

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología**

**Unidad Valle de la Palmas**



**DISEÑO DE CONTROLADORES LINEALES PARA  
ESTABILIZAR EL PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL**

Tesis que para obtener el título de:

INGENIERO EN MECATRÓNICA

Presenta:

PAUL ALEXANDRO CHÁVEZ VÁZQUEZ

Director de tesis:

DR. JOVÁN OSEAS MÉRIDA RUBIO

Tijuana, B. C.

Octubre, 2019

## **DEDICATORIA**

Este estudio es dedicado con todo el corazón a mis padres, quienes han sido la fuente de inspiración que me han dado la fuerza cuando pensé en rendirme, y quienes continuamente proveen su apoyo moral, emocional, espiritual y financiero.

Finalmente, a mis hermanos, familiares, mentores, amigos y compañeros quienes compartieron sus consejos y ánimo para terminar este estudio.

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo expresar mi más sincera gratitud a mi asesor de tesis, el Dr. Jován Mérida, quien fue responsable de la idea del controlador de un péndulo invertido, así como también de su dirección a través del curso de la tesis, por su paciencia, consejo y comprensión. Sin sus notables conocimientos y su aliento este trabajo no podría haber sido completado.

Me gustaría extender mi agradecimiento a la Universidad Autónoma de Baja California, por permitirme la oportunidad de terminar mis estudios, a pesar de todos los retos que alguna vez frustraron mis esfuerzos.

## RESUMEN

El problema de diseño de un controlador de balanceo para el péndulo invertido rotacional que es altamente inestable y no lineal se abordó en este trabajo. La gran cantidad de aplicaciones prácticas hacen al péndulo rotatorio invertido una excelente herramienta para la introducción al diseño de controladores. El objetivo principal es diseñar controladores lineales que resuelvan el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo. La metodología utilizada abarca la obtención del modelo dinámico del sistema y el diseño de controladores lineales. Primero se utilizó el método de asignación de polos por comparación directa para obtener la entrada de control que resuelve el problema de estabilización del péndulo cumpliendo con las restricciones establecidas sobre la entrada de control y el ángulo del péndulo. Luego se utilizó un regulador óptimo cuadrático, tal que, el sistema no perturbado sea estable alrededor de la posición invertida inestable, mientras que la energía de la señal de entrada es apropiada. Los resultados fueron validados utilizando un modelo del péndulo rotacional invertido desarrollado con el toolbox Simscape™, el cual provee un ambiente de simulación multicuerpo para sistemas mecánicos. Ambos controladores resolvieron el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo mientras se sigue la señal de referencia de entrada, cumpliendo con las especificaciones de diseño de manera satisfactoria.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>7</b>
1.1 IMPORTANCIA DE ESTUDIO .....	7
1.2 JUSTIFICACIÓN.....	8
1.3 PROPÓSITO .....	8
1.4 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	9
1.5 HIPÓTESIS.....	9
1.6 OBJETIVOS.....	9
1.6.1 GENERAL.....	9
1.6.2 ESPECÍFICOS.....	10
1.7 DELIMITACIONES.....	10
1.8 CONTRIBUCIÓN .....	10
1.9 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO .....	10
<b>2. MARCO DE REFERENCIA .....</b>	<b>11</b>
2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	11
2.2 REPRESENTAR SISTEMAS DINÁMICOS EN ESPACIO DE ESTADOS....	12
2.3 CONTROLABILIDAD .....	14
2.4 ASIGNACIÓN DE POLOS .....	15
2.5 DETERMINAR LA MATRIZ K UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DIRECTA. ....	16
2.6 DETERMINAR LA MATRIZ K UTILIZANDO LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN T 16	
2.7 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO.....	18
2.8 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH HURWITZ .....	20
2.8.1 PASOS PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA POR EL MÉTODO DE ROUTH-HURWITZ: .....	20
2.9 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN .....	22
2.10 LINEALIZACIÓN DE MODELOS NO LINEALES .....	24
2.11 ANTECEDENTES A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA .....	25
<b>3. METODOLOGÍA .....</b>	<b>27</b>
3.1 MODELADO DINÁMICO.....	27

3.2	VALIDACIÓN DEL MODELO DINÁMICO .....	32
3.3	DISEÑO DE CONTROLADORES LINEALES .....	37
3.3.1	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL .....	37
3.3.2	DISEÑO DE CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS .....	37
3.3.3	DISEÑO DE REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO .....	41
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>43</b>
4.1	SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN LAZO CERRADO .....	43
4.1.1	CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS .....	43
4.1.2	REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO .....	46
4.2	SIMULACIÓN DEL MODELO SIMSCAPE EN LAZO CERRADO .....	49
4.2.1	CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS .....	49
4.2.2	REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO .....	52
<b>5.</b>	<b>CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO .....</b>	<b>55</b>
5.1	CONCLUSIONES .....	55
5.2	TRABAJO FUTURO .....	55
	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>57</b>
	<b>APÉNDICE .....</b>	<b>59</b>
	LISTA DE FIGURAS .....	59

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 IMPORTANCIA DE ESTUDIO

El péndulo invertido rotatorio es un sistema utilizado comúnmente en el dominio de teoría de control para realizar experimentos. Es un sistema complejo que ayuda a entender conceptos del control de mecanismos y es un ejemplo de un oscilador no lineal. El péndulo es subactuado y extremadamente no lineal debido a las fuerzas gravitacionales y a las fuerzas centrípetas (Jekan & Subramani, 2016).

La primera demostración a la solución del péndulo invertido fue por J. Roberge en su tesis "The Mechanical Seal" (Roberge, 1960). Para finales de 60s, las discusiones del sistema de péndulo invertido fueron incluidos en libros populares como el de R.H. Cannon (Schaffer & Cannon, 1967), R .C.Dorf (Dorf, 1967) y K. Ogata (Ogata, Modern Control Engineering, 1970). La estabilización del péndulo de forma vertical con una base oscilatoria fue un ejemplo muy utilizado en clases de física y mecánica clásica. El control del levantamiento o 'Swing-up' de un sistema de péndulo invertido fue demostrado por Mori et al. En 1976 (Mori & H. Nishihara, 1976). El péndulo rotatorio invertido, fue propuesto como una alternativa al sistema de péndulo invertido por Furuta et al. en 1991 en su artículo 'Swing Up Control of Inverted Pendulum' (K. Furuta, 1991).

El péndulo Furuta fue inventado en el Instituto Tecnológico de Tokio por Katsuhisa Furuta en 1992, y se ha convertido en un sistema comúnmente utilizado para la teoría de control lineal y no lineal. El péndulo Furuta es un sistema de dos grados de libertad subactuado, compuesto de un péndulo unido a un brazo controlado por un motor. Este brazo rota en el plano horizontal, mientras que el péndulo se mueve en el plano vertical, de manera perpendicular al brazo controlado por el motor. El principal objetivo del sistema de control es mantener el péndulo de forma vertical, aún en presencia de perturbaciones (Houck, Katzchmann, & Ramos, 2009).

Los primeros estudios del sistema de péndulo invertido fueron motivados para el diseño de controladores para estabilizar cohetes durante su despegue vertical. En el instante en que despegue, el cohete es extremadamente inestable. Similar a un cohete al despegar, el péndulo invertido requiere un mecanismo de corrección continuo para mantenerse derecho, ya que el sistema es inestable en su configuración de lazo abierto (Chye & Sang, 1999).

Con la llegada de las computadoras, se ha hecho posible estudiar a cierto detalle las dinámicas no lineales del péndulo y adquirir una visión significativa de la sensibilidad de las condiciones iniciales para ciertos parámetros del sistema.

## **1.2 JUSTIFICACIÓN**

Los controles automáticos tienen una intervención cada vez más importante en la vida diaria, desde un simple termostato hasta el sistema de estabilización de un avión. También en el área de manufactura, los sistemas de control automático se han convertido en una parte importante para procesos industriales como lo son el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad, maquinado y armado de piezas mecánicas, entre otros (Mahmoud & Xia, 2012).

Actualmente, en las industrias modernas se ha hecho cada vez más usual disponer de sistemas de control automático para la optimización y mejora de sus procesos, por lo que requieren ingenieros que tengan los conocimientos necesarios de teoría de control y la capacidad de desarrollar estos sistemas.

Para lograr este fin, el péndulo invertido rotatorio es de gran ayuda, ya que ha sido un experimento práctico usado durante mucho tiempo para educar a los estudiantes de ingeniería en el campo del control moderno. Pero el hecho que el péndulo se use como como experimento no significa que no tenga aplicación práctica, ya que estos sistemas han sido utilizados en la industria militar y espacial, para la estabilización de aviones y helicópteros y cohetes, robots con ruedas motorizadas, en mantener el estado de equilibrio de robots bípedos, etc. Estos sistemas también se han hecho populares con los Segway® y hoverboards, los cuales son transportadores personales a dos ruedas autobalanceables.

## **1.3 PROPÓSITO**

El propósito de este trabajo es diseñar un controlador lineal para un péndulo invertido rotatorio, con el fin de, en un futuro, facilitar a los alumnos de ingeniería a entender los conceptos de control no lineal en sistemas subactuados. En primer lugar, se pretende modelar matemáticamente el sistema del péndulo invertido rotatorio. Una vez obtenido el modelo

linealizado, se diseñará un controlador lineal para el balanceo del péndulo, el cual será probado utilizando a MATLAB® y a SIMULINK® como herramientas de software. Después de haber obtenido un controlador funcional simulado, éste último se pondrá en funcionamiento de manera física en el péndulo.

## **1.4 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

El sistema del péndulo de Furuta comprende a un motor acoplado al extremo de un brazo rígido, el cual está posicionado de manera horizontal y puede girar libremente. Este brazo, a su vez, está acoplado del otro extremo a un péndulo que también es libre de girar en un plano vertical, con la diferencia de que no cuenta con ningún actuador. El hecho de que el sistema tenga un actuador y dos grados de libertad lo convierte en un sistema subactuado. El diseño de control de los sistemas de subactuados es de gran interés y se vuelve más popular, debido a que la utilización de un menor número de actuadores es un importante reto, tanto científico como tecnológico. Dichos sistemas están sujetos a diferentes características de naturaleza no lineales e inestables ocasionadas por las fuerzas gravitacionales.

El problema entonces radica en la estabilización del péndulo en su posición vertical inestable utilizando únicamente un actuador.

## **1.5 HIPÓTESIS**

Los controladores diseñados resolverán el problema de estabilidad del péndulo rotatorio invertido mediante los métodos de asignación de polos y regulador lineal-cuadrático.

## **1.6 OBJETIVOS**

### **1.6.1 GENERAL**

Resolver el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo invertido rotacional mediante estrategias de control lineal.

## **1.6.2 ESPECÍFICOS**

- Resolver el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo invertido rotacional mediante ubicación de polos.
- Resolver el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo invertido rotacional mediante un control de diseño óptimo.

## **1.7 DELIMITACIONES**

Se diseñarán solamente controladores lineales, puesto que en las asignaturas de control clásico cursadas en la carrera de ingeniería mecatrónica se enseña únicamente técnicas de control lineal.

## **1.8 CONTRIBUCIÓN**

Se describe la metodología para el diseño e implementación de controladores lineales sobre un sistema no lineal y subactuado, el cual permitirá a alumnos de ingeniería tener un documento de referencia que facilite el aprendizaje de los temas en cuestión en los cursos de control automático.

## **1.9 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO**

El documento está organizado como sigue. En el Capítulo 2 está dado el modelo dinámico y la formulación del problema. El Capítulo 3 presenta el diseño del controlador por retroalimentación de estados. El funcionamiento del controlador propuesto es dado en el Capítulo 4 mediante resultados de simulación. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## 2. MARCO DE REFERENCIA

### 2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Existen dos enfoques comúnmente utilizados para el análisis y diseño de sistemas de control. Antes de la década de los 60, los métodos de espacio de estados aún no se implementaban en sistemas de control, se utilizaba el enfoque clásico para el diseño de controladores, donde se modelaban los sistemas como un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales se reemplazan por funciones de transferencia y se interconectaban entre sí en bloques. La ventaja de este tipo de modelado es la facilidad en la que la información general del sistema se presenta. Información respecto a la estabilidad y la respuesta transitoria de un sistema pueden ser identificados rápidamente. La desventaja de esta forma de diseño de controladores aumenta exponencialmente en dificultad si el sistema es muy complejo (alto orden, no lineal), por lo que su aplicación es limitada a sistemas sencillos que pueden ser descritos por la relación entrada-salida, o función de transferencia (Nise, 2011).

En la actualidad, cada vez más se estudia el control de sistemas de mayor complejidad y con más precisión, sistemas con múltiples entradas y salidas. Para analizar sistemas de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a computadores que realicen una gran parte de los tediosos cálculos que son necesarios. El enfoque de espacio de estados para el análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista.

La teoría de control moderna, basada en el enfoque de espacio de estados provocó una revolución en los métodos de diseño utilizados en control. Este enfoque nos permite analizar sistemas no lineales, variantes en el tiempo, de alto orden y con condiciones iniciales diferentes a cero.

El diseño de espacios de estados representa de forma compacta a grandes sistemas en forma de matrices, pudiendo representar sistemas variables e invariables en el tiempo. En adición, las matrices B y C en este modelo permiten representar múltiples entradas y salidas en él. Otra de las ventajas de este modelo es la facilidad en la que puede ser manipulado por computadora (Franklin, Powell, & Emami-Naeini, 2002).

