

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



MULTIPOLOS ELECTROMAGNÉTICOS TOROIDALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA:

RODRIGO SAAVEDRA ESTRADA

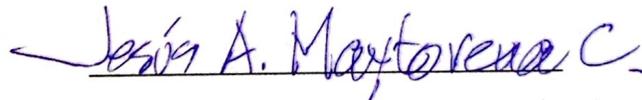
MULTIPOLOS ELECTROMAGNÉTICOS TOROIDALES

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

RODRIGO SAAVEDRA ESTRADA

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ:



DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA

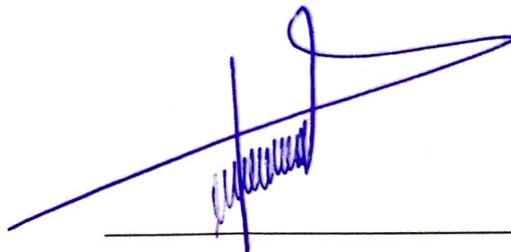
DIRECTOR DEL COMITÉ



DRA. PRISCILLA ELIZABETH

IGLESIAS VÁZQUEZ

SECRETARIA



DR. JOSÉ MANUEL

LÓPEZ RODRÍGUEZ

PRIMER VOCAL

RESUMEN de la Tesis de Rodrigo Saavedra Estrada, presentada para la obtención de título de físico, Ensenada, Baja California, México, mayo de 2016.

MULTIPOLOS ELECTROMAGNÉTICOS TOROIDALES

Se considera un solenoide toroidal y se muestra que tal distribución no posee ningún momento multipolar eléctrico ó magnético asociado. El momento multipolar que corresponde a dicha distribución de corriente es el denominado dipolar toroidal, lo que plantea la existencia de una tercer familia de multipolos electromagnéticos. A partir de una descomposición de Debye de campos y fuentes en las ecuaciones de Maxwell, se hace un desarrollo multipolar completo en coordenadas esféricas que toma en cuenta no solo las contribuciones transversales de tipo tangencial sino también las transversales de tipo poloidal. Esto permite considerar el ejemplo concreto del solenoide toroidal consistente con una corriente de carácter exclusivamente poloidal, ejemplo que no es estudiado normalmente en la literatura tradicional del electromagnetismo. El procedimiento seguido en esta tesis puede ser incluido en un curso avanzado de electrodinámica clásica para instruir a los alumnos al estudio de dicha tercer familia de multipolos.

Palabras clave: electrodinámica clásica, desarrollo multipolar, solenoide toroidal, momentos multipolares toroidales.

Resumen aprobado por:



Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdoba

Agradecimientos

A mi padre Armando, a mi madre Cecilia, a mis hermanos Nelson y Oliver, a mi tía Yolanda, y a toda mi familia por el apoyo incondicional que me han dado durante mis estudios y durante toda mi vida. A mi asesor Jesús Maytoarena por haberme instruido en la realización de esta tesis. A mis mejores amigos.

Índice

Introducción	1
1 Desarrollo multipolar estático	5
1.1 El potencial electrostático	5
1.2 El potencial magnetostático	9
1.3 Desarrollo multipolar en coordenadas esféricas	11
2 Desarrollo multipolar dinámico	15
2.1 Desarrollo de los campos vía potenciales de Debye	17
2.2 Límite de onda larga	22
3 El dipolo toroidal	25
3.1 El solenoide toroidal: corrientes poloidales	26
3.2 Magnetización y toroidización	27
3.3 El límite puntual	31
3.4 Acoplamiento con un campo externo	36
4 Multipolos toroidales	39
4.1 Potenciales de Debye de los campos eléctrico y magnético	40
4.2 Densidad de corriente del solenoide toroidal dinámico	43
4.3 Campo electromagnético del solenoide toroidal	46

4.4	Región exterior a las fuentes $r > b$: momentos multipolares asociados al solenoide toroidal	49
4.5	Los momentos multipolares toroidales dinámicos	49
4.6	El límite de onda larga	51
4.7	El límite magnetostático	52
4.8	El límite puntual	54
	Conclusiones	57
	Apéndice	59
A	Teorema de Helmholtz	59
B	Desarrollo en armónicos esféricos de la función de Green saliente	60
C	Descomposición de Debye	62
D	Coordenadas (r, α, φ)	63
E	Cálculo del campo magnético dinámico del solenoide toroidal	64
F	Integración de la función de Heaviside	67

Índice de figuras

1	Distribución estática de carga con tamaño característico d centrada alrededor del origen.	6
2	(a) Carga positiva situada en el origen, representa un monopolo eléctrico. (b) Dos cargas de signos opuestos separadas una distancia infinitesimal, representan un dipolo eléctrico puntual. (c) Un par de dipolos alineados de esta forma representan la configuración física de un cuadrupolo eléctrico. (d) Un par de cuadrupolos alineados de tal manera representan una configuración física de un octupolo eléctrico.	8
3	Distribuciones de corrientes de algunos multipolos magnéticos: (a) dipolo magnético, (b) cuadrupolo magnético (c) octupolo magnético.	11
4	Distribución de cargas y corrientes variables en el tiempo de tamaño característico d centradas alrededor del origen, se muestra el campo electromagnético (líneas onduladas violetas) y la superficie de radio $r > d$ de una esfera (en color gris).	16
5	Proyección en el plano yz del solenoide toroidal con sección recta circular, se muestra la corriente poloidal (en azul), así como las coordenadas (r, α, φ) (en verde), los vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\alpha}, \hat{\varphi})$ (en rojo) y los parámetros R, d (en morado).	26
6	Regiones espaciales donde se calcula la magnetización (y la toroidización), las líneas punteadas en rojo indican la frontera entre ellas.	29

7	(a) Toroide de sección recta circular (en gris) con 16 espiras de corriente (en rojo) que definen una densidad de corriente poloidal \mathbf{J} . Es posible tener tantas espiras como sea necesario, por ejemplo $N \rightarrow \infty$, a esta configuración se le llama solenoide toroidal (b) La magnetización \mathbf{M} (en verde) generada por la corriente poloidal. (c) La toroidización \mathbf{T} (en violeta) asociada a la magnetización.	30
8	(a) Toroide de tamaño “macroscópico” $R \sim d$ descrito por los vectores \mathbf{J} , \mathbf{M} , \mathbf{T} . (b) Límite de espira $R \rightarrow 0$. (c) Límite puntual $R \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$ descrito por \mathbf{j} y \mathbf{t} , en este caso $\mathbf{m} = 0$	33
9	a) Dipolo toroidal. b) Cuadrupolo toroidal. c) Octupolo toroidal.	35
10	Corrientes tangencial (en verde) y poloidal (en rojo) fluyendo sobre un solenoide toroidal (en azul).	40
11	(a) Geometría del toroide definido en coordenadas esféricas. Se muestra un plano P_N que lo corta verticalmente. (b) $N = 16$ espiras de corriente colocadas paralelamente sobre el radio mayor del toroide, formando así un solenoide toroidal.	43
12	(a) Espira descrita por cuatro segmentos ubicados en un plano P_0 , la geometría de ésta es tal que se cumple $a < b$ y $\theta_1 < \theta_2$. (b) Una espira cuando $\theta_1 = \pi - \theta_2$	44
13	Regiones en las cuales se calcula el campo magnético separadas por la línea puntada (en rojo), la superficie del solenoide toroidal (en azul) y los parámetros a y b (en verde).	47
14	Patrones de radiación de los siguientes multipolos eléctricos ó toroidales: (a) El dipolo. (b) El cuadrupolo. (c) El octupolo.	55

Introducción

En el electromagnetismo el desarrollo multipolar sirve como una herramienta para describir potenciales o campos, generados por fuentes localizadas alrededor del origen, como una serie de contribuciones asociadas a fuentes puntuales (denominadas *multipolos*) las cuales son dadas por *momentos* de las fuentes originales. Tal serie se puede truncar a los primeros términos para dar una aproximación que será buena si la fuente en estudio tiene un tamaño característico pequeño en comparación a la longitud de onda de los campos. En la literatura tradicional del electromagnetismo [1, 2] se han estudiado dos familias de multipolos: los eléctricos y los magnéticos, los cuales son descritos respectivamente por distribuciones puntuales de cargas eléctricas y espiras de corriente.

Por otra parte, también se ha reconocido un tercer tipo de multipolos que se han llamado *toroidales* debido a que están caracterizados por corrientes que fluyen alrededor de bobinas toroidales [3]. Éstos habían sido descartados de la teoría porque en el límite de onda larga se muestran despreciables en comparación a los multipolos eléctricos. Sin embargo, es posible construir distribuciones de corriente eléctrica cuyos campos presenten únicamente contribuciones debidas a multipolos toroidales y por tanto no se justifica que sean descartados del desarrollo multipolar.

La existencia de los multipolos toroidales ya ha sido probada experimentalmente [5, 7] y además, en los últimos años, se han estudiado sus propiedades en el contexto de los metamateriales [4–7], de manera que en la actualidad podrían resultar de gran interés en cuanto a sus aplicaciones [8]. Entonces, parece necesario que los estudiantes de áreas afines a la ciencia y tecnología comiencen a tener un conocimiento básico acerca de esta tercer familia de multipolos. Dada tal necesidad, **la meta de esta tesis es mostrar al lector de qué manera surgen los multipolos electromagnéticos toroidales.** Conseguir este entendimiento puede resultar complicado si no se tiene la guía adecuada, pues la mayoría de la información sobre el tema se encuentra dispersa en varios artículos, quizás ésto se deba a

que los multipolos toroidales comenzaron a estudiarse apenas hace algunas décadas.

El interés por las corrientes dependientes del tiempo que fluyen sobre bobinas toroidales surgió en 1861 del reconocido artículo de Maxwell *On physical lines of force*, en el cual comenta que, para una bobina formada por un alambre sobre el cual circula una corriente variable en el tiempo y que se envuelve alrededor de un anillo circular de sección uniforme, el campo magnético externo es nulo [9]. Sin embargo, fue hasta varios años después que surgió evidencia que refutaría tal comentario [10, 11].

En 1957, Zel'dovich discute una violación en la paridad de partículas elementales y postula que las partículas de Dirac con spin $1/2$ deben tener un “anapolo” [12]. A finales de 1960 y principios de 1970, Dubovik *et. al.* conectan el anapolo cuántico de Zel'dovich con la electrodinámica clásica haciendo uso de lo que llaman *momentos multipolares toroidales* [13], además muestran que éstos forman una tercer familia de momentos multipolares al igual que los eléctricos y magnéticos, de manera que consiguen explicarlos en el lenguaje del desarrollo multipolar [3].

En 1988, Van-Bladel discute varias distribuciones de corriente que requieren del concepto de momentos toroidales para su entendimiento [14]. En los 90's, Afanasiev *et. al.* publican una serie de artículos donde analizan detalladamente los campos que producen los momentos multipolares toroidales [15] y discuten distintas distribuciones de corriente específicas que pueden generar momentos toroidales dinámicos [16]. En 2010, Dubovik *et. al.* discuten acerca de medios continuos para los cuales se presentan los momentos multipolares toroidales y entonces introducen el concepto de *toroidización*, cuya interpretación es análoga a las conocidas polarización y magnetización [17].

En 2002, Redescu y Vaman hacen un análisis muy detallado de las propiedades radiativas de distribuciones arbitrarias de carga y corriente, incluyendo a los multipolos toroidales [18]. A principios del siglo actual, Zheludev, Fedotov *et. al.* trabajan en varias propiedades de lo que llaman *metamateriales toroidales*, los cuales son materiales que presentan comportamientos asociados a los multipolos toroidales, muestran que éstos tienen actividad óptica, lo cual da lugar a posibles aplicaciones [4], además en 2013 y 2014 fabrican estructuras no radiativas [7] y capas delgadas [6] hechas de éste mismo tipo de materiales. También, en 2010, Kaelberer *et. al.* hacen un experimento en donde miden la respuesta de dipolos toroidales en un metamaterial [5]. Más recientemente, se han encontrado propiedades asociadas a los multipolos toroidales en algunas nanoestructuras [19, 20].

Antes de comenzar a estudiar el desarrollo multipolar incluyendo a los momentos multipo-

lares toroidales, es conveniente primero plantear su posible existencia. Una manera instructiva de hacerlo es mediante argumentos de simetría [21]. Notemos que ante una inversión espacial $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, el momento dipolar eléctrico \mathbf{p} cambia de signo, es decir se comporta como un *vector polar*, mientras que ante una inversión temporal $t \rightarrow -t$ se mantiene invariante. Contrariamente, el momento dipolar magnético \mathbf{m} se comporta como un *vector axial* (también llamado “pseudovector”) ante una inversión espacial, y no cambia de signo ante una inversión temporal. Entonces, es natural preguntarse si existe alguna cantidad similar a estos momentos dipolares que se comporte como vector polar y que además cambie de signo ante una inversión temporal, la cantidad que satisface tales propiedades corresponde al *momento dipolar toroidal* \mathbf{t} . Además, cabe mencionar que se ha predicho la existencia de un “momento dipolar axial” \mathbf{g} , el cual es un vector que permanece invariante ante inversiones espacial y temporal, sin embargo dicha cantidad no será tratada en esta tesis, algunos han planteado que de hecho no es posible construir una distribución de fuentes puntuales que posea tales propiedades [22]. Las observaciones hechas se ilustran en la tabla a continuación:

	\mathbf{p}	\mathbf{m}	\mathbf{t}	\mathbf{g}
$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$	-	+	-	+
$t \rightarrow -t$	+	-	-	+

Comportamiento de los momentos dipolares ante inversiones espaciales y temporales. El signo “+” indica que la cantidad es “par” y el signo “-” indica “impar” ante las inversiones correspondientes.

La estructura que tiene la presente tesis es la siguiente: en el capítulo 1 se consideran distribuciones de cargas estáticas y corrientes estacionarias, lo cual facilita la interpretación física del desarrollo multipolar de los potenciales electrostático y magnetostático, éstos se describen como la superposición de potenciales que son generados por fuentes puntuales a las cuales se les llama *multipolos*, tal interpretación puede ser extendida al caso dinámico, el cual se trata en el capítulo 2. En éste, el desarrollo multipolar se deriva directamente sobre los campos haciendo uso de la llamada *descomposición de Debye*, entonces, se obtienen descripciones “generales” para \mathbf{E} y \mathbf{B} , así como para los momentos multipolares dinámicos, los cuales permiten recuperar las expresiones obtenidas en el caso estático. El procedimiento utilizado en este capítulo fué retomado del artículo de C. G. Gray *Multipole expansions of electromagnetic fields using Debye potentials* [23].

En el capítulo 3 se hace un análisis de la corriente estacionaria que fluye por un solenoide toroidal y se calculan un par de cantidades: la magnetización y la *toroidización*, éstas describen a la distribución, al igual que lo hace la densidad de corriente. La magnetización co-

rrresponde a una densidad de momentos dipolares magnéticos, sin embargo para el solenoide toroidal se obtiene que la suma total de éstos es nula, además para tal distribución no se definen cargas libres, por lo cual no se le pueden asociar momentos multipolares eléctricos ni magnéticos. Entonces, se toma el límite puntual del solenoide toroidal y se nota que, en tal caso, las cantidades que describen a la distribución son únicamente la densidad de corriente puntual y la “toroidización puntual”, de la cual definimos al *momento dipolar toroidal*. Así, vemos que existe un tipo de distribución de corrientes que no se puede interpretar a través de multipolos eléctricos ni magnéticos, pero sí a través de *dipolos toroidales*.

En el capítulo 4 se estudia de nuevo al solenoide toroidal pero esta vez se consideran corrientes dinámicas. Se calcula el campo magnético de la distribución y se obtiene su desarrollo multipolar. Entonces, se hace una clasificación de los momentos multipolares de una manera distinta a la del capítulo 2, de modo que se incluyen también a los momentos multipolares toroidales, los cuales se identifican como los únicos asociados al problema del solenoide toroidal. De esta manera, se obtiene un desarrollo multipolar para el solenoide toroidal que es completo en el sentido de que considera a los tres tipos de familia de multipolos electromagnéticos. Por último, se toman casos límite para analizar algunas propiedades que presenta el solenoide toroidal, y por tanto, los multipolos toroidales. Este capítulo está basado en el artículo de A. Góngora y E. Ley-Koo *Complete electromagnetic multipole expansion including toroidal moments* [24], el cual ha sido citado recientemente por artículos en revistas de alto impacto [6, 8] y motivó la curiosidad de profundizar en el estudio de los multipolos toroidales.

Al final se presentan las conclusiones del trabajo y se anexa un apéndice con los detalles matemáticos que se utilizan a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Desarrollo multipolar estático

En el caso estático, resulta sencillo dar una interpretación física al desarrollo multipolar de los potenciales que describen a los campos eléctrico y magnético. La motivación de este capítulo es explicar tal interpretación, la cual podrá ser extendida a otro tipo de contextos en capítulos posteriores. Primero se obtendrá el desarrollo multipolar de los potenciales electrostático y magnetostático en coordenadas cartesianas y finalmente se derivará el desarrollo multipolar del campo eléctrico en coordenadas esféricas.

1.1 El potencial electrostático

Considérese una distribución de carga estática ρ con un tamaño característico d centrada alrededor del origen de coordenadas en el espacio vacío. Además, los puntos de observación \mathbf{r} se ubican en una región exterior a las fuentes, de tal manera que $r' < r$, donde \mathbf{r}' es un vector que parte del origen a alguno de los puntos donde se define la distribución de cargas (ver figura 1). En este esquema, las ecuaciones de Maxwell relevantes son:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aquí, por el teorema de Helmholtz (ver apéndice A), la segunda ecuación implica que el campo eléctrico se puede escribir en función de lo que llamaremos el *potencial electrostático* Φ , esto es $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, cuya solución formal para una región no acotada viene dada por:

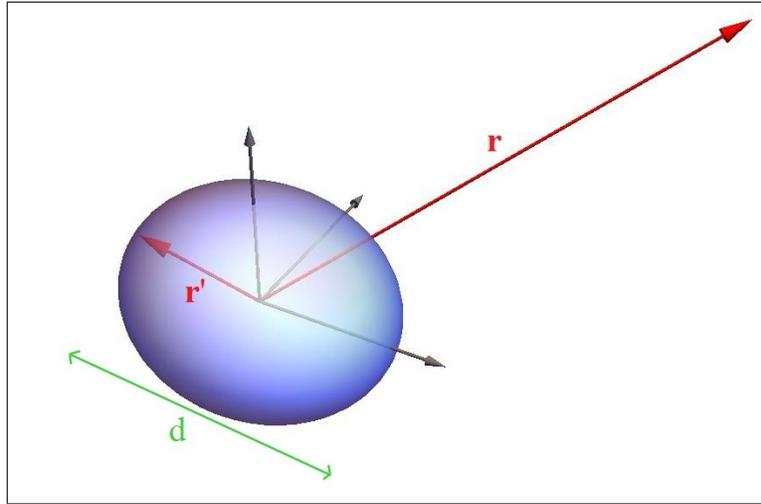


Figura 1: Distribución estática de carga con tamaño característico d centrada alrededor del origen.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \quad (1.2)$$

donde la integral se toma sobre el volumen V que ocupa la distribución de carga. Vemos que esta ecuación depende de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, lo cual se puede desarrollar como una serie de Taylor alrededor de $r' = 0$ y entonces la ecuación (1.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \int_V d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \left\{ \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{r'=0} + \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{r'=0} x'_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_i} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{r'=0} x'_i x'_j + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \int_V d^3 r' \rho(\mathbf{r}') + \frac{x_i}{r^3} \int_V d^3 r' x'_i \rho(\mathbf{r}') + \frac{x_i x_j}{2r^5} \int_V d^3 r' \rho(\mathbf{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] + \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$, se utilizó notación de suma sobre índices repetidos para las coordenadas de los puntos de observación (x, y, z) y los puntos fuente (x', y', z') . De esta última ecuación, podemos notar que hay un conjunto de contribuciones al potencial electrostático (y por lo tanto al campo eléctrico) que poseen una dependencia $1/r^{n+1}$, donde n representa el n -ésimo término en el desarrollo. Entonces, las contribuciones más significativas son las no nulas de orden más bajo en $1/r$, debido a que decaen en menor medida con la distancia.

