

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería

Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería



ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS MECÁNICOS BASADA EN EL CONTROL EQUIVALENTE

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO
EN CIENCIAS, presenta:

Karla Dennise Espinoza Carballo
Asesor: Dr. David Isaías Rosas Almeida

Mexicali, Baja California, México, Agosto de 2018

Dedicado a mi familia y amigos que me impulsan a ser mejor profesional y mejor persona, y en especial a todos los ciudadanos que hacen cada día de México un mejor país.

Agradecimientos

Al Dr. David Isaías Rosas Almeida, por su acertada dirección en este proyecto de investigación, y sobre todo por su valiosa orientación, consejos y amistad.

A la Dra. Karla Isabel Velázquez Victorica y al Dr. Joaquín Álvarez Gallegos, por sus valiosos comentarios y disponibilidad.

Al programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, por su esfuerzo en brindar herramientas para la generación de nuevo conocimiento para la comunidad en general.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo económico en la realización de este proyecto.

RESUMEN de la tesis de **Karla Dennise Espinoza Carballo**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS.

Mexicali, Baja California, México. Agosto de 2018.

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN SISTEMAS MECÁNICOS BASADA EN EL CONTROL EQUIVALENTE

Resumen aprobado por:

Dr. David Isaías Rosas Almeida
Director de Tesis

Se aplican dos procedimientos para identificación de sistemas en sistemas mecánicos lagrangianos, con la finalidad de estimar los valores numéricos de los parámetros que constituyen el modelo matemático. El objetivo es comprobar la eficiencia de estos dos procedimientos, ya probados en la teoría y simulación numérica, en sistemas lagrangianos físicos de 1 grado de libertad (1GDL).

El primer método de identificación emplea mínimos cuadrados recursivos para estimar las variaciones paramétricas a través del control equivalente, para el cual se propone una metodología para su implementación. Además, para completar el vector de estado se propone el uso de un observador robusto para sistemas lagrangianos que garantiza convergencia exponencial al estado de la planta a pesar de la existencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. Por medio de este observador es posible estimar el control equivalente filtrando el término discontinuo a través de un filtro pasabajas de segundo orden.

El segundo es un método de identificación directa que estima el valor completo de los coeficientes paramétricos, cuyo algoritmo original requiere del vector de estado completo para su implementación, por lo que el algoritmo original sólo puede ser probado en simulación numérica. A este método se le han realizado dos modificaciones que incluyen un observador robusto para sistemas lagrangianos, que garantiza convergencia exponencial, para su implementación experimental.

Las pruebas de ambos métodos primero son realizadas en simulación numérica para después implementarse en el sistema mecánico y realizar las pruebas experimentales. Los resultados de los dos métodos son presentados en cada capítulo correspondiente.

Palabras clave: identificación de sistemas, sistemas lagrangianos, control equivalente.

ABSTRACT of the thesis presented by **Karla Dennise Espinoza Carballo** as a partial requirement to obtain the MASTER OF SCIENCE degree.

Mexicali, Baja California, Mexico. August 2018.

ESTIMATION OF PARAMETERS IN MECHANICAL SYSTEMS BASED ON EQUIVALENT CONTROL

Abstract approved by:

Dr. David Isaías Rosas Almeida
Thesis director

Two procedures are applied for systems identification in Lagrangian mechanical systems, with the purpose of estimating the numerical values of the parameters that establish the mathematical model. The objective is to verify the efficiency of these two procedures, already tested in numerical theory and simulation, in physical Lagrangian systems of 1 degree of freedom (1DOF).

The first identification method uses recursive least-squares to estimate the parametric variations through the equivalent control, for which a methodology for its implementation is proposed. In addition, to complete the state vector, the use of a robust observer for Lagrangian systems is proposed, which guarantees exponential convergence to the state of the plant despite the existence of parametric uncertainties and external perturbations. By means of this observer it is possible to estimate the equivalent control by filtering the discontinuous term through a second-order low-pass filter.

The second is a direct identification method that estimates the full value of the parametric coefficients, whose original algorithm requires the complete state vector for its implementation, so the original algorithm can only be tested in numerical simulation. This method has been adjusted with two modifications that include a robust observer for Lagrangian systems, which guarantees exponential convergence, for its experimental implementation.

The tests of both methods are first performed in numerical simulation and then implemented in the mechanical system and performed the experimental tests. The results of the two methods are presented in each corresponding chapter.

Keywords: systems identification, Lagrangians systems, equivalent control.

Contenido

INTRODUCCIÓN	1
1 ANTECEDENTES	6
1.1 Definición de sistemas dinámicos	6
1.1.1 Existencia y unicidad de soluciones	8
1.1.2 Estabilidad de puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov	12
1.1.2.1 Método directo de Lyapunov	13
1.2 Modos deslizantes	15
1.2.1 Modos deslizantes de primer orden	15
1.2.2 Modos deslizantes de alto orden	17
1.3 Identificación de sistemas	18
1.3.1 Estimación de parámetros	19
1.3.2 Identificación de sistemas	21
1.3.2.1 Selección de la señal de entrada	22
1.4 Modelo de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de Lagrange	24
1.4.1 Propiedad de linealidad en los parámetros de los sistemas mecánicos	25
2 DISEÑO DE UN OBSERVADOR ROBUSTO PARA SISTEMAS LAGRANGIANOS DE N GDL	28

2.1	Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable	29
2.2	Diseño del observador de estado para sistemas mecánicos de n GDL	31
2.3	Diseño de un observador de estado para un sistema masa resorte amortiguador	34
2.3.1	Desempeño numérico del observador	36
2.3.2	Desempeño experimental del observador	40
3	METODOLOGÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE VARIACIONES PARAMÉTRICAS UTILIZANDO EL CONTROL EQUIVALENTE Y MÍNIMOS CUADRADOS	52
3.1	Regresión lineal y estimación de parámetros a través del control equivalente	54
3.2	Estimación de parámetros en un mecanismo masa resorte amortiguador	57
3.2.1	Definición del modelo de la planta	58
3.2.2	Diseño de un observador de estado para estimación de perturbaciones	59
3.2.3	Identificación de parámetros	60
3.2.3.1	Paso 1: Resultados numéricos bajo condiciones ideales ...	61
3.2.3.2	Paso 2: Resultados numéricos bajo condiciones no ideales	62
3.2.3.3	Paso 3: Resultados experimentales	69
3.3	Metodología propuesta para estimar parámetros en sistemas mecánicos en base al control equivalente y mínimos cuadrados	75
4	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS UTILIZANDO EL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DIRECTA BASADO EN VSS	80

4.1	Descripción del algoritmo original	81
4.1.1	Algoritmo de identificación directo	83
4.1.2	Aplicación del método de identificación directo a un masa resorte amortiguador.....	89
4.1.2.1	Resultados numéricos	93
4.2	Algoritmo del método de identificación directo con observador discontinuo	95
4.2.1	Aplicación del método de identificación directa con observador discontinuo a un masa resorte amortiguador	95
4.2.1.1	Resultados numéricos	96
4.3	Algoritmo del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo	98
4.3.1	Descripción de la modificación.....	98
4.3.2	Observador discontinuo.....	99
4.3.3	Aplicación del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo a un masa resorte amortiguador.....	101
4.3.3.1	Resultados numéricos	101
4.4	Resultados experimentales	103
4.4.1	Algoritmo del método de identificación directo con observador discontinuo	104
4.4.2	Algoritmo del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo	107
5	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	112
5.1	Trabajo futuro	114

REFERENCIAS	116
--------------------------	------------

Lista de Figuras

Figura 1	Retrato de fase del sistema péndulo simple.	8
Figura 2	Soluciones que cruzan la superficie S	11
Figura 3	Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S	12
Figura 4	Ilustración de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.	13
Figura 5	Ilustración de inestabilidad de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.	14
Figura 6	Ilustración de estabilidad asintótica de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.	15
Figura 7	Función radialmente desacotada $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$	16
Figura 8	Superficie atrayente de medida cero en el sentido de Lebesgue.	17
Figura 9	Representación señales de entrada, salida y perturbaciones de un sistema.	19
Figura 10	Algoritmo para la identificación de sistemas descrito por [10].	22

Figura 11	Desempeño numérico del observador diseñado sin perturbaciones externas.	37
Figura 12	Desempeño numérico del observador de estado con perturbación agregada.	38
Figura 13	Error del observador de estado numérico con perturbación agregada.	39
Figura 14	Velocidad estimada numéricamente con perturbación externa.	40
Figura 15	Perturbación estimada en simulación numérica.	41
Figura 16	Desempeño del observador numérico con perturbación senoidal anexada.	42
Figura 17	Error de estimación del observador con la perturbación senoidal externa.	43
Figura 18	Velocidad estimada con perturbación senoidal externa sumada.	44
Figura 19	Perturbación estimada con señal senoidal externa.	45
Figura 20	Desempeño experimental del observador de estado, sin perturbación agregada.	45
Figura 21	Error del observador de estado experimental sin perturbación anexda.	46
Figura 22	Velocidad estimada experimentalmente.	46

Figura 23	Perturbación estimada en experimentación, sin perturbación externa agregada.	47
Figura 24	Desempeño experimental del observador de estado con perturbación externa agregada.	47
Figura 25	Error de estimación experimental con perturbación senoidal anexada.	48
Figura 26	Velocidad estimada con perturbación de puslos cuadrados externa.	48
Figura 27	Perturbación estimada con señal de puslos cuadrados externa agregada.	49
Figura 28	Desempeño experimental del observador de estado con perturbación senoidal externa.	49
Figura 29	Error de la estimación del observador experimental con señal de perturbación senoidal externa.	50
Figura 30	Velocidad estimada experimentalmente con señal senoidal externa.	50
Figura 31	Perturbación experimental con señal senoidal externa como perturbación.	51
Figura 32	Mecanismo masa resorte amortiguador (MRA).	57
Figura 33	Comparación de la velocidad y perturbaciones estimadas con las reales.	62
Figura 34	Comparación entre las señales de perturbación y velocidad originales con sus versiones estimadas procesadas.	63

Figura 35	Iteración numérica 1. Parámetros de la planta en el observador $a = -174,2$, $b = -12,57$ y $c = 2,567$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 34,62$, $\tilde{\Delta}_b = 3,925$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,04298$	65
Figura 36	Iteración numérica 2. Parámetros de la planta en el observador $a = -139,58$, $b = -8,645$ y $c = 2,60998$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -18,34$, $\tilde{\Delta}_b = -1,223$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,324$	66
Figura 37	Iteración numérica 3. Parámetros de la planta en el observador $a = -157,92$, $b = -9,868$ y $c = 2,93398$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -5,214$, $\tilde{\Delta}_b = -0,5432$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,1078$	66
Figura 38	Iteración numérica 4. Parámetros de la planta en el observador $a = -163,134$, $b = -10,4112$ y $c = 3,04178$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -0,9983$, $\tilde{\Delta}_b = -0,1369$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,02287$	67
Figura 39	Iteración numérica 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -164,132$, $b = -10,5481$ y $c = 3,06465$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -0,09615$, $\tilde{\Delta}_b = -0,02213$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,002804$	67
Figura 40	Simulación con los resultados de la Iteración numérica 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -164,228$, $b = -10,5702$ y $c = 3,067454$	68
Figura 41	Evolución de la potencia del control equivalente para cada iteración numérica.	70
Figura 42	Resultados numéricos. Control equivalente u_{eq} en la primera iteración, gráfica en negro, y en la iteración donde se obtiene la mínima potencia $P(u_{eq})$, gráfica en rojo.	70
Figura 43	Iteración experimental 1. Parámetros de la planta en el observador $a = -174,2$, $b = -12,57$ y $c = 2,567$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 23,37$, $\tilde{\Delta}_b = 1,905$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,1532$	71

Figura 44	Iteración experimental 2. Parámetros de la planta en el observador $a = -150,83$, $b = -10,665$ y $c = 2,4138$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 8,006$, $\tilde{\Delta}_b = 0,4031$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,1021$	72
Figura 45	Iteración experimental 3. Parámetros de la planta en el observador $a = -142,824$, $b = -10,2619$ y $c = 2,3117$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 1,405$, $\tilde{\Delta}_b = 0,2873$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,03633$	72
Figura 46	Iteración experimental 4. Parámetros de la planta en el observador $a = -141,419$, $b = -9,9746$ y $c = 2,27537$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 1,016$, $\tilde{\Delta}_b = -0,03397$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,02611$	73
Figura 47	Iteración experimental 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -140,403$, $b = -10,0086$ y $c = 2,24926$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 0,7716$, $\tilde{\Delta}_b = 0,0786$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,01672$	73
Figura 48	Iteración experimental 6. Parámetros de la planta en el observador $a = -139,631$, $b = -9,92997$ y $c = 2,23254$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -8,961$, $\tilde{\Delta}_b = -0,1372$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,1422$	74
Figura 49	Simulación con los resultados de la Iteración numérica 6. Parámetros de la planta en el observador $a = -148,592$, $b = -10,0672$ y $c = 2,37474$	75
Figura 50	Evolución de la potencia del control equivalente para cada iteración numérica.	76
Figura 51	Resultados experimentales. Control equivalente u_{eq} en la primera iteración, gráfica en negro, y en la iteración donde se obtiene la mínima potencia $P(u_{eq})$, gráfica en rojo.	76
Figura 52	Esquema de conexión de la planta, el observador de estado y filtro.	78

Figura 53	Señales de posición x_1 , velocidad x_2 y señal de entrada u del sistema MRA numérico.	94
Figura 54	Tiempo de convergencia en la estimación de los coeficientes respecto a los valores reales. Algoritmo original de identificación directa.	96
Figura 55	Señales de salida x_1 respecto a la salida estimada $\hat{x}_1$. Y señal de referencia v	97
Figura 56	Señal de velocidad x_2 respecto a la velocidad estimada $\hat{x}_2$. Y señal de error del observador e_1	98
Figura 57	Convergencia de los coeficientes estimados respecto a los valores reales establecidos en simulación.	100
Figura 58	Salida medida y en comparación con la salida estimada $\hat{y}$. Señal de referencia u	102
Figura 59	Señal de velocidad medida x_2 en comparación con la velocidad estimada $\hat{x}_2$. Señal de error del observador e_1	103
Figura 60	Convergencia de los coeficientes estimados respecto a los coeficientes establecidos en simulación.	105
Figura 61	Señales de posición x_1 , velocidad estimada $\hat{x}_2$ y señal de entrada u del sistema mecánico MRA.	106
Figura 62	Convergencia de los coeficientes estimados respecto a un valor constante en prueba experimental.	108
Figura 63	Perturbación estimada con los valores de los coeficientes estimados con el método directo de identificación con el observador robusto para estimar $\hat{x}_2$	109

Figura 64	Señales de posición x_1 , velocidad estimada $\hat{x}_2$ y señal de entrada u del sistema mecánico MRA.	109
Figura 65	Convergencia de los coeficientes estimados respecto a un valor constante en prueba experimental.	110
Figura 66	Perturbación estimada con los valores de los coeficientes estimados con el método directo de identificación con el observador robusto para estimar $\hat{\alpha}(t)$ y $\hat{x}_2$	111

Lista de Tablas

Tabla 1	Resultados de la estimación de variaciones paramétricas en 6 iteraciones.	69
Tabla 2	Resultados experimentales de la identificación de variaciones paramétricas.	77
Tabla 3	Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa.	95
Tabla 4	Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ modificada.	99
Tabla 5	Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ y $\hat{\alpha}(t)$ modificada.	104
Tabla 6	Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ modificada.	107
Tabla 7	Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ y $\hat{\alpha}(t)$ modificada.	110
Tabla 8	Comparación de los coeficientes estimados por los distintos métodos aplicados experimentalmente.	110
Tabla 9	Potencia del control equivalente u_{eq} obtenido a partir de los distintos métodos de estimación de coeficientes o variaciones paramétricas.	114

Introducción

La ingeniería de control es un área multidisciplinaria que involucra diversos temas de la ciencia y, en la actualidad, su aplicación es crítica para el funcionamiento de la tecnología moderna [1]. Gran cantidad de procesos industriales requieren controlarse para asegurar que funcionen de manera segura y eficiente [2]. En el área de ingeniería, por ejemplo, los sistemas de control se aplican a sistemas aeronáuticos, electrónicos, mecánicos y electromecánicos.

El modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema a controlar, juega un papel importante en el diseño de sistemas de control [2]. Sin embargo, en la práctica se observan diferencias entre la planta real y el modelo matemático desarrollado para el diseño del sistema de control [3], ya sea por dinámicas no modeladas, la presencia de perturbaciones externas, variaciones en los valores paramétricos del sistema o inclusive todas la anteriores. Todo esto afecta el desempeño del sistema de control, así como otros factores, como falta de robustez del controlador y su inadecuada sintonización.

En particular, para sistemas mecánicos, se han desarrollado diferentes propuestas que ofrecen alternativas para mejorar el desempeño de los sistemas de control en lazo cerrado abordando algunos de los puntos antes mencionados. Por ejemplo, el control adaptable tiene como estrategia hacer una actualización, en tiempo real, de los parámetros de la planta y de esta forma actualizar los parámetros del controlador [4].

Otro algoritmo de control importante es el control por modos deslizantes, el cual es un controlador robusto que puede hacer frente a las incertidumbres en los parámetros, a perturbaciones externas y a ciertas dinámicas no modeladas de la planta [3] [5]. A simple vista, esta teoría de control es atractiva y resuelve muchos problemas que otras teorías no abordan con la misma eficiencia. Sin embargo, debido a las discontinuidades que incorpora y a las no idealidades de los sistemas en donde se implementa, genera el fenómeno conocido co-

mo *chattering*, traducido en fuertes vibraciones en el vector de estado debido a la frecuencia de conmutación finita en el control, produciendo vibraciones en los sistemas mecánicos y, en el caso donde los actuadores son motores eléctricos, estas vibraciones producen sobrecalentamiento provocando además que a largo plazo se disminuya la vida funcional del sistema [5].

Para resolver este problema se han propuesto diferentes alternativas como suavizamiento de los términos discontinuos [5], así como la creación de los modos deslizantes de alto orden [6] [7]. Otra propuesta relevante es la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, conocida como ADRC por sus siglas en inglés, la cual incorpora observadores de estado que estiman las perturbaciones en el sistema para su compensación. En teoría el sistema en lazo cerrado tiene las mismas propiedades de robustez que los sistemas de control basados en control por modos deslizantes pero con una señal de control suave. En la práctica, el error en el objetivo de control depende de la exactitud de la estimación de las perturbaciones [8].

Sin embargo, para disminuir la carga al controlador, es decir, requerir de menores ganancias en los términos que hacen frente a las perturbaciones, como los términos discontinuos, es muy útil conocer con mayor grado de exactitud el modelo de la planta. En la práctica, esto es de gran ayuda, ya que además se disminuye el riesgo de excitar dinámicas no modeladas o de generar vibraciones en la planta, como lo hacen las ganancias altas en los términos discontinuos. Una forma de tener un mejor modelo, es realizar un proceso de identificación de sistemas para estimar el valor de los parámetros de la planta.

El primer paso para el diseño de un sistema de control es la definición del modelo de la planta, que para sistemas mecánicos es común utilizar las ecuaciones de movimiento de Lagrange, debido a las propiedades de cada uno de los términos que ayudan al diseño de controladores y a demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado [9]. Una vez definidas las ecuaciones que describen a la planta, se observan diferentes parámetros, como masas, longitudes, momentos de inercia, coeficientes de fricción, etc., de los que se requiere conocer

sus valores para poder implementar el controlador deseado. Un siguiente paso es conocer los valores de este conjunto de parámetros aplicando algoritmos mediante la identificación de sistemas, el cual realiza una estimación de los parámetros de la planta basados en datos experimentales a partir de la observación de las señales de entrada y de salida de la planta por un periodo de tiempo.

Existen muchos métodos para hacer estas estimaciones, desde el más básico basado en mínimos cuadrados [10], hasta algunos más complejos basados en el control equivalente que se presenta en sistemas con modos deslizantes [8] [11]. También hay algoritmos para identificación de sistemas comerciales, como los algoritmos empleados en la Paquetería de Herramientas para Identificación de Sistemas, *System Identification Toolbox* por su nombre en inglés, del software de Matlab[®], en donde se ofrece un conjunto de funciones que permiten la identificación de sistemas lineales, ya sea en el formato de función de transferencia y variables de estado, y también para algunas estructuras no lineales [13]. Sin embargo, el problema no está completamente resuelto y en la actualidad se siguen buscando métodos más eficientes que permitan la estimación de parámetros con mayor exactitud [8] [11] [12].

En este trabajo de tesis se aborda el problema de identificación de parámetros basada en el control equivalente. En particular, se analizan dos propuestas; la primer técnica es una metodología recursiva basada en mínimos cuadrados presentada en [8] y [12]. Esta es una metodología fuera de línea que permite la identificación de incertidumbres paramétricas basada en valores nominales de los parámetros. La segunda es una metodología propuesta en [11] que se denomina como método directo de identificación. Esta metodología permite la estimación de los parámetros en tiempo real sin la necesidad de un valor nominal de éstos, aunque sí requiere tener una idea de los valores mínimos y máximos que pueden tomar los coeficientes paramétricos; sin embargo, esta técnica no es aplicable en la práctica como se propone en [11], por lo que se realizan algunas modificaciones para su implementación en el sistema mecánico físico. Ambas metodologías han mostrado un buen desempeño teórico o numérico en los trabajos en los que han sido presentadas, así como en la sección de pruebas numéricas de esta tesis; sin embargo, el punto principal de la presente es llevar estas

metodologías a su implementación práctica y evaluar su desempeño a partir de los resultados experimentales.

Esta tesis está estructurada como sigue. En el Capítulo 1 se presentan los preliminares matemáticos con los que se definen los sistemas dinámicos, se definen el modo deslizante y sus características de estabilidad, se describe el procedimiento de identificación de sistemas en términos generales propuesto por [10] y se explica el modelado matemático de sistemas mecánicos a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

En el Capítulo 2 se presenta el diseño del observador robusto para sistemas lagrangianos de n GDL propuesto en [24], se demuestra su estabilidad en el sentido de Lyapunov en forma global, se realiza el diseño de este observador para un sistema masa resorte amortiguador (MRA), probando su desempeño de manera numérica y experimental. Los resultados de su implementación se observan al final de este capítulo.

En el Capítulo 3 se explica la regresión lineal y la identificación de sistemas a través de mínimos cuadrados, se realiza el diseño de un observador robusto para el sistema mecánico MRA a través del cual se estima el término de perturbación de la planta, y se presenta una metodología para la estimación de variaciones paramétricas utilizando el control equivalente y mínimos cuadrados recursivos en sistemas lagrangianos, la cual se implementa en un MRA. Finalmente, los resultados numéricos y experimentales de la implementación de esta metodología se presentan al final de este capítulo.

En el Capítulo 4 se describe el algoritmo original del método directo de identificación, el cual como está presentado en [11], no puede ser implementado en la práctica, sin embargo ha sido probado numéricamente. Posteriormente, se explica la primera modificación para completar el vector de estado añadiendo un observador robusto para implementarlo en un MRA, y los resultados numéricos se presentan en esta sección. La segunda modificación se explica en la siguiente sección del mismo capítulo, donde además del observador robusto para estimar el vector de estado, se emplea el mismo observador robusto para sustituir el

término que estima los parámetros en tiempo real. Además, se ha realizado una modificación al código del software empleado en la ejecución de este algoritmo para disminuir los tiempos de estimación, reemplazando la ejecución en tiempo real por ejecución en un tiempo fijo cuatro veces menor. Al final de este capítulo se presentan los resultados experimentales de la implementación de ambas modificaciones del método directo.

Finalmente, en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones generadas a partir de este trabajo, el cual analiza los resultados obtenidos y sugiere trabajo futuro.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 Definición de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico en tiempo continuo puede ser representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. El sistema (1) es representado en variables de estado de un sistema dinámico, y se le conoce como un sistema autónomo o invariante en el tiempo ya que no depende explícitamente del tiempo [15].

A un sistema dinámico con la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, se le conoce como un sistema no autónomo, es decir, que depende explícitamente del tiempo, denominado también como sistema variante con el tiempo [15].

Al sistema dinámico (2) se le puede añadir una señal de control u que sea función del tiempo, función del estado o función de ambos, de la forma

$$\dot{x} = f(x, t, u). \quad (3)$$

donde $u \in \mathbb{R}^m$ es un vector de entradas, y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial, en general, no lineal.

En algunas situaciones es necesario agregar una ecuación de salida, la cual es un vector de señales medibles dado por

$$y = h(x, t, u), \quad (4)$$

donde $y \in \mathbb{R}^l$ es el vector de salidas, y $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ es una función vectorial en general, no lineal. Generalmente se puede modelar sistemas físicos de la forma representada en (2)-(3) eligiendo cuidadosamente las variables de estado.

En muchas ocasiones se trabaja con sistemas con la forma (1) en donde la entrada de control u no aparece en forma explícita, lo que puede significar que se trata de un sistema en lazo abierto o que es un sistema en lazo cerrado cuya entrada de control es una función del estado y/o del tiempo.

La representación en variables de estado de un sistema lineal está dada por

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (5)$$

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (6)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $y \in \mathbb{R}^l$ es el vector de salidas y $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ son matrices con las dimensiones adecuadas. Para sistemas lineales invariantes en el tiempo los elementos de estas matrices son constantes.

Una clase especial de los sistemas no lineales son los sistemas autónomos de segundo orden, los cuales son importantes para el estudio de sistemas no lineales ya que las trayectorias pueden ser representadas por curvas en el plano, lo que permite una visualización más sencilla del comportamiento cualitativo del sistema.

Un sistema no lineal de segundo orden tiene la forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (8)$$

que tiene una solución $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ para el estado inicial $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T$. La ubicación en el plano $x_1 - x_2$ de la solución $x(t)$ para todo $t \geq 0$ es una curva que pasa a través del punto x_0 . A esta curva se le conoce como trayectoria u órbita del sistema (7)-(8) desde x_0 . El plano $x_1 - x_2$ es conocido como el plano de estado.

El valor que puede tomar el vector de estado en el instante de tiempo t_0 se define como el estado del sistema en ese instante de tiempo t_0 , el cual se representa como un punto en el espacio de estado.

Como en las trayectorias en el espacio de estado no aparece la variable temporal, se deben de agregar flechas que indiquen el sentido en que las trayectorias evolucionan con respecto al incremento del tiempo desde el tiempo inicial [15]. Un ejemplo de un retrato de estado se muestra en la figura 1, el cual corresponde a un péndulo simple.

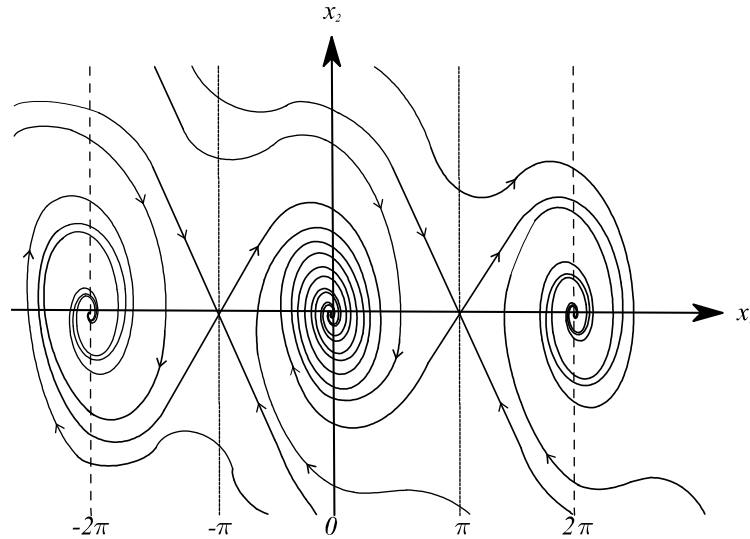


Figura 1. Retrato de fase del sistema péndulo simple.

1.1.1 Existencia y unicidad de soluciones

Una de las propiedades fundamentales de los sistemas no lineales es que las ecuaciones que lo caracterizan podrían o no tener solución. El primer paso para encontrar la solución a la ecuación diferencial (3) es averiguar si existe al menos una solución y que ésta sea única

al menos en forma local. En esta sección se describen las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, primero en el sentido usual y después la definición de soluciones en el sentido de Filipov para sistemas discontinuos.

Teorema 1. *Considerando la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$, si la función f es continua en una región acotada [4]*

$$|t - t_0| \leq T, \quad \|x - x_0\| \leq R,$$

donde T y R son estrictamente constantes positivas, entonces existe al menos una solución para $x(t)$.

El teorema anterior, denominado teorema de *Cauchy* es suficiente para establecer la existencia local de soluciones [4], pero no garantiza la unicidad de la solución. La existencia y unicidad de soluciones puede ser dada por la condición Lipschitz, que se establece en el siguiente teorema [4].

Teorema 2. *Sea $f(t, x)$ continua por tramos en t y que satisface la condición Lipschitz [15]*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, entonces existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución en el intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Ahora considere la definición de la solución la ecuación diferencial (3) en el sentido de Filipov, la cual es más amplia porque considera el campo vectorial $f(\cdot)$ continuo o discontinuo [16].

Considere el sistema (3) donde $f(\cdot)$ es continuo por tramos en un dominio G ; $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y M es un conjunto de medida cero, en el sentido de Lebesgue, de puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$.

Para cada punto (t, x) del dominio G se define un conjunto $F(t, x)$ en un espacio de dimensión n . Si en el punto (t, x) la función $f(\cdot)$ es continua, el conjunto $F(t, x)$ consiste en un punto que coincide con el valor de la función $f(\cdot)$ en este punto. Si (t, x) es un punto

de discontinuidad de la función $f(\cdot)$, el conjunto $F(t, x)$ se define de otra forma como se describe más adelante. Una solución de la ecuación (3) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (9)$$

esto es, una función vectorial $x(t)$ absolutamente continua definida en un intervalo o segmento I para el cual $\dot{x}(t) \in F(t, x)$ casi en todo punto de I .

Son de gran interés los métodos para la definición de $F(t, x)$ en los puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$ bajo los cuales la inclusión diferencial (9) puede ser utilizada para una descripción aproximada de la dinámica de un sistema físico. La siguiente definición es aplicable, en particular, a sistemas con retardo así como a algunos sistemas con fricción seca [16].

Definición 1. Para cada punto $(t, x) \in G$ el conjunto $F(t, x)$ es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contenga todos los valores límite de la función vectorial $f(t, x^*)$ para $(t, x^*) \notin M, t = \text{cte}$.

