlador y el valor de la constante ϵ se presentan en la Tabla 3, el valor de ϵ se sintoniza con el fin de asegurar una ley de control suave.

Tabla 3: Parámetros de ganancias del controlador SMC cuasi-deslizante

Notación	Valor
σ	.850
λ	10
ϵ	.005

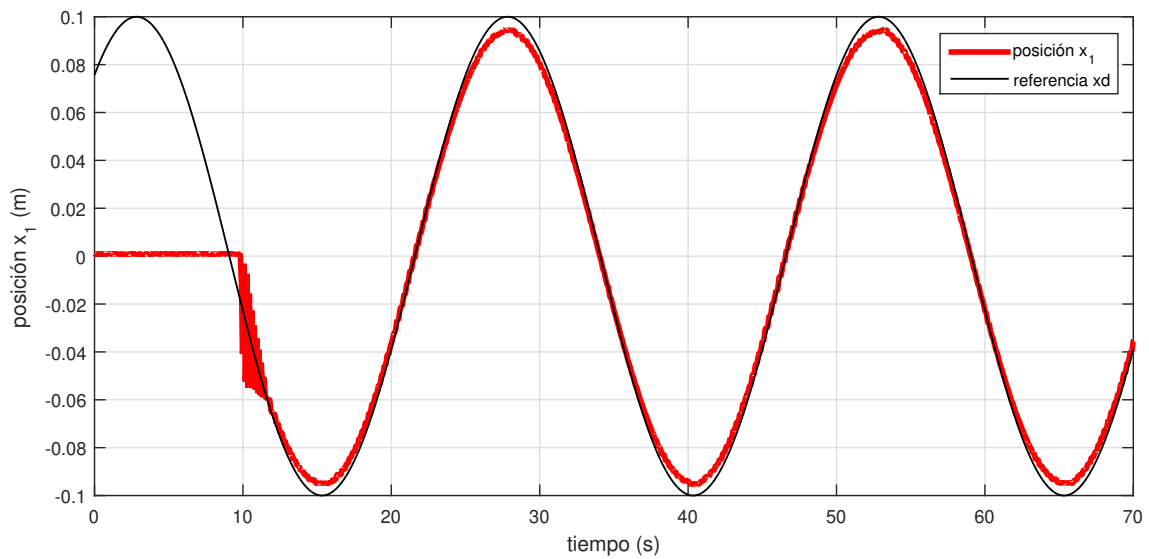


Figura 7.2.1.1: Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición del controlador SMC cuasi-deslizante

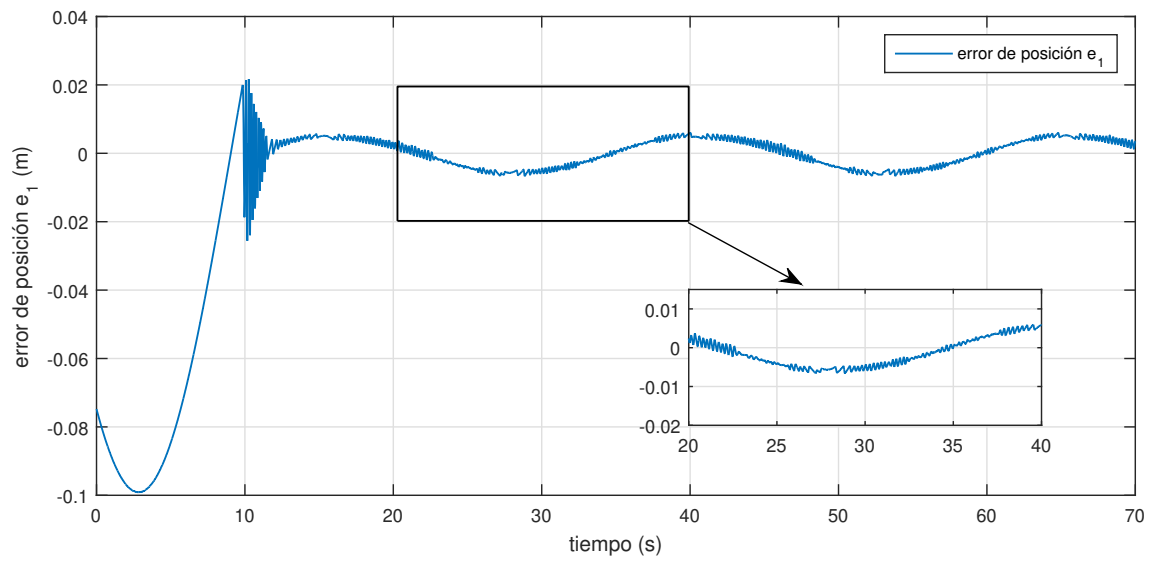


Figura 7.2.1.2: Error de posición del controlador SMC cuasi-deslizante

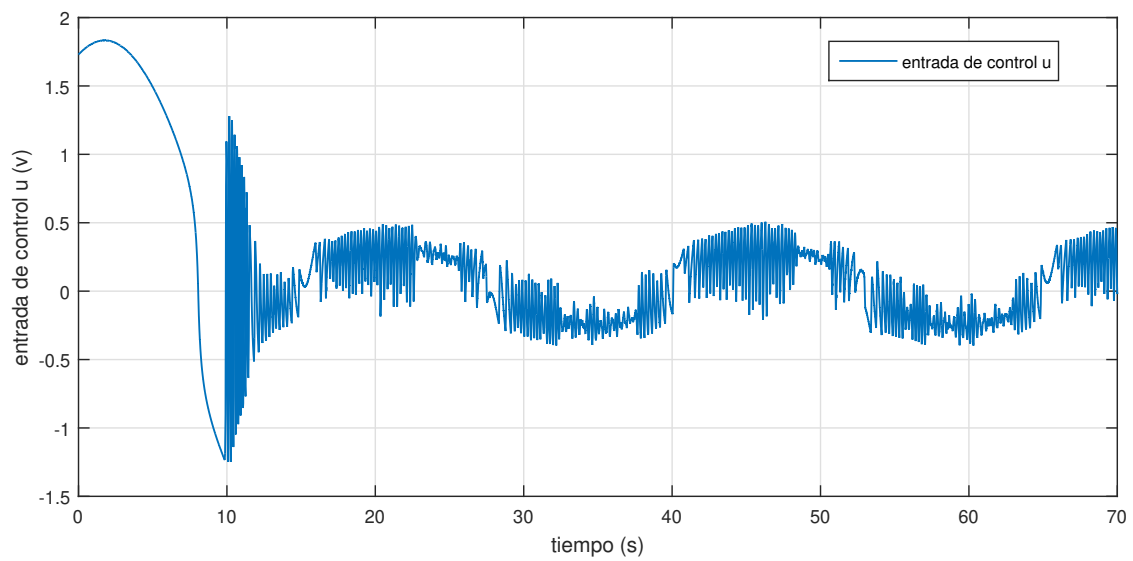


Figura 7.2.1.3: Señal de control de SMC cuasi-deslizante

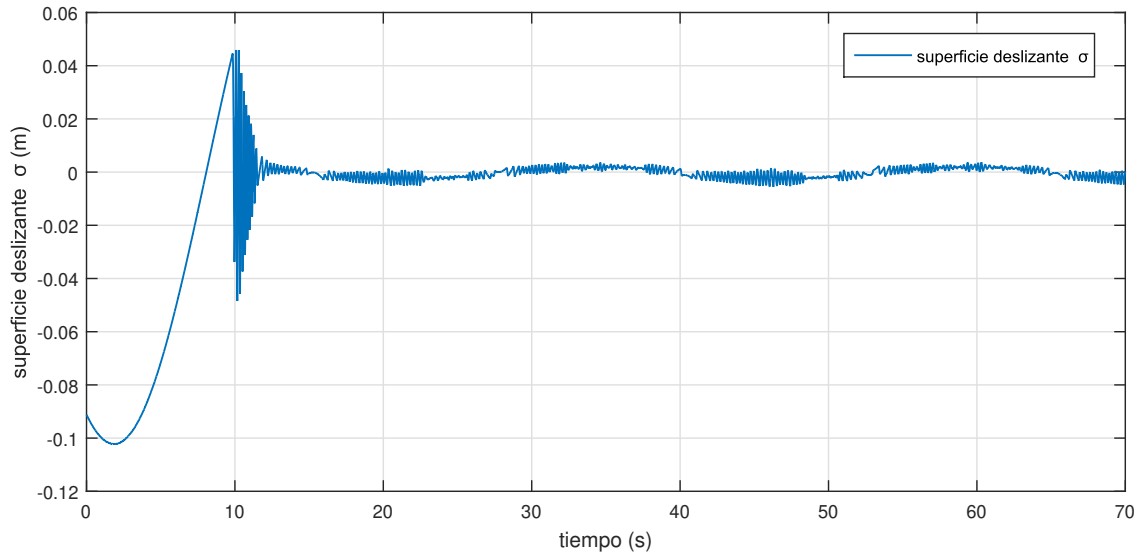


Figura 7.2.1.4: Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC cuasi-deslizante