A cada integral individual que aparece en la segunda igualdad de la ecuación (1.3) le daremos el nombre de *momento multipolar* y para distinguir cada una se les asociará un nombre específico de acuerdo a la potencia de r' que esté dentro de cada integral, entonces, el nombre que le daríamos al n -ésimo momento multipolar sería “momento 2^n -polar”, por

ejemplo, para $n = 3$ tendríamos algo llamado “momento 8-polar” ó *momento octupolar* y para $n = 6$ tendríamos un “momento 64-polar” ó *momento hexacontatetrapolar* [25]. Así, definiremos el *momento monopolar* ($n = 0$), el *momento dipolar* ($n = 1$) y el *momento cuadrupolar* ($n = 2$) respectivamente, de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} q \equiv \int \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ \mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \\ Q_{ij} \equiv \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Aquí definimos únicamente los primeros tres momentos multipolares, sin embargo, es posible continuar definiendo las expresiones para otros de orden superior, simplemente identificándolos de las integrales que aparecen en las demás contribuciones que no mostramos explícitamente en el desarrollo del potencial electrostático.

Reescribamos (1.3) utilizando las definiciones (1.4), esto es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (1.5)$$

Esta ecuación muestra una relación explícita entre $\Phi(\mathbf{r})$ y los momentos multipolares, decimos que representa un *desarrollo multipolar del potencial electrostático*. Para una distribución de cargas cuyas dimensiones sean “macroscópicas”, es decir si r' es apenas menor a r , se necesitarán muchos términos de la ecuación (1.5) para dar una buena aproximación al potencial electrostático y para dimensiones de la distribución cada vez menores a r se necesitarán cada vez menos términos, de modo que, en el caso límite donde las fuentes estén confinadas a una región muy cercana al origen, es decir si $r' \ll r$, solo hace falta la primera contribución no nula de la ecuación.

Analicemos a continuación la interpretación física de cada término en (1.5) bajo este límite: a orden cero se tiene una expresión que involucra la *carga total* q de la distribución, si esta cantidad es no nula entonces el potencial se reduce al correspondiente a una carga puntual centrada en el origen (ver figura 2a), a tal configuración se le denomina *monopolo eléctrico*. Ahora, si la carga total es nula para alguna distribución en particular, el primer término, que involucra al momento dipolar \mathbf{p} , se vuelve el más significativo y es posible verificar que el potencial electrostático corresponde al generado por un par de cargas de

signos opuestos e igual magnitud separadas una distancia infinitesimal (ver figura 2b), a tal configuración se le llama *dipolo eléctrico*. Se pueden hacer analogías similares para las demás contribuciones en el desarrollo (1.5), por ejemplo, para la tercera se obtiene la configuración física del *cuadrupolo eléctrico* y para la cuarta la del *octupolo eléctrico* (ver figuras 2c y 2d).

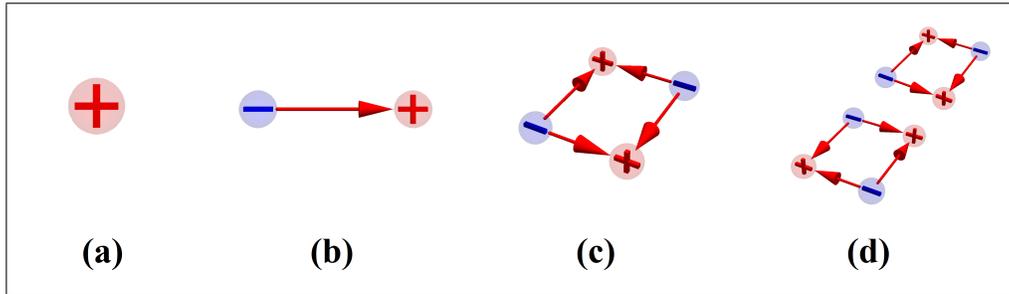


Figura 2: (a) Carga positiva situada en el origen, representa un monopolo eléctrico. (b) Dos cargas de signos opuestos separadas una distancia infinitesimal, representan un dipolo eléctrico puntual. (c) Un par de dipolos alineados de esta forma representan la configuración física de un cuadrupolo eléctrico. (d) Un par de cuadrupolos alineados de tal manera representan una configuración física de un octupolo eléctrico.

Ya hemos descrito la configuración de las fuentes que dan lugar a los primeros términos del desarrollo multipolar dado en (1.5), sin embargo, deberíamos poder caracterizar también las fuentes para ordenes superiores. Ésto es posible a partir de la geometría conocida de los multipolos de orden inferior, los cuales se pueden combinar de manera que construyan a las configuraciones que generarían al potencial electrostático correspondiente a cualquiera de las contribuciones superiores en el desarrollo. Por ejemplo, a partir de dos dipolos alineados adecuadamente podemos construir la estructura física de un cuadrupolo, a partir de un par de cuadrupolos construir un octupolo, etc. Así vemos que cada término en el desarrollo multipolar es generado por una distribución de cargas puntuales situadas en el espacio de una manera específica.

Para aclarar el lenguaje que utilizaremos posteriormente, haremos énfasis en llamar simplemente *multipolos* a las configuraciones físicas de fuentes puntuales, por ejemplo hablar de un monopolo, un dipolo o un cuadrupolo, significa hablar de la distribución de cargas que estos representan, como las vistas en la figura 2, mientras que, a las expresiones que son meramente matemáticas y representan alguna cantidad les llamamos *momentos multipolares*, por ejemplo, hablar de los momentos monopolar, dipolar o cuadrupolar, significa hablar de las integrales en (1.4). También, diremos que cualquier campo, sea escalar o vectorial, tendrá una *interpretación multipolar* si se puede escribir como un desarrollo en serie tal que cada uno de sus términos se pueda interpretar como “generado” por una distribución de fuentes

discretas en específico, es decir, por multipolos.

Como último comentario de la sección notamos que, para obtener un desarrollo multipolar del campo eléctrico, se necesita tomar el gradiente negativo de la ecuación (1.5), para esto tendríamos que calcular el gradiente de cada término en el desarrollo, dicha tarea es sencilla para las primeras contribuciones, sin embargo, para las de orden mayor podría resultar tedioso de realizar analíticamente, además no se obtendría una ecuación expresable enteramente en una línea corta. Por esto, sería muy útil obtener una fórmula que nos permita calcular cualquiera de los momentos multipolares de manera más sencilla y que pueda ser escrita de forma compacta. Tal problemática será resuelta utilizando coordenadas esféricas en la sección 1.3.

1.2 El potencial magnetostático

Ahora, analicemos lo que ocurre para el campo magnético \mathbf{B} . Se tiene una distribución de corriente estacionaria \mathbf{J} situada alrededor del origen de coordenadas (similar a la figura 1), bajo las mismas consideraciones para \mathbf{r} y \mathbf{r}' tratadas en la sección anterior. En este caso, las ecuaciones de Maxwell relevantes son:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Aquí, por el Teorema de Helmholtz (ver apéndice A), una consecuencia de la primera ecuación es que el campo magnético se puede escribir como el rotacional de un vector que llamaremos *potencial magnetostático*, esto es: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, cuya solución formal viene dada por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (1.7)$$

en donde la integral se toma sobre un volumen V que ocupa la distribución de corriente. Ahora vamos a introducir en la ecuación (1.7) la serie de Taylor de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ alrededor de $\mathbf{r}' = 0$. Para simplificar los cálculos, escribiremos la ecuación solo hasta el primer orden, tenemos entonces:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{r}}{cr^3} \cdot \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' + \dots \quad (1.8)$$

No es difícil notar que el término de orden cero en esta ecuación se anula¹, éste corresponde al momento monopolar magnético y el valor que toma concuerda con la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la cual es válida siempre. Entonces, la primera contribución significativa en este desarrollo viene dada por el primer término en (1.8), definamos la integral en éste como el *momento dipolar magnético*, el cual puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \quad (1.9)$$

Introduzcamos esta definición en la ecuación (1.8) para reescribirla de una forma más canónica:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots, \quad (1.10)$$

ésto representa un *desarrollo multipolar del potencial magnetostático*. Si se analizan puntos de observación lejanos a una distribución de corrientes arbitraria centrada alrededor del origen (es decir, si $r' \ll r$) para la cual el momento dipolar magnético sea no nulo, los términos de orden superior al primero en este desarrollo serán despreciables (debido a que decaen en potencias más grandes que $1/r$) y se recuperará el potencial magnetostático producido por una espira centrada en el origen por la cual fluye una corriente eléctrica, tal configuración corresponde a un *dipolo magnético*. Es posible reconstruir los demás multipolos magnéticos a partir del dipolo, éstos se verán como arreglos cada vez más complicados de espiras circulares de corriente (ver figura 3).

Notemos que para obtener un desarrollo multipolar del campo magnético con todos sus términos, se tendría que tomar el rotacional de la serie infinita (1.10). Similar a lo que se comentó para el potencial electrostático en la sección anterior, sería de mucha utilidad tener una expresión que permita calcular cualquier momento multipolar magnético de manera sencilla y que se pueda escribir de forma compacta, veremos que resolver ésto es complicado

¹Vemos que $\int d^3r' J_i(\mathbf{r}') = \int d^3r' (\partial x'_i / \partial x'_j) J_j(\mathbf{r}') = \int d^2r' x'_i J_j(\mathbf{r}') - \int d^3r' x'_i [\partial J_j(\mathbf{r}') / \partial x'_j] = 0$, donde se integró por partes para obtener la segunda igualdad, en la cual el primer término es nulo dado que no hay distribución de corriente exterior al volumen de integración, y la cantidad entre corchetes del segundo término corresponde a la ecuación de continuidad estática $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, por lo cual el segundo término también se anula.

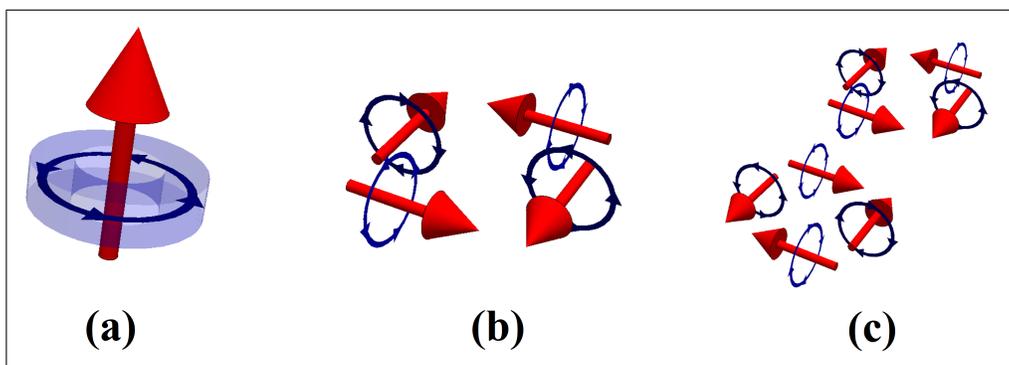


Figura 3: Distribuciones de corrientes de algunos multipolos magnéticos: (a) dipolo magnético, (b) cuadrupolo magnético (c) octupolo magnético.

en el caso estático, por lo que tendrá que ser resuelto hasta el capítulo 2 para el caso dinámico (que es más general) y después se recuperará una expresión válida en el caso estático.

1.3 Desarrollo multipolar en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas se puede hacer uso del Teorema de adición de los armónicos esféricos para obtener un desarrollo en serie de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, si reemplazamos éste en la ecuación para el potencial electrostático (1.2) obtenemos:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (1.11)$$

en donde:

$$q_{lm} \equiv \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\mathbf{r}') d^3r', \quad (1.12)$$

corresponden a los *momentos multipolares eléctricos en coordenadas esféricas*. La diferencia de éstos en comparación a la ecuación (1.5), es que ahora hay una sola expresión con la cual, variando los coeficientes (l, m) , podemos obtener los momentos multipolares a cualquier orden. Pero notemos que, si bien los momentos multipolares están escritos de una forma distinta, no significa que su interpretación sea diferente (aunque quizás si sea más complicada de intuir). Para mostrar que nada ha cambiado, a partir de la expresión (1.12) vemos que se pueden recuperar los momentos multipolares que definimos para coordenadas cartesianas,

explícitamente:

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q, \quad (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' y' \rho(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_y \\ q_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' z' \rho(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \\ q_{1,1} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' x' \rho(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_x \end{aligned} \right\}, \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3r' (2z'^2 - x' - y') \rho(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz} \\ q_{2,-1} - q_{2,1} &= \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \int d^3r' (y'z' - z'x') \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} (Q_{yz} - Q_{zx}) \\ q_{2,-2} - q_{2,2} &= \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \int d^3r' (x'y' - \frac{1}{2}[x'^2 - y'^2]) \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} (Q_{yy} + 2Q_{xy} - Q_{xx}) \end{aligned} \right\}, \quad (1.15)$$

la ecuación (1.13) corresponde al momento monopolar eléctrico en coordenadas cartesianas, mientras que las ecuaciones (1.14) y (1.15) corresponden a las componentes de los momentos dipolar y cuadrupolar respectivamente.

Una ventaja que presenta el desarrollo multipolar descrito en (1.11), es que a partir de éste se puede calcular el campo eléctrico de una manera sencilla, basta con tomar su gradiente negativo. Se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+2}} \left[(l+1)\hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.16)$$

lo cual representa un *desarrollo multipolar del campo eléctrico*, a partir del cual se puede calcular la contribución que aporta cualquiera de los momentos multipolares eléctricos. Así, esta ecuación ofrece una herramienta de mucha utilidad, pues permite prescribir el campo eléctrico de una distribución de cargas arbitraria (en general continua) como una superposición de campos producidos por otras distribuciones puntuales mucho más sencillas (multipolos). También, de manera aproximada, se puede caracterizar una distribución de cargas que podría tener una geometría irregular dado su campo eléctrico como dato.

Por otro lado, si queremos obtener algo similar a la ecuación (1.16) pero para el campo

magnético, hace falta seguir un procedimiento un poco más complicado. Podemos notar este hecho si introducimos el desarrollo en armónicos esféricos de $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ en la ecuación para el potencial magnetostático (1.7), vemos que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{m_{lm}}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad (1.17)$$

donde

$$m_{lm} \equiv \int d^3r' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \quad (1.18)$$

Esta ecuación tiene la forma de momentos multipolares, sin embargo, notemos que no se pueden recuperar las componentes del momento dipolar definido en (1.9), además no hay ninguna distribución de corriente en específico que de lugar a alguno de los términos del desarrollo (1.17) [21], entonces podemos decir que tal ecuación no tiene interpretación multipolar. La forma apropiada de definir a los momentos multipolares magnéticos en coordenadas esféricas requiere de un tratamiento distinto [23], aún así, en el siguiente capítulo obtendremos expresiones “generales” en el caso dinámico, de las cuales se puede deducir una ecuación similar a (1.12) para los momentos multipolares magnéticos y nos permitirá finalmente obtener un desarrollo multipolar de \mathbf{B} .

Capítulo 2

Desarrollo multipolar dinámico

A diferencia del capítulo anterior, ahora consideramos fuentes con tamaño característico d que varían armónicamente en el tiempo con frecuencia angular ω , también definimos puntos de observación en el espacio vacío exterior a las fuentes (ver figura 4). Hacer un análisis de fourier de las densidades de carga y corriente eléctrica tomando en cuenta una única frecuencia no significa una pérdida de generalidad en el problema, por lo que escribiremos estas cantidades de la forma:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \rho_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (2.1)$$

se asume que los potenciales electromagnéticos y los campos poseen dependencia temporal con la misma forma. En las ecuaciones posteriores se omitirá el subíndice ω de estas cantidades para simplificar la notación.

Hay distintas maneras de derivar un desarrollo multipolar de los campos en este caso, una de ellas es a partir de la solución formal de los potenciales electromagnéticos bajo la norma de Lorentz. En una región exterior a las fuentes solo es necesario conocer el potencial vectorial \mathbf{A} (no se debe confundir con el potencial magnetostático utilizado en el capítulo anterior) que se escribe como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r', \quad (2.2)$$

donde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ con λ la longitud de onda. Para obtener un desarrollo multipolar

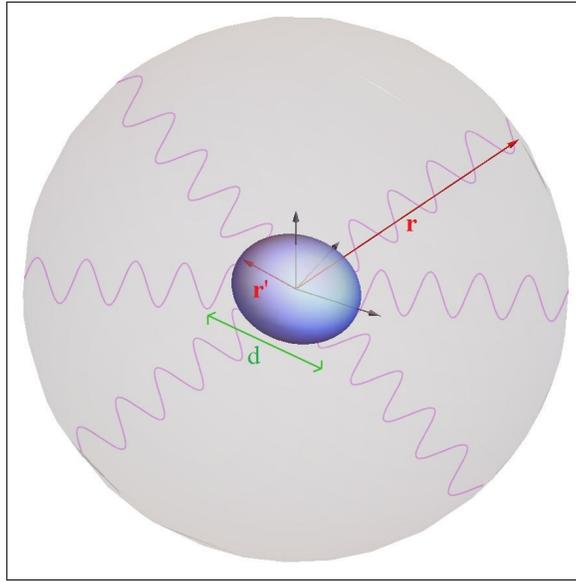


Figura 4: Distribución de cargas y corrientes variables en el tiempo de tamaño característico d centradas alrededor del origen, se muestra el campo electromagnético (líneas onduladas violetas) y la superficie de radio $r > d$ de una esfera (en color gris).

de este potencial, podemos considerar diferentes regiones en el espacio: en el campo cercano ó estático ($d \ll r \ll \lambda$) es válido el límite $kr \rightarrow 0$, con el cual la exponencial en (2.2) se aproxima a la unidad y el potencial vector se reduce a la conocida ecuación (1.7), cuyo desarrollo multipolar ya fue tratado en el capítulo anterior. En el campo lejano ó de radiación ($d \ll \lambda \ll r$) se cumple que $kr \rightarrow \infty$, por lo que la exponencial en (2.2) oscila rápidamente, aún así, se puede aproximar el término $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ para obtener una expresión de \mathbf{A} que se puede escribir como una serie de Taylor, con lo cual se obtiene un desarrollo multipolar dinámico en cartesianas. En el campo intermedio ó de inducción ($d \ll r \sim \lambda$) se puede introducir el desarrollo en armónicos esféricos de la función de Green saliente en (2.2) (ver apéndice B) para obtener una expresión del potencial vector que viene dada por una suma infinita de términos, sin embargo ésta no tendrá interpretación multipolar, decimos entonces que para esta región no se puede derivar un desarrollo multipolar dinámico por medio de los métodos convencionales.