Una solución de (3) es una solución de la inclusión (9) con $F(t, x)$ así construida. En los puntos donde la función $f(\cdot)$ es continua, el conjunto $F(t, x)$ consiste del punto $f(t, x)$, y la solución satisface la ecuación (3) en el sentido usual. Si el punto $(t, x) \in M$, el conjunto $F(t, x)$ es un segmento, polígono o un poliedro.

Considere el caso donde la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave S dada por la ecuación $\psi(x) = 0$. La superficie S divide al espacio x en los dominios G^+ y G^- , la función $f(t, x^*)$ tiene los valores límite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x^* \in G^- \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^-(t, x), \\ \lim_{\substack{x^* \in G^+ \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^+(t, x), \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $F(t, x)$ puede representarse geoméricamente como un segmento lineal uniendo los puntos finales de los vectores $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$.

Si para $t_1 < t < t_2$ este segmento cae a un lado del plano P tangente a la superficie S en el punto x , la solución para este tiempo t pasa de un lado de la superficie S al otro, ver figura 2.

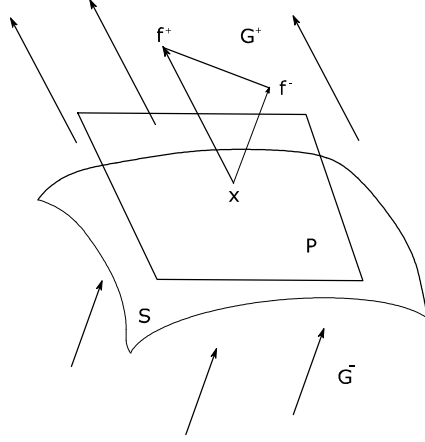


Figura 2. Soluciones que cruzan la superficie S .

Si este segmento intersecta al plano P , el punto de intersección es el punto final de un vector $f^0(t, x)$ que determina la velocidad de movimiento $\dot{x} = f^0(t, x)$ a lo largo de la superficie S en el espacio x , ver figura 3. Esto significa que la función $x(t)$ que satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(t, x),$$

es una solución de la ecuación (3) en virtud de la definición (9). Si $f^0 \neq f^+$, $f^0 \neq f^-$, a tal solución se le llama *modo deslizante*.

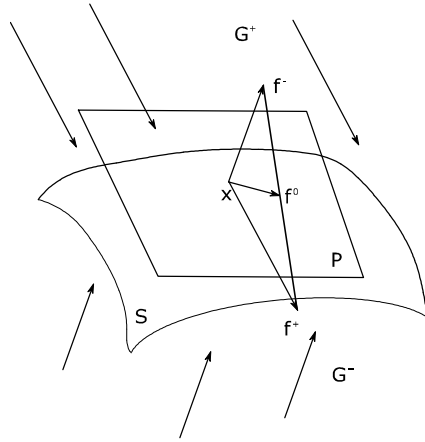


Figura 3. Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S .

1.1.2 Estabilidad de puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov

Un conjunto especial de soluciones del sistema (1) son los puntos de equilibrio $\bar{x}$. Un punto de equilibrio se puede definir como un vector constante $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, el cual es un equilibrio si

$$f(t, \bar{x}) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Esto implica que, iniciando en un punto $\bar{x}$ en el tiempo t_0 , la solución de (1) permanecerá ahí para todo $t \geq t_0$. Por simplicidad se considera que el punto de equilibrio se encuentra en el origen. Cuando el punto de equilibrio es diferente de cero, se realiza un cambio de variables para trasladar el punto al origen.

Los conceptos de estabilidad que a continuación se establecen son definidos con respecto a estos puntos de equilibrio. Considere además, para las siguientes definiciones, que el sistema (1) tiene un punto de equilibrio en el origen $\bar{x} = 0$.

Definición 2. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es estable si, para cada subconjunto $\varepsilon > 0$, existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que [9]

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

como se muestra en la figura 4.

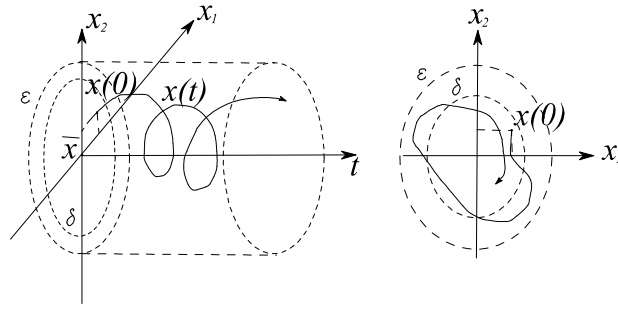


Figura 4. Ilustración de estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.

Definición 3. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es inestable si no es estable. Esto es, que existe por lo menos un ε para el cual [9]

$$\|x(t)\| > \varepsilon, \forall t \geq 0$$

como se muestra en la figura 5.

Definición 4. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es asintóticamente estable si es estable y existe un número $\delta' > 0$ de tal manera que [9]

$$\|x(0)\| < \delta' \implies \|x(t)\| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

como se muestra en la figura 6.

Definición 5. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es asintóticamente estable en forma global si es estable y es atractivo globalmente, es decir

$$\|x(t)\| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 6. El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es exponencialmente estable en forma global si es estable y existen dos números estrictamente positivos α y β tal que

$$\|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\beta(t)}, \forall t \geq 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.2.1 Método directo de Lyapunov

Un método analítico para establecer la estabilidad de un punto de equilibrio es el denominado método directo que se describe a continuación.

Teorema 3. Suponga que el origen es un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ para el sistema autónomo (1) y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que además contiene al origen. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función

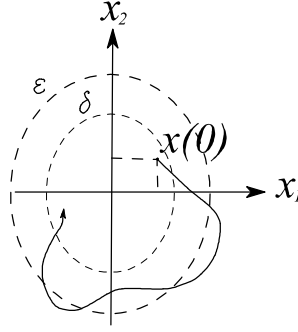


Figura 5. Ilustración de inestabilidad de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.

continuamente diferenciable tal que [15]

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}, \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \text{ en } D, \end{aligned}$$

entonces el punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es estable. Además, si

$$V(x) < 0 \text{ en } D - \{0\},$$

entonces $\bar{x} = 0$ es asintóticamente estable.

Entonces podemos decir que el origen es estable si existe una función definida positiva continuamente diferenciable $V(x)$ de tal manera que su derivada $\dot{V}(x)$ sea semidefinida negativa, y asintóticamente estable si su derivada $\dot{V}(x)$ es definida negativa.

Teorema 4. *Suponga que el origen es un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ para el sistema autónomo (1) y sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable tal que [15]*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ y } V(x) > 0, \forall x \neq 0, \\ V(x) &\rightarrow \infty \text{ cuando } \|x\| \rightarrow \infty, \\ V(x) &< 0, \forall x \neq 0, \end{aligned}$$

entonces el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable en forma global.

Si $V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, es decir, que la función $Z = V(x)$ es radialmente desacotada como se observa en el ejemplo de la figura 7, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable en forma global si éste es el único punto de equilibrio del sistema.

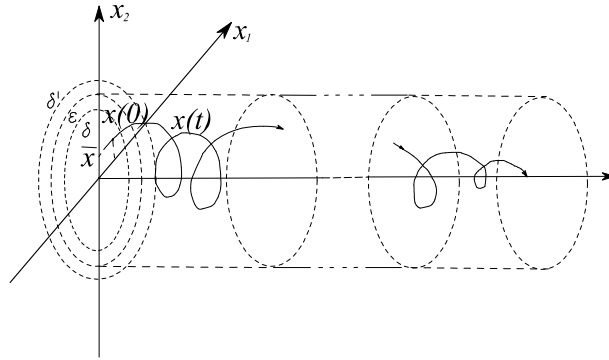


Figura 6. Ilustración de estabilidad asintótica de un punto de equilibrio de un sistema en el sentido de Lyapunov.

Es importante resaltar que una característica del teorema de estabilidad de Lyapunov es que es una condición suficiente, mas no necesaria.

1.2 Modos deslizantes

1.2.1 Modos deslizantes de primer orden

El modo deslizante es una solución para la inclusión diferencial (9), el cual puede ser visto como el movimiento de las trayectorias de estado de un sistema dentro de una superficie s después de haber convergido a ésta, como se observa en la figura 8. Este comportamiento puede ser inducido mediante la introducción de la acción de control adecuada, modificando las trayectorias del sistema para que presenten un comportamiento deseado. Estas acciones de control se refieren a control discontinuo, cuyo problema de diseño se reduce a la selección de una superficie en el espacio de estado que sea atrayente y que las trayectorias converjan a la superficie de discontinuidad en tiempo finito, y la solución no se mueva fuera de la superficie hacia otras trayectorias adyacentes como se muestra en la figura 8. El control por modo deslizante es, fundamentalmente, una consecuencia del control discontinuo [6].

Es importante remarcar que un modo deslizante existe si hay regiones de medida cero en la superficie $s(x) = 0$, donde las proyecciones del vector $f^+ = (x, t, u^+)$ y $f^- = (x, t, u^-)$ en el gradiente de la superficie son de signos opuestos y están dirigidos hacia la superficie. La

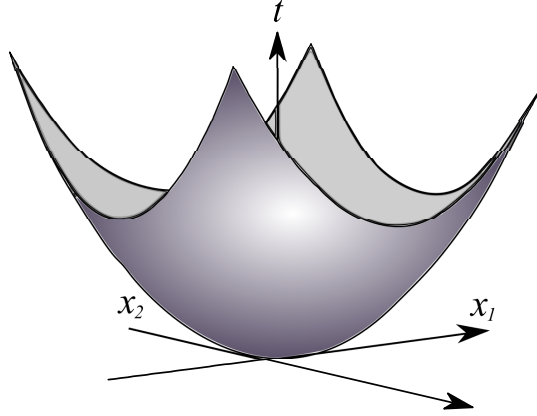


Figura 7. Función radialmente desacotada $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

condición en (10) especifica la región de deslizamiento en una superficie de discontinuidad

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} &< 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} &> 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Un vez en esta región, el punto en el espacio se mueve dentro de esta región hasta que alcanza un acotamiento. A este tipo de movimiento se le denomina como deslizamiento ideal. Además, todas las trayectorias se mantienen dentro de la superficie de discontinuidad para todo $t > 0$.

Si es posible definir una superficie de discontinuidad, de medida cero, tal que las trayectorias converjan a ella en tiempo finito, entonces es posible encontrar un control continuo tal que la derivada del vector $s(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema $f(x, u)$ sea igual a cero, es decir

$$\dot{s}(x) = Gf(x, u) = 0, \quad (11)$$

donde $G = \partial s / \partial x$ es el gradiente de $s(x)$. Al control u que hace posible que la ecuación (11) se cumpla se le denomina control equivalente y se denota como u_{eq} [17].

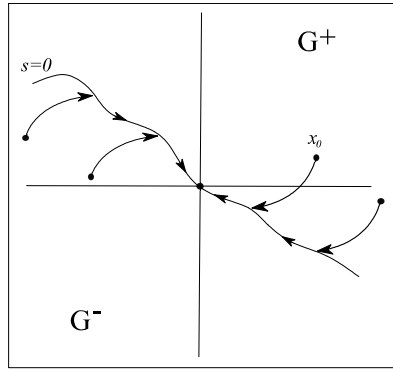


Figura 8. Superficie atrayente de medida cero en el sentido de Lebesgue.

Es importante remarcar que en el deslizamiento ideal se considera que la conmutación en la superficie de discontinuidad ocurre a frecuencia infinita, cuya característica no sucede en la práctica al aplicarlo a un sistema físico debido a diversos factores, como retardos en la respuesta del motor, velocidad de respuesta del controlador, discretización de las señales, entre otros, por lo que durante la conmutación se forma una capa alrededor de la superficie de conmutación con componentes de alta y baja frecuencia en el límite de ésta, cuyas componentes de alta frecuencia son filtradas naturalmente por el propio sistema mecánico, por lo que el movimiento sobre la superficie de deslizamiento está compuesto por componentes de baja frecuencia. Dado que el movimiento sobre la superficie se obtiene al sustituir el control equivalente en la señal de entrada, es posible suponer que el control equivalente u_{eq} se puede obtener al filtrar la señal de control mediante un filtro pasabajas [7]. Además, la magnitud de la capa formada alrededor de la superficie de discontinuidad puede relacionarse directamente a las características de las dinámicas no modeladas, señales de perturbación externas e incertidumbres en los valores paramétricos, por lo que se considera que el control equivalente contiene propiedades que posibilitan estimar los términos de perturbación de la planta.

1.2.2 Modos deslizantes de alto orden

Uno de los problemas más importantes del área de control es controlar sistemas bajo fuertes condiciones de incertidumbres y perturbación. La forma más lógica de compensar la fuerza de las incertidumbres es mantenerlas acotadas mediante una fuerza de control suficiente-

mente grande. El método más simple para resolver este problema, es emplear un control por modo deslizante, este tipo de control reacciona de manera abrupta y con la suficiente fuerza para mantener el estado deseado ante cualquier desviación, lo que supone aumentar la magnitud de la función discontinua que desliza sobre la superficie. No obstante, esta solución puede dañar el sistema controlado debido a la característica del *chattering* que provoca vibraciones con componentes de frecuencia alta.

Una solución propuesta es el modo deslizante de alto orden (MDAO), que generaliza la idea del modo deslizante, pero actuando en las derivadas de tiempo de orden superior de las desviaciones del sistema en lugar de influenciar en la primera derivada de la desviación, como pasa en el modo deslizante estándar. De hecho el MDAO es el movimiento en el conjunto de discontinuidades del sistema dinámico. El orden del modo deslizante caracteriza el grado de suavizamiento de las dinámicas en la vecindad de operación. Si el objetivo es mantener el acotamiento dado por la igualdad de la función de suavizamiento s a cero, el orden del modo deslizante es el número de derivadas continuas totales de s en la vecindad del modo deslizante, entonces el orden es determinado por las igualdades

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0,$$

es decir, el orden del modo deslizante está determinado por el orden de la derivada de la superficie de discontinuidad en que aparezca el término discontinuo [18].

Mientras que el modo deslizante en que se basan muchos sistemas de estructura variable es de primer orden, es decir, $\dot{s}$ contiene el término discontinuo, obteniendo una convergencia en tiempo finito, la convergencia de un MDAO puede también darse de manera asintótica [6].

1.3 Identificación de sistemas

Al diseñar controladores con base en retroalimentación del estado se requiere del modelo matemático que representa la dinámica del sistema a controlar. La estructura del modelo

matemático del sistema se construye empleando las leyes físicas que lo rigen o mediante una asociación entre la señal de salida conforme a una señal de entrada. Sin embargo, esto no es suficiente al momento de implementar una técnica de control, ya que se requiere del conocimiento de los valores de los parámetros que conforman ese modelo. Como no es posible obtener analíticamente los valores de los parámetros, es necesario medir físicamente su valor, lo que en la práctica resulta difícil, por lo que se lleva a cabo un proceso basado en experimentos, conocido como identificación de sistemas, el cual es una técnica que permite hacer una estimación de parámetros mediante algoritmos numéricos en base a experimentos en los que se mide la señal de entrada y la señal de respuesta o salida del sistema.

1.3.1 Estimación de parámetros

Una señal es un medio que transporta información dentro de un ámbito, dicha información puede ser medida o monitoreada. Un sistema se puede definir como cualquier cosa en un ambiente que relaciona señales, una representación a bloques de un sistema se muestra en la figura 9. Las señales que pueden ser controladas por un usuario se les denomina señales de control, aquellas que no pueden manipularse, pero que afectan el comportamiento del sistema, se les denomina como perturbaciones, las cuales pueden dividirse a su vez en medibles y no medibles. Las señales que representan la respuesta del sistema ante las señales de entrada, y que son medidad, se les denomina las señales salida [10].

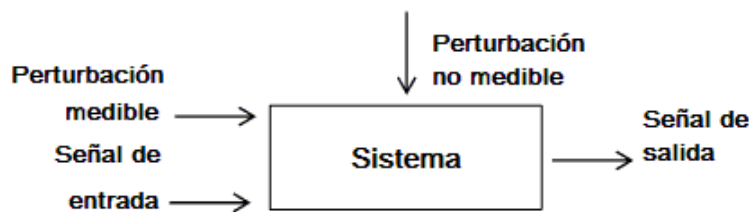


Figura 9. Representación señales de entrada, salida y perturbaciones de un sistema.

La interacción entre las señales de entrada, de salida y perturbaciones se establece a través del modelo del sistema, el cual puede construirse de tres maneras [19]:

- (1) Por observación: es decir que se tiene conocimiento empírico del comportamiento del sistema.
- (2) Gráficamente: describe por medio de una gráfica o tabla la dinámica del sistema, sin embargo, no se tiene un número finito de los parámetros que intervienen en el modelo.
- (3) Modelo matemático: describe la relación entre las variables de entrada y salida del sistema mediante ecuaciones matemáticas, un caso especial son las ecuaciones diferenciales o de diferencias, que incluyen una cantidad finita de parámetros que influyen en el sistema. Un sistema puede estar descrito por una o más ecuaciones diferenciales (o de diferencias).

En el caso del modelado matemático, las ecuaciones que representan a un sistema pueden ser definidas mediante dos metodologías, la primera se basa en formular de manera analítica dichas ecuaciones, para lo cual es necesario poseer el conocimiento en el área de la ciencia que permite analizar físicamente el sistema, a esta metodología se le llama modelado. La segunda es la identificación de sistemas, la cual se basa en la obtención del modelo mediante la experimentación, que consiste en establecer una base de datos con las mediciones realizadas en cada experimento, y procesarla a través de un algoritmo que determina las ecuaciones matemáticas representativas del sistema, para lo cual se requiere también conocimiento previo en el área para validar la fiabilidad de las ecuaciones obtenidas.

Tener un modelo de un sistema, incluyendo el valor de sus parámetros, es muy importante en la implementación de un sistema de control, ya que muchas estrategias suponen que se cuenta con un modelo exacto de la planta; de esto puede depender la estabilidad del sistema en lazo cerrado y su respuesta transitoria. Las diferencias entre el mejor modelo que se pueda obtener y la planta real se deben principalmente a dinámicas no modeladas, incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas. De cualquier manera, los valores numéricos de los parámetros son necesarios, y no es posible establecerlos a partir únicamente del modelado analítico, para lo cual se emplean métodos de identificación de sistemas.

A pesar de que en la actualidad existen muchos algoritmos de control robustos que pueden hacer frente a perturbaciones externas y al conocimiento parcial de los parámetros del sistema, tener un modelo con parámetros lo más cercanos a la realidad ayuda mucho en la implementación de dichos controladores robustos.

1.3.2 Identificación de sistemas

En términos generales, los experimentos para la identificación se realizan excitando el sistema con una señal de entrada (tales como escalón unitario, senoidal o aleatoria) y observando la señal de salida con respecto a la señal de entrada por cierto tiempo [2]. Estas señales se guardan en una computadora para llevar a cabo un procesamiento de señal. Posteriormente se trata de ajustar un modelo paramétrico a las secuencias de las señales de entrada y salida.

El primer paso en el proceso de identificación del modelo de un sistema es determinar la forma apropiada del modelo (típicamente una ecuación diferencial de cierto orden). El segundo paso es estimar los parámetros desconocidos del sistema. En la práctica, este procedimiento es recursivo, como se muestra en la figura 10.

Un método paramétrico para identificar un sistema es el llamado método de mínimos cuadrados. En general, un método paramétrico consiste en correlacionar los datos registrados con un vector de parámetros estimado. En particular, cuando se emplea el método de mínimos cuadrados, las propiedades de consistencia dependen críticamente en cómo el ruido entra en el sistema, lo que significa que la estructura del modelo puede no ser adecuada a menos que el sistema cumpla con ciertas propiedades.

En la identificación, más allá de las condiciones experimentales dadas, una condición importante es que la señal de entrada satisfaga la condición de excitación persistente. Cuando las condiciones experimentales incluyen retroalimentación de $y(t)$ a $u(t)$, los parámetros del sistema podrían no ser identificables aunque la entrada sea lo suficientemente excitante [2].

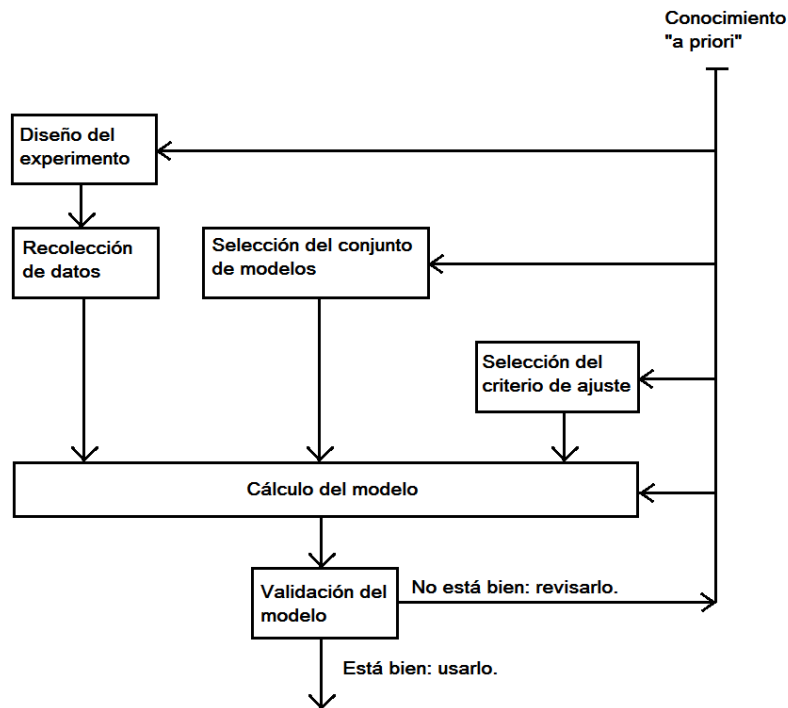


Figura 10. Algoritmo para la identificación de sistemas descrito por [10].

1.3.2.1 Selección de la señal de entrada

La señal de entrada utilizada en los experimentos de identificación puede tener una influencia significativa en los resultados de los parámetros estimados. La elección de la señal de entrada es impuesta por el tipo del método de identificación empleado.

Generalmente, el comportamiento del sistema es descrito por un conjunto de datos muestreados, lo que implica que las señales de entrada y salidas son grabadas en tiempo discreto. En la mayoría de los casos se emplean modelos discretos para describir tales sistemas. Pero en realidad, la entrada será una señal de tiempo continuo. Los siguientes son ejemplos de señales de entrada comunes:

- Función escalón. Está dada por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases},$$

donde la amplitud u_0 puede ser seleccionada. Para sistemas con gran relación señal-ruido, este tipo de señal puede proporcionar información importante acerca de la dinámica del sistema, y proporcionar una primera aproximación de estimación de a las principales constantes, así como estimar posibles resonancias.

- Secuencia binaria pseudoaleatoria (PRBS por sus siglas en inglés). Una secuencia binaria pseudoaleatoria es una señal que turna dos amplitudes en cierto modo. Puede generarse usando registros de desplazamiento para realizar un estado finito y periódico. En la mayoría de los casos, el período se elige para ser del mismo orden que el número de muestras en el experimento, o mayor. Al aplicar un PRBS, el usuario debe seleccionar los dos niveles, el período y el reloj período. El período de reloj es el número mínimo de intervalos de muestreo después de los cuales se permite que la secuencia cambie.
- Proceso de media móvil autorregresiva. Sea $\{e(t)\}$ una secuencia pseudoaleatoria similar al ruido blanco tal que

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t) e(t + \tau) \rightarrow 0 \quad \text{como } N \rightarrow \infty \quad (\tau \neq 0).$$

Esta relación es para mantener τ al menos tan grande como la constante de tiempo dominante del sistema desconocido. A partir de la secuencia $\{e(t)\}$ se puede obtener una entrada general $u(t)$ por filtrado lineal:

$$u(t) + c_1 u(t-1) + \dots + c_m u(t-m) = e(t) + d_1 e(t-1) + \dots + d_m e(t-m).$$

La señal $u(t)$ tal como está definida en la ecuación anterior, se llama a menudo ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*, por sus siglas en inglés, Media Móvil Auto-Regresiva). Cuando todo $c_i = 0$, se denomina un proceso MA (Media Móvil), mientras que para un proceso AR (Auto-Regresivo) todo $d_i = 0$.

- Suma de senoidales. Una clase de señales de entrada está dada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j),$$

donde las frecuencias angulares son distintas

$$0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m \leq \pi.$$

En esta clase de señal, el usuario puede seleccionar las amplitudes $\{a_j\}$, las frecuencias $\{\omega_i\}$ y las fases $\{\varphi_i\}$.

1.4 Modelo de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de Lagrange

En el modelado de sistemas mecánicos complejos, se emplean las ecuaciones de Lagrange que parten de los conceptos de energía cinética y potencial las cuales permiten un análisis más sencillo. Considerando un sistema mecánico de n grados de libertad (n GDL), su energía total ε es la suma de su energía cinética K mas la potencial U , es decir

$$\varepsilon(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + U(q(t)),$$

donde q es el vector de posiciones articulares. El lagrangiano $L(q(t), \dot{q}(t))$ es

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)),$$

a partir del cual se desarrollan las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un sistema mecánico con n g.d.l. mediante los siguientes cálculos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente en cada articulación, así como fuerzas no conservativas las cuales en general dependen del tiempo o la velocidad. En resumen, la construcción de las ecuaciones de Lagrange consta de cuatro etapas:

- (1) Cálculo de la energía cinética: $K(q(t), \dot{q}(t))$.

(2) Cálculo de la energía potencial: $U(q(t), \dot{q}(t))$.

(3) Cálculo del lagrangiano: $L(q(t), \dot{q}(t))$.

(4) Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

1.4.1 Propiedad de linealidad en los parámetros de los sistemas mecánicos

Una particularidad del modelo

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (12)$$

es que puede expresarse en términos lineales de los parámetros. Para todo $u, v, \omega \in \mathbb{R}^n$

$$M(q)u + C(q, \omega)v + g(q) = \Phi(q, u, v, \omega)\theta + \kappa(q, u, v, \omega),$$

donde $\kappa(q, u, v, \omega)$ es el vector de $n \times 1$, $\Phi(q, u, v, \omega)$ es una matriz de $n \times m$ y el vector de $\theta \in \mathbb{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del robot y su carga.

Además, si $q, u, v, \omega \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(q, u, v, \omega) \in L_\infty^{n \times m}$. Siempre es posible encontrar un vector $\theta \in \mathbb{R}^m$ para el cual $\kappa(q, u, v, \omega) \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$. Considerando esto y tomando a $u = \ddot{q}$ y $v = \omega = \dot{q}$, la ecuación se reescribe como

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau,$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \Phi(q, \ddot{q}, \dot{q}, \dot{q})$ es una matriz de $n \times m$ y θ es un vector de $m \times 1$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos. La constante n es el número de g.d.l., y el valor de m depende de la selección de los parámetros dinámicos del robot.

Para ilustrar la propiedad de la linealidad en parámetros considere el sistema mecánico masa resorte amortiguador cuyo modelo está definido por

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx = K_c u, \quad (13)$$

pasando el modelo del sistema (13) a su representación en el espacio de estados, donde $x = x_1$ y $\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$, se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\delta}{m}x_2 + \frac{K_c}{m}u, \quad (15)$$

el cual presenta incertidumbre en sus parámetros m , δ y k , que considerando dichas diferencias en los valores nominales, el sistema (13) se puede expresar como

$$(m_0 + \Delta_m)\ddot{x} + (\delta_0 + \Delta_\delta)\dot{x} + (k_0 + \Delta_k)x = (K_c + \Delta_{K_c})u, \quad (16)$$

donde m_0 , δ_0 y k_0 son los valores establecidos como nominales, y Δ_m , Δ_δ y Δ_k son las variaciones paramétricas debido a la incertidumbre existente entre el valor nominal y el valor real de cada parámetro, respectivamente. Pasando el modelo del sistema (16) a su representación en el espacio de estados y, considerando $x = x_1$ y $\dot{x} = x_2$, se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_0 + \Delta_k}{m_0 + \Delta_m}x_1 - \frac{\delta_0 + \Delta_\delta}{m_0 + \Delta_m}x_2 + \frac{K_c + \Delta_{K_c}}{m_0 + \Delta_m}u. \quad (18)$$

Una forma de encontrar la diferencia en los coeficientes de los parámetros es estableciendo la diferencia entre el modelo nominal del sistema (14)-(15) y el modelo que considera las incertidumbres paramétricas en (17)-(18) en la siguiente ecuación

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \left[-\frac{k}{m} - \left(-\frac{k_0 + \Delta_k}{m_0 + \Delta_m} \right) \right] x_1 + \left[-\frac{\delta}{m} - \left(-\frac{\delta_0 + \Delta_\delta}{m_0 + \Delta_m} \right) \right] x_2 \\ & + \left[\frac{K_c}{m} - \left(\frac{K_c + \Delta_{K_c}}{m_0 + \Delta_m} \right) \right] u. \end{aligned} \quad (20)$$

Separando los valores nominales de la variación de los coeficientes del sistema (19)-(20) se tiene

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + \Delta_a x_1 - bx_2 + \Delta_b x_2 + cu - \Delta_c u, \quad (22)$$

donde los valores nominales del sistema son $a = k/m$, $b = \delta/m$ y $c = K_c/m$ y, además, los valores de las incertidumbres paramétricas son

$$\left[\Delta_a = \frac{k_0 + \Delta_k}{m_0 + \Delta_m} \quad \Delta_b = \frac{\delta_0 + \Delta_\delta}{m_0 + \Delta_m} \quad \Delta_c = \frac{K_c + \Delta_{K_c}}{m_0 + \Delta_m} \right]^T.$$

Entonces, gracias a la propiedad de linealidad en parámetros, el sistema (21)-(22) puede representar sus términos de incertidumbres paramétricas en un vector, de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\delta}{m}x_2 + \frac{K_c}{m}u + \varphi^T \theta, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_b \\ -\Delta_c \end{bmatrix}.$$

El término $\varphi^T \theta$ contiene los valores de variaciones en los parámetros, que también puede definirse como una perturbación en el sistema, aunque es importante diferenciar entre ambas definiciones.

Capítulo 2

Diseño de un observador robusto para sistemas lagrangianos de n GDL

Cuando se desea implementar un sistema de control para un sistema de la forma (1)-(2), utilizando alguna técnica por retroalimentación de estados, es necesario tener acceso a todas las variables de estado. Sin embargo, esto no es así para la mayoría de sistemas debido a varios factores, entre ellos puede ser que sea muy complicada la instalación de sensores y que resulte muy costoso o, en un caso extremo, alguna variable de estado puede no tener relación directa con una señal física. En estos casos se hace uso de un sistema dinámico conocido como observador de estado, el cual realiza una estimación del vector de estado a partir del conocimiento de los valores de las señales de entrada $u(t)$ y de salida $y(t)$ del sistema. El vector estimado, denotado como $\hat{x}(t)$, se ajusta durante su evolución a través del tiempo mediante la retroalimentación del error $e(t)$ entre la salida de la planta $y(t)$ y la salida del observador $\hat{y}(t)$ [20].