7.2.2. Comentarios

Como podemos notar en la Figura (7.2.1.1), la trayectoria de posición tarda en alcanzar la referencia deseada, sin embargo, al alcanzarla se mantiene en la misma ver Figura (7.2.1.4), el error de posición se presenta en la Figura (7.2.1.2), la magnitud de la señal de error de posición permanece acotada en $\pm 6mm$. Aunque no hay mucha diferencia en comparación con el SMC de primer orden, podemos notar que la señal de control presenta una disminución considerable del contenido de altas frecuencias ver Figura (7.2.1.3) debido a la aplicación de la función sigmoide por medio de la sintonización del parámetro ϵ .

7.3. Controlador por modos deslizantes asintótico

Según lo presentado en [35]. Se estudia otro enfoque de control por modos deslizantes, el cual propone diseñar una ley de control en términos de la derivada de u en vez de la acción misma, de este modo la entrada de control del sistema es la integral de la función de conmutación de alta frecuencia. A este enfoque se le nombra atenuación de chattering.

Para proceder, tomamos el sistema (7.1.1), y reescribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{u} &= \tau \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

donde τ es la nueva ley de control y se diseña a partir de la derivada de u .

Considerando la (7.1.2) obtenemos la dinámica de los errores tal que

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \tau - \ddot{x}d \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

La selección de la función de conmutación se propone a partir de la ecuación (7.1.4) de esta forma

$$\sigma = \beta_1 e_1 + e_2 \tag{7.3.3}$$

donde β_1 es una constante positiva.

su primera derivada esta dada por

$$\dot{\sigma} = \beta_1 e_2 + \tau - \ddot{x}d \quad (7.3.4)$$

su segunda derivada

$$\ddot{\sigma} = \beta_1 \dot{e}_2 + \dot{\tau} - \ddot{x}d = \beta_1(\tau - \ddot{x}d) + \dot{\tau} - \ddot{x}d. \quad (7.3.5)$$

dada la teoría presentada en [35] proponemos una superficie deslizando S en términos de (σ) tal que:

$$S = \dot{\sigma} + \beta_2 \sigma \quad (7.3.6)$$

donde β_2 es una constante positiva.

Y su derivada esta dada por

$$\dot{S} = \ddot{\sigma} + \beta_2 \dot{\sigma} \quad (7.3.7)$$

sustituyendo $\dot{\sigma}$ y $\ddot{\sigma}$ en $\dot{S}$ obtenemos

$$\dot{S} = \beta_1 \tau - \beta_1 \ddot{x}d + \dot{\tau} - \ddot{x}d + \beta_2(\beta_1 e_2 + \tau - \ddot{x}d) \quad (7.3.8)$$

donde β_1 y β_2 son constantes positivas que llevan a la superficie deslizante a cero más rápidamente.

La condición de alcanzabilidad para S dada la ecuación (7.1.6) se puede reescribir como

$$S\dot{S} = -\rho|S| - \lambda S^2 < 0 \quad (7.3.9)$$

de esta forma la ley de control $\dot{\tau}$ en términos de la derivada de u queda expresada de la siguiente forma:

$$\dot{\tau} = \ddot{x}d - (\beta_1 + \beta_2)\tau + (\beta_1 + \beta_2)\ddot{x}d - \beta_1\beta_2 e_2 - \rho \text{sign}(S) - \lambda S. \quad (7.3.10)$$

Por lo tanto el modo deslizante logrado se llama modo deslizante asintótico con respecto a la variable deslizante original. Donde la variable deslizante S converge a cero en tiempo finito y la superficie deslizante σ original converge a cero asintóticamente.

7.3.1. Parámetros de simulación y resultados experimentales

Los resultados experimentales se muestran a continuación, considerando una señal de referencia con los valores propuestos en la Tabla 1. El parámetro de ganancia ρ de la función signo, el parámetro de ganancia λ del controlador y los valores de las constantes β_1 y β_2 se presentan en Tabla 4.

Tabla 4: Parámetros de ganancias del controlador SMC asintótico

Notación	Valor
β_1	4
β_2	35
σ	10
λ	100

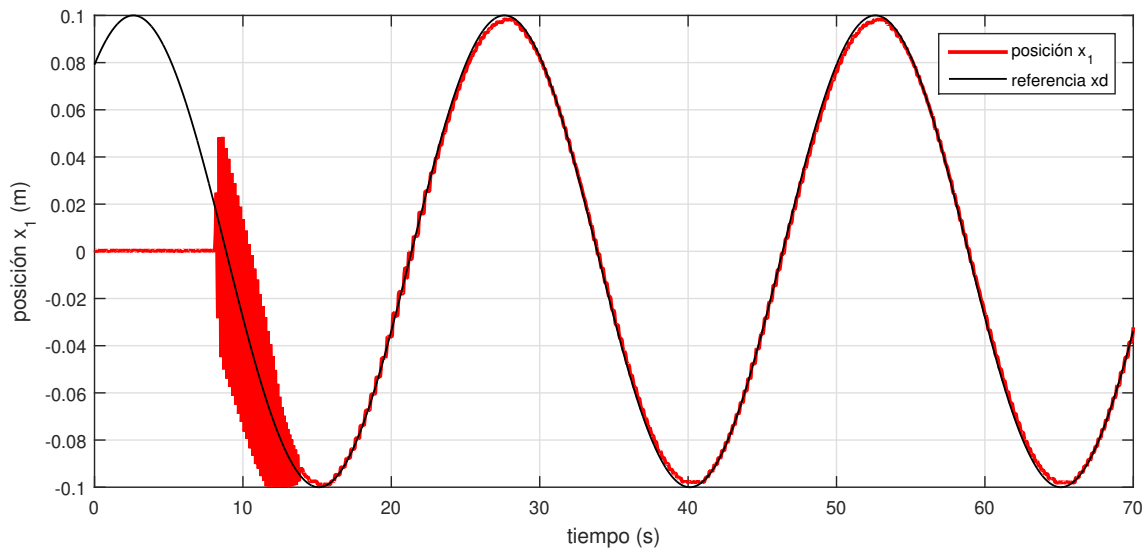


Figura 7.3.1.1: Trayectoria de referencia vs trayectoria de posición del controlador SMC asintótico