Una vez obtenido el desarrollo multipolar de \mathbf{A} solo hace falta determinar los campos, se hace uso de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre de fuentes:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \end{cases}, \quad (2.3)$$

con lo cual se obtienen desarrollos multipolares de \mathbf{B} y \mathbf{E} .

Esta metodología brevemente descrita, es la que se presenta normalmente en la literatura tradicional de electrodinámica clásica [1, 2]. En la siguiente sección se tratará una metodología alternativa que propone derivar el desarrollo multipolar directamente sobre los campos (sin tener que lidiar con potenciales electromagnéticos), ésta se basa en una herramienta matemática llamada *descomposición de Debye* la cual permite separar un campo vectorial en una componente longitudinal y dos componentes transversales, posteriormente veremos que tal descomposición resulta muy relevante en el estudio de los multipolos electromagnéticos toroidales.

2.1 Desarrollo de los campos vía potenciales de Debye

Para fuentes y campos de la forma (2.1), las ecuaciones de Maxwell se escriben de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - ik\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = ik\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. , \quad (2.4)$$

Podemos notar que estas ecuaciones están acopladas, para desacoplarlas basta con tomar el rotacional de la primera y en el resultado reemplazar la segunda y tercera, obteniendo así una ecuación de Helmholtz para el campo magnético \mathbf{B} . Similarmente, se puede tomar el rotacional de la tercera ecuación y en el resultado reemplazar la primera y cuarta, con lo cual se obtiene una ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico \mathbf{E} . Mediante éste procedimiento se reduce el número de ecuaciones de Maxwell:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J} \\ (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} ik\mathbf{J} + 4\pi\nabla\rho. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Como en nuestro esquema consideramos que los puntos de observación se ubican en una región libre de fuentes, podemos utilizar un teorema el cual dice que, en tales condiciones, los campos están determinados completamente por su componente radial [23], esto significa

que solo necesitaremos las cantidades $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ para calcular \mathbf{B} y \mathbf{E} . Queremos entonces ecuaciones de Helmholtz que podamos resolver solo para esta componente de los campos, para ello premultiplicamos la primera ecuación en (2.5) por \mathbf{r} . Debemos tomar en cuenta que \mathbf{r} y ∇^2 no conmutan, por lo que haremos uso de la identidad $\mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{F}) = \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - 2\nabla \cdot \mathbf{F}$, tenemos entonces:

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = (\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} - 2\nabla \cdot \mathbf{B},$$

es evidente que el segundo término del lado derecho de esta ecuación se anula. Ahora, de manera similar para la ecuación de Helmholtz de \mathbf{E} tenemos:

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = (\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} - 2\nabla \cdot \mathbf{E},$$

en este caso, el segundo término de la ecuación no es nulo ya que la Ley de Gauss nos dice que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Combinados estos resultados con (2.5), obtenemos finalmente las ecuaciones de Helmholtz para la componente radial de los campos:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c}\nabla \times \mathbf{J} \\ (\nabla^2 + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c}ik\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} + 4\pi(2 + \mathbf{r} \cdot \nabla)\rho. \end{cases} \quad (2.6)$$

Para construir la solución de estas ecuaciones, necesitamos hacer uso de la *función de Green saliente* $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que está definida por:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.7)$$

y tiene solución en armónicos esféricos para una región no acotada (ver apéndice B):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2.8)$$

Con estas ecuaciones podemos escribir la solución para (2.6) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c} \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c} \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - c(2 + \mathbf{r}' \cdot \nabla')\rho' \right]. \end{cases} \quad (2.9)$$

A continuación, mostraremos como obtener \mathbf{E} y \mathbf{B} a partir de $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$. Para esto, notamos primero de las ecuaciones (2.4) que, en la región externa a las fuentes, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = -\frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Notemos también que los campos son de divergencia nula, también llamados *campos transversales*, los cuales, de acuerdo a la descomposición de Debye (ver apéndice C), se pueden separar como:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{L}\psi^E - \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{L}\psi^M \\ \mathbf{E} = \mathbf{L}\psi^M + \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{L}\psi^E \end{cases}, \quad (2.11)$$

esto satisface las ecuaciones (2.10) si se utiliza la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{L}) = -\mathbf{L}\nabla^2$ y se demanda que, tanto ψ^E como ψ^M , satisfagan la ecuación de Helmholtz homogénea. En (2.11) la *componente tangencial* de los campos viene dada por el término que contiene al operador \mathbf{L} y la *componente poloidal* por el que contiene $\nabla \times \mathbf{L}$, además, a las cantidades operadas ψ^E y ψ^M se les denomina *potenciales de Debye* de los campos.

Ahora calculamos la componente radial de las ecuaciones (2.10), es decir, premultiplicamos por \mathbf{r} cada una de ellas y notamos que se anula su primer componente, lo cual hace énfasis en su carácter *tangencial* (son tangenciales al vector \mathbf{r} , se puede notar directamente de la identidad $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$). Para la segunda componente, hacemos uso de la identidad $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{L} = iL^2$, con lo cual obtenemos:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{k} L^2 \psi^M \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{k} L^2 \psi^E. \end{cases} \quad (2.12)$$

Para obtener un desarrollo multipolar, necesitamos encontrar expresiones para los campos que sean dadas por una superposición de términos, para conseguir ésto, aprovechamos que

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, ψ_{lm}^M y ψ_{lm}^E satisfacen la ecuación de Helmholtz homogénea en la región externa a las fuentes, por lo que tales cantidades se pueden desarrollar en armónicos esféricos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \sum_{l,m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})_{lm} h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ \psi^M(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \psi_{lm}^M h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (2.13)$$

y se tienen desarrollos similares para $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y ψ^E , con coeficientes $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_{lm}$ y ψ_{lm}^E respectivamente. Vemos que las ecuaciones (2.13), combinadas con la primera ecuación en (2.12), nos permite obtener una relación directa entre ψ_{lm}^M y $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})_{lm}$:

$$\psi_{lm}^M = \frac{k}{l(l+1)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})_{lm}, \quad (2.14)$$

donde se utilizó la ecuación de eigenvalores $L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$. De manera similar, utilizando los desarrollos en armónicos esféricos para $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ y ψ^E , se puede obtener una relación entre ψ_{lm}^E y $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_{lm}$, esta es:

$$\psi_{lm}^E = \frac{-k}{l(l+1)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_{lm}. \quad (2.15)$$

Los coeficientes ψ_{lm}^E y ψ_{lm}^M pronto serán identificados como los momentos multipolares eléctricos y magnéticos, respectivamente. Sin embargo, como hemos visto en el capítulo anterior, los momentos multipolares se deben definir por medio de alguna relación con las fuentes (más en concreto, se debe tener una integral sobre las fuentes), por esto, es necesario identificar relaciones entre las ecuaciones (2.14, 2.15) y las fuentes (ρ , \mathbf{J}). Tal tarea se consigue haciendo uso del desarrollo en armónicos esféricos de la función de Green saliente (2.8), la cual se puede introducir en las ecuaciones (2.9) para obtener:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{l,m} \left[\frac{4\pi ik}{c} \int d^3 r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \sum_{l,m} \left[\frac{4\pi ik}{c} \int d^3 r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left(ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - c(2 + \mathbf{r}' \cdot \nabla') \rho(\mathbf{r}') \right) \right] h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

éstas representan desarrollos en armónicos esféricos de la componente radial de los campos de las cuales se puede hacer una identificación de las expresiones escritas entre corchetes con

los coeficientes $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})_{lm}$ y $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_{lm}$. Una vez conocidos éstos, los podemos introducir en (2.14) y (2.15) para obtener:

$$\begin{cases} \psi_{lm}^M(\mathbf{r}) = \frac{4\pi ik^2}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ \psi_{lm}^E(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi ik^2}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left[ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - c(2 + \mathbf{r}' \cdot \nabla') \rho(\mathbf{r}') \right]. \end{cases} \quad (2.16)$$

Estas cantidades son los *momentos multipolares dinámicos magnéticos* y *eléctricos*, respectivamente. Finalmente, podemos introducir estos momentos multipolares en los desarrollos en armónicos esféricos de los potenciales de Debye ψ^M y ψ^E que a su vez se pueden introducir en las ecuaciones para los campos (2.11), con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m} \left[\psi_{lm}^E \mathbf{L}h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) - \psi_{lm}^M \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{L}h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m} \left[\psi_{lm}^E \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{L}h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) + \psi_{lm}^M \mathbf{L}h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta descripción representa un *desarrollo multipolar del campo electromagnético para fuentes dinámicas* válido en todo el espacio exterior a las fuentes (notemos que no se requirió ninguna aproximación de campo cercano $r \ll \lambda$ o de campo lejano $r \gg \lambda$ como en la metodología planteada al principio del capítulo), en este sentido, podría decirse que ahora tenemos un *desarrollo multipolar general* de los campos.

Abreviemos las ecuaciones (2.17) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}^E + \mathbf{B}^M \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^E + \mathbf{E}^M, \end{aligned}$$

donde \mathbf{B}^E y \mathbf{E}^E tienen la propiedad de que \mathbf{B}^E es tangencial, debido a que es un término que contiene al operador \mathbf{L} , entonces a éstos campos se les llama *transverso-magnéticos*, por otro lado, \mathbf{B}^M y \mathbf{E}^M tienen la propiedad de que \mathbf{E}^M es tangencial, por lo que se les llama campos *transverso-eléctricos*. Estas características son heredadas de la descomposición de Debye hecha sobre los campos en la ecuación (2.11).

En esta sección se obtuvieron las fórmulas “generales” para calcular los momentos multipolares eléctricos y magnéticos, también se encontraron ecuaciones que determinan a los campos generados debido a cualquiera de los multipolos eléctricos o magnéticos. Entonces,

hasta este punto el desarrollo multipolar parece estar completo. Para aclarar el lenguaje que utilizaremos posteriormente, de ahora en adelante hablaremos de *multipolos usuales* cuando nos refiramos a las configuraciones puntuales de cargas y espiras de corriente que generen cada término en el desarrollo multipolar de un potencial o un campo.

2.2 Límite de onda larga

En esta sección analizaremos como son las expresiones para los momentos multipolares dinámicos dados en (2.16) cuando ubicamos los puntos de observación en la región de campo cercano ($d \ll r \ll \lambda$), en la cual se cumple el llamado *límite de onda larga*. En otras palabras, dada la condición $r \ll \lambda = 2\pi/k$ (que también se puede escribir como $kr \ll 1$), entonces, para saber como se comportan las expresiones (2.16) en tal caso, se tiene que tomar el límite $kr \rightarrow 0$. Notemos que para (2.16) tal límite solo tendrá efecto en las funciones $j_l(kr)$, las cuales se sabe que toman la siguiente forma [1]:

$$j_l(kr \rightarrow 0) \longrightarrow \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!},$$

entonces, es fácil ver que ψ_{lm}^M en el campo cercano es:

$$\begin{aligned} \psi_{lm}^M(kr \rightarrow 0) &\longrightarrow \frac{4\pi i k^{l+2}}{cl(l+1)(2l+1)!!} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &\equiv \frac{4\pi i k^{l+2}}{l(2l+1)!!} M_{lm}(-k^2 \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ahora, para la ecuación de ψ_{lm}^E en (2.16), notamos que su primer término es despreciable bajo el límite en consideración, pues contiene $ikr' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')$, lo cual posee una potencia en k mayor que el segundo término, por lo cual es despreciable. Entonces, tenemos que la ecuación para ψ_{lm}^E toma la forma:

$$\begin{aligned} \psi_{lm}^E(kr \rightarrow 0) &\longrightarrow \frac{4\pi i k^{l+2}}{l(l+1)(2l+1)!!} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') (2 + \mathbf{r}' \cdot \nabla') \rho(\mathbf{r}') \\ &\equiv \frac{-4\pi i k^{l+2}}{l(2l+1)!!} Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En las ecuaciones (2.18) y (2.19) se definieron:

$$\begin{aligned}
M_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) &= \frac{1}{c(l+1)} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\
Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) &= -\frac{1}{l+1} \int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') (2 + \mathbf{r}' \cdot \nabla') \rho(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

estas ecuaciones corresponden a los *momentos multipolares eléctricos y magnéticos en el caso estático*, notemos que en su argumento aparece el término $-k^2$, esto con el fin de seguir con la notación dada por otros autores [24]. Si se integra por partes la ecuación para $Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$, es posible recuperar la expresión de los momentos multipolares eléctricos definida en (1.12). Además, vemos que la ecuación para $M_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$ satisface la necesidad de tener una sola expresión de la cual se pueda calcular cualquiera de los momentos multipolares magnéticos, recordemos que ésta no quedó satisfecha en el capítulo anterior.

Un aspecto interesante a destacar, es que los momentos multipolares dinámicos ψ_{lm}^M, ψ_{lm}^E bajo el límite de onda larga no son directamente los momentos multipolares estáticos, sino que poseen un prefactor adicional, lo cual se puede identificar de (2.18) y (2.19). Entonces, es conveniente definir cantidades normalizadas que si cumplan con la propiedad de recuperar los momentos multipolares estáticos cuando se toma el límite de onda larga. Escribamos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
M_{lm}(-k^2) &= \frac{l(2l+1)!!}{4\pi i k^{l+2}} \psi_{lm}^M \\
E_{lm}(-k^2) &= \frac{-l(2l+1)!!}{4\pi i k^{l+2}} \psi_{lm}^E,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $M_{lm}(-k^2)$ y $E_{lm}(-k^2)$ se les llama *factores de forma*. De la primera ecuación en (2.21) se puede notar que bajo el límite de onda larga se recuperan exactamente los momentos multipolares magnéticos descritos en (2.20), mientras que para la segunda ecuación se recuperan los momentos multipolares eléctricos estáticos, $E_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) \rightarrow Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$.

En los siguientes capítulos hablaremos de *momentos multipolares usuales* cuando nos refiramos a las cantidades (2.16) que son válidas en el caso dinámico ó (2.20) para el caso estático. Sin embargo, veremos que de hecho hay otra familia de momentos multipolares que no han sido mencionados aún: los momentos multipolares toroidales, los cuales son distintos a los que hemos llamado “usuales”. Por ésto podría pensarse que, en analogía a lo estudiado en el capítulo 1, debería existir un conjunto de distribuciones puntuales que describa a una familia de “multipolos toroidales”.

Capítulo 3

El dipolo toroidal

Como habíamos mencionado, la descripción (2.17) contiene componentes tangenciales ($\propto \mathbf{L}$) y poloidales ($\propto \nabla \times \mathbf{L}$), lo cual es una consecuencia de haber aplicado la descomposición de Debye a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Recordemos que tal descomposición es válida para cualquier vector (ver apéndice C) y entonces resulta natural preguntarse que es lo que ocurre si ésta se aplica sobre las fuentes, más en concreto, si se aplica a la densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} . Además, la ecuación (2.17) está dada en parte por los momentos multipolares eléctricos descritos en (2.16), veremos posteriormente que éstos contienen en principio a los “momentos multipolares toroidales”.

Antes de comenzar con un estudio riguroso de éstos, se hará primero el análisis de una corriente poloidal estacionaria fluyendo sobre un toroide de sección recta circular y le asociaremos una cantidad llamada *magnetización*, la cual está dada por una densidad volumétrica de dipolos magnéticos, sin embargo, veremos que esta cantidad integrada sobre el volumen del toroide es cero, lo cual indica que el momento dipolar magnético de la distribución es nulo. También veremos que es posible asociar todavía otra cantidad que quizás sonará menos familiar: la “toroidización”, que en analogía a la magnetización, podría decirse que está dada por una densidad volumétrica de “dipolos toroidales” [26]. La toroidización integrada sobre el volumen del toroide será distinta de cero, por lo cual la distribución tendrá asociado un *momento dipolar toroidal*.

Finalmente, se tomará el límite puntual de la distribución estudiada, es decir, será reinterpretada como una fuente microscópica a la cual podremos llamar *dipolo toroidal* que veremos, es un multipolo distinto a los usuales. Así, este capítulo se trata de una motivación para el estudio de tal tipo de dipolo, además del planteamiento de la necesidad de obtener una fórmula

general con la cual sea posible calcular momentos multipolares toroidales de cualquier orden, problema que será abordado en el capítulo 4.

3.1 El solenoide toroidal: corrientes poloidales

Considérese un toroide de sección recta circular en cuyo radio mayor d se colocan centradas y paralelamente N espiras por las cuales fluye una corriente eléctrica estacionaria I , a tal configuración la llamaremos *solenoide toroidal* y a la corriente que fluye así en él le diremos *corriente poloidal*. Para describir ésta conviene introducir unas coordenadas (r, α, φ) que parametrizan al toroide y son válidas en los intervalos $0 < r < \infty$, $0 < \alpha < 2\pi$ y $0 < \varphi < 2\pi$ (ver figura 5).

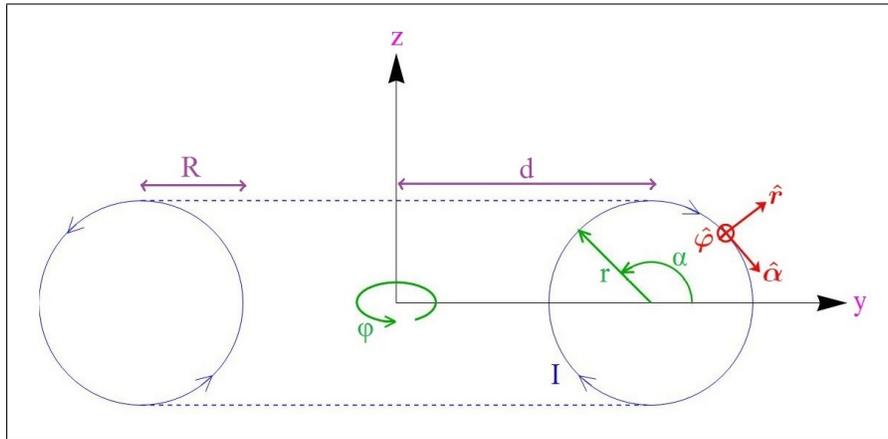


Figura 5: Proyección en el plano yz del solenoide toroidal con sección recta circular, se muestra la corriente poloidal (en azul), así como las coordenadas (r, α, φ) (en verde), los vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\alpha}, \hat{\varphi})$ (en rojo) y los parámetros R, d (en morado).

