



GOBIERNO DEL ESTADO
LIBRE Y SOBERANO DE
BAJA CALIFORNIA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
Escuela Normal Particular Incorporada
“Colegio Ensenada”
Incorporada a la U.A.B.C.



**UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA
CIRCUNFERENCIA A TRAVÉS DE GEOGEBRA.**

TESIS PROFESIONAL

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Presenta

GERARDO SOTO SILVA

Lic. Yadira Ruelas Ontiveros

Escuela Normal Particular Incorporada
“Colegio Ensenada”
Incorporada a la U.A.B.C.



**UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA
CIRCUNFERENCIA A TRAVÉS DE GEOGEBRA.**

Tesis Profesional

Que Presenta:

GERARDO SOTO SILVA

Tijuana, B. C.

Abril 2025



Escuela Normal Particular Incorporada
Colegio Ensenada
Incorporada a la U.A.B.C.

ÁREA DE INVESTIGACIÓN
COMISIÓN DE EXÁMENES RECEPCIONALES

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Tijuana B. C., abril 2025

C. GERARDO SOTO SILVA

PASANTE DEL VIII SEMESTRE DE LA LICENCIATURA
EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
PRESENTE

El suscrito asesor del Seminario de Elaboración del Documento Recepcional,
DICTAMINA, que después de haber analizado el Trabajo de Tesis Titulado:

**UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA
CIRCUNFERENCIA A TRAVÉS DE GEOGEBRA.**

Presentado por usted, le manifiesto que cumple con los requisitos internamente establecidos y se apega a las normas reglamentarias señaladas por la Comisión de Exámenes Receptorales, para los efectos de Titulación, para ser presentado ante el H. Jurado de Examen Profesional.

ATENTAMENTE
ASESORA DE METODOLOGÍA DE LA
H. COMISIÓN DE EXÁMENES RECEPCIONALES.


YADIRA RUELAS ONTIVEROS



Vo. Bo.
DIRECTORA

Escuela Normal Particular
Incorporada a la U.A.B.C.
"Colegio Ensenada"


NORMA LETICIA AYALA CAMACHO

C. c. p. Expediente.

Índice

Dedicatorias.....	I
Agradecimientos.....	II
Capítulo I Delimitación del problema.....	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del problema.....	9
1.3. Hipótesis.....	9
1.4. Objetivos.....	10
1.5. Importancia del estudio.....	11
1.6. Limitaciones del estudio.....	11
Capítulo II Revisión de la literatura.....	13
2.1. Historia de la Ecuación de la Circunferencia.....	13
2.2. Desarrollo del adolescente y teorías del aprendizaje.....	18
2.3. Planes y programas de estudio de preparatoria.....	22
2.4. Aprendizaje basado en competencias.....	26
2.5. Uso de las tecnologías educativas EdTech.....	34
2.6. Uso de GeoGebra como herramienta para enseñar y aprender matemáticas.....	39
Capítulo III Metodología.....	41
3.1. Sujeto de estudio.....	43
3.2. Material utilizado.....	44
3.3. Procedimiento.....	51
Capítulo IV Análisis de resultados.....	53
4.1. Análisis de resultados del test psicosocial.....	53
4.2. Análisis de resultados del examen diagnóstico.....	67
4.3. Varianza y desviación estándar del examen diagnóstico.....	70
4.4. Análisis de resultados obtenidos en el examen final para el sujeto de estudio, cuarto instrumento	71
4.5. Varianza y desviación estándar del examen final.....	73
4.6. Análisis de correlación.....	74

4.7. Prueba de hipótesis.....	76
Capítulo V Discusión de Resultados.....	80
5.1 Conclusión de los resultados.....	80
5.2 Recomendaciones del autor para investigaciones posteriores.....	80
Bibliografía.....	82
Anexos.....	84
Instrumento 1. Test psicosocial para el sujeto de estudio.....	84
Instrumento 2. Examen diagnóstico para el sujeto de estudio.....	87
Instrumento 3. Cuadernillo de estrategias.....	90
Instrumento 4. Examen final para el sujeto de estudio.....	133

Dedicatorias

Dedico mi tesis con mucho cariño a mis queridos padres Olga Lidia Silva López y Gerardo Soto Campa, por ser quienes confiaron en mí y ser ellos los que con una palabra de aliento día a día me motivaron incansablemente en este trayecto lleno de dificultades.

A mi hermosa y amada compañera, a mi amor Dennsis Meza Rochín que día a día me motivó alcanzar mi meta, a ella quien con mucho amor creyó en mí, por ser quien estuvo conmigo en los momentos difíciles y en los momentos de felicidad, porque a pesar de todo siempre apoyó incondicionalmente este proyecto siendo mi pilar y mi fortaleza.

A mi hermoso hijo, Aturo Soto Meza, a mi pequeño gran amigo y compañero de aventuras, mi motivación y mi dosis diaria de felicidad. Prometo enseñarte lo más hermoso que hay en esta vida y a ser un hombre honorable. Mi niño, eres tal como te soñé.

A mi padre, que se adelantó en este caminar terrenal, el hombre que me enseñó a ser hombre de respeto, a mi amigo que incondicionalmente me tomó de la mano cuando pequeño hasta mi adultez.

A mi madre, que con amor, dulzura y cariño, ha estado al pendiente de mi desde el día 1 con firmeza y dedicación, dando su vida entera por mis hermanos y por mi. A mis hermanos Jonathan Soto Silva, Nallely Vianey Soto Silva y Daniel Soto Silva, por confiar en mí, porque ellos han sido parte mí inspiración y por permitirme ser para ustedes un ejemplo.

¡Gracias a todos!

Agradecimientos

Quiero agradecer principalmente a mi amor Dennsis , porque siempre me motivó y apoyó cada vez que lo necesite, por el acompañamiento incondicional y por brindar siempre el acompañamiento durante el transcurso de mi carrera.

A mis padres por haber dado juntos siempre algo más que solo apoyo moral, porque con esfuerzo y sacrificio me sacaron de un apuro, porque sé que hicieron hasta lo imposible en muchas ocasiones para que lograra avanzar día a día, porque cuando me miraron casi rendido a empujones me animaron a continuar y no bajaron la guardia. Madre muchas gracias porque tu coraje, paciencia y amor incondicional me ayudaron a nunca darme por vencido, por inculcarme la fe en Dios y por demostrarme con hechos que realmente todo es posible con él.

Padre gracias por ser mi ejemplo a seguir, por enseñarme como es un hombre de verdad, gracias también por tus consejos y enseñanzas sobre la vida, pues a pesar de todo tu esfuerzo e incansable trabajo nunca te rendiste ante las adversidades de la vida, por mantenernos siempre unidos bajo un mismo techo.

A mis hermanos, porque ustedes estuvieron en la parte difícil y sé que en muchas ocasiones se vieron afectados en varias formas por no dejarme solo, todo eso lo tengo presente.

Agradezco de igual manera a mi maestra asesora de investigación Yadira Ruelas Ontiveros porque con su conocimiento e innovadoras técnicas de enseñanza guió de manera eficaz la preparación de este documento y por su oportuno apoyo.

A mis familiares y amigos, por haberme apoyado y motivado con las buenas vibras y creer en mí, porque en muchas ocasiones me tendieron la mano cuando más lo necesité.

Atentamente

Gerardo Soto Silva

Capítulo I

Delimitación del problema

1.1 introducción.

En geometría los primeros conocimientos que obtuvo el hombre consistían en un conjunto de reglas prácticas. Para que la geometría fuera considerada como ciencia tuvieron que pasar muchos siglos, hasta llegar a los griegos. De esta manera fue Grecia donde se ordenaron los primeros conocimientos empíricos que el hombre adquirió a través del tiempo, al reemplazar la observación y la experiencia por deducciones racionales, se elevó la geometría al plano rigurosamente científico.

En Babilonia Mesopotamia cerca de la región situada entre el Tigris y el río Éufrates nació una civilización cuya antigüedad se remonta a cincuenta y siete siglos aproximadamente. Hace aproximadamente seis mil años los babilonios fueron los inventores de la rueda. Quizá de allí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, eso los llevó a identificar la relación que hay entre la longitud de la misma y su diámetro. Este valor es famoso por que también se encuentra en el libro del antiguo testamento del primer libro de los Reyes. Los babilonios lo encontraron considerando que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscritos en una circunferencia.

Además, cultivaron la astronomía y conociendo que el año tiene aproximadamente trescientos sesenta días, dividieron la circunferencia en trescientos sesenta partes iguales obteniendo el grado sexagesimal. También sabían trazar el hexágono regular inscrito y conocían una fórmula para hallar el área del trapecio rectangular.

Por otra parte, la base de la civilización egipcia era la agricultura. La aplicación de los conocimientos geométricos a la medida de la tierra fue la causa de que se diera a esta parte de la matemática el nombre de “**Geometría**” que significa medida de la tierra.

Hace más de 20 siglos fue construida la “Gran Pirámide”. Un pueblo que emprendió una obra de tal magnitud poseía, sin lugar a dudas, extensos conocimientos de geometría y astronomía ya que se ha comprobado que además de la precisión que están determinadas sus dimensiones, la Gran Pirámide de Egipto está perfectamente orientada. La matemática egipcia la conocemos a través de los papiros y entre los problemas

geométricos que aparecen resueltos en ellos se encuentran los siguientes: área del triángulo, área del trapecio isósceles, área del círculo. Además, en los papiros hay un estudio sobre los cuadrados que hace pensar que los egipcios conocían algunos casos particulares de la propiedad del triángulo, que más tarde inmortalizó Pitágoras.

En Grecia no se concentraron en saber reglas y resolver problemas particulares, no se sintieron satisfechos hasta obtener explicaciones racionales de las cuestiones en general y específicamente de las geométricas. Allí comienza la geometría como ciencia deductiva. Aunque es probable que algunos matemáticos griegos como Tales, Herodoto, Pitágoras, entre otros fueran a Egipto a iniciarse en los conocimientos geométricos ya existentes en dicho país, su gran mérito está en que es a ellos a quienes se debe la transformación de la geometría en ciencia educativa.

Por su parte Tales De Mileto en el siglo VII A.C fue uno de los siete sabios fundadores de la escuela jónica a la cual pertenecieron algunos matemáticos como Anaximandro, Anaxágoras, etc. Se dedicó al estudio de la filosofía y ciencias, especialmente en geometría. Sus estudios lo condujeron a resolver ciertas cuestiones como la determinación de distancias inaccesibles, la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles el valor del ángulo inscrito y la demostración de los conocidos teoremas que llevan su nombre, relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

Otro de los grandes pensadores que hizo importantes aportaciones a la geometría fue Pitágoras De Samos. Siglo VI A. C. Se dice que fue discípulo de Tales, pero apartándose de la escuela jónica, fundó en Crotona, Italia, la escuela pitagórica. Hemos dicho que los egipcios conocieron la propiedad del triángulo rectángulo cuyos lados miden tres, cuatro y cinco unidades, en los que se verifica la relación: cinco al cuadrado es igual a tres al cuadrado más cuatro al cuadrado, pero el descubrimiento de la relación: $a^2 + b^2 = c^2$ para cualquier triángulo rectángulo y su relación se debe indiscutiblemente a Pitágoras. También se le atribuye la demostración de la suma de los ángulos internos de un triángulo y la construcción geométrica del polígono estrellado de cinco lados.

Quien realizó importantes aportaciones sobre el cálculo más aproximado de π fue Arquímedes de Siracusa 287-212 A. C. propuso además estudios sobre, el área de la elipse, el volumen del cono, de la esfera, etc. Estudió la llamada espiral de Arquímedes que sirve para la trisección del ángulo.

La geometría analítica es una rama de la matemática en la que las líneas rectas, curvas y figuras se representan mediante ecuaciones algebraicas y numéricas que utilizan un conjunto de ejes y coordenadas cartesianas para su representación gráfica.

Otro filósofo matemático que tuvo influencia sobre el desarrollo de la geometría analítica fue René Descartes con su aportación sobre el eje de coordenadas cartesianas nombrado así en honor a su nombre. También trabajó con problemas geométricos que tenían base en un sistema de coordenadas y su transformación a ecuaciones algebraicas.

La geometría analítica se divide en dos secciones: La primera que es geometría analítica bidimensional o geometría analítica plana para ecuaciones con dos variables, y geometría analítica tridimensional o geometría analítica sólida para ecuaciones de tres variables.

En cuanto al desarrollo de la educación hubo personas que hicieron importantes descubrimientos y teorías del aprendizaje en el ser humano que hasta la fecha son de gran ayuda para la educación. En primera instancia tenemos al teórico David P. Ausubel que nos habla sobre el "Aprendizaje Significativo por Recepción". Un aprendizaje significativo se produce de modo no arbitrario, es decir no al pie de la letra como el alumno ya sabe. Para el aprendizaje significativo son indispensables que se cumplan dos condiciones. La primera dice que es indispensable que el material que se utilice debe tener cierta congruencia y lógica con lo que se va a enseñar. La segunda condición menciona que el material debe ser potencialmente significativo para el alumno, esto se refiere a que tal material posea en su estructura de conocimiento ideas nuevas con las que pueda relacionarse dicho material. Para lograr el aprendizaje de un nuevo concepto según Ausubel, es necesario realizar un puente cognitivo entre ese nuevo concepto y alguna idea más general ya presente en el alumno. Este puente cognitivo se refiere a un organizador previo y consiste en una o varias ideas generales que se presentan antes que los materiales de aprendizaje propiamente dichos con el fin de facilitar su asimilación. Las

características que un docente debe cumplir para lograr un buen aprendizaje significativo según Ausubel, es presentar la información al alumno como debe ser aprendida en su forma final, presentar adecuadamente los temas y aprovechando los aprendizajes previos del estudiante, dar cierta información al alumno provocando que éste por sí mismo descubra un conocimiento nuevo. El docente debe proveer información, contenidos y temas importantes que sean útiles para que den resultado a nuevas ideas, también tiene que mostrar materiales pedagógicos de forma coloquial y organizada que no distraigan la concentración del observador y conseguir que haya una participación activa.

Algo importante de esta teoría es la manera en que el material de apoyo influye para lograr un aprendizaje significativo, además que debe ser claro conciso y que despierte interés en el alumno, por eso es importante que el estudiante de tercer grado de preparatoria utilice el programa Geogebra para lograr un buen aprendizaje significativo realizando diversas actividades, puesto que el programa permite realizar distintos ejercicios y resolver una gran variedad de problemas de geometría analítica en menor tiempo, de esta manera el educando se interesará por practicar más y lograr una buena calificación en la asignatura. Con esto se cumpliría lo que dice Ausubel “el aprendizaje significativo será mediante el descubrimiento mismo del alumno siempre y cuando se le brinden las herramientas necesarias”.

Por otra parte, Jean William Fritz Piaget hace notar que la capacidad cognitiva y la inteligencia se encuentran ligadas al medio social y físico. Así considera Piaget que los procesos que caracterizan a la evolución y adaptación del psiquismo humano son los de la asimilación y acomodación. Las dos son capacidades innatas que por factores genéticos se van desplegando ante determinados estímulos en diferentes etapas del desarrollo.

La asimilación según Piaget consiste en la interiorización de un objeto o un evento a una estructura de comportamiento mental y cognitiva preestablecida. Por ejemplo, el niño utiliza un objeto para efectuar una actividad que preexiste en su repertorio motor para decodificar un nuevo evento basándose en experiencias y elementos que ya conocía. Por ejemplo, un bebé que aferra un objeto nuevo y lo lleva a su boca, el aferrar y llevar a la boca son actividades innatas que después serán utilizadas para un nuevo objetivo.

La acomodación consiste en la modificación de la estructura cognitiva o del esquema del comportamiento mental para acoger nuevos objetos y eventos que hasta el momento eran desconocidos para el niño, en el caso anterior por ejemplo si el objeto es difícil de aferrar, el bebé deberá modificar las maneras de tomar el objeto. Los dos procesos se alternan dialécticamente en la constante búsqueda de equilibrio para intentar el control del mundo externo con el fin primario de sobrevivir. Cuando un tema nuevo no resulta inmediatamente interpretable basándose en los esquemas preexistentes, el sujeto entra en un momento de crisis y busca encontrar nuevamente el equilibrio, para esto se producen modificaciones en los esquemas cognitivos del niño incorporando así las nuevas experiencias.

Los periodos del desarrollo cognitivo son los siguientes:

1. Periodo sensorio-motor está desde el nacimiento hasta aproximadamente dos años, el uso de reflejos comprende desde el nacimiento y trata de la actividad principal del primer mes de vida. Las reacciones circulares primarias se desarrollan desde el primer mes hasta cuatro meses y medio de vida y se caracterizan por la reiteración voluntaria de una actividad.
2. Periodo de reacciones circulares secundarias que es entre el cuarto mes y medio de vida aproximadamente hasta los ocho o nueve meses, principalmente gracias a la aparición de la capacidad de coordinar los movimientos de las extremidades con los globos oculares.
3. El periodo de operaciones formales es donde se enfoca esta investigación ya que al nivel donde se practicará el uso de estrategias didácticas con Geogebra pertenecen a este rango de edad, pues bien, en la etapa de operaciones el sujeto que se encuentra en la etapa de las operaciones concretas y tiene dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas.

Es desde los 12 años en adelante cuando el cerebro humano está potencialmente capacitado para formular pensamientos realmente abstractos, o un pensamiento de tipo hipotético deductivo, de esta manera podemos decir que tomando en cuenta esta aportación del teórico Piaget podemos plantear que el uso del programa Geogebra

acomoda los conocimientos previos que el alumno conoce sobre geometría analítica e integra el nuevo conocimiento para un buen aprendizaje significativo.

El programa que se utilizará para implementar estrategias de enseñanza es una herramienta de geometría dinámica creada por Markus Hohenwater en el 2001 como un trabajo final para su maestría en la universidad de Salzburgo en Australia. Es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Analizando algunos aspectos de la historia de la educación de nuestro país encontramos que se ha visto truncada por diferentes factores como son la economía, la sobrepoblación y los escasos centros educativos. Además de los problemas psicosociales que presenta cada alumno, la tasa de preparación académica a un nivel licenciatura e ingeniería se han reducido notablemente en las últimas décadas.

El Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) ha actualizado sus planes y programas de estudio para el ciclo escolar 2023-2024, con el objetivo de brindar una formación integral y pertinente a sus estudiantes, alineada con las necesidades del sector productivo y los lineamientos de la Nueva Escuela Mexicana. Para el tema de estudio de ésta tesis que es "La Ecuación de la Circunferencia" encontramos que dicho programa se centra en el desarrollo de competencias profesionales, técnicas y socioemocionales, que permitan a los egresados insertarse de manera exitosa en el mercado laboral. Además los programas de estudio del CONALEP se organizan en módulos y asignaturas, que se imparten a lo largo de los seis semestres que conforman el bachillerato técnico. Cada programa cuenta con un componente teórico y otro práctico, que se complementan con actividades de taller, laboratorio y proyectos.

El programa conalep bachillerato en la unidad uno del tercer grado marca en su contenido para el estudio del tema lo siguiente:

- Aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares.
- Exponer la relación de la trigonometría con la geometría analítica, a partir del análisis grupal de la pendiente de una recta y la forma en que esta varía.
- Demostrar los usos prácticos de la construcción de rectas, ejemplificado los procedimientos empleados para realizar los trazos entre los puntos formados por

pares ordenados, la medición de distancias en superficies cartesianas, la unión de puntos entre los espacios poligonales y la determinación del área circunscrita en polígonos regulares en el plano cartesiano.

- Obtener los valores de la abscisa y ordenada al origen, trazar la recta correspondiente y expresar la ecuación en la forma general, para una serie de situaciones propuestas por el docente.
- Determinar la ecuación general $ax+by+c = 0$, la ecuación pendiente - ordenada en el origen $y = mx + b$:
- Aplicación de los sistemas de coordenadas rectangulares.
- Trazar en un plano los puntos, ejes y cuadrantes mediante las coordenadas de los lugares geométricos en los diferentes contextos en los que se desarrolla.
- Establecer relaciones algebraicas entre diferentes lugares geométricos.

Para saber si las competencias han sido logradas analizaremos los resultados de la prueba planea 2017, para ello debemos conocer sus objetivos y características. La Secretaría de Educación Pública (SEP) en coordinación con la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJORED) y las autoridades educativas de las entidades federativas, aplicaron la prueba Planea en Educación Media Superior el 5 y 6 de abril del 2022, a alumnos y alumnas del último grado en poco más de 18,000 escuelas de Educación Media Superior del país (de carácter público, federal y estatal, en los planteles particulares con Reconocimiento de Validez Oficial de Estudios (REVOE) otorgado por la SEP o por las entidades federativas, así como en las instituciones autónomas y en sus escuelas particulares incorporadas).

Esta prueba tiene el propósito de conocer en qué medida el estudiantado logra dominar un conjunto de aprendizajes esenciales al término de la Educación Media Superior, en dos campos de formación: Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. A su vez también se evalúan los aprendizajes clave de los siguientes ejes temáticos:

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

- Cambios y relaciones.
- Forma, espacio y medida.
- Manejo de la información.

De tal manera una vez obtenidos los resultados los niveles se miden de la siguiente forma:

Nivel I: El estudiantado que se ubica en este nivel tiene un conocimiento insuficiente de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares. Esto refleja mayores dificultades para continuar con su trayectoria académica.

Nivel II: El estudiantado que se ubica en este nivel tiene un conocimiento elemental de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares.

Nivel III: El estudiantado que se ubica en este nivel tiene un conocimiento satisfactorio de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares.

Nivel IV: El estudiantado que se ubica en este nivel tiene un conocimiento sobresaliente de los aprendizajes clave incluidos en los referentes curriculares.

PLANEA Educación Media Superior está diseñada para ofrecer a padres y madres de familia, al estudiantado, al profesorado, la dirección, autoridades educativas y sociedad en general, información específica sobre el logro académico de las escuelas y, utilizada adecuadamente, constituye un potente instrumento que puede contribuir a mejorar la calidad de la educación. Es por ello la realización de esta tesis para contribuir con una herramienta para la estructuración de un plan de trabajo que permita la aprobación de la materia Geometría Analítica, además con las actividades que aquí se presentarán se logre un aprendizaje significativo en alumnos que utilicen Geogebra. De ésta manera el alumno integrará el uso de tecnologías al cursar dicha asignatura. La preocupación por el alto índice de reprobación en alumnos de tercer semestre de preparatoria fue el principal objetivo de realizar esta investigación, como se mostró, que en los grados de preparatoria en los temas “formas geométricas” y “medida” nos indica que los alumnos no tienen buenas bases de estos temas que son necesarios para poder comprender geometría analítica.

La demostración de la hipótesis de esta investigación se llevará a cabo con el método de correlación que consiste en la búsqueda de algún tipo de relación entre dos o más variables y en qué medida la variación de alguna afecta a la otra sin llegar a conocer cuál de ellas pueda ser causa y efecto. Se comprobará o no esa relación entre sí, este

método se inclina a una distribución T Student, dado que la selección de la muestra es muy pequeña para obtener un dato más cercano a la realidad del estudio en una muestra de la población.

1.2 Planteamiento del problema.

Con base en los resultados obtenidos en la prueba planea se pretende realizar material para contribuir a la mejora de los aprendizajes esperados y una mayor aprobación de la materia geometría analítica en el tema "ecuación de la circunferencia", por lo que este trabajo de investigación plantea la siguiente problemática.

¿Existe diferencia en el aprendizaje de la circunferencia entre aquellos alumnos que usan Geogebra y los alumnos que no lo utilizan?

1.3 Hipótesis.

La posible solución a esta problemática se puede encontrar en las técnicas de enseñanza de algunos psicólogos que se dedicaron a la pedagogía. Comenzando por el teórico David P. Ausubel quien nos habla sobre el aprendizaje significativo por recepción. Esto se refiere a que un aprendizaje significativo se produce de modo no arbitrario, es decir, no todo al pie de la letra como el alumno ya lo sabe, para que un aprendizaje sea significativo es necesario que se cumplan dos condiciones. La primera condición dice que es necesario que el material que sea utilizado en clase debe tener cierta congruencia y lógica con lo que se va enseñar. La segunda menciona que el material debe ser significativo para los alumnos, el material también debe poseer una estructura de conocimiento e ideas nuevas y esto incluye las tecnologías. Según Ausubel, es necesario realizar un puente cognitivo entre el nuevo concepto y una idea más general ya existente en el alumno.

Por otra parte, Jean William Fritz Piaget dice que las capacidades cognitivas se encuentran asociadas al medio social y físico, considera que los procesos que caracterizan a la evolución y adaptación de la estructura mental del alumno son los de

asimilación y acomodación. Dice que las dos son capacidades innatas que por factores de herencia genética se van desplegando ante determinados estímulos en diferentes etapas del desarrollo. Habla también de diferentes etapas de aprendizaje y pasando a la última de esta teoría encontramos las operaciones formales, nos enfocaremos principalmente en ésta, ya que el sujeto de estudio se encuentra en la estancia de operaciones concretas que tienen dificultad en aplicar sus capacidades a situaciones abstractas. Por lo anterior se proponen la implementación de estrategias didácticas que incluyan el uso de las tecnologías puesto que lo que mencionan los teóricos es importante aplicar para un buen aprendizaje significativo.

Es por esto, que a través de esta investigación se propone la siguiente hipótesis: **La implementación de estrategias didácticas mediante el uso de Geogebra causa un mejor índice de aprovechamiento en el tema de la circunferencia para alumnos de tercer semestre de preparatoria.**

1.4 Objetivos

- Diseño de estrategias didácticas sobre el tema de la circunferencia por medio de tecnología utilizando el programa GeoGebra.
- Medir el nivel de aprovechamiento académico en el tema de la circunferencia antes y después de utilizar GeoGebra como herramienta didáctica
- Analizar si existe una relación entre la percepción de los estudiantes hacia GeoGebra y su rendimiento académico en matemáticas.
- Evaluar cómo las representaciones visuales y dinámicas de GeoGebra contribuyen a una mejor comprensión del tema de la circunferencia.
- Identificar si los estudiantes que utilizan GeoGebra demuestran un mayor nivel de comprensión conceptual al resolver problemas que requieren aplicar los conocimientos sobre la circunferencia.

1.5 Importancia del estudio.

Algunos de los nuevos conocimientos que aporta la solución a este problema se inclinan a que el alumno adquiera herramientas útiles y necesarias para la solución de problemas en la materia de geometría analítica en el tema de la ecuación de la circunferencia, así como la implementación de las tecnologías para su mayor comodidad siendo esto de gran ayuda para aprobar la materia.

Los grupos más beneficiados con esta investigación son los alumnos de bachillerato de tercer semestre, ya que por el índice de reprobación de la materia según los resultados de la prueba PLANEA existe gran cantidad de estudiantes que no aprueban la materia, probablemente por un programa de estudios mal elaborado, contexto áulico o por que el método de enseñanza no es el adecuado.

Por ello se auxiliará con una herramienta útil que contendrá estrategias didácticas para la implementación en el aula utilizando las nuevas tecnologías.

Por otra parte, con esta investigación se pretende contribuir con una herramienta para aumentar el índice de aprobación y aprovechamiento en matemáticas y ayudar también a evitar que un mayor número de jóvenes deserten en sus estudios a nivel preparatoria y para que al momento de ingresar a un grado de licenciatura o ingeniería lleven consigo buenas bases de geometría analítica.

Por otra parte, con ésta investigación se pretende contribuir con una herramienta para mejorar la comprensión del tema de la circunferencia mediante el uso de tecnologías, que cause que los alumnos lleguen a los siguientes niveles de estudios con buenas bases en los temas de geometría analítica.

1.6 Limitaciones del estudio.

La geometría analítica es una rama fundamental de las matemáticas que establece una conexión entre la geometría y el álgebra. Sin embargo, su aprendizaje y aplicación efectiva pueden verse obstaculizados o limitados por diversos factores. A continuación, se presentan algunas de las limitaciones más comunes:

- Falta de fundamentos sólidos en álgebra.
- Dominio insuficiente de ecuaciones.
- Dificultades con las operaciones con fracciones y radicales.
- Conexión entre lo algebraico y lo geométrico.
- Interpretación de gráficas.
- Falta de práctica y resolución de problemas.
- Ejercicios repetitivos.
- Aplicación a situaciones reales.
- Software de geometría dinámica.
- Cálculos complejos.
- Falta de recursos didácticos

En conclusión encontramos que al abordar estas dificultades de manera sistemática, los estudiantes podrán desarrollar las habilidades necesarias para comprender y aplicar los conceptos de la geometría analítica.

Puede ser también una limitación la falta de interés del educando a las matemáticas. Además que el docente no está dotado de las herramientas necesarias ni de una buena estrategia didáctica que despierte en el alumno interés. También el equipamiento de las aulas en las escuelas es de vital importancia ya que sin las herramientas tecnológicas es imposible educar, dado al avance tecnológico que hay hoy en día.

Directamente en la educación actual la aplicación de instrumentos de evaluación que no estén adecuados al plan y programa de estudios puede ser otra limitación por la cual no pueda llevarse a cabo esta investigación, además desconocer el método de investigación es una limitación para la objetividad en el desarrollo de la investigación.

El método que se utiliza en esta investigación para los resultados aportados por el sujeto de estudio se basa en un método de correlación entre dos variables y se inclina para una distribución T student, referido esto por el tamaño de la muestra, ya que es un grupo de 17 personas y se aleja de la realidad por la información que aporta de la población total estudiantil de alumnos de tercer semestre de preparatoria.

Capítulo II

Revisión de la literatura.

Este capítulo está dedicado a la revisión de la literatura, se describen y analizan los estudios realizados en relación con el objeto de estudio. Se proporcionará un marco teórico que orienta tanto el diseño de la investigación como la interpretación de los resultados. También se revisará y se analizarán los hallazgos sobresalientes vinculados con el tema, los métodos empleados para aproximarse a él, las poblaciones en que se ha estudiado, los resultados contradictorios y las lagunas de conocimientos que aún existen.

En el presente capítulo se hablará sobre lo siguiente;

- 2.1 Historia sobre el tema “Ecuación de la circunferencia”
- 2.2 Desarrollo del adolescente y teorías del aprendizaje
- 2.3 Planes y programas de estudio de preparatoria
- 2.4 Aprendizaje basado en competencias
- 2.5 Uso de las Tecnologías Educativas
- 2.6 Uso de GeoGebra como herramienta para enseñar y aprender matemáticas.

2.1 Historia sobre el tema “ Ecuación de la circunferencia”.

Aquí se encontrarán los diferentes autores de libros que hablan sobre el tema geometría analítica se explicará la forma de trabajar con Geogebra y lo referente a dicho programa.

Según Charles H. Lehmann (geometría Analítica 2004 Limusa) describe lo siguiente: La ecuación de la circunferencia se obtiene a partir de definir a la circunferencia como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que se mantiene siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante anteriormente mencionada se llama radio. El teorema 1 dice que la circunferencia cuyo centro es (h, k) y radio es la constante “ r ”, tiene por ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Por este teorema se observa que, si se conocen las coordenadas del centro, y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Esto sugiere un método para obtener la ecuación de la circunferencia en cualquier problema dado, todo lo que se necesita es tener las coordenadas del centro y la longitud del radio a partir de las condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en geometría elemental implica la determinación del centro y radio, el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener en Geometría Analítica la ecuación de una circunferencia.

Por otra parte, otros autores (Elena De Oteyeza, Emma Lam Osnaya, José Antonio Gómez Ortega, Arturo Ramírez Lores, Carlos Hernández Garcíaiego Geometría Analítica Prentice Hall 1994) definen la circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado centro. Mencionan además que si se desea encontrar la ecuación de la circunferencia que satisface a los puntos (p,x) cuya distancia al origen $(0,0)$ sea igual a r , siendo r cualquier número no negativo. Dichos puntos deben satisfacer $d(P, O) = r$.

Sustituyendo las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, llegamos finalmente a,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Para encontrar la ecuación de una circunferencia cuyo centro sea un punto $C(a,b)$ distinto del origen se construye un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ con centro en C . Con respecto a este nuevo sistema de coordenadas, la circunferencia con centro en C y radio r tiene por ecuación.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Para encontrar la ecuación de la circunferencia con respecto al sistema de coordenadas original XY , se hace la sustitución.

$$X' = x-a \quad y' = y-b$$

Entonces: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Se obtiene: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Que es la ecuación estándar de la circunferencia de radio r con centro en $C(a, b)$.

Si desarrollamos los términos al cuadrado, llegamos a una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

Que se llama *Forma general* de la ecuación de la circunferencia.

A diferencia de los autores anteriores (Benjamín Garza Olvera Matemáticas III GEOMETRÍA ANALÍTICA SEP DGETI SEIT. Dirección general de educación tecnológica industrial, sep 2003). Menciona que geoméricamente, la circunferencia es una curva plana y cerrada cuyos puntos equidistan de otro punto fijo interior llamado *centro*; se denomina *radio* a los segmentos que unen al centro con cualquier punto de la curva.

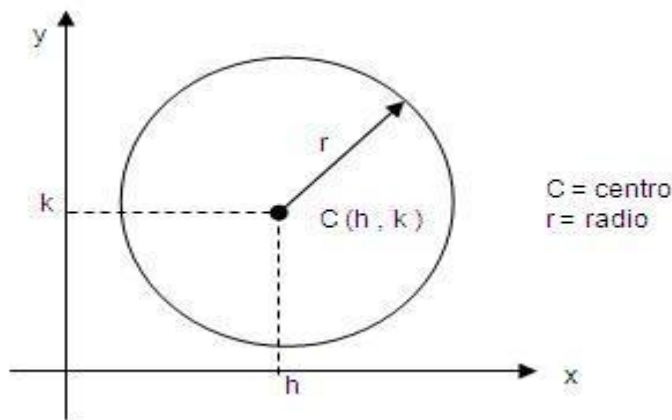
Analíticamente, se representan por una ecuación de segundo grado con dos variables; sin embargo, no toda ecuación cuadrática da lugar a una circunferencia, sólo bajo determinadas condiciones resulta ser verdadera. Una circunferencia queda perfectamente determinada si se conoce su centro y la longitud de su radio.