## 2.2 REPRESENTAR SISTEMAS DINÁMICOS EN ESPACIO DE ESTADOS

Los sistemas dinámicos son sistemas en los que los efectos de las entradas no ocurren inmediatamente, y la evolución de los estados del sistema es descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias. A menudo es útil en problemas de control reordenar estas ecuaciones diferenciales en la forma de espacio de estados. Esto significa que las ecuaciones diferenciales se representan en la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

donde  $x$  es la matriz de estados y  $u$  la matriz de entradas. Esto se puede realizar de una manera muy sistemática.

Dada una ecuación diferencial ordinaria:

1. Se identifica el orden  $n$  del sistema. Llamamos orden del sistema a la derivativa de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.
2. Se identifican los estados:  $x_1 = y(t), x_2 = \dot{y}(t), \dots, x_n = y^{(n-1)}(t)$
3. Se crea el vector de estados:  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T$
4. Se escriben las ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas:

$$\frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}y = \dot{y} = x_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}\dot{y} = \ddot{y} = x_3 \quad (2.3)$$

...

$$\frac{d}{dt}x_n = \frac{d}{dt}y^{(n-1)} = g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (2.4)$$

donde la única ecuación diferencial no trivial es la derivativa de  $x_n$ , la cual puede ser una función de todos los demás estados más la entrada  $u$ . Se obtiene esta ecuación al reordenar las ecuaciones diferenciales ordinarias.

5. Se escribe el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en una matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Cuya forma general se define como:

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (2.6)$$

Por ejemplo, para la siguiente ecuación diferencial que representa el sistema masa-resorte, el procedimiento para expresarla en forma de espacios de estados:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = u(t) \quad (2.7)$$

1. Se identifica que el orden de la ecuación diferencial es  $n = 2$
2. Los estados del sistema son:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$
3. El vector de estados se describe como:  $x = [x_1 \ x_2]^T = [y \ \dot{y}]^T$
4. Se define el sistema en ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}y = \dot{y} = x_2 \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}y = \frac{u(t) - ky(t)}{m} = \frac{u(t) - kx_1}{m} \quad (2.9)$$

obtenemos la ecuación (2.9) resolviendo la ecuación diferencial (2.7) que describe al sistema.

5. Se escriben estas dos ecuaciones diferenciales en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u(t) - kx_1}{m} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

al ser un sistema lineal, se puede reescribir la matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.11)$$

que es la forma general de escribir una ecuación lineal en espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.12)$$

## 2.3 CONTROLABILIDAD

La controlabilidad es uno de los requerimientos para diferentes métodos de diseño de controladores lineales. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  si se puede transferir cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones y en un intervalo de tiempo finito. Para un sistema representado en espacio de estados por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.12)$$

la controlabilidad se puede determinar calculando el rango de la matriz  $M$ , la cual esta definida de la siguiente forma:

$$M = [ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B ] \quad (2.13)$$

donde  $M$  es la matriz de controlabilidad. Si la matriz es de rango  $n$ , se dice que el estado es completamente controlable (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

## 2.4 ASIGNACIÓN DE POLOS

Esta técnica de control se basa en el enfoque de espacio de estados, llamado realimentación de estados, y consiste en agregar un compensador al sistema con los polos correctos para producir una respuesta transitoria y error en estado estable deseados (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

La condición necesaria para el método de asignación de polos es que el sistema debe ser completamente controlable. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo  $t_0$  si se puede transferir desde cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito. Al ser un sistema controlable, los polos en lazo cerrado pueden ser reubicados en cualquier sitio por realimentación de estado utilizando una matriz de ganancias de retroalimentación apropiada. Para una planta representada en el estado de espacios por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.15)$$

donde  $x$  es el vector de estados de dimensión  $n$ ,  $u$  es el vector de entrada de dimensión  $m$ ,  $A$  es la matriz del sistema de dimensión  $n \times n$ ,  $B$  es la matriz de control de dimensión  $n \times m$ . Si se selecciona la señal de control como

$$u = -Kx, \quad (2.16)$$

En un sistema de control por realimentación típico, la salida  $y$  se reincorpora en la entrada. Esto significa que la señal de control  $u$  es determinada mediante un estado instantáneo. A esto se le llama realimentación de estado. La matriz  $K$  se denomina matriz de ganancia de realimentación de estado.

## 2.5 DETERMINAR LA MATRIZ K UTILIZANDO EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DIRECTA.

Si se tiene un sistema de orden inferior y se cumple la condición de controlabilidad, se puede encontrar la matriz de ganancias  $K$  sustituyéndola de la fórmula

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \quad (2.4)$$

Al ser ambos miembros de esta ecuación polinomios característicos en  $S$ , igualándolos es posible determinar los valores de  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .

## 2.6 DETERMINAR LA MATRIZ K UTILIZANDO LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN T

1. Comprobar condición de controlabilidad del sistema.

2. A partir del polinomio característico de la matriz  $A$ .

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \quad (2.5)$$

determinar los valores de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

3. Determinar la matriz de transformación  $T$  que convierte la ecuación de estado del sistema en su forma canónica controlable (Si la ecuación ya está en su forma canónica controlable, entonces  $T = I$ ).
4. Utilizando los valores propios deseados (los polos en lazo cerrado deseados), escriba el polinomio característico deseado:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.6)$$

y determine los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

5. La matriz de ganancia de realimentación del estado  $K$  requerida se calcula de la siguiente manera:

$$K = [a_n - \alpha_n \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1} \quad \dots \quad a_2 - \alpha_2 \quad a_1 - \alpha_1]T^{-1} \quad (2.7)$$

Normalmente al implementar esta técnica de control, se deben de especificar requerimientos de diseño. Además de la estabilidad; la razón de amortiguamiento, la frecuencia natural y el crecimiento exponencial son ejemplos de especificaciones en el diseño de un controlador por asignación de polos.

La posición de los polos define la estabilidad del sistema, por lo que el controlador, una vez teniendo las especificaciones deseadas, se diseña de tal forma que los polos en lazo

cerrado satisfagan los criterios requeridos. Todos los polos del sistema pueden ser ubicados arbitrariamente en el plano complejo si la matriz de controlabilidad es de rango completo, aunque hacer esto implica cierto costo, ya que se necesita tener una buena medición de todas las variables de estado, o la inclusión de un observador de estado en caso de que una variable no pueda ser medida (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

## 2.7 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

En contraste con el método de asignación de polos, el cual selecciona la ubicación de los eigenvalores para lograr cierto objetivo, el diseño de un regulador lineal se basa en la minimización del costo de la función de control. Además de que garantiza la estabilidad del sistema, el regulador lineal cuadrático tiene la ventaja de que puede ser utilizado en sistemas variantes e invariantes en el tiempo con variables múltiples. Este método de diseño no se lleva a cabo a prueba y error, sino que un algoritmo sistemático lleva a una única solución de la matriz de realimentación de estado.

Para poder utilizar este método de control, es necesario que el sistema a controlar sea estabilizable. Para un sistema parcialmente controlable, cuando todas las variables de estado no controlables son estables y las variables inestables son controlables, el sistema se dice que es estabilizable. Una realimentación de estados es utilizada para estabilizar el sistema. La técnica del regulador lineal cuadrático se basa en el principio de optimalidad. El principio de optimalidad es un principio básico de programación dinámica desarrollado por Richard Bellman, que indica que: una estrategia óptima de control debe cumplir la propiedad de que cualesquiera que sean el estado inicial y las variables de control iniciales, las decisiones de control subsiguientes del periodo restante deben constituir un control óptimo con respecto al estado resultante del control de las etapas iniciales.

Dado un sistema lineal de múltiples entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.8}$$

el problema radica en minimizar la función de coste

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.9)$$

donde las  $Q$  y  $R$  son matrices definidas (o semidefinidas) positivas o simétricas de las dimensiones adecuadas. Esta función de coste representa el intercambio entre el error y el coste de la entrada de control. Seleccionando las matrices  $Q$  y  $R$ , podemos equilibrar la razón de convergencia de las soluciones con el coste de control.

La solución al problema LQR está dado por la ley de control lineal en la forma

$$u = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (2.10)$$

donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida simétrica que satisface la ecuación

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (2.11)$$

A la ecuación (2.24) se le denomina ecuación matricial reducida de Riccati y puede ser resuelta numéricamente.

Los pasos de diseño se describen del modo siguiente:

1. Resolver la ecuación matricial de Riccati para la matriz  $P$ . Si existe una matriz  $P$  definida positiva, significa que el sistema es estable y se puede implementar este método.
2. Sustituir la matriz  $P$  en la ecuación óptima de minimización

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.12)$$

la matriz  $K$  resultante es la matriz óptima.

Una de las cuestiones principales en el diseño de controladores basados en técnicas de control óptimo es como escoger la ponderación de las matrices  $Q$  y  $R$ . Para garantizar que la

solución a la ecuación de Riccati existe, estas matrices deben ser positivas definidas. Una elección simple es la de utilizar ponderaciones diagonales:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Para esta elección de  $Q$  y  $R$ , los elementos individuales describen qué tanto de cada estado y de cada entrada debe de contribuir al costo general (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

## 2.8 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH HURWITZ

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es un método sencillo para determinar cuántos polos hay en cada semiplano del plano complejo sin necesidad de hacer el análisis de lazo cerrado. Utilizando este método podemos encontrar el número de polos en cada sección del plano, pero no sus coordenadas. La ventaja de este método es que podemos utilizarlo aun cuando se tiene un parámetro desconocido en el denominador de la función de transferencia.

### 2.8.1 PASOS PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA POR EL MÉTODO DE ROUTH-HURWITZ:

Teniendo la función de transferencia en lazo cerrado de la forma

$$G(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.14)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes,  $m \leq n$ :

1. Se escribe el polinomio en  $s$  de la forma siguiente

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (2.15)$$

donde los coeficientes  $a_i$  corresponden a los coeficientes del denominador de la función de transferencia. Se supone que  $a_n \neq 0$  para eliminar cualquier raíz cero.

2. Si alguno de estos coeficientes es igual a cero o negativo, y existe al menos un coeficiente positivo, esto significa que hay al menos una raíz imaginaria. En tal caso, el sistema es inestable. Una condición necesaria para la estabilidad es que todos los coeficientes estén presentes y tengan un signo positivo. Si todos los coeficientes son negativos, se hacen positivos multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1.
- 3.
4. Si todos los coeficientes son positivos, creamos la tabla de Routh, denominando a cada renglón con potencias de  $s$ , empezando con la potencia mayor del denominador de la función de transferencia y hasta  $s^0$ :

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$\cdot$	$\cdot$			
$\cdot$	$\cdot$			
$\cdot$	$\cdot$			
$s^2$	$e_1$	$e_2$		

$$\begin{array}{cc}
 s^1 & f_1 \\
 s^0 & g_1 \\
 \hline
 \end{array}$$

El número total de filas debe de ser  $n + 1$ . Los siguientes posteriores se calculan de la siguiente manera. Cada elemento es el determinante negativo de los elementos de los dos renglones anteriores divididos por el elemento de la primera columna inmediatamente superior al renglón calculado:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \\
 b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\
 b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.169}$$

El proceso continúa hasta haber completado todas las filas, obteniendo así un array triangular.

El criterio de Routh-Hurwitz declara que el número de raíces del polinomio que se ubican en la parte derecha del semiplano equivale al número de veces que cambia el signo en la primera columna de la tabla. Si la función de transferencia en lazo cerrado tiene todos sus polos en la parte izquierda del plano complejo, el sistema es estable. Por lo tanto, un sistema es estable si no hay cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

## 2.9 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Un sistema de segundo orden puede ser representado por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (2.17)$$

A esta forma se le denomina forma estándar del sistema de segundo orden. El comportamiento del sistema de segundo orden se describe en términos de los parámetros  $\omega_n$  y  $\xi$ , donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema y  $\xi$  es la razón de amortiguamiento (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

Se consideran tres casos diferentes:

### 1. Caso subamortiguado

Si  $0 < \xi < 1$ , el sistema de segundo orden se denomina como sistema subamortiguado. La función de transferencia se puede reescribir como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)} \quad (2.18)$$

donde a  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$  se le denomina frecuencia natural amortiguada.

### 2. Caso críticamente amortiguado

Si  $\xi = 1$ , significa que los dos polos de la función de transferencia son casi iguales, y el sistema se denomina como sistema de segundo orden críticamente amortiguado.  $G(s)$  se escribe como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}. \quad (2.19)$$

### 3. Caso sobreamortiguado

Si  $\xi > 1$ , los dos polos del sistema son reales negativos y diferentes y el sistema se denomina como sistema de segundo orden sobreamortiguado. Para una entrada  $G(s)$  se escribe como

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi - 1})}. \quad (2.20)$$

## 2.10 LINEALIZACIÓN DE MODELOS NO LINEALES

La mayoría de las relaciones físicas que nos rigen son no lineales. Sin embargo, los sistemas no lineales pueden ser modelados por ecuaciones lineales que sean capaces de representar, alrededor de un punto de equilibrio constante, la dinámica de estos. La representación linealizada de un sistema no lineal nos permite diseñar un controlador de manera mucho más práctica y sencilla con métodos de control lineal.

Un método común para linealizar un sistema es el método de expansión en serie de Taylor. Considerando un sistema no lineal cuya salida es  $y$  y es función de dos entradas  $x_1, x_2$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.21)$$

Si el punto de equilibrio es encontrado en  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , la ecuación se expande en series de Taylor alrededor de este punto para obtener una aproximación lineal para este sistema no lineal:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \right] \dots + T.O.S. \quad (2.22)$$

donde T.O.S. significa términos de orden superior. Si despreciamos los términos de orden superior, para obtener el modelo matemático lineal de este sistema alrededor del punto de equilibrio

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) \Big|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) \Big|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2} . \quad (2.23)$$

El modelo resultante es útil únicamente para condiciones de operación cerca del punto de equilibrio. Si las condiciones de operación varían ampliamente, el modelo resulta no adecuado (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 2010).