Haciendo uso de los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$, escribamos al vector de posición de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= d\hat{\rho} + r \cos \alpha \hat{\rho} + r \sin \alpha \hat{z} \\ &= (d + r \cos \alpha)(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) + r \sin \alpha \hat{z}, \end{aligned}$$

donde, en la segunda línea de esta ecuación se utilizó que $\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$ con $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas. Así, podemos ver que las ecuaciones de transformación entre las coordenadas (x, y, z) y (r, α, φ) son:

$$\begin{cases} x(r, \alpha, \varphi) = (d + r \cos \alpha) \cos \varphi \\ y(r, \alpha, \varphi) = (d + r \cos \alpha) \sin \varphi, \\ z(r, \alpha, \varphi) = r \sin \alpha \end{cases}$$

cuyo determinante jacobiano es $D(r, \alpha, \varphi) = r(d + r \cos \alpha) > 0$. Entonces, en las coordenadas (r, α, φ) podemos escribir al vector de densidad de corriente poloidal como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\eta NI \frac{\delta(r - R)}{(2\pi)^2 D(r, \alpha, \varphi)} \hat{\boldsymbol{\alpha}},$$

donde $\eta > 0$ es una constante y $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\sin \alpha (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}$. La constante η se puede calcular si integramos $\mathbf{J}dV = NI d\mathbf{l}$. Notemos que en la densidad de corriente poloidal que escribimos se introdujo $\delta(r - R)$ porque queremos que esté definida sobre la superficie del toroide, además se dividió entre $(2\pi)^2$ para cancelar las integrales sobre α, φ que van de 0 a 2π , y entre $D(r, \alpha, \varphi)$ para cancelar el jacobiano de la integral de volumen. Entonces vemos que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[-\eta NI \frac{\delta(r - R)}{(2\pi)^2 D(r, \alpha, \varphi)} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right] D(r, \alpha, \varphi) dr d\alpha d\varphi = NI \int_0^{2\pi} R d\alpha (-\hat{\boldsymbol{\alpha}}),$$

resolviendo esta ecuación obtenemos que $\eta = 2\pi R$, finalmente podemos escribir la *densidad de corriente poloidal del solenoide toroidal* como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{NI}{2\pi} \frac{\delta(r - R)}{(d + r \cos \alpha)} \hat{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (3.1)$$

Podría decirse que esta cantidad es suficiente para describir la distribución, ya que se puede integrar para obtener el potencial vector o el campo magnético, sin embargo, lo que será más interesante, es notar que se pueden asignar todavía un par cantidades más que hacen el mismo trabajo.

3.2 Magnetización y toroidización

Como consideramos fuentes independientes del tiempo, la condición de continuidad de carga en este caso es $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, por lo que podemos escribir la densidad de corriente como el rotacional de un vector:

$$\mathbf{J} = c\nabla \times \mathbf{M}, \quad (3.2)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Es bien sabido que el vector \mathbf{M} es la magnetización del sistema, y su cálculo es directo, basta con escribir su rotacional en las coordenadas (r, α, φ) (ver apéndice D) y utilizar la densidad de corriente escrita en (3.1), para la cual la única componente no nula es J_α . Entonces tenemos la igualdad:

$$-\frac{NI}{2\pi} \frac{\delta(r-R)}{d+r\cos\alpha} = \frac{c}{d+r\cos\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(d+r\cos\alpha)M_\varphi \right] - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right),$$

vemos que, por simetría en la componente φ , el segundo término del lado derecho de la ecuación se anula y podemos reescribirla como:

$$\delta(r-R) = \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{2\pi c}{NI} (d+r\cos\alpha)M_\varphi \right],$$

pero sabemos que $\partial\Theta(R-r)/\partial r = -\delta(r-R)$, con lo cual queda claro que la solución a esta ecuación es:

$$\mathbf{M}(r, \alpha, \varphi) = \frac{NI}{2\pi c} \frac{\Theta(R-r)}{(d+r\cos\alpha)} \hat{\varphi}, \quad (3.3)$$

que es la magnetización del solenoide toroidal, aquí la función de Heaviside $\Theta(R-r)$ indica que la ecuación es no nula sólo en el intervalo $r < R$. Es posible encontrar una correspondencia entre las coordenadas (r, α, φ) y las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) (ver apéndice D), en este caso las relaciones que resultan útiles son: $\rho = d + r \cos \alpha$ y $r = \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}$, con las cuales podemos reescribir la ecuación (3.2) en coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = \frac{NI}{2\pi c \rho} \Theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}) \hat{\varphi}. \quad (3.4)$$

A continuación mostraremos como asignar a la densidad de corriente todavía otra cantidad. Para esto, notemos de (3.4) que se cumple $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ y dada tal condición se puede escribir \mathbf{M} como el rotacional de otro vector, esto es:

$$\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{T}, \quad (3.5)$$

donde al vector \mathbf{T} lo llamamos *toroidización*. Podría parecer ocioso definir aún otra cantidad

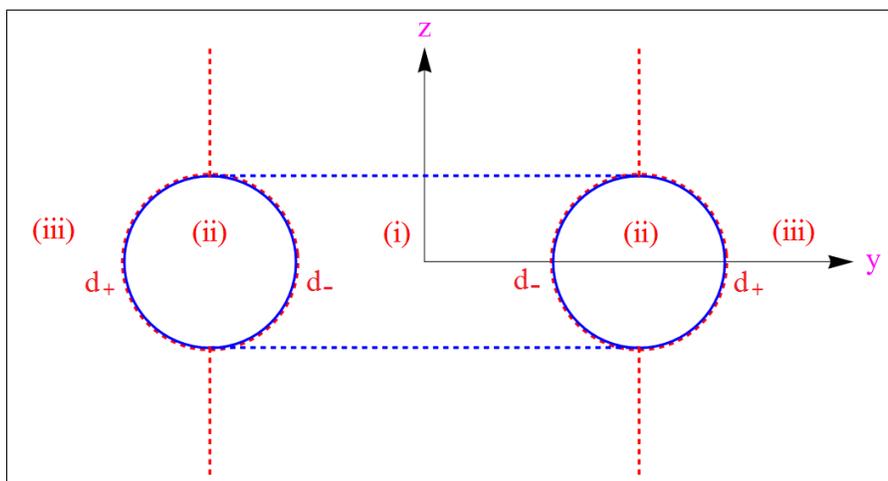


Figura 6: Regiones espaciales donde se calcula la magnetización (y la toroidización), las líneas punteadas en rojo indican la frontera entre ellas.

que describa al solenoide toroidal pues tenemos ya la densidad de corriente y la magnetización, sin embargo, veremos en la próxima sección que la integral volumétrica de la magnetización del solenoide toroidal es nula, lo cual significa que no hay un momento dipolar magnético asociado a la distribución y entonces veremos que el momento dipolar que sí se puede asociar es el toroidal, el cual corresponde a una integral volumétrica de la toroidización.

Para continuar notemos que la única componente no nula en la ecuación (3.4) es M_φ , entonces tomando el rotacional de \mathbf{T} en coordenadas cilíndricas e introduciéndolo a la ecuación anterior obtenemos:

$$M_\varphi = \frac{\partial T_\rho}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial \rho},$$

aquí, por simetría en el eje z , el primer término se anula, entonces para obtener la toroidización hace falta resolver la integral:

$$-T_z = - \int_\rho^{d_+} M_\varphi d\rho, \quad (3.6)$$

donde $T_z(\rho > d_+) = 0$ porque demandamos que no exista toroidización en el infinito ($\rho \rightarrow \infty$). De acuerdo a la ecuación (3.4) se definen tres regiones en el espacio:

- (i) Afuera del toroide $d_+ < \rho$, donde $M_\varphi = 0$.
- (ii) Dentro del toroide $d_- < \rho < d_+$, donde $M_\varphi = NI/2\pi c\rho$.

(iii) Dentro del agujero del toroide $\rho < d_-$, donde también $M_\phi = 0$.

donde $d_-(z) \equiv d - \sqrt{R^2 - z^2}$, $d_+(z) \equiv d + \sqrt{R^2 - z^2}$ con $|z| \leq R$ (ver figura 6). Ahora, si introducimos (3.4) en (3.6) y resolvemos la integral se obtenemos:

$$\mathbf{T}(\rho, z) = -\frac{NI}{2\pi c} \left[\Theta(d_- - \rho) \ln \left(\frac{d_-}{d_+} \right) + \Theta(d_+ - \rho) \Theta(\rho - d_-) \ln \left(\frac{\rho}{d_+ \sqrt{R^2 - z^2}} \right) \right] \Theta(R - |z|) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.7)$$

lo cual es la toroidización correspondiente a la distribución que definimos. Hemos obtenido entonces tres cantidades que describen al solenoide toroidal: la densidad de corriente (ver figura 7a), la magnetización (ver figura 7b) y la toroidización (ver figura 7c). Es bien sabido que la primera viene dada por una densidad volumétrica de dipolos magnéticos y, similarmente, veremos que la segunda cantidad viene dada por una densidad volumétrica de “dipolos toroidales”. Para probar esto último, en la siguiente sección definiremos al momento dipolar toroidal tomando el límite puntual de las dimensiones del solenoide planteado y entonces verificaremos que integrar en volumen la toroidización ofrece el mismo resultado, lo cual se interpreta físicamente como que la toroidización corresponde a una densidad volumétrica de fuentes puntuales.

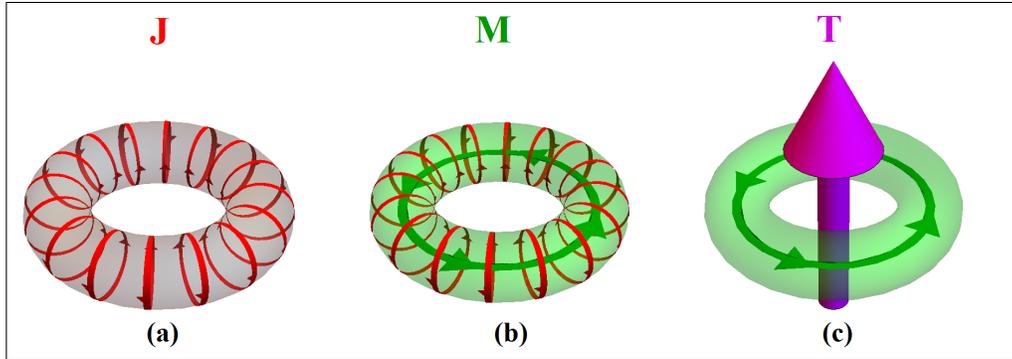


Figura 7: (a) Toroide de sección recta circular (en gris) con 16 espiras de corriente (en rojo) que definen una densidad de corriente poloidal \mathbf{J} . Es posible tener tantas espiras como sea necesario, por ejemplo $N \rightarrow \infty$, a esta configuración se le llama solenoide toroidal (b) La magnetización \mathbf{M} (en verde) generada por la corriente poloidal. (c) La toroidización \mathbf{T} (en violeta) asociada a la magnetización.

3.3 El límite puntual

El objetivo de esta sección es tomar el *límite puntual* de las cantidades “macroscópicas” \mathbf{J} , \mathbf{M} y \mathbf{T} las cuales describen al solenoide toroidal, en otras palabras, confinaremos el tamaño característico de la distribución a una región muy cercana al origen de coordenadas, así obtendremos las cantidades “microscópicas” \mathbf{j} , \mathbf{m} , \mathbf{t} que son respectivamente la *corriente microscópica*, el momento dipolar magnético y el *momento dipolar toroidal* asociados al solenoide toroidal puntual.

Sabemos que, por ejemplo, podemos obtener el momento dipolar magnético a partir de integrar en volumen la magnetización, pues esto ya ha sido tratado en el estudio básico del electromagnetismo [1]. Sin embargo, no podemos decir de antemano que lo mismo se cumple para obtener el momento dipolar toroidal a partir de la toroidización, dado que es una cantidad cuyas características desconocemos hasta ahora. Entonces, para obtener el momento dipolar toroidal necesitaremos tomar límites sobre las dimensiones que caracterizan al solenoide toroidal. Antes de esto, se realizará el cálculo del momento dipolar magnético asociado a una espira circular de radio d por la cual fluye una corriente eléctrica I , por medio de tomar los límites $d \rightarrow 0$ y $I \rightarrow \infty$, lo cual confina las dimensiones de la espira a una región muy cercana al origen, por lo que diremos que tal situación corresponde al “límite puntual de la espira”.

Partamos de la densidad de corriente de dicha distribución, no es difícil ver que, en coordenadas cilíndricas, se escribe:

$$\mathbf{J} = I\delta(\rho - d)\delta(z)\hat{\varphi},$$

entonces, utilizando (3.2) calculemos la magnetización asociada, obtenemos:

$$\frac{I}{c}\delta(\rho - d)\delta(z) = \frac{\partial M_\rho}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial \rho},$$

por simetría en el eje z el primer término de esta ecuación se anula y podemos reescribirla como:

$$-\delta(\rho - d)\delta(z) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{c}{I} M_z \right),$$

por propiedades de la función delta de Heaviside es fácil ver que la magnetización es entonces $M_z = (I/c)\Theta(\rho - d)\delta(z)$, lo cual reescribimos de una forma conveniente:

$$\mathbf{M}(\rho, z) = \left(\frac{I}{c} \pi d^2 \right) \left[\frac{2}{d^2} \Theta(\rho - d) \right] \frac{\delta(z)}{2\pi} \hat{\mathbf{z}}.$$

Si integramos sobre ρ esta ecuación, el término entre corchetes toma el valor de la unidad, podríamos sustituir tal expresión por la función $\delta(\rho)$ que cumple con la misma propiedad, tal sustitución equivale físicamente a tomar los límites $d \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ tal que $I\pi d^2$ se mantenga constante. Aplicando ésto, la magnetización de la espira circular se convierte en:

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} \mathbf{M}(\rho, z) = \frac{I}{c} A_e \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{m}\delta(\mathbf{r}),$$

donde

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} A_e \hat{\mathbf{z}},$$

es el momento dipolar magnético asociado a la espira circular, $A_e = \pi d^2$ es el área encerrada por la espira y $\delta(\mathbf{r}) = \delta(\rho)\delta(z)/2\pi$ corresponde a su posición en el espacio. Lo que hicimos con este procedimiento fue tomar el límite puntual de \mathbf{M} para obtener la cantidad \mathbf{m} situada en el origen de coordenadas. Se puede verificar que el momento dipolar magnético que calculamos es el correcto si se integra en volumen la magnetización o si se aplica la ecuación (1.9).

Ahora, para el momento dipolar magnético asociado al solenoide toroidal, veamos de la ecuación (3.4) que si se toma el límite $R \rightarrow 0$ (lo cual es equivalente a confinar una de las dimensiones del toroide), el término $\Theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2})$ se anula, por lo cual, siguiendo la metodología anterior, no resulta claro cual es el valor de \mathbf{m} asociado a esta distribución. Entonces, en vez de eso utilizaremos la fórmula ya conocida:

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M} d^3r. \quad (3.8)$$

Introducimos aquí la magnetización asociada al solenoide toroidal dada en (3.4) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{NI}{2\pi c \rho} \Theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \right] \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{NI}{2\pi c \rho} \Theta(R - \sqrt{(\rho - d)^2 + z^2}) \rho d\rho dz \right] \left[\int_0^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) d\varphi \right] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

dado que $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}$ es evidente que se anula la integral sobre φ en la segunda igualdad de esta ecuación, por lo cual el momento dipolar magnético también es nulo. Quizás

esto podría parecer extraño ya que vimos que el momento dipolar magnético de una espira circular es una cantidad no nula y el solenoide toroidal de hecho está formado por N espiras circulares. Sin embargo es cierto que cada una de ellas posee momento dipolar individualmente, calculamos que el momento dipolar neto es cero. Por otro lado, el solenoide toroidal no posee cargas eléctricas y es por lo tanto imposible asociarle cualquier momento multipolar eléctrico, de modo que a aquél no se le pueden asociar momentos multipolares usuales.

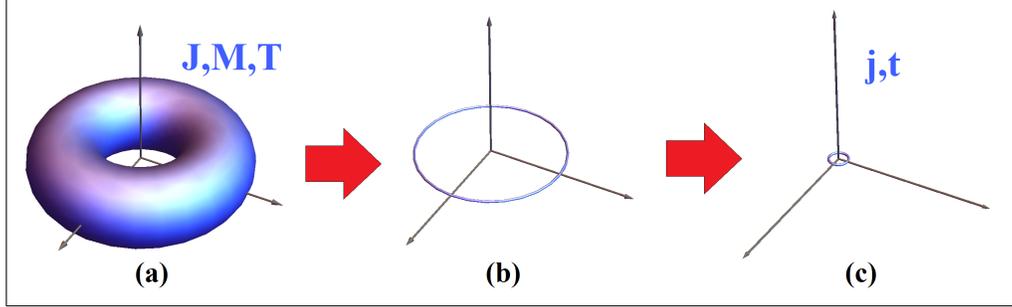


Figura 8: (a) Toroide de tamaño “macroscópico” $R \sim d$ descrito por los vectores \mathbf{J} , \mathbf{M} , \mathbf{T} . (b) Límite de espira $R \rightarrow 0$. (c) Límite puntual $R \rightarrow 0$ y $d \rightarrow 0$ descrito por \mathbf{j} y \mathbf{t} , en este caso $\mathbf{m} = 0$.

Finalmente, continuaremos con el cálculo del momento dipolar toroidal del solenoide en consireación, el cual se caracteriza por las cantidades macroscópicas \mathbf{J} , \mathbf{M} y \mathbf{T} (ver figura 8a). Ya hemos utilizado \mathbf{M} para calcular el momento dipolar magnético nulo, ahora partiremos de la toroidización (3.7). En este caso se tomarán los límites: $R \rightarrow 0$, $d \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ tal que $I2\pi^2 R^2 d$ se mantenga constante. Esto lo haremos por partes, veamos que, si tomamos primero $R \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ se cumple $d_+ \rightarrow d$ y también $d_- \rightarrow d$, entonces la cantidad $\Theta(\rho - d_-)\Theta(d_+ - \rho)$ se reduce a cero y además $\ln(d_-/d_+) \approx -2\sqrt{R^2 - z^2}/d$. Con esto (3.8) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} \mathbf{T}(\rho, z) &= \frac{NI}{2\pi c} \frac{2}{d} \Theta(d - \rho) \sqrt{R^2 - z^2} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{NI}{2\pi} \frac{d}{c} \frac{\pi R^2}{2} \left[\frac{2}{d^2} \Theta(d - \rho) \right] \left[\frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \right] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

bajo el límite tomado la distribución toma la forma de una espira (ver figura 8b). Notemos que, si integramos sobre z esta ecuación, el segundo corchete es igual a la unidad, así que podríamos sustituirlo por $\delta(z)$. Ahora, si aplicamos el límite $d \rightarrow 0$ ocurre lo mismo que para la espira de corriente: el primer corchete en (3.12) puede sustituirse por $\delta(\rho)$, con lo cual obtenemos finalmente el *límite puntual* del solenoide toroidal (ver figura 8c) y entonces la toroidización se convierte en lo siguiente:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} \mathbf{T}(\rho, z) = \frac{NI}{4\pi c} V_T \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{t}\delta(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

donde

$$\mathbf{t} = \frac{NI}{4\pi c} V_T \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.12)$$

es el momento dipolar toroidal y $V_T = (\pi R^2)(2\pi d)$ es el volúmen del toroide. Por completitud, hace falta decir cual es el límite puntual de la densidad de corriente (3.1), para esto notemos de (3.2) y (3.5) que debe cumplirse la siguiente relación:

$$\mathbf{J} = c\nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}). \quad (3.13)$$

Como ya conocemos el límite puntual de \mathbf{T} , podemos utilizar la ecuación (3.11) para decir directamente que el límite puntual de \mathbf{J} es:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{4\pi} V_T \nabla \times \nabla \times [\hat{\mathbf{z}}\delta(\mathbf{r})] \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

lo cual corresponde a una densidad de corriente “microscópica”. Las ecuaciones (3.9), (3.12) y (3.14) son cantidades que caracterizan al solenoide toroidal en el límite de fuente puntual. En el capítulo 1 se dijo que una cantidad que podía caracterizar a alguna distribución bajo el límite puntual era el momento multipolar no nulo de orden más bajo, éstos se definieron como integrales sobre densidades de carga y corriente, por ejemplo, el momento dipolar magnético estaba definido por una integral sobre \mathbf{J} como puede verse en la ecuación (1.9), pero también sabemos que éste puede calcularse a partir de una integral sobre \mathbf{M} , como puede verse en la ecuación (3.8).