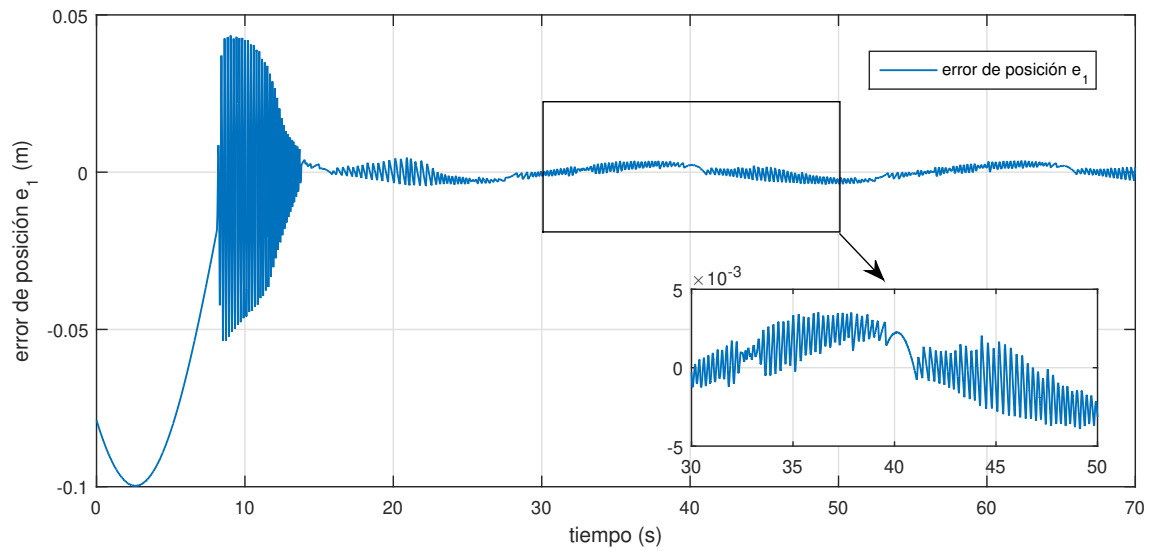


Figura 7.3.1.2: Error de posición del controlador SMC asintótico

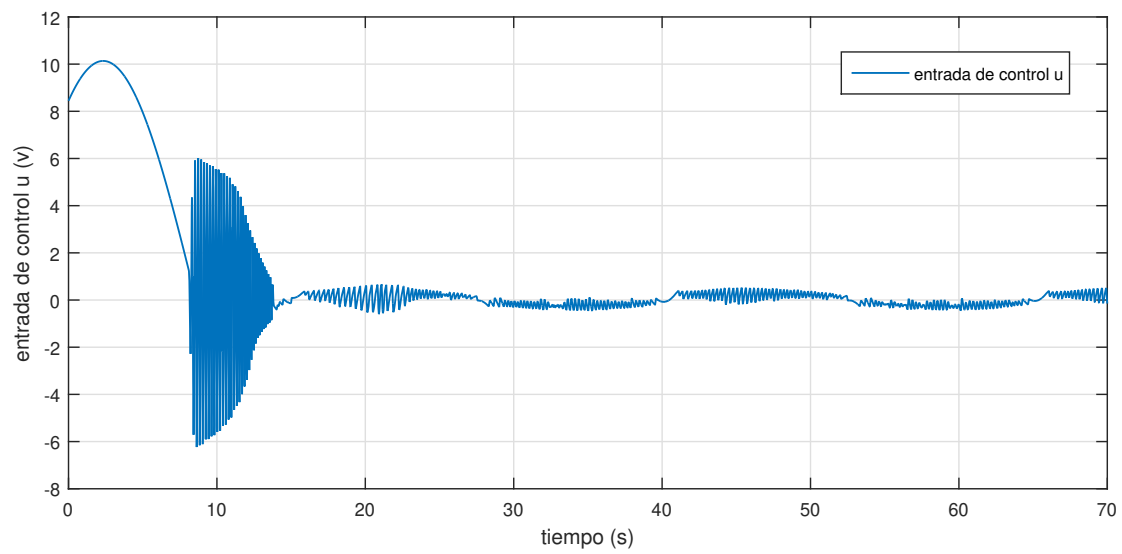


Figura 7.3.1.3: Señal de control de SMC asintótico

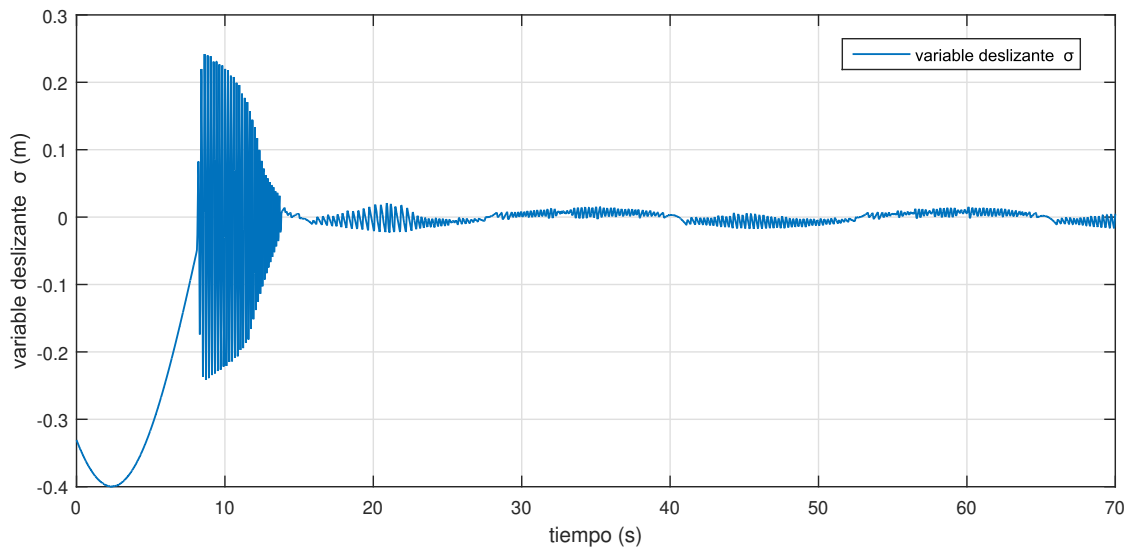


Figura 7.3.1.4: Variable deslizante σ de SMC asintótico

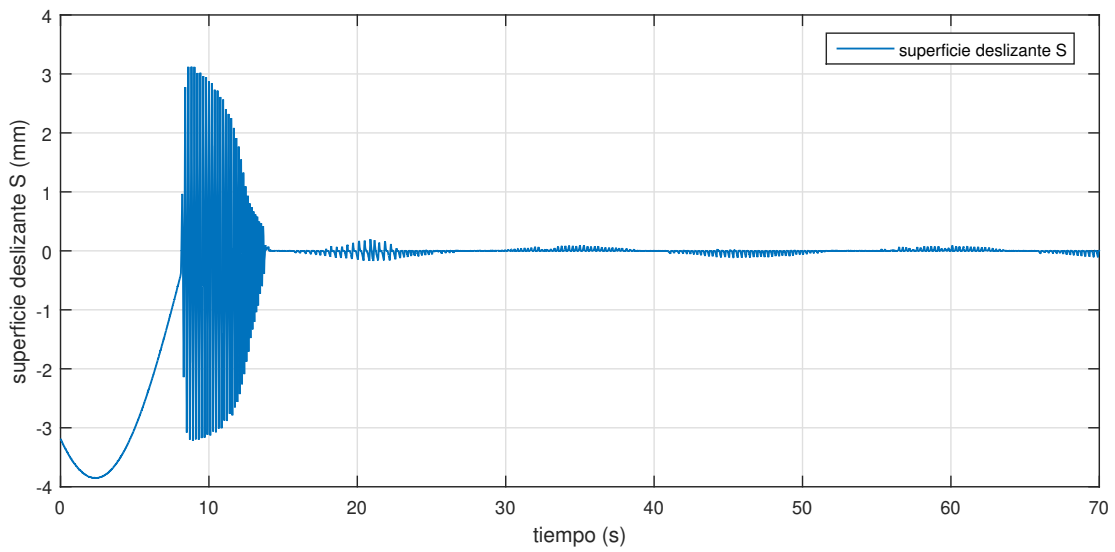


Figura 7.3.1.5: Convergencia hacia la superficie deslizante de SMC asintótico

7.3.2. Comentarios

Como podemos notar en la Figura (7.3.1.1), la trayectoria de posición alcanza la referencia deseada, sin embargo no tenemos un deslizamiento ideal ver Figura (7.3.1.5). Pero en su lugar se produce un modo deslizante asintótico desde que la variable original converge a cero solo asintóticamente ver Figura (7.3.1.4), la magnitud de la señal de error de posición ver Figura (7.3.1.2), permanece acotada en $\pm 4mm$.

Se presenta en la Figura (7.3.2.1) una comparación del seguimiento de referencia de las trayectorias de los controladores implementados: SMC de primer orden, SMC Cuasi-deslizante y SMC asintótico. Dados los controladores presentados en 7 se demuestra convergencia en tiempo finito hacia la superficie deslizante. Podemos notar que el controlador asintótico presenta un transitorio agresivo y un error estacionario más pequeño en comparación con los controladores de primer orden y cuasi-deslizante. A pesar de no mantener un deslizamiento ideal, se produce un modo deslizante asintótico en el sistema (7.3.1) desde que la variable deslizante original σ converge a cero solo asintóticamente. Este es el precio a pagar por la atenuación del chattering.