La circunferencia cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares y tiene por radio la constante r , tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Demostración:

Sea $p(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro en (h,k) fuera del origen y radio r .



Con el origen y el punto cualquiera de la curva, se forma el triángulo rectángulo. Describe a la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria como:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

La cual contiene tres constantes arbitrarias independientes, que son:

$$h, k \text{ y } r.$$

De la misma manera, la ecuación de la circunferencia en su forma general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Contiene también tres constantes arbitrarias independientes que son: D , E y F , por lo anterior, la ecuación de la circunferencia en cualquiera de sus formas (ordinaria y general) se obtiene al determinar los valores de las tres constantes respectivas.

(Geometría Analítica Víctor Manuel Pérez Carrillo físico y maestro en ciencias abril del 2001)

El físico Pérez Carrillo Víctor Manuel menciona que una vez definido el concepto de circunferencia, se puede generalizar de tal forma que sea más versátil para su posterior utilización, por lo que en los siguientes renglones muestra la ecuación de toda circunferencia en su forma cartesiana.

En general, cuando se considera el centro $C(h, k)$ y el radio r , así como un punto $p(x, y)$ en la circunferencia. Por definición el segmento $CP = r$,

Además, la distancia entre los puntos C y P analíticamente es: $\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana de una circunferencia, cuando el centro es un punto cualquiera del plano

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

También conocida como forma ordinaria de la circunferencia. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia, entonces observamos que es un caso particular del paso

anterior en el que el centro de esta es propiamente, el segmento $OP=r$ y analíticamente se puede expresar como:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Luego entonces: $x^2 + y^2 = r^2$

Representa la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r . si $r > 0$ la circunferencia es real.

Si $r = 0$ se dice que es un punto.

Si $r < 0$ es una circunferencia imaginaria.

Para que una ecuación de segundo grado represente una circunferencia es necesario que cumpla ciertos requisitos.

La ecuación de segundo grado: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

Con dos variables representa una cónica, pero en especial interesa que represente una circunferencia, así que se toma la ecuación ordinaria de la circunferencia, cuyo centro es (h, k) y radio r se tiene que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

y desarrollado se obtiene: $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$,

Comparado con $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Para ambas ecuaciones representan una circunferencia se pide que sean iguales, esto es, que los coeficientes de los términos del mismo grado deben ser proporcionales, así que como una de ellas carece de término xy resulta que: $B = C = 1$, $D = 2h$, $E = -2k$

Donde: $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Entonces para que una ecuación de segundo grado represente una circunferencia, se debe de cumplir que carece de término cruzado ($x y$); además los coeficientes de A y C sean iguales y distintas a cero ($A = C \neq 0$).

Por lo tanto $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = C$

Representa la ecuación de una circunferencia en su forma general.

2.2 Desarrollo del adolescente y teorías del aprendizaje.

La adolescencia es una etapa de la vida marcada por profundos cambios biológicos, psicológicos y sociales. Comprender estos cambios es fundamental para diseñar estrategias educativas y de desarrollo que se adapten a las necesidades únicas de este grupo de edad. En este sentido, las teorías del aprendizaje ofrecen marcos conceptuales valiosos para analizar los procesos cognitivos, emocionales y sociales que caracterizan a los adolescentes

Según el aporte del psicopedagogo Adolf Periant (En Adolf Periant (coord.), *Los adolescentes en el siglo XXI*, Barcelona, UOC (manuales psicopedagogía), 2003, pp). Menciona que la adolescencia es una fase del ciclo vital que se inicia con la pubertad. La expresión fase del ciclo vital sugiere que, al hacerse el estudio relacionado con las diferentes fases del mismo, las cuales son; niñez, juventud y adultez. Adolescencia viene del latín *adolecentia* que significa adolecer y crecer, antiguos relatos históricos hablan de las edades de la vida, y entre ellas, aparece la adolescencia, la cual inicia de entre los 14 y 21 años.

Con anterioridad se tenía una perspectiva de la adolescencia distinta a la que podemos manifestar, pues la idea del futuro no toleraba, un componente imaginario y prospectivo ni de búsqueda de alternativas personales en vistas a ser alguien en la vida. Significa también que las habilidades del trabajo eran adquiridas como parte de la actividad rutinaria, además la gran escuela era la vida. Aquí es donde el adolescente adquiere su peculiar sentido, insólito para ellos.

Actualmente el hablar de la adolescencia para muchos implica un tema negativo que conlleva conflictos, crisis conductuales y despierta temor, pues los adolescentes son vistos como las ovejas negras de nuestra sociedad y, peor aún si este concepto además se relaciona con el reto de su sexualidad, que si no se les reprime pueden experimentarla sin límite y con graves consecuencias más afortunadamente, la mayoría de nuestros

adolescentes son seres positivos, idealistas, están llenos de energía y creatividad, cualidades que canalizadas constructivamente, proveen de grandes beneficios no tan sólo para sí mismos, sino para su familia y su comunidad.

A diferencia de la psicóloga Anameli Monroy (coord. Antología de la adolescencia, vol.II, México, onapo /Miguel Ángel Porrúa/ FUNAP (fondo de población de las Naciones Unidas), 1994, PP.) dice que el contexto sociocultural en el que se produce el desarrollo de cada adolescente ejerce una influencia profunda. Dentro de dicho contexto se pueden mencionar: la familia, la educación, el empleo, el desarrollo espiritual, las organizaciones comunitarias, las políticas y la legislación, la migración, el turismo, la urbanización, los medios masivos de comunicación, los servicios de salud, la recreación, el ambiente socioeconómico, como algunos de los elementos que conforman dicho contexto.

En países como el nuestro donde todos estos elementos del contexto sociocultural son diversos y más han ido cambiando muy rápidamente, hace que los adolescentes y sus familias sean más vulnerables al daño y por tanto se vuelve un desafío, pues son presente y futuro en donde su idealismo, energía y creatividad deben ser incorporados a las acciones que ellos mismos se conviertan en arquitectos de su propio futuro, pues, de no ser así, tendrán un costo social muy elevado.

Con el análisis de lo anterior del significado y concepto de la adolescencia, se describirán los diferentes procesos y técnicas que el adolescente en su etapa es capaz de percibir y acomodar los nuevos conocimientos, pues con lo anterior podemos corroborar que el estudiante de preparatoria promedio se encuentra aún en la etapa de la adolescencia, siendo ésta la etapa de las operaciones concretas formales.

Retomando al teórico Piaget en esta etapa de la adolescencia considera cuatro estadios del desarrollo pues los adolescentes son capaces de realizar operaciones formales, y el razonamiento lógico constituye al pensamiento intuitivo, siempre y cuando se apliquen ejemplos concretos o específicos. Como ejemplo podemos decir que en el estadio de las operaciones concretas un niño no se puede imaginar los pasos necesarios para resolver una ecuación algebraica, lo que es demasiado abstracto para su etapa evolutiva.

El presente de las operaciones formales, que aparece entre los 11 y los 15 años, es el cuarto y último estadio que refiere Piaget. En este estadio, la persona va más allá de las experiencias concretas y piensa de un modo más lógico y abstracto. Esta forma en que piensan, permite que los adolescentes elaboren imágenes mentales de situaciones hipotéticas. Además, también pueden reflexionar sobre cómo sería un papá ideal y comparar a sus propios padres con respecto a ese punto de referencia. Comienza aquí la interrogante y la canalización de ideas sobre las posibilidades que tienen a su alcance y se sienten fascinados con lo que podrían convertirse en el futuro. A la hora de resolver un problema los adolescentes son más sistemáticos, es decir formulan hipótesis sobre porqué las cosas ocurren del modo en que ocurren y las ponen a prueba utilizando la educación.

Por otra parte, Lev Vygostky (1896-1934) de igual forma que Piaget creía que los niños activamente construyen su conocimiento y la teoría de Lev Vygostky dice que es una teoría cognitiva sociocultural que hace énfasis en la importancia del análisis evolutivo y el papel que desempeñan el lenguaje y las relaciones sociales. Está basada también en tres ideas principales. Las habilidades cognitivas del niño y el adolescente se entienden mejor cuando se analizan e interpretan evolutivamente. También en que las habilidades cognitivas están dedicadas por las palabras, el lenguaje y las formas del discurso, que actúan como herramientas psicológicas para facilitar y transformar la actividad. La tercera y última dice que las habilidades cognitivas tienen su origen en las relaciones sociales que están inmersas en un trasfondo sociocultural. Para este teórico, por otra parte, adoptar un enfoque evolutivo significa que, para entender cualquier otro aspecto del funcionamiento del adolescente, se deben examinar sus orígenes y transformaciones desde temprana edad a la más tardía. Por esto, un aprendizaje mental en concreto no se puede considerar aisladamente, sino que se debe evaluar como un paso más en su proceso de enseñanza aprendizaje. La segunda idea de Lev Vygostky afirma, que, para poder entender el funcionamiento cognitivo, es necesario examinar las herramientas que lo median y lo forman, y esto lo llevaría a creer que el lenguaje es el más importante de estas herramientas, además que el lenguaje es la herramienta que ayuda al adolescente a planificar actividades para resolver circunstancias y problemáticas tanto de la vida como

en lo escolar. Explicando la tercera idea, dice que las habilidades cognitivas se originan en las relaciones sociales y culturales y considera que el desarrollo cognitivo del niño y adolescente no se pueden separar de las actividades sociales y culturales, también pensaba que el desarrollo de la memoria, la atención y el razonamiento implica el aprender a desarrollar y utilizar las herramientas que ha creado la misma sociedad en la que se encuentra.

También el teólogo (B.F. Skinner Sobre El Conductismo - B.F. Skinner – Colección Conducta Humana N° 22 – 1977) nos aporta que el conductismo de la mente, consciente o inconsciente del adolescente, no es necesario para explicar el comportamiento y desarrollo. Pues para Skinner, el desarrollo es el comportamiento. Puesto que los conductistas consideran que el desarrollo aprendido y a menudo cambia en función de las nuevas experiencias ambientales, afirman que la reorganización de las experiencias puede modificar el desarrollo. Para un conductista el comportamiento tímido del adolescente se puede transformar en comportamiento extrovertido, el comportamiento agresivo en comportamiento dócil y el comportamiento aburrido.

Haciendo una exploración en los aspectos clave del desarrollo adolescente a la luz de las últimas investigaciones y teorías del aprendizaje, considerando las perspectivas de la OMS, UNESCO, American Psychological Association (APA) y estudios indexados en Google Scholar he podido identificar que los cambios hormonales desencadenan una serie de transformaciones físicas, como el crecimiento acelerado, el desarrollo de las características sexuales secundarias y los cambios en la composición corporal. Estos cambios pueden influir en la autoestima, las relaciones sociales y la concentración.

Se muestra también que los adolescentes necesitan más horas de sueño que los adultos, pero a menudo tienen horarios que dificultan cumplir con esta necesidad. La falta de sueño puede afectar el rendimiento académico, el estado de ánimo y la salud mental.

En cuanto a los cambios cognitivos del adolescente y su relación con el aprendizaje identifiqué que los adolescentes desarrollan la capacidad de pensar de manera abstracta, lo que les permite razonar sobre conceptos complejos, resolver problemas y considerar múltiples perspectivas considerándose este como el pensamiento

abstracto. De igual forma adquieren habilidades para evaluar información, identificar sesgos y tomar decisiones informadas dándole sentido al pensamiento crítico.

Pasando así al desarrollo socioemocional que nos hace un énfasis en las relaciones interpersonales que demuestran que las relaciones con amigos y compañeros se vuelven cada vez más importantes, y los adolescentes pueden experimentar presiones sociales y conflictos. La autoestima fluctuante es común en la adolescencia, y puede afectar la motivación y el rendimiento académico, de igual forma la salud mental, como la ansiedad y la depresión, son cada vez más frecuentes en esta etapa.

El desarrollo adolescente es un proceso complejo y dinámico. Comprender los cambios físicos, cognitivos y socioemocionales que ocurren durante esta etapa es fundamental para diseñar intervenciones educativas y sociales efectivas. Al integrar las últimas investigaciones y teorías del aprendizaje, podemos crear entornos que promuevan el crecimiento y el desarrollo de los adolescentes.

2.3 Planes y programas de estudio de preparatoria.

En primera instancia analizaremos el plan y programas de preparatoria Escuela nacional Preparatoria 1991 que dice lo siguiente de acuerdo al tema a investigar.

Quinta unidad del bloque. Circunferencia y círculo. En esta unidad se define circunferencia y círculo haciendo notar la diferencia entre uno y otro; radio, diámetro, cuerda, secante, tangente, arco, ángulo, ángulo central, ángulo inscrito y semi-inscrito. Se demuestran teoremas relativos al tema.

Propósitos: Diferenciar entre la circunferencia y círculo para aplicar correctamente el concepto. Definir. Radio, diámetro, cuerda, secante, tangente, arco, etc. dado que se conocen conceptos que se manejan en temas y cursos posteriores.

Contenido: Circunferencia como lugar geométrico y Elementos De La Circunferencia. Se definirá la circunferencia como lugar geométrico diferenciando entre círculo abierto y cerrado. Se definirá radio, diámetro, cuerda, secante y tangente. Con escuadras y compás se trazan tangentes a círculos y se define el ángulo central de una circunferencia.

Estrategias didácticas: los alumnos con la guía del profesor usando el compás y las escuadras se trazan circunferencias, y las rectas que describen el contenido.

Bibliografía: 1. Cárdenas, Trigos Humberto et al., matemáticas. Tercer curso. México, CECSA, 1972.

Bibliografía 2. Baldor, Aurelio, Geometría y Trigonometría. México, Cultura Mexicana S. A., 1993.

Por último, revisaremos el programa de estudios actuales donde a partir del ciclo escolar 2009-2010 la dirección general del bachillerato (bachillerato general) incorporó en su plan de estudios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior para fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo ya que es con el que contamos en la actualidad. Enseguida se demarcará la ubicación de los bloques, competencias genéricas, competencias disciplinares, rol del docente, todo esto relacionado para tercer semestre. Donde dice que es importante destacar que la asignatura de matemáticas III contribuye ampliamente al desarrollo de las competencias genéricas cuando el estudiante se auto determina y cuida de sí mismo, por ejemplo, al enfrentar las dificultades que se le presentan al resolver un problema donde es capaz de tomar decisiones ejerciendo el análisis crítico, o en situaciones donde se expresa y comunica utilizando distintas formas de representación matemática, variables, ecuaciones, tablas, diagramas, gráficas e incluso empleando el lenguaje ordinario, u otros medios cómo ensayos reportes e instrumentos táctiles cómo calculadoras computadoras para exponer sus ideas. Asimismo, se promueve el pensamiento crítico reflexivo al construir hipótesis, diseñar y aplicar modelos geométricos o evaluar argumentos o elegir fuentes de información al analizar o resolver situaciones o problemas de su entorno. De igual forma, se promueve el trabajo colaborativo al aportar puntos de vista distintos o proponer formas alternas de solucionar un problema matemático.

Las competencias genéricas son aquellas que todos los bachilleres deben estar en la capacidad de desempeñar, pues les permiten a los estudiantes comprender su entorno, enseguida encontraremos algunas de ellas ligadas al tema de estudio (ecuación de la circunferencia).

- Se conoce y valora así mismo

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Competencias disciplinares básicas del campo de matemáticas:
- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Bloque V Aplica los elementos y las ecuaciones de una circunferencia tercer semestre.

Los desempeños del estudiante al concluir el bloque deben ser: (Identifica y distingue los diferentes tipos de rectas y segmentos asociados a la circunferencia. Reconoce los diferentes tipos de ecuaciones de la circunferencia y las transforma de una forma a otra. Aplica los elementos y ecuaciones de circunferencia en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana).

Los Objetos de aprendizaje serán:

- Circunferencia, rectas y segmentos.
- Radio, diámetro, cuerda, secante y tangente.
- Ecuaciones de la circunferencia: canónica ordinaria
- Ecuación de la circunferencia conocidos tres puntos
- Ecuación general de la circunferencia.

Las competencias a desarrollar son las siguientes:

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para poder procesar e interpretar información.

- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- Propone la manera de solucionar un problema y desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud respetuosa, constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Para lograr lo anterior sugiere las siguientes actividades de enseñanza:

- Recuperar mediante lluvia de ideas los conocimientos previos de los alumnos sobre secciones cónicas, mostrando dibujos, material impreso o una presentación electrónica.
- También sugiere presentar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, enfatizando h y k , como las coordenadas de la circunferencia.
- Plantear una situación que implique la relación sobre el caso particular cuando $h = 0$ y $k = 0$.
- Solicitar que los alumnos propongan diferentes casos de gráficas de circunferencias en las cuales obtengan las coordenadas del centro, radio y su ecuación ordinaria.

Además, propone actividades de aprendizaje y cómo resolver de manera individual ejercicios de la circunferencia en los cuales se determinan las coordenadas del centro, el radio y su gráfica a partir de su ecuación y viceversa; así como a partir de su representación gráfica obtenga la ecuación. Autoevaluar los ejercicios realizados de acuerdo a los resultados del profesor.

A diferencia del primero, el segundo se encuentra mejor detallado incorporando las diferentes competencias a desarrollar para cada unidad del bloque, siendo así más efectivo su propósito.

2.4 Aprendizaje basado en competencias.

Un Enfoque Educativo Transformador basado en Competencias (ABC) ha emergido como un paradigma educativo esencial en el siglo XXI, respondiendo a la creciente necesidad de formar individuos capaces de desenvolverse eficazmente en un mundo dinámico, complejo y en constante cambio. A diferencia de los modelos tradicionales centrados en la transmisión de contenidos, el ABC se enfoca en el desarrollo integral del estudiante, promoviendo la adquisición de habilidades, conocimientos y actitudes que le permitan desenvolverse de manera autónoma y responsable en diversos contextos.

Debemos entender que las competencias se definen como un conjunto integrado de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que permiten a una persona actuar de manera eficaz y eficiente en una situación determinada. No se trata solo de saber (conocimiento), sino de saber hacer (habilidad) y saber ser (actitud). Las competencias se desarrollan a través de la práctica y la experiencia, y se manifiestan en la capacidad de resolver problemas, tomar decisiones, trabajar en equipo, comunicarse eficazmente, entre otros.

Las características distintivas de las competencias actuales se conocen por una serie de elementos que lo diferencian de los enfoques educativos tradicionales:

- Enfoque en el estudiante: El estudiante se convierte en el protagonista de su propio aprendizaje, participando activamente en la construcción de su conocimiento. Se le anima a explorar, cuestionar, investigar y reflexionar sobre lo que aprende.
- Aprendizaje significativo: Se busca que los aprendizajes sean relevantes para la vida del estudiante, conectándose con sus intereses, experiencias y el mundo que le rodea. Se promueve la aplicación de los conocimientos en situaciones reales o simuladas.
- Desarrollo de competencias: Se prioriza el desarrollo de habilidades y actitudes que permitan al estudiante desenvolverse eficazmente en diferentes contextos. Se busca formar individuos capaces de adaptarse a los cambios y de aprender a lo largo de la vida.

- Evaluación formativa: La evaluación se utiliza como una herramienta para retroalimentar el aprendizaje del estudiante y ayudarlo a mejorar. Se valoran tanto los conocimientos como las habilidades y actitudes demostradas en las actividades realizadas.

Por otra parte, el aprendizaje basado en competencias se centra en dos características importantes para hacer efectiva su aplicación en los diferentes niveles académicos para el estudio .

- Rol del docente como facilitador: El docente deja de ser el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje para convertirse en un facilitador que guía y acompaña al estudiante en su proceso de aprendizaje.
- Metodologías activas: Se utilizan metodologías activas que promueven la participación, la colaboración y la reflexión de los estudiantes. Se fomenta el aprendizaje basado en proyectos, el estudio de casos, el aprendizaje cooperativo, entre otros

Beneficios tangibles del aprendizaje basado en competencias ofrece numerosos beneficios para los estudiantes, entre los que destacan:

- Mayor autonomía: Los estudiantes aprenden a tomar decisiones y a resolver problemas de manera autónoma, lo que les permite ser más independientes y responsables..
- Mayor motivación: Los estudiantes se sienten más motivados al ver que sus aprendizajes son relevantes para su vida y que tienen una aplicación práctica.
- Mayor desarrollo de habilidades: Los estudiantes desarrollan habilidades valiosas para su futuro personal y profesional, como la comunicación, el trabajo en equipo, el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la creatividad y el liderazgo.
- Mejor preparación para el mundo laboral: Los estudiantes adquieren competencias que son muy valoradas en el mercado laboral, lo que les facilita su inserción y desarrollo profesional.
- Aprendizaje a lo largo de la vida: Los estudiantes aprenden a aprender, lo que les permite seguir adquiriendo conocimientos y habilidades a lo largo de su vida.

En conclusión la implementación efectiva del aprendizaje basado en competencias requiere un cambio de enfoque en la práctica educativa. Los docentes deben asumir el rol de facilitadores del aprendizaje, diseñando actividades que permitan a los estudiantes desarrollar sus competencias de manera integral. Es fundamental utilizar metodologías activas que promuevan la participación, la colaboración y la reflexión.

A pesar de sus numerosos beneficios, el ABC también presenta algunos retos y desafíos como lo son :

- Cambio de cultura educativa: Requiere un cambio de mentalidad por parte de los docentes, los estudiantes y la comunidad educativa en general.
- Formación docente: Requiere una formación continua de los docentes para que puedan implementar el ABC de manera efectiva.
- Evaluación de competencias: Requiere el desarrollo de instrumentos de evaluación que permitan medir el desarrollo de competencias de manera objetiva y válida.
- Recursos educativos: Requiere la disponibilidad de recursos educativos adecuados para implementar el ABC.

Finalmente entendamos que el aprendizaje Basado en competencias es un enfoque educativo prometedor que busca formar individuos capaces de desenvolverse de manera exitosa en el siglo XXI. A pesar de los retos, el ABC se está convirtiendo en una realidad en muchos sistemas educativos, y se espera que siga expandiéndose en el futuro.

El ABC no es solo una moda pedagógica, sino una necesidad para preparar a los estudiantes para un mundo en constante cambio. Al enfocarse en el desarrollo de competencias, el ABC permite a los estudiantes adquirir las herramientas necesarias para construir su propio futuro y contribuir al desarrollo de la sociedad.

En esencia, este enfoque se centra en que los estudiantes no solo adquieran conocimientos teóricos, sino que desarrollen habilidades prácticas y actitudes que les permitan aplicar esos conocimientos en situaciones reales. En lugar de memorizar información, los estudiantes aprenden a comunicarse efectivamente, utilizar tecnologías y a adaptarse a diferentes contextos.

Aprendiendo a resolver problemas, a trabajar en equipo, a Según Jean Piaget (Introducción A Piaget 1era Ed.1970 Editorial Fundamentos) menciona que en el campo

de las teorías acerca de los diferentes procesos cognoscitivos, unas hacen referencia al carácter positivo y otras al carácter activo de los procesos mencionados, como es el caso del constructivismo cognoscitivos. El constructivismo de este teórico explica que el niño construye su peculiar modo de pensar, de conocer, de un modo activo como resultado de la interacción entre sus capacidades innatas y la exploración ambiental que realiza mediante el tratamiento de la información que recibe del entorno, de ahí la importancia de tener buenos modelos con los que interactúa.

El origen mental puede representarse como un movimiento dialéctico de evolución encontrándose en el centro de este proceso de la actividad, más Piaget defiende una actividad organizada no una actividad arbitraria y sin sentido. Por esto, la actividad será la constante de todo tipo de aprendizaje desde que tiene lugar en la etapa sensorio motriz hasta el que culmina con las operaciones propias de la etapa lógica concreta y abstracta del pensamiento, en cuyas realizaciones va a desempeñar un papel fundamental el lenguaje. Los niños y los adultos, también avanzan analizando los esquemas cognitivos con los que interpretan la realidad, al comprobar que ya no les resultan suficientes y generando la necesidad de cambiarlos. También son importantes en esta teoría la cooperación para el desarrollo de las estructuras cognitivas refiriéndose esto a que deben intercambiar saberes, puntos de vista y opiniones, porque la interacción entre compañeros suscita conflicto de opiniones donde relacionen el aprendizaje con el desarrollo perfecto y la estrecha vinculación entre las dimensiones cognitiva y afectiva, resaltando la importancia en el aprendizaje de la motivación. La enseñanza basada en el aprendizaje constructivista sugiere énfasis en que los alumnos necesitan estar activamente implicados para reflexionar sobre su propio aprendizaje, realizar inferencias y experimentar un conflicto cognitivo. Esta conciencia de conflicto o dificultad cae en la comprobación de que los conocimientos de lo que uno dispone o su modo de trabajar es inadecuado y da un ejemplo a lo que los psicólogos llaman meta-comprensión que se refiere a si el individuo está preparado para saber cuándo se le hace saber que no sabe algo. Sin embargo, estas estructuras son todavía concretas, están ligadas a la acción del sujeto sobre otros objetos concretos o sus representaciones. A partir de los 11 o 12 años las operaciones se

desligan de sus referentes concretos para poder manipular cosas no físicas, puramente lógicas o hipotéticas.

Por otra parte, el teórico Lev Vygotsky sostiene que el aprendizaje es esencialmente activo. Esto quiere decir que una persona que aprende algo nuevo, lo incorpora a sus experiencias previas y a sus propias estructuras mentales. A sí que cada nueva información es asimilada y depositada en una red de conocimientos y experiencias que existen previamente en el sujeto, como resultado podemos plantear que el aprendizaje no es ni pasivo ni objetivo, al contrario, esto es un proceso subjetivo que cada persona modifica constantemente conforme a sus experiencias en la vida.

Además, dice que el constructivismo social es aquel modelo que se basa en el constructivismo, que explica que el conocimiento además de formarse a partir de las relaciones ambiente-yo, es la suma del factor entorno social, los nuevos conocimientos se forman a partir de los propios esquemas de la persona producto de su realidad, y su comparación con los esquemas de las otras personas con quien se rodean.

El constructivismo según este teórico busca ayudar a los estudiantes a internalizar, reacomodar y transformar la información que vaya llegando, es decir la información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y eso a su vez resulta de la aparición de nuevas estructuras cognitivas que permiten enfrentarse a situaciones iguales o parecidas con la realidad. Así el constructivismo percibe el aprendizaje como actividad personal enmarcada en contextos funcionales, significativos y auténticos.

En resumen, el constructivismo psicológico de este teórico dice que el aprendizaje es fundamentalmente un asunto personal. Existe el individuo con su cerebro casi-omnipotente, generando hipótesis, usando procesos inductivos y deductivos para entender el mundo y poniendo estas hipótesis a prueba con su experiencia más personal. El impulsor de esta actividad es el conflicto cognitivo. Una misteriosa fuerza, llamada deseo de saber, nos obliga y nos empuja a encontrar explicaciones al mundo en que nos rodea. Esto es que en toda la actividad constructivista debe existir una circunstancia que haga mover las estructuras previas de conocimientos y obligue a un reacomodo del viejo conocimiento para asimilar de esta forma el nuevo. Así el individuo aprenderá a cambiar

sus conocimientos y creencias del mundo, para ajustar las nuevas realidades descubiertas y construir su propio conocimiento. De forma normal en situaciones de aprendizaje académico, se trata de que existan aprendizajes por descubrimiento, experimentación y manipulación de realidades concretas, pensamiento crítico, diálogo y cuestionamiento continuo. Seguido de estas actividades esta suposición de que todo individuo, de alguna manera, será capaz de construir su conocimiento a través de tales actividades, así el constructivismo psicológico sostiene la idea de que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no será un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas sino una construcción propia que se irá produciendo día a día como resultado de las interacciones entre esos factores.

Analizando la propuesta del teórico David Paul Ausubel (1983, 48). Se encontró que él plantea que los aprendizajes del alumno dependen de las estructuras cognitivas previas que se relacionan con la nueva información, debe entenderse como la estructura cognitiva, al conjunto de conceptos, ideas que un individuo puede poseer en un determinado campo del conocimiento, así como su organización. En el transcurso de formación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno, esto quiere decir que no solo se trata de saber las cantidades de información que posee, sino cuales son los conceptos y propósitos que maneja, así como el grado de estabilidad que presenta. Los principios de aprendizaje que Ausubel propone, ofrecen el marco para el diseño de herramientas metacognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, lo cual permitirá una mejor orientación de la labor educativa. Para Ausubel el alumno debe manifestar una disposición para relacionar, lo sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria. Lo anterior sugiere que el material sea potencialmente significativo, esto implica, que los materiales de aprendizaje puedan ligarse de manera no arbitraria y sustancial con alguna estructura cognoscitiva especial del alumno, la cual debe poseer un “significado

lógico”, esto quiere decir que debe ser relacionable de forma intencional y sustancial con ideas que hallan disponibles en la estructura cognitiva del alumno.

Con lo anterior podremos hablar sobre el desarrollo de habilidades en la enseñanza aprendizaje (Tendencias Pedagógicas 7, 2002. Luis M. Sobrado Fernández, A 1 l al. Couce Sanialla y Raquel Rial Sánchez) , por lo que encontramos que estos autores nos indican que este desarrollo en la educación conlleva un doble esfuerzo , pues tienen que contribuir al desarrollo de las capacidades y aprendizajes de los conocimientos de las asignaturas de cada una de los contextos curriculares y también a través de la ejecución de las actividades, los estudiantes desarrollarán dichas habilidades intelectuales, además aprenderán a aprender y aplicar los métodos que desarrollaron en situaciones nuevas que plantea la vida. Estas habilidades representan una de las herramientas más privilegiadas que permiten al estudiante ser competente en un amplio sentido de la palabra, además a desarrollarse en forma plena. La capacidad de lograr hacer, de ser independiente y hacer con otros, incluyendo aprender, estas capacidades favorecidas por las mismas y también su adquisición tiene que hacerse en forma progresiva y constantemente, pues se desarrollan en largo plazo.

Dichas habilidades pueden ser:

- Habilidades descriptivas (resumir, contar, describir, resaltar, narrar y esquematizar).
- Habilidades analíticas (relacionar, clasificar, agrupar cotejar, analizar, comparar, contraponer, generalizar, medir).
- Habilidades críticas (enjuiciar, evaluar, apreciar, justificar, elegir, matizar, discutir, discernir.)
- Habilidades creativas. (Transformar, inventar, aplicar, imaginar, diseñar, detectar problemas, cambiar, redefinir, encontrar analogías).

Las habilidades de razonamiento y resolución de problemas son habilidades cognitivas consideradas de orden superior.

Además, complementando lo anterior con la teoría de los autores (Dr. Israel Mazarío Triana Centro de Estudio y Desarrollo Educacional. Universidad de Matanzas. MsC. Ana Cecilia Nazario Triana Facultad de Química Mecánica. Universidad de

Matanzas.) Mencionan que el aprendizaje es el desarrollo del proceso que se presenta en el individuo conforme al transcurso de su evolución mediante la interacción que se establece entre los elementos procedentes del medio y los elementos que nacen de su propio funcionamiento mental. La enseñanza es un escenario del medio socio-cultural con el que el sujeto interactúa. Sus efectos quedan enmarcados bajo el concepto de aprendizaje. La enseñanza y el aprendizaje son procesos didácticos fundamentales para la realización de los objetivos que demande el currículo, además enseñar se caracteriza como la parte del proceso que se refiere a la actividad del docente, no solo como fuente de información, sino también como guía, orientador y director que facilita y promueve el aprendizaje significativo en los estudiantes. El aprender también se caracteriza como parte del proceso que se refiere a la actividad del alumno para apropiarse del conocimiento, el aprendizaje implica además la construcción y reconstrucción de un conjunto de herramientas individuales para dar sentido a diversas situaciones de la vida cotidiana, las ciencias y la tecnología. En el acto de enseñar a aprender, tanto el maestro como el alumno, deben involucrarse activamente en este proceso, uno como agente orientador y el otro a través de su auto-actividad y los binomios profesor-estudiante y estudiantes-profesor en la co-actividad.

Se dice también que el enseñar y aprender se condicionan entre sí, la enseñanza promueve y produce el aprendizaje, a su vez, el aprendizaje se desarrolla sobre las condiciones específicas que se organizan mediante la enseñanza, es decir, ésta influye decisivamente sobre el aprendizaje de los estudiantes. Como conclusión se puede señalar que una solución pedagógica que se adecue a lo anterior es que los educadores de estos días se topan con una extensa variedad de dificultades sobre cómo enseñar, el reto es demasiado grande y la meta debe ser el acercamiento a los estudiantes y a los problemas que conlleva una buena educación y dar solución a estas variables. Lo más importante es la búsqueda de una docencia de excelencia para lograr construir una sociedad de estudiantes y hombres eficientes mediante los paradigmas de la educación de calidad, los grandes y enormes avances de las ciencias de la educación, psicológicas y de la informática o permiten introducir continuamente en el proceso de enseñanza

aprendizaje nuevas estrategias e innovaciones, además promueve para los docentes el desafío de preparar a los estudiante nuevas oportunidades y desarrollo de habilidades.

2.5 Uso de las tecnologías educativas EdTech.

Constantemente se ha visto un avance en la tecnología, y lleva de la mano a todas las asignaturas. En las matemáticas se ha desarrollado un gran avance, pues la implementación de programas computacionales se ha estado incorporando desde hace ya varias décadas. La matemática de este siglo adquirió un gran impacto al integrarse las computadoras y los diferentes tipos de tecnología, como las calculadoras gráficas las cuales han cambiado los conceptos relacionados con la enseñanza en los contenidos de matemáticas, claro está que la modernización de la tecnología además de su gran capacidad y rapidez en los cálculos, y la facilidad que brinda para lograr representaciones gráficas nos ha permitido explorar más en campos como física, química, economía y muchos campos más, haciendo un proceso sistemático para lograr el estudio de una gran cantidad de datos matemáticos para explicar y cuantificar. Son bastantes trabajos ligados a la introducción de las tecnologías en la educación, mas no todos coinciden en la misma línea.