## 2.11 ANTECEDENTES A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En este documento se trabajará con el péndulo invertido rotacional, también conocido como péndulo Furuta, que es uno de los péndulos con dos grados de libertad más complejo y difícil de controlar. El péndulo de Furuta consiste en un mecanismo de dos enlaces, uno de los cuales (llamado brazo) cuenta con un motor, el cual le permite girar en un plano horizontal, este a su vez es utilizado para controlar el movimiento libre del segundo enlace (péndulo), el cual se encuentra colocado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo, realizando un giro en un plano perpendicular al movimiento del brazo.

Actualmente, hay varios algoritmos para el control del sistema de péndulo como sería: controladores lineales, control PID, control de modos deslizantes, control de lógica difusa y control por redes neuronales artificiales (Quyen & Thuyen, 2012).

En la última década, los controladores lineales han sido ampliamente utilizados en el control del péndulo de Furuta. En su artículo publicado en el 2009 (Aguilar-Ibáñez, 2009), Aguilar-Ibáñez modela un controlador lineal para la estabilidad y seguimiento del péndulo de Furuta por asignación de polos basado en planitud diferencial, explicando que éste puede ser localmente controlable alrededor de un punto inestable de equilibrio. El controlador diseñado, aplicándolo al modelo no lineal, muestra oscilaciones con amplitud máxima de 0.2 radianes. Toro, en el mismo año, diseña un controlador por el método LQR para un modelo linealizado del péndulo en su tesis (Toro, 2009), en donde se muestra el sistema controlado reaccionando a perturbaciones (función impulso) con gran rapidez, mientras que Sukontanakarn y Parnichkun logran resultados exitosos en la implementación física del péndulo utilizando el mismo método de control (Sukontanakarn & Parnichkun, 2009). En el 2012, Rubio, Figueroa, Pérez Cruz y

Rumbo proponen dos controladores lineales: Un controlador para rechazar la perturbación con el método de estructura al infinito y un controlador para estabilizar el sistema por asignación de polos (Jesus, Figueroa, Pérez, & Rumbo, 2012). El sistema modelado muestra una buena reacción a las perturbaciones externas (señal senoidal) gracias a la habilidad del controlador para atenuar las perturbaciones. Jadlovska y Sarnovsky, en 2013 (Jadlovska & Sarnovsky), simulan y comparan la eficacia de diferentes controladores como lo son el control óptimo LQR (continuo y discreto) y por asignación de polos para la estabilización del péndulo. Las simulaciones realizadas indican que un controlador por asignación de polos es más eficiente que un controlador LQR, debido a que el primero presenta oscilaciones unos 50% más tenues que el segundo.

La tarea de control del péndulo de Furuta se establece en dos etapas: la primera consiste en levantar el péndulo desde su posición colgante natural hasta la posición vertical (swing up) y segunda etapa es equilibrarlo (estabilizarlo) en la posición invertida inestable, utilizando sólo los movimientos de rotación del brazo horizontal. Estos conceptos pueden ser usados en un número diverso de escenarios, tales como: control de aeronaves, vehículos bajo el agua, propulsores de cohete y robots de dos llantas (Boubaker, 2003).

En este trabajo se diseñarán controladores por ubicación de polos y control lineal cuadrático con el fin de resolver el problema de estabilización del péndulo de Furuta y establecer una comparación de desempeño.

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 MODELADO DINÁMICO

La planta bajo estudio es un sistema que consiste de un péndulo invertido conectado a un brazo horizontal rotacional. En la Figura 3.1 se presenta una simplificación del sistema, el cual se utilizará como referencia para obtener el modelo dinámico. El péndulo invertido rotacional es un mecanismo de dos grados de libertad denotados por  $\theta$  y  $\alpha$ . Como se observa en la figura, el ángulo  $\theta$  es el ángulo que forma el brazo con respecto a una referencia y el ángulo  $\alpha$  es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical. Este último se mide desde la posición vertical hacia abajo. El ángulo  $\alpha$  es positivo en el sentido movimiento de las manecillas del reloj, mientras que  $\theta$  es negativo.

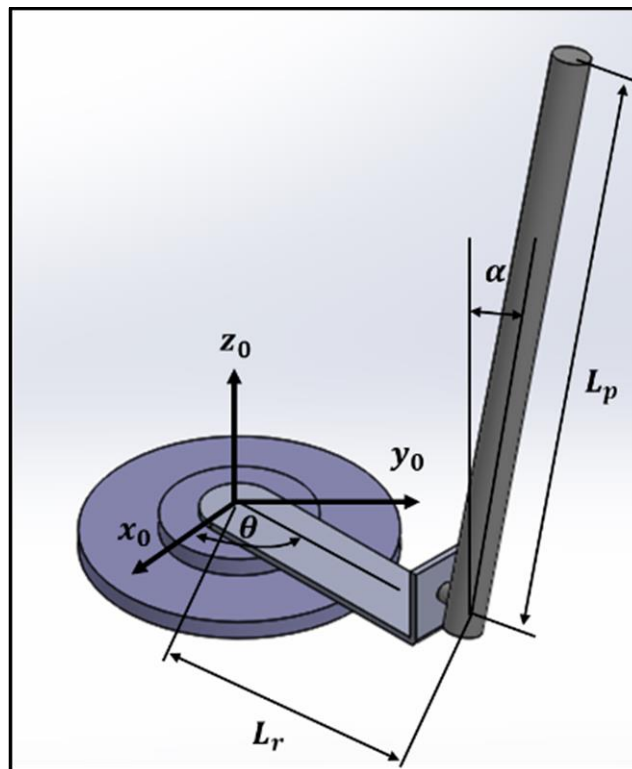


Figura 3.1. Convenciones para el péndulo rotacional invertido

El modelo no-lineal de la parte mecánica es obtenido a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue (Tejado & Torres, 2016):

$$\begin{aligned} \left( m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2(\alpha) + J_r \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\alpha} \\ + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 + J_p \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \\ = -B_p \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $m_p$  es la masa total del péndulo,  $m_r$  es la masa total del brazo,  $L_r$  es la longitud del brazo,  $L_p$  es la longitud del péndulo,  $\alpha$  es la posición angular del péndulo,  $\theta$  es la posición angular del brazo,  $J_r$  es la inercia angular del brazo,  $J_p$  es la inercia angular del péndulo  $B_r$  es el coeficiente de amortiguamiento del brazo,  $B_p$  es el coeficiente de amortiguamiento del péndulo y  $g$  es la constante de aceleración gravitacional.

### 3.1.1 Obtención de un Modelo Lineal

Definiendo  $X = [\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}]$ , las ecuaciones (3.1) y (3.2) se reescriben como:

$$\begin{aligned} f_1(X) = \left( m_p L_r^2 + J_r + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2(\alpha) \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\alpha} \\ + 2 \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f_2(X) = -\frac{1}{2}m_p L_p L_r \cos(\alpha)\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right)\ddot{\alpha} - \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\dot{\theta}^2 \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{2}m_p L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha}$$

Linealizando alrededor del origen  $X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  las ecuaciones (3.5) y (3.6) tenemos

$$f_1(X) \approx f_1(X_0) + \left.\frac{\partial f_1(X)}{\partial \theta}\right|_{x=X_0} (\theta - \theta_0) + \left.\frac{\partial f_1(X)}{\partial \alpha}\right|_{x=X_0} (\alpha - \alpha_0) + \left.\frac{\partial f_1(X)}{\partial \dot{\theta}}\right|_{x=X_0} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + \left.\frac{\partial f_1(X)}{\partial \dot{\alpha}}\right|_{x=X_0} (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0) \quad (3.7)$$

$$f_1(X) \approx \ddot{\theta} - \frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\alpha} = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (3.8)$$

y

$$f_2(X) \approx f_2(X_0) + \left.\frac{\partial f_2(X)}{\partial \theta}\right|_{x=X_0} (\theta - \theta_0) + \left.\frac{\partial f_2(X)}{\partial \alpha}\right|_{x=X_0} (\alpha - \alpha_0) + \left.\frac{\partial f_2(X)}{\partial \dot{\theta}}\right|_{x=X_0} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + \left.\frac{\partial f_2(X)}{\partial \dot{\alpha}}\right|_{x=X_0} (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0) \quad (3.9)$$

$$f_2(X) \approx -\frac{1}{2}m_p L_p g \alpha + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right)\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\theta} = -B_p \dot{\alpha} \quad (3.10)$$

Resolviendo para  $\ddot{\theta}$  tenemos

$$\ddot{\alpha} = \frac{\tau - B_r \dot{\theta} - m_p L_r^2 + J_r \ddot{\theta}}{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r}$$

$$-\frac{1}{2}m_p L_p g \alpha + \frac{\left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right)}{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r} (\tau - B_r \dot{\theta} - [m_p L_r^2 + J_r] \ddot{\theta}) - \frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\theta} = -B_p \dot{\alpha}$$

$$\left( -\frac{1}{2}m_p L_p L_r - [m_p L_r^2 + J_r] \frac{\left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right)}{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r} \right) \ddot{\theta} = -B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2}m_p L_p g \alpha - \frac{\left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right)}{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r} (\tau - B_r \dot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_T} \left[ \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right) (\tau - B_r \dot{\theta}) + \frac{1}{2}m_p L_p L_r \left(-B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2}m_p L_p g \alpha\right) \right] \quad (3.11)$$

Resolviendo para  $\ddot{\alpha}$  tenemos

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau - B_r \dot{\theta} + \frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\alpha}}{m_p L_r^2 + J_r}$$

$$-\frac{1}{2}m_p L_p g \alpha + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right) \ddot{\alpha} + \frac{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r}{m_p L_r^2 + J_r} (\tau - B_r \dot{\theta} + \frac{1}{2}m_p L_p L_r \ddot{\alpha}) = -B_p \dot{\alpha}$$

$$\left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p - \frac{\left[-\frac{1}{2}m_p L_p L_r\right]^2}{m_p L_r^2 + J_r}\right) \ddot{\alpha} = -B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2}m_p L_p g \alpha - \frac{-\frac{1}{2}m_p L_p L_r}{m_p L_r^2 + J_r} (\tau - B_r \dot{\theta})$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_T} \left[ [m_p L_r^2 + J_r] \left(-B_p \dot{\alpha} + -\frac{1}{2}m_p L_p g \alpha\right) + \frac{1}{2}m_p L_p L_r (\tau - B_r \dot{\theta}) \right] \quad (3.12)$$

donde  $J_T = \frac{1}{4}m_p L_p^2 J_r + J_p m_p L_r^2 + J_p J_r$ .

### 3.1.2 Modelo en Espacio de Estados

Rescribimos las ecuaciones (3.9) y (3.10) en términos del vector de estados  $x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J_T} \left[ \frac{1}{4}m_p^2 L_p^2 L_r g x_2 - \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right) B_r x_3 - \frac{1}{2}m_p L_p L_r B_p x_4 + \left(\frac{1}{4}m_p L_p^2 + J_p\right) \tau \right] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{J_T} \left[ (m_p L_r^2 + J_r) \frac{1}{2}m_p L_p g x_2 - \frac{1}{2}m_p L_p L_r B_r x_3 - (m_p L_r^2 + J_r) B_p x_4 + \frac{1}{2}m_p L_p L_r \tau \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

El torque generado por el motor  $\tau$  aplicado en la base del brazo rotacional, es

descrito por:

$$\tau = \frac{n_g K_g k_t (u - K_g k_m) x_3}{R_m} = \frac{n_g K_g k_t u}{R_m} - \frac{n_g K_g^2 k_t k_m x_3}{R_m} \quad (3.14)$$

sustituyendo (3.12) en (3.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J_T} \left[ \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g x_2 + \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 + J_p \right) \left( -B_r - \frac{n_g K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) x_3 - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p x_4 + \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 + J_p \right) \left( \frac{n_g K_g k_t u}{R_m} \right) \right] \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{J_T} \left[ \left( m_p L_r^2 + J_r \right) \frac{1}{2} m_p L_p g x_2 + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) \left( -B_r - \frac{n_g K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) x_3 - \left( m_p L_r^2 + J_r \right) B_p x_4 + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) \left( \frac{n_g K_g k_t u}{R_m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reescribiendo la ecuación (3.13) a la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.16)$$

donde  $x$  es el vector de estados,  $u$  es la entrada de control, y  $A, B$  son las matrices del espacio de estados definidas como:

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g & \left( -B_r - \frac{K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \\ 0 & \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) & \left( B_r - \frac{K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) & -(J_r + m_p L_r^2) B_p \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_g k_t}{R_m} \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \\ \frac{K_g k_t}{2R_m} m_p L_p L_r \end{bmatrix}.$$

### 3.2 VALIDACIÓN DEL MODELO DINÁMICO

Los parámetros del modelo del péndulo están dados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. *Parámetros del péndulo invertido rotacional*

Símbolo	Valor	Unidad
$L_r$	0.216	m
$J_r$	$9.98 \times 10^{-4}$	kg.m <sup>2</sup>
$\theta$		rad
$B_r$	0.0024	N.m.s/rad
$L_p$	0.336	m
$J_p$	0.0012	kg.m <sup>2</sup>
$m_p$	0.127	kg
$B_p$	0.0024	N.m.s/rad
$\alpha$		rad
$u$		V
$\tau$		N.m
$\eta_g$	1	±10%
$\eta_m$	1	±5%
$K_g$	70	
$k_t$	$7.68 \times 10^{-3}$	N.m/A
$k_m$	$7.68 \times 10^{-3}$	V/(rad/s)
$R_m$	2.6	Ω
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

El modelo matemático dado en las ecuaciones (3.1) y (3.2) es simulado en MATLAB/SIMULINK® y ha sido validado haciendo uso del modelo físico CAD/Diseño asistido por computadora del péndulo fabricado por Quanser© desarrollado con el toolbox *Simscape*™ en MATLAB (ver Fig. 3.2). *Simscape* provee un ambiente de simulación multicuerpo para sistemas mecánicos en 3D (ver Fig. 3.3), de tal manera que el usuario puede tener una representación simulación tridimensional del sistema que le permita ver el comportamiento esperado en una plataforma real. Se puede modelar sistemas utilizando bloques que representan cuerpos, uniones, delimitaciones, elementos de fuerza y sensores. Además, permite formular y resolver las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico completo, permitiendo todo esto tener un modelo que se aproxime de una mejor manera a un sistema real (Abhishek & Ashish, 2017).