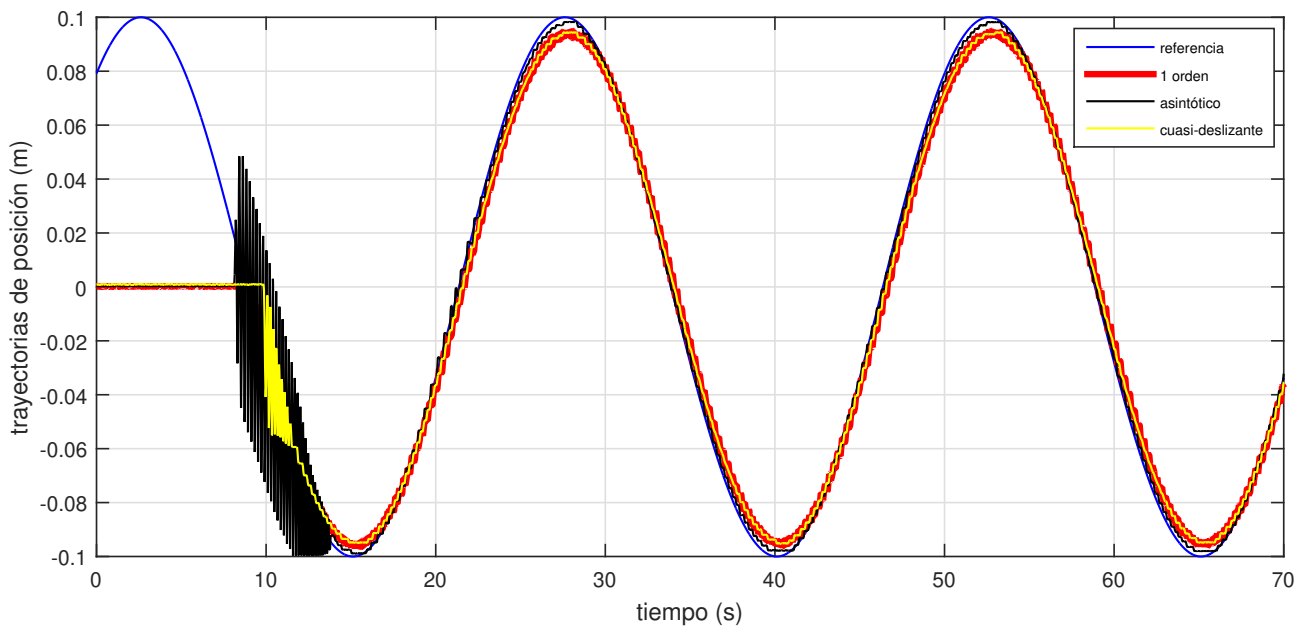


Figura 7.3.2.1: Trayectorias del control SMC de primer orden, cuasi-deslizante y asintótico

8. CONTROL PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CON CONVERGENCIA EN TIEMPO FINITO UTILIZANDO SOLO MEDICIÓN DE LA POSICIÓN.

En algunas aplicaciones mecánicas, se requiere diseñar observadores ó diferenciadores para fines de control, cuando todo el espacio de estados no está disponible para la medición. Se propone una alternativa para evitar el uso de observadores o diferenciadores, un algoritmo con convergencia en tiempo finito que utiliza solo retroalimentación de la posición del sistema neumático y no requiere la medición o estimación de otra señal [23]. Se utilizan herramientas de Lyapunov para comprobar estabilidad del origen y se estudia la propiedad de homogeneidad para demostrar convergencia en tiempo finito de los estados.

Se presenta una ley de control por retroalimentación dinámica basada en el algoritmo "super-twisting" [14][15]. Se agrega una compensación dinámica al algoritmo propuesto para solo utilizar la retroalimentación de la posición y mantener propiedades como convergencia en tiempo finito de los estados.

La dinámica de un sistema mecánico se rige por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u + w(x, t)\end{aligned}\tag{8.0.1}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ representan los estados del sistema y u es la entrada de control en general no lineal. El valor actual de $w(x, t) \in \mathfrak{L}_\infty$ está acotado por una constante M conocida, es decir $\sup_{t \geq 0} |w(x, t)| \leq M$. Las soluciones de todos los sistemas de ecuaciones diferenciales se entienden en el sentido de Filippov.

Para el sistema (8.0.1), se propone la siguiente estructura de control basado en la literatura [31]:

$$u = -g(x, t)^{-1} (f(x, t) - \tau - \ddot{x}d) \quad (8.0.2)$$

donde el primer termino es una compensación y τ es el algoritmo prupuesto, tal que:

$$u = \ddot{x}d + \tau \quad (8.0.3)$$

sustituyendo (8.0.2) en (8.0.1) el sistema en lazo cerrado se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \tau + \ddot{x}d + w(\cdot) \end{aligned} \quad (8.0.4)$$

reescribimos el sistema (8.0.4) en función de los errores, tal que $e_1 = x - xd$ y $e_2 = y - \dot{x}d$ son los errores de seguimiento y xd es la trayectoria deseada que es C^k para una k suficientemente grande. De esta forma la dinámica del error se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \tau + w(\cdot) \end{aligned} \quad (8.0.5)$$

donde la estructura de (8.0.5) es un sistema de doble integrador.

8.1. Diseño del control

Se propone el siguiente algoritmo dinámico para estabilizar el sistema (8.0.5)

$$\begin{aligned}\tau &= -k_1 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha \\ \dot{e}_3 &= -k_3 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha\end{aligned}\tag{8.1.1}$$

Donde k_1, k_2, k_3, k_4 son constantes positivas que serán sintonizadas de tal forma que garanticen convergencia en tiempo finito de los estados a cero y $\alpha \in [0, 1)$, es decir $0 < \alpha < 1$.

Notación:

$$\begin{aligned}\text{sign}(x)x &= |x| \\ \text{sign}(x)|x|^\alpha &= \lfloor x \rfloor^\alpha\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

Sustituyendo (8.0.5) en (8.1.1) el sistema en lazo cerrado se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + w(\cdot) \\ \dot{e}_3 &= -k_3 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha\end{aligned}\tag{8.1.3}$$

donde $\Delta_2 > 1$, $\Delta_3 > 0$ y considerando la perturbación $w(x, t) = 0$.

8.2. Puntos de equilibrio

Calculamos los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado (8.1.3) tal que:

$$0 = e_2 \tag{8.2.1}$$

$$0 = -k_1 [e_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [e_3]^\alpha \tag{8.2.2}$$

$$0 = -k_3 [e_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 [e_3]^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha. \tag{8.2.3}$$

Vemos que existe un punto de equilibrio $\bar{e}_1 = 0$ en (8.1.3) de (8.2.1) tenemos $\bar{e}_2 = 0$ si y solo si:

$$[e_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} = \frac{-k_2}{k_1} [e_3]^\alpha \tag{8.2.4}$$

sustituimos (8.2.4) en (8.2.3) tal que

$$0 = \frac{k_2 k_3}{k_4} [e_3]^\alpha - k_4 [e_3]^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 [e_3]^\alpha \tag{8.2.5}$$

por lo tanto $\bar{e}_3 = 0$, entonces existe un punto de equilibrio $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (0, 0, 0)$; y este punto de equilibrio es unico.

9. PRUEBA DE ESTABILIDAD

9.1. Estabilidad por Lyapunov

Sea el origen $e = 0$ un punto de equilibrio de (8.1.3) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(e) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (9.1.1)$$

entonces $e = 0$ es estable. Más aún si:

$$\dot{V}(e) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (9.1.2)$$

entonces $e = 0$ es asintóticamente estable.