Considerando esto, podría argumentarse que, si el momento dipolar toroidal en verdad juega un papel similar al de los momentos multipolares usuales, entonces también debería haber expresiones similares para éste. Algunos autores ya han resuelto tal problema [21] y han deducido la siguiente expresión:

$$\mathbf{t} = \int_V \mathbf{T} d^3r = \frac{1}{10c} \int_V [(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - 2r^2\mathbf{J}] d^3r. \quad (3.15)$$

Notemos de la segunda igualdad en esta ecuación que el momento dipolar toroidal se puede calcular por medio de una integral sobre la densidad de corriente de la distribución, en ese sentido significa una expresión análoga a la obtenida en (1.9) para el momento dipolar magnético. Por otro lado, la primera igualdad está dada por una integral volumétrica sobre la toroidización, entonces podríamos decir que es una expresión análoga a (3.8). Además, podemos utilizar la identidad $\int \mathbf{A} d^3r = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{A}) d^3r$ para mostrar a partir de (3.15) y haciendo uso de (3.5) que se cumple:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{M} d^3r. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) representan las relaciones del momento dipolar toroidal con las cantidades macroscópicas que describen a una distribución y es fácil verificar que éstas se cumplen para el caso del solenoide toroidal.

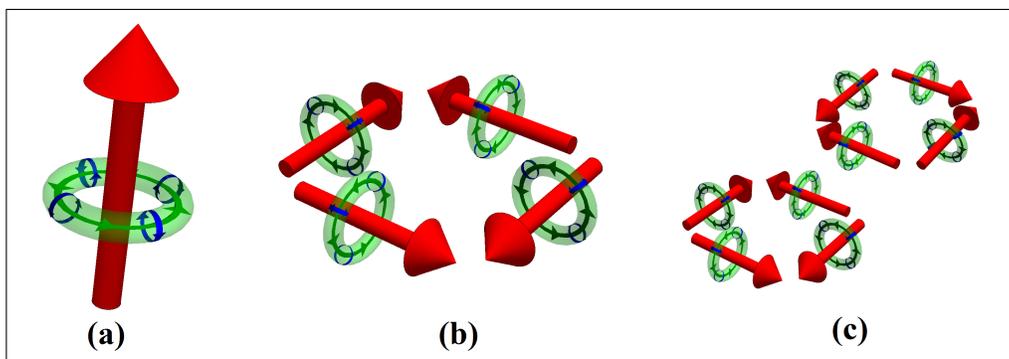


Figura 9: a) Dipolo toroidal. b) Cuadrupolo toroidal. c) Octupolo toroidal.

En conclusión, obtuvimos que al solenoide toroidal en el límite puntual no se le pueden asociar momentos multipolares usuales, sin embargo se le puede asociar otra cantidad que llamamos momento dipolar toroidal. En analogía a las distribuciones puntuales tratadas en el capítulo 1 a las cuales se les asociaban momentos multipolares usuales, diremos que el solenoide toroidal puntual representa físicamente a un *dipolo toroidal*, entonces éste nos puede dar una noción de la geometría de los multipolos toroidales de orden mayor (ver Figura 9), los cuales representan toda una familia de multipolos. Lo que faltaría es calcular cómo son los campos que generan estos multipolos, tarea que será abordado en el capítulo siguiente para una distribución en particular.

Sin duda, en el desarrollo multipolar de los campos que llamamos “general” en el capítulo 2 no se obtuvo ninguna evidencia de los multipolos toroidales, el capítulo siguiente tratará

el tema más a fondo para el caso dinámico en donde se pueden derivar expresiones con las cuales se calculan los momentos multipolares toroidales a cualquier orden y notaremos que de hecho tales expresiones se encuentran implícitamente en (2.16).

3.4 Acoplamiento con un campo externo

Analicemos ahora cómo es la energía de interacción de un dipolo toroidal con un campo externo, lo cual es una característica ya estudiada para los dipolos usuales pues se sabe que $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}$ para el dipolo eléctrico y $W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}$ para el dipolo magnético.

Consideremos un dipolo toroidal inmerso en un campo magnético externo, entonces, la energía de interacción será la suma del flujo de campo magnético a través de cada una de sus espiras [27]:

$$W = -\frac{I}{c} \sum_{k=1}^N \mathbf{B}_k^{\text{ext}} \cdot \mathbf{S}_k, \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{B}_k^{\text{ext}} = \mathbf{B}_k^{\text{ext}}(\mathbf{r}_k)$ es la densidad de flujo del campo magnético externo en el centro de la k -ésima espira y \mathbf{S}_k es un vector que apunta en dirección normal de tal espira, éste se puede aproximar como $\mathbf{S}_k \approx \pi R^2 \Delta \mathbf{r}_k / |\Delta \mathbf{r}_k|$, donde $|\Delta \mathbf{r}_k| \approx 2\pi d/N$ es un factor de normalización, entonces (3.17) se puede escribir como:

$$W = -\frac{\pi R^2 NI}{2\pi dc} \sum_{k=1}^N \mathbf{B}_k^{\text{ext}} \cdot \Delta \mathbf{r}_k \approx -\frac{\pi R^2 NI}{2\pi dc} \oint_{\partial A_T} \mathbf{B}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.18)$$

donde $A_T = \pi d^2$ es el área interior al radio mayor del toroide, además, hemos aproximado una distribución discreta de espiras sobre el solenoide toroidal como una distribución continua, lo cual es válido si consideramos $N \rightarrow \infty$. Finalmente, si se aplica el Teorema de Stokes a (3.18) obtenemos:

$$W = -\frac{NI}{2c} (\pi R^2 d) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = -\frac{NI}{4\pi c} V_T \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}}. \quad (3.19)$$

De esta ecuación se puede identificar al momento dipolar toroidal que escribimos en (3.12), de tal manera:

$$W = -\mathbf{t} \cdot \nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}}. \quad (3.20)$$

Entonces, decimos que el dipolo toroidal se acopla con el rotacional del campo magnético externo, lo cual no es usual, pues el acoplamiento de los dipolos eléctrico y magnético es directamente con alguno de los campos sin ningún operador de por medio. De hecho, se puede reescribir esta ecuación para obtener una relación para la energía de interacción que hay entre el dipolo toroidal y el campo eléctrico externo, para esto hacemos uso de la ecuación de Maxwell en la región libre de fuentes:

$$\nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{ext}}}{\partial t},$$

con lo cual podemos reescribir (3.20) como:

$$W = -\frac{1}{c} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{ext}}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

De esta expresión se muestra que el dipolo toroidal se acopla con la variación temporal del campo eléctrico, lo cual tampoco sucede con los dipolos usuales. En este sentido podemos concluir que el acoplamiento del dipolo toroidal con los campos externos se comporta de manera distinta a los dipolos usuales.

Podríamos preguntarnos ahora que es lo que ocurre si el campo eléctrico externo es una onda plana, es decir con la forma: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}$, la ecuación (3.21) tomaría la siguiente forma:

$$W = -(-i\mathbf{k}\mathbf{t}) \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}. \quad (3.22)$$

En tal situación, la energía de interacción tiene la misma forma que la correspondiente al dipolo eléctrico, pero esta vez para un dipolo de la forma $-i\mathbf{k}\mathbf{t}$. Podría decirse de esto que el dipolo toroidal es distinto al eléctrico en un factor de k . Veremos que esto se cumple en el siguiente capítulo y que es el motivo por el cual tal dipolo toroidal es descartado en la aproximación de onda larga para una distribución arbitraria de densidades de carga y de corriente.

Capítulo 4

Multipolos toroidales

En el capítulo anterior se resolvió el problema particular del solenoide toroidal con corrientes estáticas al cual no se le pudo asociar ningún tipo de momento multipolar usual, sin embargo si se le pudo asociar una cantidad distinta a la cual se llamó “momento dipolar toroidal”. Ahora se estudiarán a los momentos multipolares toroidales dinámicos y algunas de sus propiedades haciendo uso una vez más del solenoide toroidal.

La estructura del capítulo es la siguiente: primero, en la sección 4.1 se consideran fuentes y campos con dependencia armónica en el tiempo, las ecuaciones de Maxwell se resuelven haciendo uso de la función de Green saliente, de modo que los campos quedan dados por integrales sobre las fuentes. Entonces, se aplica la descomposición de Debye sobre \mathbf{J} , con lo cual \mathbf{B} y \mathbf{E} también quedan separados automáticamente y se obtienen relaciones entre los potenciales de Debye de las fuentes y los de los campos.

En la sección 4.2 se considera un solenoide toroidal y se construye la densidad de corriente que fluye sobre él, en la sección 4.3 se calcula su campo magnético, el cual corresponde a el potencial de Debye toroidal de \mathbf{B} . A diferencia del capítulo anterior, aquí el problema se resuelve enteramente en coordenadas esféricas.

En la sección 4.4 se analiza la región exterior a las fuentes como en el el esquema presentado en el capítulo 2, esto permite ver que el campo magnético del solenoide toroidal se puede escribir como un desarrollo multipolar que se identifica como un caso particular del desarrollo multipolar dinámico de los campos descrito en (2.17). Podría pensarse que los momentos multipolares que surgen en este caso corresponden a los momentos multipolares eléctricos dados en (2.16), sin embargo no es así.

En la sección 4.5 se hace una clasificación distinta de los momentos multipolares usuales y se presentan tres familias independientes: los momentos multipolares magnéticos, los de carga y los toroidales. Entonces, en la sección 4.6 se analiza su límite de onda larga y se concluye que, en tal situación, a una distribución como la del solenoide toroidal no se le pueden asociar momentos multipolares eléctricos ni magnéticos, pero sí momentos multipolares toroidales.

Finalmente se analizan algunas propiedades del solenoide toroidal, en la sección 4.7 se obtiene que en el límite estático $\omega \rightarrow 0$ el campo magnético está confinado a una región interna al toroide y en la sección 4.8 se obtienen los momentos multipolares en el límite puntual de la distribución, de los cuales se deduce el momento dipolar toroidal cuya potencia radiada promedio depende de la frecuencia como ω^6 a diferencia de la dependencia ω^4 característica de la radiación dipolar, también se muestra que los patrones de radiación generados por los multipolos eléctricos y toroidales son idénticos.

4.1 Potenciales de Debye de los campos eléctrico y magnético

En (2.17) se describió un desarrollo multipolar donde los campos estaban dados por una componente tangencial y una componente poloidal de acuerdo a la descomposición de Debye, sin embargo, tales desarrollos no presentan una relación explícita con las fuentes, ésta viene dada a través de los momentos multipolares definidos en (2.16). Veremos a continuación una manera de separar los campos en componentes de Debye de forma que sí se note dicha relación.

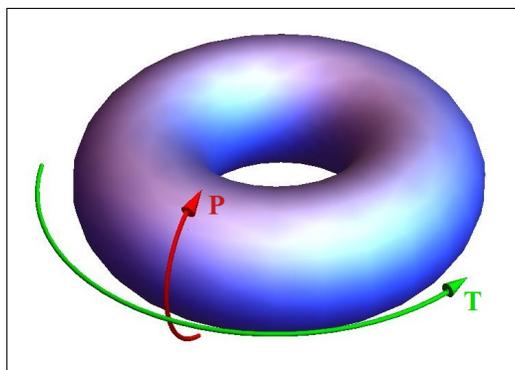


Figura 10: Corrientes tangencial (en verde) y poloidal (en rojo) fluyendo sobre un solenoide toroidal (en azul).

Se consideran fuentes y campos con dependencia armónica en el tiempo de la forma (2.1) situadas en el vacío. Las ecuaciones de Maxwell en este caso son las mismas que en (2.5) y se pueden resolver haciendo uso de la función de green saliente definida en (2.7). Tenemos entonces que la solución formal para los campos es:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= - \int d^3r' \nabla' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{ik}{c} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').\end{aligned}\tag{4.1}$$

La diferencia de esta ecuación con (2.4) es que ahora la solución es válida en todo punto del espacio, sin considerar únicamente la componente radial de los campos. Lo anterior muestra una relación explícita entre las fuentes y los campos, por lo cual separar \mathbf{J} por medio de la descomposición de Debye dará como resultado una separación de \mathbf{E} y \mathbf{B} también en componentes de Debye. Entonces, veamos primero la descomposición:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \xi^L(\mathbf{r}) + \mathbf{L} \xi^T(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{L} \xi^P(\mathbf{r}),\tag{4.2}$$

donde $\xi^L(\mathbf{r})$, $\xi^T(\mathbf{r})$ y $\xi^P(\mathbf{r})$ reciben el nombre de potenciales de Debye *longitudinal*, *toroidal* y *poloidal* de la corriente. Al primer término en esta ecuación se le llama *corriente longitudinal* en el sentido de que es la parte irrotacional de \mathbf{J} , mientras que los otros dos términos son de divergencia nula, es decir transversales, al segundo se le llama *corriente tangencial* y al tercero *corriente poloidal* (ver figura 10).

Para continuar notemos de (4.1) que también es necesario calcular el rotacional de la ecuación anterior, esto es:

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{L}[\xi^T(\mathbf{r})] + \mathbf{L}[-\nabla^2 \xi^P(\mathbf{r})],\tag{4.3}$$

donde se utilizó que $\nabla \cdot \mathbf{L} = 0$ en el segundo término. Ahora sí, podemos sustituir las ecuaciones (4.2) y (4.3) en la solución de los campos (4.1), los cuales quedan separados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{L} \int d^3r' \left[-\frac{1}{c} \nabla'^2 \xi^P(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla \times \mathbf{L} \int d^3r' \left[\frac{1}{c} \xi^T(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^L(\mathbf{r}') - \rho(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{L} \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^T(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
&\quad + \nabla \times \mathbf{L} \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^P(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A partir de estas ecuaciones, se pueden leer directamente los potenciales de Debye correspondientes a los campos si se identifican a las cantidades operadas por ∇ , \mathbf{L} y $\nabla \times \mathbf{L}$, explícitamente son:

$$\begin{aligned}
b^L(\mathbf{r}) &= 0 \\
b^T(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \left[-\frac{1}{c} \nabla'^2 \xi^P(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
b^P(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \left[\frac{1}{c} \xi^T(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
e^L(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^L(\mathbf{r}') - \rho(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
e^T(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^T(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
e^P(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \left[\frac{ik}{c} \xi^P(\mathbf{r}') \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Notemos de las expresiones entre corchetes en estas ecuaciones que $\xi^L(\mathbf{r})$ y ρ generan únicamente a $e^L(\mathbf{r})$, mientras que $\xi^T(\mathbf{r})$ genera a $e^T(\mathbf{r})$ y $b^P(\mathbf{r})$, además $\xi^P(\mathbf{r})$ genera a $e^P(\mathbf{r})$ y $b^T(\mathbf{r})$. También vemos que $b^L(\mathbf{r})$ es siempre nulo, lo cual es consistente con la no existencia de monopolos magnéticos, es decir, con la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Las ecuaciones (4.5) representan relaciones entre los potenciales de Debye de las fuentes y los de los campos, que permiten caracterizar al campo generado a partir del tipo de corriente tratada, sea longitudinal, tangencial o poloidal. En la siguiente sección se planteará una distribución que posee únicamente corriente poloidal, por lo que el único potencial de Debye de la corriente que habrá es $\xi^P(\mathbf{r})$, entonces debería esperarse que se obtenga solamente $b^T(\mathbf{r})$ y $e^P(\mathbf{r})$ para los campos.

4.2 Densidad de corriente del solenoide toroidal dinámico

En el capítulo 3 se trató un solenoide toroidal de corrientes estacionarias al cual no se podía asociar ningún momento multipolar usual, lo que sugiere que analizar distribuciones con tal propiedad es una buena estrategia para hacer notar la existencia de los multipolos toroidales, ésto es el objetivo general del capítulo. Por ese motivo, en esta sección se planteará un *solenoides toroidal dinámico*, es decir, una distribución de corrientes dependientes del tiempo que tiene la geometría de solenoide toroidal.

Calcular el desarrollo multipolar de los campos para corrientes poloidales sobre un toroide de sección recta circular puede volverse una tarea complicada, pues implica hacer uso de las coordenadas (r, α, φ) que definimos en el capítulo anterior, lo cual agrega una dificultad matemática al problema. Para evitar ésto, definamos la superficie de un toroide S_T como la unión de cuatro partes: una superficie esférica interior S_{EI} ($r = a, \theta_2 < \theta < \theta_1, \varphi$), una esférica exterior S_{EE} ($r = b, \theta_2 < \theta < \theta_1, \varphi$), una cónica superior S_{CS} ($a < r < b, \theta = \theta_1, \varphi$) y una cónica inferior S_{CI} ($a < r < b, \theta = \theta_2, \varphi$), de tal manera que $S_T = S_{EI} \cup S_{EE} \cup S_{CS} \cup S_{CI}$ (ver figura 11a). Ésta geometría nos permitirá resolver el problema enteramente en coordenadas esféricas.

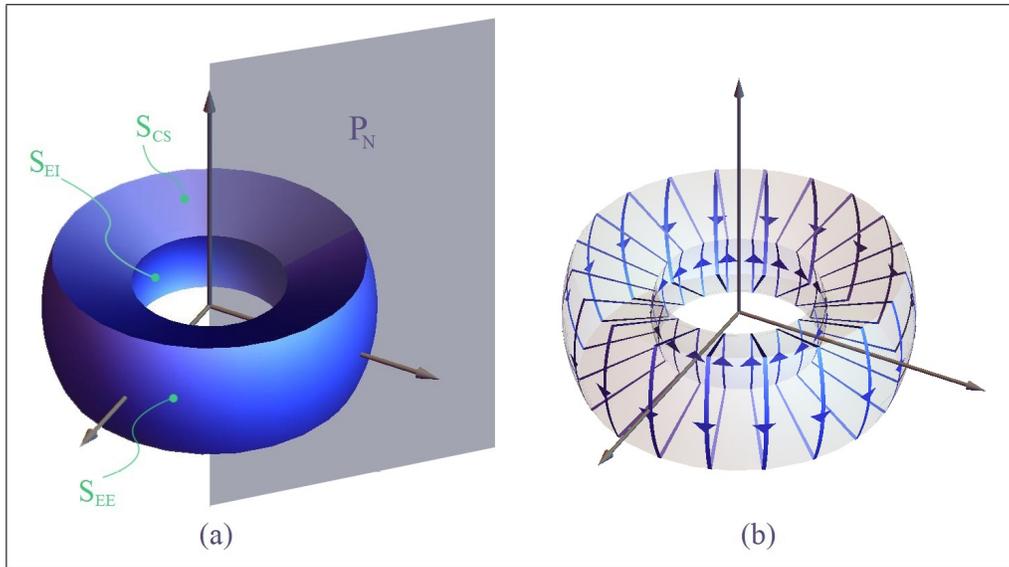


Figura 11: (a) Geometría del toroide definido en coordenadas esféricas. Se muestra un plano P_N que lo corta verticalmente. (b) $N = 16$ espiras de corriente colocadas paralelamente sobre el radio mayor del toroide, formando así un solenoide toroidal.