Para la validación del modelo matemático se obtuvo la respuesta libre del sistema (entrada igual a cero, es decir,  $\tau = 0$ ), para dos condiciones iniciales del ángulo del péndulo:  $\alpha(0) = 150^\circ$  y  $\alpha(0) = 210^\circ$ , de tal forma que el sistema evoluciones hacia el punto de equilibrio naturalmente estable que tiene en  $\alpha(0) = 180^\circ$ . En las figuras 3.4 y 3.5 tenemos los resultados de validación del modelo matemático cuando la condición inicial es  $\alpha(0) = 150^\circ$  ( $30^\circ$  respecto del origen); se puede observar en las figuras que el tipo de respuesta es subamortiguada y que las respuestas son similares, aunque con algunas diferencias en la amplitud y la fase. El tiempo de asentamiento, el máximo sobretiro y los periodos de oscilación tienen valores cercanos. El valor de estado estable del ángulo  $\alpha$  en el modelo matemático y en modelo de *Simscape* es de  $180^\circ$ , mientras que el valor de estado estable del ángulo  $\theta$  tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito. En las figuras 3.6 y 3.7 tenemos los resultados de validación del modelo matemático cuando la condición inicial es  $\alpha(0) = 210^\circ$ ; la simulación del modelo matemático y la validación del modelo a través de *Simscape*, tienen desempeños similares a los obtenidos cuando la condición inicia  $\alpha(0) = 150^\circ$ , lo cual era de esperarse, ya que lo único que se realizo fue cambiar el lado a partir del cual se iniciaba el sistema ( $-30^\circ$  respecto del origen). Las discrepancias en la amplitud y fase entre el modelo matemático y el modelo de *Simscape* son debido a dinámicas no modeladas, tales como: se supuso que el modelo de fricción es lineal, se despreció la dinámica del motor y sus reductores, el modelo matemático no toma en cuenta el efecto de los sensores, etc.

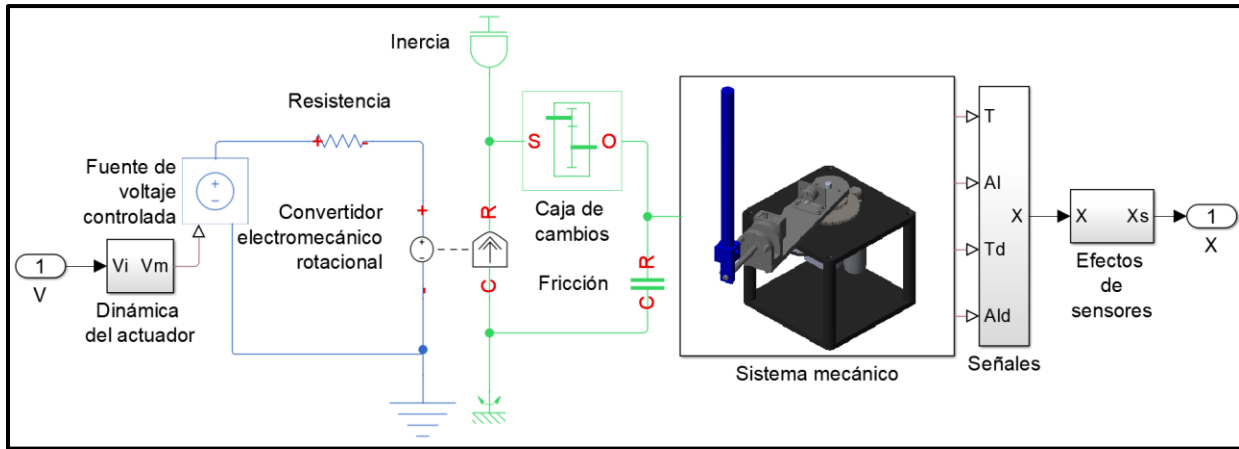


Figura 3.2. Modelo de Simscape-Simulink

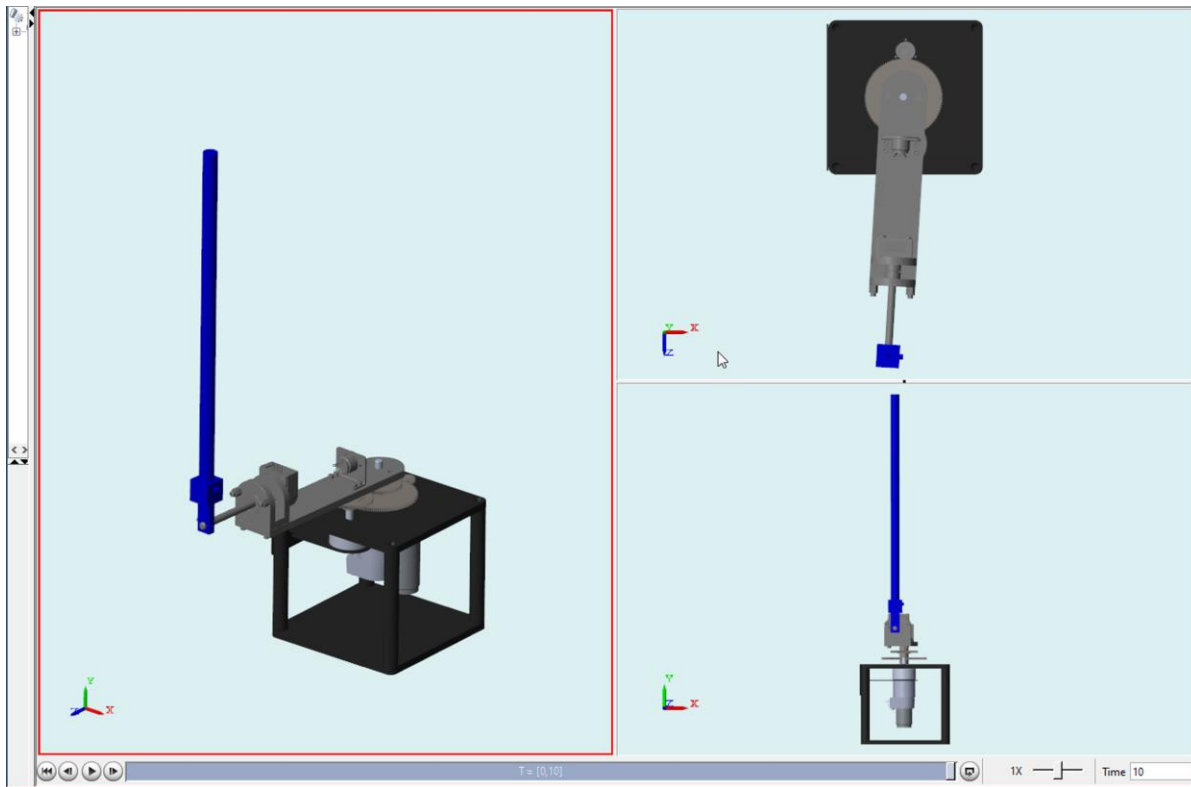


Figura 3.3. Ángulo del péndulo  $\alpha=150^\circ$

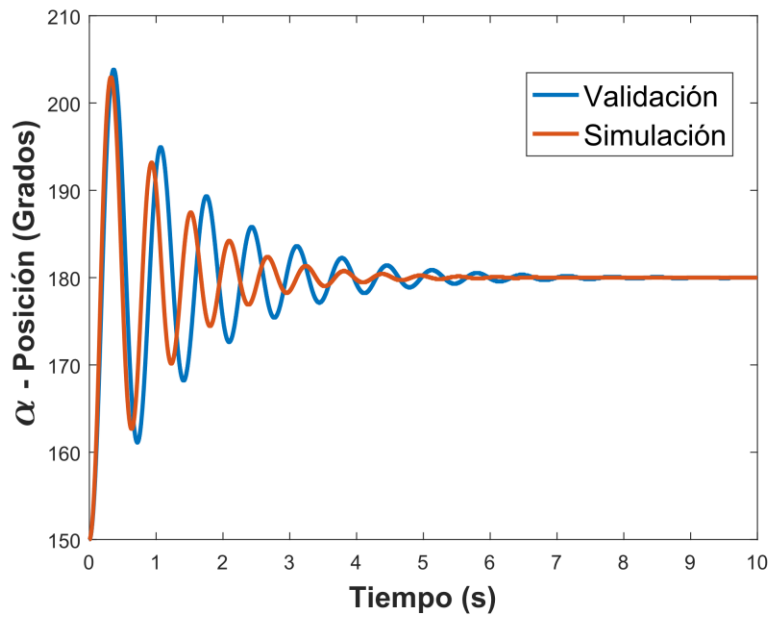


Figura 3.4. Ángulo del péndulo  $\alpha=150^\circ$

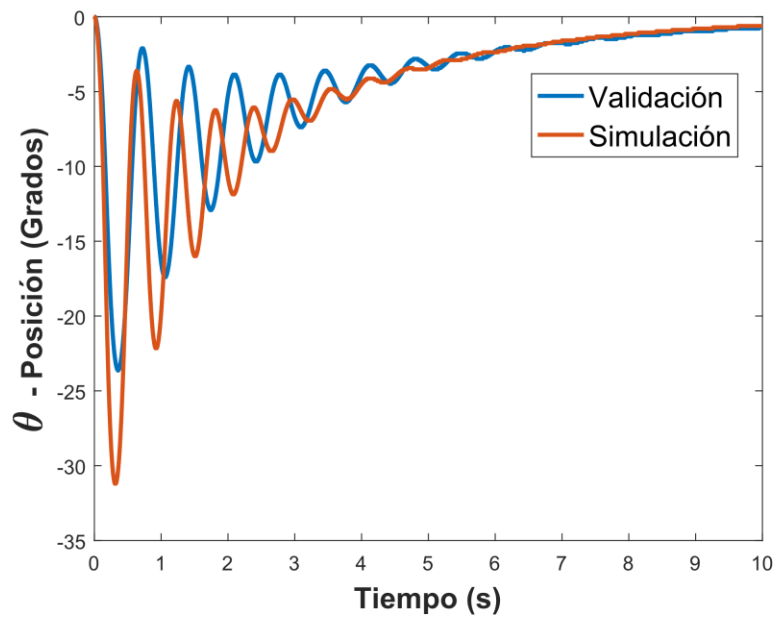


Figura 3.5. Ángulo del péndulo  $\alpha=150^\circ$

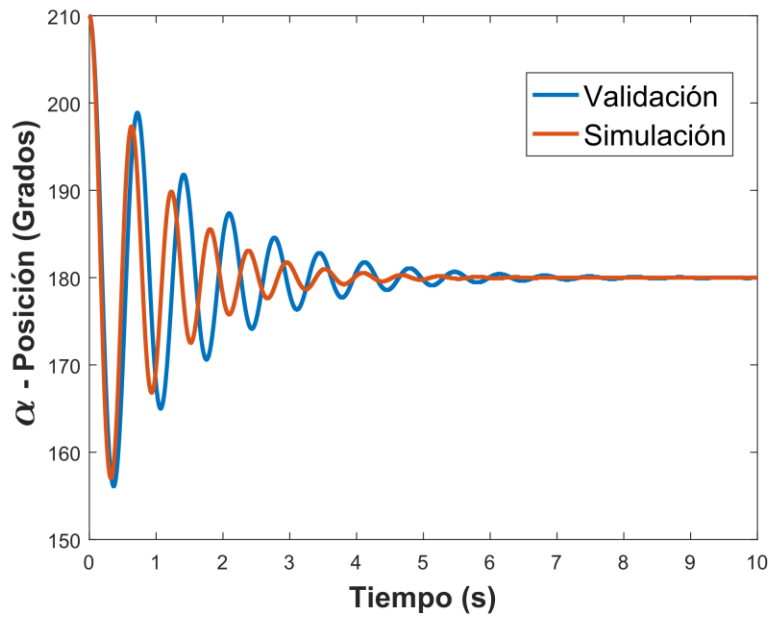


Figura 3.6. Ángulo del péndulo  $\alpha=210^\circ$

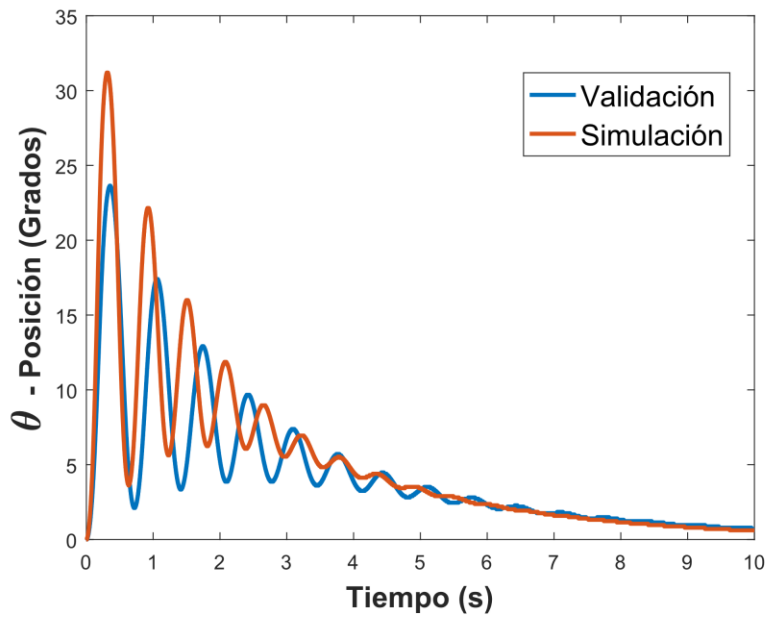


Figura 3.7. Ángulo del péndulo  $\alpha=210^\circ$

### 3.3 DISEÑO DE CONTROLADORES LINEALES

#### 3.3.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL

El problema de control de balanceo del péndulo rotacional invertido consiste en diseñar una ley de control, tal que cumpla con los siguientes requerimientos:

- La razón de amortiguamiento  $\xi = 0.75$ .
- La frecuencia natural  $\omega_n = 3.5$  rad/s.
- La deflexión del ángulo del péndulo cumpla con:  $|\alpha| < 10$  grados.
- El valor máximo del voltaje cumpla con:  $|V_m| < 10$  V.