9.2. Selección de una función de Lyapunov

Dada la teoría presentada en (6.2) teorema 1, se define que el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable, tal que $\dot{V}(e)$ sea semidefinida negativa, y es asintóticamente estable solamente si $\dot{V}(e)$ es definida negativa, de esta forma podemos demostrar estabilidad en lazo cerrado de (8.1.3) proponiendo una función de Lyapunov $\dot{V}$ tal que $V(e_1, e_2, e_3, t)$ sea definida positiva. Para lograr esto proponemos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(e_1, e_2, e_3, t) = \Delta_1 \frac{2-\alpha}{2} |e_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{1}{2} [e_1 \ e_3]^\top \begin{pmatrix} \Delta_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (9.2.1)$$

donde

$$\frac{1}{2}[e_1 \ e_3]^\top \begin{pmatrix} \Delta_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (9.2.2)$$

es una función cuadrática de la forma $e^T P e$ donde P es una matriz real y simétrica y es definida positiva si

$$\forall e \neq 0 \rightarrow e^T P e > 0. \quad (9.2.3)$$

tal que

$$V(e_1, e_2, e_3, t) = \Delta_1 \frac{2-\alpha}{2} |e_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{1}{2} [e_1 \ e_3]^\top \begin{pmatrix} \Delta_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} > 0 \quad (9.2.4)$$

calculando la derivada temporal de la función de Lyapunov obtenemos:

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_3, t) = \Delta_1 |e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \text{sign}(e_1) \dot{e}_1 + \Delta_2 e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 - e_2 \dot{e}_3 - e_3 \dot{e}_2 \quad (9.2.5)$$

sustituimos (8.1.3) en $\dot{V}$ tal que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(e_1, e_2, e_{3,t}) = & \Delta_1 |e_1|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \text{sign}(e_1) e_2 + \Delta_2 e_2 (-k_1 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + w(\cdot)) + e_3 (-k_3 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + \\ & \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha) - e_2 (-k_3 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \lfloor e_3 \rfloor^2 + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha) - e_3 (-k_1 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + w(\cdot))\end{aligned}\tag{9.2.6}$$

se demuestra estabilidad en el origen si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\Delta_1 + k_3 &= \Delta_2 k_1 \\ k_1 &= k_3 \\ \Delta_2 k_2 &= k_4\end{aligned}\tag{9.2.7}$$

reduciendo terminos de la función (9.2.6) obtenemos

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_{3,t}) = \Delta_2 e_2 w - k_4 |e_3|^{\alpha+1} + \Delta_2 \Delta_3 e_3 |e_3|^\alpha - \Delta_2 \Delta_3 e_2 |e_3|^\alpha + k_2 |e_3|^{\alpha+1} - e_3 w(\cdot)\tag{9.2.8}$$

donde $|w(\cdot)| = \Delta_3 |e_3|^\alpha$ es una perturbación que se desvanece en el tiempo.

Sustituyendo $|w(\cdot)|$ en (9.2.8) obtenemos:

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_{3,t}) \leq -(k_4 - (\Delta_3(\Delta_2 + 1) + k_2))|e_3|^{\alpha+1} \leq 0. \quad (9.2.9)$$

Donde (9.2.9) es una función semidefinida negativa y (9.2.1) es definida positiva, y considerando el origen de (8.1.3) como un punto de equilibrio unico, se puede demostrar estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

9.3. Principio de homogeneidad

En este caso el sistema (8.1.3) tiene un campo vectorial homogéneo de grado $q = -1$ con respecto a la dilatación $r = (\frac{2-\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha})$, para demostrar convergencia en tiempo finito de los estados aplicamos el principio de homogeneidad presentado en literatura [29] [30] de tal forma que se cumpla la siguiente expresión:

$$\dot{x}_1(C^{r_1}x_1, \dots, C^{r_n}x_n, C^{-q}t) = C^{q+r_1}x_1(x_1, \dots, x_n, t) \quad (9.3.1)$$

Para e_1 de (8.1.3) sustituimos $i = 1$ en (EC.9.3.1) obteniendo la siguiente igualdad:

$$\dot{e}_1(C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_2) = C^{-1+\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}e_1(e_2) \quad (9.3.2)$$

desarrollando operaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_2) &= C^{\frac{-(1-\alpha)}{1-\alpha}+\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}e_1(e_2) \\ \dot{e}_1(C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_2) &= C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_1(e_2) \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

donde (9.3.3) satisface el principio de homogeneidad (9.3.1).

Para e_2 de (8.1.3) sustituimos $i = 2$ en (9.3.1) obteniendo la siguiente igualdad

$$\dot{e}_2(-k_3 \text{sign}(C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}e_1)|C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}e_1|^{\frac{2-\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \text{sign}(C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_3)|C^{\frac{1}{1-\alpha}}e_3|^\alpha) = C^{-1+\frac{1}{1-\alpha}}\dot{e}_2(-k_3 \text{sign}(e_1)|e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \text{sign}(e_3)|e_3|^\alpha) \quad (9.3.4)$$

Simplificando términos en (9.3.4) obtenemos la siguiente igualdad homogénea:

$$\dot{e}_2(-k_3 \text{sign}(C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} e_1) C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \text{sign}(C^{\frac{1}{1-\alpha}} e_3) C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |e_3|^\alpha) = C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \dot{e}_2(-k_3 \text{sign}(e_1) |e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 \text{sign}(e_3) |e_3|^\alpha) \quad (9.3.5)$$

para $\dot{e}_3$ de (8.1.3) sustituimos $i = 3$ en (9.3.1) obteniendo la siguiente igualdad

$$\dot{e}_3(-k_3 \text{sign}(C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} e_1) |C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \text{sign}(C^{\frac{1}{1-\alpha}} e_3) |C^{\frac{1}{1-\alpha}} e_3|^\alpha) + \Delta_2 \Delta_3 |C^{\frac{1}{1-\alpha}} e_3|^\alpha = C^{-1+\frac{1}{1-\alpha}} \dot{e}_3(-k_3 \lfloor e_1 \rfloor^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \lfloor e_3 \rfloor^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha) \quad (9.3.6)$$

simplificando terminos de (9.3.6) obtenemos

$$\dot{e}_3(-k_3 \text{sign}(C^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} e_1) C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \text{sign}(C^{\frac{1}{1-\alpha}} e_3) C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |e_3|^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} |e_3|^\alpha) = C^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \dot{e}_3(-k_3 \text{sign}(e_1) |e_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_4 \text{sign}(e_3) |e_3|^\alpha + \Delta_2 \Delta_3 |e_3|^\alpha) \quad (9.3.7)$$

de esta forma las ecuaciones (9.3.5), (9.3.6), (9.3.7), cumplen el principio de homogeneidad según lo presentado en [30] por lo cual se demuestra que los estados del sistema en lazo cerrado de (8.1.3) convergen en tiempo finito hacia el punto de equilibrio.

10. SIMULACIÓN NUMÉRICA

El desempeño y robustez del controlador (8.1.3) es puesto a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab®. La planta es el sistema sistema doble integrador presentado en el capítulo 8, los parámetros y ganancias del control se presentan en la tabla 5. La Figura (10.1) muestra el seguimiento de trayectoria de posición x_1 del controlador propuesto y la señal de referencia deseada xd , la Figura (10.2) muestra la perturbación desvaneciente, la dinámica de los errores e_1 , e_2 y e_3 se muestran en las figuras (10.4) (10.5) y (10.6) respectivamente y la Figura (10.3) muestra la señal de control aplicada.

Tabla 5: Parámetros de ganancias del controlador para seguimiento de trayectoria

Notación	Descripción	Valor
α	Ganancia del controlador	0.5
K_1	Ganancia del controlador	3
K_2	Ganancia del controlador	2
k_3	Ganancia del controlador	3
K_4	Ganancia del controlador	4
Δ_1	Ganancia del controlador	2
Δ_3	Ganancia del controlador	0.5

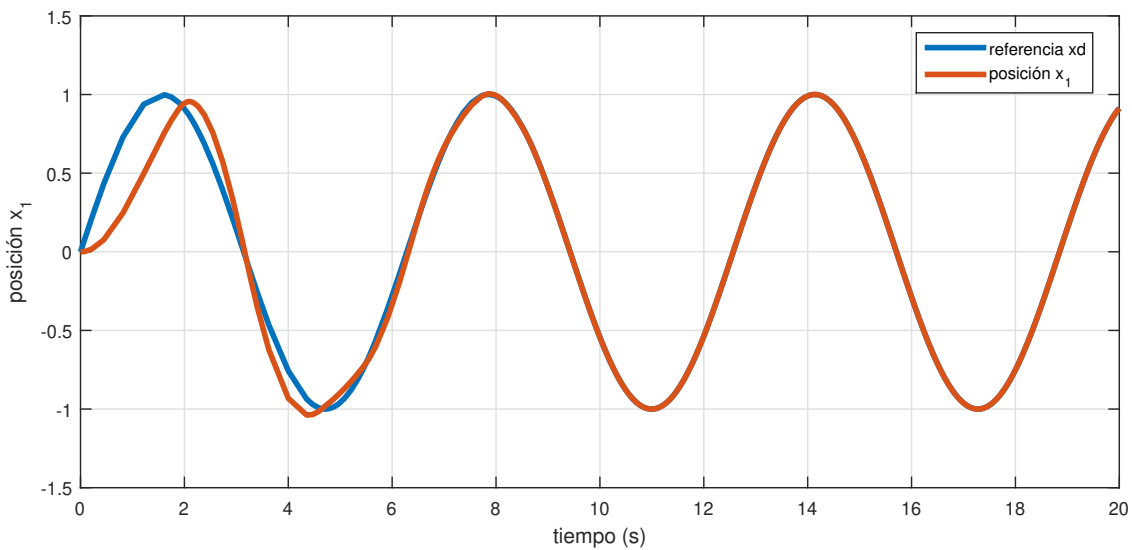


Figura 10.1: Posición vs referencia del controlador para seguimiento de trayectoria