Dichas tecnologías denominadas EdTech (tecnología educativa) consisten en uso de herramientas tecnológicas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Desde aplicaciones móviles hasta plataformas en línea, las EdTech ofrecen una amplia gama de recursos para hacer que la educación sea más interactiva, personalizada y accesible, son sociales y científicas, como por ejemplo:

- **Plataformas de aprendizaje adaptativo:** Ajusta el contenido y la dificultad de las lecciones según el ritmo y estilo de aprendizaje de cada estudiante.
- **Herramientas de evaluación formativa:** Permiten a los docentes obtener retroalimentación constante sobre el progreso de sus alumnos y adaptar su enseñanza en consecuencia.

Colaboración y comunicación:

- **Foros y chats en línea:** Facilitan la interacción entre estudiantes y docentes, fomentando la discusión y el intercambio de ideas.
- **Herramientas de trabajo colaborativo:** Permiten a los estudiantes trabajar en proyectos en grupo de forma virtual, desarrollando habilidades de comunicación y colaboración.

Acceso a recursos educativos:

- **Bibliotecas digitales:** Ofrecen un amplio catálogo de libros, artículos y otros materiales educativos en formato digital.
- **Videos educativos y tutoriales:** Explican conceptos complejos de forma visual y atractiva, facilitando la comprensión de los estudiantes.

Algunos de sus beneficios son que motivan al alumno a aprender pues es más divertido e interactivo, aumentando la motivación y el interés de los estudiantes. Las EdTech permiten adaptar el contenido y la metodología a las necesidades individuales de cada estudiante. Sin embargo estas no son suficientes para asegurar una enseñanza correcta, no se espera que las mismas enseñen a los alumnos, lo ideal es que se forme una cultura donde el alumno utilice estas herramientas de forma efectiva y rápida donde el objetivo principal sea el estudio. Lo anterior arrojaría un círculo vicioso que afecta la formación de un programa poco adecuado para las herramientas que un docente necesita para hacer frente y abatir el rezago académico en el alumnado, si no se tiene un buen proyecto y programa que fortalezca las debilidades y necesidades en los alumnos la inclusión de las tecnologías sería una gran pérdida de tiempo. Entonces, esto nos lleva a iniciar el estudio en el tema de las EdTech con mucha atención y cuidado, sin creer que éstas son el remedio y solución a la dificultad de problemáticas que lleva consigo el aprendizaje significativo de las matemáticas, es realmente importante reconocer que se deben saber utilizar estas herramientas para que sean funcionales y se puedan aplicar de forma correcta, como la IA (inteligencia artificial).

La pandemia de COVID-19 aceleró de manera significativa la adopción y el uso de las tecnologías educativas en todo el mundo. El cierre de escuelas y la necesidad de continuar con el aprendizaje a distancia impulsaron una transformación digital en la educación que, de otra manera, habría tardado muchos años en ocurrir. Las principales EdTech que tuvieron impacto en la educación son Plataformas de videoconferencia como Zoom, Google Meet y Microsoft Teams se convirtieron en herramientas esenciales para impartir clases en línea. Ante tal situación tanto docentes como estudiantes tuvieron que adquirir nuevas habilidades digitales para utilizar las herramientas tecnológicas de manera efectiva.

La pandemia aceleró la transformación digital de la educación y ha puesto de manifiesto tanto los beneficios como los desafíos del uso de las tecnologías educativas. Es fundamental continuar trabajando para reducir la brecha digital, formar a los docentes y desarrollar herramientas tecnológicas que sean cada vez más accesibles, efectivas y personalizadas.

Haciendo una comparación con la reforma educativa anterior, que se veía frecuentemente en el pizarrón de los salones cuentas largas con los cálculos de multiplicación y división de números decimales con varias cifras después del punto, además de ejercicios combinados con radicales y números fraccionarios. La mayoría de éstas laboriosas técnicas de cálculo han sido cambiadas en gran parte por las calculadoras, pero éstas no solo nos sirven para el aula, sino también para diferentes tipos de trabajos complejos como es el cálculo diferencial, integral, casos de estadística y en los caso de calculadoras que grafican las funciones y ecuaciones con una o más variables cuyos costos hoy en día son más accesibles para los estudiantes y actualmente es común que los alumnos ya dispongan de calculadoras científicas en clases de matemáticas. El cálculo mental con distintos tipos de operaciones es un ejercicio fundamental y permanente para el buen desarrollo del trabajo en el aula ya que es el medio más adecuado para realizar cálculos aproximados que son indispensables en la vida cotidiana para el desarrollo del sentido numérico y pensamiento algebraico.

El trabajo que se realiza en la calculadora o computadora da relevancia a que pueden proveer un resultado exacto al momento de realizar operaciones, permitiendo la

facilidad y ahorro de tiempo en un problema matemático, pero esto no necesariamente debe ser de siempre, el docente debe poner en un balance su utilización en la resolución de problemas, pues algunas veces resulta entorpecedor y no permite que el alumno sistematice y desarrolle un buen procedimiento al resolver ejercicios, como también puede ser cuando se estudian temas de geometría. El alumno debe poder realizar la solución de problemas de razonamiento, búsqueda de distintos caminos a la solución y enfrentarse a una mayor diversidad de problemas matemáticos.

El planteamiento para el uso de las EdTech (Tecnología Educativa) y las matemáticas requiere una serie de cambios que son necesarios para llevar a cabo la labor docente. Se necesita abordar sobre los cambios ligados a la forma de estructurar y reorganizar la enseñanza en el aula, además de la manera de obtener informaciones, también la forma de proponer actividades y tareas para las habilidades y competencias de los estudiantes, para esto el profesor de la materia de matemáticas debe desarrollar competencias no incluidas en los objetivos de un currículo inicial en su formación como docente.

Lo importante sobre este caso es poder y saber adecuar los temas con los distintos software y hardware que existen en la actualidad para implementarlos en el aula. De esta forma, aunque las calculadoras, graficadoras y computadoras han simplificado el problema de graficar, se necesita que los alumnos desarrollen una habilidad para resolver cualquier tipo de problemas y propiedades que se basen en las lecturas de gráficas como sus expresiones analíticas. De este modo se podrán traducir gráficas y viceversa con anticipación dependiendo el caso y las características de las mismas.

La importancia de tomar decisiones desde el ámbito anterior, debe hacerse mirando de igual forma a las calculadoras y las como lo hacemos lo hacemos con cualquier otra herramienta de estudio para las clases de matemáticas, desde los lápices, compás, transportador, etcétera.

Estas decisiones llevan consigo la carga de realizar muchos análisis, debido a que no todo lo que puede hacerse debe hacerse. El aprendizaje en los estudiantes se ve afectado por un sistema de mucha complejidad pues intervienen en el sistema: maestros, teorías educativas y creencias, padres, círculos sociales, expectativas culturales y

tecnológicas distintas entre otros. Esto explica que no hay una visión única de lo que en verdad se quiere para la educación en la inclusión de la tecnología en el estudio de las matemáticas. Lo que la tecnología puede hacer cambiar en el aula es el conjunto de problemas entre los que se deben elegir la forma en que se pueden presentar, algunos podrían ser más difíciles de plantear en las aulas que utilizan únicamente lo común y lo tradicional. Ciertos temas requieren que los estudiantes experimenten con procedimientos matemáticos y observen cómo se resuelven, ya que estos necesitan representaciones visuales, como son las gráficas, diagramas, figuras geométricas e imágenes en movimiento para poder responder a todas las interrogantes y dudas en los estudiantes. Se dice que en los grados de primaria básica los elementos físicos manipulables con frecuencia aportan a los niños el apoyo visual y experimental y sirven como soporte de ideas de matemáticas, como por ejemplo al contar objetos, ver distintos tipos de figuras geométricas las cuales puedan ser similares a un objeto de uso cotidiano, además los niños pueden manipular con sus propio ojos y manos mientras que aprenden mentalmente algunas ideas matemáticas. Por otra parte, en los grados superiores muchas ideas matemáticas no cuentan con los modelos físicos y por lo tanto las computadoras pueden ofrecer una herramienta manipulable y virtual, permitiendo que el alumno interactúe con los elementos físicos que no existen. El valor de estas herramientas depende del uso que se le dé, además si lo manipulable físico o electrónico están bien diseñados y se utilizan adecuadamente, pueden incrementar la cantidad de problemas que pueden pensar y resolver los estudiantes mismos. La implementación de matemáticas con las tecnologías es de suma importancia pues los estudiantes están en una situación diferente cuando el software les plantea problemas que deben resolverse como son los tutoriales o juegos a diferencia de cuando el software espera a que el estudiante formule y resuelva el problema. Los diferentes procesadores de texto esperan en una hoja en blanco, a que el escritor tenga ideas y a que las escriba y las edite. El trabajo realmente lo hace el escritor. De la misma forma existen varios ambientes matemáticos, que en su conjunto podrían denominarse procesadores de ideas matemáticas que también esperan que el estudiante matemático produzca ideas, las expresa, desarrolle y edite, además estas pueden incluir lenguajes de programación en softwares dinámicos para geometría

del tipo "Geometer's Sketchpad, GeoGebra y Cabri" además de hojas de cálculo, calculadoras del álgebra simbólico entre otros. Como lo es en una buena clase de escritura, el maestro y el currículo conllevan un papel central: los estudiantes no tienen simplemente ideas, sino necesitan buenos problemas para desarrollar algunas habilidades, técnicas y formas de pensar. Sin embargo, con los procesadores de texto, hojas de cálculo, lenguajes de programación y software de construcción geométrica y con algunos simuladores diseñados únicamente con fines educativos, el maestro y el currículo pueden y tienen la capacidad de controlar la calidad de los problemas y no el diseñador del mismo software, es decir el enfoque a las diferentes soluciones pueden estar bajo el control del estudiante, pero con la dirección que el maestro quiera darle. Para lograr esto las escuelas necesitan hacer muchos planes para usar la tecnología y requieren implementarlas en cualquier currículo, también se necesita hacer una aproximación general al uso cotidiano de las herramientas tecnológicas, estas ocupan ser presentadas de inmediato pues día a día la renovación de la tecnología es muy frecuente, además las escuelas, maestros y alumnos deben utilizarlas frecuentemente incrementando de una forma progresiva el dominio y dosificación a lo largo de los años para que los estudiantes de un futuro se conviertan en usuarios muy capaces de adquirir un aprendizaje matemático significativo. En el aula debe de haber una clase equilibrada donde el alumno pueda utilizar un lápiz, papel y pluma ya que la calidad recae principalmente en que tanto y que tan bien está aprendiendo el estudiante a pensar matemáticamente, pero el uso efectivo de toda la tecnología disponible también es importante. Con el cuaderno y lápiz se mide la limpieza y el orden pues son factores importantes para entender matemáticas porque en ocasiones el alumno mismo no puede descifrar su propia escritura, con las herramientas electrónicas se requieren otras habilidades. Se debe reflexionar también sobre cuáles son las habilidades que deben desarrollar los estudiantes para usar de manera fluida y efectiva las nuevas herramientas a su disposición.

2.6 Uso de GeoGebra como herramienta para enseñar y aprender matemáticas.

GeoGebra es un software dinámico y gratuito que ha revolucionado la forma en que enseñamos y aprendemos matemáticas. Su versatilidad y facilidad de uso lo

convierten en una herramienta indispensable tanto para estudiantes como para profesores de todos los niveles educativos. Permite crear representaciones gráficas interactivas de conceptos matemáticos, desde simples figuras geométricas hasta funciones complejas. Al poder manipular los elementos de estas representaciones, los estudiantes pueden experimentar de primera mano cómo cambian las propiedades y relaciones matemáticas.

GeoGebra establece un puente sólido entre el lenguaje algebraico y las representaciones geométricas. Esto facilita la comprensión de cómo las ecuaciones describen formas y cómo las transformaciones geométricas afectan a las expresiones algebraicas fomentando un aprendizaje activo y autónomo. Los estudiantes pueden experimentar, formular hipótesis y verificarlas de manera inmediata, lo que les permite construir su propio conocimiento matemático. Ofrece una amplia gama de herramientas para explorar diferentes áreas de las matemáticas, como geometría, álgebra, cálculo, estadística y probabilidad. Para aplicar GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje Los docentes pueden crear actividades interactivas, simulaciones y applets para ilustrar conceptos clave y hacer las clases más atractivas, mientras que los estudiantes pueden utilizar GeoGebra para visualizar problemas, experimentar con diferentes enfoques y encontrar soluciones de manera más intuitiva. Facilitando el trabajo colaborativo, permitiendo que varios estudiantes trabajen juntos en un mismo proyecto y compartan sus resultados. GeoGebra es una herramienta poderosa que transforma la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Al hacer que las matemáticas sean más visuales, interactivas y accesibles, GeoGebra contribuye a un aprendizaje más profundo y significativo.

Capítulo III

Metodología

El lugar donde se realizó el estudio de una muestra de alumnos se encuentra en la ciudad de Tijuana B.C. con domicilio en Blvd. El Refugio s/n, El Florido 1a. Sección, 22680 Tijuana, BC, México. Está ubicado entre el bulevar El Refugio y el boulevard El Florido. Se encuentra en una zona urbana desarrollada donde habitan personas de un nivel socioeconómico medio, el lugar tiene muy poco índice de vandalismo, y se encuentra cerca de una estación de bomberos. Al hacer un recorrido por la colonia, se pudo reconocer que la escuela tiene un fácil acceso por diferentes puntos, pues está rodeada de los bulevares más importantes de esa ubicación.

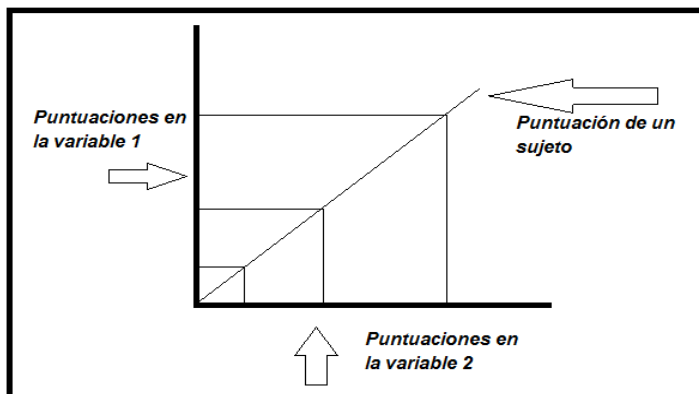
Las instalaciones están adecuadamente distribuidas para los diferentes niveles, ya que cuenta con un edificio para cada nivel, los cuales son: preescolar, primaria, secundaria, preparatoria y una extensión que está especializada en carrera a nivel licenciatura. Cuenta con: 60 aulas aproximadamente en toda la escuela, 6 en preparatoria, 2 aulas de cómputo, 1 salón multimedia, 2 bibliotecas, 2 cafeterías, 30 maestros aproximadamente 4 personas en preparatoria para el área administrativa, 15 empleados de mantenimiento, 3 canchas de fútbol, 6 canchas de basquetbol, 6 canchas de volibol, 3 estacionamientos para alumnos y personal laboral, 1 gimnasio, una alberca olímpica y con una extensión de terreno de aproximadamente $2000m^2$. Dado que la muestra referente al sujeto de estudios es poco numerosa, se requiere utilizar el método de asociación o correlación, el cual se refiere al análisis desde la comparación de porcentajes entre variables nominales y ordinales. El método de correlación consiste en la búsqueda de algún tipo de relación entre dos o más variables, y en qué medida la variación de alguna de las variables afecta a la otra sin llegar a conocer cuál de ellas pueda ser causa y efecto. Dicha información que se obtiene sobre las variables involucradas en relación comprobará o no esa relación en cuanto a su magnitud, naturaleza y dirección. Además, permite estudiar los fenómenos que no suelen ser susceptibles de manipulación al ser datos hipotéticos, esto quiere decir que sean realidades no observables como la inteligencia o la personalidad. Una correlación positiva

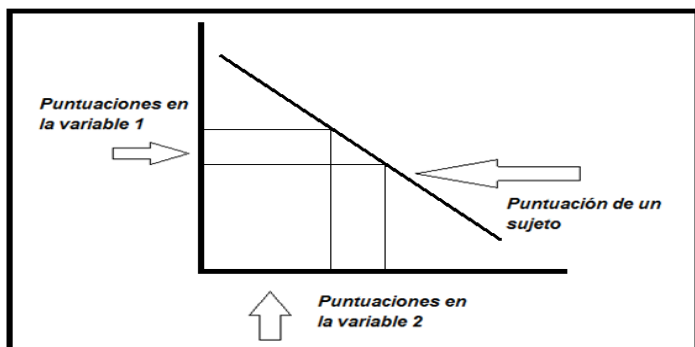
indica una relación directa, es decir, que dos variables aumentan o disminuyen al mismo tiempo. Dicho método se usa frecuentemente en las ciencias de la matemática, sociología y psicología. Lo anterior se refiere a una medida del grado en que dos variables se encuentran relacionadas. Un estudio correlacional puede intentar determinar si individuos con una puntuación alta en una variable también tienen una puntuación alta en una segunda variable y si individuos con una baja puntuación en una variable también tienen baja puntuación en una segunda, estos resultados indican una relación positiva. En otros casos la relación esperada entre las variables puede ser inversa. Los sujetos con puntuaciones altas en una variable pueden tener puntuaciones bajas en la segunda variable y viceversa. Una manera de representar dichas relaciones puede ser mediante gráficas.

Variable 1: Calificación en el examen final.

Variable 2: Número de estrategias didácticas realizadas correctamente.

Relación Positiva perfecta.





Relación negativa perfecta.

Se requiere usar el método de estudio anterior por la muestra de alumnos del universo que se tomó para esta investigación. Por ello, el método anterior cumple con las características sobre las variables analizadas, pues es un grupo pequeño de 17 sujetos, los cuales presentaron un examen diagnóstico, un test psicosocial y un examen final, además de la elaboración de un cuadernillo de estrategias.

3.1 Sujeto de estudio.

La muestra que se estudiará es de 17 alumnos, los cuales al momento de la investigación se encontraban cursando el cuarto semestre de preparatoria, las edades que oscilan en este grupo son entre 16 y 17 años de los cuales 7 son de sexo femenino y 10 masculino. Podemos deducir que la mayoría de ellos se encuentran entre familias con un nivel socioeconómico medio. La mayoría de estos alumnos al momento de la aplicación de los instrumentos de evaluación estaban recibiendo apoyo extra en la materia de cálculo diferencial, pues habían reprobado la materia. Por lo que se pudo observar en los sujetos de estudio al momento de la aplicación de los distintos instrumentos, hay algunos alumnos que requieren de responsabilidad a la hora de estar en clase, cabe mencionar que, en ocasiones, algunos de ellos faltaron a las sesiones, otros asistían, pero no cumplían con tareas, el grupo presentó un alto índice de indisciplina, pues eran constantes las llamadas de atención. Podemos destacar, además, que algunos de ellos trabajan y constantemente piden oportunidad de salir del salón de clases.

Solo algunos de ellos presentaron un destacado interés al momento de realizar las tareas y trabajos asignados, otros ni siquiera se les notaba el interés y algunos otros les daba igual lo que sucediera con la asistencia y participación del grupo.

3.2 Material utilizado.

Instrumento 1: Test psicosocial para el sujeto de estudio.

Este instrumento tiene como propósito conocer las características psicosociales del sujeto de estudio, con el fin de identificar aquellos factores externos que pueden afectar a la investigación. Su tiempo de aplicación fue de 15 minutos y su escala de medición es porcentual. Las características principales de cada una de sus variables son las siguientes:

Variable 1: Edad.

En esta variable se desea saber de entre que edades se encuentran los alumnos de la muestra seleccionada.

Variable 2: ¿Vives en casa de tus padres?

Se refiere a si los alumnos cuentan con el apoyo de sus papas, si su familia está unida o existe disfunción familiar, ya que esto puede influir en el desempeño académico del alumno por las emociones que pudiese vivir.

Variable 3: Creo que soy una buena persona.

Este cuestionamiento tiene el objetivo de saber si los alumnos que son objeto de estudio se sienten identificados como parte de la sociedad y tienen buena autoestima.

Variable 4: Ofendo verbalmente a las personas.

Con esta variable se pretende conocer si los alumnos tienen problemas de vocabulario y problemas de autoridad reflejándose en su desarrollo actitudinal.

Variable 5: Creo que soy una persona inteligente.

Este reactivo sirve para identificar si los alumnos tienen la confianza en sí mismos y la seguridad para resolver problemas contribuyendo de esta manera a un mejor desempeño en el área.

Variable 6: Me pongo nervioso cuando tengo examen de matemáticas.

Con este apartado se conocerá si el individuo tiene dificultades al resolver problemas de matemáticas o se bloquea al realizarlos.

Variable 7: Me gustan las matemáticas.

Con esta pregunta se busca conocer si el alumno tiene buena actitud hacia el estudio de las matemáticas.

Variable 8: Recibo ayuda extra de matemáticas.

El objetivo de esta pregunta es conocer si el alumno recibe ayuda fuera de la escuela para poder nivelarse y concretar los temas que no hayan quedado claros.

Variable 9: Tengo dificultad para entender un tema nuevo.

Con esta variable se pretende identificar y reconocer si el alumno acepta sus deficiencias y fortalezas en temas de matemáticas.

Variable 10 Le dedico tiempo al estudio de las matemáticas después de clases.

Con esta variable se pretende conocer si el alumno distribuye su tiempo libre de buena forma y le dedica tiempo al repaso de la materia.

Variable 11 He reprobado matemáticas.

Esta variable tiene como objetivo conocer si el alumno tiene dificultades en el aprendizaje de las matemáticas para posteriormente realizar estrategias y adecuarlas a sus características.

Variable 12 Con facilidad entiendo lo que me explica el maestro de matemáticas.

La finalidad de esta variable es conocer si los alumnos tienen la capacidad y la facilidad de poner atención ante la explicación del maestro.

Variable 13 Mis padres están al pendiente de mis problemas.

Esta variable pretende mostrar si los alumnos tienen algún problema de aprendizaje y saber si los padres están enterados de la situación, ya que esto podría afectar en su rendimiento y desarrollo académico.

Variable 14 En cuestiones escolares, mis padres están al pendiente.

Con esta variable se podrá saber si el sujeto de estudio tiene apoyo por parte de los tutores para la realización de tareas, trabajos en clase para puesto que si no tienen ese apoyo puede ser una limitante.

Variable 15 Si no apruebo una materia mis padres aplican una sanción.

El fin de esta variable es saber si el alumno recibe alguna sanción por parte de sus tutores y si existe consecuencia alguna por la no acreditación de la misma.

Variable 16 Tengo problemas para escuchar en clases.

El objetivo de esta variable es conocer si los alumnos que son objeto de estudios tienen dificultades auditivas puesto que esto puede ser un factor contraproducente para su buen desempeño escolar.

Variable 17 Me siento cansado al terminar mi jornada de clases.

Esta variable permite conocer aquellos alumnos que tienen bajo rendimiento físico, pues esto es también una limitante para el buen desempeño escolar.

Variable 18 Tengo dificultades para ver.

La finalidad de este inciso, es conocer aquellos alumnos que tienen problemas y dificultad para ver, pues esto podría ser un impedimento para su rendimiento escolar.

Variable 19 ¿Por iniciativa propia estudio temas que están por verse?

Con esta pregunta se podrá saber si los alumnos tienen hábito de estudio en casa o interés para investigar un tema nuevo.

Instrumento 2 Examen diagnóstico.

Este instrumento tiene como objetivo conocer aquellos conocimientos previos que el alumno debe poseer para el estudio de la materia geometría analítica en el tema “Ecuación De La Circunferencia” además de proporcionar información de cuáles son las debilidades de los alumnos respecto al tema anteriormente mencionado. Su tiempo de aplicación es de 30 minutos y su escala de medición es porcentual. Las características principales de cada una de sus variables son las siguientes

Variable 1 Explica qué es un binomio.

Esta primera variable sugiere que el alumno describa las características de un binomio, pues es necesario que el alumno sepa cómo desarrollarlo además de factorizar un TCP y sus características al momento de la reducción de términos en la ecuación general y ordinaria de la circunferencia.

Variable 2 Menciona las características de una circunferencia.

En esta variable nos podremos dar cuenta si los alumnos conocen el concepto exacto de una circunferencia y los elementos que la conforman, para que pueda de inmediato ubicar los datos posibles que se le presentan en cada ejercicio y resolver los problemas cuando se les presente cierta información.

Variable 3 Escribe la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos.

Con esta variable sugerida podremos saber si el alumno posee las herramientas proporcionadas de geometría plana, pues se necesita conocer esta ecuación para calcular la distancia que existe del centro de la circunferencia a cualquier otro punto que pertenezca a la misma, o bien, para cualquier segmento de recta, además es necesaria para desarrollar la ecuación ordinaria de la circunferencia.

Variable 4 En un plano cartesiano encuentra las coordenadas. $(-4,5)$, $(-3,-6)$, $(4,-3)$, $(7,5)$, $(0,7)$.

La finalidad de este inciso es conocer si el alumno tiene la habilidad para colocar y ubicar cualquier coordenada dada en un plano cartesiano.

Variable 5 y 6 Factorizar los TCP $y^4 - 8y^2 + 16$ y $4x^4 - 12xy + 9y^2$.

Por lo anterior mencionado sobre los TCP, se requiere conocer si el alumno domina el procedimiento necesario para la factorización de este tipo de ecuaciones.

Variable 7,8 y 9 Despeja los términos que se piden en cada una de las fórmulas.

En estas variables, se podrá conocer si los alumnos tienen la habilidad de despejar términos al momento que se nos presente un sistema de dos ecuaciones dadas las rectas tomando como centro su intersección.

Variable 10 Reducir la siguiente ecuación a su mínima expresión

$$9a^2b - 3xy - 15a^2b + 8x - 5a^2b + 4xy.$$

En este inciso se podrá conocer si los alumnos identifican términos semejantes y la operación necesaria para realizar su reducción correctamente.

Variable 11 Escribe el concepto de circunferencia.

En esta variable se verá reflejado si el alumno conoce el concepto y características exactas que conforman a una circunferencia.

Instrumento 3 Cuadernillo de estrategias.

Este instrumento tiene como finalidad la explicación de los temas que se necesitan para dominar el tema de la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y general, en cada una de las consignas que ahí se presentan se dará explicación paso a paso mediante la herramienta "GeoGebra" . Su tiempo de aplicación aproximado es de cuatro sesiones de cuatro horas y media. Las características principales de cada una de sus variables son las siguientes.

Estrategia 1 Retoma los temas previos para el desarrollo de la ecuación de la circunferencia.

El objetivo de esta estrategia se basa en que el alumno practique y recuerde los temas: (productos notables y TCP). Por medio de una breve práctica de álgebra y aritmética, la cual consta de dos consignas. La primera es el desarrollo de un binomio al cuadrado para obtener un TCP y la segunda sobre la factorización de un TCP y completar un binomio al cuadrado.

Estrategia 2 Definición, construcción y características de la circunferencia mediante el uso de GeoGebra.

Esta estrategia tiene como objetivo principal que el alumno defina el concepto de la circunferencia. Consta de dos consignas, en la primera se pretende realizar un trazo de la circunferencia mediante herramientas no convencionales y que el alumno valide al concepto que la caracteriza: (sucesión de puntos en línea curva, los cuales están todos a una misma distancia de otro punto llamado centro). La consigna dos pretende que el alumno realice el cálculo del radio de la circunferencia anterior utilizando coordenadas del

centro y cualquier otro punto de ella, utilizando la fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

además de una breve introducción y explicación sobre el origen de las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia.

Estrategia 3 Circunferencia con centro en el origen Mediante el uso de GeoGebra.

En esta tercera estrategia se requiere que el alumno conceptualice y defina el origen de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen en su forma ordinaria mediante ejemplos y consta de tres consignas. La primera de ellas se trata de que el alumno sustituya el valor del radio en la ecuación ordinaria, $x^2 + y^2 = r^2$. En la segunda consigna se da la ecuación ordinaria y el determina el radio sacando la raíz al término resultante después de la igualdad (radio) de esta forma: $x^2 + y^2 = 36$. En la tercera consigna el alumno deberá determinar analíticamente si un punto cualquiera dado pertenece o no a una circunferencia y determinar su ecuación ordinaria.

Estrategia 4 Ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria con centro en (h, k) .

Utilizando el programa GeoGebra

El objetivo de esta estrategia se inclina a la explicación y el desarrollo de la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (h, k) . Para que de esta manera el alumno la determine y saber si se encuentra fuera del origen. También que aprenda a sustituir los valores que se le proporcionen además de practicar con algunos ejercicios. Consta de dos consignas, en una de ellas se les proporciona el centro y el radio, posteriormente a partir de sustituir los valores en la ecuación ordinaria los alumnos demostrarán si esta pertenece o no a una circunferencia. Por otra parte, en la segunda consigna se pretende que el alumno determine el radio y el centro a partir de la ecuación ordinaria que se le presente.

Estrategia 5 Ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro fuera del origen utilizando GeoGebra.

Esta última estrategia tiene como objetivo que el alumno reconozca la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen a partir de la medida de su radio y que reconozca la relación de h, k y r de la circunferencia, para representarlos en ecuación en su forma general. Aquí se explica el desarrollo de la ecuación ordinaria para llegar a una general desarrollando los binomios al cuadrado resultantes, obteniendo:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Donde $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$A = C = 1, \quad D = -2h, \quad E = -2k \quad y \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Para posteriormente concluir:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ con } A = C$$

Es la ecuación de una circunferencia en su forma general.

En la consigna que se pide realizar en esta variable se les presenta a los alumnos ya sea el centro y radio de una circunferencia para que determinen las dos ecuaciones estudiadas y también se les proporciona la ecuación general de la circunferencia para que determinen centro, radio y ecuación ordinaria de la circunferencia.

Instrumento 4 Para el sujeto de estudio Evaluación Final.

Este instrumento tiene como objetivo conocer los avances significativos que los alumnos adquirieron durante las sesiones y la realización de un cuadernillo de estrategias referente al tema "Ecuación de la Circunferencia" utilizando GeoGebra además de proporcionar información concreta sobre si la organización del cuadernillo causó efecto positivo en el aprendizaje de los alumnos. Para ello se les aplicó en un tiempo de 30 minutos.

Las características principales de cada una de sus variables son las siguientes:

Variable 1 Define el concepto de circunferencia.

En esta variable nos permitirá conocer si las actividades de la estrategia número 2 causaron un aprendizaje significativo sobre el concepto y definición de circunferencia, además de las características propias de la misma.

Variable 2 factorización de TCP.

En la variable número dos podremos darnos cuenta si los alumnos concretaron y comprendieron los pasos para la factorización de un TCP pues esto les permitirá desarrollar la ecuación general de la circunferencia a partir de la ordinaria.

Variable 4 Obtén la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (7-9) y radio =5.

Se inclina a conocer si los alumnos dominan el desarrollo de los binomios al cuadrado visto en la estrategia número uno, dos y tres del cuadernillo de estrategias, aquí los alumnos utilizan las herramientas para el desarrollo de ecuación ordinaria a partir de datos que se le plantean.

Variable 5 Obtén la ecuación de la circunferencia a partir del desarrollo de una ecuación ordinaria $(x - 8)^2 + (y + 7)^2 = 81$.

En esta última variable los alumnos integran todas las habilidades que adquirieron durante el desarrollo y solución de las estrategias del cuadernillo. Aquí se les pide el desarrollo de una ecuación ordinaria hasta llegar a una general y reducirla hasta su mínima expresión.

3.3 Procedimiento.

1. Selección de la muestra.

Para realizar la selección de la muestra a investigar se usó el método determinístico, este consiste en seleccionar una cierta cantidad de sujetos para el estudio, a estos se les aplicarán estrategias didácticas y evaluaciones previamente elaboradas, aquí se podrán manipular los factores y determinantes que puedan afectar en su estudio con la finalidad de predecir sus resultados. En dicho método no se contempla la existencia del azar ni el principio de incertidumbre ya que el investigador define su propia muestra.

Se eligió una escuela de educación privada a nivel preparatoria específicamente a un grupo de diecisiete alumnos reprobados de tercer semestre, donde había alumnos de diferente salón presentando un nivel de aprovechamiento académico bajo. En cuanto a la recolección de datos en el proceso de investigación, se usaron distintas herramientas que ayudaron a obtener resultados importantes respecto al sujeto de estudio, hablando de: un test psicosocial, examen diagnóstico, cuadernillo de estrategias y un examen final. El test psicosocial es el que permite conocer todos aquellos factores ajenos al investigador que afectan al rendimiento académico del estudiante, pues son aquellos que no podrán modificarse. El examen diagnóstico pretende conocer el nivel de conocimientos que el

sujeto de estudio tiene respecto al tema ecuación de la circunferencia, además ayuda a dar una idea de cuáles son los temas que se necesitan reforzar para un buen aprendizaje significativo. Se aplicó también un cuadernillo de estrategias que contiene los temas donde es indispensable su dominio para entender el desarrollo de la ecuación de la circunferencia, además de ejercicios relacionados al mismo con ejemplos y explicaciones paso a paso para darles solución. Se utilizó también un examen final que arrojó las calificaciones de los alumnos después de haber realizado el curso y contestado el cuadernillo de estrategias. Para probar que existe una relación entre una secuencia didáctica bien elaborada y el aprendizaje significativo en el tema “Ecuación de la circunferencia” se utiliza el método de correlación que consiste en un hacer un análisis entre dos o más variables. Para esto se toma como una variable el número de estrategias didácticas contestadas correctamente y la otra es la calificación de la evaluación final. De esta forma se representa la razón de comparación entre la covarianza y la varianza de los datos para conocer si existe una relación positiva, negativa o que de plano no existe relación alguna entre las variables anteriores.