Las especificaciones anteriores deberán ser satisfechas cuando el brazo rotacional está siguiendo una señal cuadrada con un ángulo de  $\pm 20$  grados.

#### 3.3.2 DISEÑO DE CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS

La dinámica del sistema expresado en espacio de estados está dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.17)$$

donde A y B están definidas en la ecuación (3.14).

La dinámica de la salida es definida como:

$$y = Cx + Du \quad (3.18)$$

donde el vector de la salida  $y$  son las variables del sistema que están disponibles para ser medidas y está definido como  $y^T = [\theta \ \alpha]$ , por lo que las matrices C y D quedan establecidas como

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El lazo de control retroalimentado que balancea el péndulo rotacional es mostrado en la Fig. 3.8. Si  $(A, B)$  son controlables entonces el algoritmo de ubicación de polos puede ser utilizado. Para probar si un sistema es completamente controlable se forma la matriz de controlabilidad:

$$M = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

Si el rango de la matriz es igual al número de estados, entonces el sistema es completamente controlable, al obtener el rango de la matriz de controlabilidad obtenemos que el rango de la misma es 4, por lo que el sistema es completamente controlable.

El estado de referencia es definido como

$$x_d = [\theta_d \ 0 \ 0 \ 0]$$

donde  $\theta_d$  es el ángulo del brazo rotacional deseado. El controlador está definido como

$$u = K(x_d - x). \tag{3.19}$$

Notar que si  $x_d = 0$ , entonces:

$$u = -Kx \tag{3.20}$$

que es el control usado por el algoritmo de ubicación de polos. Al sustituir la entrada de control  $u$  en la ecuación (3.15) obtenemos la dinámica en lazo cerrado:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.21)$$

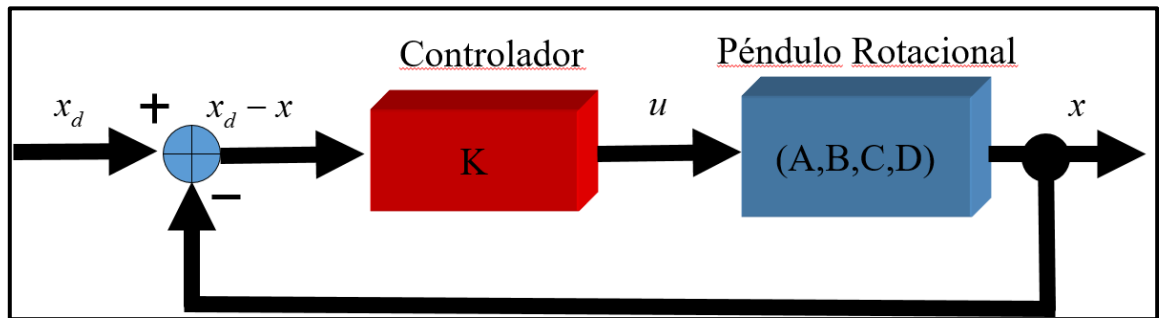


Figura 3.8. Control por retroalimentación de estados

Entonces el problema es diseñar el vector de ganancias  $K$  tal que  $A < BK$  para que el sistema sea estable y que la solución tienda de manera asintótica a la referencia propuesta. Para diseñar el vector de ganancias  $K$  primero debemos definir la ubicación deseada de los polos del sistema. En base a los dos primeros requerimientos en la definición del problema, es decir que la frecuencia natural sea igual a 3.5 rad/s y que el factor de amortiguamiento sea de 0.75, obtenemos la ubicación de los polos dominantes

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -2.625 \pm j2.315$$

donde  $\sigma = \xi\omega_n$  y  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$  es la frecuencia natural amortiguada. Los dos polos restantes del sistema son colocados a lo largo del eje real a la izquierda de los polos dominantes  $p_3 = -40$  y  $p_4 = -80$  (ver Fig. 3.9).

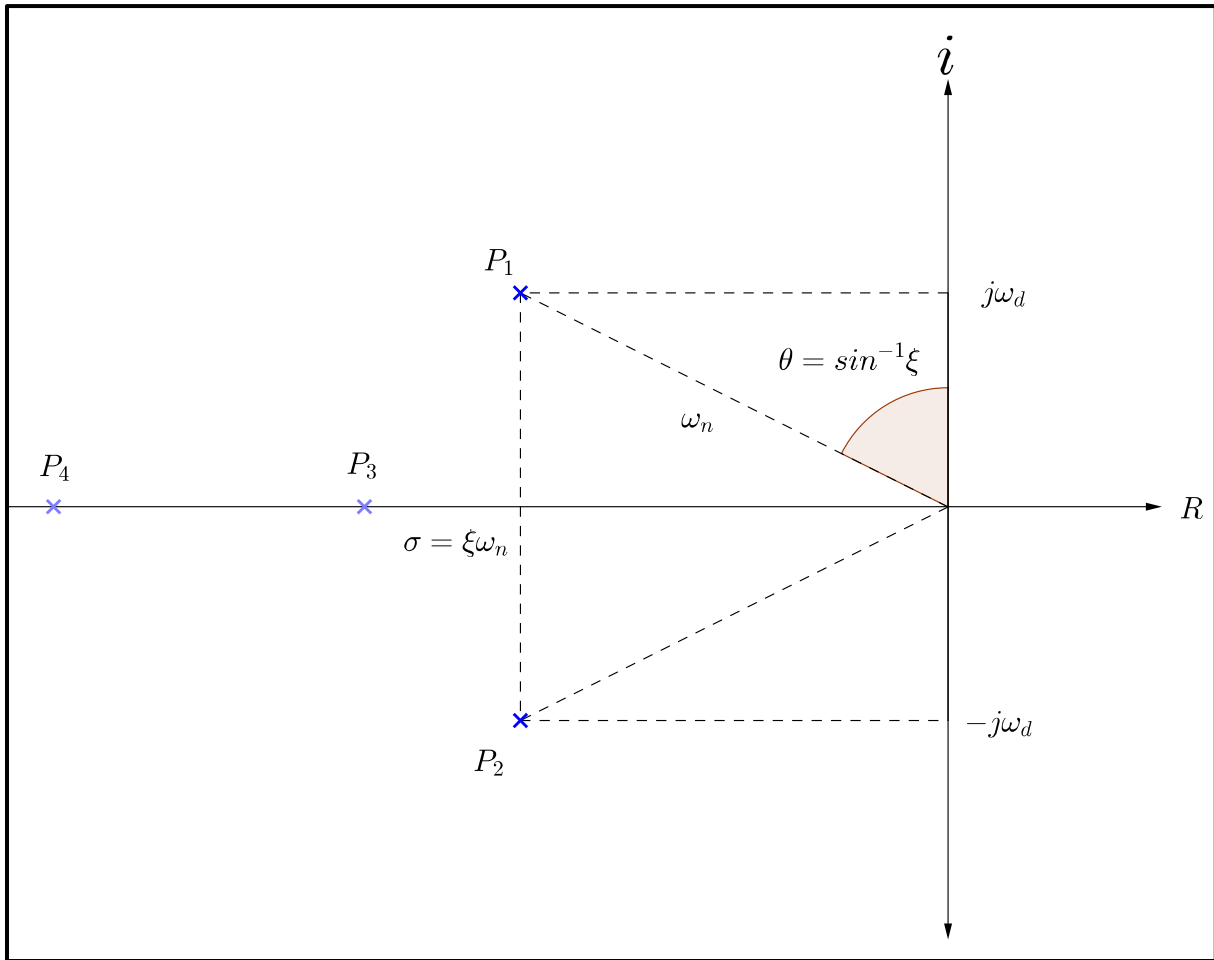


Figura 3.9. Localización de los polos deseados en lazo cerrado

Con la ubicación de los polos obtenemos la ecuación característica en lazo cerrado deseada del sistema como sigue:

$$\begin{aligned}
 & (s + 2.625 - 2.315i)(s + 2.625 + 2.315i)(s + 40)(s + 80) \\
 & = s^4 + 125.25s^3 + 3842.25s^2 + 18270s + 39199.5
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Teniendo la ecuación característica deseada utilizamos el método de comparación directa para encontrar el vector de control  $K$

$$|sI - A + BK| = s^4 + 125.25s^3 + 3842.25s^2 + 18270s + 39199.5 \quad (3.23)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 81.4033 & -45.8259 & -0.9319 \\ 0 & 122.0545 & -44.0960 & -1.3972 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 83.4659 \\ 80.3162 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4].$$

Desarrollando el determinante anterior y despejando los valores de las constantes, obtenemos el vector de control:

$$K = [-10.7415 \quad 63.1895 \quad -5.6783 \quad 6.8725]. \quad (3.24)$$

### 3.3.3 DISEÑO DE REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

El controlador está definido como

$$u = -Kx \quad (3.25)$$

y al sustituir la ecuación anterior en la ecuación (3.15) obtenemos la ecuación de lazo cerrado del sistema:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3.26)$$

Entonces el problema es diseñar el vector de ganancias  $K$  tal que  $A - BK$  para que el sistema sea estable y que la solución tienda de manera asintótica a la referencia propuesta.

El vector  $K$  es calculado minimizando la siguiente función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.27)$$

donde  $Q$  y  $R$  son matrices para penalizar a las variables de estado y a la acción de control. Seleccionando  $Q$  y  $R$  como:

$$Q = \begin{bmatrix} 5.3859 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 86.1741 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 0.0460$$

por lo tanto, el vector de ganancias  $K$  está definido como:

$$K = [10.8206 \quad -67.2905 \quad 6.1728 \quad -7.1159]. \quad (3.28)$$

## 4. RESULTADOS

### 4.1 SIMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN LAZO CERRADO

En esta sección se demostrará la efectividad de los controladores diseñados y aplicados al sistema modelado en MATLAB por medio de una simulación. Las velocidades de los ángulos del servo y el péndulo son calculadas tomando la derivada y filtrando el resultado a través de un filtro pasa-altas. La señal de referencia  $\theta_d$  es una onda cuadrada de 0.1 Hz. El brazo del péndulo debe mantenerse en la posición vertical mientras se sigue  $\theta_d$ . La posición inicial del péndulo es la posición vertical invertida.

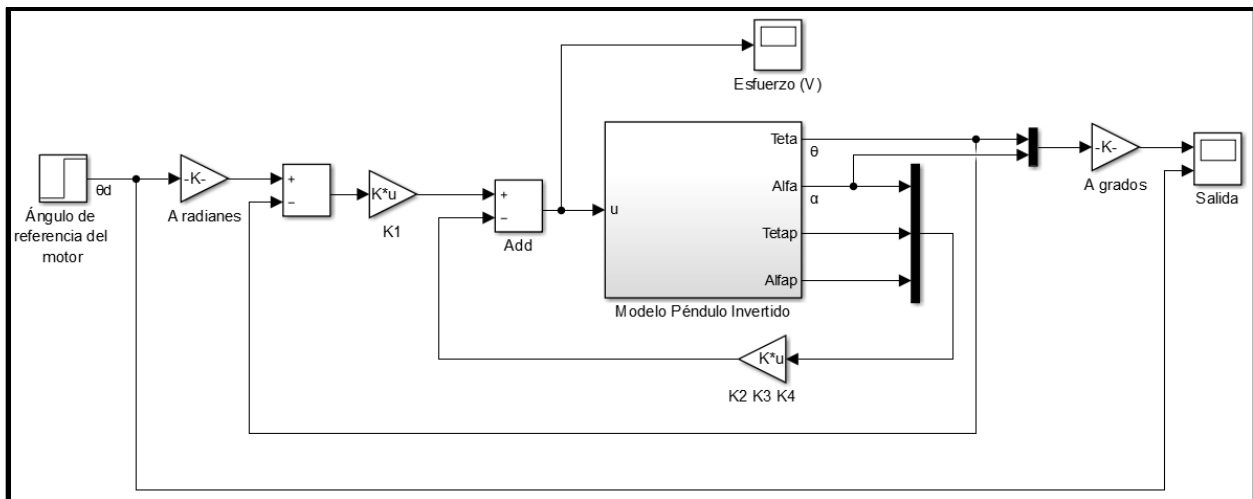


Figura 4.1. Sistema de control simulado en Simulink para modelo no lineal.