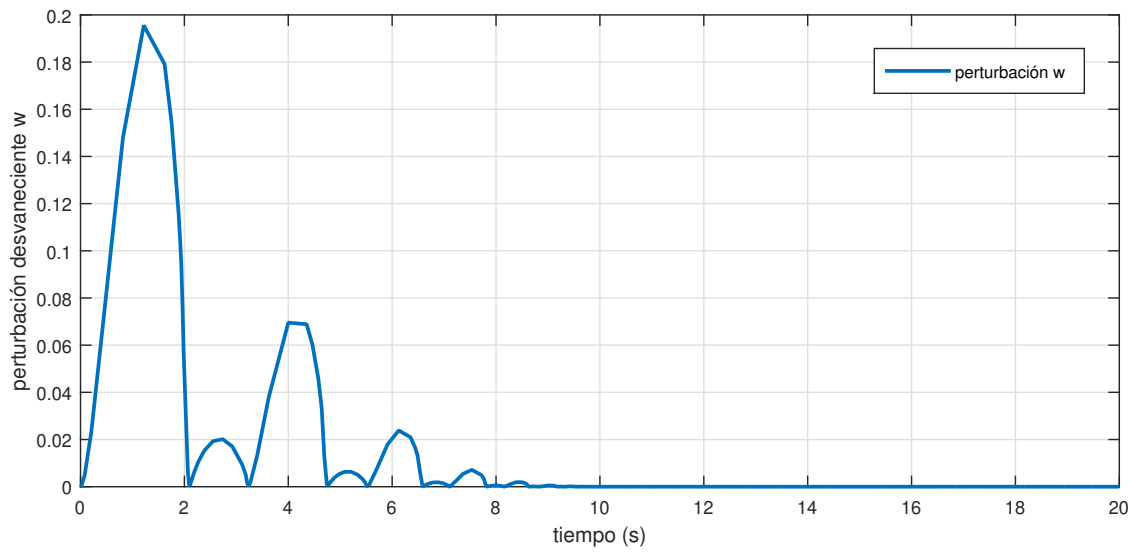


Figura 10.2: Perturbación desvaneciente w

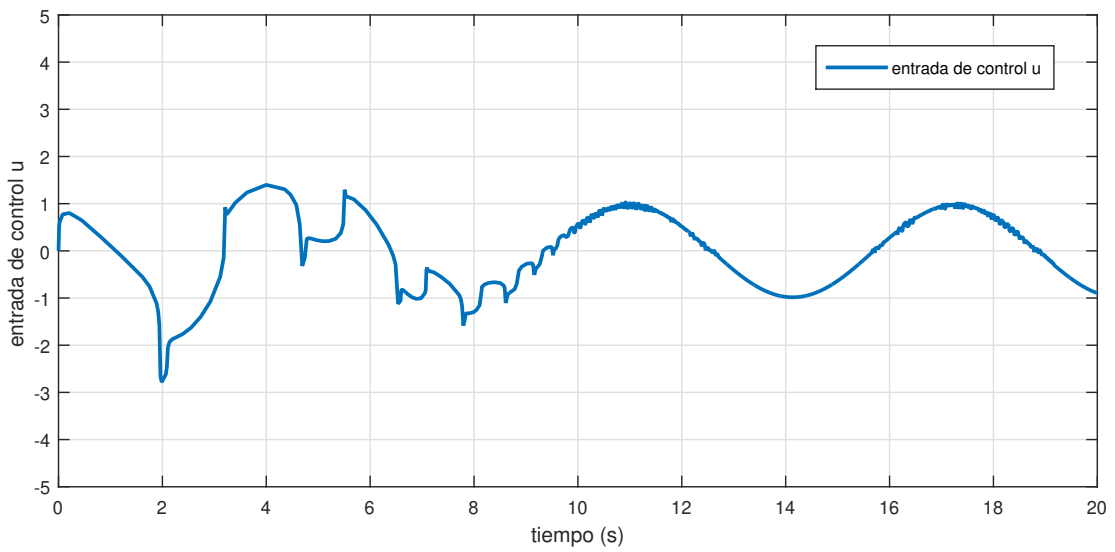


Figura 10.3: Entrada de control u

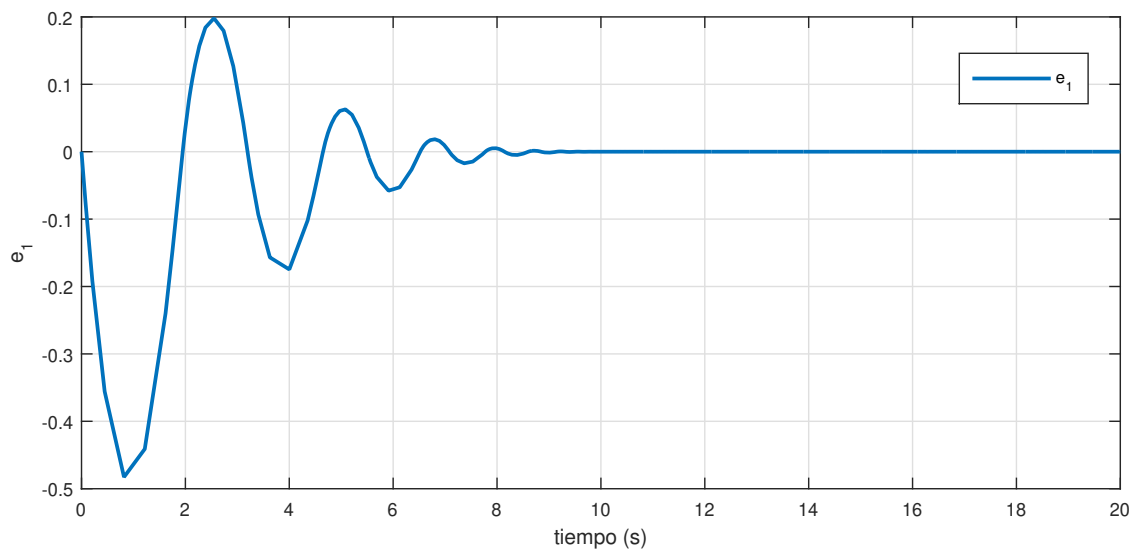


Figura 10.4: Dinámica del error e_1 vs tiempo

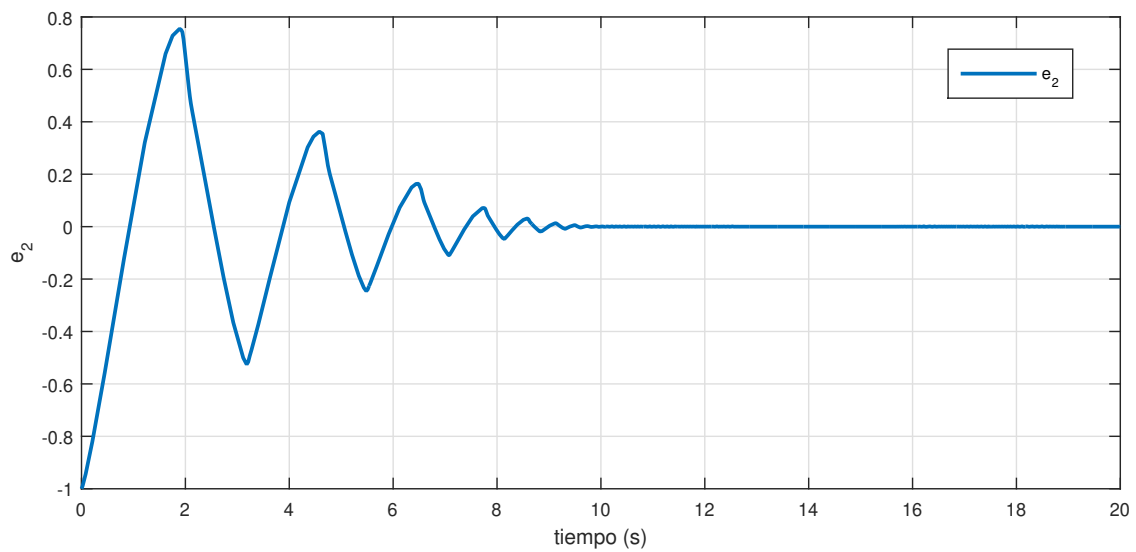


Figura 10.5: Dinámica del error e_2 vs tiempo

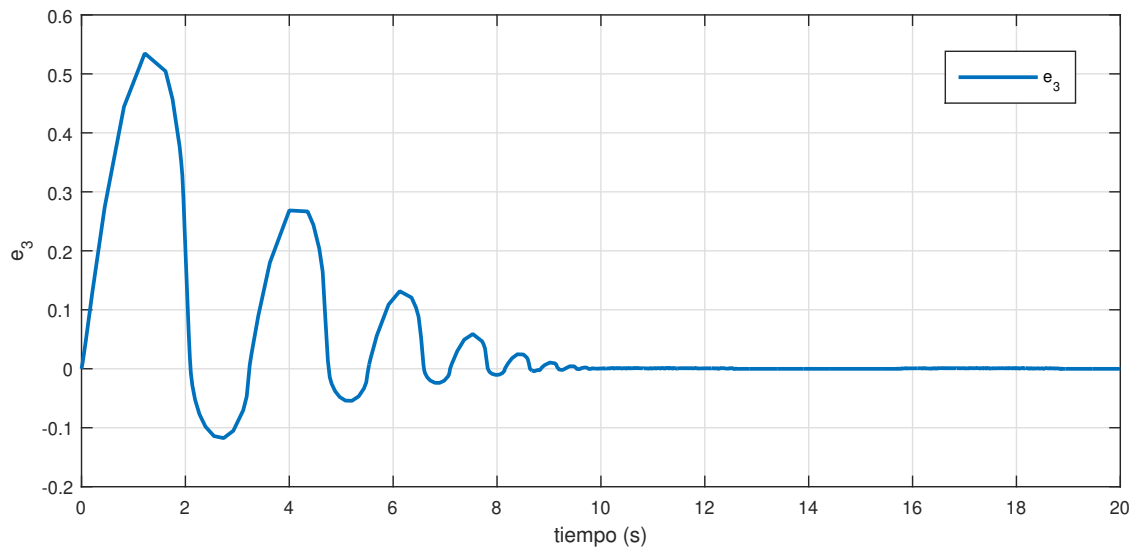


Figura 10.6: Dinámica del error e_3 vs tiempo

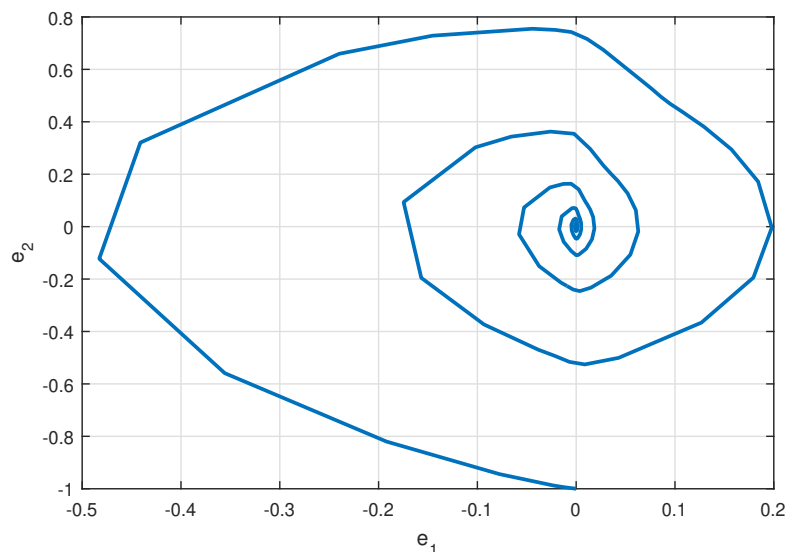


Figura 10.7: Gráfica de fase de los estados e_1 y e_2

11. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO EXPERIMENTAL

Se pone a prueba el desempeño y robustez de los controlador por modos deslizantes propuestos en los capitulos 7 y 8. La planta está compuesta por un cilindro de doble acción modelo LA-200, una válvula proporcional 5/3 modelo MPYE-5-1/8-HF-010-B y un sensor de posición resistivo modelo MLO-POT-500-TLF Figura (11.2), todos estos dispositivos son fabricados por la empresa *FestoPneumaticInc*[®]. Se utiliza simulink de *MatLab*[®] para programar el algoritmo de control. Como interfaz entre la computadora y el sistema neumático Figura (11.1) se utiliza la tarjeta de adquisición de datos *DSPACE*[®] Figura (11.3) utilizando