A su vez se utilizó la campana de Gauss para encontrar el porcentaje de credibilidad que arrojan los datos obtenidos, analizando estos como un error de muestreo pretendiendo que sea el mínimo puesto que la muestra analizada es muy pequeña respecto a la población de alumnos. La prueba de hipótesis se lleva a cabo con una distribución T Student que consiste en el estudio de una distribución normal, pero con pocos datos con una estimación típica en lugar del valor real de correlación, tomando un nivel de significancia del veinticinco por ciento y el setenta y cinco por ciento de credibilidad.

Capítulo IV.

Análisis de resultados.

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos del análisis de los instrumentos de evaluación que se aplicaron al sujeto de estudio por separado cada una de las variables, mostrando por medio de gráficos los porcentajes, además se describen aquellas variables que puedan afectar a nuestra hipótesis de investigación.

Por otra parte, también se realizó un examen diagnóstico y un examen final, los cuales están acompañados de sus respectivas gráficas, distribución de frecuencias y análisis sobre los resultados obtenidos de cada alumno, lo anterior para conocer con qué porcentaje de significancia funcionaron las estrategias elaboradas en un cuadernillo de estrategias respecto al examen diagnóstico y final. Seguido a esto se encuentra un comparativo entre las medias de los distintos instrumentos de evaluación, así como también la varianza y desviación estándar de cada uno de ellos. Se hace también un análisis correlación para determinar el avance significativo entre las estrategias diseñadas en un cuadernillo de trabajo respecto al examen final, para así conocer el nivel del aprendizaje significativo de los alumnos. Se efectuó una prueba de hipótesis a través de una distribución t student para conocer el grado de credibilidad y significancia hay en esta investigación.

4.1. Análisis de resultados del test psicosocial.

Instrumento 1.

Las variables involucradas en el test psicosocial están definidas de la siguiente manera.

Variable 1. Edad.

a) 16 años b) 17 años c) 18

Variable 2. ¿Vives en casa de tus padres?

a) Sí b) no

Variable 3. ¿Creo que soy una buena persona?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 4. ¿Ofendo verbalmente a las personas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 5. ¿Creo que soy una persona inteligente?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 6. ¿Me pongo nervioso cuando tengo examen de matemáticas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 7. ¿Me gustan las matemáticas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 8. ¿Recibo ayuda extra de matemáticas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 9. ¿Tengo dificultad para entender un tema nuevo?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 10. ¿Les dedico tiempo a las matemáticas después de clases?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 11. ¿He reprobado matemáticas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 12. ¿Con facilidad entiendo lo que me explica el maestro de matemáticas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 13. ¿Mis padres están al pendiente de mis problemas?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 14. ¿En cuestiones escolares, mis padres están al pendiente?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 15. ¿Si no apruebo una materia mis padres aplican una sanción?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 16. ¿Tengo problemas para escuchar en clases?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 17. ¿Me siento cansado al terminar mi jornada escolar?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 18. ¿Tengo dificultades para ver?

a) Sí b) No c) En ocasiones

Variable 19. ¿Por iniciativa propia estudio temas que están por verse?

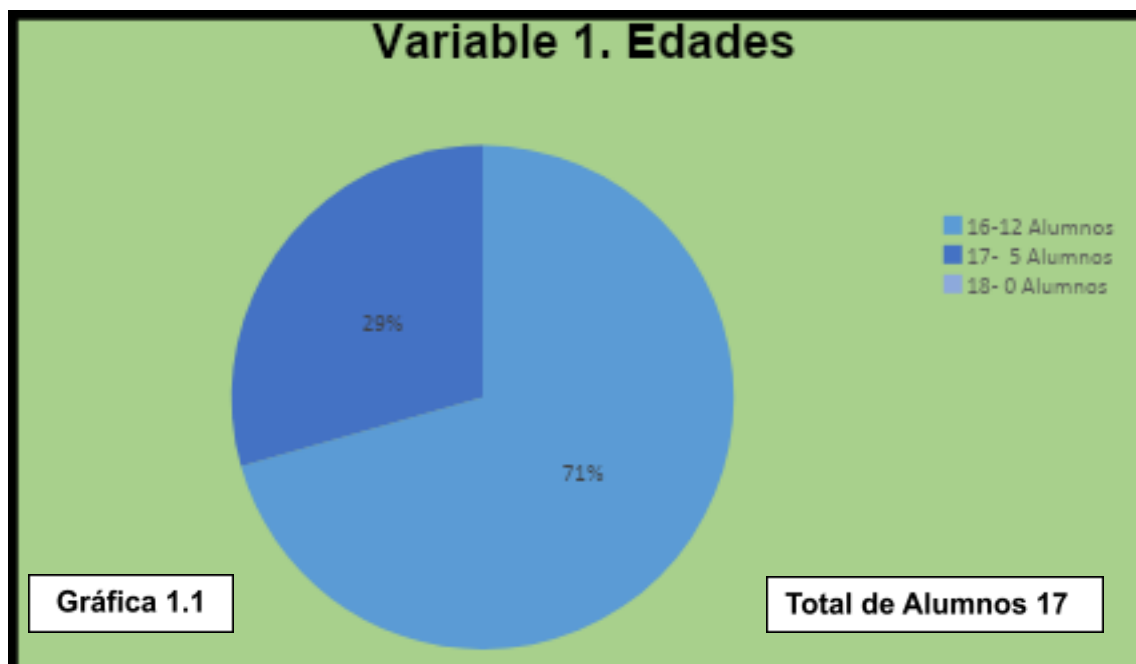
a) Sí b) No c) En ocasiones 3

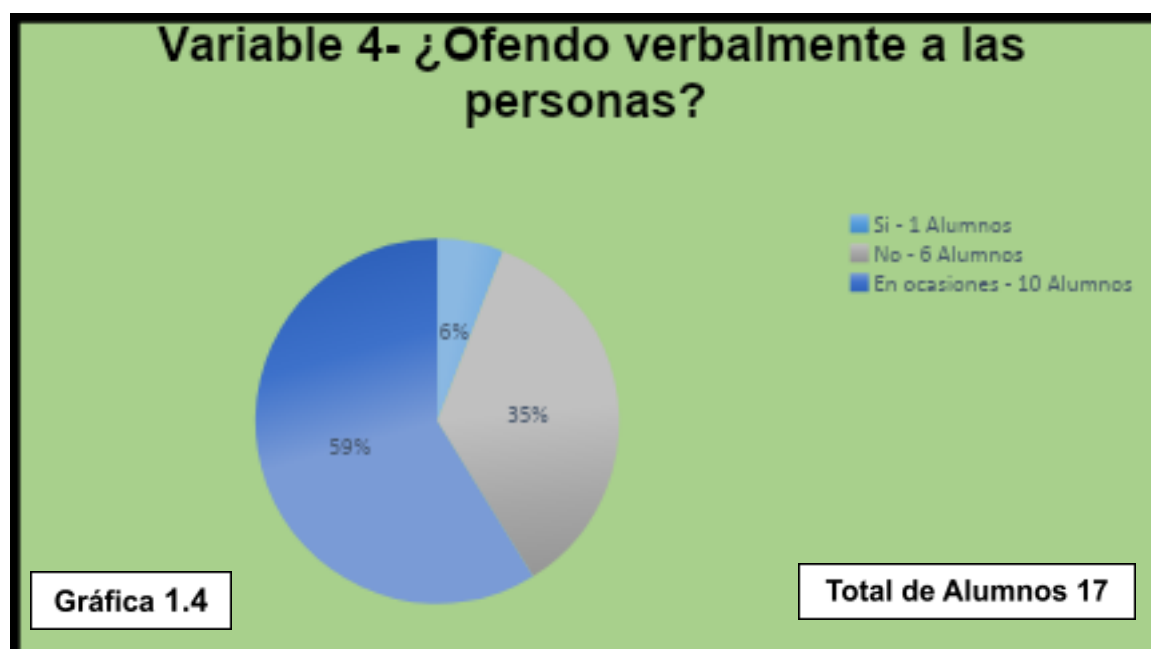
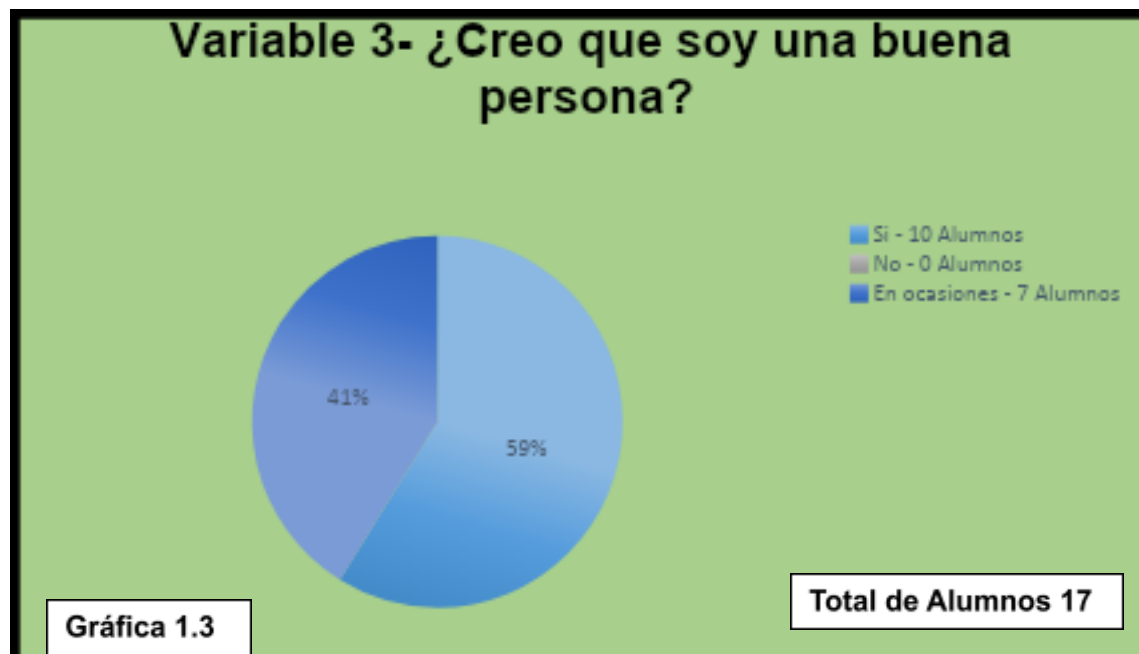
Tabla de porcentajes resultantes del test psicosocial.

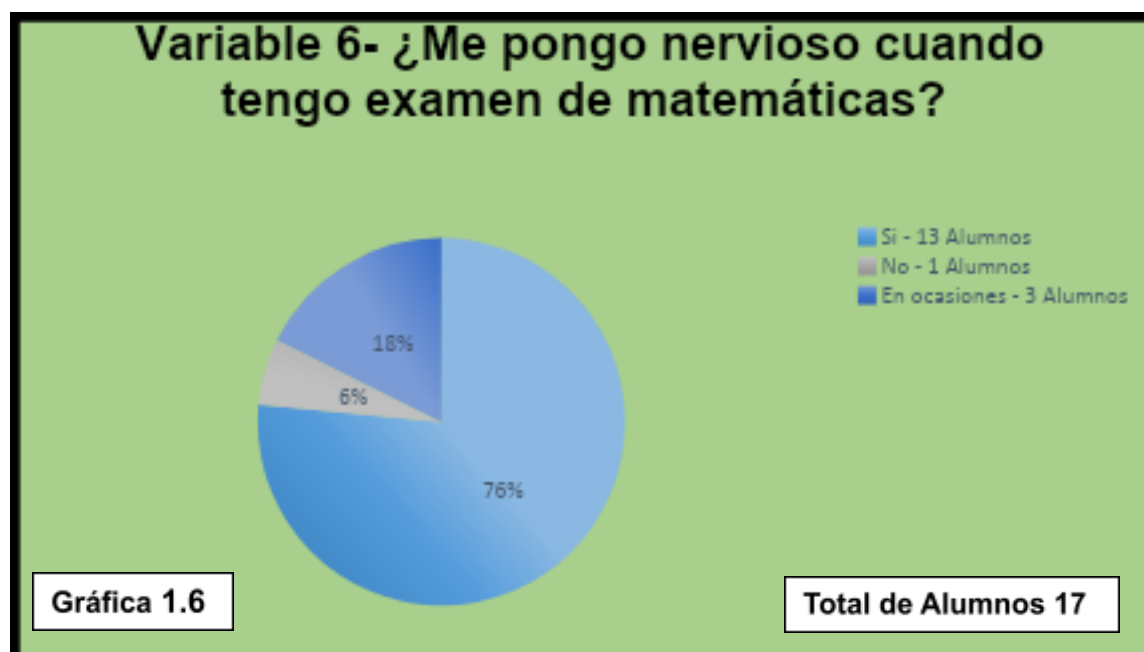
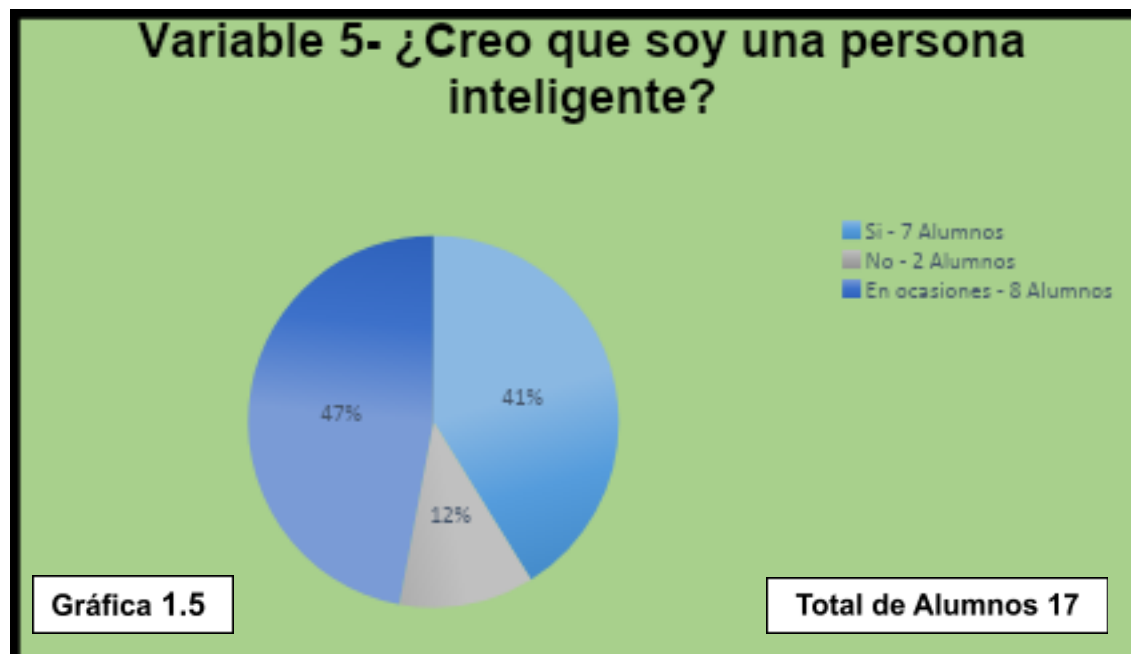
Instrumento 1				
Test psicosocial				
Variable	(a)	(b)	(c)	Total
1	12	5		17
	70.58	29.42		100
2	17			17
	100			100
3	10		7	17
	59		41	100
4	1	6	10	17
	5.88	35.29	58.82	100
5	7	2	8	17
	41.18	11.76	47.06	100

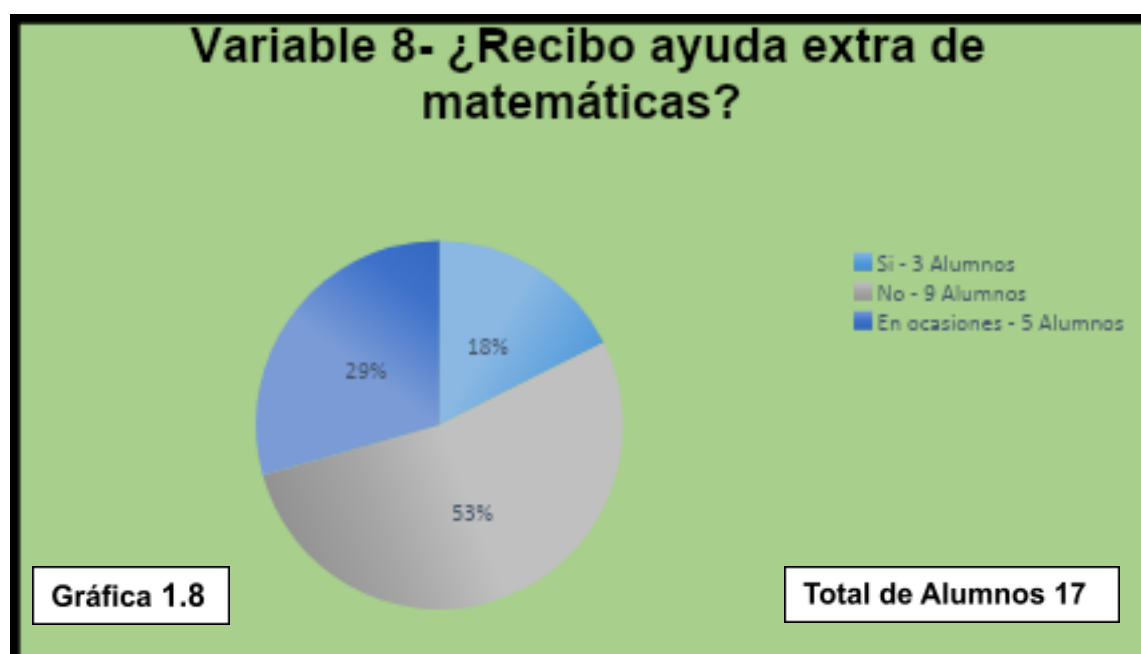
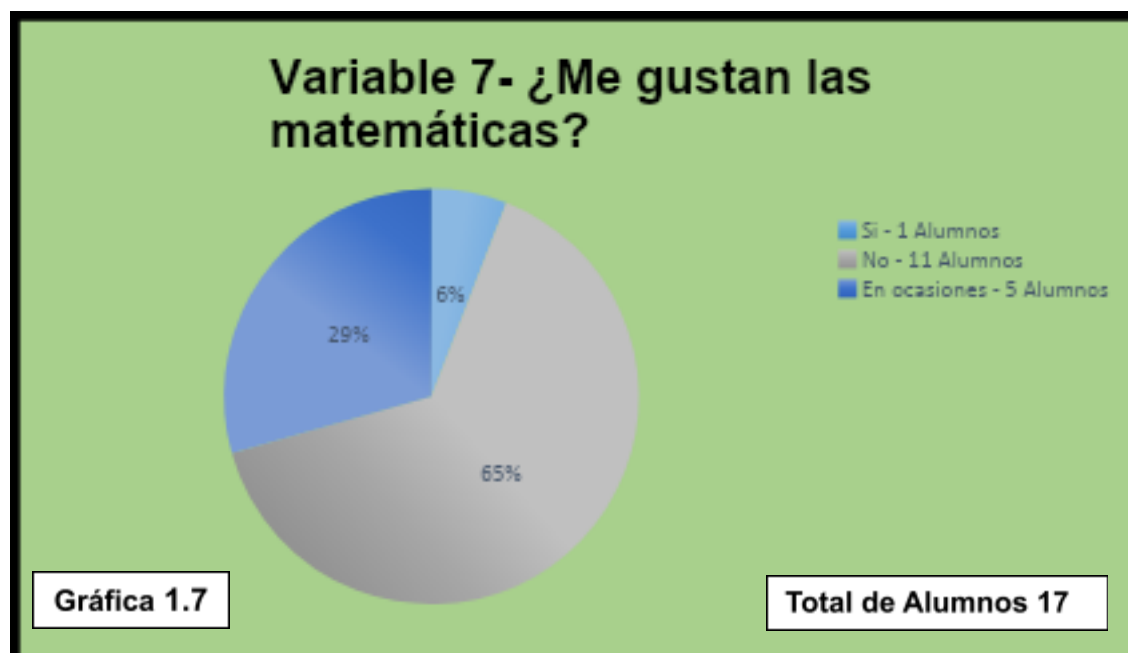
6	13	1	3	17
	76.47	5.88	17.65	100
7	1	11	5	17
	5.88	64.71	29.41	100
8	3	9	5	17
	17.65	52.94	29.41	100
9	5	3	9	17
	29.41	17.65	52.94	100
10	2	9	6	17
	11.76	52.94	35.29	100
11	16		1	17
	94.12		5.88	100
12	4	2	11	17
	23.53	11.76	64.71	100
13	13	1	3	17
	76.47	5.88	17.65	100
14	11		6	17
	64.71	0,00	35,29	100
15	13	3	1	17
	76.47	17.65	5.88	100
16	2	9	6	17
	11.76	52.94	35.29	100
17	9	5	3	17
	52.94	29.41	17.65	100
18	4	10	3	17
	23.53	58.82	17.65	100
19	1	11	5	17
	5.88	64.71	29.41	100

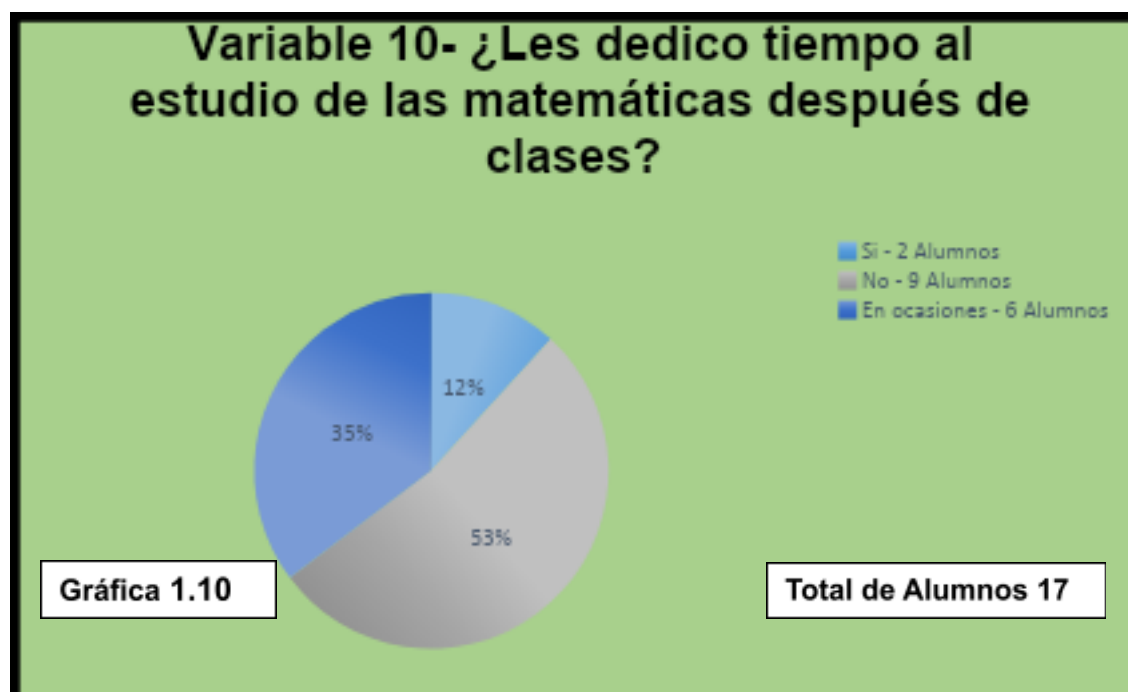
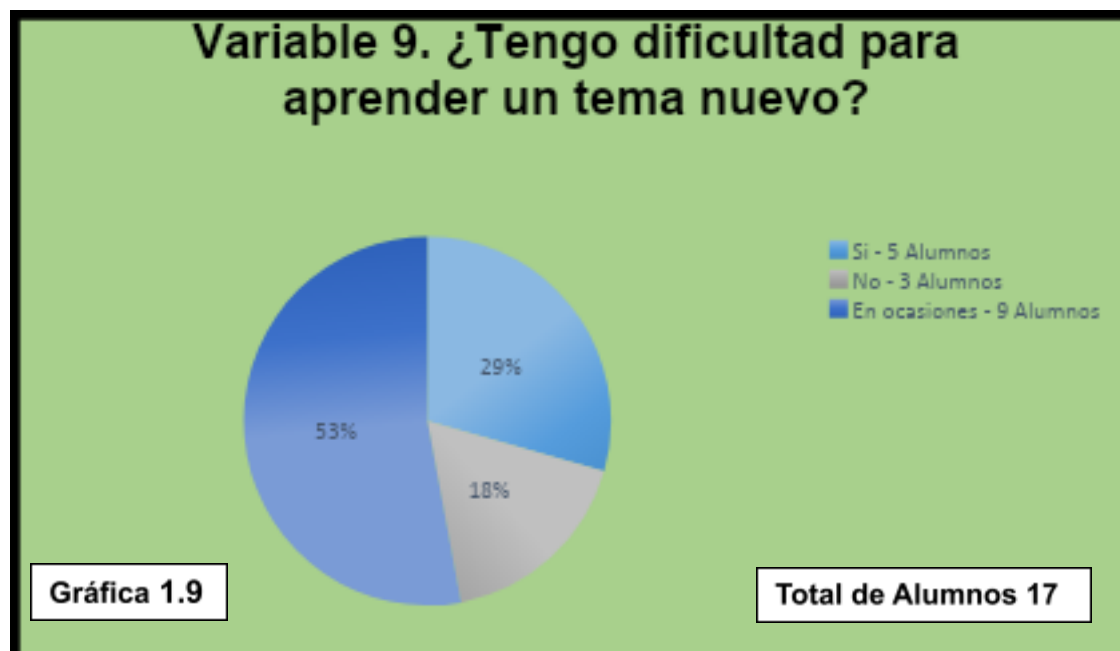
Gráficos correspondientes a los rasgos característicos del sujeto de estudio.



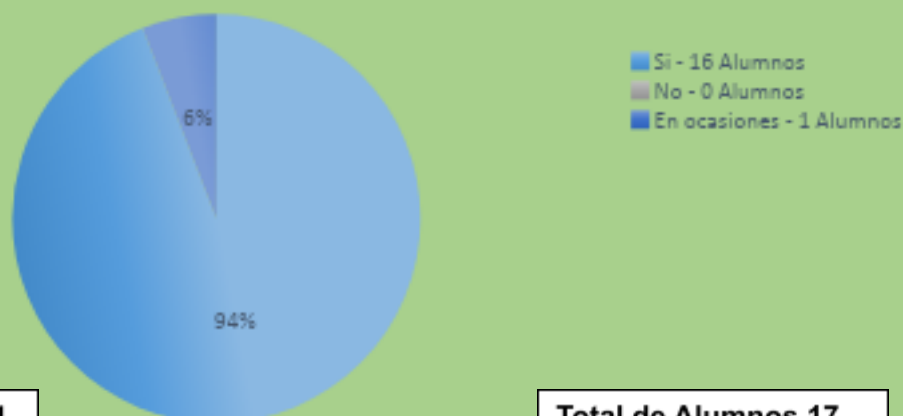








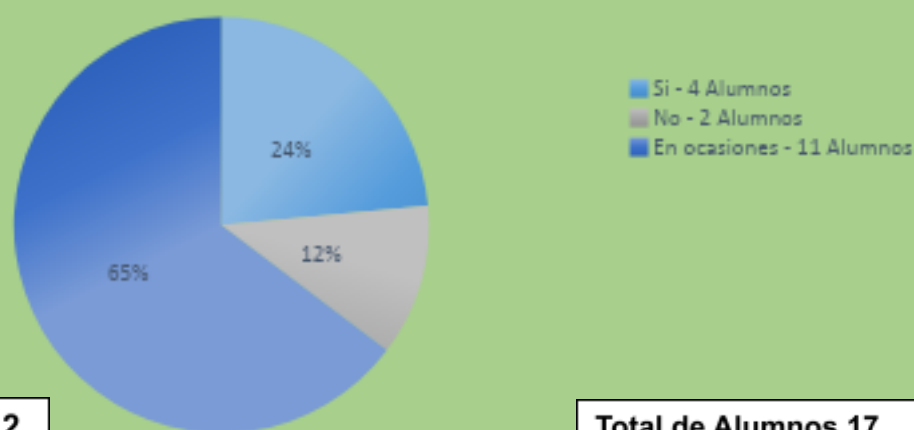
Variable 11- ¿He reprobado matemáticas?



Gráfica 1.11

Total de Alumnos 17

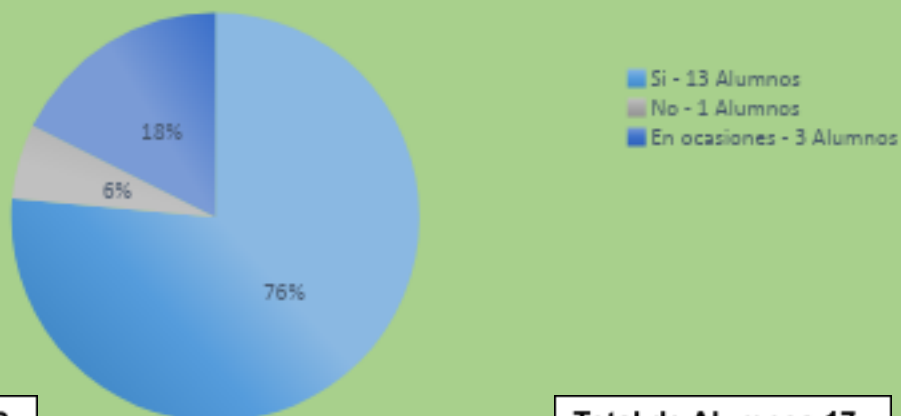
Variable 12- ¿Con facilidad entiendo lo que explica el maestro de matemáticas?



Gráfica 1.12

Total de Alumnos 17

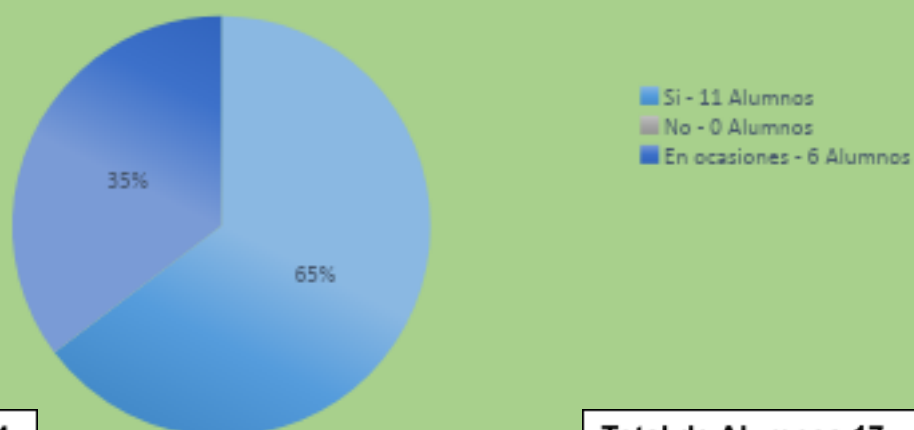
Variable 13- ¿Mis padres están al pendiente de mis problemas?