Al igual que en el diseño de controladores, el diseño de observadores de estado necesita del conocimiento del modelo de la planta y de sus parámetros. De esta forma, un reto importante en el diseño de observadores de estado, es garantizar la convergencia del vector de estado del observador al vector de estado de la planta a pesar de la presencia de incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. Inicialmente, los observadores fueron diseñados para implementarse en sistema lineales y con el tiempo han evolucionado para sistemas no lineales. Uno de los observadores más usados es el llamado observador de Luenberger [21], el cual tiene buen desempeño cuando el modelo de la planta es más o menos exacto, sin embargo, la presencia de perturbaciones o dinámicas no modeladas incrementan el error en la estimación del observador.

Para resolver este problema se han propuesto observadores robustos basados en modos deslizantes que reducen significativamente el error entre el estado real de la planta y el estado estimado cuando hay perturbaciones e incertidumbres en el modelo de la planta. Además de esto, algunos observadores discontinuos, aseguran la convergencia a cero en tiempo finito y para algunas clases de sistemas dinámicos, como los sistemas mecánicos, existen metodologías de diseño bien definidas [6].

En este capítulo se presenta el diseño de un observador robusto, propuesto en [18], para sistemas lagrangianos de n GDL. Este observador está basado en la estructura del observador de Luenberger pero se le agrega un término discontinuo en la retroalimentación, lo que produce un modo deslizante de segundo orden que permite la estimación de términos de perturbación en la planta a través del concepto del control equivalente. El control equivalente puede verse como el promedio de los términos discontinuos cuando conmutan a alta frecuencia cuando las trayectorias llegan a la superficie de discontinuidad, por lo que puede ser recuperado filtrando dichos términos [17].

El resultado es un observador que garantiza la convergencia exponencial del estado observado al estado real de la planta a pesar de la presencia de variaciones paramétricas y perturbaciones externas que se consideran acotadas, como se demuestra en el análisis de estabilidad en la primera sección del capítulo. Este es el observador que será utilizado en el proceso de estimación de variaciones paramétricas en los siguientes capítulos.

2.1 Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable

En esta sección se presenta un resultado que será utilizado en el diseño del observador de estado para sistemas lagrangianos, el cual es tomado de [18]. Considere el siguiente sistema

de segundo orden

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (23)$$

$$\dot{z}_2 = -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c\text{sign}(z_1), \quad (24)$$

donde a y b son constantes positivas, $\xi(t)$ es el término de perturbaciones externas acotadas

$$|\xi(t)| \leq \rho,$$

ρ es una constante conocida, c es un parámetro de control, y $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo definida como

$$\text{sign}(z_1) = \begin{cases} 1 & \text{para } z_1 > 0 \\ \sigma & \text{para } z_1 = 0 \\ -1 & \text{para } z_1 < 0 \end{cases},$$

donde $\sigma \in [-1, 1]$, por lo que el sistema (23)-(24) tiene soluciones en el sentido de Filippov [16]. Definiendo la matriz A del sistema de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad (25)$$

y una matriz P de la forma

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

la cual es una solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -I$, donde I es la matriz identidad. Las propiedades de estabilidad del sistema (23)-(24) se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 5. *Para el sistema (23)-(24), si [24]*

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho}{\theta} \right),$$

para algún $0 < \theta < 1$, donde $\lambda_{\max}(P)$ y $\lambda_{\min}(P)$ son los valores máximo y mínimo de la matriz P , entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

La demostración del teorema 5 se desarrolla en [8] y [24].

2.2 Diseño del observador de estado para sistemas mecánicos de n GDL

Considere un sistema lagrangiano de n GDL definido por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t) = \tau, \quad (27)$$

$$y = q, \quad (28)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de Coriolis y de fuerzas centrífugas, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta$ contiene los términos producidos por variaciones paramétricas, $\gamma(t)$ es el término producido por perturbaciones externas consideradas acotadas, τ es el vector de fuerzas generalizadas de entrada y q es la salida del sistema.

Definiendo las variables de estado $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, entonces su representación en espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x) + g(x_1) + M^{-1}(\cdot)\tau + \xi(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$y = x_1, \quad (30)$$

donde

$$f(x) = -M^{-1}(\cdot)C(x_1, x_2)x_2$$

$$g(x_1) = M^{-1}(\cdot)G(x_1)$$

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(\cdot)(\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t))$$

Tomemos el modelo de observador robusto propuesto en [24]

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ f(\hat{x}) + g(x_1) + M^{-1}(\cdot)\tau + \xi(\cdot) \end{bmatrix} + H(y - \hat{y}), \quad (31)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (32)$$

donde se asume que se tiene la medición exacta de la salida x_1 del sistema de ecuaciones de (31)-(32), y el vector $H(y - \hat{y})$ tiene la forma

$$H(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y - \hat{y}) \\ C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son matrices diagonales definidas positivas. Note que, si $C_3 = 0$, el diseño del observador resulta en un observador clásico de Luenberger para sistemas no lineales. Para encontrar las condiciones de las matrices C_1 , C_2 y C_3 para el sistema (31)-(32) sea un observador para el sistema (27)-(28), se definen as variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, su dinámica está descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 + C_1 e_1 \\ f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Es posible encontrar un conjunto de matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que el origen del espacio de error tenga un punto de equilibrio globalmente exponencialmente estable. Haciendo un cambio de variables $z_1 = e_1$ y $z_2 = e_2 - C_1 e_1$, la dinámica del sistema en el nuevo espacio de estados está dada por

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (35)$$

$$\dot{z}_2 = -C_2 z_1 - C_1 z_2 + \Psi(\cdot) - C_3 \text{sign}(z_1). \quad (36)$$

Para determinar cada uno de los valores contenidos en las matrices C_1 , C_2 y C_3 de dimensión $n \times n$ para un sistema de $nGDL$ como el sistema (35)-(36), donde las matrices de C_1 , C_2 , C_3 , y los vectores $\Psi(\cdot)$ y $\text{sign}(z_{1n})$ están formados por

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{1n} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{2n} \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_{31} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{3n} \end{bmatrix}, \quad \Psi(\cdot) = \begin{bmatrix} \psi_1(\cdot) \\ \psi_2(\cdot) \\ \vdots \\ \psi_n(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \text{sign}(z_{1n}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(z_{11}) \\ \text{sign}(z_{12}) \\ \vdots \\ \text{sign}(z_{1n}) \end{bmatrix}.$$

Se pueden reagrupar las ecuaciones como un conjunto de n sistemas de segundo orden de la forma (23)-(24) y reescribirse al sistema (35)-(36) como

$$\dot{z}_{1i} = z_{2i}, \quad (37)$$

$$\dot{z}_{2i} = -c_{2i}z_{1i} - c_{1i}z_{2i} + \psi_i(\cdot) - c_{3i}\text{sign}(z_{1i}) \quad (38)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$, que desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= z_{21}, \\ \dot{z}_{21} &= -c_{21}z_{11} - c_{11}z_{21} + \psi_1(\cdot) - c_{31}\text{sign}(z_{11}); \\ \dot{z}_{12} &= z_{22}, \\ \dot{z}_{22} &= -c_{22}z_{12} - c_{12}z_{22} + \psi_2(\cdot) - c_{32}\text{sign}(z_{12}); \\ &\vdots \\ \dot{z}_{1n} &= z_{2n}, \\ \dot{z}_{2n} &= -c_{2n}z_{1n} - c_{1n}z_{2n} + \psi_n(\cdot) - c_{3n}\text{sign}(z_{1n}); \end{aligned}$$

El sistema (37)-(38) tiene la misma forma del sistema (23)-(24), por lo que existen constantes c_{1i} , c_{2i} y c_{3i} que garantizan la convergencia a cero de las variables z_{1i} y z_{2i} debido a la existencia de un modo deslizante de segundo orden. El valor de c_{3i} debe de satisfacer la desigualdad

$$c_{3i} > 2\lambda_{\max}(P_i) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_i)} \frac{\delta_i}{\theta}}, \quad (39)$$

donde δ_i es la cota de la perturbación del i -ésimo subsistema, es decir $|\psi_i(\cdot)| < \delta_i$, θ es un factor de convergencia que toma valores de $0 < \theta < 1$, $\lambda_{\max}(P_i)$ y $\lambda_{\min}(P_i)$ son los valores propios máximos y mínimos de la matriz P_i que se obtiene a través de la ecuación de Lyapunov $P_i A_i + A_i^T P_i = -I$.

2.3 Diseño de un observador de estado para un sistema masa resorte amortiguador

Considérese el modelo del sistema mecánico de masa resorte amortiguador (MRA) en lazo abierto representado por (40)-(42)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (40)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\delta}{m}x_2 + \frac{k_c}{m}u + \gamma(\cdot), \quad (41)$$

$$y = x_1, \quad (42)$$

donde $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado que contiene la posición y velocidad del sistema, $y \in \mathbb{R}$ es la variable medida del sistema, k es la constante de elasticidad del resorte, δ es el coeficiente de fricción viscosa, k_c es una constante que convierte la señal de entrada de voltaje en torque, m es la masa total del sistema y $\gamma(\cdot)$ es un término de perturbación que incorpora los términos producidos por variaciones paramétricas, el cual es acotado si el estado es acotado.

Los coeficientes nominales de este modelo han sido determinados mediante la herramienta de identificación de sistemas que contiene el programa Matlab[®], el cual utiliza la función *tfest* de su paquetería de herramientas para identificación de sistemas, *System Identification Toolbox* por su nombre en inglés, para realizar una estimación nominal de la función de transferencia del sistema lineal, empleando las señales de entrada y de salida del sistema. De esta forma, se obtienen los parámetros nominales del sistema y se convierte el modelo al espacio de estados.

Experimentalmente, se ha empleado un sistema mecánico de MRA para probar el desempeño del modelo del observador (40)-(41), con los parámetros nominales $k/m = 174,2$, $\delta/m = 12,57$ y $K_c/m = 2,567$. Sustituyendo en (40)-(42) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -174,2x_1 - 12,57x_2 + 2,567u + \gamma(\cdot), \\
y &= x_1,
\end{aligned}$$

Considerando el modelo del observador presentado en las ecuaciones(31)-(32), el modelo de un observador de estado para este sistema definido en (40)-(42) se establece por (43)-(45)

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + c_1(y - \hat{y}), \quad (43)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -174,2\hat{x}_1 - 12,57\hat{x}_2 + 2,567u + c_2(y - \hat{y}) + c_3\text{sign}(y - \hat{y}), \quad (44)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (45)$$

donde las constantes c_1 , c_2 y c_3 son valores escalares. Se definen las variables de error del observador $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 - c_1e_1, \\
\dot{e}_2 &= -12,57e_2 - c_2e_1 - c_3\text{sign}(e_1) + \gamma(\cdot).
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables para transportar los puntos de equilibrio del espacio de estados al origen con $z_1 = e_1$ y $z_2 = e_2 - c_1e_1$, cuya dinámica esta dada por

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (46)$$

$$\dot{z}_2 = -(12,57c_1 + c_2)z_1 - (12,57 + c_1)z_2 - c_3\text{sign}(z_1) + \gamma(\cdot), \quad (47)$$

donde la matriz A del sistema (46)-(47) es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(12,57c_1 + c_2) & -(12,57 + c_1) \end{bmatrix},$$

y sus valores propios están determinados por

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^2 + \lambda(12,57 + c_1) + 12,57c_1 + c_2 = 0, \quad (48)$$

Se propone que los valores propios del sistema sean complejos conjugados en $s = -10 \pm j$. El polinomio característico $P(s)$ propuesto es

$$P(s) = s^2 + 20s + 101. \quad (49)$$

Haciendo una igualdad con la ecuación obtenida en (48) a la ecuación propuesta en (49), se tiene que los valores de $c_1 = 7,43$ y $c_2 = 7,6049$. Para establecer el valor de c_3 , se define la matriz P de la forma

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

la cual es una solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -I$, donde I es la matriz identidad. La solución para la matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} 2,649 & 0,005 \\ 0,005 & 0,025 \end{bmatrix},$$

de la cual se obtienen los valores propios para determinar el valor de c_3 mediante la ecuación (39), y sustituyendo se tiene

$$c_3 > 2(2.649) \sqrt{\frac{2.649}{0,025}} \frac{\delta}{0,99} > 55,086\delta,$$

donde θ es un factor de convergencia y puede tomar los valores $0 < \theta < 1$ y δ es la cota de la perturbación, es decir $|\gamma(t)| < \delta$.

2.3.1 Desempeño numérico del observador

Para demostrar el desempeño del observador de estado definido por las ecuaciones (43)-(45) se implementó en una simulación numérica con el modelo nominal del sistema MRA de (43)-(45), cuyos parámetros nominales son $k/m = 174,2$, $\delta/m = 12,57$ y $K_c/m = 2,567$. En la figura 11 se muestra la salida del sistema $y(t)$ en comparación con la señal de salida estimada del observador $\hat{y}(t)$ respecto a una señal senoidal de entrada $u(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi)$, donde $A = 0,5$, $f = 0,1$ y $\varphi = 0$. Utilizando un filtro de segundo orden como el propuesto en [8], el

cual ha demostrado buenos resultados para obtener el control equivalente a partir del término discontinuo, cuya función de transferencia está definida por

$$\frac{Y_f(s)}{U_f(s)} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1,4142\omega_c s + \omega_c^2} \quad (51)$$

donde ω_c es la frecuencia de corte del filtro pasabajos. Para esta simulación numérica se ha empleado la frecuencia $\omega_c = 30$.

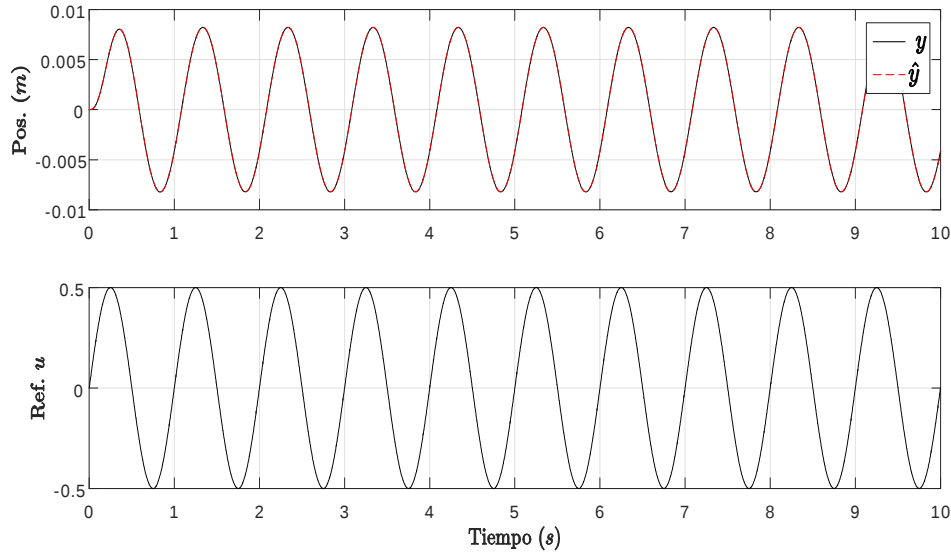


Figura 11. Desempeño numérico del observador diseñado sin perturbaciones externas.

A partir del filtro (51) se obtuvo el término de perturbación estimado. Como en simulación se tiene un caso ideal, en donde los valores paramétricos de la planta son exactamente los mismos que en el modelo del observador de estado, la perturbación estimada es $\gamma(\cdot) = 0$, además, el error en la estimación es igual a cero, es decir, $e_1 = 0$, para un valor de la constante $c_3 = 0$, lo que significa que el contar con los valores paramétricos exactos no exige un observador robusto para estimar el vector de estado.

Si experimentalmente se tuviesen los valores exactos de los coeficientes, también podría lograrse el error igual a cero, sin embargo, esto es muy difícil de lograr debido a dinámicas no modeladas, perturbaciones externas y variaciones en los parámetros estimados debido al al-

goritmo empleado en el software. Para demostrar en simulación la capacidad del observador robusto para estimar el control equivalente a través de su término discontinuo mediante un filtro pasabajas, se agregó una señal externa sumada a la entrada u que no está considerada en el diseño del observador. Además, se activa el término discontinuo durante la simulación para observar la velocidad de convergencia del observador. Como se observa en la figura 12, en los primeros 2.5 segundos de la simulación se aprecia la diferencia entre la señal de salida medida $y(t)$ de la planta numérica comparada con la señal de salida estimada $\hat{y}(t)$.

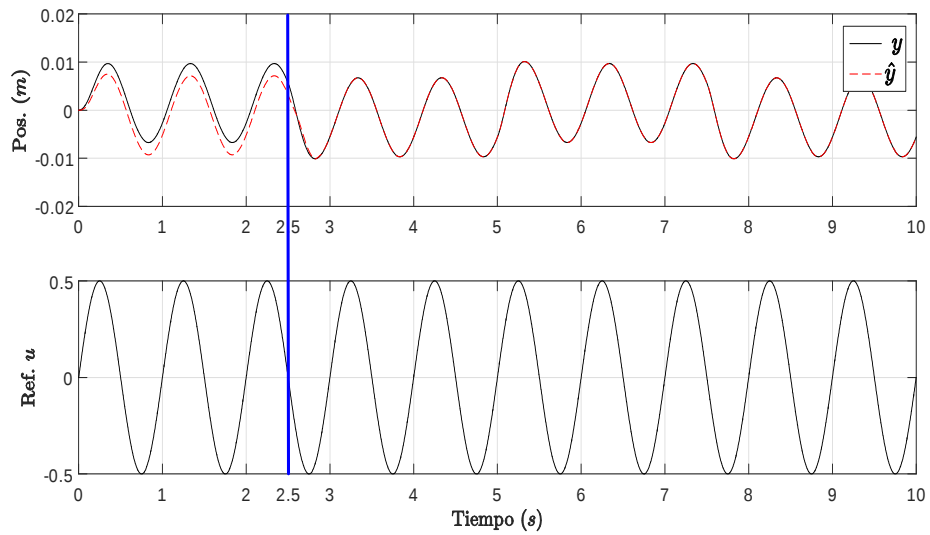


Figura 12. Desempeño numérico del observador de estado con perturbación agregada.

En la figura 13 se muestra el error del desempeño del observador numérico con la perturbación externa agregada, el error entre la salida de la planta y la salida observada es considerable pero al activarse el término discontinuo, este error decrece rápidamente a valores cercanos a cero. La señal externa sumada a la entrada es una señal periódica de pulsos cuadrados de amplitud ± 1 y frecuencia igual a 0,2 Hz. Se obtiene el valor de c_3 empíricamente, ajustando su valor para obtener la magnitud más pequeña posible del error, para las pruebas numéricas el valor de la constante es $c_3 = 0,4$. Se observa cómo comienza a converger en la gráfica superior de la figura 13, en la gráfica inferior de la misma figura se realiza un acercamiento al error para apreciar su magnitud ya con el término discontinuo activado.

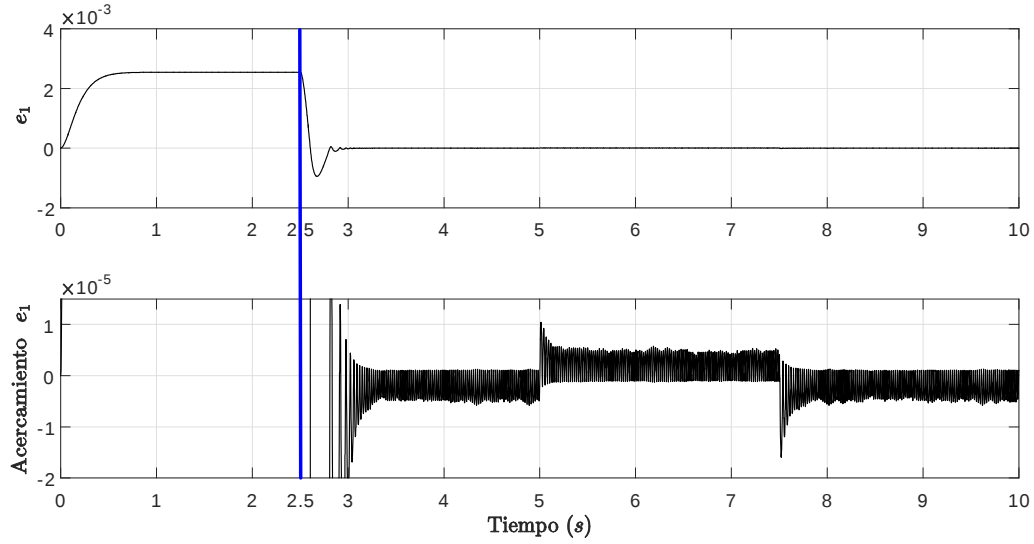


Figura 13. Error del observador de estado numérico con perturbación agregada.

Numéricamente es posible tomar la velocidad calculada por el algoritmo numérico x_2 , y compararla con la velocidad estimada $\hat{x}_2$, como se puede ver en la figura 14. Se observa que la estimación converge en el segundo 2.5, cuando se activa el término discontinuo.

Además, la identificación de la señal de perturbación se muestra en la figura 15. La forma de la señal es una señal de pulsos cuadrados con similar frecuencia y amplitud que la señal de perturbación agregada, por lo que concluye que es posible estimar la perturbación que actúa sobre el sistema al filtrar el término discontinuo de este observador.

Al realizar una segunda prueba numérica, en donde se modificó la señal de perturbación agregada sustituyendo la señal cuadrática por una señal senoidal con la finalidad de probar el desempeño de estimación de perturbación a través del término discontinuo, se puede ver el desempeño de estimación en la figura 16, donde converge rápidamente al estado al activar el términos discontinuo en el segundo 2.5, con una constante $c_3 = 0.4$.

El error del observador se observa en la gráfica superior de la figura 17. En la gráfica inferior de la misma figura se observa un acercamiento al error, donde disminuye su magnitud drásticamente a partir de donde se activa el término discontinuo, a razón de los micrometros.

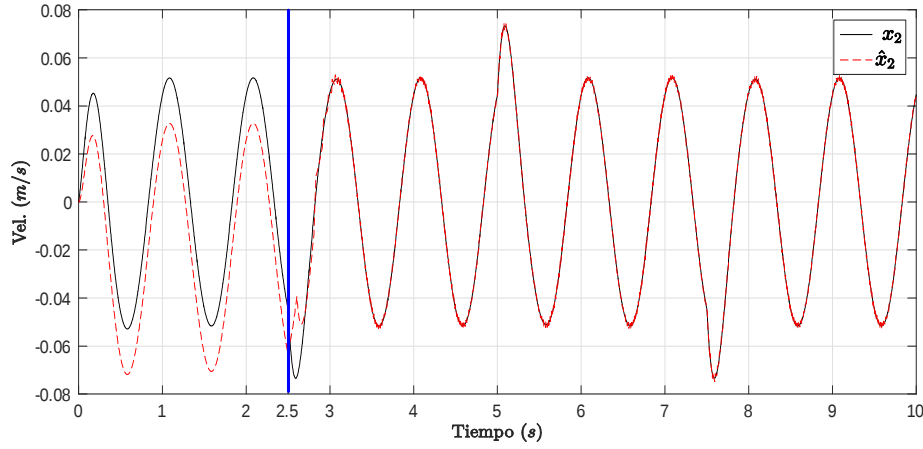


Figura 14. Velocidad estimada numéricamente con perturbación externa.

Se muestra además, la señal de velocidad estimada $\hat{x}_2$ en la figura 18, respecto a la velocidad medida x_2 .

La perturbación estimada se asemeja a la señal anexada la cual tiene forma de senoidal definida por $A \sin(2\pi ft + \varphi)$, donde $A = 0,1$, $f = 0,5$ y $\varphi = 0$, como se observa en la figura 19. En la gráfica superior de la figura 19 se observa la perturbación agregada, y en la gráfica inferior la perturbación que estima el control equivalente. En las pruebas numéricas no se tiene una perturbación estimada con componentes de alta frecuencia a menos que se agregue intencionalmente una señal externa, este no es el caso de las pruebas experimentales.

2.3.2 Desempeño experimental del observador

Para demostrar el desempeño del observador de estado definido por las ecuaciones (43)-(45) experimentalmente, se implementó en un sistema mecánico MRA el modelo nominal del sistema de (43)-(45), cuyos parámetros nominales son $k/m = -174,2$, $\delta/m = -12,57$ y $K_c/m = 2,567$. En las pruebas experimentales se empleó la misma señal de entrada que en las pruebas numéricas con $u(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi)$, donde $A = 0,5$, $f = 0,1$ y $\varphi = 0$. En la gráfica superior de la figura 20 se observa el desempeño del observador, convergiendo la estimada $\hat{y}(t)$ a la señal de salida medida $y(t)$ partir de la activación del término descon-

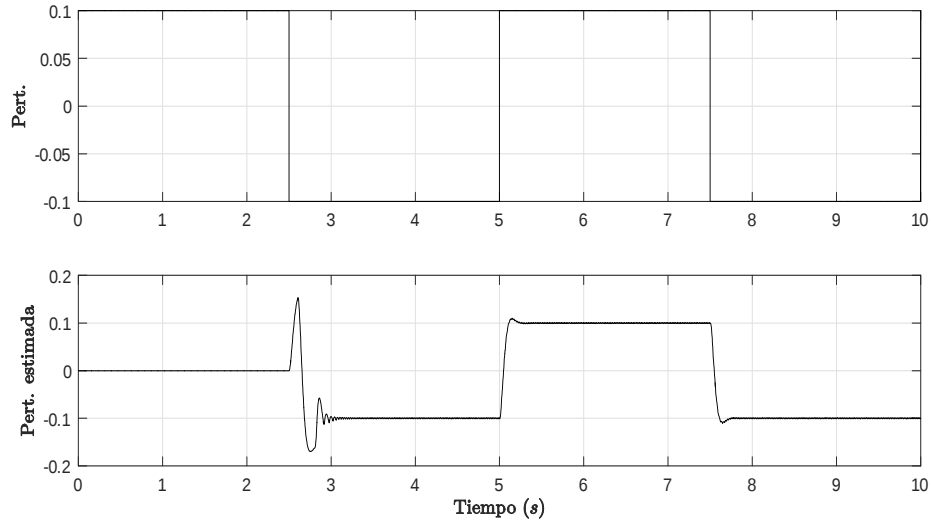


Figura 15. Perturbación estimada en simulación numérica.

tinuo en el segundo 2.5. En la gráfica inferior de la figura 20 se observa la señal de entrada $u(t)$. Para obtener la perturbación estimada se empleó el filtro de segundo orden definido en (51), con frecuencia de corte del filtro $\omega_c = 30$.

Sin el término discontinuo el error de la posición e_1 es relativamente pequeño, alrededor de 2×10^{-3} metros, como se observa en la gráfica superior de la figura 21. Haciendo un acercamiento a la gráfica después del segundo 2.5 cuando se activa el término discontinuo, el error disminuye drásticamente oscilando entre $\pm 2 \times 10^{-6}$ metros, como se observa en la gráfica inferior de la figura 21, demostrando mejor estimación con el término discontinuo. Empíricamente se estableció el valor de c_3 para el cual se tiene la mínima magnitud del error e_1 , que para el modelo nominal definido en (43)-(45) se tiene que $c_3 = 0,85$, esto implica que la amplitud de la perturbación en el sistema es mayor que la compensada en la simulación.

En la figura 22 se observa la velocidad estimada, se puede apreciar la diferencia de la estimación antes y después de activarse el término discontinuo, la medición mejora cuando se aplica el término discontinuo en el segundo 2.5, sin embargo, se vuelve ruidosa al contener componentes de alta frecuencia. Experimentalmente no se tiene disponible la velocidad del

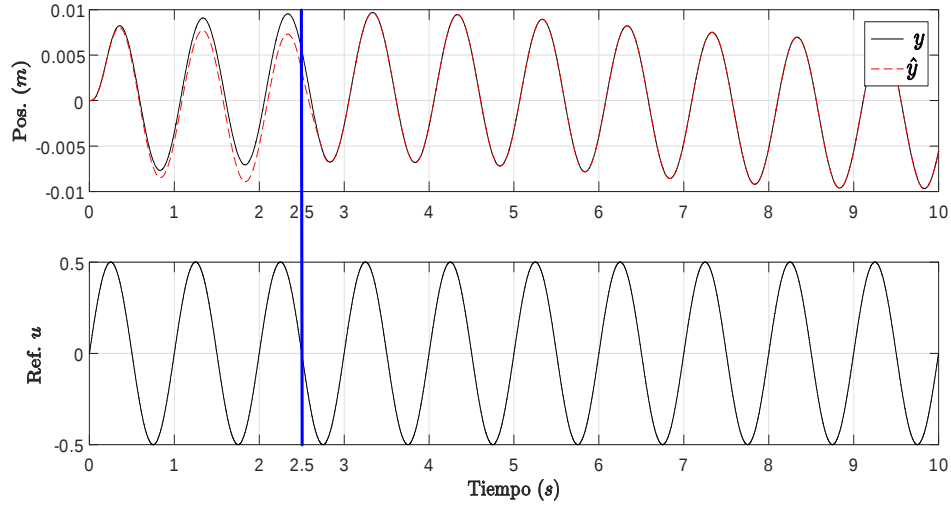


Figura 16. Desempeño del observador numérico con perturbación senoidal anexada.

sistema mecánico para su medición, por lo que no se puede realizar una comparación como en el caso de la prueba numérica.

Debido a que el control equivalente es el resultado de filtrar el término discontinuo del observador, éste no estima los términos de perturbación que contiene las variaciones paramétricas del sistema hasta que se activa el término discontinuo a partir del segundo 2.5, como se muestra en la siguiente figura 23. La perturbación estimada es el resultado de variaciones paramétricas en el observador de estado, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas que actúan sobre el mecanismo, por lo que no se cuenta con la señal de perturbación real.