#### 4.1.1 CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS

En la Fig. 4.2 se presenta la entrada de voltaje aplicada, se observa que se mantiene dentro de las especificaciones, es decir debajo de  $\pm 10$  V, con un valor absoluto menor de 8 V, cumpliendo así una de las especificaciones requeridas. El pico en la entrada de control se da cuando el brazo actuado se mueve  $\pm 20$  grados, de tal manera que alcance a compensar dicho movimiento para que el péndulo se mantenga en la posición vertical de arriba.

En la Fig. 4.3 se presentan la referencia del brazo  $\theta_d$  que se encuentra actuado y el valor real del mismo, es decir,  $\theta$ . El brazo sigue la señal cuadrada con un ángulo de  $\pm 20$  grados.

Se puede observar en la Fig. 4.3 y en la Fig. 4.4 que mientras se sigue la referencia de la entrada  $\theta_d$ , el brazo del péndulo se mantiene en su posición vertical, cumpliendo con la condición impuesta al ángulo del péndulo, es decir, que se cumpla la cota:  $|\alpha| < 10$  grados. En la Fig. 5 podemos observar la posición del péndulo, la posición del brazo y la posición deseada del brazo. Es claro que la acción de control compensa la perturbación que genera la referencia definida para el brazo, la cual se ve reflejada en el ángulo del péndulo. Finalmente podemos decir que el controlador por ubicación de polos cumple satisfactoriamente el problema de control definido.

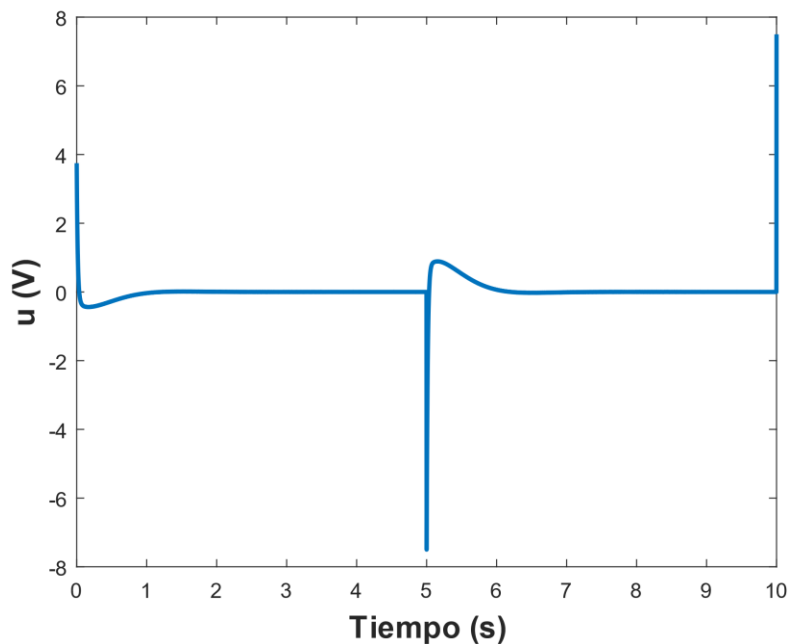


Figura 4.2. Entrada de control.

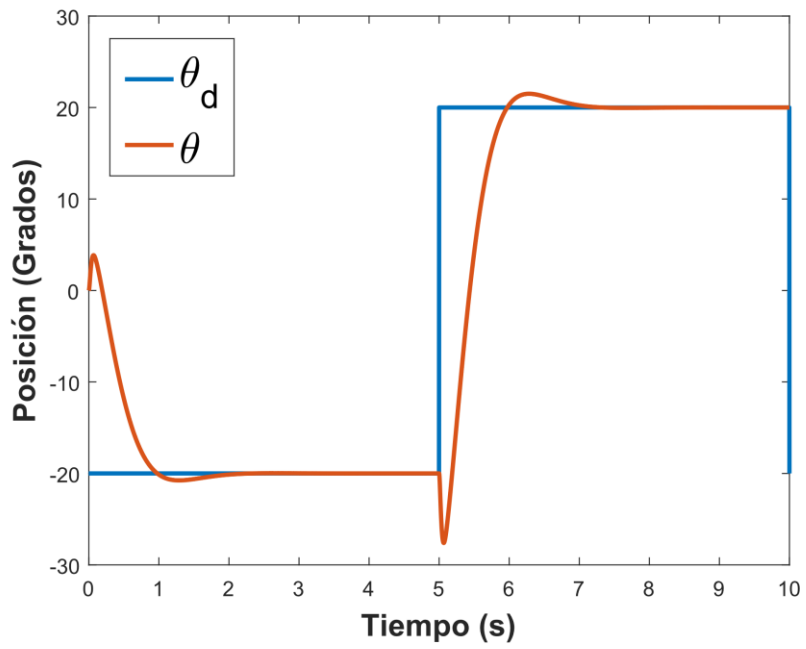


Figura 4.3. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo simulado ( $\theta$ ).

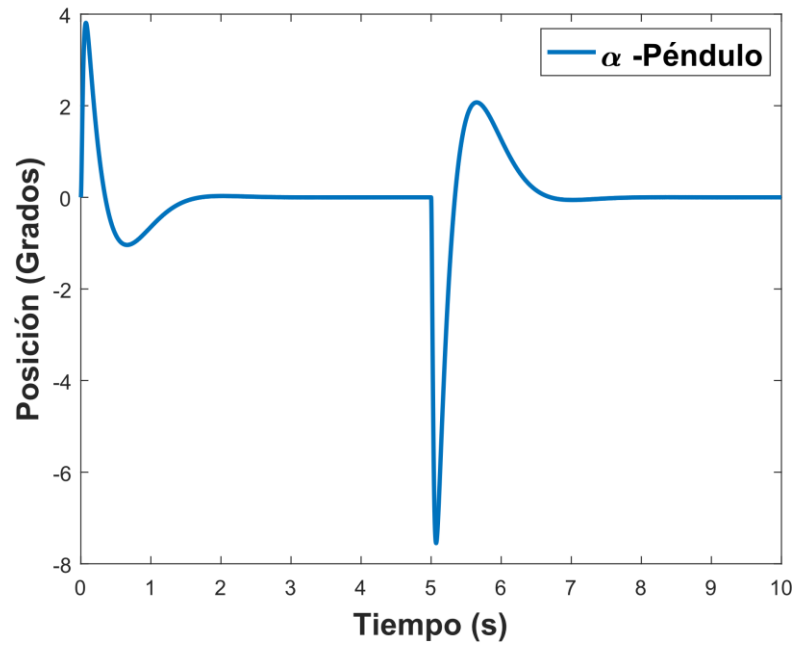


Figura 4.4. Posición del péndulo.

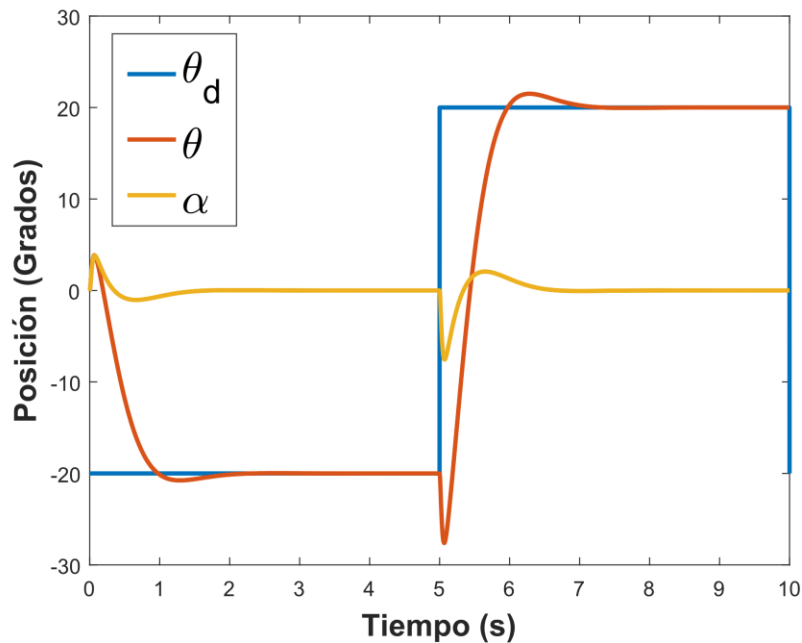


Figura 4.5. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ).

#### 4.1.2 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

En la Fig. 4.6 se presenta la entrada de voltaje aplicada. Se observa que la entrada cumple con  $|u| < 10$  V. Al comparar la entrada de control de la Fig. 4.2 y la Fig. 4.6 podemos establecer que el regulador lineal cuadrático gasta un poco menos de energía que el controlador por ubicación de polos.

En la Fig. 4.7 se presentan la referencia del brazo  $\theta_d$  y el valor real del mismo  $\theta$ . En la Fig. 4.8 se puede observar que el brazo del péndulo se mantiene en su posición vertical cumpliendo con  $|\alpha| < 10$  grados. En la Fig. 4.9 podemos observar la posición del péndulo, la posición del brazo y la posición deseada del brazo.

Al comparar los resultados de ambos controladores mostrados en las figuras 4.3, 4.4, 4.7 y 4.8, notamos que las respuestas son similares, con la diferencia que el regulador cuadrático lineal presenta un transitorio más rápido, pero menos suave que el controlador por ubicación de polos. Ambos controladores satisfacen los requerimientos deseados.

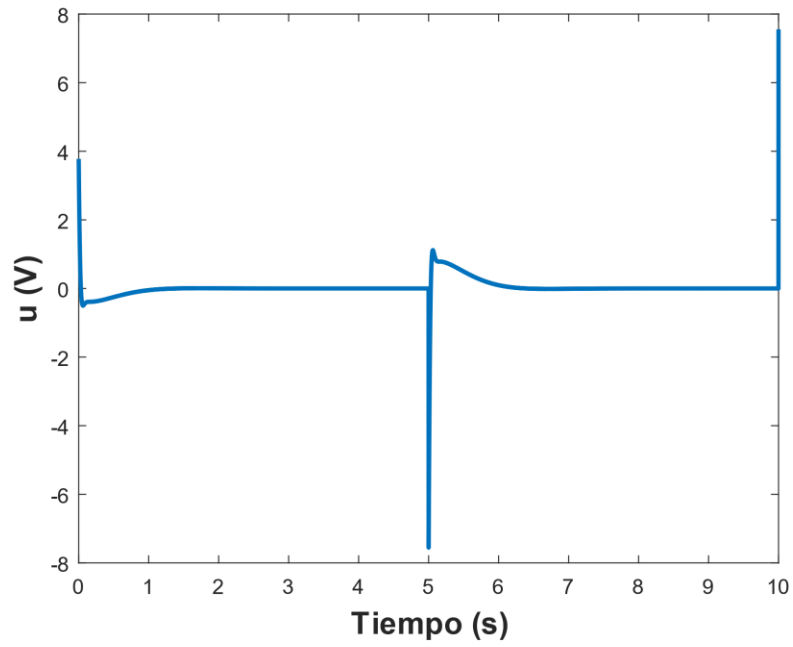


Figura 4.6. Entrada de control.

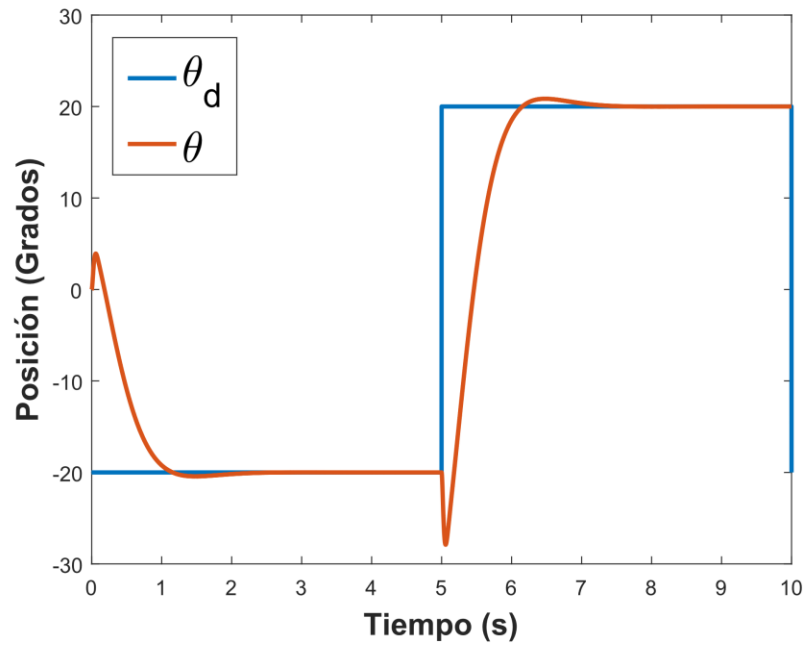


Figura 4.7. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo simulado ( $\theta$ ).

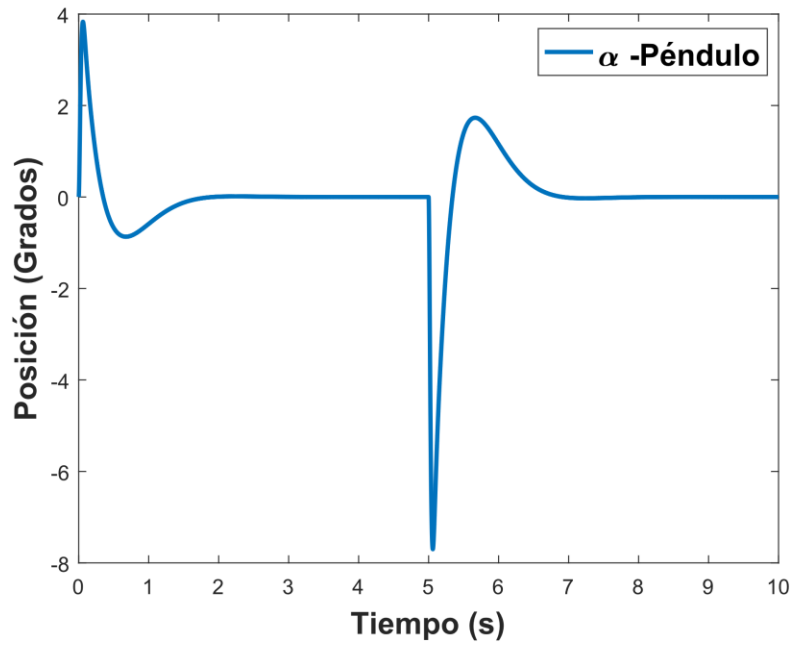


Figura 4.8. Posición del péndulo.