Gráfica 1.13

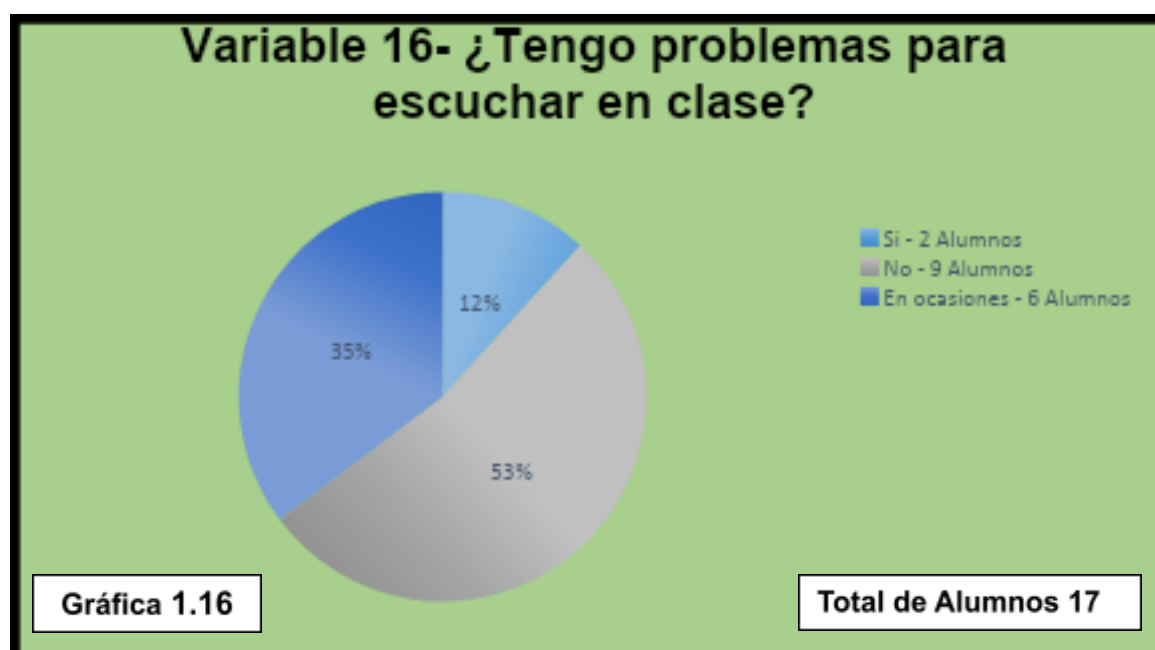
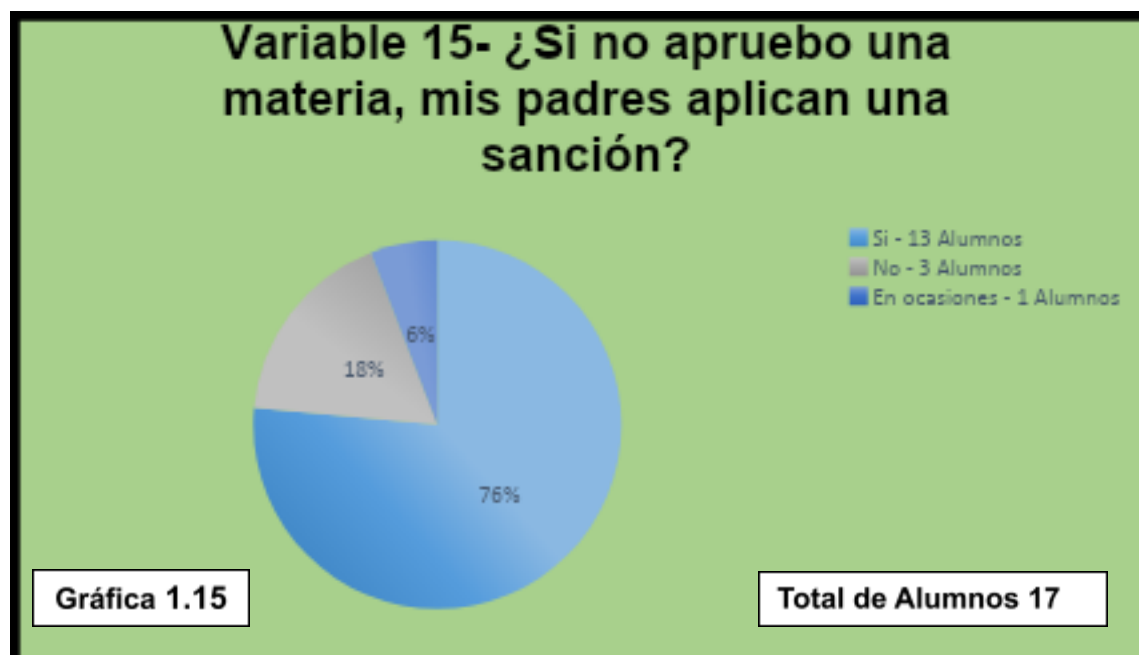
Total de Alumnos 17

Variable 14- ¿En cuestiones escolares, mis padres están al pendiente?

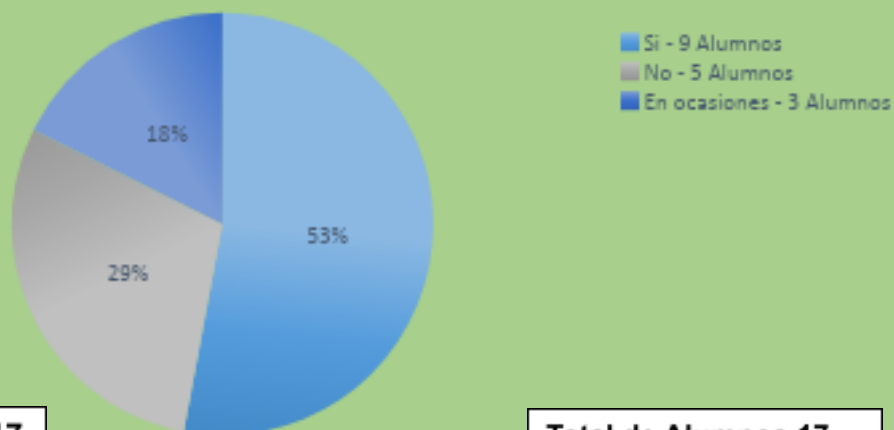


Gráfica 1.14

Total de Alumnos 17



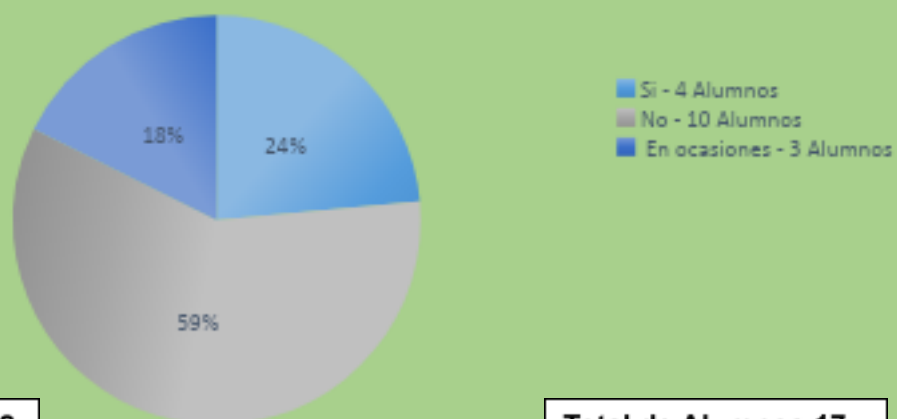
Variable 17- ¿Me siento cansado al terminar mi jornada de clase?



Gráfica 1.17

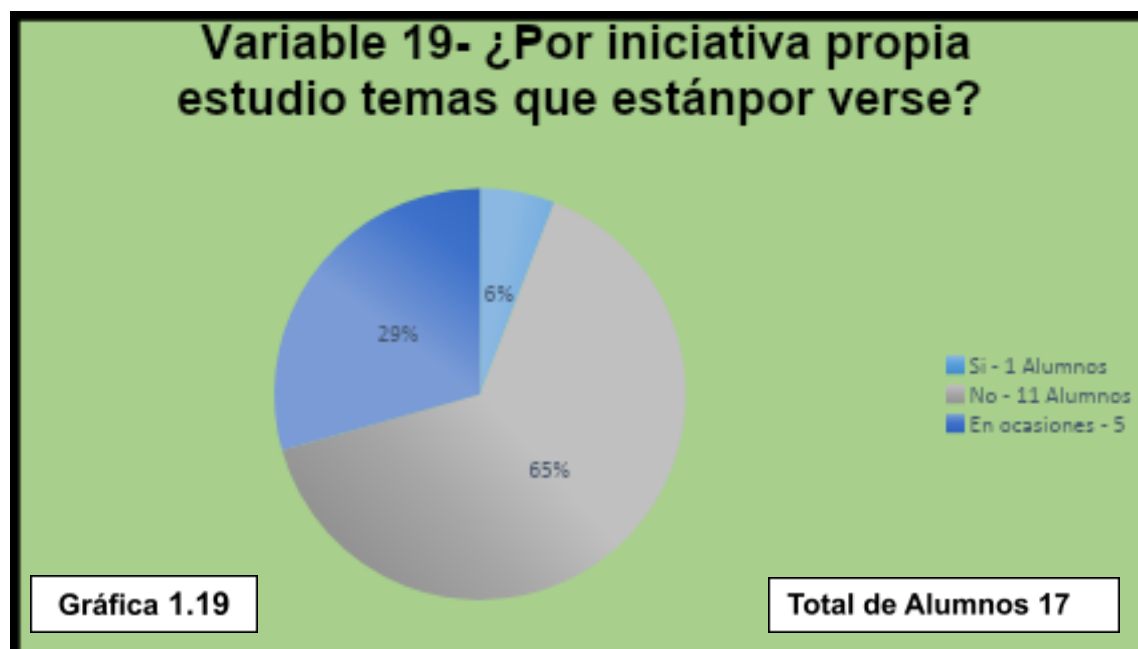
Total de Alumnos 17

Variable 18- ¿Tengo dificultades para ver?



Gráfica 1.18

Total de Alumnos 17



Según lo que muestran gráficos anteriores los principales factores o rasgos característicos del sujeto de estudio que pueden afectar a la investigación son los siguientes: En el gráfico 1.7 se observa que el 65% de la muestra investigada no le gusta la materia de matemáticas, esto puede significar una apatía al aprendizaje significativo de los contenidos manejados en la investigación. También el gráfico 1.8 indica que el 53% de la muestra no cuenta con un apoyo extra de matemáticas siendo esto una limitante para nuestra investigación. Por otra parte, analizando el gráfico 1.10 donde cuestiona sobre aquellos alumnos que le dedican tiempo al estudio de las matemáticas después de clases se encontró que el cincuenta y tres por ciento del total de ellos no tienen el hábito de estudiar o repasar en casa lo cual representa un problema significativo, ya que el educando debe permanecer en constante práctica de los temas para evitar el olvido de los contenidos. Continuando con el análisis de los datos recolectados del test psicosocial en el gráfico 1.11 donde se pretende conocer sobre los estudiantes que han reprobado matemáticas arrojó que dieciséis de ellos contestaron que sí han reprobado la materia interpretado en forma porcentual se refiere a un 94 % del total de la muestra teniendo lo anterior gran significancia, lo cual sugiere que la mayoría presenta rasgos de

irregularidades académicas. De acuerdo con los resultados del gráfico 1.17 el cual cuestiona sobre aquellos alumnos que al finalizar su jornada escolar se sienten cansados. Se obtuvo que 9 de ellos contestaron que sí, representando al 53% de la muestra analizada, proponiendo que el alumno dedica más tiempo a otras cosas fuera del estudio y esto ocasiona que agote sus energías para el buen rendimiento y desempeño escolar, afectando de manera directa a la investigación. Otro gráfico que proporciona información valiosa para saber las cualidades de la muestra elegida para la investigación es el número 1.18 refiriéndose a factores visuales que impiden el rendimiento escolar del alumno, arrojando como resultado que 41% de ellos si pueden tener cierta problemática relacionada con la vista aportando otra limitante para la investigación. El gráfico 1.19 pretende conocer a aquellos alumnos que por su propia cuenta investigan algún tema que está por verse, y a esto contestaron el 65% de la muestra que no lo hacen lo cual demuestra que existe poco interés por parte de los estudiantes a la materia de matemáticas.

4.2 Análisis de resultados del Examen Diagnóstico.

Tercer instrumento aplicado al sujeto de estudio.

Distribución de frecuencias con base en los resultados del examen diagnóstico.

M.C Calificaciones de los alumnos de la muestra.

F. Número de alumnos.

F*A. Frecuencia acumulada.

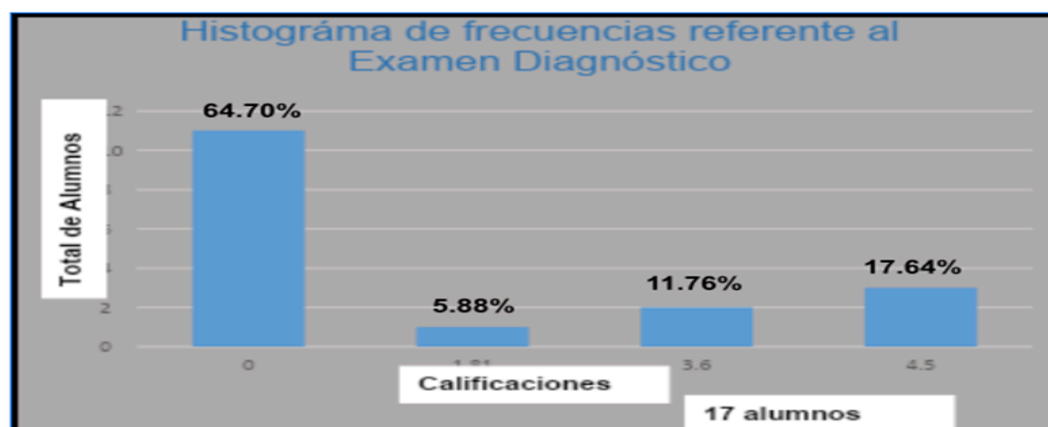
F*R*A. Frecuencia Relativa Acumulada.

M.C	Frecuencia	Frec. Relativ	%Frecuencia	Frec. Acum	Frec.Relat.Abs	%Frec.Acumulada
0	11	0.6471	64.7059	11	0.6471	64.71
1.81	1	0.0588	5.8824	12	0.7059	70.59
3.6	2	0.1176	11.7647	14	0.8236	82.36
4.5	3	0.1765	17.6471	17	1	100
	17	1	100			
	$\Sigma=17$	$\Sigma=1$	$\Sigma=100\%$			

En la tabla anterior se muestran los resultados obtenidos de una evaluación diagnóstica aplicada a 17 alumnos, se observa que 11 de ellos obtuvieron como calificación cero en esta prueba, representando al 64.70% de la muestra siendo poco más de la mitad de ellos. Se encuentra también que de los 17 estudiantes el 17.64% obtuvo de calificación 4.5 que representa solo 3 de ellos, lo cual demuestra que tienen muy pocos conocimientos sobre el tema. El resto de los alumnos investigados en el instrumento 2 (examen diagnóstico) obtuvieron calificaciones entre 1.81 y 3.6 no alcanzando la mínima para aprobar el examen. Para concluir el análisis anterior se encontró que el 100% de los alumnos de la muestra, se encuentran reprobados con una media de .582 en las calificaciones de este examen.

Histograma de frecuencias referente al examen diagnóstico.

Gráfico 4.20



En este gráfico se puede apreciar mejor los resultados obtenidos del examen diagnóstico. La barra del histograma más significativa que se observa, se coloca en el 64.70% en la escala porcentual por ser la frecuencia significativa en el examen diagnóstico, y la barra que menor porcentaje obtuvo se refiere a la mínima frecuencia obtenida en los resultados.

Medidas de tendencia central para el examen diagnóstico.

Tabla 4.3

Examen Diagnóstico "Medidas de Tendencia Central"				
Calificaciones (Xi)	Frecuencia (F)	Xi*F		
0	11	0	Media	1.32
1.81	1	1	Mediana	0
3.6	2	2		
4.5	3	3	Moda	0

En la tabla anterior se muestra el promedio de 1.32 en las calificaciones obtenidas en el examen diagnóstico de 17 alumnos, además dando como resultado una mediana de cero lo cual se refiere a la calificación que se encuentra en la parte central de las calificaciones ordenadas de menor a mayor y una moda con un valor de cero siendo este último dato el valor que tiene mayor frecuencia en los resultados del instrumento de evaluación realizado. Esto nos muestra que el conocimiento medio del alumno con que se inicia la investigación es muy bajo, de 1.32 con tendencia a cero siendo un factor negativo para el buen curso de la investigación.

4.3 Varianza y desviación estándar del examen diagnóstico.

Tabla 4.4

Examen Diagnóstico				
Xi	Frecuencia	Xi (Frecuencia)	(xi- \bar{x}) ²	(xi- \bar{x}) ² F
0	11	0	1.752	19.272
1.81	1	1.81	0.236	.236
3.6	2	7.2	5.18	10.36
4.5	3	13.5	10.085	30.255
		22.5		60.123
		$\Sigma=22.5$		$\Sigma=60.123$

El promedio o la media aritmética de la muestra investigada es:

$$\bar{x} = \frac{\sum XiF}{n} = 1,324$$

Con varianza correspondiente a:

$$Sx^2 = \frac{\sum (Xi - \bar{x})^2 F}{n - 1} = 3,758 \quad \text{Varianza}$$

Por lo tanto, la desviación estándar o medida de dispersión es:

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{n - 1}} = 1,939 \quad \text{Desv. Estandar}$$

En el análisis realizado en la tabla 4.4.1 de valores para obtener la varianza y desviación estándar por lo cual se concluye que el grupo en general tiene un nivel de dispersión de 1.939 referente a la desviación estándar y esto nos indica que el grupo se encuentra muy disperso respecto a los aprendizajes en los de cada alumno.

4.4 Análisis de resultados obtenidos en el examen final cuarto instrumento.

Distribución de frecuencias con base en el examen final aplicado.

Tabla 4.5

M.C	Frecuencia	Frec.Relat	De Frec.	Frec. Acur	Frec.Relat.Abs	%frec. Acumulada
6	8	0.471	47.059	8	0.471	47.059
7	2	0.118	11.765	10	0.588	58.824
8	5	0.294	29.412	15	0.882	88.235
10	2	0.118	11.765	17	1	100
	17	1	100			
	$\Sigma=17$	$\Sigma=1$	$\Sigma=100\%$			

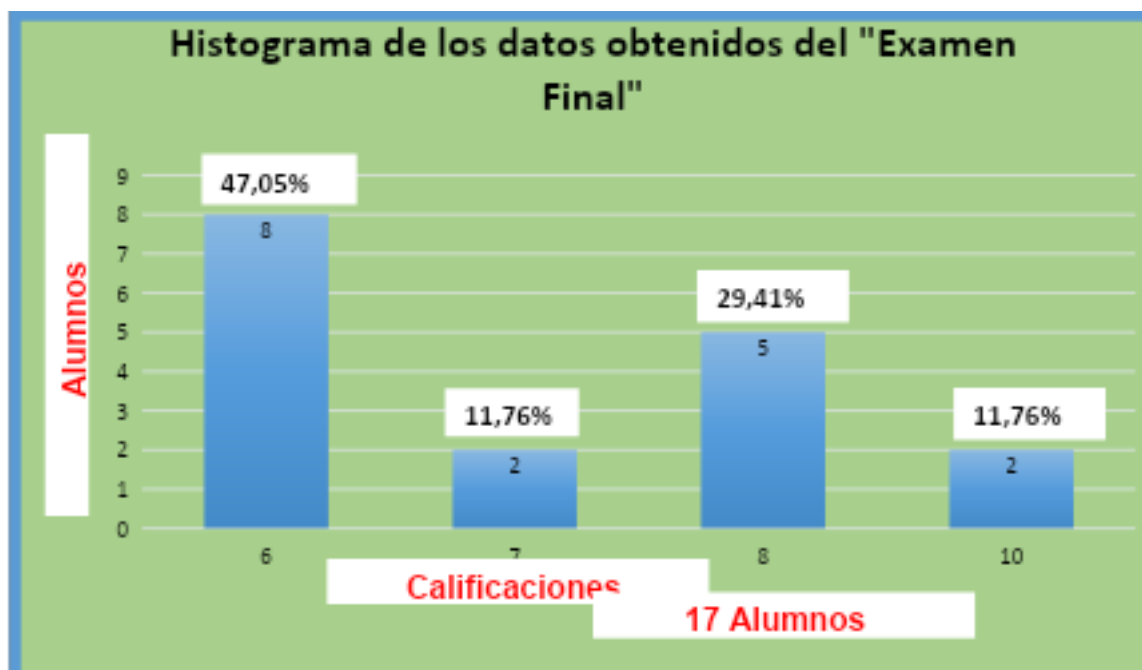
M.C Calificaciones de los alumnos de la muestra.

F. Número de alumnos.

F*A. Frecuencia acumulada.

F*R*A. Frecuencia Relativa Acumulada.

Gráfico 4.21



Medidas de tendencia central para el examen final.

Tabla 4.6

Examen Final "Medidas de Tendencia Central"				
Calificaciones (Xi)	Frecuencia (F)	Xi*F		
6	8	48	Media	7.18
7	2	14	Mediana	7
8	5	40		
10	2	20	Moda	6

Con lo anterior se puede concluir que de los 17 alumnos ocho de ellos obtuvieron una calificación aprobatoria de 6 y solo el 11.76% consiguieron una calificación perfecta de 10. Por lo tanto, se puede decir que la implementación de las estrategias didácticas realizadas en el cuadernillo de estrategias en el tema "Ecuación de la Circunferencia" logró un avance significativo en los alumnos seleccionados de la muestra.

4.5 Varianza y desviación estándar del examen final.

Tabla 4.7

Xi	Frecuencia	Xi (Frecuencia)	$(xi-\bar{x})^2$	$(xi-\bar{x})^2 F$
6	8	48	1.3924	11.1392
7	2	14	0.0324	0.0648
8	5	40	0.6724	3.362
10	2	20	7.9524	15.9048
	17	122		30.4706
	$\Sigma=17$	$\Sigma=122$		$\Sigma=30,4706$

El promedio o la media aritmética de la muestra investigada son:

$$\bar{x} = \frac{\sum XiF}{n} = 7.18$$

Con varianza correspondiente a:

$$Sx^2 = \frac{\sum (Xi - \bar{x})^2 F}{n - 1} = 1.9044 \quad \text{Varianza}$$

Por lo tanto, la desviación estándar o medida de dispersión es:

$$Sx = \sqrt{\frac{\sum (xi - \bar{x})^2}{n - 1}} = 1.38 \quad \text{Desv.Estd.}$$

En la tabla 4.7 muestra que las calificaciones obtenidas del examen final que contestaron los alumnos, indican que la desviación estándar respecto al examen diagnóstico, presenta una disminución de .559.

Tabla 4.8 Comparación de resultados

En la tabla anterior 4.8 se muestra la media aritmética y la desviación estándar de

Examen Diagnóstico	Examen Final
$\bar{x} = 1.32$	$\bar{x} = 7.8$
$Sx = 1.93$	$Sx = 1.38$

Los exámenes diagnóstico y final, para posteriormente continuar con un análisis de correlación para conocer en qué medida las estrategias del cuadernillo tuvieron dominio sobre las calificaciones del examen final en la investigación planteada.

4.6 Análisis de correlación.

Tabla 4.9 Análisis de correlación.

Tabla de Análisis de Correlación				
7	6	42	49	36
7	6	42	49	36
7	8	56	49	64
7	7	49	49	49
7	6	42	49	36
8	8	64	64	64
8	8	64	64	64
6	6	36	36	36
6	10	60	36	100
7	6	42	49	36
7	7	49	49	49
6	6	36	36	36
9	8	72	81	64
9	6	54	81	36
8	10	80	64	100
9	8	72	81	64
7	6	42	49	36
$\Sigma=125$	$\Sigma=122$	$\Sigma=902$	$\Sigma=935$	$\Sigma=906$
$\Sigma X_i \Sigma Y_i = 15250$		$(\Sigma X_i)^2 = 15625$		
$(\Sigma Y_i)^2 = 1488$				

Haciendo referencia en la tabla anterior se muestran dos variables distintas X_i , Y_i , estas se utilizan para representar un valor en específico de calificación asignados para poder medir y calcular resultados, lo cual cada una representa lo siguiente:

X: Número de estrategias didácticas contestadas correctamente.

Y: Calificación del examen final.

n: Número de alumnos (15)

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 \right] \left[\sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2 \right]}}$$

$$r = \frac{902 - \frac{1}{17}(125)(122)}{\sqrt{\left[935 - \frac{1}{17}(125)^2 \right] \left[906 - \frac{1}{17}(122)^2 \right]}}$$

$$r = \frac{902 - \frac{15250}{17}}{\sqrt{\left[935 - \frac{1}{17}(15625) \right] \left[906 - \frac{1}{17}(14884) \right]}}$$

$$r = \frac{\frac{15334 - 15250}{17}}{\sqrt{\left[935 - \frac{15625}{17} \right] \left[906 - \frac{14884}{17} \right]}}$$

$$r = \frac{\frac{84}{17}}{\sqrt{\left[\frac{15895 - 15625}{17} \right] \left[\frac{15402 - 14884}{17} \right]}}$$

$$r = \frac{\frac{84}{17}}{\sqrt{\left[\frac{270}{17} \right] \left[\frac{518}{17} \right]}} \quad r = \frac{\frac{84}{17}}{\sqrt{\frac{139860}{289}}} \quad r = \frac{\frac{84}{17}}{\sqrt{483,9446367}}$$

$$r = \frac{\frac{84}{17}}{21.9987} \quad r = \frac{4.9411}{21.9987}$$

$$r = .225 \quad r = 22.5\%$$

Respecto a lo anterior se obtuvo que el valor del coeficiente de correlación es de 22.5% el cual corresponde a una relación moderada positiva baja referente al número de estrategias didácticas correctamente contestadas y las calificaciones que adquirieron los

alumnos en el examen final. Para comprobar la credibilidad de la relación anterior se realizará una prueba de hipótesis mediante una distribución T Student.

4.7 Prueba de hipótesis.

1. Se establece la Hipótesis Nula y la Hipótesis de Investigación

Hipótesis Nula: No existe relación entre la implementación de estrategias didácticas con una secuencia lógica y el índice de aprovechamiento en el tema ecuación de la circunferencia para alumnos de tercer semestre de preparatoria.

Hipótesis de Investigación: La implementación de estrategias didácticas con una secuencia lógica implica un mejor índice de aprovechamiento en el tema ecuación de la circunferencia para alumnos de tercer semestre de preparatoria.

Por lo que la hipótesis nula asegura que $r = 0$, mientras que la investigación establece $r = +$.

Respecto a las hipótesis planteadas anteriormente se propone la hipótesis nula con la intención de comprobar la significancia de una medida de correlación, donde se pretende rechazar la hipótesis nula para que automáticamente se acepte la investigación.

2. Se establece el nivel de significancia (Grado de credibilidad).

Para este trabajo de investigación se establece un nivel de significancia del 25% es decir un nivel de credibilidad de 75%.

3. Se convierte el coeficiente de correlación a una distribución T Student (se hace la tipificación de r).

$t =$ Distribución T Student.

$r =$ Coeficiente de Correlación.

$N =$ Número de datos investigados.

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{1-r^2}$$

$$t = \frac{.225\sqrt{17-2}}{\sqrt{1-(.225)^2}}$$

$$t = \frac{.225(3.87)}{\sqrt{1-(.050625)}}$$

$$t = \frac{.87075}{\sqrt{.949375}}$$

$$t = \frac{.87075}{.9743}$$

$t = .893$ (Valor de significancia obtenido en la investigación).

4. Se encuentra el número de grados de libertad.

5. Posteriormente con los grados de libertad y el nivel de significancia se busca el valor de “t” en la tabla de distribución.

gl = Grados de Libertad.

N = Número de datos investigados.

$$gl = N - 2$$

$$gl = 17 - 2$$

$$gl = 15$$

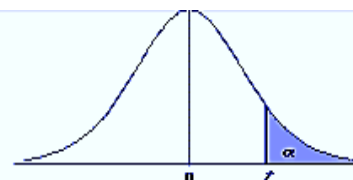
El valor obtenido en la tabla de distribución T Student es .6912 con un grado de libertad de 15 puntos y 25% de significancia.

Tabla T Student.

Tabla de la t de Student.

Contiene los valores t tales que $p[T > t] = \alpha$,
donde n son los grados de libertad.

Significancia



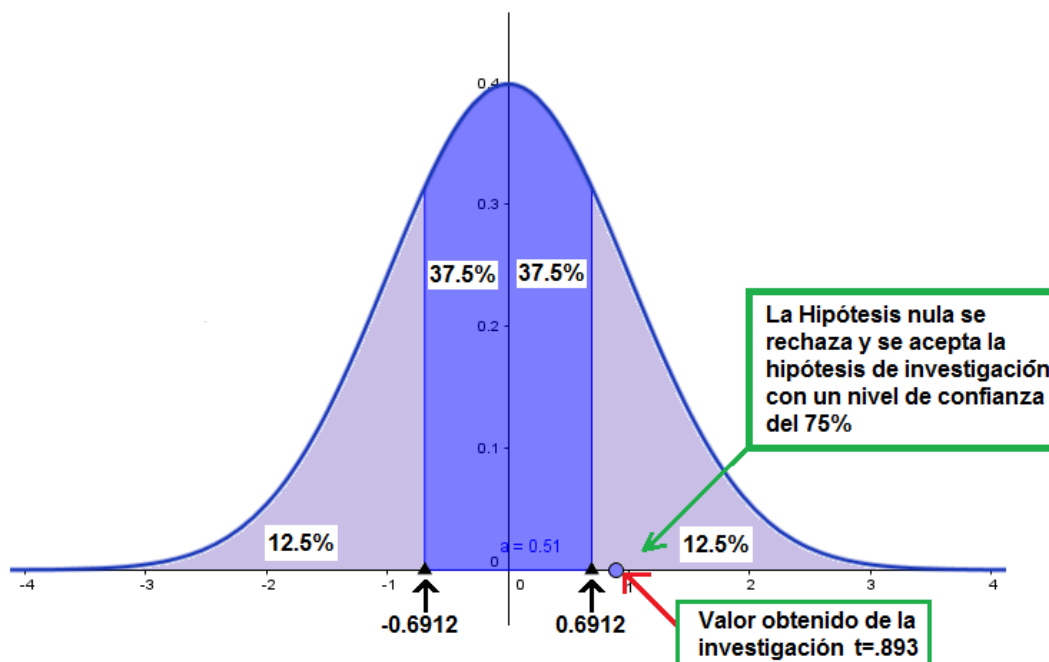
$n \setminus \alpha$	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,7265	1,0000	1,3764	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559
2	0,6172	0,8165	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250
3	0,5844	0,7649	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408
4	0,5686	0,7407	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041
5	0,5594	0,7267	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	0,5534	0,7176	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	0,5491	0,7111	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995
8	0,5459	0,7064	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	0,5435	0,7027	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	0,5415	0,6998	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	0,5399	0,6974	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	0,5386	0,6955	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	0,5375	0,6938	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	0,5366	0,6924	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	0,5357	0,6912	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467
16	0,5350	0,6901	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	0,5344	0,6892	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18		0,6884		1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784

Grados de libertad

Valor T
.6912

5. Se comparan los resultados obtenidos, el nivel de la investigación y el de la tabla "T", ubicándolos en la campana de Gauss y de acuerdo a la probabilidad del error de muestreo se acepta o se rechaza la hipótesis nula.

Campana de Gauss.



Tal como se muestra en la campana de Gauss el valor "T" obtenido de la investigación es de .893. Este cae dentro de la zona donde tiene una menor probabilidad de ser un error de muestreo, basándose en los parámetros de 0.6912 a -0.6912 obtenidos estos por los grados de libertad y la tabla de distribución T Student, tomando en cuenta el 25% de significancia. Respecto a lo anterior se concluye que hay un 25% de probabilidad de que sea un error de muestreo ante un 75 % de credibilidad, por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis de investigación.

Capítulo V.

5.1 Conclusiones de los resultados.

La finalidad de este documento es aprobar la implementación de un cuadernillo de estrategias con una secuencia lógica y bien diseñado conlleva un mejor índice de aprovechamiento en el tema “Ecuación de la Circunferencia” para alumnos de tercer semestre de preparatoria. Se investigó una muestra de 17 alumnos de preparatoria en tercer semestre, la cual presentó una media aritmética de calificaciones en el examen diagnóstico de 1.32 del total de los alumnos, posteriormente ya finalizado el curso y habiendo implementado el cuadernillo de estrategias los estudiantes obtuvieron una calificación del examen final de 7.18 aumentando considerablemente 6.86 unidades para el tema “Ecuación de la Circunferencia en su forma ordinaria y general”, esto demuestra que respecto a la calificación inicial los educandos presentan una desviación estándar en los dos exámenes de forma moderada aceptable. Seguido a esto se hizo un análisis de correlación donde se obtuvo una relación moderada positiva baja entre el número de estrategias didácticas contestadas correctamente y las calificaciones que adquirieron los alumnos en el examen final. Para afirmar la prueba de hipótesis se convierte el coeficiente de correlación en una distribución T Student, ubicando el resultado en la campana de Gauss donde se obtuvo un valor de .893 de dicha investigación, esto nos muestra que la hipótesis es aceptada con un 75% de credibilidad y un 25% de significancia. De tal forma se concluye que la aplicación de una buena secuencia didáctica para el tema “Ecuación de la Circunferencia” influye positivamente en el aprendizaje significativo, aumentando el aprovechamiento en alumnos de tercer semestre de preparatoria en la materia de geometría analítica.

5.2 Recomendaciones del autor para investigaciones posteriores.

Basadas en los resultados de la investigación se hacen las siguientes recomendaciones.

1. Se sugiere al investigador realizar una actividad de inicio de curso como apertura para ir conociendo a los alumnos.

2. Realizar las actividades planteadas con tiempo determinado según requiera el ejercicio.
3. Analizar las múltiples herramientas que ofrece el programa GeoGebra para aplicarlas.
4. Contar con herramientas tecnológicas para poder implementar GeoGebra como recurso de apoyo (proyector, computadora y programa descargado).
5. Establecer las reglas sobre el trabajo en los cuadernillos y recomendar el buen uso del material.
6. Leer las indicaciones de cada estrategia didáctica con voz clara y fuerte y posteriormente explicar más a detalle el contenido y la instrucción.
7. Es recomendable explicar varios ejemplos de un tema y seguido a esto los alumnos pasen a resolver algunos ejercicios de esta forma se esperará un aprendizaje significativo del tema.
8. Iniciar cada sesión mediante una retroalimentación del tema visto con anterioridad para así aclarar posibles dudas y evitar el rezago de alumnos.
9. Revisar con mucha cautela cada una de las estrategias didácticas del cuadernillo.
10. Evitar dejar reactivos sin resolver ya sean ejemplos en el pizarrón y en el cuadernillo.
11. Pedir a los alumnos tomar notas de lo visto en clase, además dejar tareas para que practiquen lo que se realizó en la sesión.
12. Hacer énfasis en la estrategia no: 1 y aclarar dudas sobre el tema de binomios al cuadrado y en la factorización de un TCP ya que es un tema fundamental para el desarrollo de la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria a la general.
13. Tomar el tiempo suficiente para cada sesión, este no debe de ser menor a 2 semanas.
14. Plantear nuevos métodos de enseñanza para la ecuación de la circunferencia ordinaria y su desarrollo a una general.
15. Es recomendable que el investigador seleccione una muestra grande de la población para obtener datos más exactos.

Bibliografías.