De igual manera que en la prueba numérica, se agregó una señal a la señal de entrada $u(t)$ que no está considerada en el diseño del observador, la cual actúa como una perturbación externa adicional a la perturbación inherente al sistema mecánico, con la finalidad de demostrar la capacidad de estimar dichas perturbaciones mediante el control equivalente. En este caso la señal es una señal periódica de pulsos cuadrados de ± 1 de amplitud y 0,2 Hz de frecuencia. En la gráfica superior de la figura 24 se observa el comportamiento del sistema con la señal externa agregada a la entrada original, comparando la salida $y(t)$ contra la salida esti-

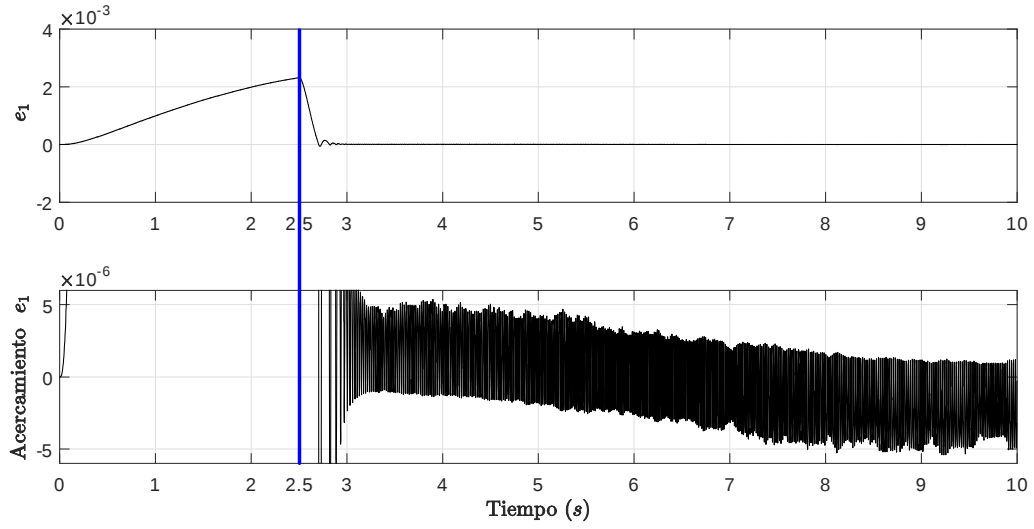


Figura 17. Error de estimación del observador con la perturbación senoidal externa.

ma $\hat{y}(t)$. En la gráfica inferior de la figura 24 se observa la referencia que considera el diseño del observador.

El desempeño del observador de estado se visualiza en la gráfica superior de la figura 25 donde se despliega la señal de error e_1 , a partir del segundo 2.5 se activa el término discontinuo donde se observa que disminuye el error, como se ilustra en la gráfica inferior de la figura 25. La velocidad estimada se observa en la figura 26.

La señal de perturbación externa agregada en la primer prueba de desempeño es una onda cuadrada como se observa en la gráfica inferior de la figura 27, la cual se estima mediante el control equivalente del filtro definido por (51) con $\omega_c = 30$, como se observa en la gráfica inferior de la figura 27. Se puede apreciar que la señal estimada es una onda cuadrada semejante a la perturbación agregada, con similar frecuencia y distinta amplitud. También se observa que la señal tiene montada la perturbación estimada con componentes de alta frecuencia de la prueba anterior, la cual contiene las perturbaciones externas que actúan naturalmente en el sistema, así como variaciones paramétricas.

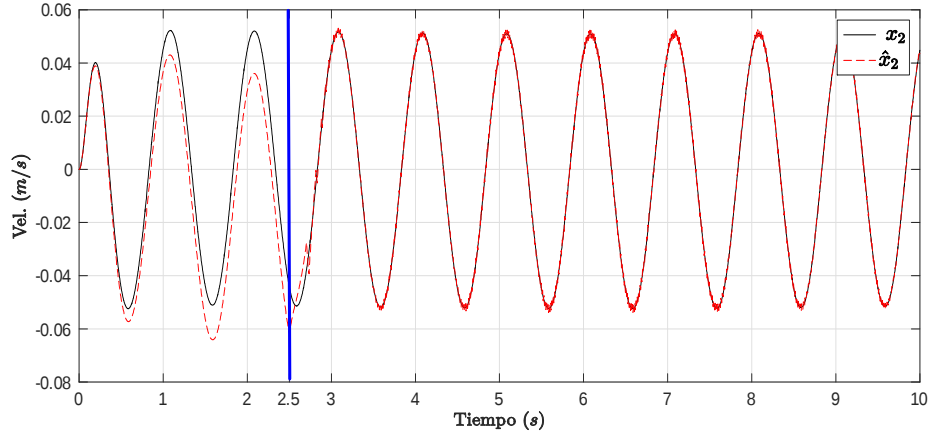


Figura 18. Velocidad estimada con perturbación senoidal externa sumada.

En la segunda prueba experimental se emplea la señal de entrada al observador $u(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi)$, donde $A = 0,5$, $f = 0,1$ y $\varphi = 0$. El desempeño del observador se observa en la figura 28, donde la gráfica superior es una comparación de la señal de salida $y(t)$ contra la señal de salida $\hat{y}(t)$, y la gráfica inferior es la señal de entrada $u(t)$.

El error de la estimación experimental del observador se observa en la gráfica superior de la figura 29. Realizando un acercamiento a partir del momento que se activa el término discontinuo en el segundo 2, se observa la disminución del error e_1 conforme la salida del observador converge al estado. La velocidad estimada $\hat{x}_2$ se observa en la figura 30.

La perturbación estimada empleando el filtro definido en (51) con $\omega_c = 30$, con la señal senoidal como perturbación externa definida por $A \sin(2\pi ft + \varphi)$, donde $A = 0,1$, $f = 0,5$ y $\varphi = 0$, se observa en la figura 31, donde se aprecia que el control equivalente estima la señal senoidal externa con la misma frecuencia aunque distinta amplitud.

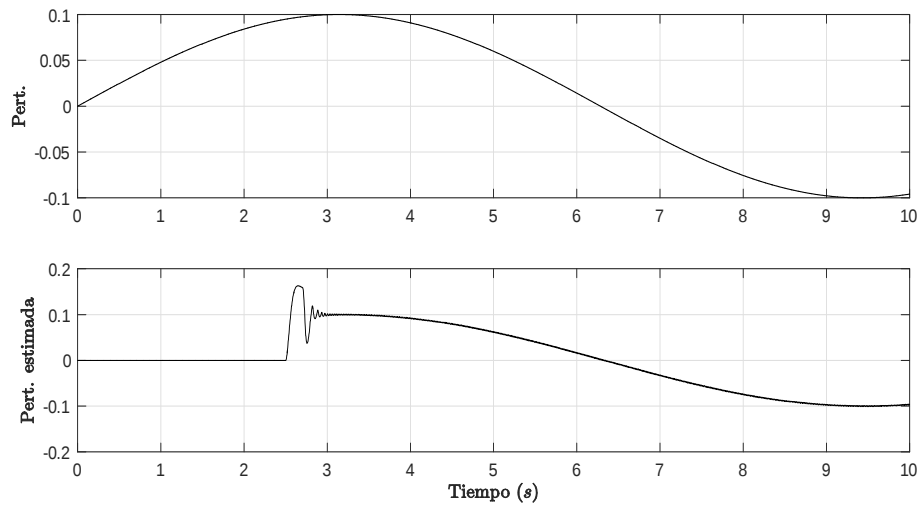


Figura 19. Perturbación estimada con señal senoidal externa.

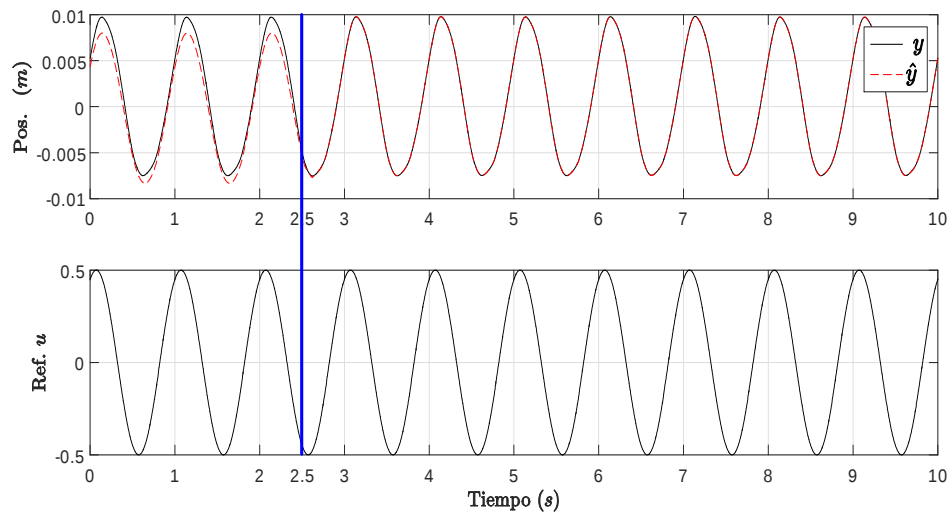


Figura 20. Desempeño experimental del observador de estado, sin perturbación agregada.

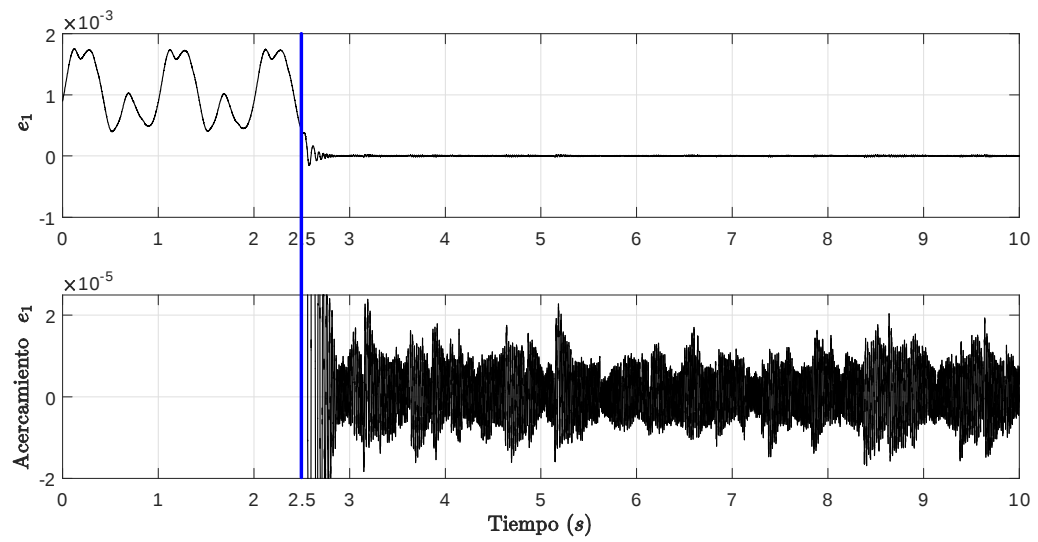


Figura 21. Error del observador de estado experimental sin perturbación anexda.

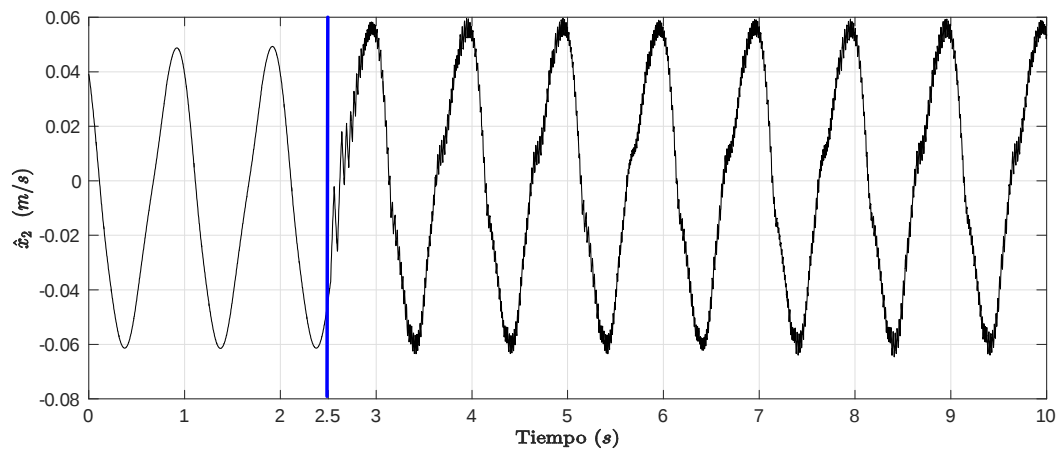


Figura 22. Velocidad estimada experimentalmente.

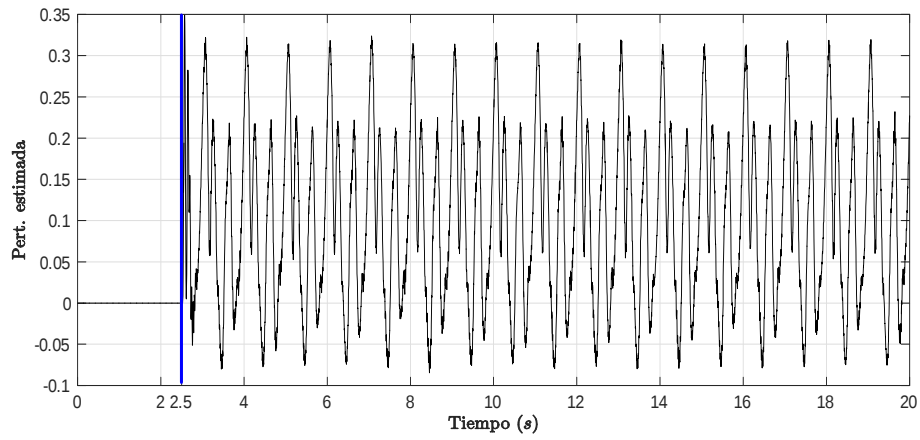


Figura 23. Perturbación estimada en experimentación, sin perturbación externa agregada.

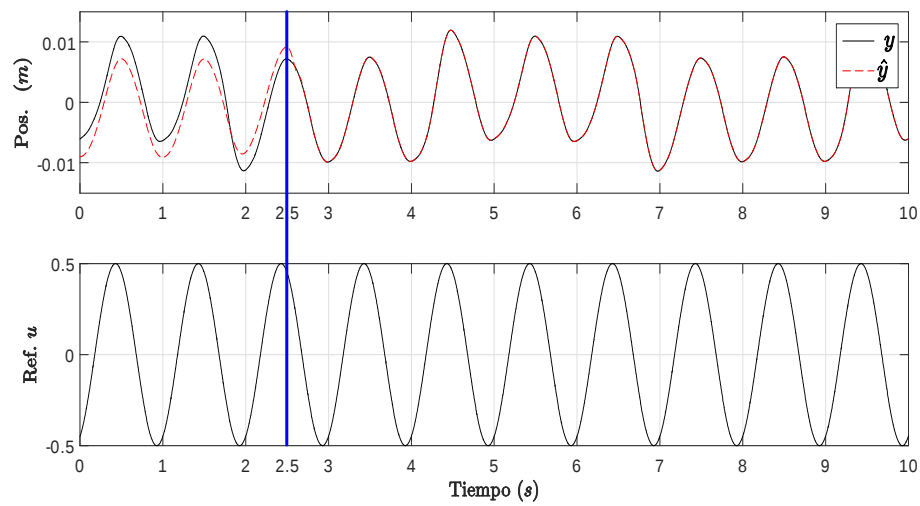


Figura 24. Desempeño experimental del observador de estado con perturbación externa agregada.

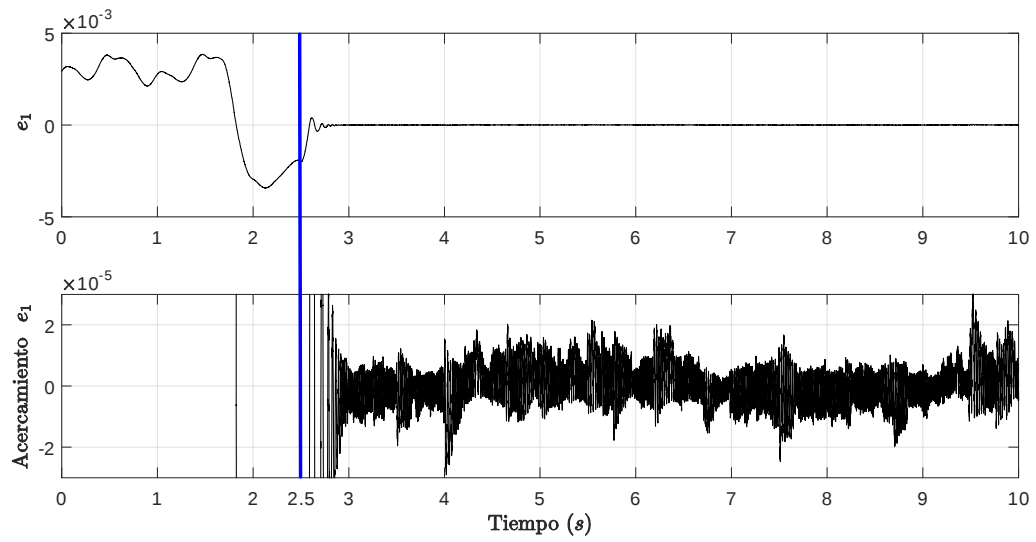


Figura 25. Error de estimación experimental con perturbación senoidal anexada.

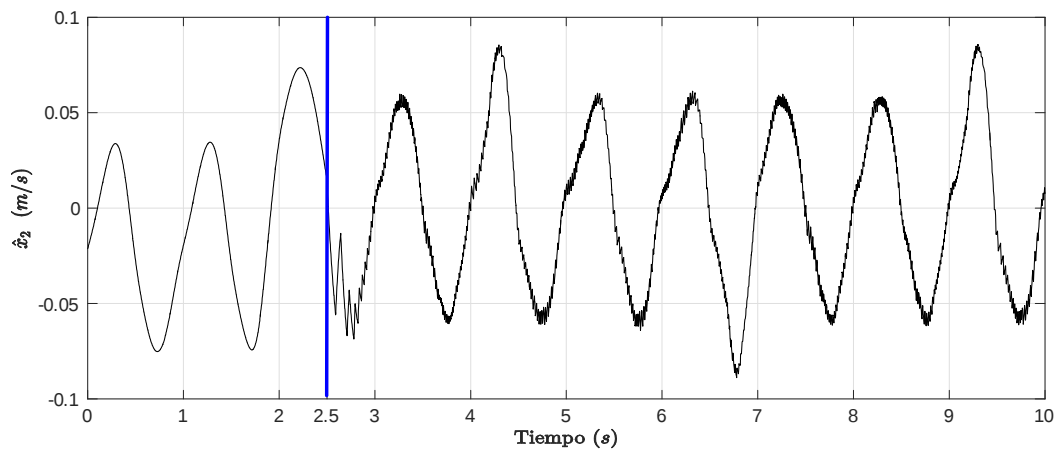


Figura 26. Velocidad estimada con perturbación de puslos cuadrados externa.

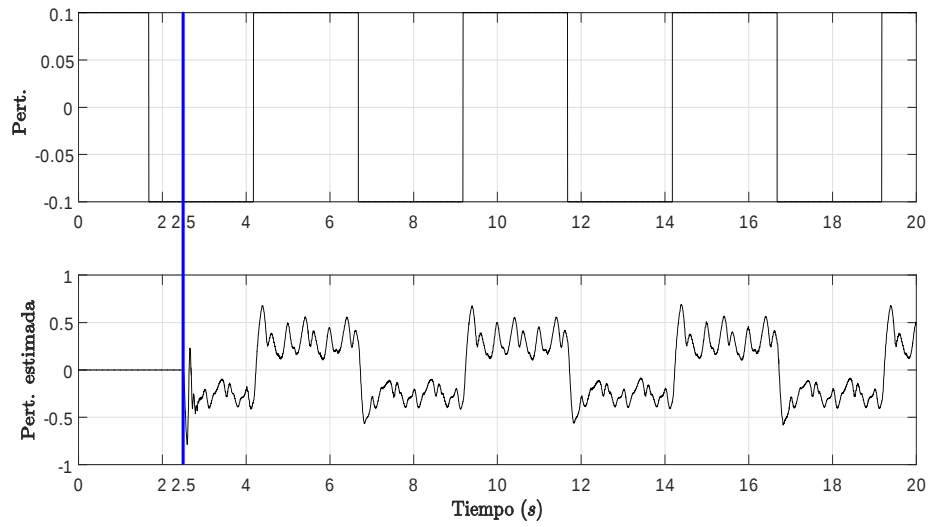


Figura 27. Perturbación estimada con señal de puslos cuadrados externa agregada.

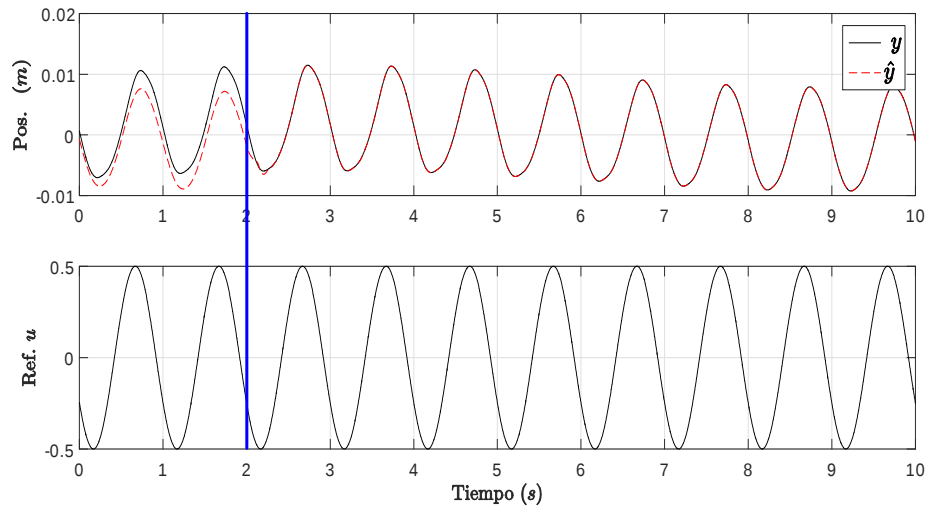


Figura 28. Desempeño experimental del observador de estado con perturbación senoidal externa.

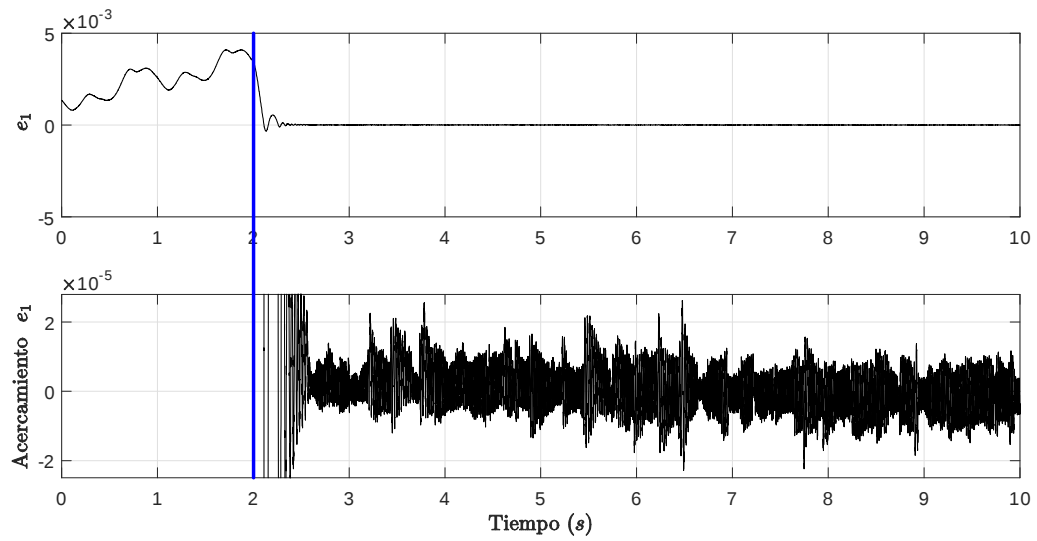


Figura 29. Error de la estimación del observador experimental con señal de perturbación senoidal externa.

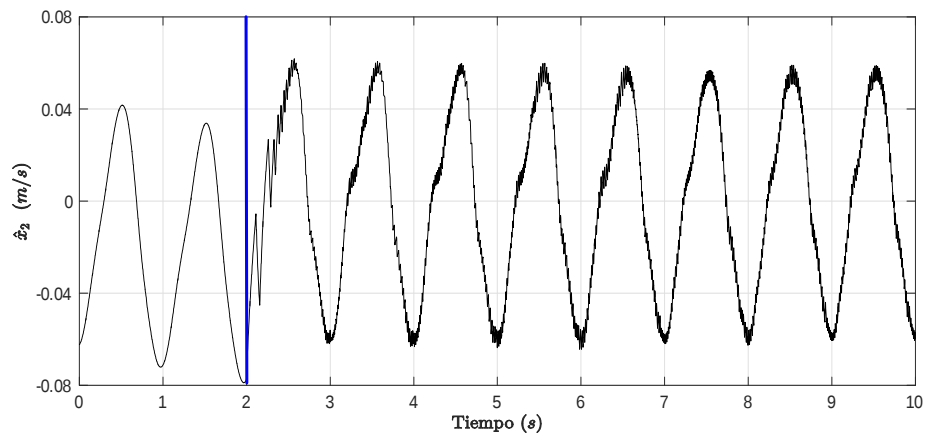


Figura 30. Velocidad estimada experimentalmente con señal senoidal externa.

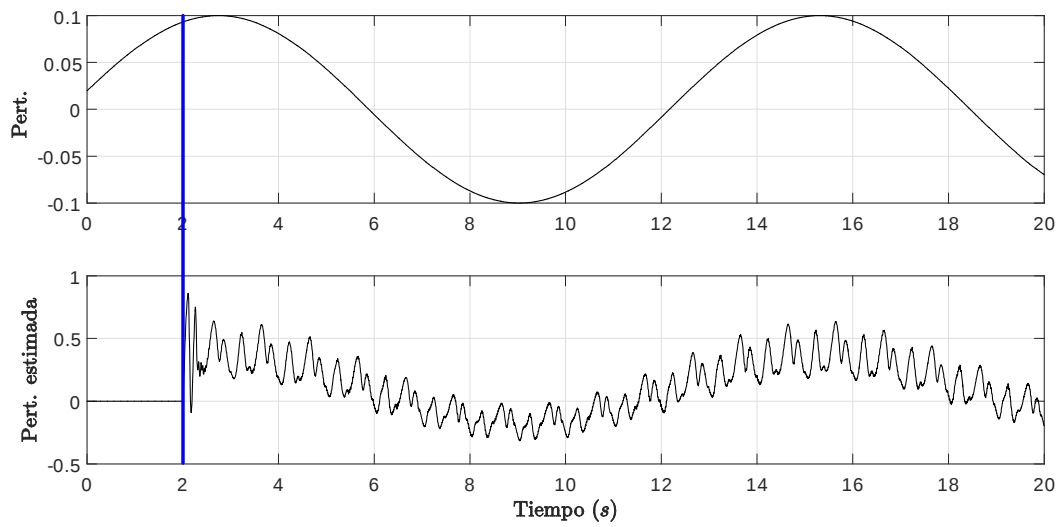


Figura 31. Perturbación experimental con señal senoidal externa como perturbación.

Capítulo 3

Metodología para la estimación de variaciones paramétricas utilizando el control equivalente y mínimos cuadrados

Como se presentó en el capítulo anterior, debido a la propiedad de linealidad con respecto a los parámetros en el modelo dinámico de sistemas mecánicos basado en las ecuaciones de Lagrange, las variaciones paramétricas generan un término que tiene la forma de regresor lineal. Este término se puede definir como una perturbación en el sistema que cumple con las condiciones de acoplamiento, por lo que puede ser estimado por diferentes tipos de observadores discontinuos, como los propuestos en [12], [24] y [25]. En particular, el observador de estado (31)-(32), propuesto en [24], ha mostrado un buen desempeño en la práctica para estimar las variables de estado y las perturbaciones en el sistema, ver por ejemplo [26]. Sin embargo, uno de los mayores retos para la identificación de perturbaciones es la elección de la frecuencia de corte de un filtro pasabajas, el cual es necesario para obtener la estimación de los términos de perturbación.

En este capítulo se propone una metodología que permite estimar las variaciones paramétricas en un sistema mecánico utilizando el observador de estado (31)-(32) y el algoritmo de mínimos cuadrados.

El observador de estado (31)-(32) para el sistema mecánico (29)-(30), tiene una superficie de discontinuidad en $z_1 = y - \hat{y} = 0$, donde el término $C_3 \text{sign}(z_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden, y el control equivalente resulta ser [24]

$$u_{eq} = -M^{-1}(q) \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta, \quad (52)$$

el cual se puede recuperar utilizando un filtro, o un conjunto de filtros, pasabajas de la forma

$$\frac{Y_f(s)}{U_f(s)} = G_f(s),$$

donde

$$u_f(t) = C_3 \text{sign}(z_1)$$

y $y_f(t)$ es la estimación del término $-M^{-1}(q) \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta$, entonces

$$\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta \simeq -M(q) y_f(t).$$

Uno de los principales problemas de esta estrategia es que no hay un criterio bien definido para la selección del filtro y su frecuencia de corte. Existen algunas recomendaciones como las dadas en [27] y [28], las cuales toman en cuenta una relación entre el periodo de muestreo que utiliza la plataforma, en donde se implementa el observador y el filtro, y la frecuencia de corte del filtro.

Uno de los filtros que ha mostrado buenos resultados es el filtro pasabajas de segundo orden dado por (51) donde ω_c es la frecuencia de corte del filtro [8], y una forma de seleccionar la frecuencia ω_c se aborda en [28].

Con la finalidad de generar la metodología, en la primera sección del capítulo se presentan algunos conceptos básicos sobre la regresión lineal y el algoritmo para la estimación de parámetros utilizando el control equivalente y mínimos cuadrados. En la segunda sección se presenta la estimación de las variaciones paramétricas en un sistema masa resorte amortiguador de 1GDL, lo que se hace en tres etapas: dos numéricas y una experimental. La primera etapa numérica tiene la finalidad de mostrar el funcionamiento del procedimiento bajo condiciones ideales, es decir, se asume que se conoce el valor de las variaciones paramétricas y se tienen disponibles los estados, la entrada del sistema y el término de perturbación real. En la segunda etapa numérica, se incorporan los estados estimados y el control equivalente recuperado, el cual corresponde a las perturbaciones estimadas. Sin embargo, al hacer esto, el procedimiento no funciona adecuadamente e incluso el proceso numérico se inestabiliza, por lo que

se propone un procesamiento adicional a las señales estimadas para eliminar componentes de alta frecuencia y el desfase incorporado por los filtros pasabajas. Después de esto, se propone una estrategia recursiva para lograr estimar las variaciones paramétricas, tomando como criterio la mínima potencia del control equivalente en cada iteración. Finalmente, en la tercera etapa, la cual es experimental, se aplica la metodología al sistema mecánico físico, obteniendo una mejor estimación que la obtenida por el procedimiento establecido por MathWorks[®] con el uso de la función *tfest* de Matlab[®] [13]. Con lo cual, se valida el procedimiento y se propone una metodología recursiva para estimar las variaciones paramétricas en sistemas mecánicos basada en el control equivalente y mínimos cuadrados. La metodología en forma detallada se presenta en la última sección.