un tiempo de muestreo $T_s = 0.0001$ segundos y el solver Euler de paso fijo. Los parámetros de la señal de referencia son mostrados en la tabla 1. Se considerarán los parámetros y ganancias de los controladores mostrados en las tablas 2, 3, 4, 5 respectivamente.

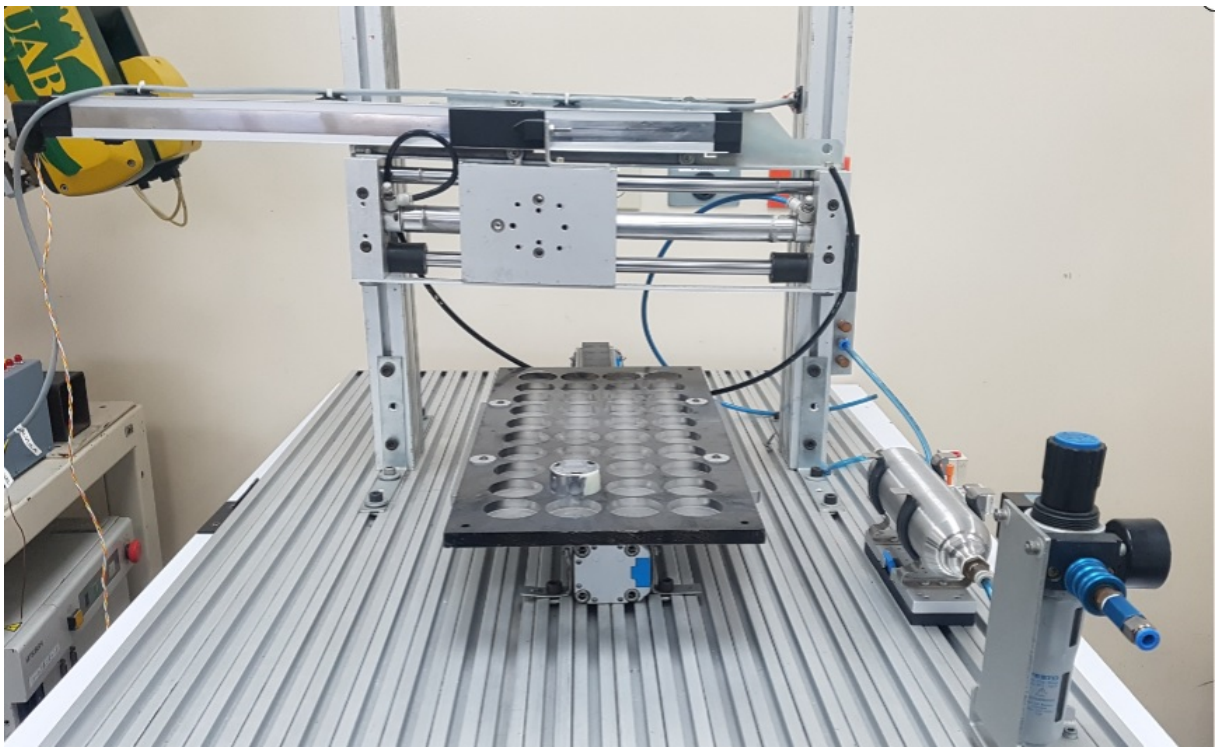
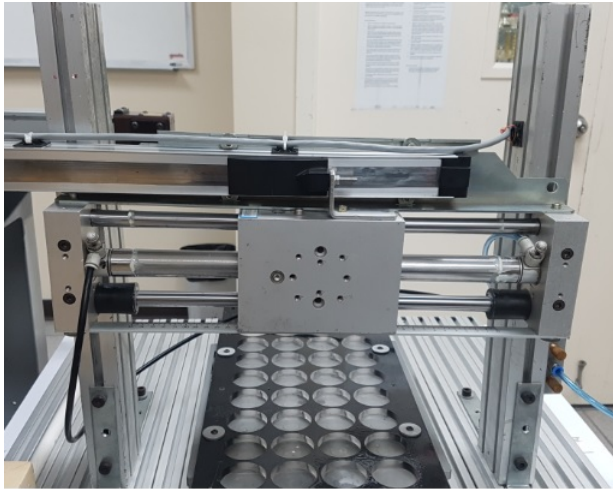


Figura 11.1: Sistema neumático experimental FESTO



a)



b)

Figura 11.2: a) Sensor resistivo y b) válvula proporcional FESTO



Figura 11.3: Módulo de adquisición de datos DSPACE

12. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo de tesis se diseñaron e implementaron algunos de los controladores estudiados en la literatura véase [35]; tales como el control por modos deslizantes de primer orden, control cuasi-deslizante y el control por modos deslizantes asintótico. Estos algoritmos fueron implementados de manera experimental en un sistema neumático de 1 grado de libertad. Los experimentos realizados lograron demostrar que los controladores implementados fueron capaces de cumplir con su objetivo de control, donde se comprobó convergencia en tiempo finito hacia la superficie deslizante aplicando la técnica de control por modos deslizantes SMC.