Libros:

- Barraza Olvera, B. (1997). *Geometría y trigonometría*. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial.
- Bouzas, P. (2004). *El constructivismo de Vygotsky*. Longseller.
- Catrip Huerta, E. (2013). *Matemáticas 3*. Anglopublishing.
- De Oteyeza, E., Lam Osnaya, E., & Gómez Ortega, J. A. (1994). *Geometría analítica*. Prentice Hall.
- Garza Olvera, B. (2003). *Matemáticas III: Geometría Analítica*. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial.
- Leithold, L. (s. f.). *El cálculo con geometría analítica* (6ª ed.).
- Monroy, A. (1994). *Antología de la adolescencia* (Vol. II). Onapo FUNAP.
- Periant, A. (2003). *Los adolescentes en el siglo XXI*. Manuales de psicopedagogía.
- Pérez Carrillo, V. M. (2004). *Geometría analítica*.
- Piaget, J. (2004). *La teoría genética de Jean Piaget*. Longseller.
- Skinner, B. F. (1977). *El conductismo* (Colección Conducta Humana, No. 22).

- Swokowski, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica* (2ª ed.). PSW Publisher.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanessian, H. (1983). *Psicología educativa* (Reimpresión 2009). Trillas.
- Sobrado Fernández, L. M. (2002). *Tendencias pedagógicas*. Couce Sanialla.

Fuentes en línea:

- Secretaría de Educación Pública (SEP). (s. f.). *Sitio oficial de la SEP*.
<https://www.sep.gob.mx>
- Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) - Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE). (s. f.). *Portal de evaluación educativa*.
<https://www.dgee.unam.mx>
- Revista Mexicana de Investigación Educativa (RMIE). (s. f.). *Sitio oficial de la RMIE*. <http://www.comie.org.mx>
- Google Académico (Scholar). (s. f.). *Buscador de artículos académicos*.
<https://scholar.google.com.mx>
- Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP). (s. f.). *Estudios académicos, informes y resultados*.
https://www.conalep.edu.mx/estudios_historicos

Anexos.**Instrumento 1. Test psicosocial para el sujeto de estudio.**

Contesta correctamente los que se te pide y encierra en un óvalo la respuesta correcta

1. Nombre completo

2. Edad, Grado y Grupo

3. Vives en casa de tus padres.

SI NO

4. Creo que soy una buena persona.

SI NO EN OCASIONES

5. Ofendo verbalmente a las personas.

SI NO EN OCASIONES

6. Creo que soy una persona inteligente.

SI NO EN OCASIONES

7. Me pongo nervioso cuando tengo examen de matemáticas.

SI NO EN OCASIONES

8. Me gustan las matemáticas.

SI NO EN OCASIONES

9. Recibo ayuda extra de matemáticas.

SI NO EN OCASIONES

10. Tengo dificultad para entender un tema nuevo

SI NO EN OCASIONES

11. Le dedico tiempo al estudio de matemáticas después de clases.

SI NO EN OCASIONES

12. He reprobado matemáticas.

SI NO EN OCASIONES

13. Con facilidad entiendo lo que me explica el maestro de matemáticas.

SI NO EN OCASIONES

14. Mis padres están al pendiente de mis problemas.

SI NO EN OCASIONES

15. En cuestiones escolares, mis padres están al pendiente.

SI NO EN OCASIONES

16. Si no apruebo una materia mis padres aplican una sanción.

SI NO EN OCASIONES

17. Tengo problemas para escuchar en clases.

SI NO EN OCASIONES

18. Me siento cansado al terminar mi jornada de clases.

SI NO EN OCASIONES

19. Tengo dificultades para ver.

SI NO EN OCASIONES

20. Por iniciativa propia estudio temas que están por verse.

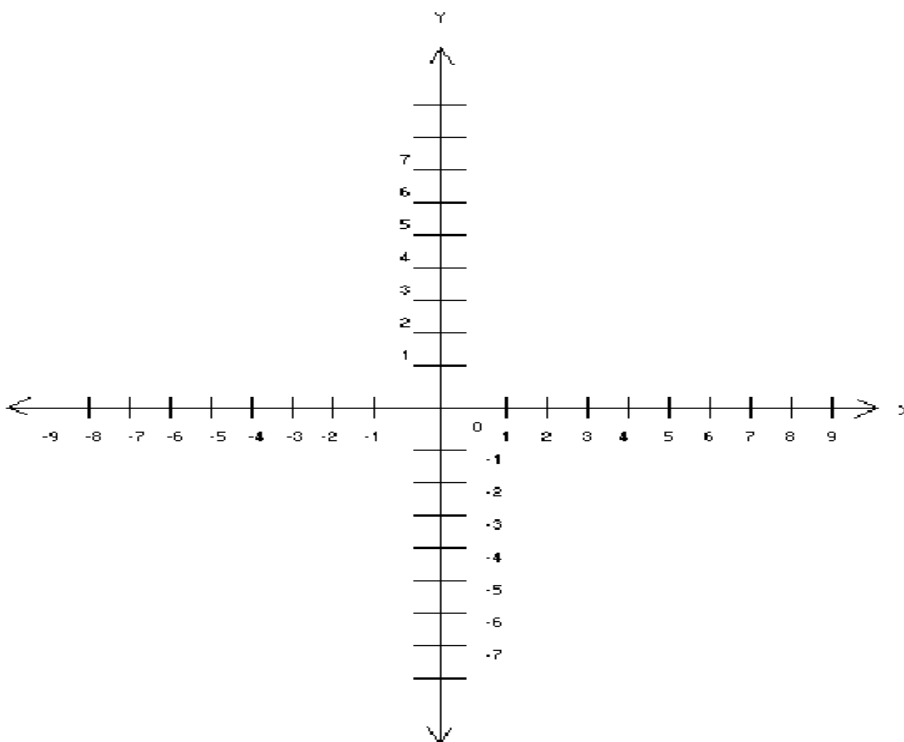
SI NO EN OCASIONES

Instrumento 2: Examen diagnóstico para el sujeto de estudio.

Nombre del alumno: _____ Fecha _____

1. Explica Qué es un binomio
2. Menciona los elementos de una circunferencia.
3. Escribe la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos.
4. En el siguiente plano cartesiano encuentra estos puntos:

- a) -4,5
- b) -3,-6
- c) 4,-3
- d) 7,5
- e) 0,7



Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

5. $y^4 - 8y^2 + 16$

6. $4x^4 - 12xy + 9y^2$

7. Despeja los siguientes términos.

a) $p = n \cdot l$ despeja (n)

b) $E = mgh$ despeja (m)

c) $F = \underline{9C} + 32$ despeja (C)

8. Reduce la siguiente ecuación

$$9a^2b - 3xy - 15a^2b + 8xy - 5a^2b + 4x$$

9. Realice la siguiente operación algebraica

$$[15 - (8 - 10 \div 2)] \times [5 + (3 \times 2 - 4)] - 3 + (8 - 2 \times 3) =$$

10. Escribe el concepto de circunferencia.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

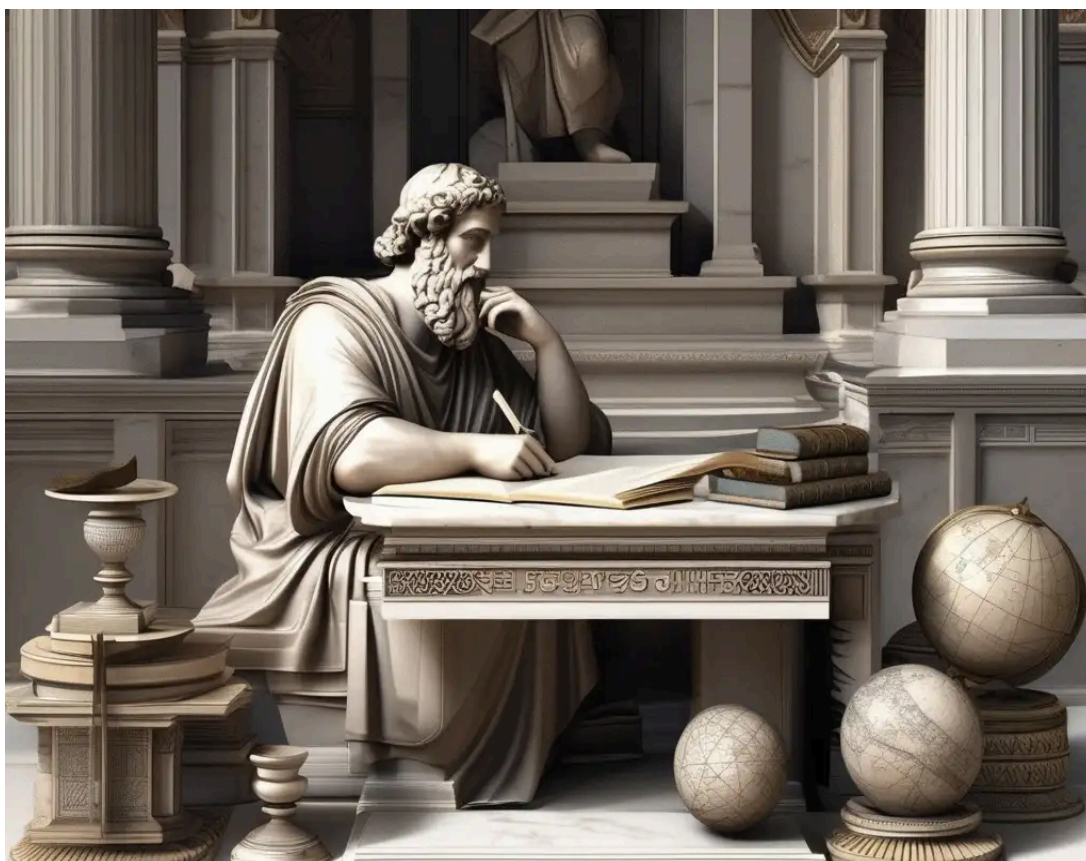
CUADERNILLO DE ESTRATEGIAS

“ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA”

MEDIANTE GEOGEBRA

PROF. GERARDO SOTO SILVA

Instrumento 3. Cuadernillo de estrategias para el sujeto de estudio.



Estrategia 1

Retoma los temas previos para el desarrollo de la ecuación de la circunferencia.

Objetivo: Que el alumno practique y recuerde los temas: (productos notables y TCP). Por medio de una breve práctica de álgebra y aritmética.

Competencias disciplinares:

- Formula y resuelve problemas matemáticos, desarrollando binomios al cuadrado y a la vez, factorizar trinomios cuadrados perfectos.

Competencias a desarrollar

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cada uno de sus pasos para desarrollar binomios al cuadrado.

- Define y da seguimiento a los procesos de construcción de conocimientos.

- Diseña y aplica modelos para probar la validez de un TCP.

¡COMENZAMOS!

¿Qué es un producto notable?

Se llama productos notables a ciertas expresiones algebraicas que se encuentran frecuentemente y que es preciso saber factorizarlas a simple vista; es decir, sin necesidad de hacerlo paso por paso.

Se les llama productos notables (también productos especiales) precisamente porque son muy utilizados en los ejercicios y problemas de la ecuación de la circunferencia.

Cuadrado de la suma de dos cantidades o binomio cuadrado.

Para resolver un binomio al cuadrado como este $(a+b)^2$, debes realizar los siguientes

Existen dos casos principales:

Binomio con signo positivo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a^2 : El cuadrado del primer término.

$2ab$: El doble del producto del primer término por el segundo.

b^2 : El cuadrado del segundo término.

Binomio con signo negativo: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

a^2 : El cuadrado del primer término.

$-2ab$: El doble del producto del primer término por el segundo (con signo negativo).

b^2 : El cuadrado del segundo término.

Para saber si es un trinomio cuadrado perfecto tenemos que identificar los siguiente:

- Es TCP cuando el primer y último término tienen raíz cuadrada exacta.
- Que el segundo término sea el doble de las raíces del primero por el segundo .
- Que el primer y último término sean positivos.

BINOMIO AL CUADRADO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A continuación vamos a factorizar un trinomio cuadrado perfecto, es decir, resultado de resolver un binomio elevado al cuadrado. $a^2 + 2ab + b^2$

Pasos para factorizar:

Identifica los cuadrados perfectos:

El primer término (a^2) es el cuadrado de "a".

El tercer término (b^2) es el cuadrado de "b".

Verifica el término del medio:

El término que está en medio ($2ab$) es el doble del producto de "a" y "b".

Por lo tanto si los pasos anteriores se cumplen, entonces el trinomio es un cuadrado perfecto y se factoriza como el cuadrado de un binomio:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Vamos a practicar lo anterior**Consigna 1.**

**A continuación, desarrollaremos los siguientes binomios al cuadrado.
Recuerda utilizar los pasos que anteriormente se indicaron.**

a. $(x - y)^2 =$

b. $(6t^2 + 2p^4)^2 =$

c. $(2z - 3g)^2 =$

d. $(9w^2 - 25z^2)^2 =$

e. $(8mn + 3k^2)^2 =$

f. $(2b^9 + 3v^4)^2 =$

¡Muy bien!

Recordaste las características y solución de un TCP

Ahora de la forma contraria, analizamos otro ejemplo para cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Pasos a seguir para factorizar

$$x^2 + 8x = 16.$$

- se obtienen las raíces cuadradas de los extremos:

$$\sqrt{x^2} = x, \quad \sqrt{16} = 4$$

- se realiza el doble producto de las raíces:

$$2(x)(4) = 8x$$

- Si el resultado anterior es igual al segundo término del trinomio, entonces es un TCP y su factorización es: $(x + 4)^2$

Mostramos otro claro ejemplo de cómo resolver un TCP

Si nos encontramos con un **TCP** $9a^2 - 30ab + 25b^2$, para factorizar realizaremos los siguientes pasos.

- Sacamos raíz del primer término $9a^2 = 3a$.
- Hacemos operación de signos. $(-) \times (+) = -$ (negativo)
- Encontramos la raíz del segundo término. $25b^2 = 5b$.
- El binomio al cuadrado resultante es: $(3a - 5b)^2$.

Una vez vistos los ejemplos anteriores sobre la solución de un TCP realice la consigna 2 para practicar el procedimiento.

Consigna 2.

Factoriza los siguientes TCP correctamente utilizando el ejemplo y la explicación anterior.

- $16p^2q^2 - 24pq^2 + 9q^2$
- $36x^2 - 60xy + 25y^2$
- $81x^4 - 126x^2y^2 + 49y^4$
- $1600a^4b^2 + 2000a^2bc^9 + 65c^{81}$
- $x^2 + \frac{2}{9}xy + \frac{1}{9}y^2$

En el siguiente espacio y con tus propias palabras, define como puedes factorizar un TCP:

Estrategia 2.

Definición y características de la circunferencia mediante el uso del programa “GeoGebra”.

Objetivo: Que el alumno conozca y construya la definición de la circunferencia.

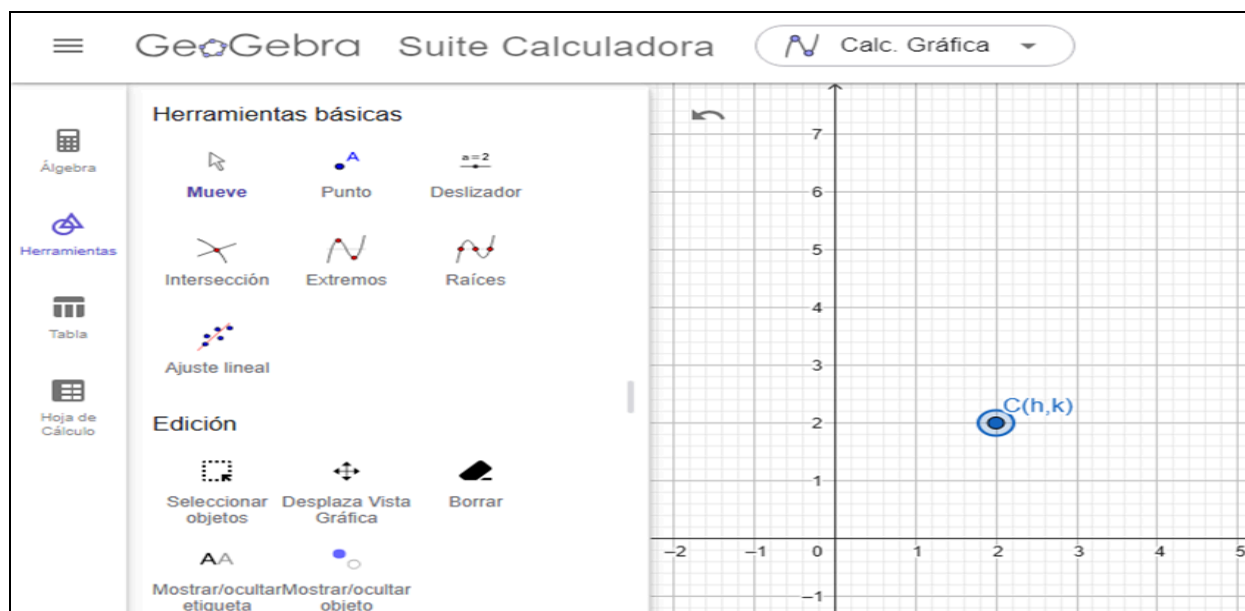
Competencias disciplinares:

- Construye una circunferencia mediante el uso de herramientas no convencionales.
- Define y da seguimiento a procesos que validan una circunferencia.
- Diseña y aplica modelos para probar su validez.

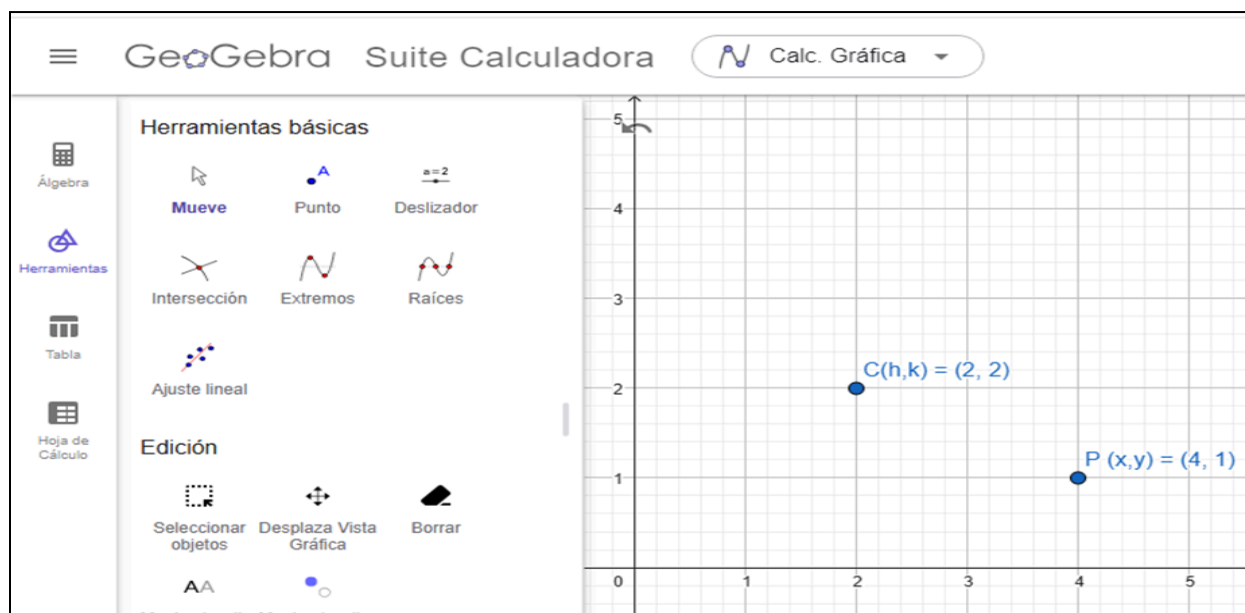
Consigna 1:

Para iniciar el siguiente ejemplo debemos abrir el programa GeoGebra y seguir los pasos que a continuación se enlistan:

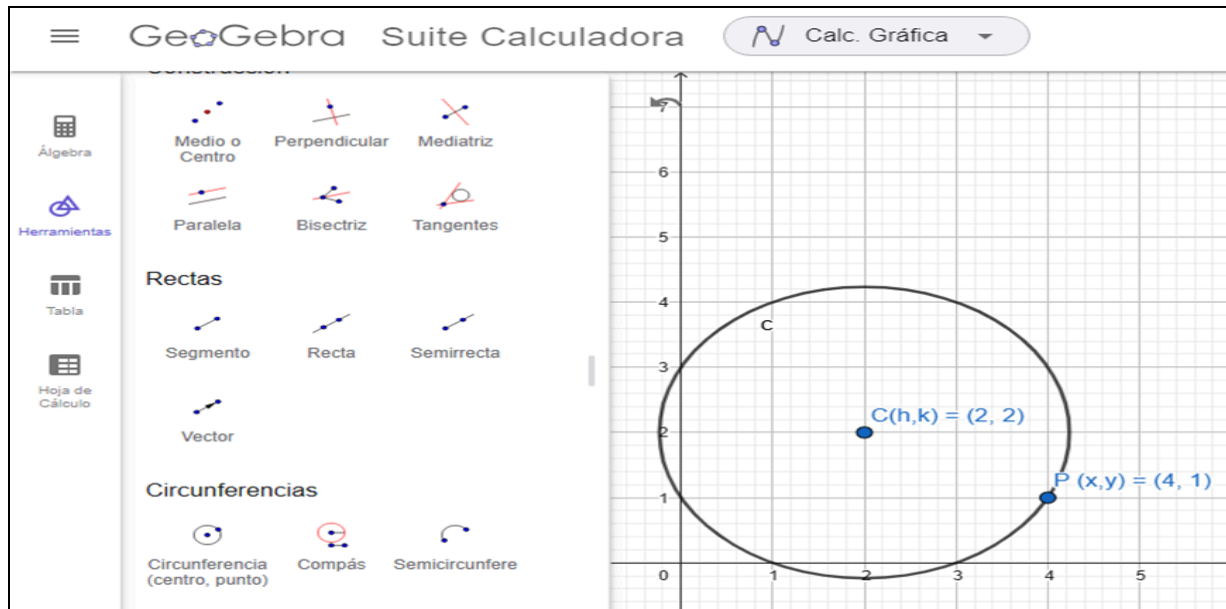
- Abriendo el menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS selecciona la opción de PUNTO y colócalo en cualquiera de los cuadrantes del plano, el cual le asignamos el nombre **Centro (h, k)**.



- Coloca otro punto que esté a unos cuadros de distancia del centro, este se llamará $P(x,y)$.



- Despliega nuevamente la barra de herramientas y selecciona la opción de **CIRCUNFERENCIA (centro,punto)**. Se trazará una circunferencia con centro en el punto (h,k) y radio $p(x,y)$.



De esta manera, es como se traza una circunferencia con centro y radio utilizando el programa GeoGebra.

Ahora, en los siguientes renglones con tus propias palabras define el concepto de "Circunferencia".

Consigna 2.

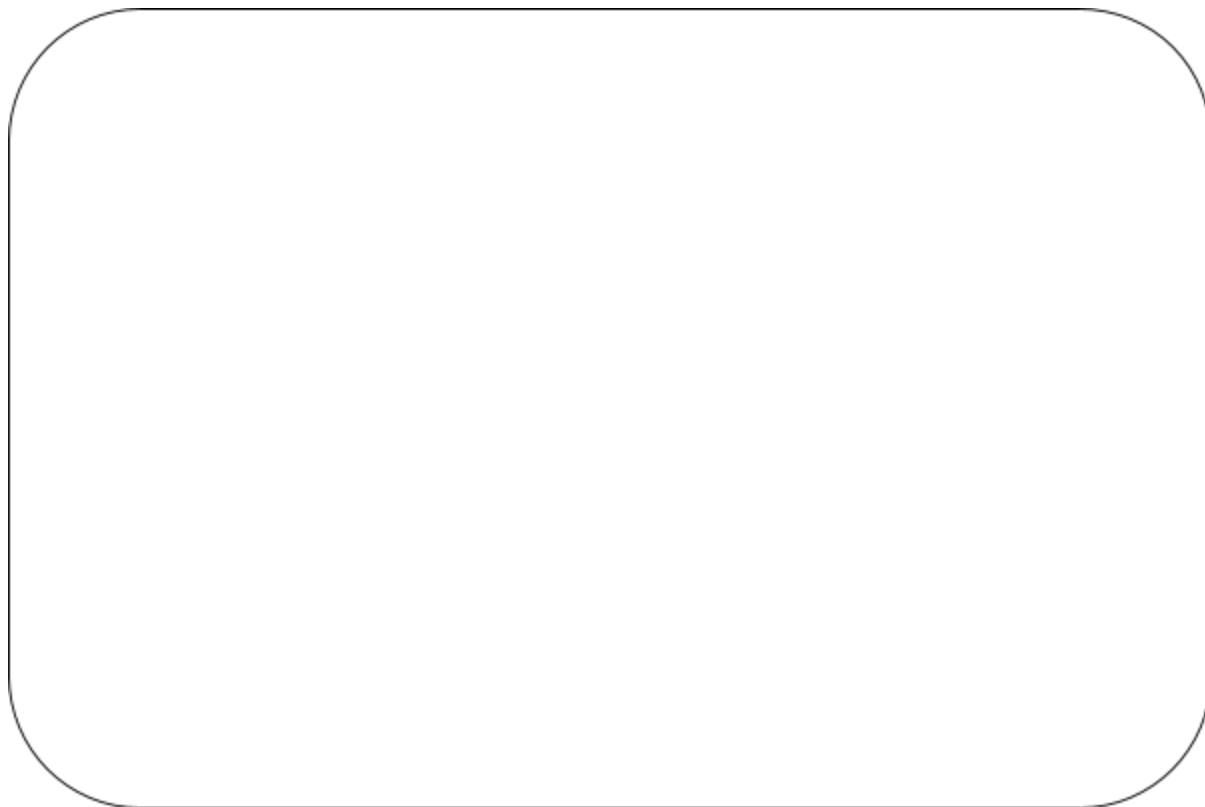
Ahora, con el concepto de la circunferencia bien definido y con el mismo dibujo de la consigna 1, vamos a encontrar la distancia entre el punto "C" y el punto "p", utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Utiliza las coordenadas de los pasos anteriores.

Recordando la fórmula para la distancia en el recuadro siguiente sustituye los valores y desarrolla hasta dónde te sea posible con los temas ya vistos:

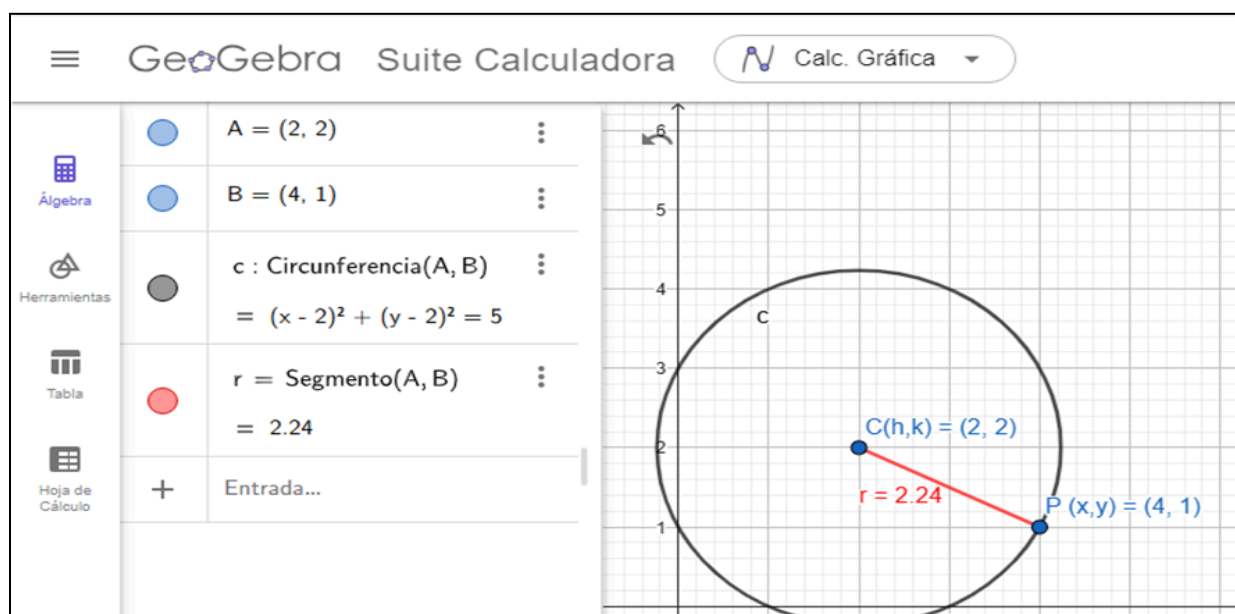
Sustitución en fórmula para encontrar la distancia entre 2 puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

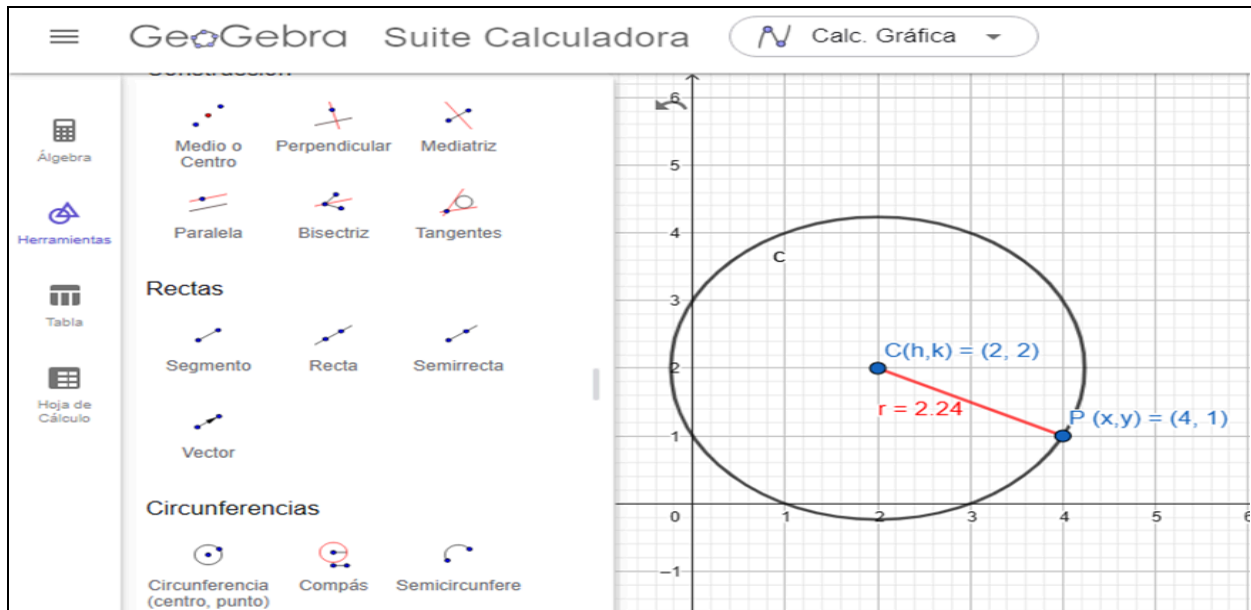


Ahora, con el ejemplo anterior de la circunferencia que revisamos en GeoGebra, vamos a encontrar la distancia entre el punto “C” y el punto “p”, utilizando las herramientas del programa siguiendo los pasos.

- Utiliza las coordenadas de los pasos anteriores y sigue las indicaciones que se te presentan:
- Abre el menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS y selecciona el apartado de RECTAS, elige la opción de SEGMENTO.
- Da click en el punto “c” (centro) y después en el punto “P” (h,k). A este segmento de recta lo nombras con la letra “r” (radio). Verás que aparecerá el valor del radio. Puedes asignarle un nuevo color.



- Una vez realizados los pasos anteriores, en el menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS, selecciona el apartado de ÁLGEBRA y se desplegará la información sobre los puntos y la circunferencia que colocaste. Te darás cuenta que si seleccionas y mueves uno de los puntos en cualquier dirección, los valores de la circunferencia y el radio se modificarán.



De esta forma determinamos la distancia entre dos puntos y también que este el resultado es igual al radio de la circunferencia.

Para lo anterior, sabemos que del centro de la circunferencia a cualquier otro punto que pase por la misma será el radio, entonces desarrollando la fórmula de la distancia entre dos puntos y cambiando la literal d, por la letra r, que significa radio obtendremos lo siguiente:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

Eliminando potencias queda lo siguiente:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Por la ley de las potencias y desarrollando los binomios nos queda:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

Igualamos a cero:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

Por definición de la fórmula general de la circunferencia obtenemos:

$$D = 2 - h, \quad E = 2 - k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2$$

NOTA:

Practicaremos esto en los próximos temas.

Estrategia 3.

Circunferencia con centro en el origen.

Objetivo: Que el alumno conceptualice y defina el origen de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

Competencias disciplinares:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante el desarrollo de la fórmula ordinaria de la circunferencia.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, basados en ejercicios sobre el centro y el radio de una circunferencia.

Competencias a desarrollar:

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, paso a paso la elaboración, transformación y solución de una forma a otra.

- Define y da seguimiento al origen de una ecuación.
- Diseña y aplica modelos para probar su validez.

¡Comencemos!

La condición geométrica que define a la circunferencia con centro en el origen se basa en una sola ecuación. Sabemos que para cualquier punto $p(x, y)$ que se encuentre en una circunferencia, su distancia al centro $C(0,0)$ es igual r .

$|PC| = r$, Definición de la circunferencia.

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

Usando la fórmula para la distancia entre dos puntos.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Así quedaría elevando al cuadrado ambos miembros.