3.1 Regresión lineal y estimación de parámetros a través del control equivalente

La regresión lineal es el modelo paramétrico más simple. La estructura del modelo puede ser escrita como

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta, \quad (53)$$

donde $y(t)$ es una señal medible, $\varphi(t)$ es un vector de dimensión n de cantidades conocidas y θ es un vector de dimensión n de parámetros desconocidos. Los elementos del vector $\varphi(t)$ se les llama variables de regresión o regresores mientras que a $y(t)$ se le conoce como la variable regresada, finalmente a θ se le denominará como el vector de parámetros. La variable t toma valores enteros, algunas veces denota el tiempo pero no es necesario que así sea.

Es directo extender el modelo (53) al caso multivariable

$$y(t) = \Phi^T(t) \theta, \quad (54)$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^P$, $\Phi(t)$ es una matriz de $n \times p$ y $\theta \in \mathbb{R}^n$ es el vector de parámetros. Por ejemplo, considere el polinomio

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

con coeficientes desconocidos a_0 , a_1 y a_2 , el cual se puede escribir en la forma de regresión (53) donde

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix},$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$$

El control equivalente (52) tiene la forma (54), por lo que se puede aplicar el método de mínimos cuadrados recursivos presentado en [7] y [18] para estimar el vector de parámetros θ . A continuación se presenta un breve resumen de dicho método.

Suponga que se desea encontrar el vector θ que minimice el índice J , que depende del error cuadrático entre el control equivalente y el término de perturbación real, dado por

$$J = \frac{1}{t} \int_0^t (u_{eq} - \Phi^T(\tau) \theta)^2 d\tau, \quad (55)$$

en este punto se asume que el control equivalente es una señal medida, y que se obtiene filtrando el término discontinuo en el observador de estado. Para minimizar el índice (55) se deriva y se iguala a cero, resultando en

$$\theta = \left[\int_0^t \Phi^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau \right]^{-1} \int_0^t \Phi^T(\tau) u_{eq} d\tau,$$

donde la matriz

$$\int_0^t \Phi^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau,$$

debe ser no singular.

Ahora se define una nueva variable

$$\Gamma_t = \left[\int_0^t \Phi^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau \right]^{-1}$$

y tomando en cuenta la identidad

$$\Gamma_t^{-1} \Gamma_t = I$$

cuya derivada es

$$\Gamma_t^{-1} \dot{\Gamma}_t + \dot{\Gamma}_t^{-1} \Gamma_t = 0,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma_t^{-1} \dot{\Gamma}_t &= -\dot{\Gamma}_t^{-1} \Gamma_t \\ &= -\Phi^T(\tau) \Phi(\tau) \Gamma_t, \end{aligned}$$

finalmente

$$\dot{\Gamma}_t = -\Gamma_t \Phi^T(\tau) \Phi(\tau) \Gamma_t. \quad (56)$$

Por otro lado se tiene que

$$\dot{\theta} = \Gamma_t \Phi^T(\tau) u_{eq} + \dot{\Gamma}_t \int_0^t \Phi^T(\tau) u_{eq} d\tau,$$

que se puede reescribir como

$$\dot{\theta} = \Gamma_t \Phi^T(\tau) (u_{eq} - \Phi^T(\tau) \theta). \quad (57)$$

Con las ecuaciones (56) y (57) se puede estimar el vector de variaciones paramétricas θ y calcular, en teoría, el valor real de los coeficientes del modelo del sistema mecánico .

Para implementar las ecuaciones (56) y (57) se necesita conocer la matriz de funciones $\Phi(t)$ y el control equivalente u_{eq} . En la práctica, es difícil extraer el control equivalente u_{eq}

debido a que no se tiene un criterio bien definido para seleccionar la frecuencia de corte que se debe de emplear en el filtro pasabajas.

Por otro lado, para aplicar la técnica anteriormente planteada, se requiere que la señal que se aplique a la planta cumpla con la condición de señal persistente que, para sistemas lineales, se puede interpretar que la señal de entrada contenga igual o más componentes armónicos como el número de polos en el sistema, para sistemas no lineales probar esta condición es más complicado [7] [2] [11]. Además, el filtro pasabajas atenuará e introducirá un desfase en las componentes de alta frecuencia en el control equivalente, lo que ocasionará diferencias entre el término de perturbación real y el control equivalente, lo que seguramente producirá errores en la estimación de los parámetros.

3.2 Estimación de parámetros en un mecanismo masa resorte amortiguador

Como una primera aplicación del método para la identificación de parámetros, definido por las ecuaciones (56) y (57), en esta sección se presenta la aplicación del proceso al sistema mecánico masa resorte amortiguador (MRA), con movimiento traslacional y de 1GDL, que se muestra en la figura 32.



Figura 32. Mecanismo masa resorte amortiguador (MRA).

3.2.1 Definición del modelo de la planta

El modelo del sistema MRA está dado por

$$(m_0 + \Delta_m) \ddot{x} + (\delta_0 + \Delta_\delta) \dot{x} + (k_0 + \Delta_k) x = (K_c + \Delta_{K_c}) u \quad (58)$$

donde m_0 , δ_0 , k_0 , y K_{c0} son los valores nominales de la masa, del coeficiente de fricción, de la constante de elasticidad del resorte y de la ganancia del actuador, respectivamente. Δ_m , Δ_δ , Δ_k y Δ_{K_c} son variaciones en los valores de los parámetros.

Una representación en variables de estado del sistema (58) es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= - \left(\frac{k_0 + \Delta_k}{m_0 + \Delta_m} \right) x_1 - \left(\frac{\delta_0 + \Delta_\delta}{m_0 + \Delta_m} \right) x_2 + \left(\frac{K_{c0} + \Delta_{K_c}}{m_0 + \Delta_m} \right) u, \\ y &= x_1, \end{aligned}$$

la cual se puede reescribir en la forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (59)$$

$$\dot{x}_2 = -(a + \Delta_a) x_1 - (b + \Delta_b) x_2 + (c + \Delta_c) u, \quad (60)$$

$$y = x_1, \quad (61)$$

donde a , b y c son los valores nominales de los coeficientes del sistema (59)-(61), y Δ_a , Δ_b y Δ_c es la diferencia entre el valor nominal de los coeficientes y el valor final considerando las variaciones paramétricas. Es importante notar que lo que se va a estimar son las variaciones Δ_a , Δ_b y Δ_c de los coeficientes a , b y c , no se estimarán en forma directa los variaciones de los parámetros Δ_m , Δ_δ , Δ_k y Δ_{K_c} .

Entonces el sistema (59)-(61) toma la forma

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (62)$$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2 + cu + \gamma(x_1, x_2, u), \quad (63)$$

$$y = x_1, \quad (64)$$

donde

$$\gamma(x_1, x_2, u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_b \\ -\Delta_c \end{bmatrix} = \varphi^T(t) \theta, \quad (65)$$

el término $\gamma(x_1, x_2, u)$ es la perturbación en el sistema y tiene la forma de regresor lineal, lo que permite la estimación de las variaciones paramétricas Δ_a , Δ_b y Δ_c . Considerando que se aplicarán señales de entrada u que produzcan un comportamiento acotado en el estado del sistema, se considera que

$$|\gamma(x_1, x_2, u)| < \sigma,$$

donde σ es una constante conocida.

El desarrollo detallado de la diferencia aritmética entre el modelo nominal del sistema MRA y el modelo que considera las variaciones paramétricas que permite obtener el término (65), se observa en las ecuaciones (19)-(20) en el primer capítulo.

3.2.2 Diseño de un observador de estado para estimación de perturbaciones

Considere la planta dada por la ecuación (62)-(64), un observador de estado para este sistema está dado por

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + c_1(y - \hat{y}), \quad (66)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -a\hat{x}_1 - b\hat{x}_2 + cu + c_2(y - \hat{y}) + c_3\text{sign}(y - \hat{y}), \quad (67)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (68)$$

se definen las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - c_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -c_2 e_1 - b e_2 + \gamma(x_1, x_2, u) - c_3 \text{sign}(e_1),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $z_1 = e_1$ y $z_2 = e_2 - c_1 e_1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -(c_2 + b c_1) z_1 - (b + c_1) z_2 - c_3 \text{sign}(z_1) + \gamma(x_1, x_2, u)\end{aligned}$$

Eligiendo adecuadamente las constantes c_1 , c_2 y c_3 se tiene que el control equivalente u_{eq} está dado por

$$u_{eq} = \gamma(x_1, x_2, u).$$

3.2.3 Identificación de parámetros

En esta sección se aplica el método de identificación de parámetros definido por (56) y (57) en el sistema MRA que se muestra en la figura 32, cuyo modelo definido en (59)-(61) puede sustituirse por un modelo nominal, dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (-174,2 + \Delta_a) x_1 + (-12,57 + \Delta_b) x_2 + (2,567 + \Delta_c) u,\end{aligned}$$

donde los parámetros nominales de este sistema, $a = -174,2$, $b = -12,570$ y $c = 2,567$, se obtuvieron aplicando un proceso de identificación de parámetros basado en la función *tfest* del *System Identification Toolbox* de Matlab[®] [13]. Para efectos de mostrar el desempeño del método de identificación, se agregan variaciones a estos coeficientes, dadas por Δ_a , Δ_b y Δ_c , con los siguientes valores

$$\begin{aligned}\Delta_a &= 10, \\ \Delta_b &= 2, \\ \Delta_c &= 0,5,\end{aligned}\tag{69}$$

entonces la perturbación tiene la forma

$$\gamma(x_1, x_2, u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_b \\ \Delta_c \end{bmatrix} = \varphi^T(t) \theta.$$

Considerando el modelo nominal de la planta (29)-(30), el observador (31)-(32) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + 7,43(y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -174,2\hat{x}_1 - 12,57\hat{x}_2 + 2,567u + 7,6049(y - \hat{y}) + 0,85\text{sign}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}_1. \end{aligned}$$

Este observador es el que será utilizado en todas las pruebas numéricas y experimentales de las siguientes secciones.

3.2.3.1 Paso 1: Resultados numéricos bajo condiciones ideales

Con la finalidad de verificar que el método de identificación definido por (56) y (57) trabaja correctamente, se hace una primera simulación numérica, en donde se incorporan los estados reales del sistema x_1 y x_2 , la entrada de control u en el vector $\varphi(t)$, así como el término de perturbación real $\gamma(\cdot) = u_{eq}$ que se necesita en la ecuación (57).

Haciendo una corrida con estas señales, las variaciones paramétricas que se identifican son

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_a &= 9,998, \\ \tilde{\Delta}_b &= 2, \\ \tilde{\Delta}_c &= 0,5, \end{aligned} \tag{70}$$

lo que es un resultado bastante cercano a los valores reales de las variaciones paramétricas establecidas en (69). Este resultado es importante ya que se puede asegurar el método de identificación funciona correctamente si se cuenta con las señales adecuadas.

3.2.3.2 Paso 2: Resultados numéricos bajo condiciones no ideales

Al incorporar las señales estimadas correspondientes a la velocidad y las perturbaciones en las ecuaciones (56) y (57), como son entregadas por el observador y el filtro pasabajas, el método de identificación no funciona adecuadamente ya que los valores estimados se alejan mucho de los valores reales de las variaciones paramétricas, principalmente el correspondiente a Δ_b y, en muchas ocasiones, el algoritmo numérico se inestabiliza y se desborda.

Al analizar lo que causa estos problemas se observó que la diferencia entre las señales originales y estimadas de velocidad y de perturbación difieren principalmente en el contenido de altas frecuencias, además de que hay un desfase en la señal de perturbaciones estimadas, como se muestra en la figura 33, en donde las líneas negras corresponden a las señales reales y las rojas a las señales estimadas, por lo que se optó por hacer un procesamiento fuera línea para eliminar este problema.

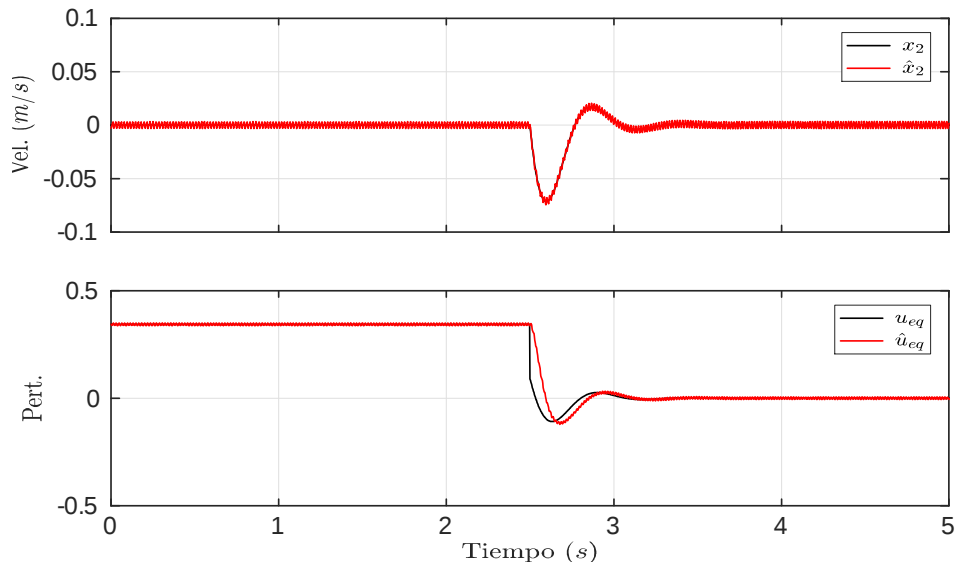


Figura 33. Comparación de la velocidad y perturbaciones estimadas con las reales.

El procesamiento consiste de dos pasos. El primer paso es filtrar la velocidad estimada con el filtro pasabajas utilizado para estimar el control equivalente $\hat{u}_{eq}$, a esta señal se le de-

nomina velocidad estimada filtrada $\hat{x}_{2f}$, con esto se elimina una parte del contenido de altas frecuencias y se introduce el mismo retardo que tiene el control equivalente estimado. El segundo paso es aplicar un algoritmo de ventana promediadora deslizante, tanto al control equivalente como a la señal de velocidad filtrada, con este procesamiento se eliminan más componentes de alta frecuencia y se corrige el desfaseamiento ya que se puede generar un adelanto de las señales, las señales obtenidas se denominan como control equivalente promedio $\bar{u}_{eq}$ y velocidad estimada promedio $\bar{x}_2$. En el caso particular de este experimento se aplicó una ventana deslizante con 1000 muestras de longitud, el resultado se muestra en la figura 34, en donde las líneas negras corresponden a las señales reales y las rojas a las señales estimadas después de ser promediadas. Esta figura se puede observar que las componentes de frecuencia se han disminuido considerablemente y se ha compensado el retardo introducido por el primer filtro, aunque hay una pequeña afectación en la amplitud de la señal y una pequeña deformación en los cambios abruptos.

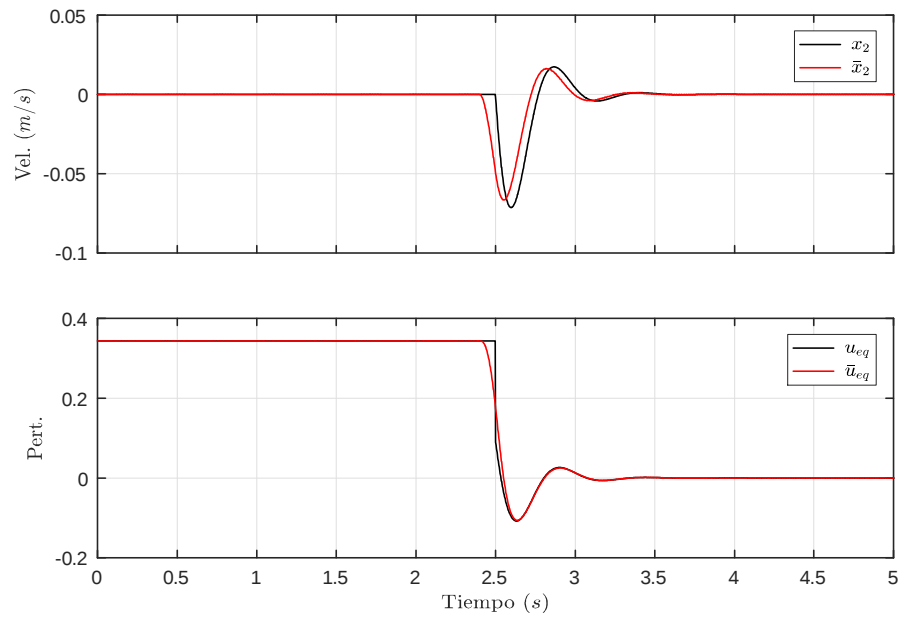


Figura 34. Comparación entre las señales de perturbación y velocidad originales con sus versiones estimadas procesadas.

Las señales promedio $\bar{u}_{eq}$ y $\bar{x}_2$ se introdujeron al vector $\varphi(t)$ y se ejecutó el algoritmo de identificación. Ya que en un primer resultado se obtuvieron variaciones paramétricas cercanas, pero no iguales, a los valores predefinidos de las variaciones paramétricas, se aplicó el algoritmo de identificación en forma recursiva para investigar si la estimación recursiva converge o trata de converger a los valores exactos; es decir, el algoritmo se ejecuta una vez, se obtiene la estimación de las variaciones de los parámetros y se actualizan los valores de los parámetros que corresponden a la planta dentro del observador. Con esto se busca que en la siguiente ejecución del algoritmo de identificación se haga una corrección en la estimación.

Para definir un criterio de cuándo detener la realización de iteraciones o establecer cual es la mejor estimación en todas las iteraciones realizadas, se propone usar a la potencia del control equivalente promediado u_{eq} , definida como

$$P(u_{eq}) = \frac{1}{n+1} \sum_n |u_{eq}(n)|^2, \quad (71)$$

como índice de calidad de la estimación en cada iteración; mientras menor sea el valor de $P(u_{eq})$, mejor es la estimación de las variaciones paramétricas.

En este paso se realizaron seis iteraciones, pero en la última sólo se calculó el control equivalente y su potencia, los resultados se muestran en las figuras 35 a la 40. En cada una de estas figuras se muestran 4 gráficas donde se puede observar la entrada u aplicada al sistema y al observador, la salida de la planta x_1 en comparación con la salida del observador $\hat{x}_1$, la velocidad estimada de la planta $\hat{x}_2$ en comparación con la velocidad estimada filtrada y promediada $\bar{x}_2$, y finalmente, el término discontinuo $c_3 \text{sign}(y - \hat{y})$ en comparación al control equivalente filtrado y promediado $\bar{u}_{eq}$. En cada una de estas figuras se muestra el valor de los parámetros de la planta que fueron utilizados en el observador de estado para estimar el control equivalente, así como la estimación de las variaciones paramétricas obtenidas con ese control equivalente. Estas estimaciones se incorporan al valor de los parámetros de la planta en el observador, y los valores actualizados se consideran en la siguiente iteración.

En la figura 35, que corresponde a la primera iteración, se consideraron los parámetros nominales de la planta en el observador $a = -174,2$, $b = -12,57$ y $c = 2,567$, se obtiene el control equivalente $\bar{u}_{eq}$ y su potencia $P(\bar{u}_{eq}) = 0,0619$, y se obtiene la primera estimación de las variaciones paramétricas $\tilde{\Delta}_a = 34,62$, $\tilde{\Delta}_b = 3,925$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,04298$.

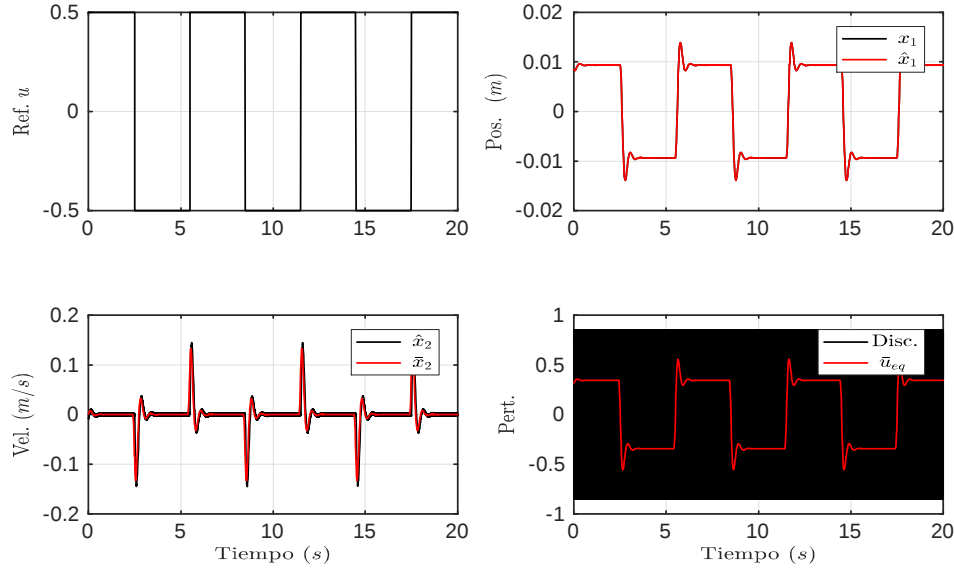


Figura 35. Iteración numérica 1. Parámetros de la planta en el observador $a = -174,2$, $b = -12,57$ y $c = 2,567$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 34,62$, $\tilde{\Delta}_b = 3,925$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,04298$.

En la segunda iteración, que corresponde a la figura 36, se actualizan los parámetros de la planta en el observador como $a = -139,58$, $b = -8,645$ y $c = 2,60998$. En esta iteración la potencia del control equivalente es $P(\bar{u}_{eq}) = 2,87 \times 10^{-4}$ y las variaciones estimadas fueron $\tilde{\Delta}_a = -18,34$, $\tilde{\Delta}_b = -1,223$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,324$. Los resultados de las iteraciones restantes se muestran en las figuras 37 a la 40, y los resultados de la potencia y de las estimaciones en cada iteración se muestran en la Tabla 1.

El comportamiento de la potencia $P(\bar{u}_{eq})$ durante las iteraciones se presenta en la figura 41, y de aquí se puede ver que el algoritmo hace una corrección muy fuerte desde la primera iteración, pero hasta la cuarta es cuando se obtienen las variaciones estimadas acumuladas que arrojan un menor nivel de potencia en el control equivalente. Por lo que, usando este criterio, la estimación de las variaciones paramétricas es la suma de las estimaciones en las

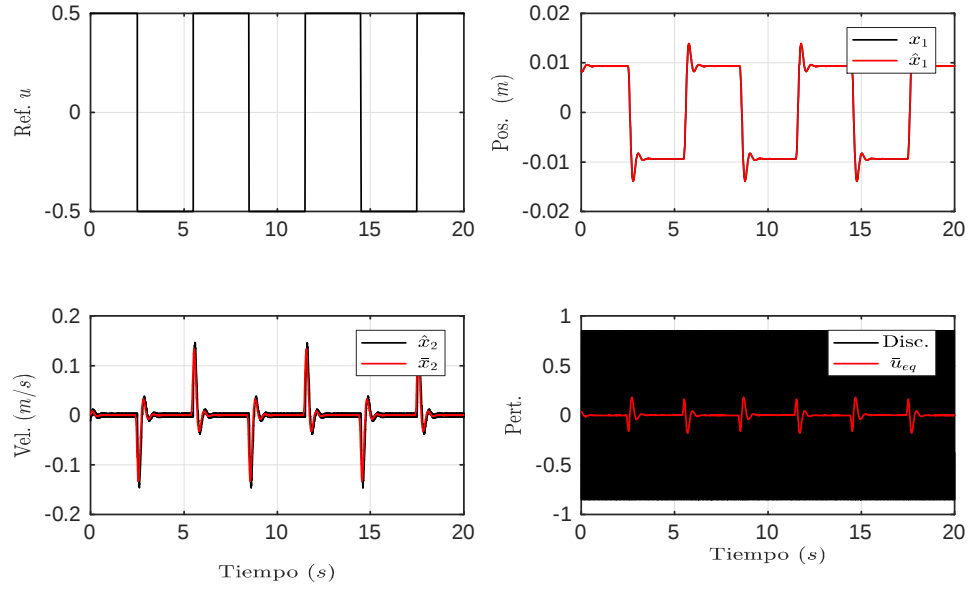


Figura 36. Iteración numérica 2. Parámetros de la planta en el observador $a = -139,58$, $b = -8,645$ y $c = 2,60998$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -18,34$, $\tilde{\Delta}_b = -1,223$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,324$.

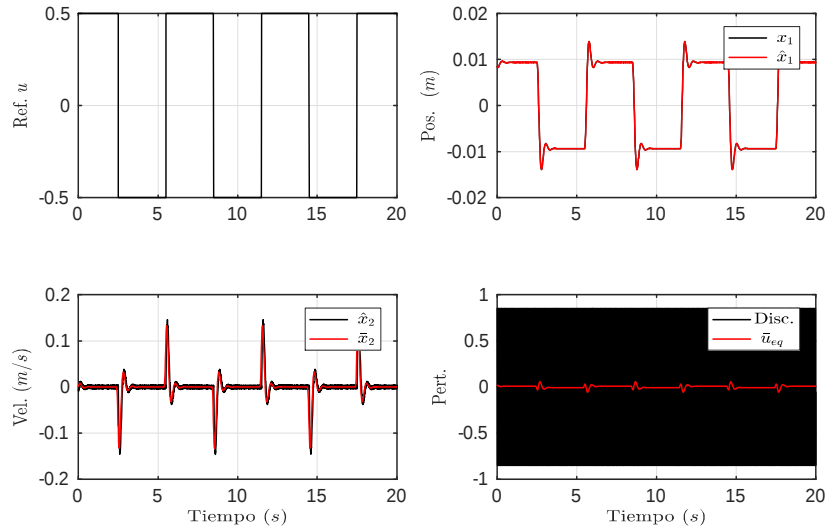


Figura 37. Iteración numérica 3. Parámetros de la planta en el observador $a = -157,92$, $b = -9,868$ y $c = 2,93398$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -5,214$, $\tilde{\Delta}_b = -0,5432$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,1078$.

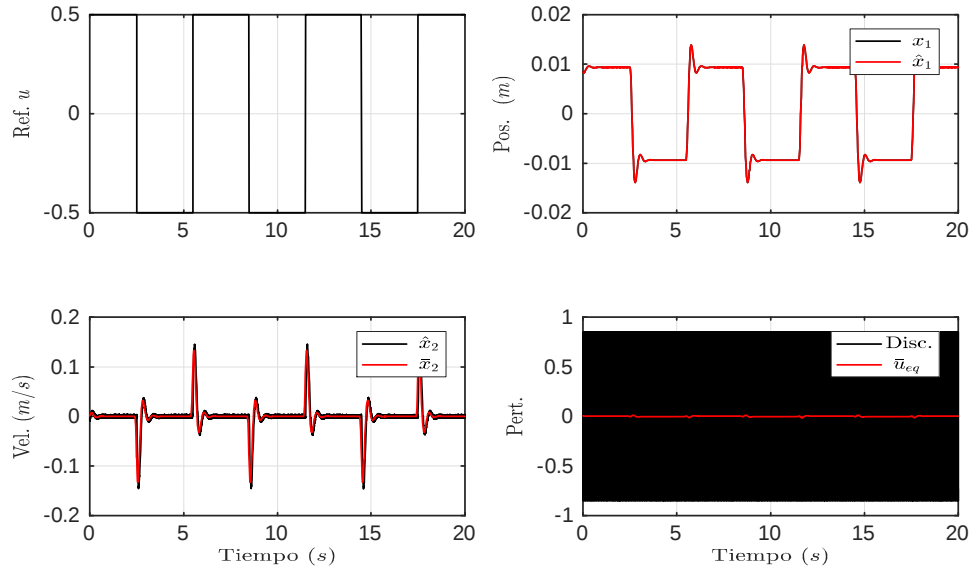


Figura 38. Iteración numérica 4. Parámetros de la planta en el observador $a = -163,134$, $b = -10,4112$ y $c = 3,04178$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -0,9983$, $\tilde{\Delta}_b = -0,1369$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,02287$.

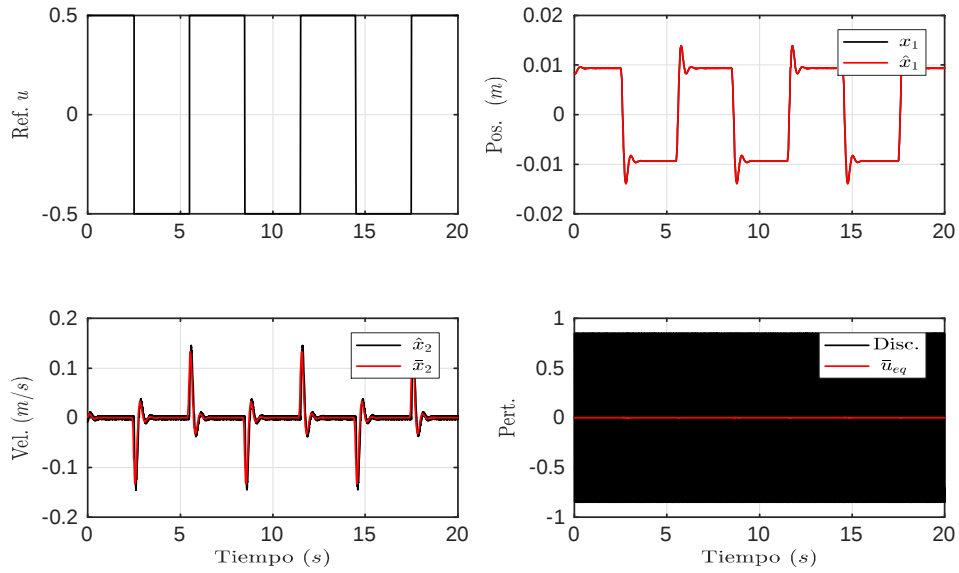


Figura 39. Iteración numérica 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -164,132$, $b = -10,5481$ y $c = 3,06465$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -0,09615$, $\tilde{\Delta}_b = -0,02213$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,002804$.