Consideramos entonces N espiras de corriente dinámica de la forma (2.1), cada una

colocada sobre la intersección de la superficie del toroide y algún plano P_N definido por $(r, \theta, \varphi = \varphi_N)$ donde φ_N es una constante diferente para cada espira, de tal manera que se encuentren igualmente espaciadas en φ . Ésta configuración describe a un solenoide toroidal dinámico (ver figura 10b) cuyo vector de densidad de corriente tendrá que ser construido como una suma de cuatro segmentos para cada espira (ver figura 12).

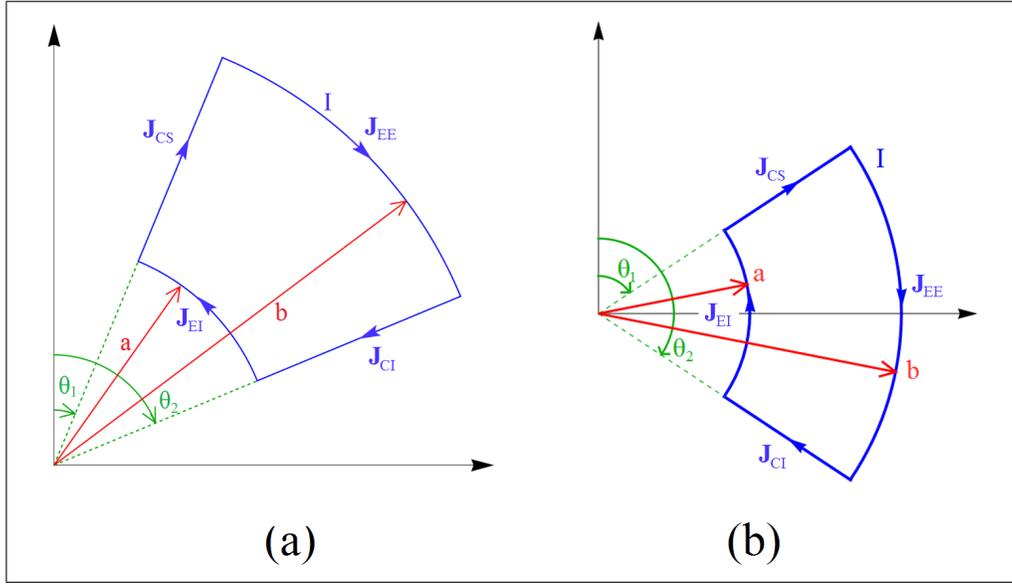


Figura 12: (a) Espira descrita por cuatro segmentos ubicados en un plano P_0 , la geometría de ésta es tal que se cumple $a < b$ y $\theta_1 < \theta_2$. (b) Una espira cuando $\theta_1 = \pi - \theta_2$.

Escribamos primero la densidad de corriente $\mathbf{J}_{CS}(\mathbf{r})$ de un filamento que se encuentra en la intersección de la superficie cónica superior S_{CS} del toroide y un plano P_0 dado por $(r, \theta, \varphi = \varphi_0)$. Primero notemos que tendrá la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_{CS}(r, \theta; \varphi = \varphi_0) = I\eta_{CS}(r, \theta)\delta(\theta - \theta_1)\hat{\mathbf{r}},$$

donde I indica la corriente que fluye por el filamento y $\delta(\theta - \theta_1)$ lo localiza en $\theta = \theta_1$. Para determinar $\eta_{CS}(r, \theta)$ tomamos una superficie S descrita por $(r = r_0, \theta, \varphi)$ cuyo vector normal es paralelo a la dirección de la corriente y utilizamos la condición $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, con la cual vemos que:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I\eta_{CS}(r, \theta)\delta(\theta - \theta_1)r^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

de aquí se puede identificar directamente que la igualdad se cumple si elegimos $\eta_{CS}(r, \theta) = \Theta(r - a)\Theta(b - r)/2\pi r^2 \sin\theta$, donde se escribieron las funciones de Heaviside para acotar la

corriente al intervalo $a < r < b$. Tenemos entonces que:

$$\mathbf{J}_{CS}(r, \theta; \varphi = \varphi_0) = \frac{I}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta(\theta - \theta_1) \Theta(r - a) \Theta(b - r) \hat{\mathbf{r}}.$$

Es fácil darse cuenta que será similar la densidad de corriente $\mathbf{J}_{CI}(\mathbf{r})$ para un filamento que se encuentra en la intersección del mismo plano P_0 y la superficie S_{CI} , la única diferencia en tal caso es que $\delta(\theta - \theta_1) \hat{\mathbf{r}} \rightarrow -\delta(\theta - \theta_2) \hat{\mathbf{r}}$. Ahora, para la corriente que fluye por un filamento en $S_{EE} \cap P_0$ tenemos una densidad de la forma:

$$\mathbf{J}_{EE}(r, \theta; \varphi = \varphi_0) = I \eta_{EE}(r, \theta) \delta(r - b) \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Para determinar $\eta_{EE}(r, \theta)$ tomamos la misma condición que usamos para $\eta_{CS}(r, \theta)$, pero ahora con una superficie S descrita por $(r, \varphi, \theta = \theta_0)$ cuyo vector normal es paralelo a \mathbf{J}_{EE} , con lo cual se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I \eta_{EE}(r, \theta) \delta(r - b) r \sin \theta dr d\varphi,$$

de donde podemos identificar que $\eta_{EE}(r, \theta) = \Theta(\theta - \theta_1) \Theta(\theta_2 - \theta) / 2\pi r \sin \theta$. Entonces, la densidad de corriente en este caso se escribe:

$$\mathbf{J}_{EE}(r, \theta; \varphi = \varphi_0) = \frac{I}{2\pi r \sin \theta} \delta(r - b) \Theta(\theta - \theta_1) \Theta(\theta_2 - \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

y notamos que la densidad de corriente $\mathbf{J}_{EI}(\mathbf{r})$ de un filamento que se encuentra en $S_{EI} \cap P_0$, se escribe similarmente, con la diferencia en que para tal caso $\delta(r - b) \hat{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow -\delta(r - a) \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Sumemos finalmente la densidad de corriente de cada filamento que conforma a la espira sobre el plano P_0 y multipliquemos el resultado por N , lo cual indica el número de espiras idénticas colocadas sobre el toroide en planos P_N correspondientes. Así obtenemos la *densidad de corriente del solenoide toroidal* dada en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{2\pi r \sin \theta} \left\{ \left[\delta(\theta - \theta_1) - \delta(\theta - \theta_2) \right] \Theta(r - a) \Theta(b - r) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} + \left[\delta(r - b) - \delta(r - a) \right] \Theta(\theta - \theta_1) \Theta(\theta_2 - \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\}. \quad (4.6)$$

Esta densidad de corriente posee únicamente potencial de Debye poloidal, es decir, cumple la descomposición (4.2) con $\xi^L = \xi^T = 0$ y $\xi^P \neq 0$, notemos de las ecuaciones (4.4) que solo deberían surgir contribuciones a los campos del tipo e^P y b^T , lo cual verificaremos posteriormente. Notemos que (4.6) es una corriente estacionaria, pero basta con multiplicarla

por un término $e^{-i\omega t}$ para convertirla en una corriente dinámica de la forma (2.1), esto no será necesario en el tratamiento siguiente pues las ecuaciones (4.1) permiten simplificar tal término.

4.3 Campo electromagnético del solenoide toroidal

Una vez obtenida la densidad de corriente del solenoide toroidal dinámico, ya se puede introducir en (4.1) para calcular los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Para realizar el cálculo notemos primero que se necesita el rotacional de (4.6):

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{2\pi r} \left\{ \frac{d}{dr} \left[\delta(r-b) - \delta(r-a) \right] \frac{\Theta(\theta - \theta_1)\Theta(\theta_2 - \theta)}{\sin \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\delta(\theta - \theta_1) - \delta(\theta - \theta_2)}{\sin \theta} \right] \Theta(r-a)\Theta(b-r) \right\} \hat{\varphi}.$$

Si sustituimos esta ecuación en (4.1) y además introducimos el desarrollo en armónicos esféricos de la función de Green saliente que se muestra en (2.8) pero reescrito de una forma conveniente (ver apéndice B) que permita realizar integrales sobre r , θ y φ analíticamente, podemos obtener el campo magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{NI}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r' \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \left\{ \frac{d}{dr'} \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] \frac{\Theta(\theta' - \theta_1)\Theta(\theta_2 - \theta')}{\sin \theta'} - \frac{1}{r'} \frac{d}{d\theta'} \left[\frac{\delta(\theta' - \theta_1) - \delta(\theta' - \theta_2)}{\sin \theta'} \right] \Theta(r' - a)\Theta(b - r') \right\} \hat{\varphi} \\ & 4\pi i k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) (2 - \delta_{m0}) \cos[m(\varphi - \varphi')], \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$N_{lm}^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}, \quad (4.8)$$

$j_l(kr_{<})$ y $h_l(kr_{>})$ son las funciones esféricas de Bessel y de Hankel del primer tipo respectivamente, además se introdujo la notación $r_{<} = \min\{r, r'\}$ y $r_{>} = \max\{r, r'\}$. Para el solenoide toroidal que definimos aquí, se consideran las siguientes regiones (ver figura 13):

- (i) Región interior a las fuentes $r < a$.

- (ii) Región intermedia $a < r < b$.
- (iii) Región exterior a las fuentes $b < r$.

Si resolvemos las integrales en θ y φ de la ecuación (4.7) (su cálculo explícito se muestra en el apéndice E), obtenemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{c} 4\pi i k \hat{\varphi} \sum_{l=1}^{\infty} N_{l1}^2 P_l^1(\cos \theta) \left[P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2) \right] \times \begin{cases} -k^2 \int_a^b dr' r' h_l(kr') j_l(kr), & r < a \\ \left\{ \left[\frac{d}{dr}(r j_l(kr)) - k^2 \int_a^r dr' r' j_l(kr') \right] h_l(kr) - \left[\frac{d}{dr}(r h_l(kr)) + k^2 \int_r^b dr' r' h_l(kr') \right] j_l(kr) \right\}, & a < r < b \\ -k^2 \int_a^b dr' r' j_l(kr') h_l(kr), & b < r, \end{cases} \quad (4.9)$$

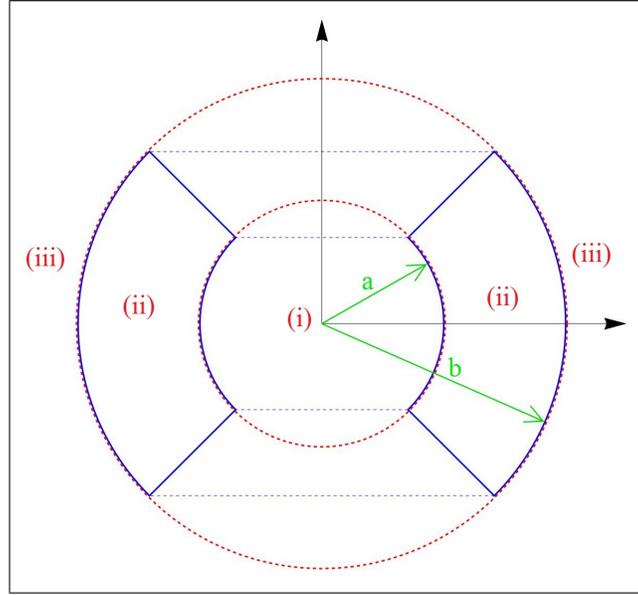


Figura 13: Regiones en las cuales se calcula el campo magnético separadas por la línea puntada (en rojo), la superficie del solenoide toroidal (en azul) y los parámetros a y b (en verde).

se puede notar aquí que, en la región $r < a$ se tienen las funciones $j_l(kr)$ que son regulares en el origen, mientras que en $b < r$ se tienen las funciones $h_l(kr)$ que son regulares en el infinito, esto es compatible con las condiciones de frontera en dichas regiones. Analicemos

brevemente lo que ocurrió con las integrales calculadas: la integral en θ dio lugar a un término $[P_l^1(\cos \theta_1) - P_l^1(\cos \theta_2)]$ el cual es nulo para $l = 0$, por lo cual en (4.9) se descartó tal término de la suma sobre l , la integral en φ dio lugar a una delta de Kroneker δ_{m1} , la cual colapsa la suma sobre m , anulando todos los términos salvo $m = 1$ (además anula a δ_{m0} que aparece en (4.7)).

Lo que queremos ahora es identificar (4.9) con la solución formal del campo magnético dada en (4.4), para lo cual usaremos la identidad:

$$\hat{\varphi} P_l^1(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} (-i\mathbf{L}) Y_{l0}(\theta, \varphi),$$

y entonces es fácil ver que (4.9) se puede reescribir como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{L} \left(\frac{4\pi k N I}{c} \right) \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} N_{l1}^2 \left[P_l^1(\cos \theta_1) - P_l^1(\cos \theta_2) \right] Y_{l0}(\theta, \varphi) \times \begin{cases} -k^2 \int_a^b dr' r' h_l(kr') j_l(kr), & r < a \\ \left\{ \left[\frac{d}{dr} (r j_l(kr)) - k^2 \int_a^r dr' r' j_l(kr') \right] h_l(kr) \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dr} (r h_l(kr)) + k^2 \int_r^b dr' r' h_l(kr') \right] j_l(kr) \right\}, & a < r < b \\ -k^2 \int_a^b dr' r' j_l(kr') h_l(kr), & b < r. \end{cases} \quad (4.10)$$

Veamos que en esta ecuación aparece el operador \mathbf{L} aplicado a una cantidad que se puede identificar como el potencial de Debye toroidal del campo magnético $b^T(\mathbf{r})$, ésto se puede ver claramente si se inspeccionan las ecuaciones (4.4) y (4.5), lo cual concuerda con lo que habíamos dicho para la ecuación (4.6). Similarmente deberíamos esperar que el campo eléctrico sea tal que solo tenga potencial de Debye poloidal $e^P(\mathbf{r})$, pero no lo escribiremos aquí por ahorro de espacio. En resumen, el solenoide toroidal posee una corriente poloidal que genera un *campo magnético tangencial* y un *campo eléctrico poloidal* determinados por los potenciales de Debye $b^T(\mathbf{r})$ y $e^P(\mathbf{r})$ respectivamente.

Hasta ahora no se ha calculado el desarrollo multipolar de ningún campo, de hecho los campos han sido calculados en todo el espacio, lo cual no es compatible con el esquema tratado en el desarrollo multipolar dinámico exterior dado por las ecuaciones (2.17). Sin embargo, sí se puede obtener un desarrollo multipolar de (4.10) si se considera solamente la región exterior a las fuentes $b < r$.

4.4 Región exterior a las fuentes $r > b$: momentos multipolares asociados al solenoide toroidal

Para $b < r$, el campo magnético se puede leer directamente de la ecuación (4.10). Si queremos calcular el campo eléctrico, recordemos que en una región libre de fuentes:

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}.$$

Los campos del solenoide toroidal se pueden escribir entonces de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(b < r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{l0} \mathbf{L}h_l(kr) Y_{l0}(\theta, \varphi) \\ \mathbf{E}(b < r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{l0} \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{L}h_l(kr) Y_{l0}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde

$$\psi_{l0} = -\frac{4\pi N I k^3}{c l(l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2) \right] \int_a^b dr' r' j_l(kr'). \quad (4.12)$$

Los desarrollos de los campos escritos en (4.11) se pueden identificar con los desarrollos multipolares generales (2.17) con $m = 0$ y $\psi_{l0}^M = 0$. Así, podemos decir que (4.11) representa un *desarrollo multipolar de los campos del solenoide toroidal*.

Para dar el problema por concluido, se podría identificar a los coeficientes ψ_{l0} en (4.12) como los momentos multipolares eléctricos ψ_{l0}^E , siendo éstos los únicos que contribuyen a los campos, pues como se dijo, para el solenoide toroidal los coeficientes ψ_{l0}^M son nulos. Sin embargo, hacer tal identificación sería equivalente a despreciar la existencia de los momentos multipolares toroidales, como veremos en la sección 4.6.

4.5 Los momentos multipolares toroidales dinámicos

Antes de hacer la identificación adecuada de los momentos multipolares asociados al solenoide toroidal, a continuación separaremos a los momentos multipolares dinámicos dados en (2.16). Notemos que ψ_{lm}^E posee dos términos, los cuales definiremos independientemente uno del otro

como familias distintas de momentos multipolares, tenemos:

$$\begin{aligned}
\psi_{lm}^M &= \frac{4\pi ik^2}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\
\psi_{lm}^Q &= \frac{4\pi ik^2}{l(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') (2 + \nabla') \rho(\mathbf{r}') \\
\psi_{lm}^T &= \frac{4\pi k^3}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde los coeficientes ψ_{lm}^T son los *momentos multipolares dinámicos toroidales* y ψ_{lm}^Q los *momentos multipolares dinámicos de carga*, tales que:

$$\psi_{lm}^E = \psi_{lm}^T + \psi_{lm}^Q, \tag{4.14}$$

con ψ_{lm}^E son los momentos multipolares eléctricos usuales (2.16). Para caracterizar el tipo de corriente que contribuye a cada momento multipolar, utilicemos la descomposición de Debye sobre \mathbf{J} y notemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{J} = (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{J} = i\mathbf{L}[\nabla \xi^L + \mathbf{L}\xi^T + \nabla \times \mathbf{L}\xi^P] = iL^2 \xi^T, \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{r} \cdot [\nabla \xi^L + \mathbf{L}\xi^T + \nabla \times \mathbf{L}\xi^P] = \mathbf{r} \cdot \nabla \xi^L + \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{L}\xi^P = \mathbf{r} \cdot \nabla \xi^L + iL^2 \xi^P. \end{cases}$$

Estas expresiones permiten reescribir los momentos multipolares en (4.13) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\psi_{lm}^M &= \frac{4\pi ik^2}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') [iL^2 \xi^T(\mathbf{r}')] \\
\psi_{lm}^Q &= \frac{4\pi ik^2}{l(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') (2 + \nabla') \rho(\mathbf{r}') \\
\psi_{lm}^T &= \frac{4\pi k^3}{cl(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') [\mathbf{r}' \cdot \nabla \xi^L(\mathbf{r}') + iL^2 \xi^P(\mathbf{r}')].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Examinando estas ecuaciones podemos darnos cuenta que los momentos multipolares magnéticos ψ_{lm}^M son producidos por corrientes tangenciales, cuyo potencial de Debye asociado es ξ^T , los momentos multipolares de carga ψ_{lm}^Q por densidades de carga $\rho(\mathbf{r})$ y los momentos multipolares toroidales ψ_{lm}^T por corrientes longitudinales y poloidales, cuyos potenciales son ξ^L y ξ^P respectivamente.