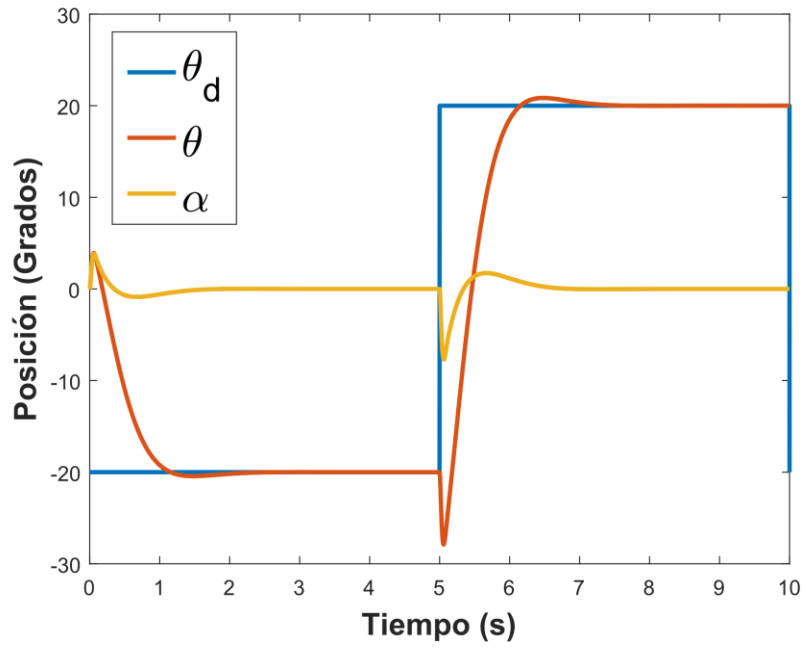


Figura 4.9. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ).

## 4.2 SIMULACIÓN DEL MODELO SIMSCAPE EN LAZO CERRADO

En esta sección se demostrará a través de simulaciones numéricas la efectividad de los controladores diseñados y aplicados al sistema utilizando el modelo desarrollado por Quanser con el toolbox de Simscape (ver Fig. 4.10).

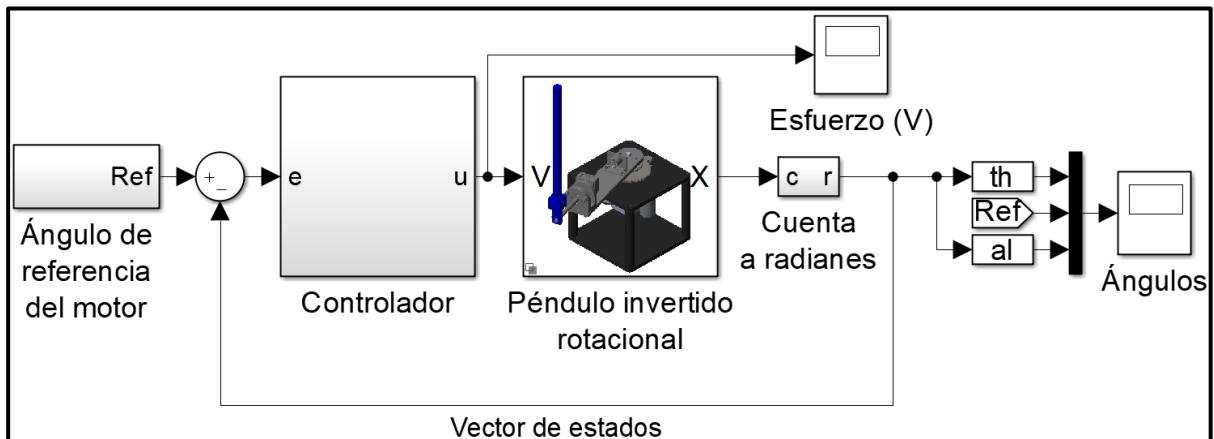


Figura 4.10. Sistema de control con Simscape y Simulink.

### 4.2.1 CONTROLADOR POR ASIGNACIÓN DE POLOS

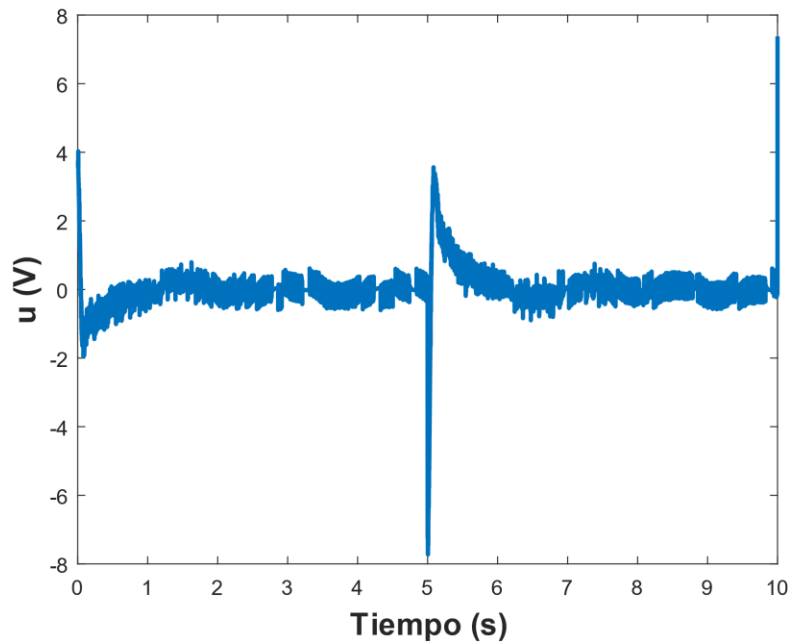
En la Fig. 4.11 se presenta la entrada de voltaje aplicada, se observa que se mantiene dentro de las especificaciones, es decir debajo de  $\pm 10$  V, con un valor absoluto menor de 8 V, cumpliendo así una de las especificaciones requeridas. Se puede observar además que dicha entrada de control no es suave, esto es debido a que en el modelo de Simscape se toman en cuenta las diferentes dinámicas no lineales existentes en el sistema físico.

En la Fig. 4.12 se presentan la referencia del brazo  $\theta_d$  que se encuentra actuado y el valor real del mismo, es decir,  $\theta$ . El brazo sigue la señal cuadrada con un ángulo de  $\pm 20$  grados.

Se puede observar en la Fig. 4.12 y en la Fig. 4.13 que mientras se sigue la referencia de la entrada, el brazo del péndulo se mantiene en su posición vertical, además que la delimitante impuesta al ángulo del péndulo  $|\alpha| < 10$  grados se cumple de manera satisfactoria. Todos los requerimientos establecidos en la definición del problema se han cumplido, manteniendo las

cotas establecidas. En la Fig. 4.14 podemos observar la posición del péndulo, la posición del brazo y la posición deseada del brazo.

Finalmente podemos observar en las diferentes figuras que el modelo dinámico desarrollado mediante el Simscape presenta de manera precisa las dinámicas del péndulo invertido rotacional.



*Figura 4.11. Entrada de control.*

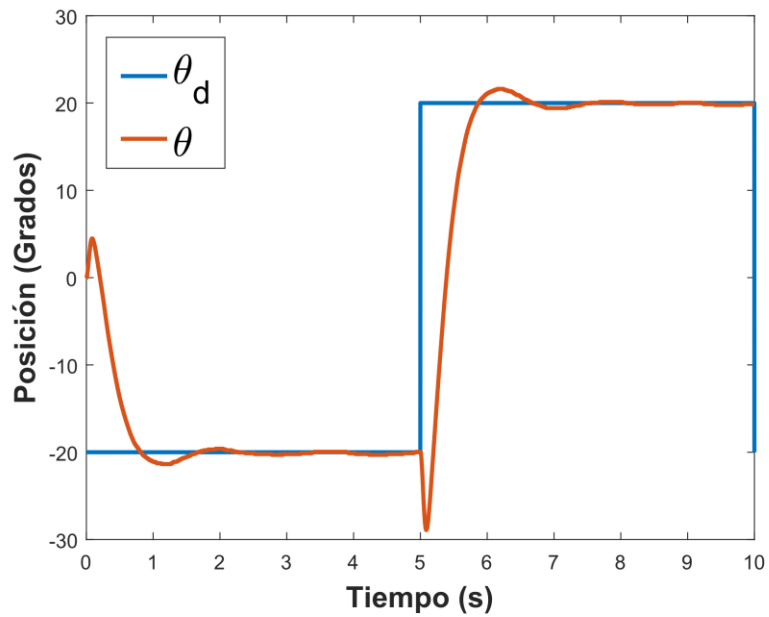


Figura 4.12. Posición del brazo deseada  $\theta_d$  y posición real del brazo real  $\theta$ .

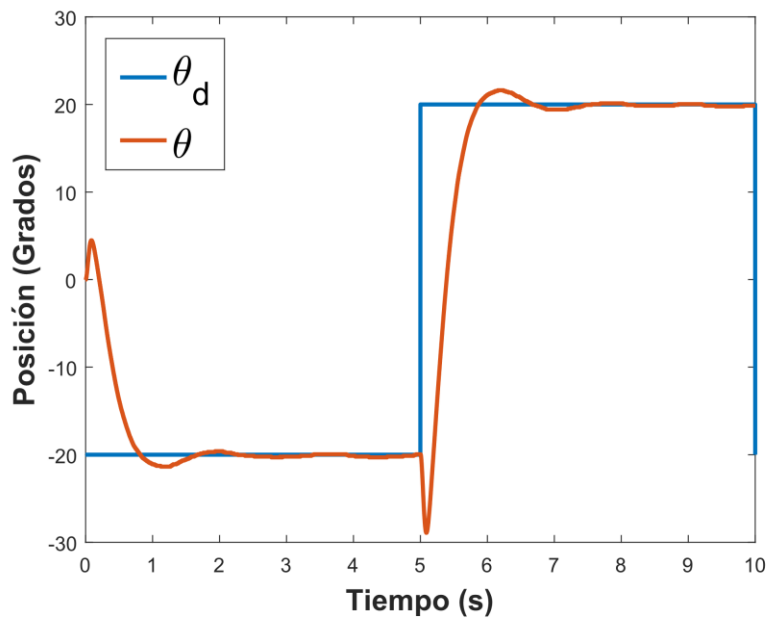


Figura 4.13. Posición del péndulo.

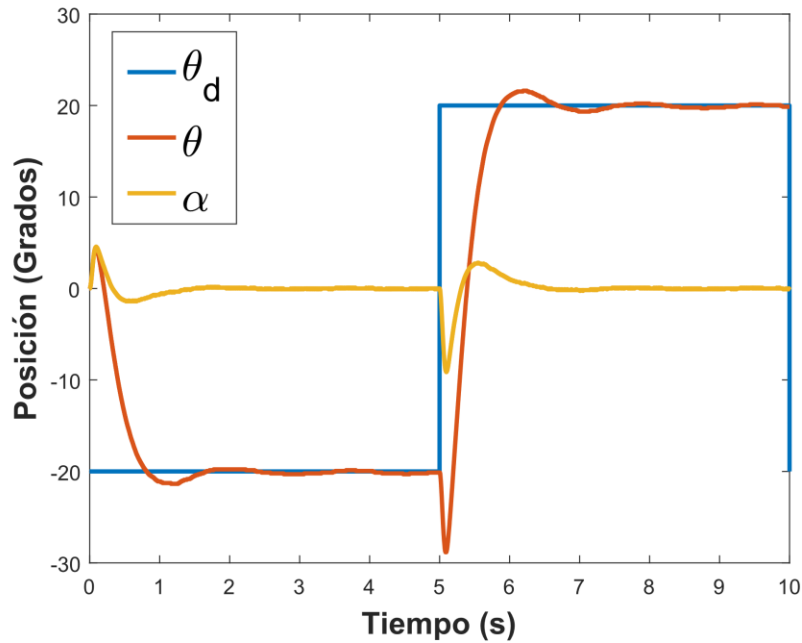


Figura 4.14. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ).

## 4.2.2 REGULADOR LINEAL CUADRÁTICO

En la Fig. 4.15 se presenta la entrada de voltaje aplicada. Se observa que la entrada cumple con  $|u| < 10$  V. En la Fig. 4.16 se presentan la referencia del brazo  $\theta_d$  y el valor real del mismo  $\theta$ . En la Fig. 4.17 se puede observar que mientras se sigue la referencia de  $\pm 20$  grados, el brazo del péndulo se mantiene en su posición vertical cumpliendo con  $|\alpha| < 10$  grados. En la Fig. 4.18 podemos observar la posición del péndulo, la posición del brazo y la posición deseada del brazo.

Al comparar los resultados de ambos controladores mostrados en las figuras 4.12, 4.13, 4.16 y 4.17, notamos que las respuestas son similares, con la diferencia que el regulador cuadrático lineal presenta un transitorio más rápido, pero menos suave que el controlador por ubicación de polos, diferencia que se estableció en las simulaciones con el modelo matemático. Ambos controladores satisfacen los requerimientos deseados.