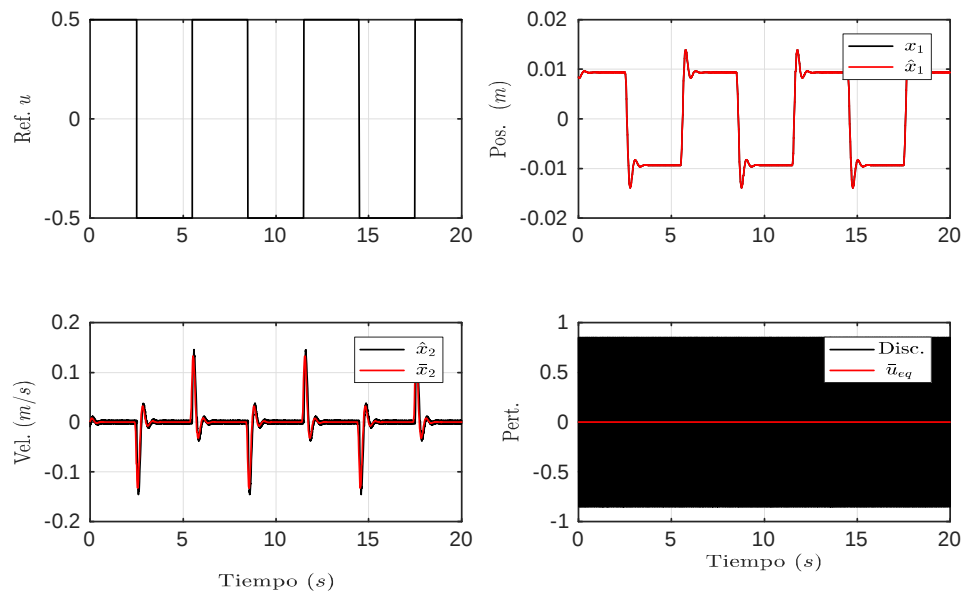


Figura 40. Simulación con los resultados de la Iteración numérica 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -164,228$, $b = -10,5702$ y $c = 3,067454$.

Iteración	$P(u_{eq})$	$\tilde{\Delta}_a$	$\tilde{\Delta}_b$	$\tilde{\Delta}_c$
1	0,1225	34,62	3,925	0,04298
2	$1,90 \times 10^{-3}$	-18,34	-1,223	0,324
3	$2,06 \times 10^{-4}$	-5,214	-0,5432	0,1078
4	$1,31 \times 10^{-5}$	-0,9983	-0,1369	0,02287
5	$4,71 \times 10^{-7}$	-0,09615	-0,02213	0,002804
6	$3,10 \times 10^{-8}$	—	—	—

Tabla 1. Resultados de la estimación de variaciones paramétricas en 6 iteraciones.

primeras cinco estimaciones, lo que resulta en

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_a &= 9,97155, \\ \tilde{\Delta}_b &= 1,99977, \\ \tilde{\Delta}_c &= 0,500454.\end{aligned}\tag{72}$$

Finalmente, en la figura 42 se puede observar una comparación entre el control equivalente inicial, es decir, el control equivalente al considerar los valores nominales de la planta, gráfica en negro, y el control equivalente que corresponde a la iteración seleccionada como la mejor estimación, gráfica en rojo, cuya potencia es $P(u_{eq}) = 3,10 \times 10^{-8}$.

Con estos resultados se puede formar la hipótesis de que el procesamiento fuera de línea para eliminar las componentes de alta frecuencia y los retardos, así como la aplicación en forma recursiva del método, permite estimar adecuadamente las variaciones paramétricas.

3.2.3.3 Paso 3: Resultados experimentales

Finalmente, se aplica la metodología al sistema mecánico físico que se muestra en la figura 32 utilizando el observador (66)-(68). En este caso se realizaron siete iteraciones y, al igual que en el caso numérico, en la última sólo se obtiene el control equivalente promedio $\bar{u}_{eq}$ y se calcula su potencia. Los resultados en cada iteración se muestran en las figuras 43 a 49, donde se puede observar la entrada u aplicada al sistema y al observador, la salida de la planta x_1 en comparación con la salida del observador $\hat{x}_1$, no se dispone de la velocidad medida por lo que la comparación se realiza entre la estimada $\hat{x}_2$ y velocidad estimada filtrada y promediada

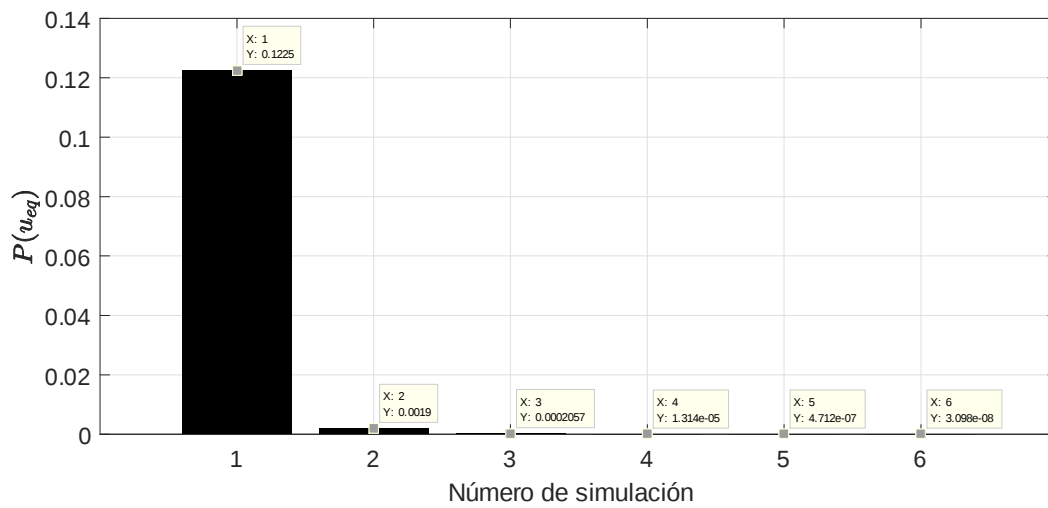


Figura 41. Evolución de la potencia del control equivalente para cada iteración numérica.

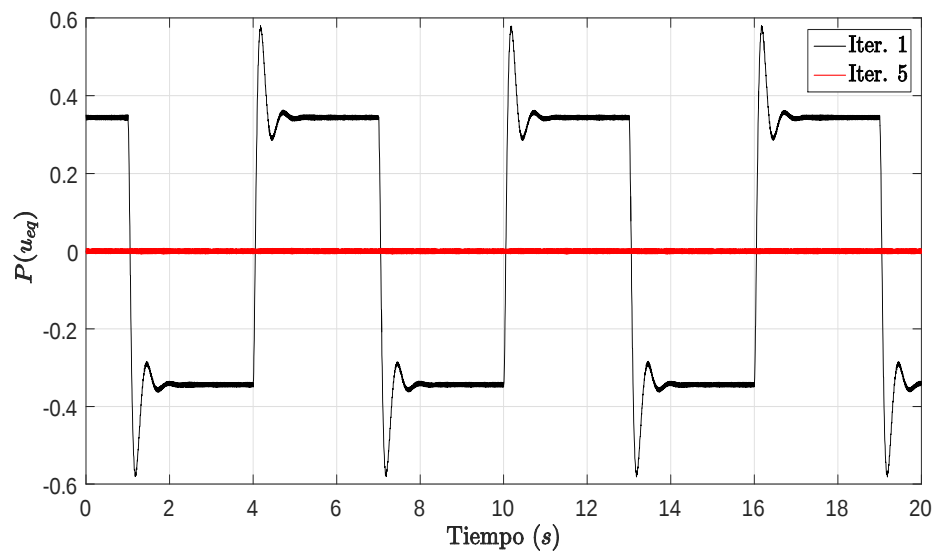


Figura 42. Resultados numéricos. Control equivalente u_{eq} en la primera iteración, gráfica en negro, y en la iteración donde se obtiene la mínima potencia $P(u_{eq})$, gráfica en rojo.

$\bar{x}_2$, y finalmente, el término discontinuo $c_3 \text{sign}(y - \hat{y})$ en comparación al control equivalente filtrado y promediado $\bar{u}_{eq}$. Un resumen de los resultados de cada iteración se muestra en la Tabla 2.

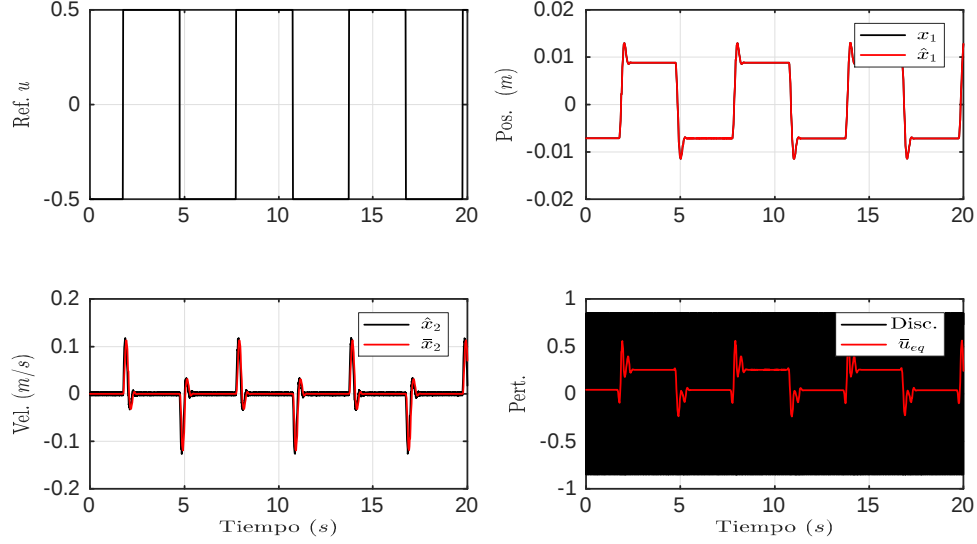


Figura 43. Iteración experimental 1. Parámetros de la planta en el observador $a = -174,2$, $b = -12,57$ y $c = 2,567$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 23,37$, $\tilde{\Delta}_b = 1,905$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,1532$.

El comportamiento de la potencia $P(\bar{u}_{eq})$ durante las iteraciones se presenta en la figura 50, donde se puede ver que el algoritmo hace una corrección fuerte desde la primera iteración y, a diferencia de la ejecución numérica, el nivel de potencia en el control equivalente no alcanza niveles tan bajos como en el caso numérico. El mínimo valor de la potencia se obtiene con la estimación de las variaciones paramétricas en la última iteración realizada, por lo tanto, se concluye que la mejor estimación está dada por

$$\tilde{\Delta}_a = 25,6076, \quad (73)$$

$$\tilde{\Delta}_b = 2,50283,$$

$$\tilde{\Delta}_c = -0,19226, \quad (74)$$

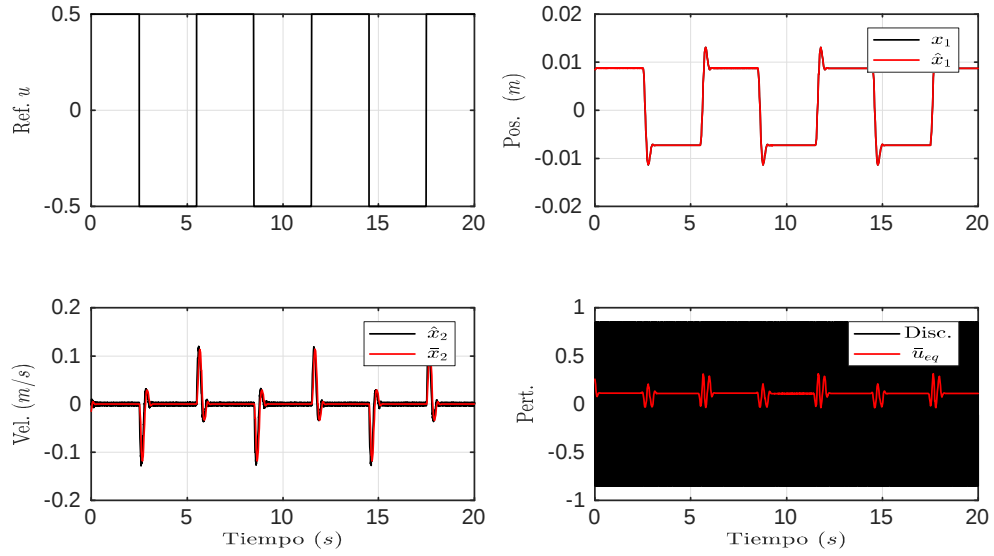


Figura 44. Iteración experimental 2. Parámetros de la planta en el observador $a = -150,83$, $b = -10,665$ y $c = 2,4138$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 8,006$, $\tilde{\Delta}_b = 0,4031$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,1021$.

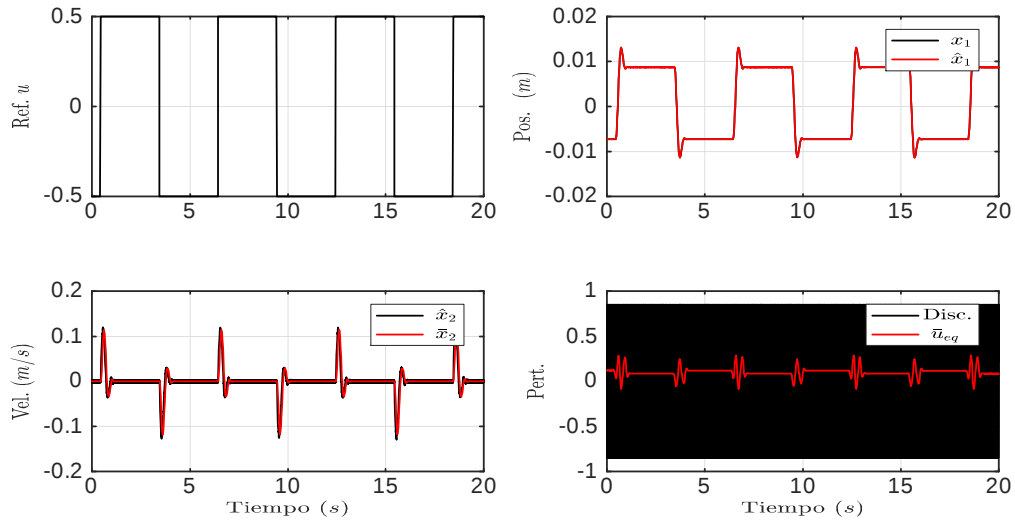


Figura 45. Iteración experimental 3. Parámetros de la planta en el observador $a = -142,824$, $b = -10,2619$ y $c = 2,3117$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 1,405$, $\tilde{\Delta}_b = 0,2873$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,03633$.

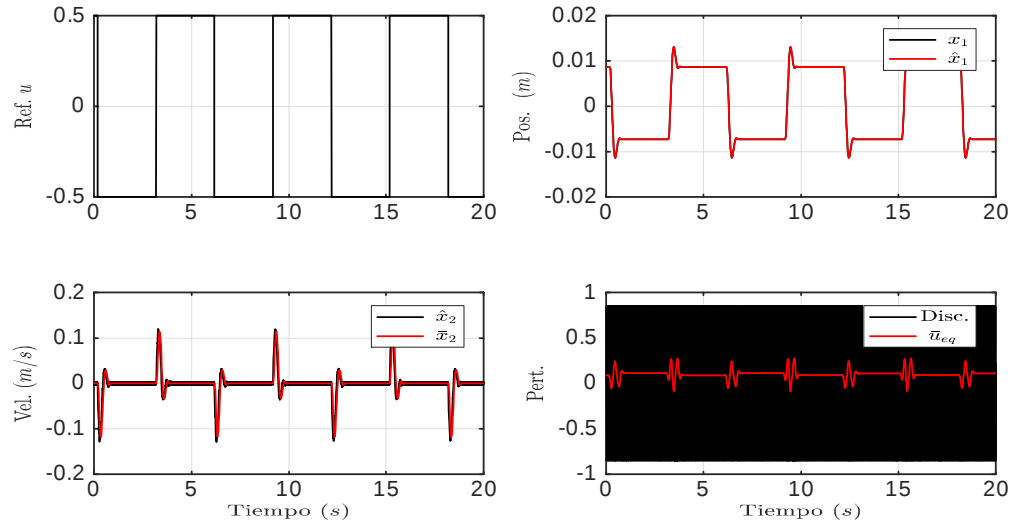


Figura 46. Iteración experimental 4. Parámetros de la planta en el observador $a = -141,419$, $b = -9,9746$ y $c = 2,27537$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 1,016$, $\tilde{\Delta}_b = -0,03397$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,02611$.

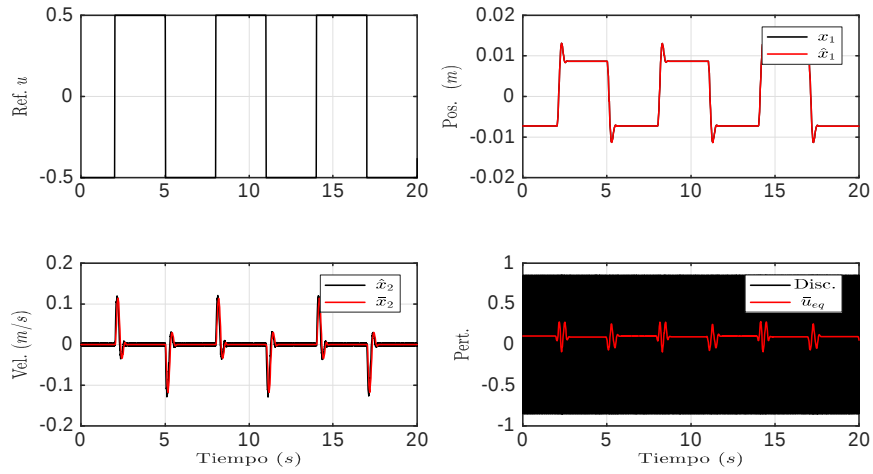


Figura 47. Iteración experimental 5. Parámetros de la planta en el observador $a = -140,403$, $b = -10,0086$ y $c = 2,24926$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = 0,7716$, $\tilde{\Delta}_b = 0,0786$ y $\tilde{\Delta}_c = -0,01672$.

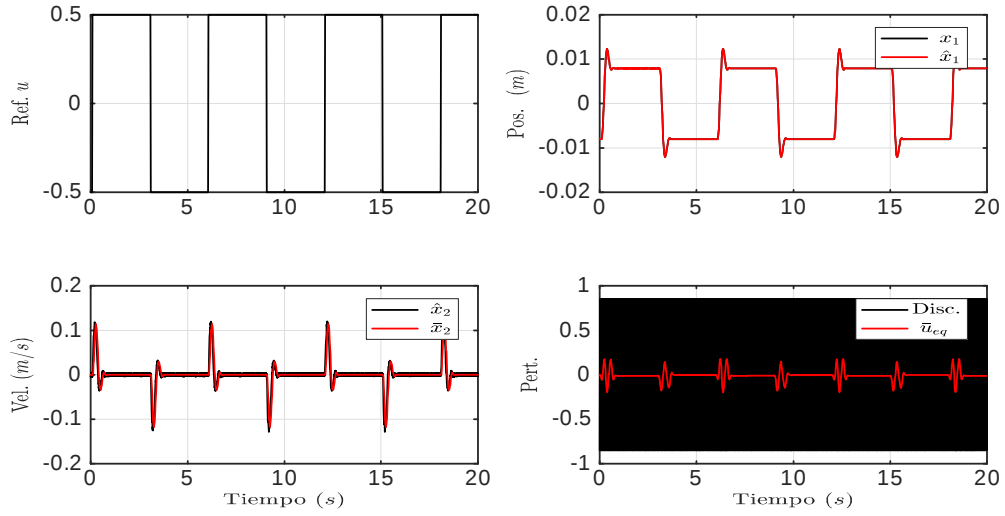


Figura 48. Iteración experimental 6. Parámetros de la planta en el observador $a = -139,631$, $b = -9,92997$ y $c = 2,23254$. Con estimaciones $\tilde{\Delta}_a = -8,961$, $\tilde{\Delta}_b = -0,1372$ y $\tilde{\Delta}_c = 0,1422$.

como consecuencia, el valor de los parámetros de la función de transferencia del sistema mecánico son

$$\begin{aligned} a &= 148,592, \\ b &= 10,0672, \\ c &= 2,37474. \end{aligned} \tag{75}$$

Finalmente, en la figura 51 se puede observar una comparación entre el control equivalente inicial, es decir, el control equivalente al considerar los valores nominales de la planta, gráfica en negro, y el control equivalente que corresponde a la iteración seleccionada como la mejor estimación, gráfica en rojo.

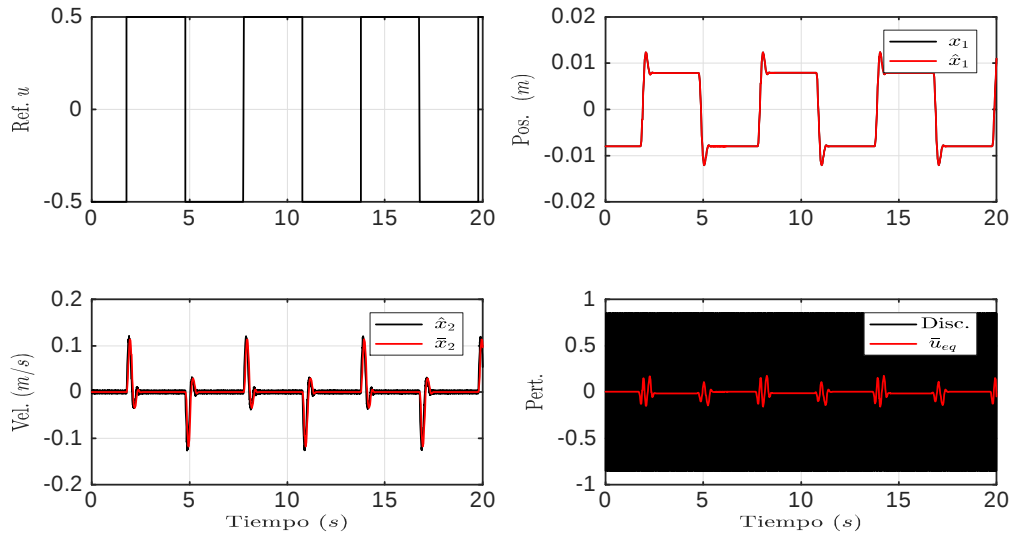


Figura 49. Simulación con los resultados de la Iteración numérica 6. Parámetros de la planta en el observador $a = -148,592$, $b = -10,0672$ y $c = 2,37474$.

3.3 Metodología propuesta para estimar parámetros en sistemas mecánicos en base al control equivalente y mínimos cuadrados

Con base en los resultados numéricos y experimentales presentados anteriormente, en esta sección se propone una metodología para la estimación de parámetros en modelos de sistemas mecánicos, basados en las ecuaciones de Lagrange, utilizando el control equivalente y mínimos cuadrados.

La metodología está compuesta por los siguientes pasos.

- (1) *Modelado del sistema mecánico.* El primer paso de la metodología es definir el modelo del sistema mecánico al cual se desea estimar las variaciones paramétricas. En este paso se debe de definir el término de perturbación con la forma de regresión lineal; de esta forma se debe de definir el vector o matriz $\varphi(t)$ y el vector de variaciones paramétricas θ .
- (2) *Definición de parámetros nominales de la planta.* La metodología de identificación de parámetros que se propone en este capítulo estima variaciones de los parámetros a partir

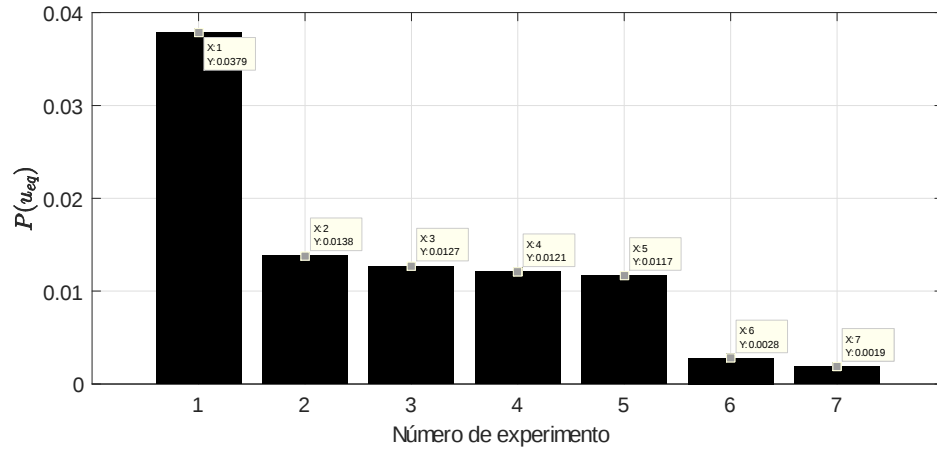


Figura 50. Evolución de la potencia del control equivalente para cada iteración numérica.

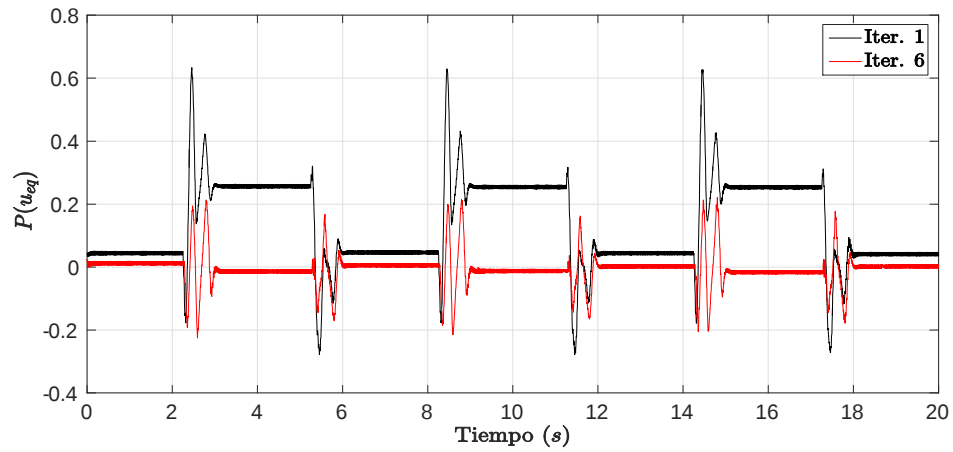


Figura 51. Resultados experimentales. Control equivalente u_{eq} en la primera iteración, gráfica en negro, y en la iteración donde se obtiene la mínima potencia $P(u_{eq})$, gráfica en rojo.

Iteración	$P(u_{eq})$	$\tilde{\Delta}_a$	$\tilde{\Delta}_b$	$\tilde{\Delta}_c$
1	0,0379	23,37	1,905	-0,1532
2	0,0138	8,006	0,4031	-0,1021
3	0,0127	1,405	0,2873	-0,03633
4	0,0121	1,016	-0,03397	-0,02611
5	0,0117	0,7716	0,0786	-0,01672
6	$2,8 \times 10^{-3}$	-8,961	-0,1372	0,1422
7	$1,9 \times 10^{-3}$	—	—	—

Tabla 2. Resultados experimentales de la identificación de variaciones paramétricas.

de valores nominales. Es por eso que, utilizando alguna metodología o por conocimiento empírico, se debe de proponer un conjunto de parámetros nominales de la planta. La importancia de estos valores nominales es que a partir de aquí se realizarán las correcciones, y la sintonización del observador de estado se realizará utilizando estos parámetros.

- (3) *Garantizar una salida acotada para una entrada acotada.* Los experimentos para obtener los datos necesarios para estimar las variaciones paramétricas se hacen con la planta en lazo abierto, garantizando de que la salida de la planta sea acotada al aplicar una entrada acotada. Las señales que se recomienda aplicar son del tipo escalón o una serie de pulsos de diferentes amplitudes. Para sistemas mecánicos en donde no se pueda asegurar que la salida sea acotada para este tipo de señales de entrada será necesario agregar una retroalimentación para asegurarlo. Pero en este caso, se debe de redefinir el término $\varphi(t)$ y θ , en base a como se modifica la planta con esta retroalimentación. Finalmente, debe quedar definida una estrategia para obtener las variaciones paramétricas en el sistema en lazo abierto.
- (4) *Diseño del observador de estado.* En base al modelo nominal de la planta, el siguiente paso es diseñar el observador robusto (66)-(68) que tiene la finalidad de estimar los estados, necesarios para implementar cada elemento de matriz $\varphi(t)$, y el control equivalente. En este paso también se deben de incorporar los filtros pasa bajas para estimar el control equivalente y filtrar la velocidad estimada por el observador; ambos filtros deben tener las mismas características; la estructura, el orden y la frecuencia de corte.
- (5) *Diseño de los experimentos.* Se debe conectar el observador de estado y la planta como se

muestra en la figura 52 [8], y aplicar señales de tipo escalón a la entrada. La amplitud y la frecuencia de la señal de entrada deben de ser de tal forma que la salida de la planta sea acotada y que alcance su valor en estado estable antes de que haya un cambio en el nivel de la señal de entrada. Se deben de almacenar los datos necesarios para formar la matriz $\varphi(t)$, así como el control equivalente estimado.

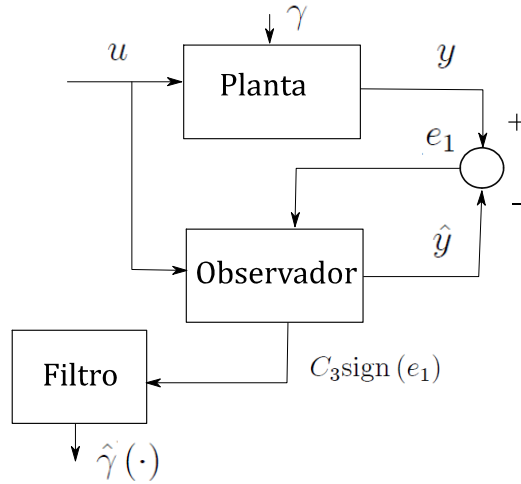


Figura 52. Esquema de conexión de la planta, el observador de estado y filtro.

- (6) *Definición del índice de calidad de la estimación de las variaciones paramétricas.* Para tener un criterio de la mejor estimación de las variaciones se define la potencia del control equivalente como

$$P(u_{eq}) = \frac{1}{n+1} \sum_n |u_{eq}(n)|^2.$$

- (7) *Aplicar un procesamiento fuera de línea al control equivalente y a la velocidad estimada.* Los componentes de alta frecuencia en las señales estimadas pueden causar problemas en el proceso de identificación, por lo que es necesario aplicar un procesamiento fuera de línea para eliminarlas o atenuarlas. Una opción es aplicar una ventana deslizante promediadora con n elementos. Ya que este proceso es fuera de línea, puede servir para corregir el defasamiento generado por los filtros pasabajas.
- (8) *Implementación de las ecuaciones que definen el proceso de estimación de variaciones*

paramétricas. En un programa implementar las ecuaciones (56) y (57), en donde las señales de entrada son el vector $\varphi(t)$ y el control equivalente, donde cada una de las señales ha sido procesada adecuadamente.