4.6 El límite de onda larga

Ahora veamos que ocurre con los momentos multipolares que definimos en (4.13) cuando se toma el límite de onda larga: primero, para ψ_{lm}^M notemos que ya se tiene el resultado en la ecuación (2.18), para ψ_{lm}^Q es fácil ver que se recupera el mismo resultado que el dado en (2.19), ésto ocurre porque, para obtener tal ecuación, se despreció el término ψ_{lm}^T debido a que decaía en mayor medida que ψ_{lm}^Q por poseer una potencia mayor en k , sin embargo, para una distribución de fuentes sin densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$, como lo es el solenoide toroidal, (2.19) no es un límite válido. Escribamos entonces cuales son los límites para ψ_{lm}^Q y ψ_{lm}^T :

$$\begin{aligned}\psi_{lm}^Q(kr \rightarrow 0) &\longrightarrow \frac{4\pi i k^{l+2}}{l(l+1)(2l+1)!!} \int d^3 r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') (2 + \nabla') \rho(\mathbf{r}') \\ &\equiv -\frac{4\pi i k^{l+2}}{l(2l+1)!!} Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) \\ \psi_{lm}^T(kr \rightarrow 0) &\longrightarrow \frac{4\pi k^{l+3}}{cl(l+1)(2l+1)!!} \int d^3 r' r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &\equiv \frac{4\pi k^{l+3}}{cl(2l+1)!!} T_{lm}(-k^2 \rightarrow 0),\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde

$$T_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) = \frac{1}{l+1} \int d^3 r' r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'),\tag{4.17}$$

son los *momentos multipolares toroidales estáticos*, notemos además que el coeficiente $Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$ escrito en (4.16) corresponde a los momentos multipolares eléctricos que se describieron en la segunda ecuación de (2.20).

Definamos ahora cantidades normalizadas de las ecuaciones (4.16), de tal manera que en el límite de onda larga se recuperen los momentos multipolares estáticos sin ningún prefactor adicional, es decir, escribiremos los factores de forma para los momentos multipolares (4.13), tenemos entonces:

$$\begin{aligned}M_{lm}(-k^2) &= \frac{l(2l+1)!!}{4\pi i k^{l+2}} \psi_{lm}^M \\ Q_{lm}(-k^2) &= -\frac{l(2l+1)!!}{4\pi i k^{l+2}} \psi_{lm}^Q \\ T_{lm}(-k^2) &= \frac{cl(2l+1)!!}{4\pi k^{l+3}} \psi_{lm}^T,\end{aligned}\tag{4.18}$$

donde volvimos a escribir el factor de forma $M_{lm}(-k^2)$ que ya se tenía definido en (2.20).

Por completitud, veamos lo que ocurre con el límite de onda larga de ψ_{lm}^E descrito en (2.16), el cual ya se había analizado en la ecuación (2.19), pero esta vez no despreciaremos el primer término, pues como vimos, eso equivale a descartar los momentos multipolares toroidales, vemos así que:

$$\begin{aligned} \psi_{lm}^E(kr \rightarrow 0) &\longrightarrow \frac{4\pi i k^{l+2}}{l(l+1)(2l+1)!!} \int d^3r' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left[ik\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') - c(2 + \nabla')\rho(\mathbf{r}') \right] \\ &= \frac{4\pi k^{l+1}}{cl(2l+1)!!} \left[k^2 T_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) - i\omega Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si normalizamos esta ecuación podemos definir el factor de forma para los momentos multipolares eléctricos:

$$E_{lm}(-k^2) = \frac{cl(2l+1)!!}{4\pi k^{l+1}} \psi_{lm}^E = k^2 T_{lm}(-k^2) - i\omega Q_{lm}(-k^2), \quad (4.20)$$

éste no debe confundirse con lo que se definió en la segunda ecuación de (2.21), pues en este caso si hemos considerado ψ_{lm}^T .

Notemos de (4.19) que en general se cumple $E_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) \longrightarrow -i\omega Q_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$, pero para una distribución que no contenga densidad de carga y en la cual el término $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}$ sea no nulo, entonces el límite correcto es $E_{lm}(-k^2 \rightarrow 0) \longrightarrow k^2 T_{lm}(-k^2 \rightarrow 0)$, que es el caso para el problema del solenoide toroidal. Entonces, finalmente podemos hacer la identificación de los coeficientes definidos en (4.12) como ψ_{lm}^T en (4.13) con $m = 0$, es decir, los momentos multipolares toroidales son los que describen al desarrollo multipolar de los campos del solenoide toroidal.

En las siguientes secciones tomaremos el límite de onda larga del solenoide toroidal con el objetivo de visualizarlo en dos contextos: como límite magnetostático, donde $\omega \rightarrow 0$ y como límite de fuente puntual, donde $kd \ll 1$ con d el tamaño característico de la distribución.

4.7 El límite magnetostático

Hablamos de límite estático cuando $\omega \rightarrow 0$, pero dada la relación $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, tenemos que se cumple el límite $\lambda \rightarrow \infty$, es decir, el límite de onda larga, por lo que volveremos a

tomar $kr \rightarrow 0$. Ahora, para obtener tal límite para el solenoide toroidal, de la ecuación para el campo magnético (4.10) que obtuvimos, podemos notar que se necesita conocer las aproximaciones asintóticas de $j_l(kr)$ y $h_l(kr)$, más concretamente, la relación asintótica de su producto, ésta es:

$$j_l(kr_{<})h_l(kr_{>}) \Big|_{kr \rightarrow 0} \longrightarrow \frac{-i}{k(2l+1)} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \quad (4.21)$$

Notemos que en la región interior $r < a$ y exterior $b < r$, el campo magnético es nulo, pues aún con el límite (4.21) para las expresiones radiales, aparecen términos k^2 que se anulan para $k \rightarrow 0$. En la región intermedia $a < r < b$, los términos radiales toman la forma:

$$\left[\frac{d}{dr}(r^{l+1}) \right] \frac{1}{r^{l+1}} - \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^l} \right) \right] r^l = \frac{2l+1}{r},$$

Entonces, el campo magnético bajo el límite estático es:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(a < r < b) &= \frac{NI}{cr} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l^1(\cos \theta) [P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2)] \\ &= \frac{2NI}{cr \sin \theta} [\Theta(\theta - \theta_2) - \Theta(\theta - \theta_1)] \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde, para obtener la última igualdad, se utilizó la relación de completitud de los polinomios de Legendre y la integración de la función de Heaviside (el cálculo completo se muestra en el apéndice F). Se dice que esta ecuación representa el *límite magnetostático* del problema, en éste el campo magnético es nulo en todo el espacio excepto en la región interior al toroide, pues notemos que las funciones de Heaviside en (4.22) acotan a \mathbf{B} justo a la parte interna de la distribución.

De esta manera, se tiene el campo magnético generado por una fuente puntual, pues se tomó el límite de onda larga que también implica confinar el tamaño característico de la fuente a una región localizada alrededor del origen. Podría decirse que el solenoide toroidal puntual es análogo al *anapolo* que postula Zel'dovich [12] debido a la característica que posee de no generar campo magnético en las regiones exteriores a la fuentes.

4.8 El límite puntual

Si consideramos que el tamaño característico del solenoide toroidal es mucho más pequeño que la longitud de onda, es decir, sí $d \ll \lambda = 2\pi/k$, lo cual es equivalente a $kd \ll 1$, entonces podemos tomar el límite $kr \rightarrow 0$ para los coeficientes que identificamos como momentos multipolares toroidales dinámicos en (4.12), tenemos entonces:

$$\psi_{10}^T(-k^2 \rightarrow 0) \longrightarrow -\frac{4\pi NI k^{l+3}}{cl(l+1)(2l+1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2) \right] \frac{b^{l+2} - a^{l+2}}{(l+2)} \quad (4.23)$$

Si a partir de estos queremos calcular el momento dipolar dinámico, basta con tomar $l = 1$, con lo cual obtenemos:

$$\psi_{10}^T(-k^2 \rightarrow 0) \longrightarrow -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{NI k^4}{4\pi c} V_T \equiv -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} k^4 t_z, \quad (4.24)$$

donde $V_T = (2\pi/3)[\cos \theta_1 - \cos \theta_2][b^3 - a^3]$ es el volúmen del toroide y t_z la componente z del momento dipolar toroidal:

$$\mathbf{t} = \frac{NI}{4\pi c} V_T \hat{\mathbf{z}},$$

lo cual concuerda con (3.12). A partir de (4.24) es posible calcular el promedio temporal de potencia radiada $\langle P \rangle$ que genera el dipolo toroidal, para ésto tomaremos la fórmula derivada por C. G. Gray [23]:

$$\langle P \rangle = \frac{cl(l+1)}{8\pi k^2} |\psi_{lm}^E|^2,$$

dado que se cumple $\psi_{lm}^E = \psi_{lm}^T + \psi_{lm}^Q$, y para el solenoide toroidal $\psi_{lm}^Q = 0$, entonces podemos introducir (4.24) en la ecuación anterior para obtener:

$$\langle P \rangle = \frac{2c}{8\pi k^2} \left| -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} k^4 t_z \right|^2 = \left(\frac{4\pi}{3} \right) \frac{\omega^6}{4\pi c^5} |\mathbf{t}|^2. \quad (4.25)$$

Es bien sabido que la potencia radiada promedio para el momento dipolar eléctrico y magnético va como ω^4 [1], sin embargo notamos que para el momento dipolar toroidal va como ω^6 . También es posible graficar los patrones de radiación generados por los multipolos de distintos ordenes a partir de la ecuación:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi k^2} |\psi_{lm}^E|^2 |\mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2. \quad (4.26)$$

Debido a la separación (4.14), se tiene que los patrones de radiación de los multipolos eléctricos y toroidales son idénticos (ver figura 14), pues su distribución angular está dada por los armónicos esféricos.

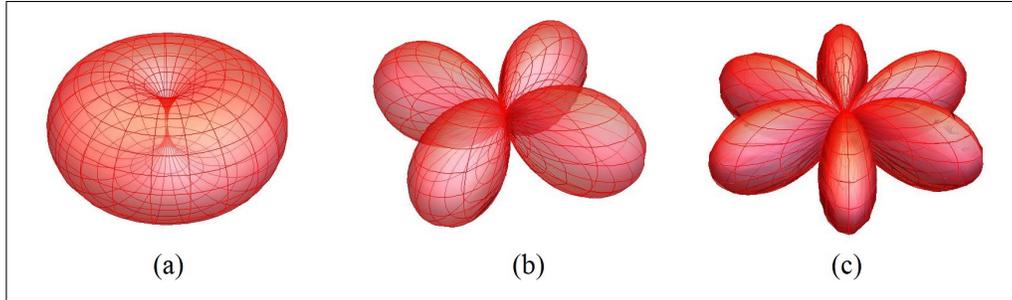


Figura 14: Patrones de radiación de los siguientes multipolos eléctricos ó toroidales: (a) El dipolo. (b) El cuadrupolo. (c) El octupolo.

De este capítulo podemos concluir que efectivamente existe una tercer familia de multipolos electromagnéticos la cual está caracterizada por corrientes poloidales que fluyen alrededor de solenoides toroidales puntuales. La introducción de esta familia de multipolos permite describir cualquier tipo de fuentes mediante momentos multipolares, ya sea que tengan densidades de carga o corrientes longitudinales, tangenciales y poloidales, ésto da lugar a un desarrollo multipolar *completo*. Además, se encontró que un solenoide toroidal puntual puede interpretarse como un anapolo, pues no genera campos externos a la fuente. También se obtuvo que los patrones de radiación de los multipolos eléctricos y toroidales son idénticos, pero su potencia radiada difiere en un factor de ω^2 .

Conclusiones

Primero se estudió el desarrollo multipolar de los potenciales electrostático y magnetostático en coordenadas cartesianas de lo cual se definieron a los momentos multipolares estáticos usuales (eléctricos y magnéticos) y se mostró su interpretación física. Además notamos que en tal caso no surgen naturalmente los momentos multipolares toroidales. Después, en el caso dinámico, derivaron expresiones que describen a los campos en el espacio exterior a las fuentes para cualquiera de los momentos multipolares dinámicos usuales.

Después, se analizaron corrientes poloidales fluyendo alrededor de solenoides toroidales, los cuales no presentaron ninguna correspondencia con los momentos multipolares usuales. Entonces, se hizo una clasificación distinta de éstos, separando a los momentos multipolares eléctricos en dos familias independientes: los momentos multipolares de carga y los momentos multipolares toroidales, entonces se identificó que éstos últimos son los que efectivamente corresponden al solenoide toroidal.

En la literatura tradicional del electromagnetismo se descarta el término en la expresión de los momentos eléctricos que contiene a los momentos toroidales, debido a que en el límite de onda larga son despreciables en comparación a los momentos de carga. Sin embargo, mostramos que existen distribuciones de corriente en las que ésto no ocurre pues no poseen momentos de carga, por lo cual no está justificado despreciar a los momentos multipolares toroidales.

Se definió la configuración física del dipolo toroidal, a partir de la cual se pueden describir a los multipolos de orden más alto, con lo que se caracterizó físicamente a la familia de multipolos toroidales. También se trataron algunas propiedades que presentan los multipolos toroidales, se obtuvo que el dipolo toroidal se acopla con el rotacional campo magnético ó con la derivada temporal del campo eléctrico, también se mostró que los patrones de radiación correspondientes a los multipolos eléctricos y magnéticos son idénticos, sin embargo la dependencia que tiene su promedio temporal de la potencia radiada respecto a la frecuencia

angular difiere en un factor de ω^2 .

El procedimiento seguido en esta tesis para mostrar la existencia de los multipolos electromagnéticos toroidales podría ser incluido en un curso de electrodinámica clásica, lo cual ayudaría a los estudiantes a tener un punto de partida para profundizar en el estudio de éstos. Aunque en los últimos años se han estado estudiando a los multipolos toroidales cada vez en mayor medida, aún quedan varios aspectos por investigar, por ejemplo, algunos autores han probado recientemente que los multipolos toroidales no tienen un significado físico independiente a los multipolos eléctricos respecto a su acoplamiento con las ondas electromagnéticas [30] y otros han propuesto que debe estudiarse más a fondo la posibilidad física de construir microscópicamente al “dipolo axial” [21] que fue mencionado en la introducción de esta tesis pero no fue tratado con mayor profundidad.

Apéndice

A Teorema de Helmholtz

Sea \mathbf{F} un espacio vectorial en una región acotada $V \subseteq \mathbf{R}^3$ que es continuamente diferenciable, y sea S la superficie que encierra al dominio V , entonces \mathbf{F} puede escribirse como la suma de una componente irrotacional (también llamada *tangencial*) y otra solenoidal (también llamada *longitudinal*) [28]:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A1})$$

donde

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S d^2r' \hat{\mathbf{n}}' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S d^3r' \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{cases} \quad (\text{A2})$$

Si el espacio V es no acotado, entonces el segundo término en las ecuaciones (A2) se anula, pues \mathbf{F} tiende a cero más rápido que $1/r$ cuando $r \rightarrow \infty$, por lo cual el primer término es el único que contribuye a las ecuaciones y V se vuelve una región que ocupa todo el espacio.

B Desarrollo en armónicos esféricos de la función de Green saliente

La función de Green saliente, es una solución a la ecuación de onda con fuentes, y para una sola frecuencia en el espacio de Fourier, se define como:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{B1})$$

La función de Green saliente, por ser una función definida por una ecuación de Helmholtz homogénea fuera de las fuentes, se puede escribir como un desarrollo en armónicos esféricos para las componentes angulares, esto es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{B2})$$

si sustituimos este desarrollo en (B1), obtenemos una ecuación para la parte radial $g_l(r, r')$ de la función de Green:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'), \quad (\text{B3})$$

la solución que satisface esta ecuación, así como las condiciones de regularidad en el infinito y en el origen (que corresponden a una onda saliente) es:

$$g_l(r, r') = A j_l(kr_{<}) h_l^{(1)}(kr_{>}). \quad (\text{B4})$$

Se puede mostrar que la constante adecuada para esta solución es $A = ik$. Entonces, sustituyendo (B4) en (B2), obtenemos un desarrollo en armónicos esféricos para la función de Green:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (\text{B5})$$

Ahora reescribiremos esta ecuación de otra manera que resultará más conveniente para resolver integrales en r, θ y φ . Para ésto notemos que la sumatoria sobre m se puede reescribir

como:

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* Y_{lm} = \sum_{m=-l}^0 Y_{lm}^* Y_{lm} + \sum_{m=0}^l Y_{lm}^* Y_{lm} - \delta_{m0} Y_{lm}^* Y_{lm}, \quad (\text{B6})$$

donde hemos omitido la dependencia de los armónicos esféricos sobre θ' y φ' para simplificar la notación. Ahora, utilizaremos la relación entre los armónicos esféricos reales y los polinomios de Legendre que viene dada por:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\theta), & m < 0 \\ \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta), & m = 0 \\ \sqrt{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), & m > 0, \end{cases} \quad (\text{B7})$$

ahora introduciremos esta ecuación en (B6) para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* Y_{lm} &= \sum_{m=-l}^0 2N_{l|m}^2 P_l^{|m|}(\cos \theta') P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\varphi') \sin(|m|\varphi) \\ &\quad + \sum_{m=0}^l 2N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi') \cos(m\varphi) \\ &\quad - \delta_{m0} N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi') \cos(m\varphi) \\ &= \sum_{m=0}^l 2N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) \left[\sin(m\varphi') \sin(m\varphi) + \cos(m\varphi') \cos(m\varphi) \right] \\ &\quad - \delta_{m0} N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi') \cos(m\varphi) \\ &= \sum_{m=0}^l N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) (2 - \delta_{m0}) \cos[m(\varphi - \varphi')], \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

donde hemos utilizado la identidad $\cos(b-a) = \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)$ e introducido los coeficientes:

$$N_{lm}^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}. \quad (\text{B9})$$

Con (B8) finalmente podemos reescribir el desarrollo en armónicos esféricos de la función

de Green saliente (B5) de la siguiente forma:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi i k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) (2 - \delta_{m0}) \cos[m(\varphi - \varphi')]. \quad (\text{B10})$$

C Descomposición de Debye

De acuerdo al teorema de Helmholtz se puede separar un campo vectorial en una parte longitudinal y una parte transversal. La descomposición de Debye permite separar la parte transversal del campo aún en otras dos partes más: la *tangencial* y la *poloidal* [29]. Entonces, un campo vectorial \mathbf{F} se puede escribir como:

$$\mathbf{F} = \nabla \phi^L + \mathbf{L} \psi^T + \nabla \times \mathbf{L} \chi^P, \quad (\text{C1})$$

donde $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ es el operador de momento angular, ϕ^L es el potencial de Debye *longitudinal* asociado al campo vectorial \mathbf{F} , ψ^T el potencial *toroidal* y χ^P el potencial *poloidal*. Al término que contiene al operador ∇ en esta ecuación se le llama *componente longitudinal*, al término con \mathbf{L} se le llama *componente tangencial* y al término con $\nabla \times \mathbf{L}$ *componente poloidal*.