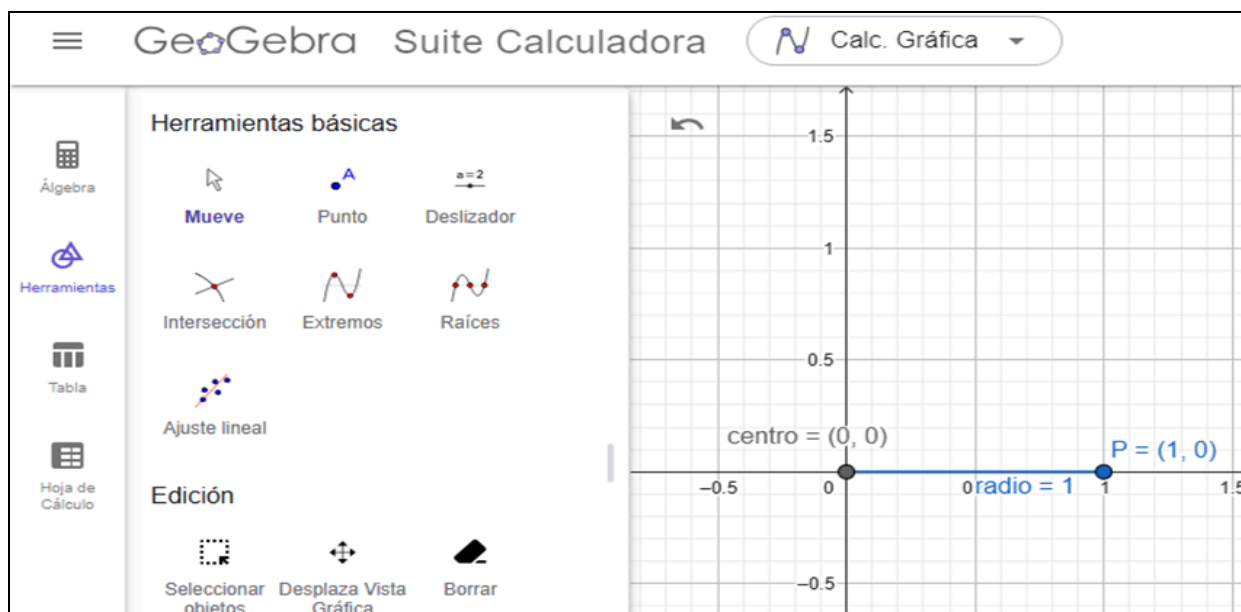
¡Excelente!

Ahora que ya sabemos de dónde viene esta ecuación ordinaria de la circunferencia, podemos trabajar en la solución de algunos ejercicios, utilizando los conceptos que ya hemos estudiado con ayuda del programa GeoGebra.

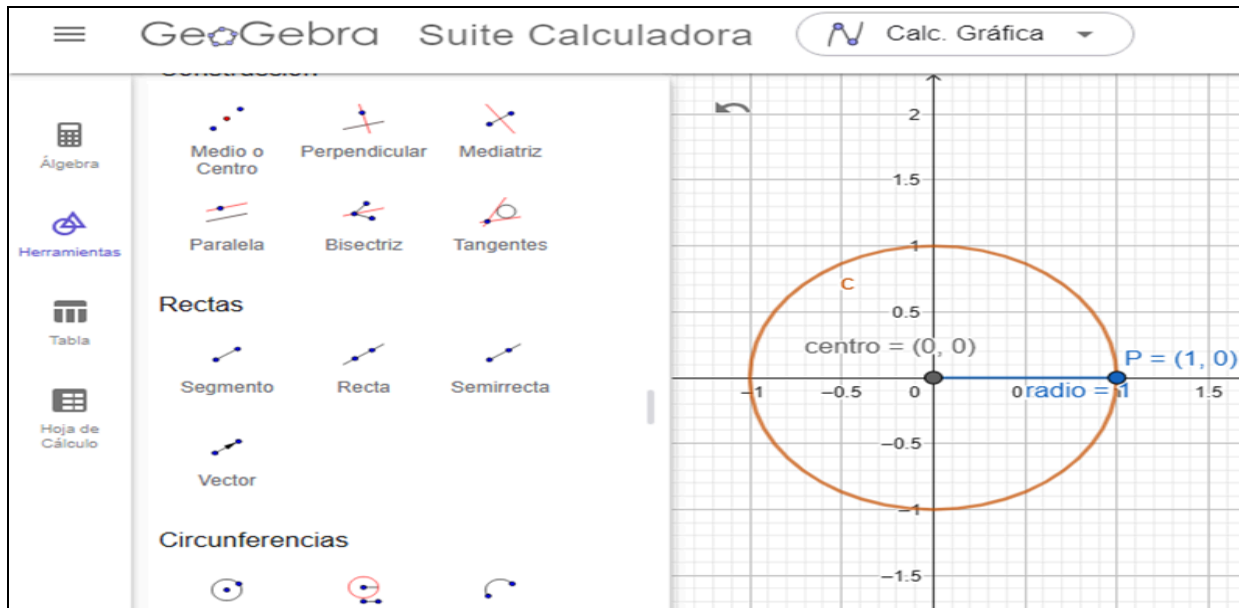
Consigna 1

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, cuyo radio mide: 1. Siguiendo los pasos que a continuación se presentan y los ejemplos anteriores vamos a determinar la ecuación en su forma ordinaria y general por medio de GeoGebra.

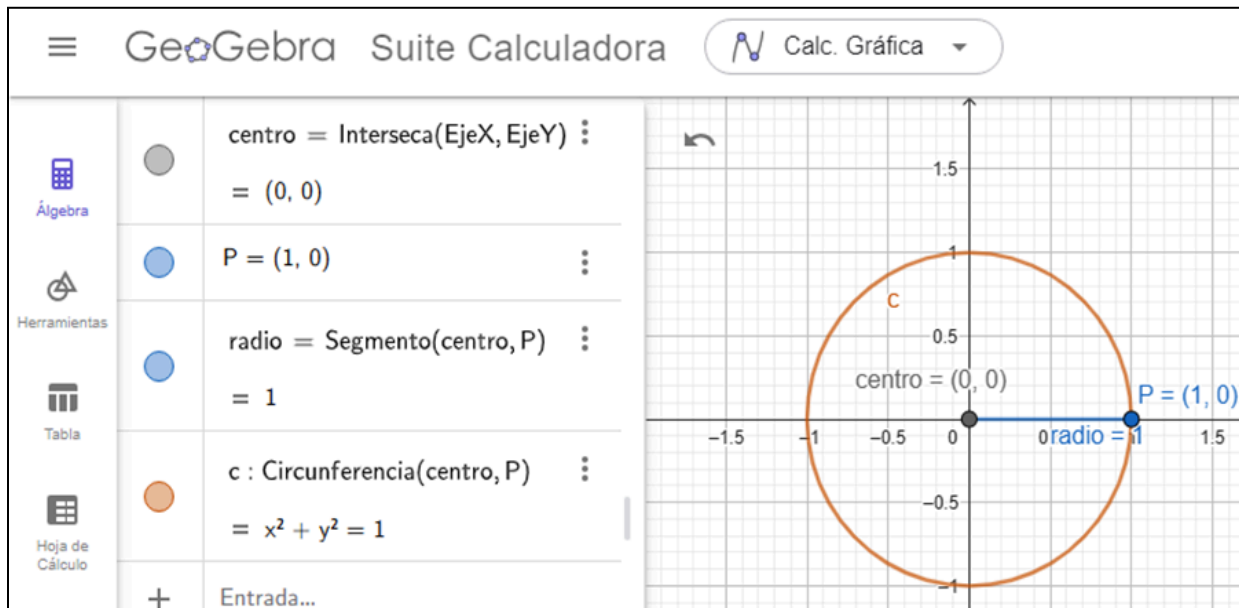
- Despliega el menú de las HERRAMIENTAS BÁSICAS y selecciona la opción de punto y colocalo en el origen, es decir en las coordenadas $c(0,0)$ y otro punto a una unidad de distancia que llamaremos $R=$ radio.
- Selecciona del menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS la opción de CIRCUNFERENCIA (centro, punto) y haz click en el centro y punto P.



- Del menú, selecciona el apartado de RECTAS (segmento) traza el radio y muestra el radio, selecciona también la opción de CIRCUNFERENCIA (centro,punto). Puedes mostrar los valores de diferente color para que se logren distinguir.



- Para determinar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, es necesario encontrar en el menú la opción de **ÁLGEBRA** y se desplegarán los valores, de la circunferencia, radio, centro y punto P.



De esta manera determinamos que los datos de esta circunferencia con centro en el origen (0,0) y radio $r=1$ (1.0) tiene como ecuación $x^2 + y^2 = 1$

Realiza los siguientes ejercicios en GeoGebra y escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia :

- $r = \frac{1}{3}$

- $r = 8$

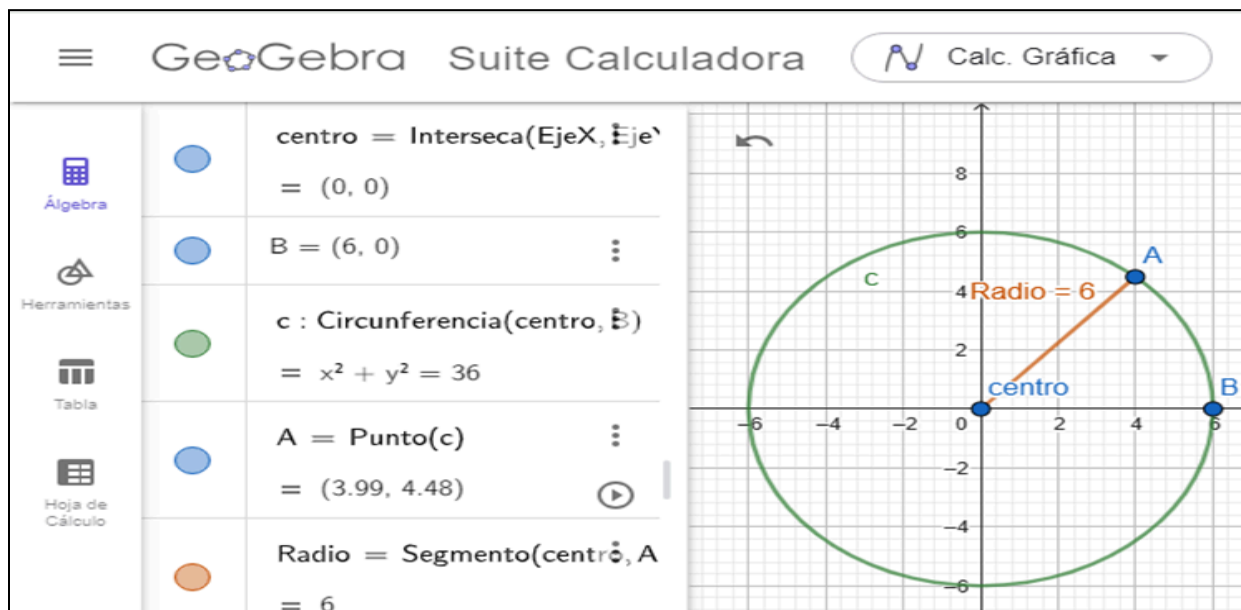
- $r = 13$

- $r = \sqrt{2}$

Consigna 2

Por medio de GeoGebra obtén los datos que se te piden en el siguiente ejercicio: Dadas la siguiente ecuación determina el centro y el radio de la circunferencia. $x^2 + y^2 = 36$. De acuerdo a los pasos siguientes:

- Debemos entender lo siguiente, $x^2 + y^2 = 36$ ya está en la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia, que es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, donde (h, k) son las coordenadas del centro de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia.
- Dibujamos en trazar en el programa GeoGebra una circunferencia con centro en el origen ya que no tenemos otro dato que nos proporcione el problema y trazamos un radio igual a: $r^2 = 36$, por lo tanto, $r = 6$. utilizando la opción de RECTAS (segmento).



Entonces, podemos concluir que el centro de la circunferencia es el punto $(0, 0)$, es decir, el origen del sistema de coordenadas y el radio de la circunferencia es 6 unidades.

De acuerdo con el ejercicio anterior, con el uso del programa Geogebra determina el centro y el radio de la circunferencia y escríbelo en cada caso.

- $3x^2 + 3y^2 = 12$

- $x^2 + y^2 = 16$

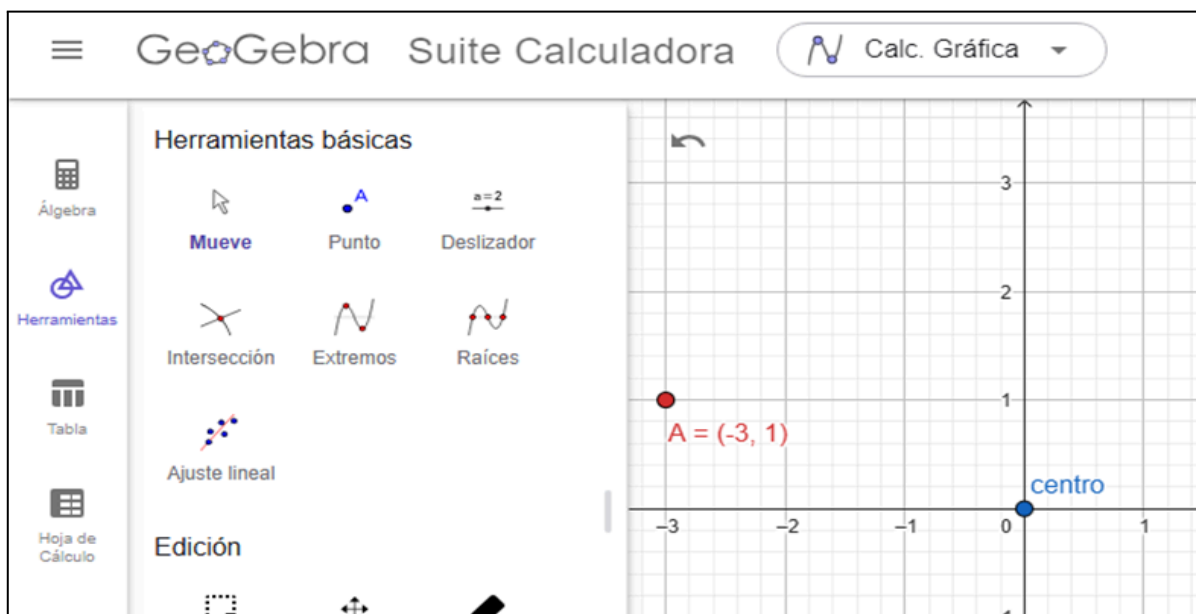
- $5x^2 + 3y^2 = 9$

- $x^2 + y^2 =$

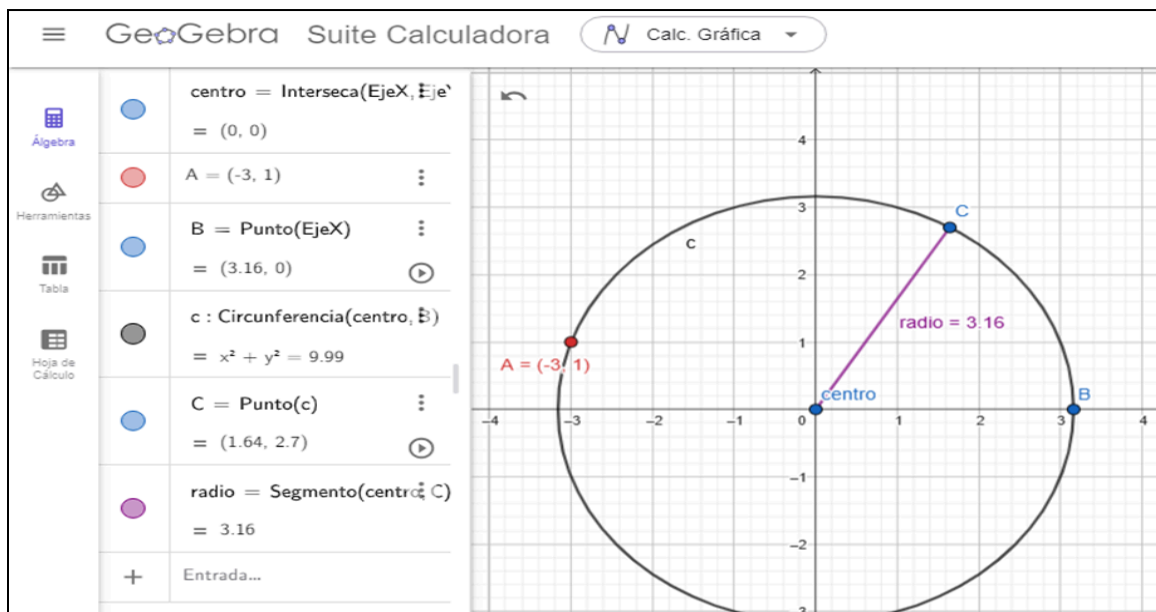
Consigna 3

En el siguiente ejercicio determina geométrica y analíticamente si el punto dado pertenece a la circunferencia indicada, escribe si se encuentra dentro o fuera de ella, además de la ecuación ordinaria, centro y radio de la misma. $A(-3,1)$, $x^2 + y^2 = 10$
Recuerda seguir paso a paso las indicaciones de los ejercicios para que puedas obtener los resultados adecuados.

- Como en los ejercicios anteriores iniciaremos abriendo nuestro programa GeoGebra, y desplegando la barra de HERRAMIENTAS BÁSICAS colocamos un punto fijo en $(-3,1)$ llamado A, posteriormente se colocará otro punto llamado centro en $(0,0)$ ya que el mismo ejercicio nos indica sus coordenadas en el origen.



- Una vez colocados el punto A y el centro en el origen. procedemos a dibujar una circunferencia con centro en (0,0) origen y con radio según los datos del problema: $x^2 + y^2 = 10$, $r^2 = 10$, $r = 3.10$.



Con el resultado obtenido de lo anterior, podemos concluir que la circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 10$ si pasa el punto A(-3,1), además que tiene centro en el origen.

Práctica y determina geométrica y analíticamente si el punto dado pertenece a la circunferencia indicada, escribe si se encuentra dentro o fuera de ella, además de la ecuación ordinaria, centro y radio de la misma de los siguientes ejercicios con ayuda de GeoGebra.

- $C = (2, 1)$, $x^2 + y^2 = 16$

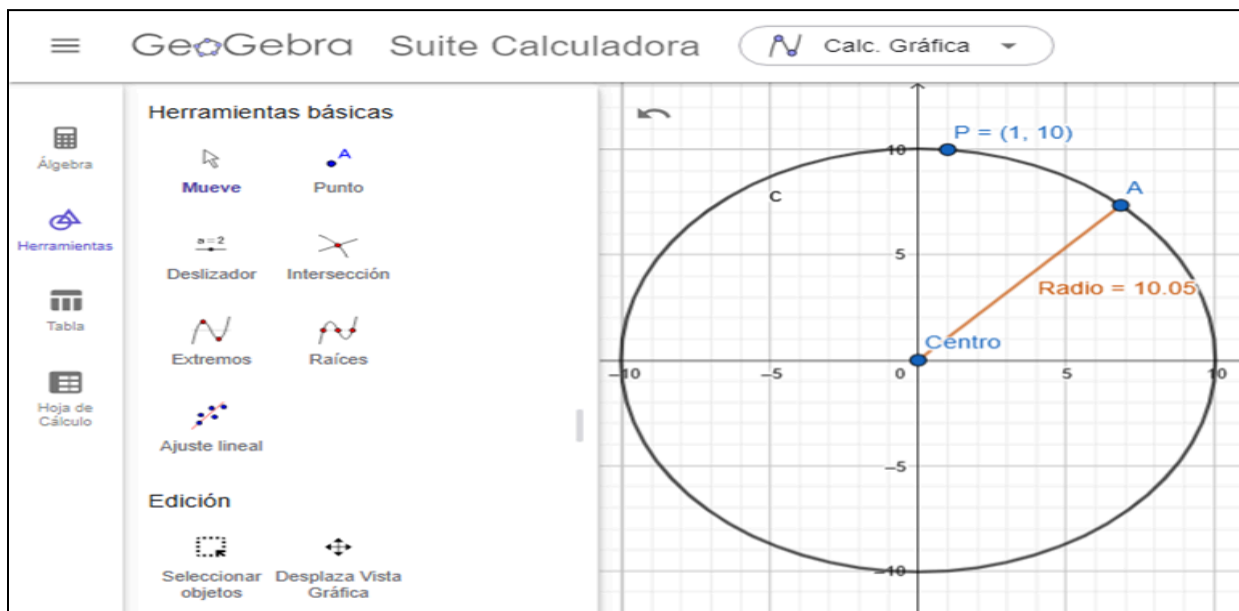
- $C = (-4, -5), x^2 + y^2 = 25$

Ejemplo 1

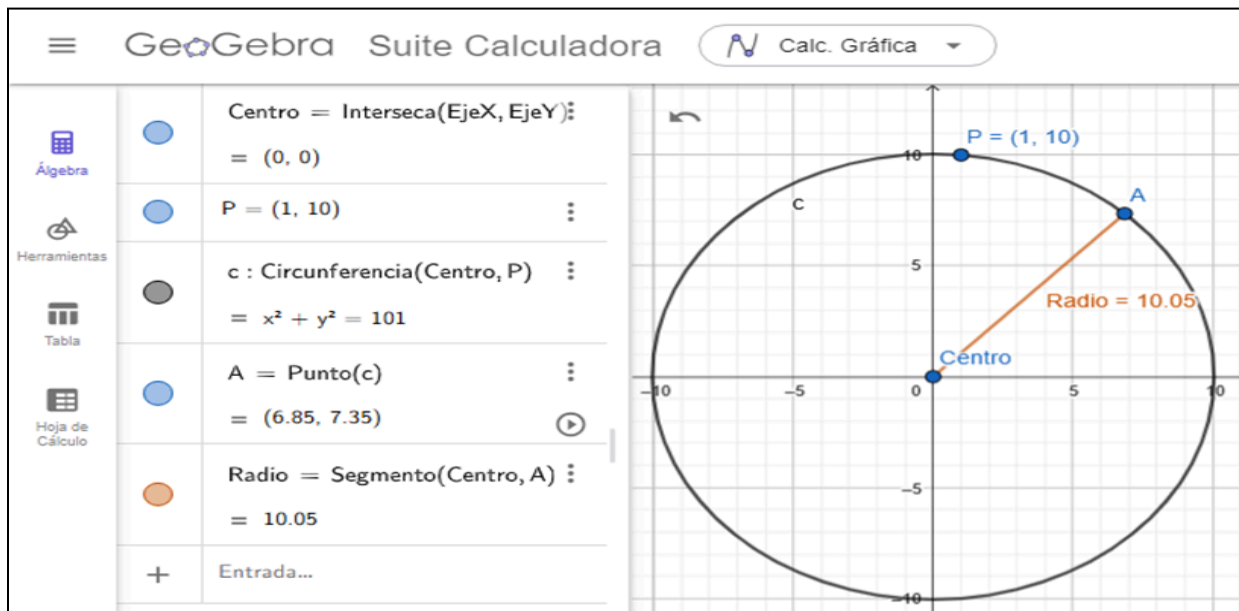
Para encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia

Con ayuda de los ejercicios anteriores y usando GeoGebra como herramienta principal, siga los pasos y resuelva el siguiente ejercicio escribiendo la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P(1,10)$.

- Colocar un punto llamado centro que esté en el origen “C”(0,0), posteriormente coloque otro punto llamado “P” en las coordenadas (1,10).
- Inserta una circunferencia tomando como centro el punto “C” y que pase por el punto “P”. (recuerda nombrar a cada elemento del dibujo).
- Traza un segmento de recta para determinar el radio de la circunferencia.



- Con ayuda del menú desplegable de HERRAMIENTAS BÁSICAS, selecciona el apartado de ÁLGEBRA para poder conocer a detalle los elementos de la circunferencia así como su ecuación en la forma ordinaria.



Por lo tanto podemos concluir que la ecuación ordinaria para la circunferencia cuyos datos son: centro en el origen (0,0) y que pasa por el punto “P” (1,10) es:

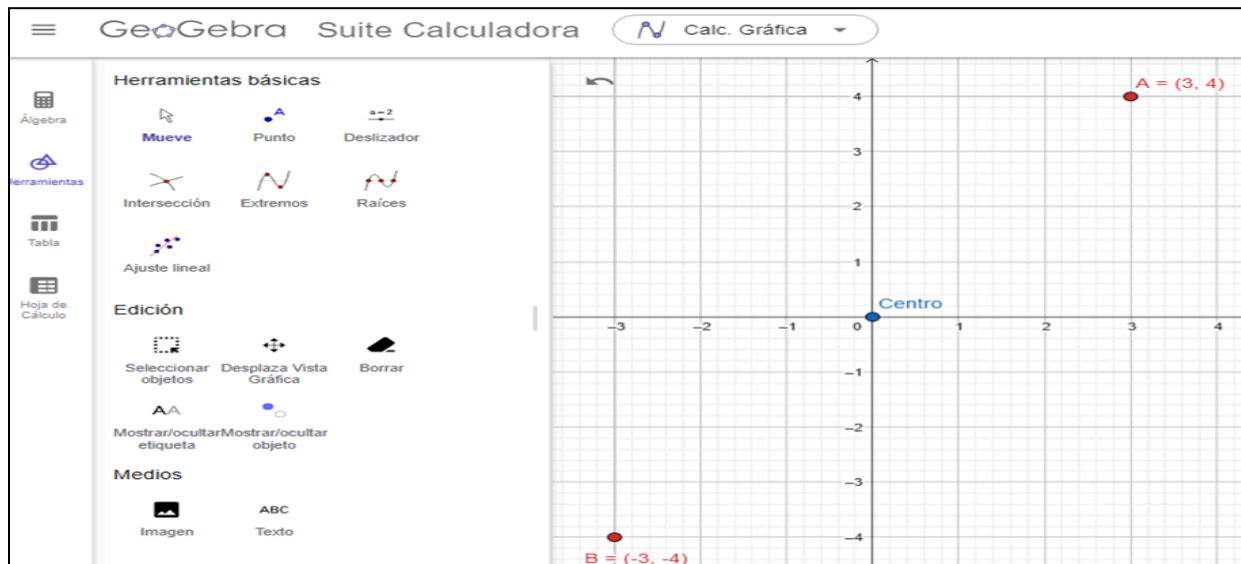
$$x^2 + y^2 = 101 \text{ y que tiene como radio } r=10.05.$$

Ejemplo 2

Utilizando la herramienta GeoGebra y siguiendo las recomendaciones anteriores, obtenga la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen $c(0,0)$ y un que tiene un diámetro dado por los puntos $A(3,4)$ y $B(-3, -4)$.

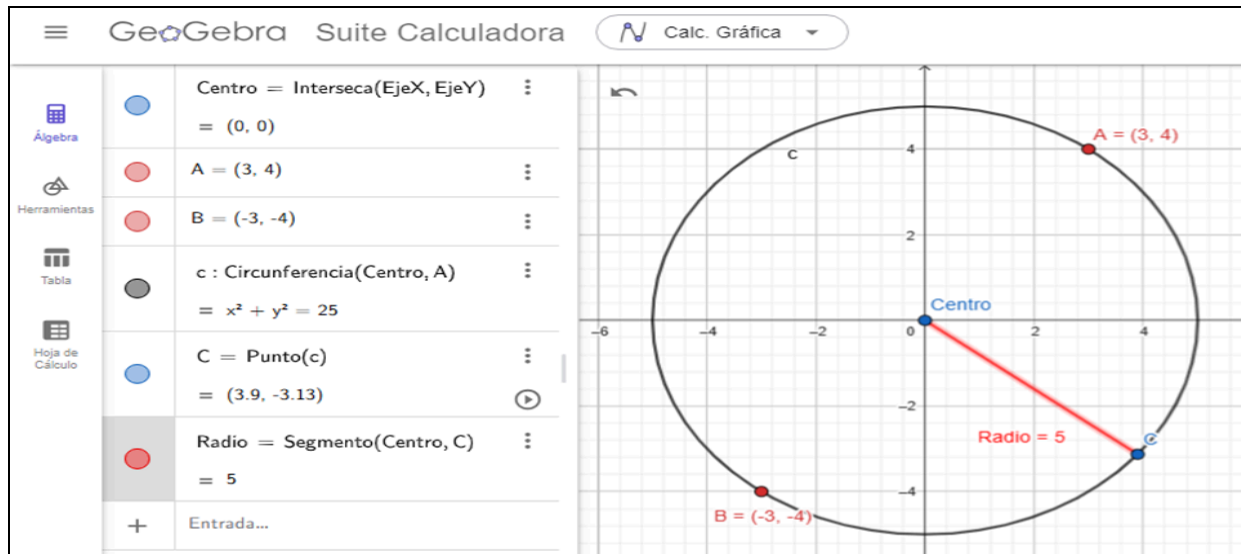
- Abre GeoGebra, posteriormente utilizando las HERRAMIENTAS BÁSICAS selecciona la opción de PUNTO y coloca uno llamado “A” en las coordenadas (3,4) y otro llamado “B” en $B(-3, -4)$.

- Agrega un tercer punto en las coordenadas (0,0) llamado centro "C".



- Después de haber colocado los tres puntos: centro, $A(3,4)$ y $B(-3, -4)$. procedemos a dibujar una circunferencia con centro en $C(0,0)$. utilizando la herramienta de CIRCUNFERENCIA (punto y centro).

Seguido de lo anterior desplegamos el menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS para seleccionar el apartado de ÁLGEBRA para conocer la ecuación de la circunferencia.



Por lo obtenido anteriormente, podemos determinar que la ecuación de la circunferencia para este ejercicio con los datos centro en el origen $c(0,0)$ y un que tiene un diámetro dado por los puntos $A(3,4)$ y $B(-3, -4)$. es: $x^2 + y^2 = 25$, que tiene un radio $r=5$.

Estrategia 4.

Ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria con centro en (h, k) .

Objetivo: Que el alumno determine la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) fuera del origen y aprenda a sustituir los valores que se le proporcionen.

Competencias disciplinares:

- Practica y resuelve ejercicios que incluyan la forma ordinaria y general de una circunferencia.
- Resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Competencias a desarrollar

- Sigue instrucciones y procedimientos para llegar a un resultado esperado.
- Define y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- Diseña y aplica modelos para probar su validez.

Ya con los conceptos de circunferencia y la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos además la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria con centro en el origen, podremos analizar la ecuación con centro fuera del origen.

Recuerda que:

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante “ r ”, tiene por ecuación.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

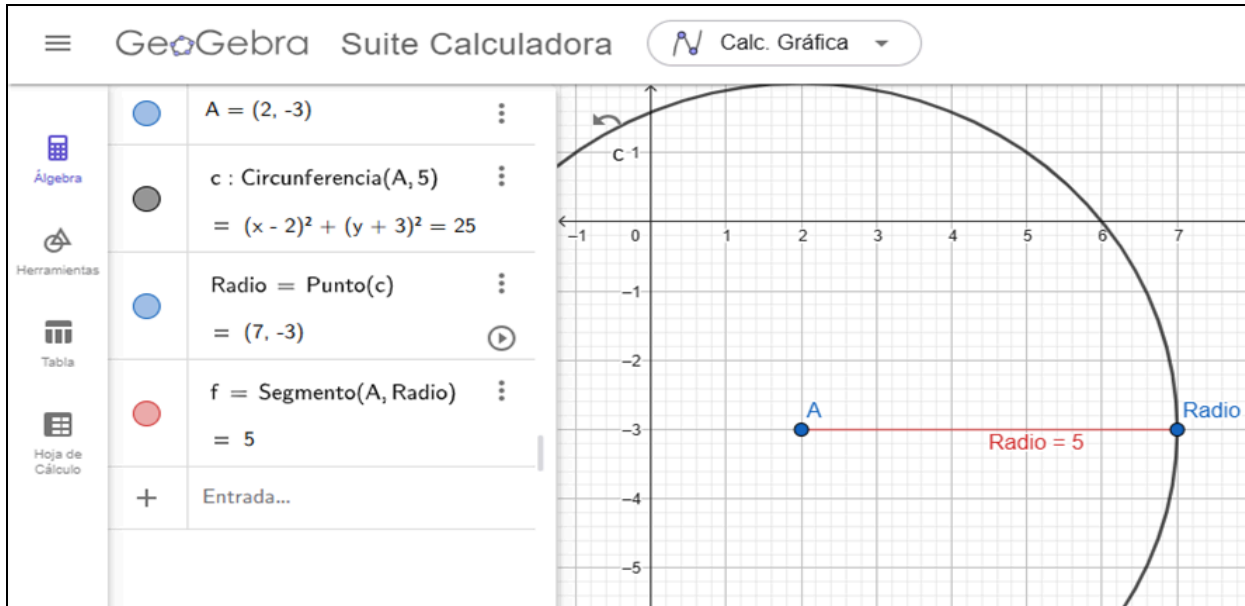
Ejemplo 1

Con la finalidad de que identifique la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen a partir de la medida de su radio y que reconozca la relación de (h, k) y r de la circunferencia, para representarlos en ecuación en su forma general mediante el uso de geogebra

- Se abre el programa GeoGebra .. Selecciona la opción de herramientas y agrega un punto llamado centro en $(2,-3)$.



- Nuevamente seleccionando la herramienta básica inserta una circunferencia que tenga su centro en el punto antes colocado $(2,-3)$ y radio 5. Se sugiere nombrar cada uno de los elementos.
- En la misma opción de herramientas básicas selecciona el apartado de Álgebra. una vez se haya desplegado la barra de opciones identifica que la Ecuación de la Circunferencia que se encuentra escrita en su forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



En conclusión, los resultados del programa arroja como ecuación en su forma general $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ y que tiene como radio $r = 5$.