Se diseñó un controlador novedoso que asegura convergencia en tiempo finito de los estados del sistema en lazo cerrado hacia el punto de equilibrio, utilizando solo la medición de la posición como retroalimentación. Las simulaciones numéricas realizadas lograron demostrar que el controlador es capaz de cumplir con el objetivo de seguimiento de trayectoria. El diseño de este controlador tiene características que conllevan a una optimización en el tiempo de convergencia hacia el punto de equilibrio con respecto a los algoritmos de control previamente existentes, lo que probablemente podría impactar en una reducción de costos en aplicaciones industriales al ser implementados en sistemas neumáticos.

La motivación principal para el desarrollo de este proyecto de tesis, fue la implementación de estos controladores en aplicaciones industriales, proponiendo nuevas alternativas de control con sistemas neumáticos que ofrezcan un buen desempeño y un menor costo en comparación con los controladores que actualmente se utilizan en el sector industrial.

Los resultados de este trabajo dan pie a desarrollar y fortalecer una línea de investigación enfocada en el diseño de controladores robustos con convergencia en tiempo finito para seguimiento de trayectoria en sistemas neumáticos. Conforme a la visión de la Universidad Autónoma de Baja California, el desarrollo de este trabajo de tesis impacta directamente en la generación de conocimiento científico, así como de aplicaciones para el sector industrial.

Referencias

- [1] A. A. Ahmed, R. Ahmad, A. Yahya, H. H. Tahir, and J. Quinlan, “Variable structure system with sliding mode controller,” *Procedia Engineering*, vol. 53, pp. 441–452, 2013.
- [2] O. P. Ardila, “Estado actual y futuro de la ingeniería de control,” *Puente*, vol. 4, no. 2, pp. 7–15, 2017.
- [3] G. A. G. A. ARMOA, “Elementos finitos estabilizados via funciones de lyapunov,” 2009.
- [4] E. Arnáez Braschi *et al.*, “Enfoque práctico del control moderno [capítulo 1],” 2015.
- [5] A. T. Azar and Q. Zhu, *Advances and applications in sliding mode control systems*. Springer, 2016.
- [6] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Lyapunov analysis of finite-time differential equations,” in *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, vol. 3. IEEE, 1995, pp. 1831–1832.
- [8] —, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- [9] F. Castaños and L. Fridman, “Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 5, pp. 853–858, 2006.
- [10] R. C. Dorf, R. H. Bishop, S. D. Canto, R. D. Canto, and S. Dormido, *Sistemas de control moderno*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [11] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press, 1998.
- [12] P. D. Escobar Ponce, I. Cruz, and D. Israel, “Comparación mediante simulación de tres controladores basados en las estrategias de control tipo pid y modo deslizante (smc) aplicadas al seguimiento de trayectoria de un vehículo autónomo sumergible,” B.S. thesis, Quito, 2018., 2018.
- [13] C. A. Evangelista, “Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden,” Ph.D. dissertation, Facultad de Ingeniería, 2012.

- [14] I. Furtat, Y. Orlov, and A. Fradkov, “Finite-time sliding mode stabilization using dirty differentiation and disturbance compensation,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 29, no. 3, pp. 793–809, 2019.
- [15] I. Furtat, A. Fradkov, and Y. Orlov, “State feedback finite time sliding mode stabilization using dirty differentiation,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 9619–9624, 2017.
- [16] Y. Hong, Y. Xu, and J. Huang, “Finite-time control for robot manipulators,” *Systems & control letters*, vol. 46, no. 4, pp. 243–253, 2002.
- [17] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, “Variable structure control: A survey,” *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2–22, 1993.
- [18] E. M. JAFAROV, “Member of wseas.”
- [19] B. Jumbo and E. Manuel, “Diseño y simulación de controladores dinámicos por modo deslizantes aplicado a procesos no lineales aproximables a un modelo de primer orden con retardo,” B.S. thesis, Quito, 2018., 2018.
- [20] S. Khoo, L. Xie, and Z. Man, “Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems,” *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 219–228, 2009.
- [21] B. C. Kuo, *Sistemas de control automático*. Pearson Educación, 1996.
- [22] A. Levant, “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control,” *International journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [23] A. Loría, “Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 4, pp. 905–920, 2015.
- [24] A. M. Lyapunov, “The general problem of the stability of motion,” *International journal of control*, vol. 55, no. 3, pp. 531–534, 1992.
- [25] R. Ma, G. Zhang, and O. Krause, “Fast terminal sliding-mode finite-time tracking control with differential evolution optimization algorithm using integral chain differentiator in uncertain nonlinear systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 2, pp. 625–639, 2018.

- [26] S. Mobayen and S. Javadi, “Disturbance observer and finite-time tracker design of disturbed third-order nonholonomic systems using terminal sliding mode,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, no. 2, pp. 181–189, 2017.
- [27] J. A. Moreno and M. Osorio, “A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers,” in *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*. IEEE, 2008, pp. 2856–2861.
- [28] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [29] Y. Orlov, “Finite time stability of homogeneous switched systems,” in *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, vol. 4. IEEE, 2003, pp. 4271–4276.
- [30] —, “Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 43, no. 4, pp. 1253–1271, 2004.
- [31] Y. Orlov, Y. Aoustin, and C. Chevallereau, “Finite time stabilization of a perturbed double integrator—part i: Continuous sliding mode-based output feedback synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 3, pp. 614–618, 2010.
- [32] A. Polyakov, “Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2106–2110, 2012.
- [33] A. Polyakov and L. Fridman, “Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 1831–1865, 2014.
- [34] M. M. Polycarpou and P. A. Ioannou, “A robust adaptive nonlinear control design,” in *American Control Conference, 1993*. IEEE, 1993, pp. 1365–1369.
- [35] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014, vol. 10.
- [36] K. Starkov, “Control de movimiento en sistemas mecanicos subactuados,” Ph.D. dissertation, 2008.
- [37] V. Utkin, “Variable structure systems with sliding modes,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 22, no. 2, pp. 212–222, 1977.

- [38] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, “Sliding mode control in electromechanical systems,(1999),” *Taylor & Francis Ltd*, pp. 115–129.
- [39] V. I. Utkin, “Sliding mode control design principles and applications to electric drives,” *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23–36, 1993.
- [40] F. Xiao, L. Wang, J. Chen, and Y. Gao, “Finite-time formation control for multi-agent systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2605–2611, 2009.
- [41] J. Yang, S. Li, J. Su, and X. Yu, “Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances,” *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 2287–2291, 2013.
- [42] K. D. Young, V. I. Utkin, and U. Ozguner, “A control engineer’s guide to sliding mode control,” in *Proceedings. 1996 IEEE International Workshop on Variable Structure Systems.-VSS’96-*. IEEE, 1996, pp. 1–14.
- [43] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, “Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode,” *Automatica*, vol. 41, no. 11, pp. 1957–1964, 2005.
- [44] X. Yu and O. Kaynak, “Sliding-mode control with soft computing: A survey,” *IEEE transactions on industrial electronics*, vol. 56, no. 9, pp. 3275–3285, 2009.
- [45] C. A. Zamora, J. A. Moreno, and S. Kamal, “Control integral discontinuo para sistemas mecánicos,” in *Congreso Anual de Asociaci6n Mexicana de Control Automatico*, 2013.