Podemos obtener los campos escalares ϕ^L, ψ^T y χ^P operando sobre \mathbf{F} de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla^2 \phi^L \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = L^2 \psi^T \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = iL^2 \chi^P + r \frac{\partial}{\partial r} \phi^L, \end{cases} \quad (\text{C2})$$

con esto podemos resolver para ϕ^L y ψ^T directamente, y después resolver para χ^P .

D Coordenadas (r, α, φ)

Una forma conveniente de construir al vector de posición es mediante las coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= d\hat{\boldsymbol{\rho}} + r \cos \alpha \hat{\boldsymbol{\rho}} + r \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \\ &= (d + r \cos \alpha)(\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + r \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{D1})$$

De donde se pueden obtener fácilmente las ecuaciones de transformación:

$$\begin{cases} x(r, \alpha, \varphi) = (d + r \cos \alpha) \cos \varphi \\ y(r, \alpha, \varphi) = (d + r \cos \alpha) \sin \varphi \\ z(r, \alpha, \varphi) = r \sin \alpha. \end{cases} \quad (\text{D2})$$

Sea \mathbf{F} un vector arbitrario se puede escribir como:

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\boldsymbol{\rho}} + F_\alpha \hat{\boldsymbol{\alpha}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (\text{D3})$$

donde los vectores base están dados por:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial r}{|\partial \mathbf{r} / \partial r|} = \cos \alpha (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \alpha}{|\partial \mathbf{r} / \partial \alpha|} = -\sin \alpha (\cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}) + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \varphi}{|\partial \mathbf{r} / \partial \varphi|} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}. \end{cases} \quad (\text{D4})$$

Su divergencia es:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r(d + r \cos \alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r(d + r \cos \alpha) F_r \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r F_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left((d + r \cos \alpha) F_\alpha \right) \right]. \quad (\text{D5})$$

Su rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r(d + r \cos \alpha)} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & (d + r \cos \alpha) \hat{\mathbf{e}}_\varphi & r \hat{\mathbf{e}}_\alpha \\ \partial / \partial r & \partial / \partial \varphi & \partial / \partial \alpha \\ F_r & (d + r \cos \alpha) F_\varphi & r F_\alpha \end{vmatrix}. \quad (\text{D6})$$

E Cálculo del campo magnético dinámico del solenoide toroidal

El propósito de éste apéndice es mostrar la solución de las integrales que aparecen en la siguiente ecuación para el campo magnético dinámico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, donde $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{NI}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r' \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \left\{ \frac{d}{dr'} \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] \frac{\Theta(\theta' - \theta_1)\Theta(\theta_2 - \theta')}{\sin \theta'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{r'} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\delta(\theta' - \theta_1) - \delta(\theta' - \theta_2)}{\sin \theta'} \right] \Theta(r' - a)\Theta(b - r') \right\} \hat{\varphi} \\ & 4\pi i k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l j_l(kr_<) h_l(kr_>) N_{lm}^2 P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) (2 - \delta_{m0}) \cos[m(\varphi - \varphi')], \end{aligned} \quad (\text{E1})$$

notemos que esta ecuación solo contiene funciones de una sola variable, entonces, se pueden calcular sus integrales independientemente para r, θ y φ . Para visualizar mejor la integración reescribamos (E1) de la siguiente forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{NI}{2\pi c} 4\pi i k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[I_1(r) J_1(\theta) + I_2(r) J_2(\theta) \right] K(\varphi), \quad (\text{E2})$$

donde $I_{1,2}(r)$ son las integrales sobre r , $J_{1,2}(\theta)$ las integrales en θ y $K(\varphi)$ es la integral en φ . Dado que $K(\varphi)$ es común a los dos términos que aparecen en (E2), hagamos tal integral primero, tenemos:

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos[m(\varphi - \varphi')] \hat{\varphi}' \\ &= \left[\cos(m\varphi) \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos(m\varphi') c(\varphi') + \sin(m\varphi) \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi') \cos(\varphi') \right] \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad - \left[\cos(m\varphi) \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos(m\varphi') \sin(\varphi') + \sin(m\varphi) \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin(m\varphi') \sin(\varphi') \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \left[-\sin(m\varphi) \hat{\mathbf{x}} + \cos(m\varphi) \hat{\mathbf{y}} \right] \pi \delta_{m1} = \hat{\varphi} \pi \delta_{m1}. \end{aligned} \quad (\text{E3})$$

donde hemos utilizado las relaciones de ortogonalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) = \pi \delta_{nm}, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \sin(n\varphi) = 0.$$

Vemos aquí que aparece un término δ_{m1} , por lo cual, la suma sobre m que aparece en la ecuación (E2) se colapsará a $m = 1$, así, en las integrales restantes se tomará esto en consideración. Ahora, la integral en θ se tiene que hacer para dos términos, el primero es:

$$\begin{aligned} J_1(\theta) &= \int_0^\pi d\theta' \Theta(\theta - \theta_1) \Theta(\theta_2 - \theta) P_l^1(\cos \theta') = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta' \left[- (1 - \cos^2 \theta')^{1/2} \frac{d}{d(\cos \theta')} P_l(\cos \theta') \right] \\ &= - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta' \sin \theta' \frac{d}{d(\cos \theta')} P_l(\cos \theta') = P_l(\cos \theta_2) - P_l(\cos \theta_1) \end{aligned} \quad (\text{E4})$$

y el segundo

$$\begin{aligned} J_2(\theta) &= \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \frac{d}{d\theta'} \left[\frac{\delta(\theta' - \theta_1) - \delta(\theta' - \theta_2)}{\sin \theta'} \right] P_l^1(\cos \theta') \\ &= P_l(\cos \theta) \left[\delta(\theta - \theta_1) - \delta(\theta - \theta_2) \right] \Big|_0^\pi - \int_0^\pi d\theta' \frac{\delta(\theta' - \theta_1) - \delta(\theta' - \theta_2)}{\sin \theta'} \frac{d}{d\theta'} \left[\sin \theta' P_l^1(\cos \theta') \right] \\ &= l(l+1) \left[P_l(\cos \theta_2) - P_l(\cos \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{E5})$$

El primero término de las integrales en r viene dado por:

$$I_1(r) = \int_0^\infty dr' r' \frac{d}{dr'} \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] j_l(kr_<) h_l(kr_>), \quad (\text{E6})$$

donde $r_< = \min\{r, r'\}$ y $r_> = \max\{r, r'\}$ toman distintos valores dependiendo de la región en que se evalúa el campo. Entonces (E6) tendrá que ser resuelto para cada región del espacio, en $r < a$ tenemos:

$$\begin{aligned} I_1(r < a) &= j_l(kr) \int_0^\infty dr' r' \frac{d}{dr'} \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] h_l(kr') \\ &= r j_l(kr) h_l(kr) \left[\delta(r - b) - \delta(r - a) \right] \Big|_0^\infty - j_l(kr) \int_0^\infty dr' \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] \frac{d}{dr'} \left[r' h_l(kr') \right] \\ &= -j_l(kr) \frac{d}{dr} \left[r h_l(kr) \right] \Big|_a^b, \end{aligned} \quad (\text{E7})$$

en $b < r$:

$$\begin{aligned}
I_1(b < r) &= h_l(kr) \int_0^\infty dr' r' \frac{d}{dr'} \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] j_l(kr') \\
&= r j_l(kr) h_l(kr) \left[\delta(r - b) - \delta(r - a) \right] \Big|_0^\infty - h_l(kr) \int_0^\infty dr' \left[\delta(r' - b) - \delta(r' - a) \right] \frac{d}{dr'} \left[r' j_l(kr') \right] \\
&= -h_l(kr) \frac{d}{dr} \left[r j_l(kr) \right] \Big|_a^b
\end{aligned} \tag{E8}$$

y finalmente en $a < r < b$:

$$I_1(a < r < b) = -\frac{d}{dr} \left[r h_l(kr) \right] \Big|_{r=b} j_l(kr) + \frac{d}{dr} \left[r j_l(kr) \right] \Big|_{r=a} h_l(kr). \tag{E9}$$

Ahora, el segundo término de la integral en r está dado por:

$$I_2(r) = \int_0^\infty \frac{dr'}{r'} j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) \Theta(r' - a) \Theta(b - r') = \int_a^b \frac{dr'}{r'} j_l(kr_{<}) h_l(kr_{>}) \tag{E10}$$

y vemos que también tendrá que ser resuelto para cada región, entonces, en $r < a$:

$$I_2(r < a) = j_l(kr) \int_a^b \frac{dr'}{r'} h_l(kr'), \tag{E9}$$

en $b < r$:

$$I_2(b < r) = h_l(kr) \int_a^b \frac{dr'}{r'} j_l(kr') \tag{E10}$$

y finalmente en $a < r < b$:

$$I_2(a < r < b) = j_l(kr) \int_a^b \frac{dr'}{r'} h_l(kr') + h_l(kr) \int_a^b \frac{dr'}{r'} j_l(kr'). \tag{E11}$$

Ya podemos introducir (E3-E11) en (E2) para obtener la solución completa del campo magnético:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{NI}{c} 4\pi i k \hat{\varphi} \sum_{l=1}^{\infty} N_{l1}^2 P_l^1(\cos \theta) \left[P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2) \right] \\
& \times \begin{cases} -k^2 \int_a^b dr' r' h_l(kr') j_l(kr), & r < a \\ \left\{ \left[\frac{d}{dr}(r j_l(kr)) - k^2 \int_a^r dr' r' j_l(kr') \right] h_l(kr) \right. \\ \left. - \left[\frac{d}{dr}(r h_l(kr)) + k^2 \int_r^b dr' r' h_l(kr') \right] j_l(kr) \right\}, & a < r < b \\ -k^2 \int_a^b dr' r' j_l(kr') h_l(kr), & b < r, \end{cases} \quad (\text{E12})
\end{aligned}$$

F Integración de la función de Heaviside

El objetivo de este apéndice es reescribir la siguiente ecuación en términos de funciones de Heaviside:

$$\mathbf{B}(a < r < b) = \frac{NI}{cr} \hat{\varphi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} P_l^1(\cos \theta) [P_l(\cos \theta_1) - P_l(\cos \theta_2)], \quad (\text{F1})$$

para conseguir ésto utilizaremos la relación de completitud de los polinomios de Legendre de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Theta(\theta - \theta_i) = & \int_0^\theta \delta(\theta' - \theta_i) d\theta' = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \int_0^\theta \sin \theta' P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta_i) d\theta' \\
& - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \theta_i) \left[- \int_0^\theta P_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right]. \quad (\text{F2})
\end{aligned}$$

Para continuar resolvamos la integral que aparece entre corchetes en esta última ecuación, tomamos el cambio de variable $x = \cos \theta$:

$$I(x) = \int_x^1 P_l(x') dx' = \frac{1}{2l+1} \left[P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x) \right], \quad (\text{F3})$$

donde hemos utilizando la identidad:

$$P_l(x) = \frac{1}{2l+1} \frac{d}{dx} \left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x) \right] \quad (\text{F4})$$

y que $P_n(1) = 1$. Ahora reescribamos la cantidad $P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)$ haciendo uso de la identidad anterior, de acuerdo a la cual se cumplen las relaciones $(2l-1)P_{l-1}(x) = P'_l - P'_{l-2}(x)$ y $(2l+3)P_{l+1}(x) = P'_{l+2}(x) - P'_l(x)$, donde los términos primados denotan su derivación respecto a x . Entonces obtenemos:

$$P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x) = \frac{2(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)} P'_l(x) - \frac{1}{2l-1} P'_{l-2}(x) - \frac{1}{2l+3} P'_{l+2}(x), \quad (\text{F5})$$

esta expresión se puede simplificar por medio de la definición de los polinomios asociados de Legendre:

$$P_l^m = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (\text{F6})$$

en este caso tomamos $m = 1$ de esta ecuación para poder hacer uso de la relación $P_l^1(x) = -(1-x^2)^{1/2} P'_l(x)$. Entonces reescribimos (F5) de la siguiente manera:

$$P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x) = \frac{-1}{(1-x^2)^{1/2} (2l-1)(2l+3)} \left[2(2l+1)P_l^1(x) - (2l+3)P_{l-2}^1(x) - (2l-1)P_{l+2}^1(x) \right] \quad (\text{F7})$$

y ahora haciendo uso de la relación de recurrencia:

$$lP_{l+1}^1(x) - (2l+1)xP_l^1(x) + (l+1)P_{l-1}^1(x) = 0, \quad (\text{F8})$$

de acuerdo a la cual también se cumplen las relaciones $(l+1)P_{l+2}^1 - (2l+3)xP_{l+1}^1 + (l+2)P_l^1 = 0$ y $(l-1)P_l^1 - (2l-1)xP_{l-1}^1 + lP_{l-2}^1 = 0$, podemos reescribir (F7) como:

$$\begin{aligned} P_{l-1} - P_{l+1} &= \frac{-1}{(1-x^2)^{1/2} (2l-1)(2l+3)} \left\{ 2(2l+1)P_l^1 \right. \\ &\quad \left. - (2l+3) \left[\frac{(2l-1)xP_{l-1}^1 - (l-1)P_l^1}{l} \right] - (2l-1) \left[\frac{(2l+3)xP_{l+1}^1 - (l+2)P_l^1}{(l+1)} \right] \right\} \\ &= -\frac{2l+1}{l(l+1)} (1-x^2)^{1/2} P_l^1, \end{aligned} \quad (\text{F9})$$

donde hemos omitido la dependencia de x de los polinomios de Legendre para simplificar la

notación. Ya podemos reintroducir (F9) en (F3) para obtener la integral:

$$I(x) = -\frac{1}{l(l+1)}(1-x^2)^{1/2}P_l^1(x) \quad (\text{F10})$$

y finalmente, volviendo a la variable original, podemos sustituir esta ecuación en (F2) para obtener:

$$\Theta(\theta - \theta_i) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2l(l+1)} \sin \theta P_l^1(\cos \theta) P_l(\cos \theta_i), \quad (\text{F11})$$

puede descartarse el término $m = 0$ de la suma en esta ecuación porque $P_0^1(\cos \theta) = 0$. Entonces, con esta ecuación es fácil ver que (F1) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{B}(a < r < b) = \frac{2NI}{cr \sin \theta} \left[\Theta(\theta - \theta_2) - \Theta(\theta - \theta_1) \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (\text{F12})$$

Bibliografía

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition (1962) (New York: John Wiley).
- [2] W. Greiner, D. A. Broomley *Classical Electrodynamics*, First Edition (1998), p. 70.
- [3] V. M. Dubovik, L. A. Tosunyan, *Toroidal moments in the physics of electromagnetic and weak interactions*, Sov. J. Part. Nucl. **14** (1983), pp. 504-519.
- [4] N. Papasimakis *et. al.*, *Gyrotropy of a metamolecule: wire on a torus*, Phys. Rev. Lett. **103** (2009), 093901.
- [5] T. Kaelberer *et. al.*, *Toroidal dipolar response in a metamaterial*, Science **330** (2010), p. 1510.
- [6] V. Savinov *et. al.*, *Toroidal dipolar excitation and macroscopic electromagnetic properties of metamaterials*, Phys. Rev. A. **89** (2014).
- [7] V. A. Fedotov, *et. al.*, *Resonant Transparency and Non-Trivial Non-Radiating Excitations in Toroidal Metamaterials*, Sci. Rep. **3**, 2967 (2013).
- [8] N. Papasimakis *et. al.*, *Electromagnetic toroidal excitations in matter and free space*, Science **15** (2016).
- [9] J. C. Maxwell, *On physical lines of force*, The Scientific Papers **1** (1927), p. 477.
- [10] V. F. Mitkevich, *Magnetic Flux and its Transformations*, (1946) (Moscow: USSR Academy of Sciences).
- [11] C. H. Page *On the External Magnetic Field of a Closed-Loop Core*, Am. J. Phys. **39** (1971), p. 1206.
- [12] I. B. Zel'dovich, *Electromagnetic interaction with parity violation*, J. Exptl. Theoret. Phys. **33** (1957), p. 1531.

- [13] V. M. Dubovik, A. A. Cheshkov, *Form factors and multipoles in electromagnetic interactions*, Sov. Phys. JETP **24** (1967), pp. 924–926.
- [14] J. Van-Bladel, *Hierarchy of terms in a multipole expansion*, Electron. Lett. **24** (1988), pp. 492–493.
- [15] G. N. Afanasiev and Y. P. Stepanovsky, *The electromagnetic field of elementary time-dependent toroidal sources*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), pp. 4565–4580.
- [16] G. N. Afanasiev and V. M. Dubovik, *Some remarkable charge-current configurations*, Phys. Part. Nuclei **29** (1998), pp. 366–391.
- [17] V. M. Dubovik, M. A. Martsenyuk, B. Saha, *Material equations for electromagnetism with toroidal polarizations*, Phys. Rev. E **61** (2000), p. 7087.
- [18] E. E. Radescu, G. Vaman, *Exact calculation of the angular momentum loss, recoil force, and radiation intensity for an arbitrary source in terms of electric, magnetic, and toroid multipoles*, Phys. Rev. E **65** (2002), 046609.
- [19] A. E. Miroshnichenko, *et. al.*, *Seeing the unseen: observation of an anapole with dielectric nanoparticles*, arXiv:1412.0299 [physics.optics] (2014).
- [20] W. Liu, J. Zhang *et. al.*, *Invisible nanowires with interfering electric and toroidal dipoles*, arXiv:1502.02205 [physics.optics] (2015).
- [21] S. Nanz *Toroidal multipole moments in classical electrodynamics*, First Edition (2016), p. 2.
- [22] V. M. Dubovik *et. al.*, *Axial toroidal moments in electrodynamics and solid-state physics*, Sov. Phys. JETP **63** (1986), pp. 344–351.
- [23] C. G. Gray, *Multipole expansions of electromagnetic fields using Debye potentials*, Am. J. Phys. **46** (1978), p. 169.
- [24] T. A. Gongora, E. Ley-Koo, *Complete electromagnetic multipole expansion including toroidal moments* Rev. Mex. Fis. **E 52** (2006), pp. 188–197.
- [25] P. Coppens, *Electron density from X-Ray diffraction*, Annu. Rev. Phys. Chem. **43** (1992), p. 669.

- [26] G. N. Afanasiev, Y. P. Stepanovsky, *Electromagnetic Fields of Electric, Magnetic, and Toroidal Dipoles Moving in Medium*, Physica Scripta **61** (2000), p. 704.
- [27] K. Marinov *et. al.*, *Toroidal metamaterial*, New J. Phys. **9** (2007), p. 324.
- [28] G. B. Arfken, H. J. Weber *Mathematical methods for physicists*, Sixth edition (2005), p. 797.
- [29] C. G. Gray, B. G. Nickel, *Debye potential representation of vector fields*, Am. J. Phys. **76** (1978), pp. 735-736.
- [30] I. Fernandez-Corbaton *et. al.*, *On dynamic toroidal multipoles*, arXiv:1507.00755 (2015).