(9) Ejecución de $k + 1$ iteraciones

(a) Ejecución de la primera iteración

(b) Ejecución de la $i - \text{ésima}$ iteración

(c) Ejecución de la $k - \text{ésima}$ iteración

(d) Ejecución de la $k + 1$ iteración

(10) *Selección de la estimación óptima de variaciones paramétricas*. Se hace una gráfica de la potencia del control equivalente para cada una de las $k + 1$ iteraciones. Se selecciona la iteración j que resulte en la mínima potencia en el control equivalente. Las variaciones paramétricas son la sumatoria de las variaciones paramétricas identificadas desde la iteración 1 hasta la iteración j .

Capítulo 4

Estimación de parámetros utilizando el método de identificación directa basado en VSS

Los sistemas dinámicos con estructura variable (VSS, por sus siglas en inglés *Variable Structure Systems*) que presentan modos deslizantes tienen dos características principales: la característica de ganancia alta cerca de la superficie de discontinuidad y la frecuencia de conmutación de estructuras, teóricamente infinita, que conduce al modo deslizante.

Los métodos de identificación basados en VSS se basan en el hecho de que mientras el modo deslizante se presenta, la conmutación de la entrada de control refleja las incertidumbres del sistema, las cuales pueden estar directamente relacionadas con los parámetros como en los sistemas mecánicos modelados por las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Entonces si se puede definir algún algoritmo para extraer esta información se podrán estimar las perturbaciones o los parámetros en una forma precisa [11].

En [11] se presenta un método de identificación mediante un algoritmo que estima los coeficientes del modelo de sistemas no lineales con una entrada y una salida (*SISO*, por sus siglas en inglés *Single Input Single Output*), el cual utiliza un modelo de identificación cuya estructura es similar a la de los sistemas identificados, que podría verse como un estimador de perturbaciones el cual necesita la medición del vector de estado completo de la planta. El método también incorpora un sistema dinámico, denominado identificador, el cual tiene como entrada las perturbaciones estimadas y obtiene un estimado de los parámetros de la planta. A este método se le ha denominado método de identificación directa basado en sistemas de estructura variable (VSS).

Este método se presenta como un algoritmo alternativo para identificación de sistemas dinámicos no lineales en base al control equivalente y que, como resultado, estima el vector

completo de los coeficientes de la planta sin la necesidad de conocer valores nominales de éstos. La estimación la realiza en tiempo real y no necesita un proceso recursivo como el algoritmo presentado en el capítulo anterior el cual utiliza los mínimos cuadrados recursivos.

Debido a que el método directo original requiere del vector de estado completo, su desempeño sólo puede probarse numéricamente, por lo que en este capítulo se proponen dos modificaciones de dicho algoritmo para que pueda ser implementado en forma experimental. En la primera sección del capítulo se presenta el algoritmo original del método de identificación directa basado en VSS y sus resultados numéricos en la aplicación a un sistema masa resorte amortiguador (MRA). En la segunda sección se presenta una modificación al algoritmo original en la que se sustituye el identificador por un observador de estado robusto, lo que permite implementar el método de identificación directa en un sistema mecánico MRA, tanto numérica como experimentalmente, en esta sección se presentan únicamente los resultados numéricos. En la tercera sección se presenta una segunda modificación en la que, además de incluir el observador de estado de la segunda sección, se modifica la sección que estima los coeficientes del sistema, sustituyendo el término discontinuo generado por el algoritmo original por el término discontinuo del propio observador empleado en la estimación del vector de estado, donde se presentan los resultados numéricos de su aplicación a un sistema MRA. En la cuarta sección se presentan por separado los resultados experimentales de las pruebas realizadas, tanto en la aplicación del algoritmo modificado de la segunda sección de este capítulo, como la aplicación del algoritmo modificado en la tercera sección.

4.1 Descripción del algoritmo original

Considere un sistema no lineal SISO de la forma

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (76)$$

$$\dot{x}_n = \rho(x, p, t) + \lambda(x, p, t)u, \quad (77)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, el cual se considera completamente medible, $u \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada del sistema, que también se considera medible, y $p \in \mathbb{R}^{n_p}$ es el

vector de parámetros desconocidos. El vector p está definido como

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{n_p} \end{bmatrix},$$

donde cada p_i satisface

$$p_{i_{\min}} \leq p_i \leq p_{i_{\max}},$$

es decir, p se encuentra en el espacio de parámetros $P \{p_i \in [p_{i_{\min}}, p_{i_{\max}}] \ i = 1, \dots, n_p\}$.

Además, se asume que las funciones no lineales $\rho(\cdot)$ y $\lambda(\cdot)$ satisfacen lo siguiente

$$\begin{aligned} \rho(x, p, t) &= \theta^T(p) \xi, \\ \lambda(x, p, t) &= \lambda' + \lambda'' = \lambda' + \phi^T(p) \eta, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta^T &= [\theta_1, \dots, \theta_{n_1}], \\ \phi^T &= [\phi_1, \dots, \phi_{n_2}], \\ \xi^T &= [\xi_1, \dots, \xi_{n_1}], \\ \eta^T &= [\eta_1, \dots, \eta_{n_1}], \end{aligned}$$

donde λ' es una constante. $\xi_i = \xi_i(x, t)$ y $\eta_i = \eta_i(x, t)$ son funciones lineales o no lineales con respecto al estado. $\theta_i = \theta_i(p)$ y $\phi_i = \phi_i(p)$ son funciones que dependen en general de todos los valores de los parámetros p_i . Los subíndices n_1 y n_2 denotan las dimensiones de θ y ϕ , respectivamente.

Nota 1. Note que sistemas lineales SISO con el mismo orden pueden ser considerados como un caso especial de un sistema no lineal si los términos no lineales son linealizados.

En este caso, la ecuación (77) puede reescribirse como

$$\dot{x}_n = \alpha(p)^T \zeta(x, u, t) \tag{78}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha(p) &= \begin{bmatrix} \theta^T & \phi^T \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} [\theta_1, \dots, \theta_{n_1}] & [\phi_1, \dots, \phi_{n_2}] \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \theta_1(p) \\ \vdots \\ \theta_{n_1}(p) \\ \phi_1(p) \\ \vdots \\ \phi_{n_2}(p) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \zeta(x, u, t) &= \begin{bmatrix} \xi^T & \eta^T & u \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} [\xi_1, \dots, \xi_{n_1}] & [\eta_1, \dots, \eta_{n_2}] & u \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \xi_1(x, t) \\ \vdots \\ \xi_{n_1}(x, t) \\ \eta_1(x, t) u \\ \vdots \\ \eta_{n_2}(x, t) u \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Se suponen cotas mínimas y máximas en cada elemento p_i del vector p , entonces cada elemento de $\theta(p)$ y $\phi(p)$ tienen cotas mínimas y máximas que satisfacen

$$\begin{aligned}
 \theta_{i \text{ mín}} &\leq \theta_i(p) \leq \theta_{i \text{ máx}}, \\
 \phi_{i \text{ mín}} &\leq \phi_i(p) \leq \phi_{i \text{ máx}}.
 \end{aligned}$$

4.1.1 Algoritmo de identificación directo

El modelo del identificador está dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_i &= \hat{x}_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n-1), \\
 \dot{\hat{x}}_n &= \hat{\alpha}_0^T(t) \zeta + v,
 \end{aligned}$$

donde $\hat{\alpha}_0(t)$ es un vector de parámetros variantes en el tiempo el cual es calculado en términos del vector de parámetros ajustables $\hat{\alpha}(t)$ y sus cotas. La definición de cada elemento del vector $\hat{\alpha}_0(t)$ es

$$\hat{\alpha}_{i0}(t) = \begin{cases} \alpha_{i\text{mín}} & \text{si } \hat{\alpha}_i(t) < \alpha_{i\text{mín}} \\ \hat{\alpha}_i(t) & \text{si } \alpha_{i\text{mín}} \leq \hat{\alpha}_i(t) \leq \alpha_{i\text{máx}} \\ \alpha_{i\text{máx}} & \text{si } \hat{\alpha}_i(t) > \alpha_{i\text{máx}} \end{cases}$$

donde $\hat{\alpha}(t)$ es el vector de parámetros ajustables del identificador VSS, y v es una entrada para la identificación que genera un modo deslizante, dada por

$$v = v_c + v_v,$$

donde

$$\begin{aligned} v_c &= \sum_{i=1}^{n-1} h_i (x_{i+1}(t) - \hat{x}_{i+1}(t)), \\ v_v &= d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma), \end{aligned}$$

donde el vector $|\zeta|_1$ se define como

$$|\zeta|_1 = [|\zeta_1|, \dots, |\zeta_n|]^T,$$

y d es definida como

$$\begin{aligned} d^T &= [d_1, \dots, d_{n_1}, d_{n_1+1}, \dots, d_{n_1+n_2}], \\ d_i &= |\alpha_{i\text{máx}} - \alpha_{i\text{mín}}| \quad i = 1, \dots, n_1 + n_2. \end{aligned}$$

La superficie de discontinuidad se define como

$$\sigma = \sum_{i=1}^n h_i (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) \quad (h_n = 1)$$

donde h_i es un coeficiente de un polinomio que satisface las condiciones de Hurwitz.

El siguiente teorema explica el algoritmo de identificación de sistemas y muestra la propiedad de convergencia.

Teorema 6. Suponga que el vector ζ definido como [11]

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi^T & \eta^T u \end{bmatrix}^T$$

está formado por un conjunto de funciones linealmente independientes, y que el sistema presenta un modo deslizante. Entonces, los parámetros ajustables convergen a su valor real asintóticamente construyendo el identificador directo de la forma

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = \Gamma \zeta \omega$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i(0) &= \frac{1}{2} (\alpha_{i\min} + \alpha_{i\max}) \quad i = 1, \dots, n_1 + n_2, \\ \omega &= v_{eq} - v_c + (\hat{\alpha}_0(t) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta, \end{aligned}$$

donde u_{eq} es el control equivalente de la entrada, y $\Gamma = \Gamma^T > 0$.

Demostración 1. Primero se muestra la existencia de un modo deslizante. Primero la superficie de discontinuidad debe ser atractora

$$\sigma \dot{\sigma} < 0.$$

Se definen las variables de error $e_i = x_i - \hat{x}_i$, para $i = 1, \dots, n$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= \dot{x}_n - \dot{\hat{x}}_n \\ &= \alpha(p)^T \zeta - \hat{\alpha}_0^T(t) \zeta + \sum_{i=1}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) + d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma) \\ &= \alpha(p)^T \zeta - \hat{\alpha}_0^T(t) \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma) \\ &= \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^n h_i \dot{e}_i \quad (h_n = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} + \dot{e}_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} + \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma) \\
&= \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sigma \dot{\sigma} &= \sigma \left(\left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma) \right) \\
&= \sigma \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - d^T |\zeta|_1 |\sigma| \\
&\leq |\sigma| \left| \alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right| |\zeta| - d^T |\zeta|_1 |\sigma|
\end{aligned}$$

que por las condiciones establecidas sobre d se satisface que

$$\sigma \dot{\sigma} < 0$$

y al mismo tiempo se satisfacen las condiciones de convergencia en tiempo finito a la superficie $\sigma = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} &< 0 \\
\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} &> 0
\end{aligned}$$

Ahora se determina el control equivalente, para esto $\sigma = 0$ y $\dot{\sigma} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= \sum_{i=0}^n h_i \dot{e}_i \quad (h_n = 1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} h_i e_{i+1} + \dot{e}_n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} h_i e_{i+1} + \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - v_c - d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma)
\end{aligned}$$

$$\sigma = \sum_{i=0}^n h_i (x_i - \hat{x}_i) = 0 \quad (h_n = 1)$$

$$v_c = \sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}),$$

$$\dot{\sigma} = \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - u_{eq} = 0$$

entonces

$$u_{eq} = \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta$$

como una consecuencia

$$\begin{aligned} \omega &= -(\hat{\alpha}_0(t) - \alpha(p))^T \zeta - v_c + (\hat{\alpha}_0(t) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) - (\hat{\alpha}_0(t) - \alpha(p))^T \zeta + (\hat{\alpha}_0(t) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) - \hat{\alpha}_0(t)^T \zeta + \alpha(p)^T \zeta + \hat{\alpha}_0(t) \zeta - \hat{\alpha}(t)^T \zeta \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) \zeta + \alpha(p)^T \zeta - \hat{\alpha}(t)^T \zeta \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}) \zeta + (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \\ &= -v + (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \end{aligned}$$

y finalmente se obtiene la dinámica en la superficie de discontinuidad

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} - u_{eq} \\ &= \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \zeta - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} - \left(\alpha(p)^T - \hat{\alpha}_0^T(t) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} h_i e_{i+1} \end{aligned}$$

debido a que

$$\begin{aligned}\sigma &= 0 = \sum_{i=1}^n h_i e_i \quad (h_n = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_i + e_n\end{aligned}$$

entonces

$$e_n = - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_i$$

por lo tanto se define el sistema de orden reducido

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \dot{e}_{n-1} &= - \sum_{i=1}^{n-1} h_i e_i\end{aligned}$$

eligiendo a las constantes h_i de tal forma que todos los valores propios de este sistema lineal estén en el semiplano izquierdo del plano complejo, se garantiza la convergencia a cero en forma asintótica. Entonces el modelo de identificación tiene la función de un observador de estado que además identifica términos desconocidos. Ahora se aprueba la convergencia del algoritmo de identificación a través de la siguiente función de Lyapunov

$$V(\cdot) = \frac{1}{2} (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \Gamma^{-1} (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))$$

ahora se obtiene su derivada

$$\begin{aligned}\dot{V}(\cdot) &= \frac{1}{2} (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \Gamma^{-1} (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\dot{\hat{\alpha}}(t)^T \Gamma^{-1} (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t)) - (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\alpha}}(t) \right] \\ &= -(\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\alpha}}(t) \\ &= -(\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \Gamma^{-1} \Gamma \zeta \omega \\ &= -(\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \left(u_{eq} - v_c + (\hat{\alpha}_0(t) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \right) \\ &= -(\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \left(-v_c + (\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \right)\end{aligned}$$

si en ω no se incluye el término v_c se tiene que

$$\dot{V}(\cdot) = -(\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \left((\alpha(p) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta \right) = -\omega^2$$

el cual es el resultado presentado en el artículo [11], y es una función definida negativa.

Sobre las condiciones de identificabilidad [11], se presentan tres casos de sistemas distintos de los que se describen las condiciones de identificabilidad. En este trabajo se presenta sólo el caso de sistemas invariantes en el tiempo. En este caso, el vector de funciones lineales o no lineales se reduce a [11]

$$\zeta = \begin{bmatrix} x^T & u \end{bmatrix}^T.$$

Por lo tanto, la condición de independencia es la riqueza de la entrada u del sistema; esto es, hay al menos $n + 1$ frecuencias diferentes en la entrada u del sistema (78).

4.1.2 Aplicación del método de identificación directo a un masa resorte amortiguador

Sea el sistema mecánico masa resorte amortiguador con el modelo

$$m\ddot{x} = -kx - \delta\dot{x} + K_c u$$

cuyo modelo es pasado al espacio de estados es

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{79}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\delta}{m}x_2 + \frac{K_c}{m}u, \tag{80}$$

donde x_n es el vector de estados que contiene la posición y la velocidad, u es la entrada de control y k/m , δ/m y K_c/m son los coeficientes del sistema que se consideran desconocidos, sin embargo, en este sistema se tiene una referencia de parámetros definidos en el Capítulo 2; sus valores nominales son $k/m = -174,2$, $\delta/m = -12,57$ y $K_c/m = 2,567$, los cuales satisfacen las siguientes cotas

$$-500 < k/m < -100, \tag{81}$$

$$-20 < \delta/m < -5, \tag{82}$$

$$1 < K_c/m < 5. \tag{83}$$

El sistema (79)-(80) tiene con la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \rho(x, p) + \lambda(x, p) u,\end{aligned}$$

donde $\rho(x, p) = -(k/m)x_1 - (\delta/m)x_2$ y $\lambda(x, p) = K_c/m$. El vector de parámetros es

$$p = \begin{bmatrix} k \\ \delta \\ m \\ K_c \end{bmatrix},$$

y ahora $\rho(x, p)$ y $\lambda(x, p)$ se definen como

$$\begin{aligned}\rho(x, p) &= \theta^T(p) \xi \\ \lambda(x, p) &= \phi^T(p) \eta\end{aligned}$$

donde

$$\theta(p) = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} \\ -\frac{\delta}{m} \end{bmatrix}; \quad \xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

y

$$\phi(p) = \begin{bmatrix} \frac{K_c}{m} \end{bmatrix}$$

no depende de x . El rango de valores posibles de los parámetros se establecen con θ , donde

$\theta_1(p) = -\frac{k}{m}$ y $\theta_2(p) = -\frac{\delta}{m}$, por lo tanto

$$\theta_{1\text{mín}} \leq \theta_1(p) \leq \theta_{1\text{máx}},$$

$$-500 \leq \theta_1(p) \leq -100,$$

$$\theta_{2\text{mín}} \leq \theta_2(p) \leq \theta_{2\text{máx}},$$

$$-20 \leq \theta_2(p) \leq -5,$$

$$\phi_{\text{mín}} \leq \phi(p) \leq \phi_{\text{máx}},$$

$$1 \leq \theta(p) \leq 5.$$

Se forman los vectores

$$\alpha(p) = \begin{bmatrix} -k/m \\ -\delta/m \\ K_c/m \end{bmatrix}$$

y

$$\zeta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Sea el modelo del identificador que estima los estados del sistema

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \quad (85)$$

$$\hat{x}_2 = \hat{\alpha}_0(t)^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} + u \quad (86)$$

donde $\hat{\alpha}_0(t)$ es un vector con tres valores $\hat{\alpha}_0(t) = [\hat{\alpha}_{0_1}(t) \quad \hat{\alpha}_{0_2}(t) \quad \hat{\alpha}_{0_3}(t)]^T$, y cada uno de los valores estimados se les asignan valores mínimos y máximos o saturaciones, de la siguiente manera

$$\hat{\alpha}_{0_1}(t) = \begin{cases} -500 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) < -500 \\ \hat{\alpha}_1(t) & \text{si } -500 \leq \hat{\alpha}_1(t) \leq -100, \\ -100 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) > -100 \end{cases},$$

$$\hat{\alpha}_{0_2}(t) = \begin{cases} -20 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) < -20 \\ \hat{\alpha}_2(t) & \text{si } -20 \leq \hat{\alpha}_1(t) \leq -5, \\ -5 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) > -5 \end{cases},$$

$$\hat{\alpha}_{0_3}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) < 1 \\ \hat{\alpha}_1(t) & \text{si } 1 \leq \hat{\alpha}_1(t) \leq 5, \\ 5 & \text{si } \hat{\alpha}_1(t) > 5 \end{cases}.$$

El término para la identificación es $v = v_c + v_v$, donde v_c es el término continuo y v_v es el término discontinuo, y sus valores establecen como

$$\begin{aligned} v_c &= \sum_{i=1}^{n-1} h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}), \\ &= \sum_{i=1}^1 h_i (x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}), \\ v_c &= h_1 (x_2 - \hat{x}_2), \end{aligned} \tag{87}$$

donde el valor de h_1 es una constante positiva, que desconocido. Ahora se tiene que

$$v_v = d^T |\zeta|_1 \text{sign}(\sigma), \tag{88}$$

donde

$$|\zeta|_1 = \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |v| \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \theta_{1\text{máx}} - \theta_{1\text{mín}} \\ \theta_{2\text{máx}} - \theta_{2\text{mín}} \\ \phi_{\text{máx}} - \phi_{\text{mín}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\sigma = h_1 (x_1 - \hat{x}_1) + (x_2 - \hat{x}_2),$$

donde h_1 es una constante positiva para que el polinomio sea Hurwitz, en donde se ha empleado $h_1 = 20$.

El algoritmo de identificación es

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = \Gamma \zeta \omega, \tag{89}$$

por lo tanto, las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(0) &= \frac{-600}{2} = -300, \\ \hat{\alpha}_2(0) &= \frac{-25}{2} = -12,5, \\ \hat{\alpha}_3(0) &= \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

La matriz Γ es una matriz simétrica definida positiva

$$\Gamma = \Gamma^T > 0,$$

entonces se propone como $\Gamma = \text{diag}\{c\}$, donde c es un valor constante. El control equivalente se obtiene de

$$\omega = u_{eq} - v_c + (\hat{\alpha}_0(t) - \hat{\alpha}(t))^T \zeta. \quad (90)$$

En la implementación de este algoritmo se utilizó un filtro pasabajas de primer orden definido por la ecuación

$$\dot{y}_f = -\frac{y_f}{\tau} + \frac{u_f}{\tau} \quad (91)$$

donde y_f es la salida del filtro y considerado como el control equivalente u_{eq} , u_f es la entrada del filtro que en este caso es el término discontinuo v_v y $1/\tau$ es la frecuencia de corte del corte, en este caso $\tau = 0,02$.

Además, la señal de entrada cumple con la condición de indentificabilidad descrita en [11], donde se requiere que u tenga al menos $n + 1$ frecuencias distintas. En este caso, el sistema (79)-(80) tiene el orden $n = 2$, por lo tanto, $n + 1 = 3$. La señal de entrada u es una suma de senoidales con la forma

$$u = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \varphi_3). \quad (92)$$

4.1.2.1 Resultados numéricos

Sea el modelo del sistema MRA establecido en (79)-(80) con las cotas definidas por (81)-(83), aplicando el algoritmo original del método directo para identificación de parámetros con el identificador propuesto por [11], en el programa de simulación de Matlab Simulink[®], con señal de entrada u definida en (92) se tiene que donde $A_1 = 1$, $f_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 0,5$, $f_2 = 5$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 0,1$, $f_3 = 3$ y $\varphi_3 = 0$. Se puede notar que $f_1 \neq f_2 \neq f_3$.

La posición del sistema x_1 , la velocidad x_2 y la señal de entrada u se muestran en las gráficas superior, media e inferior de la figura 53, respectivamente.

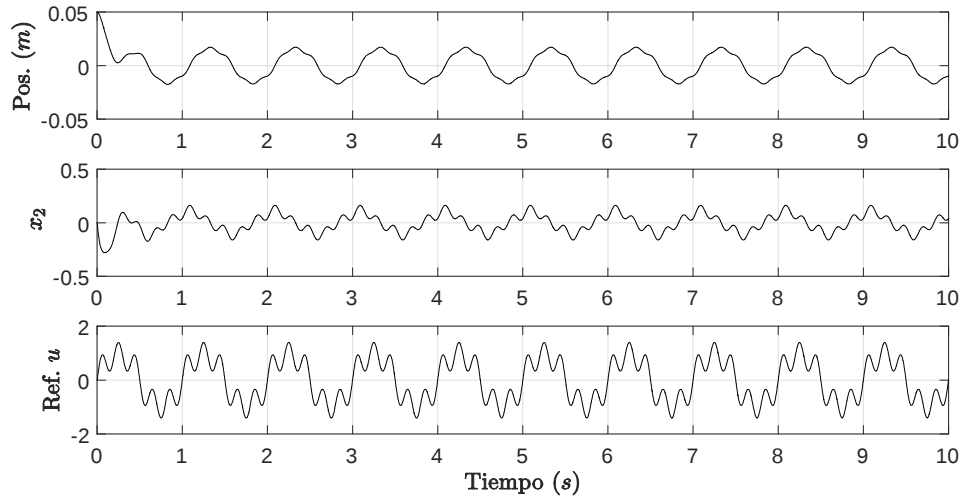


Figura 53. Señales de posición x_1 , velocidad x_2 y señal de entrada u del sistema MRA numérico.

Los resultados obtenidos a partir del identificador definido por (89) se muestran en la tabla 3. En la columna Parámetro se indica el coeficiente al que se refiere el valor, la columna Real contiene los valores nominales de los coeficientes y la columna Estimado contiene los valores estimados por el algoritmo original del método de identificación directa. Además, la última columna indica el porcentaje de error de cada uno de los coeficientes estimados respecto a los valores reales de simulación.

En la simulación se empleó el algoritmo de solución Ode1 (Euler) con paso de solución de ecuaciones de $0,1 \times 10^{-3}$ segundos. El tiempo de convergencia a los valores de parámetros estimados respecto a los valores nominales es de 4,500 segundos, para un tiempo de simulación total de 5,400 segundos, como se puede observar en la figura 54, donde se muestra la simulación hasta el segundo 5,000.

Parámetro	Real	Estimado	% de Error
k/m	-174,2	-174,52	0,18 %
δ/m	-12,57	-12,57	0,00 %
K_c/m	2,567	2,575	0,31 %

Tabla 3. Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa.

4.2 Algoritmo del método de identificación directo con observador discontinuo

Aplicando el método directo para identificación de parámetros con el observador robusto propuesto en [24] para estimar x_2 , se tiene que el modelo del observador es propuesto en las ecuaciones (43)-(45), cuyos resultados numéricos y experimentales se presentan a continuación. Cabe resaltar que esta prueba ha sido implementada experimentalmente debido a que el observador permite contar con el vector de estado completo del mecanismo. Esto quiere decir que en la ecuación (84) el vector ζ es modificado para tener las nuevas variables de la siguiente forma

$$\zeta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ u \end{bmatrix}. \quad (93)$$

4.2.1 Aplicación del método de identificación directa con observador discontinuo a un masa resorte amortiguador

Sea el modelo del sistema MRA (79)-(80) con las cotas de sus coeficientes definidas en (81)-(83). Empleando, además, el mismo término continuo (87) y discontinuo (88) que en el algoritmo original, así como el mismo identificador del método de identificación directa (89) con el nuevo vector ζ definido en (93). La señal de entrada u definida por (92), utilizó los mismos valores que en la sección anterior, es decir, $A_1 = 1$, $f_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 0,5$, $f_2 = 5$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 0,1$, $f_3 = 3$ y $\varphi_3 = 0$. El filtro pasabajas para obtener el control equivalente tiene la misma definición que en (91), en este caso la frecuencia de corte es $1/\tau$

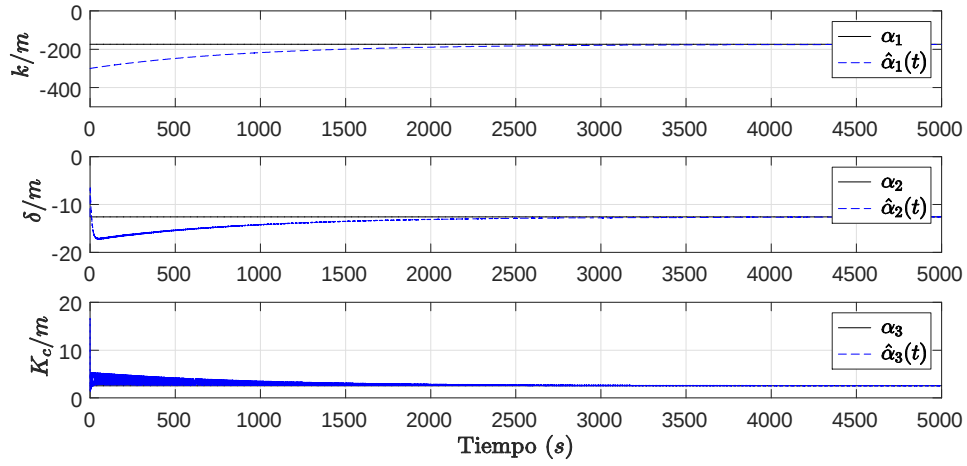


Figura 54. Tiempo de convergencia en la estimación de los coeficientes respecto a los valores reales. Algoritmo original de identificación directa.

donde $\tau = 0,02$. A continuación se muestran los resultados obtenidos en esta simulación numérica.

4.2.1.1 Resultados numéricos

Se implementó el algoritmo modificado en el software de simulación de Matlab Simulink[®], de donde se muestra la posición del sistema medida x_1 en comparación con la posición estimada $\hat{x}_1$ en la gráfica superior de la figura 55, y en la gráfica inferior se muestra la señal de entrada u . La velocidad x_2 medida en comparación con la velocidad estimada $\hat{x}_2$ se muestra en la gráfica superior de la figura 56, en la gráfica inferior de esa figura se muestra el error del observador, a cuya señal se le ha realizado un acercamiento para visualizar su magnitud máxima en estado estacionario, la cual ronda en los micrómetros.

Los resultados obtenidos a partir del identificador definido por (89) con el vector ζ modificado por (93), se muestran en la tabla 4. En la columna Parámetro se indica el coeficiente al que se refiere el valor, la columna Real contiene los valores nominales de los coeficientes y la columna Estimado contiene los valores estimados por el algoritmo original del método de identificación directa. La última columna indica el porcentaje de error de cada uno de los coeficientes estimados respecto a los valores reales de simulación.

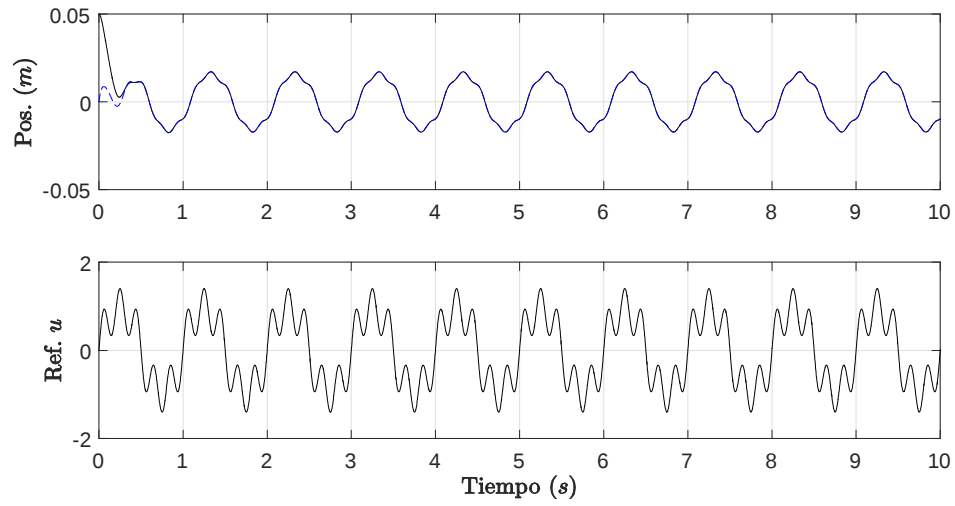


Figura 55. Señales de salida x_1 respecto a la salida estimada $\hat{x}_1$. Y señal de referencia v .