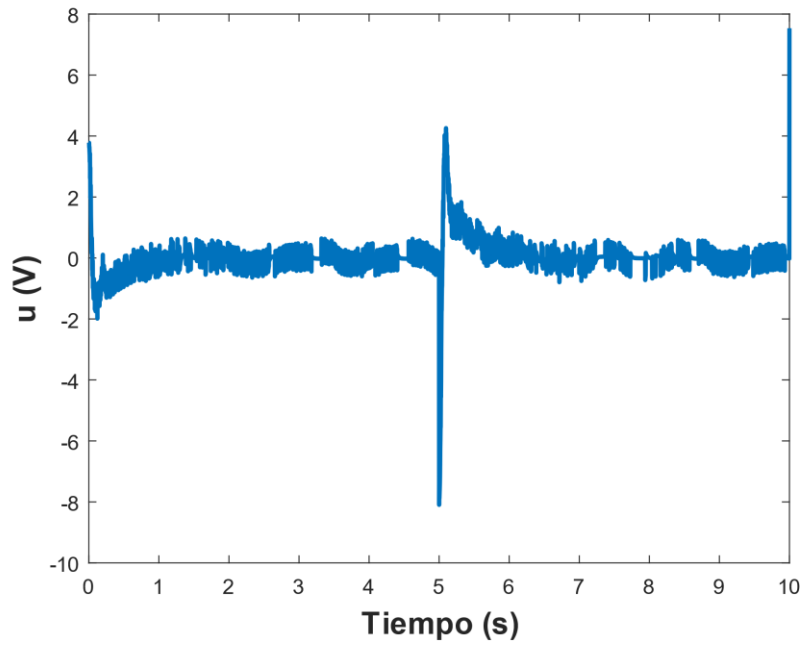


Figura 4.15. Entrada de control.

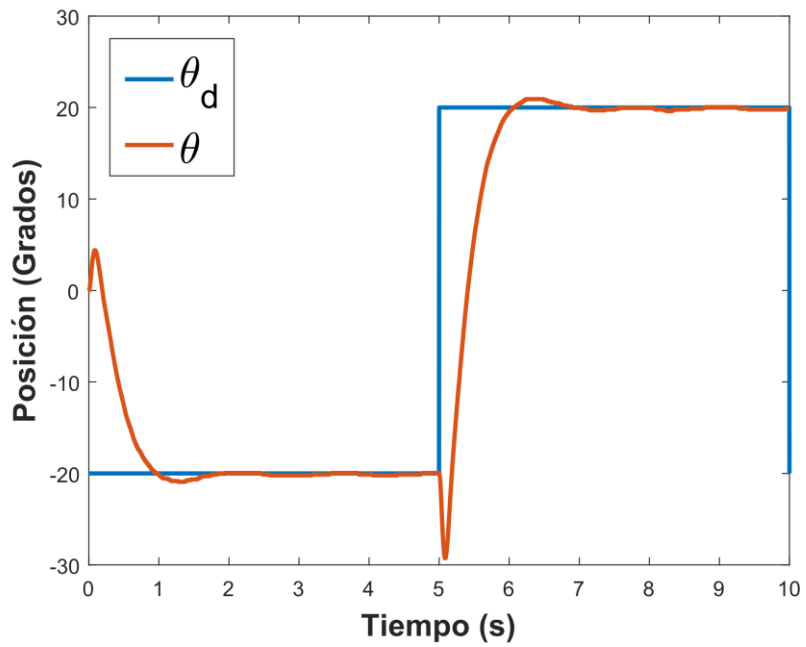


Figura 4.16. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ) y posición del brazo real ( $\theta$ ).

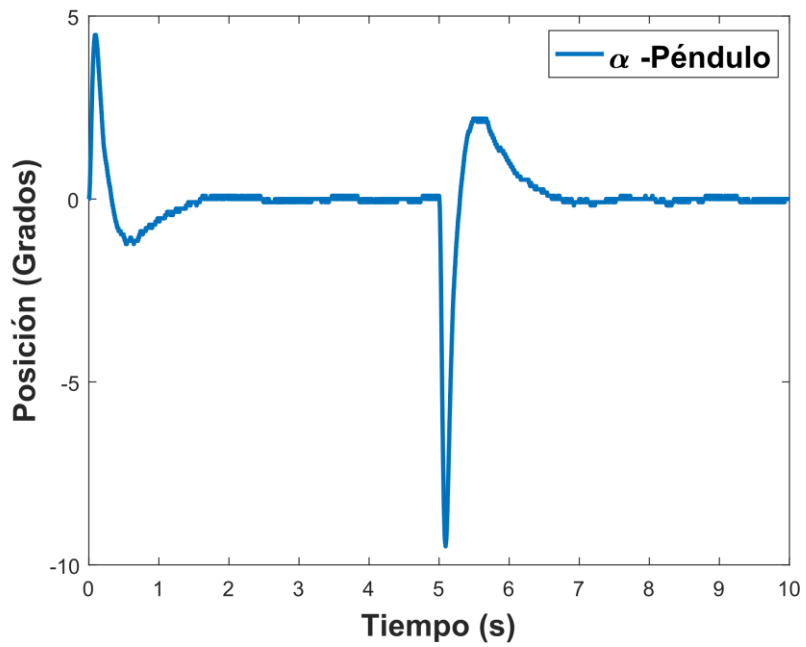


Figura 4.17. Posición del péndulo.

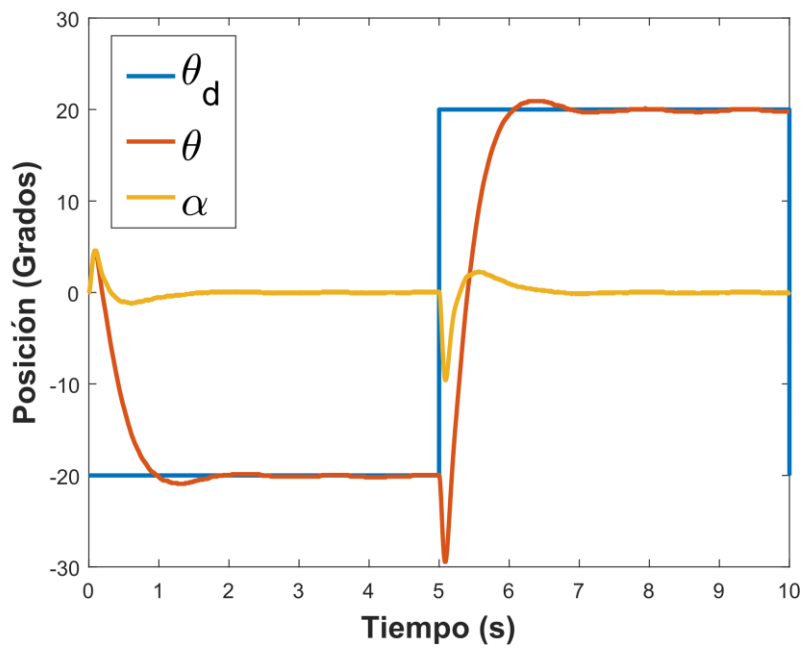


Figura 4.18. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ).

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

### 5.1 CONCLUSIONES

El problema de diseño de un controlador de balanceo para el péndulo invertido rotacional que es altamente inestable y no lineal se abordó en este trabajo. El objetivo principal es diseñar controladores lineales que resuelvan el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo. Primero se utilizó el método de asignación de polos por comparación directa para obtener la entrada de control que resuelve el problema de estabilización del péndulo cumpliendo con las restricciones establecidas sobre la entrada de control y el ángulo del péndulo. Luego se utilizó un regulador óptimo cuadrático, tal que, el sistema no perturbado sea estable alrededor de la posición invertida inestable, mientras que la energía de la señal de entrada es apropiada. Ambos controladores resolvieron el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo mientras se sigue la señal de referencia de entrada, cumpliendo con las especificaciones de diseño de manera satisfactoria.

Los resultados fueron validados utilizando un modelo del péndulo rotacional invertido desarrollado con el toolbox Simscape™, el cual provee un ambiente de simulación multicuerpo para sistemas mecánicos.

### 5.2 TRABAJO FUTURO

- Debido a que el diseño de los controladores solo se implementó en simulaciones, la primera continuación de este trabajo de investigación es la implementación de controladores en plataforma, verificando así su funcionamiento.
- El propósito de este trabajo era la estabilidad del péndulo en estado vertical, sin embargo, otra parte del control del péndulo es la subida de este a la posición inicial, requiriendo el diseño de otro controlador que realice esta acción.
- Se propone mejorar la robustez del controlador utilizando observadores de estado y diseñando controladores inteligentes que se optimicen automáticamente.

- Finalmente, se propone el modelado de un sistema de control híbrido resuelva el problema de balanceo y de regulación del péndulo invertido rotacional.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abhishek, K., & Ashish, S. (2017). SimMechanics Based Modeling, Simulation and Real-Time Control of Rotary Inverted Pendulum. *11th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO)*. Coimbatore.
- Aguilar-Ibáñez, C. (2009). *Control of the Furuta Pendulum Based on a Linear Differential Flatness Approach*. Ciudad de México: Centro de Investigación en Computación del IPN.
- Boubaker, O. (2003). The Inverted Pendulum: a Fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics. *National Institute of Applied Sciences and Technology*. Túnez.
- Chye, T. K., & Sang, T. C. (1999). *Rotary Inverted Pendulum*. Singapur: Nanyang Technological University.
- Dorf, R. C. (1967). *Modern Control Systems*. Boston: Addison-Wesley Pub. Co.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2002). *Feedback Control of Dynamic Systems. 4ta. Edición*. New Jersey: Prentice Hall.
- Houck, A. C., Katzchmann, R. K., & Ramos, J. L. (2009). Furuta Pendulum. *IFAC Proceedings Volumes Part 1*, 9(8), 131-135.
- Jadlovská, S., & Sarnovsky, J. (s.f.). Complex Overview of Modeling and Control of the Rotary Single Inverted Pendulum System. *Power Engineering and Electrical Engineering*, 11(2), 73-85.
- Jekan, P., & Subramani, C. (2016). Robust Control Design for Rotary Inverted Pendulum Balance. *Indian Journal Of Science and Technology*, 9(28), 1.
- Jesus, J. d., Figueroa, M., Pérez, J. H., & Rumbo, J. (2012). Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio. *Revista Mexicana de Física*, 58, 107-112.
- K. Furuta, M. Y. (1991). *Swing Up Control of Inverted Pendulum*. Tokio: Department of Control Engineering.
- Mahmoud, S., & Xia, Y. (2012). *Applied Control Systems Design*. Berlin: Springer-Verlag London Limited.
- Mori, S., & H. Nishihara, K. F. (1976). Control of unstable mechanical systems : Control of Pendulum. *International Journal of Control*, 23(5), 673-692.
- Nise, N. S. (2011). *Control Systems Engineering. 6th. Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Ogata, K. (1970). *Modern Control Engineering*. New Jersey: Prentice Hall.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Madrid: Pearson.

- Quyen, N. D., & Thuyen, N. V. (2012). Rotary Inverted Pendulum and Control of Rotary Inverted Pendulum by Artificial Neural Network. *Proc. Natl. Conf. Theor. Phys*, 37, 243-249.
- Roberge, J. K. (1960). *The Mechanical Seal*. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge: Department of Electrical Engineering.
- Schaffer, J., & Cannon, R. (1967). On the control of unstable mechanical systems. *Automatic and Remote Control III: Proceedings of the Third Congress of the International Federation of Automatic Control*, 1(6), 13.
- Sukontanakarn, V., & Parnichkun, M. (2009). *Real-time optimal control for rotary inverted pendulum*. Asian Institute of Technology. Pathumtani: Mechatronics, School of Engineering and Technology.
- Tejado, I., & Torres, D. (2016). Physical Modeling Based Simulators to Support Teaching in Automatic Control: the Rotatory Pendulum. *11th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, Vol. 49(6), pág. 75–80. Bratislava.
- Toro, R. (2009). *Diseño y control de un péndulo Furuta para su utilización en las aulas de clase de la universidad EAFIT*. Universidad EAFIT. Medellín: Departamento de Ingeniería Mecánica.

# APÉNDICE

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1. Convenciones para el péndulo rotacional invertido.....	27
Figura 3.2. Modelo de Simscape-Simulink .....	34
Figura 3.3. Ángulo del péndulo $\alpha=150^\circ$ .....	34
Figura 4.1. Sistema de control simulado en Simulink para modelo no lineal.....	43
Figura 4.2. Entrada de control. ....	44
Figura 4.3. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo simulado ( $\theta$ ). ....	45
Figura 4.4. Posición del péndulo. ....	45
Figura 4.5. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ). ....	46
Figura 4.6. Entrada de control. ....	47
Figura 4.7. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo simulado ( $\theta$ ). ....	47
Figura 4.8. Posición del péndulo. ....	48
Figura 4.9. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ). ....	48
Figura 4.10. Sistema de control con Simscape y Simulink.....	49
Figura 4.11. Entrada de control. ....	50
Figura 4.12. Posición del brazo deseada $\theta_d$ y posición real del brazo real $\theta$ .....	51
Figura 4.13. Posición del péndulo. ....	51
Figura 4.14. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ), posición del brazo ( $\theta$ ) y posición del péndulo ( $\alpha$ ). ....	52
Figura 4.15. Entrada de control. ....	53
Figura 4.16. Posición del brazo deseada ( $\theta_d$ ) y posición del brazo real ( $\theta$ ).....	53
Figura 4.17. Posición del péndulo. ....	54