Solución sustituyendo valores y calculando para comprobar que el resultado del programa sea correcto.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Sustituyendo en ella los valores dados:

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = (5)^2$$

entonces,

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

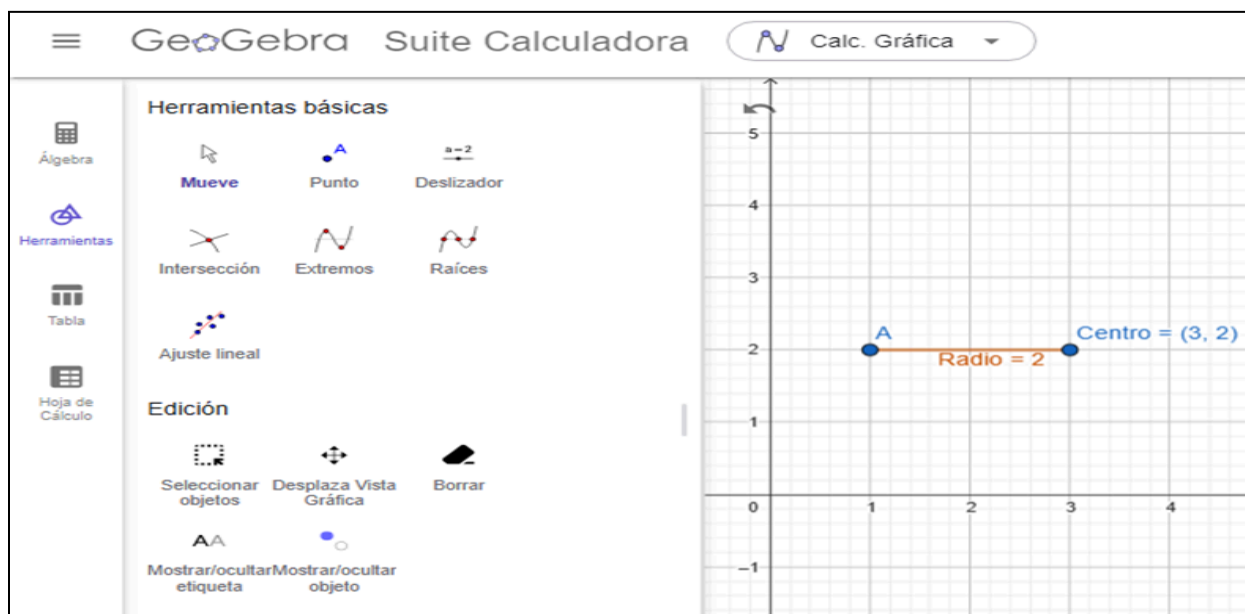
Ejemplo 2

nuevamente con ayuda del programa GeoGebra se te pide determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

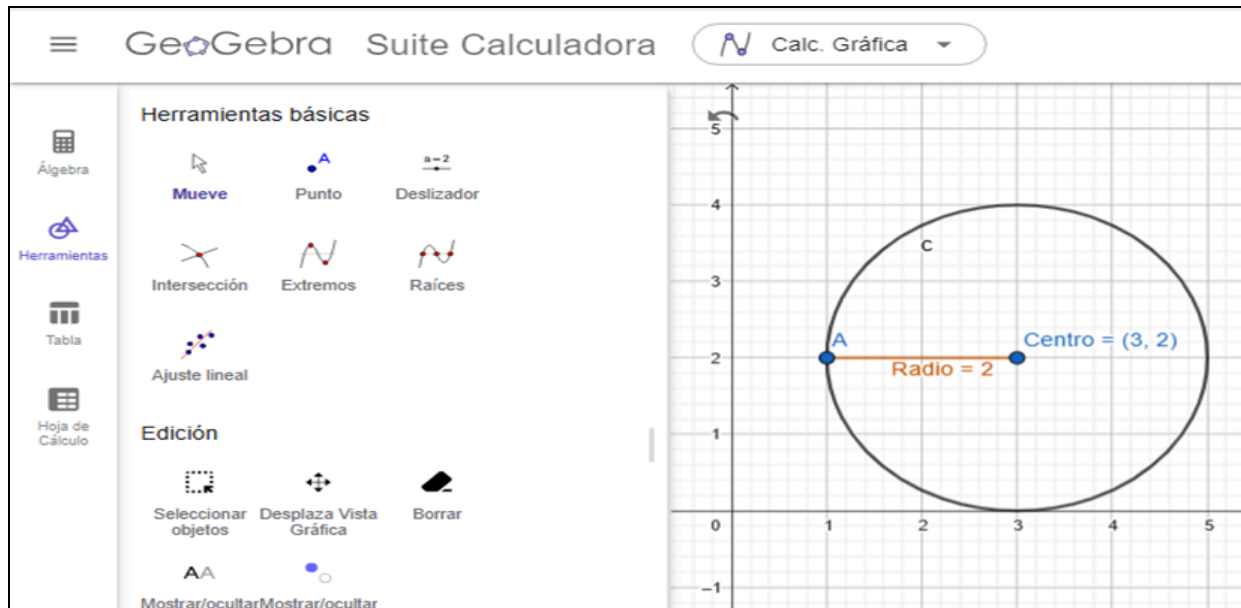
Para lo anterior es necesario identificar que mediante la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ podemos encontrar el centro. Se sabe que el centro $C(h, k)$ y el radio es r , entonces de los datos se obtiene:

El centro $C(3, 2)$ y el radio se obtiene de $r^2 = 4$, entonces $r = 2$.

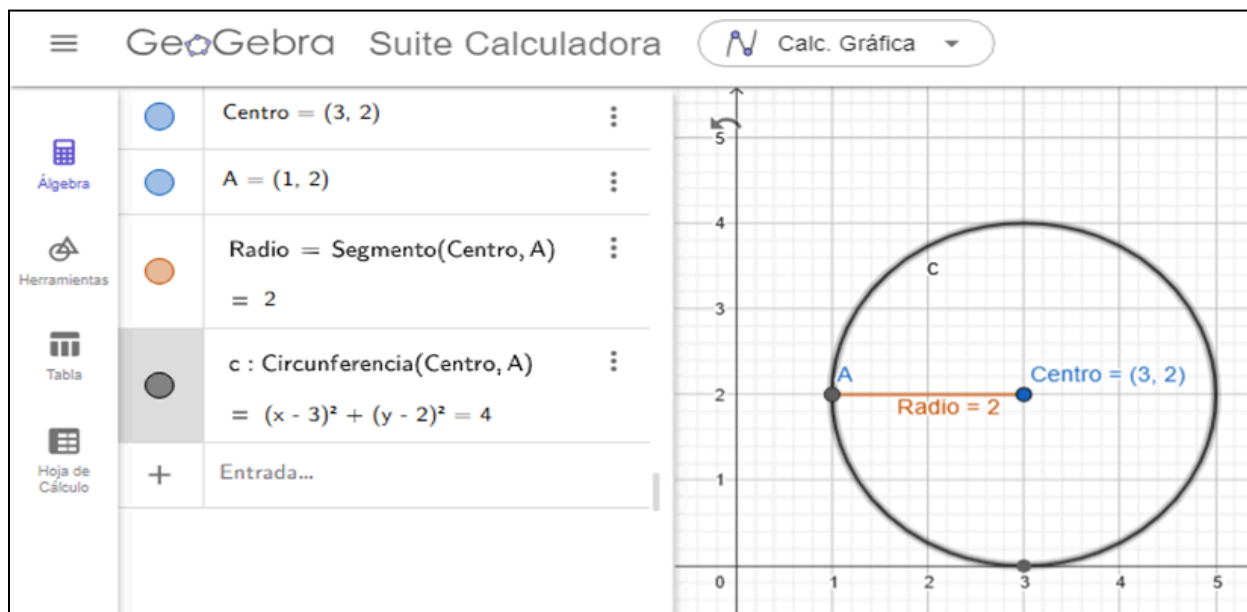
- Como primer paso debemos colocar dos puntos uno llamado centro en $C(3, 2)$ y otro más llamado radio en $r = 2$.
- Agrega también un segmento del punto centro al punto r para determinar la longitud del radio.



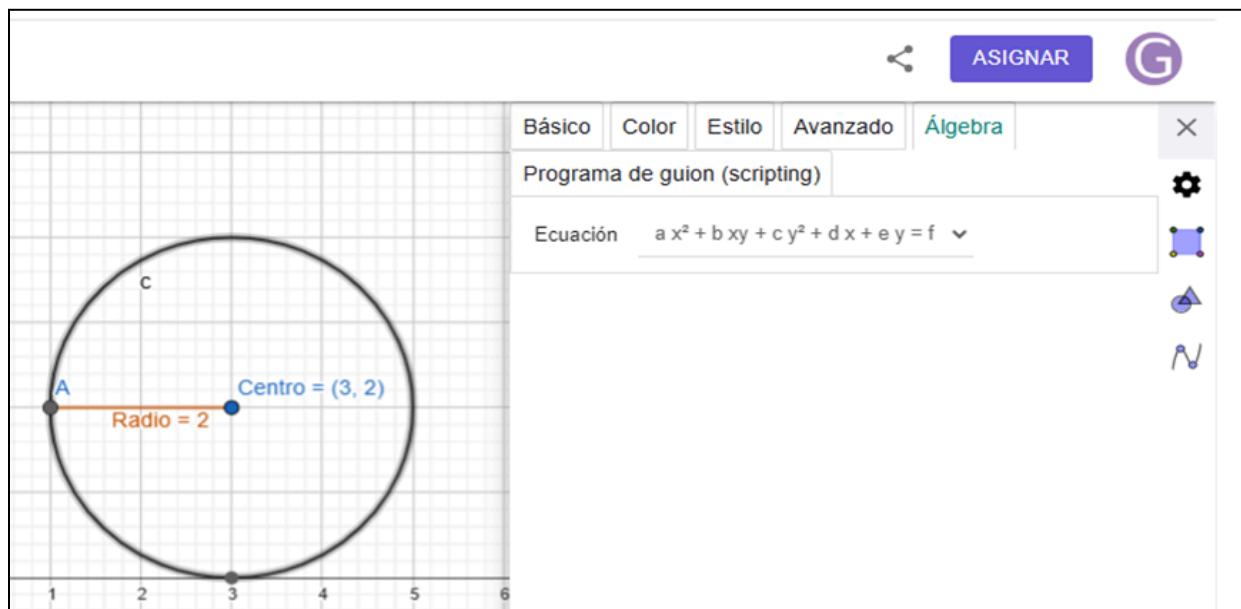
- Como siguiente paso inserta una circunferencia con centro en $(3, 2)$ que pase por el punto que se identificó como radio.



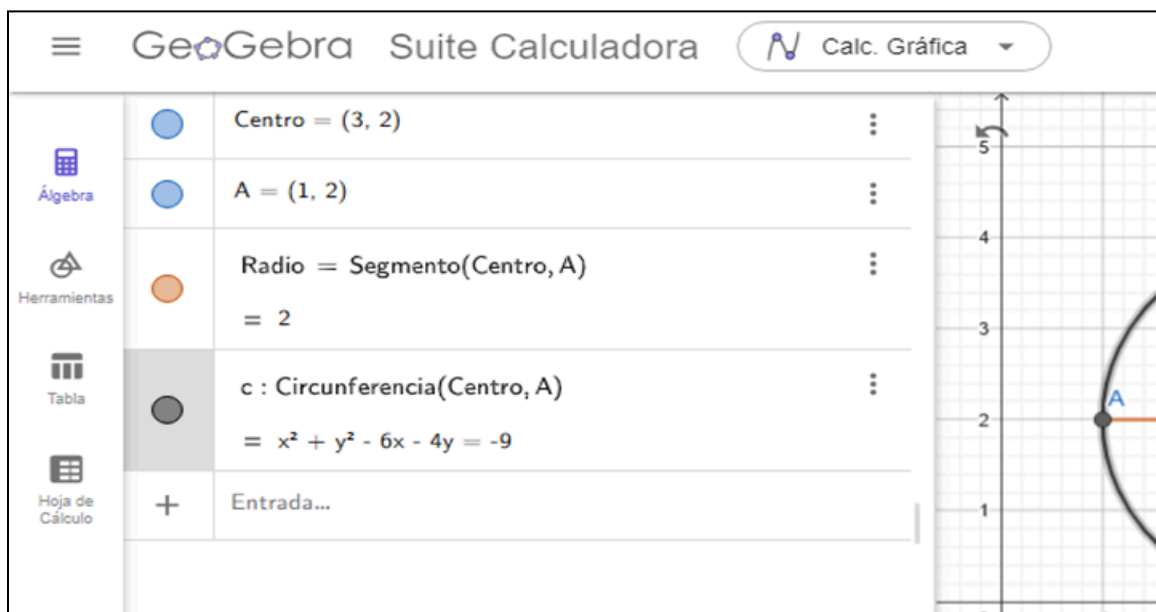
- Por último desplegamos en el menú el apartado de **ÁLGEBRA** para poder mostrar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria.



- Para mostrar la ecuación de la circunferencia en su forma general, abrimos las propiedades de la ecuación ordinaria (los tres puntos). después seleccionamos opciones avanzadas (álgebra). y cambiamos el modo de la ecuación, de ordinaria a general.



De esta forma se encuentra que la ecuación general para este ejercicio es la que se muestra en la siguiente imagen.



Una vez identificada la ecuación de la circunferencia, procedemos a la comprobación mediante el cálculo con los siguientes pasos.

Solución:

$$\text{De la ecuación } (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se sabe que el centro $C(h, k)$ y el radio es r , entonces de los datos se obtiene:

$$\text{El centro } C(3, 2) \text{ y el radio se obtiene de } r^2 = 4, \text{ entonces } r = 2.$$

Consigna 1.

Ahora con lo visto en GeoGebra anteriormente, podremos practicar con los siguientes ejercicios. Para ello se solicita que encuentre las ecuaciones ordinarias para cada uno de los incisos:

No olvides utilizar el programa

a. Hallar la ecuación de la circunferencia, $C(-2, 6)$, $r = 7$

b. Hallar la ecuación de la circunferencia, $C(3, 8)$, $r = 3$

c. Hallar la ecuación de la circunferencia, $C(5, -6)$, $r = 5$

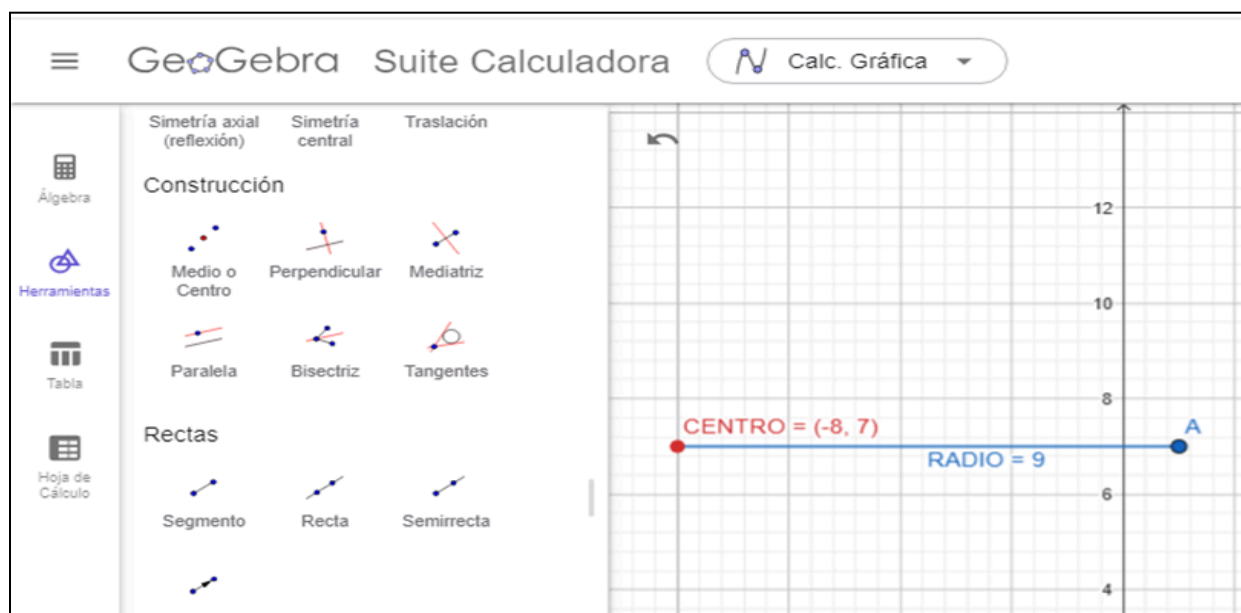
d. Hallar la ecuación de la circunferencia, $C(7, -9)$, $r = 5$

Consigna 2.

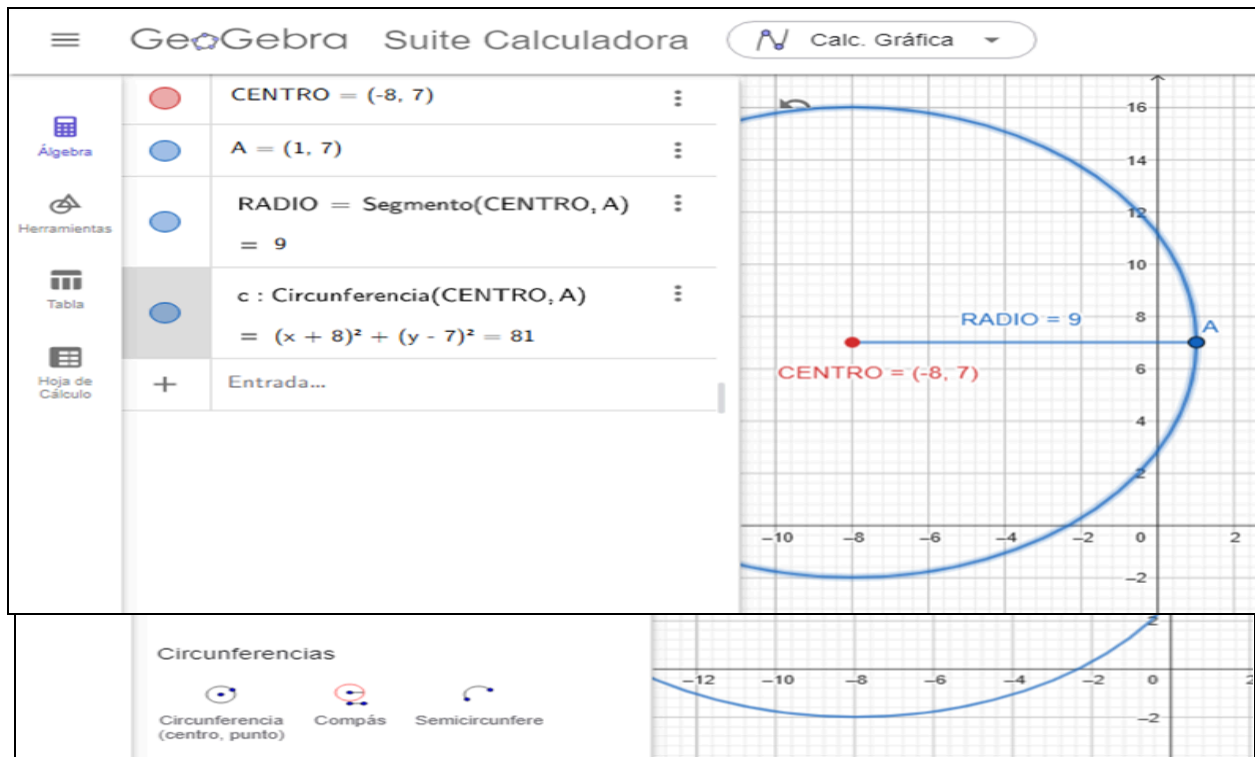
Con ayuda nuevamente de nuestro programa Geogebra, encontraremos la ecuación general de la circunferencia sustituyendo los valores que nos dan en el siguiente ejercicio. Recuerda seguir los pasos para darle solución.

Ahora de forma contraria a la anterior para la siguiente ecuación, encuentra el centro y el radio. $(x - 8)^2 + (y + 7)^2 = 81$

- Abrimos nuestro programa y desplegamos el menú de HERRAMIENTAS BÁSICAS y colocamos dos puntos en el plano, sabiendo que tenemos el centro y el radio de nuestra circunferencia. $C(h, k)$ entonces: $C(-8, 7)$ y radio $r^2 = 81$ $r = 9$ y trazamos un segmento de recta para identificar el radio.



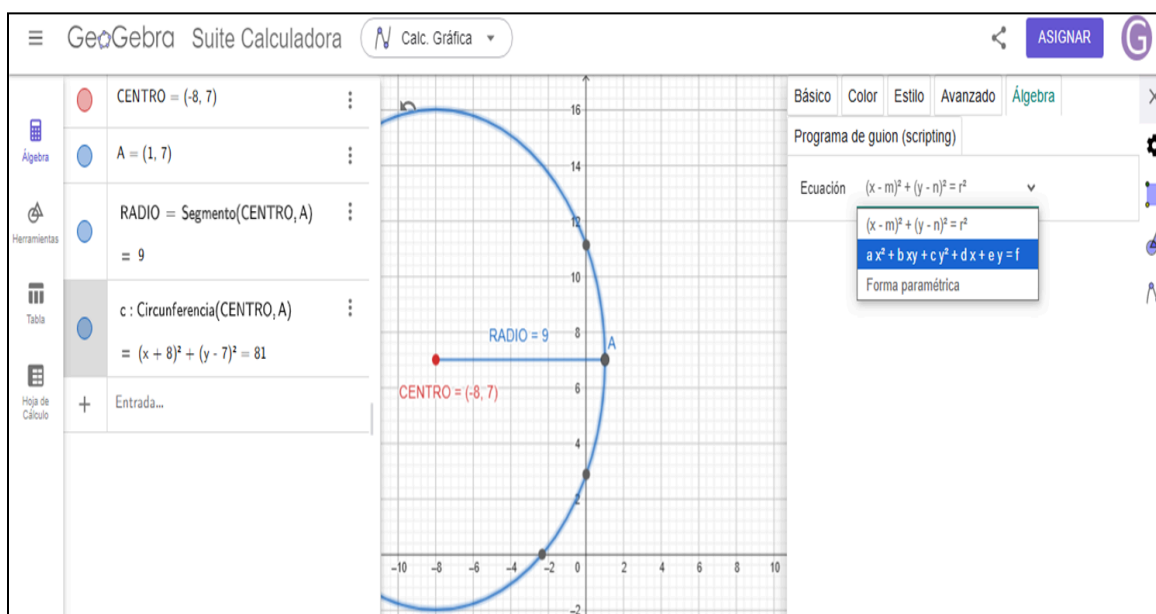
- Después de haber colocado e identificado el centro y el radio, procedemos a trazar una circunferencia con centro en $C(-8, 7)$ y la prolongamos hasta que

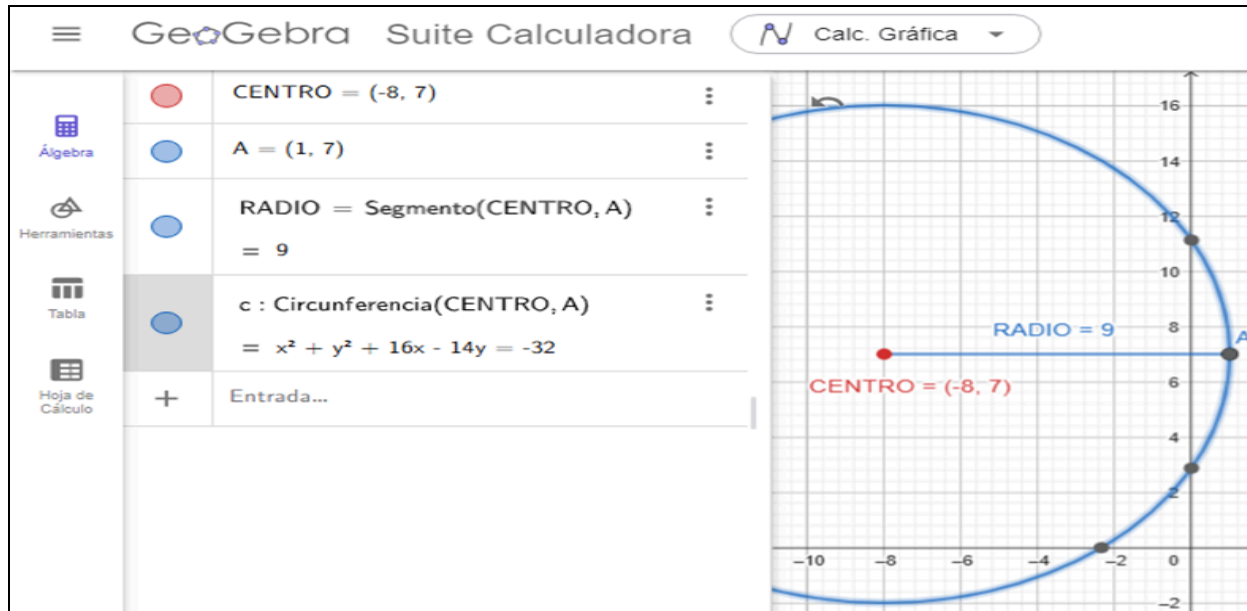


Para determinar la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria debemos seleccionar del menú la opción de **CALCULADORA**, seguido a eso aparecerán los datos de dicha circunferencia.

Para determinar la ecuación de la circunferencia en su forma general debemos seleccionar del menú la opción de **CALCULADORA**, seguido a eso dar click en los tres puntos para después abrir otro menú y cambiar el formato de ecuación, de esta manera aparecerán los datos de dicha circunferencia.

Observamos en la siguiente imagen que el formato de ecuación cambia, de general a ordinaria.





De esta manera obtenemos las ecuaciones de la circunferencia en su forma ordinaria y general.

Ahora, con ayuda del programa GeoGebra encuentra las ecuaciones de la circunferencia en su forma general, determine el centro y el radio para cada ecuación dada:

1. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

2. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 8/2$

3. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$

Estrategia 5.

Ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro fuera del origen.

Objetivo: Que el alumno reconozca la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen a partir de la medida de su radio y que reconozca la relación de h, k y r de la circunferencia, para representarlos en ecuación en su forma general.

Competencias disciplinares:

- Con lo visto durante las sesiones, resuelve ejercicios los cuales contienen la forma ordinaria y la general de la ecuación de la circunferencia.
- Analiza y utiliza distintos métodos para dar solución a las ecuaciones de la circunferencia.

Competencias a desarrollar:

- Sigue instrucciones y procedimientos para resolver problemas de aplicación según sea cada caso.
- Define y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- Diseña y aplica modelos para probar su validez.

Comenzemos

Con lo anterior ya resuelto, sabiendo cómo encontrar la ecuación ordinaria y la determinación del centro y el radio, podremos continuar con el desarrollo de la ecuación general de una circunferencia.

Nota:

Para que una ecuación de segundo grado represente una circunferencia es necesario que cumpla ciertos requisitos. La ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con dos variables representa una cónica, pero

a nosotros nos interesa que represente una circunferencia, por lo tanto, tomamos la ecuación ordinaria cuyo centro es (h, k) y radio r se tiene.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Desarrollando se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Lo anterior puede escribirse de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En donde:

$$A = C = 1, \quad D = -2h, \quad E = -2k \quad F = h^2 + k^2 - r^2.$$

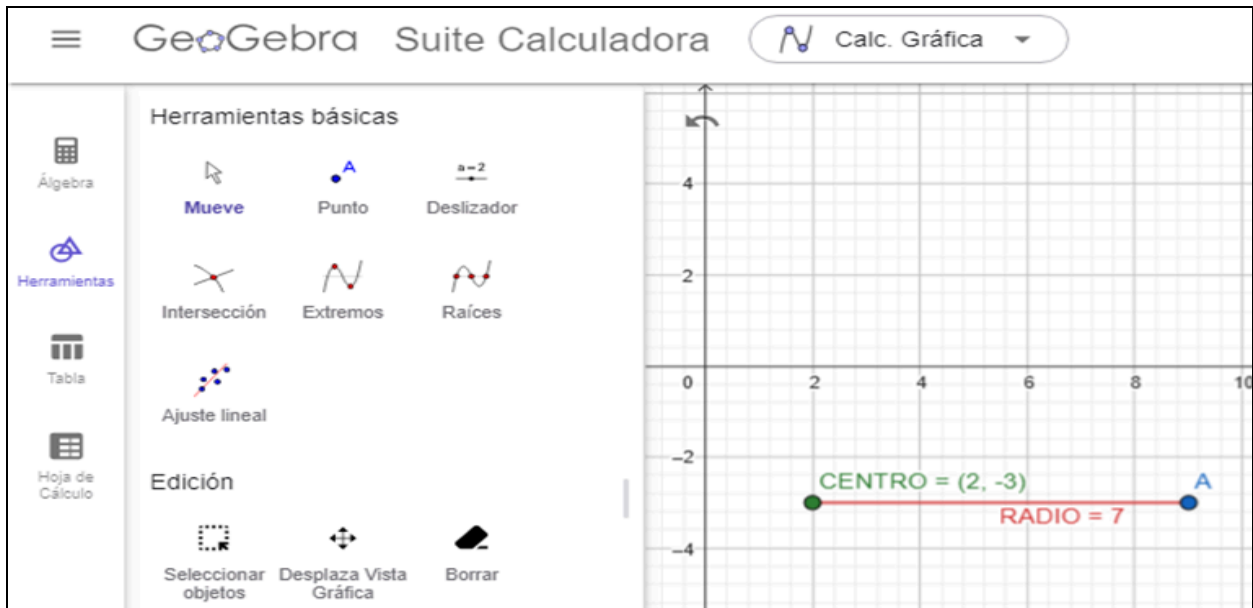
Entonces para que una ecuación de segundo grado represente una circunferencia se debe cumplir que carece de término cruzado (x, y) ; además los coeficientes de A y C sean iguales y distintas a cero $(A=C \neq 0)$.

¡Fíjate muy bien!

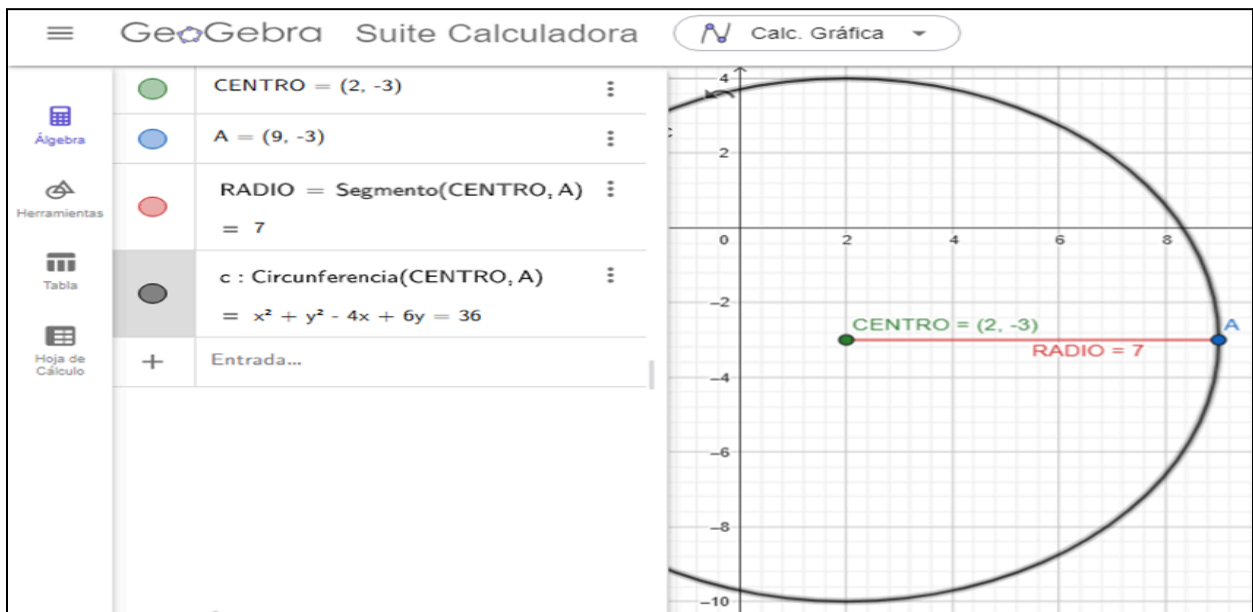
Para explicar lo anterior, nuevamente utilizaremos el programa geogebra resolviendo el siguiente ejercicio. Recuerda seguir paso a paso según se indique.

Obtener la ecuación de la circunferencia en su forma general si el centro de esta es $C(2, -3)$ y su radio $r=7$.

- Abrimos el programa GeoGebra y de la barra de menú, seleccionamos la opción de HERRAMIENTAS BÁSICAS, damos click en insertar puntos y colocamos uno en las coordenadas $(2, -3)$ llamado centro. Posteriormente colocamos otro punto a 7 unidades de distancia el cual llamaremos Radio marcado por un segmento de recta



- Enseguida, es necesario trazar una circunferencia con centro en (2,-3) con un radio de 7 unidades. Recuerda, HERRAMIENTAS BÁSICAS (CIRCUNFERENCIA. centro y punto). Luego en el menú, seleccionamos la opción de ÁLGEBRA y transformamos con con el apartado de los tres puntos y propiedades la ecuación de ordinaria a general.



Solución:

La ecuación que nosotros buscamos es de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

sustituyendo los valores dados en la ecuación.

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 7^2$$

Desarrollando

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 36 = 0$$

Ecuación general de la circunferencia.

Gráfica y resuelve lo siguiente.

1. **Los puntos extremos del diámetro de una circunferencia son $(4, -5)$ y $(2,3)$. Obtén la ecuación de la circunferencia. resuelva en el siguiente espacio.**

2. **Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(1,4)$ y es tangente a la circunferencia cuya ecuación es**

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$$

Instrumento 4. Examen final para el sujeto de estudio**Profesor. Gerardo Soto Silva**

Alumno: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

Contesta correctamente lo que se te pide.

- 1. Con tus palabras define el concepto de circunferencia**

- 2. Factoriza los siguientes TCP $16p^2q^2 - 24pq^2 + 9q^2$**

- 3. Escribe la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria con centro en (h, k).**

- 4. Obtén la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (7,-9) y radio 5. Recuerda que el centro es (h, k).**

- 5. Obtén la general de la circunferencia de la circunferencia a partir de la ordinaria $(x - 8)^2 + (y + 7)^2 = 81$**