En simulación se empleó el algoritmo de solución Ode1 (Euler) con paso de solución de ecuaciones de $0,1 \times 10^{-3}$ segundos. El tiempo de convergencia a los valores de parámetros estimados es de 4,500 segundos, para un tiempo de simulación de 5,400 segundos, en la figura 57 se puede observar cómo converge la estimación de los coeficientes estimados respecto a los valores establecidos en simulación, observado hasta el segundo 5,000.

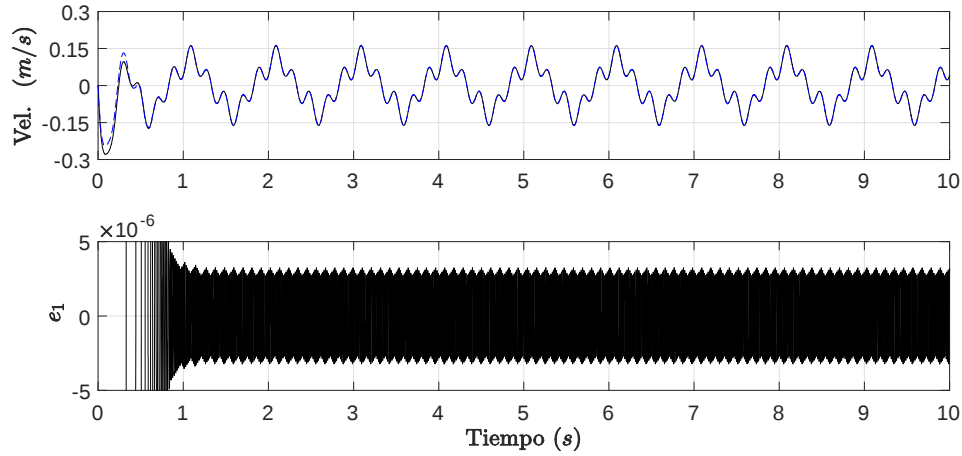


Figura 56. Señal de velocidad x_2 respecto a la velocidad estimada $\hat{x}_2$. Y señal de error del observador e_1 .

4.3 Algoritmo del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo

4.3.1 Descripción de la modificación

En esta modificación del algoritmo, además de ser modificado el vector ζ como se muestra en la ecuación (93), se ha modificado la superficie de conmutación que genera la parte discontinua empleada en el algoritmo original v resultado de la suma de (87) y (88), para reemplazar el término v por el término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$, generado por el mismo observador robusto que estima la velocidad del sistema MRA. A continuación se explica el modelo de dicho observador.

Parámetro	Real	Estimado	% de Error
k/m	-174,2	-174,5	0,17 %
δ/m	-12,57	-12,57	0,00 %
K_c/m	2,567	2,571	0,16 %

Tabla 4. Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ modificada.

4.3.2 Observador discontinuo

Sea la planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha(p)^T \zeta(x, u, t) \\ y &= \hat{x}_1\end{aligned}$$

el modelo del observador es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + c_1(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{\alpha}_0(t)^T \hat{\zeta}(\cdot) + c_2(y - \hat{y}) + d^T |\zeta(\cdot)| \text{sign}(y - \hat{y})\end{aligned}$$

se definen las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e = x_2 - \hat{x}_2$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = x_2 - \hat{x}_2 - c_1(y - \hat{y}) \\ &= e_2 - c_1 e_1 \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = \alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t)^T \hat{\zeta}(\cdot) - c_2(y - \hat{y}) - d^T |\zeta(\cdot)| \text{sign}(y - \hat{y}) \\ &= \alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t)^T \hat{\zeta}(\cdot) - c_2 e_1 - d^T |\zeta(\cdot)| \text{sign}(e_1)\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variables se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{e}_2 - c_1 \dot{e}_1 \\ &= \alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t)^T \hat{\zeta}(\cdot) - c_2 z_1 - d^T \left| \hat{\zeta}(\cdot) \right| \text{sign}(z_1) - c_1 z_2\end{aligned}$$

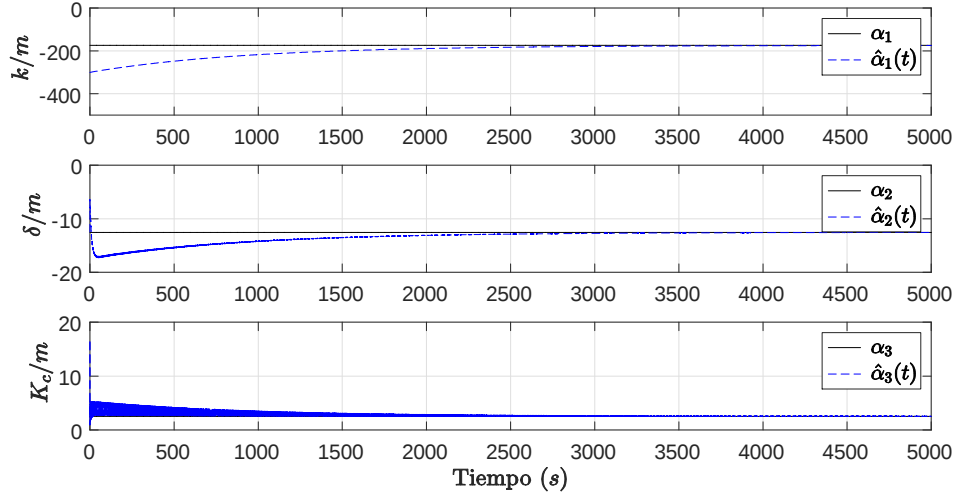


Figura 57. Convergencia de los coeficientes estimados respecto a los valores reales establecidos en simulación.

donde $d^T \left| \hat{\zeta}(\cdot) \right| = c_3$ y $\alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t) \hat{\zeta}(\cdot) \leq \delta$, entonces existe una c_3 tal que el origen sea un punto de equilibrio asintóticamente estable, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z &\rightarrow 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\zeta} &\rightarrow \zeta \end{aligned}$$

Si $\dot{z}_1 = 0$ y $\dot{z}_2 = 0$, entonces el control equivalente es

$$u_{eq} = \alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t) \hat{\zeta}(\cdot)$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{eq} = \alpha(p)^T \zeta(\cdot) - \hat{\alpha}_0(t) \hat{\zeta}(\cdot)$$

4.3.3 Aplicación del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo a un masa

resorte amortiguador

Considere el modelo del sistema MRA (79)-(80) con las cotas de sus coeficientes definidas en (81)-(83), al cual se le aplica el mismo identificador para la estimación de los parámetros con el método de identificación directa (89) con el nuevo vector ζ , reemplazando v por el término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$, y empleando la señal de entrada u definida en (92) donde $A_1 = 0,2$, $f_1 = 0,5$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 0,5$, $f_2 = 3$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 0,1$, $f_3 = 3$ y $\varphi_3 = 0$. Cabe resaltar que la señal u empleada en la prueba numérica tiene los mismos valores de amplitudes, frecuencias y desfases que en la sección experimental, y que la condición de identificabilidad requerida para la señal de entrada, $n + 1$ frecuencias distintas, no se cumple ya que $f_1 \neq f_2 = f_3$. Esto puede estar relacionado a la modificación del algoritmo original de identificación.

En esta sección se empleó un filtro pasabajas de segundo orden para obtener el control equivalente, el cual está definido en (51), aquí la frecuencia de corte empleada es $\omega_c = 25$. Los valores de las constantes del observador c_1 , c_2 y c_3 se obtuvieron de manera experimental en el sistema mecánico, al monitorear el error del observador se establecieron los valores de las constantes para los cuales se obtenía la mínima magnitud de e_1 , los cuales son

$$c_1 = 10,$$

$$c_2 = 20,$$

$$c_3 = 5,5.$$

4.3.3.1 Resultados numéricos

Se implementó el algoritmo modificado en el software de simulación de Matlab Simulink[®], de donde se muestra la posición del sistema medida x_1 en comparación con la posición estimada $\hat{x}_1$ en la gráfica superior de la figura 58, y en la gráfica inferior se muestra la señal de entrada u . La velocidad x_2 medida en comparación con la velocidad estimada $\hat{x}_2$ se muestra en la gráfica superior de la figura 59, en la gráfica inferior de esa figura se muestra

el error del observador e_1 , a cuya señal se le ha realizado un acercamiento para visualizar su magnitud máxima en estado estacionario, la cual ronda en los micrometros.

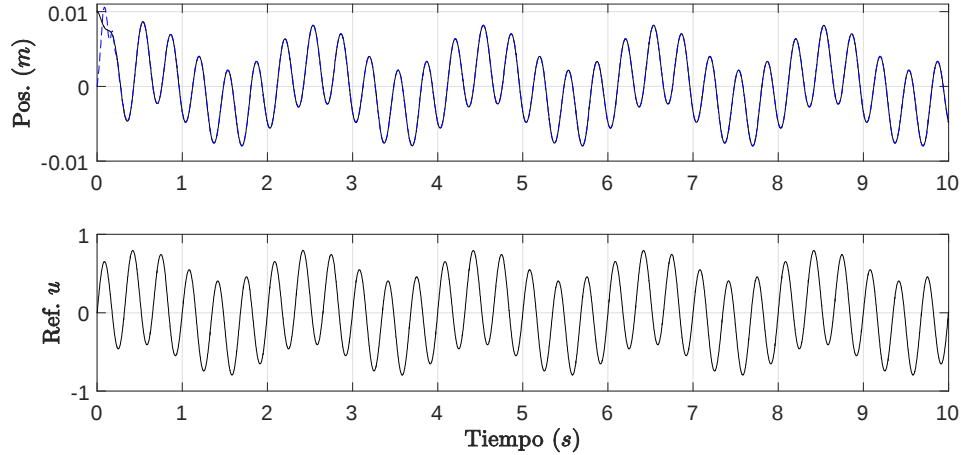


Figura 58. Salida medida y en comparación con la salida estimada $\hat{y}$. Señal de referencia u .

Los resultados obtenidos a partir del identificador definido por (89) con el vector ζ modificado por (93) y el término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$ que emplea la ecuación (90), se muestran en la tabla 5. En la columna Parámetro se indica el coeficiente al que se refiere el valor, la columna Real contiene los valores nominales de los coeficientes y la columna Estimado contiene los valores estimados por el algoritmo original del método de identificación directa. La última columna indica el porcentaje de error de cada uno de los coeficientes estimados respecto a los valores reales de simulación.

En simulación se empleó el algoritmo de solución Ode1 (Euler) con paso de solución de ecuaciones de $0,1 \times 10^{-3}$ segundos. El tiempo de convergencia a los valores de parámetros estimados es de 6,000 segundos, para un tiempo de simulación de 10,800 segundos, en la figura 60 se puede observar cómo converge la estimación de los coeficientes estimados respecto a los valores establecidos en simulación, en la gráfica se muestra hasta el segundo 8,000.

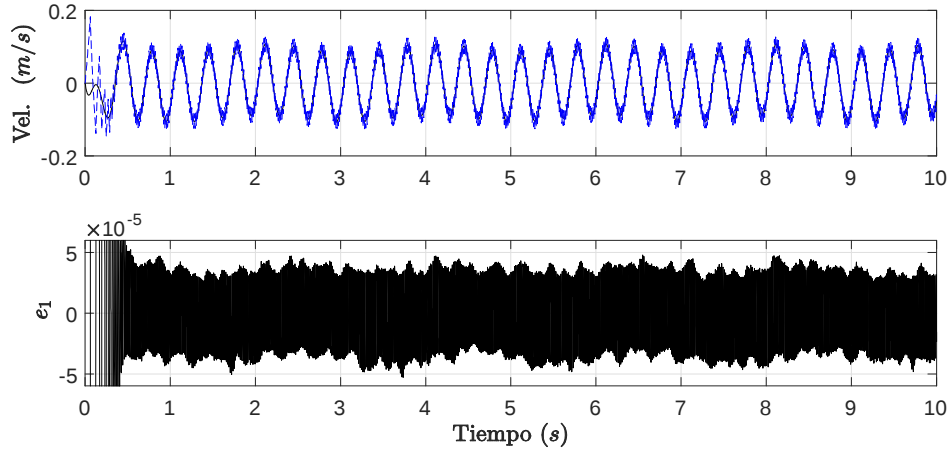


Figura 59. Señal de velocidad medida x_2 en comparación con la velocidad estimada $\hat{x}_2$. Señal de error del observador e_1 .

4.4 Resultados experimentales

Cuando se realiza una simulación numérica de un sistema dinámico, se obtiene un sistema totalmente artificial al que se le puede controlar no sólo la señal de entrada al sistema, sino las dinámicas simuladas y los valores de los coeficientes paramétricos de la planta, y al realizar las pruebas numéricas de algoritmos de identificación de sistemas, es posible comparar los valores de los resultados obtenidos con los definidos por el usuario que construye la simulación. De tal manera, que es posible evaluar el desempeño del algoritmo de identificación. Sin embargo, en las pruebas experimentales esto no es posible ya que no se tiene a disposición los valores de los coeficientes paramétricos reales, de hecho, esta característica es la que motiva el desarrollo de algoritmos para la identificación de sistemas. Entonces, dado que se considera que el control equivalente contiene los términos de perturbación y variaciones paramétricas de la planta, es lógico asumir que el modelo dinámico de un sistema ideal, es decir, que no contiene perturbaciones ni variaciones paramétricas. da como resultado

$$u_{eq} = 0.$$

Parámetro	Real	Estimado	% de Error
k/m	-174,2	-174,2	0,00 %
δ/m	-12,57	-12,57	0,00 %
K_c/m	2,567	2,567	0,00 %

Tabla 5. Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ y $\hat{\alpha}(t)$ modificada.

Por lo que se emplea el mismo criterio empleado en el Capítulo 3, donde se calcula la potencia del control equivalente u_{eq} , definida en (71), como índice de calidad de la estimación.

Implementando el algoritmo de identificación en el software de simulación de Matlab Simulink[®] a través de una tarjeta de desarrollo dSPACE para su aplicación en tiempo real en el mecanismo MRA que se muestra en la figura (32), se ha aplicado el algoritmo del método de identificación directo con observador discontinuo de la Sección 2 del Capítulo 4, y el algoritmo del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo de la Sección 3 del Capítulo 4, cuyos resultados experimentales se presentan a continuación.

4.4.1 Algoritmo del método de identificación directo con observador discontinuo

Considere el modelo del sistema MRA (79)-(80) con las cotas de sus coeficientes definidas en (81)-(83), empleando, el mismo término continuo (87) y discontinuo (88) que en el algoritmo original, así como el mismo identificador del método de identificación directa (89), con el nuevo vector ζ definido en (93). La señal de entrada u definida por (92), no tiene los mismos valores que en la sección 2, esto es, $A_1 = 0,2$, $f_1 = 0,5$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 0,5$, $f_2 = 3$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 0,1$, $f_3 = 3$ y $\varphi_3 = 0$. El filtro pasabajas para obtener el control equivalente tiene la misma definición que en (91), en este caso la frecuencia de corte es $1/\tau$ donde $\tau = 0,02$.

En la gráfica superior de la figura 61 se muestra la posición del sistema medida x_1 , en la gráfica del medio se muestra la velocidad estimada $\hat{x}_2$, y en la gráfica inferior se observa la señal de entrada u .

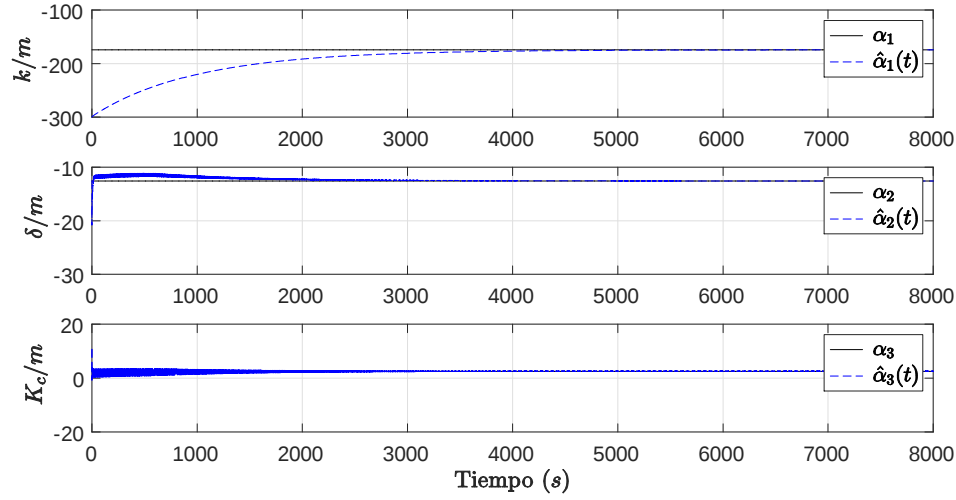


Figura 60. Convergencia de los coeficientes estimados respecto a los coeficientes establecidos en simulación.

Los resultados obtenidos a partir del identificador definido por (89) con el vector ζ modificado por (93), se muestran en la tabla 6. En la columna Parámetro se indica el coeficiente al que se refiere el valor, la columna Estimado contiene los valores estimados por este algoritmo.

En este experimento se empleó el algoritmo de solución Ode1 (Euler) con paso de solución de ecuaciones de $0,1 \times 10^{-3}$ segundos. En la figura 62 se puede observar cómo converge la estimación de los coeficientes a un valor constante, con un tiempo de convergencia a los valores de parámetros estimados es de 7,000 segundos, para un tiempo de corrida del algoritmo de 8,113,9, mostrando en la gráfica de esta figura hasta el segundo 8,000.

Para obtener el control equivalente del sistema con los valores de parámetros estimados por este algoritmo, se reemplazaron los valores de la tabla 6 en el modelo del observador robusto definido en (31)-(32), donde $c_1 = 11,91$, $c_2 = 4,629023$ y $c_3 = 0,85$. La prueba se realizó en lazo abierto con cuatro señales distintas, la señal de entrada u para la cual el sistema muestra el mejor desempeño es una señal periódica de onda cuadrada, cuyo periodo es 6 seg., con ciclo de trabajo de 50 % y amplitud pico-pico igual a 1. Filtrando el término

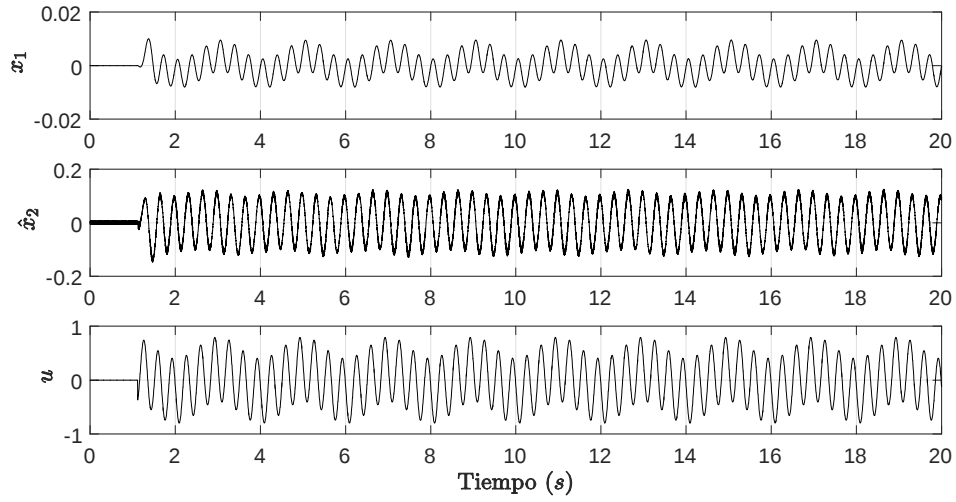


Figura 61. Señales de posición x_1 , velocidad estimada $\hat{x}_2$ y señal de entrada u del sistema mecánico MRA.

discontinuo de (33) con el filtro pasabajas definido en (51), donde $\omega_c = 30$, se obtuvo el control equivalente estimado que se observa en la figura 63, que al calcular la potencia de u_{eq} se tiene que $P(u_{eq}) = 0,0245$.

Parámetro	Estimado
k/m	-161,2
δ/m	-8,095
K_c/m	2,281

Tabla 6. Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ modificada.

4.4.2 Algoritmo del método de identificación directo con modificación del algoritmo de estimación y observador discontinuo

Considere el modelo del sistema MRA (79)-(80) con las cotas de sus coeficientes definidas en (81)-(83), al cual se le aplica el mismo identificador para la estimación de los parámetros con el método de identificación directa (89) con el nuevo vector ζ , reemplazando v por el término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$, y empleando la señal de entrada u definida en (92) donde sus parámetros tiene los mismos valores que en la sección 3, esto es $A_1 = 0,2$, $f_1 = 0,5$, $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 0,5$, $f_2 = 3$, $\varphi_2 = 0$, $A_3 = 0,1$, $f_3 = 3$ y $\varphi_3 = 0$, se obtienen los siguientes resultados. El filtro pasabajas para obtener u_{eq} está definido en (51), aquí la frecuencia de corte empleada es $\omega_c = 25$. Los valores de las constantes del observador c_1 , c_2 y c_3 se obtuvieron de manera experimental en el sistema mecánico, al monitorear el error del observador se establecieron los valores de las constantes para los cuales se obtenía la mínima magnitud de e_1 , los cuales se establecieron en la sección 3. En la gráfica superior de la figura 64 se muestra la posición del sistema medida x_1 , en la gráfica del medio se muestra la velocidad estimada $\hat{x}_2$, y en la gráfica inferior se observa la señal de entrada u .

Los resultados obtenidos a partir del identificador definido por (89) con el vector ζ modificado por (93) y el término discontinuo $c_3 \text{sign}(e_1)$ en la estimación (89), se muestran en la tabla 7. En la columna Parámetro se indica el coeficiente al que se refiere el valor, la columna Estimado contiene los valores estimados por este algoritmo.

En este experimento se empleó el algoritmo de solución Ode1 (Euler) con paso de solución de ecuaciones de $0,1 \times 10^{-3}$ segundos. En la figura 65 se puede observar cómo converge

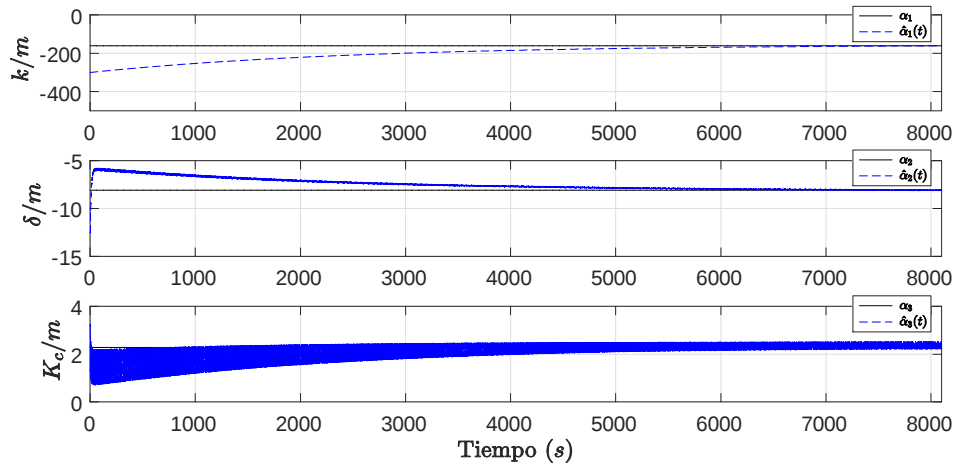


Figura 62. Convergencia de los coeficientes estimados respecto a un valor constante en prueba experimental.

la estimación de los coeficientes a un valor constante, con un tiempo de convergencia a los valores de parámetros estimados es de 8,000 segundos, para un tiempo de corrida del algoritmo de 8,113,9, mostrando en la gráfica de esta figura hasta el segundo 8,000.

Para obtener el control equivalente del sistema con los valores de parámetros estimados por este algoritmo, se reemplazaron los valores de la tabla 7 en el modelo del observador robusto definido en (31)-(32), donde $c_1 = 11,53$, $c_2 = 3,350089$ y $c_3 = 0,85$. La prueba se realizó en lazo abierto con cuatro señales distintas, la señal de entrada u para la cual el sistema muestra el mejor desempeño es una señal periódica de onda cuadrada, cuyo periodo es 6 seg., con ciclo de trabajo de 50 % y amplitud pico-pico igual a 2. Filtrando el término discontinuo de (33) con el filtro pasabajas definido en (51), donde $\omega_c = 30$, se obtuvo el control equivalente estimado que se observa en la figura 66, que al calcular la potencia de u_{eq} se tiene que $P(u_{eq}) = 0,0057$.

En la tabla 8 se muestra una comparación de los resultados de los tres métodos aplicados experimentalmente, donde se comparan los valores de los coeficientes del modelo del sistema MRA definido en (40)-(42)

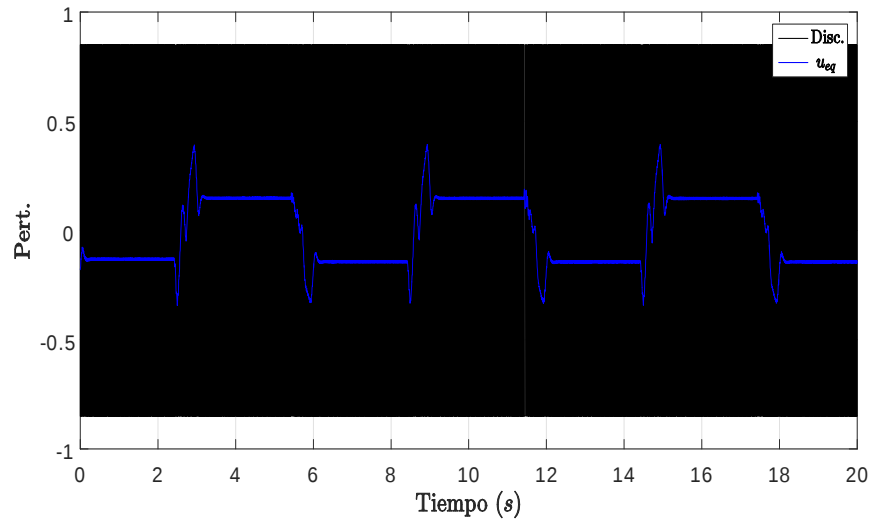


Figura 63. Perturbación estimada con los valores de los coeficientes estimados con el método directo de identificación con el observador robusto para estimar $\hat{x}_2$.

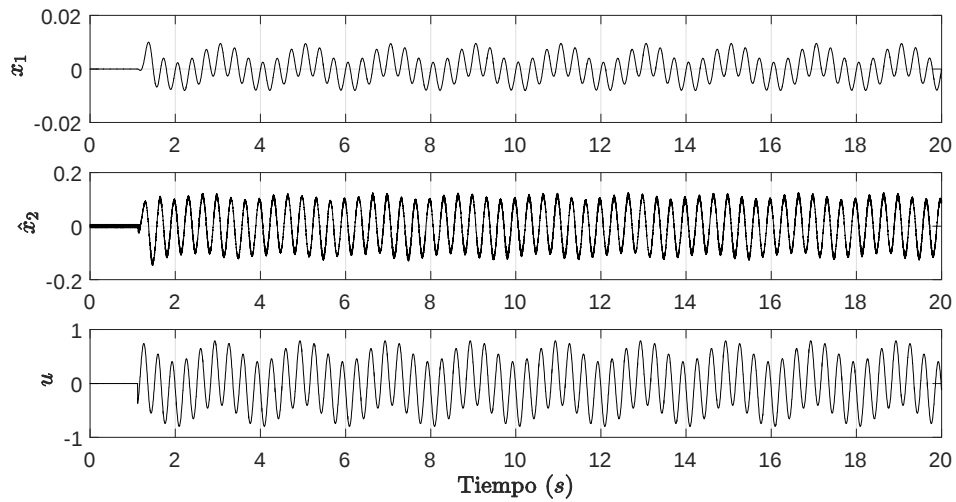


Figura 64. Señales de posición x_1 , velocidad estimada $\hat{x}_2$ y señal de entrada u del sistema mecánico MRA.

Parámetro	Estimado
k/m	-154,8
δ/m	-8,467
K_c/m	2,397

Tabla 7. Coeficientes estimados mediante el algoritmo original del método de identificación directa con ζ y $\hat{\alpha}(t)$ modificada.

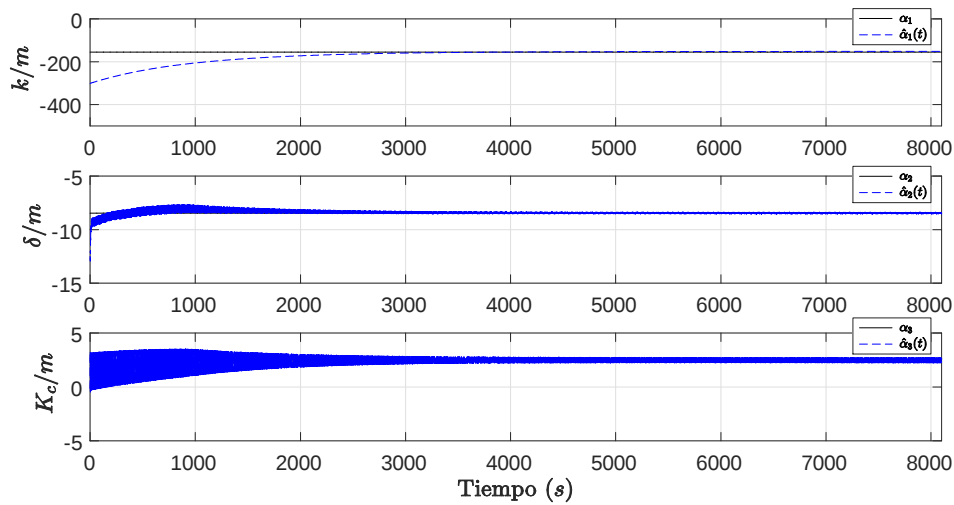


Figura 65. Convergencia de los coeficientes estimados respecto a un valor constante en prueba experimental.

Método	Parámetro		
	k/m	δ/m	K_c/m
t_{fest}	-174,2	-12,57	2,567
Método directo con observador para $\hat{x}_2$	-161,2	-8,095	2,281
Método directo con observador para $\hat{\alpha}(t)$ y $\hat{x}_2$	-154,8	-8,467	2,397
Mínimos Cuadrados Recursivos	-148,592	-10,067	2,375

Tabla 8. Comparación de los coeficientes estimados por los distintos métodos aplicados experimentalmente.

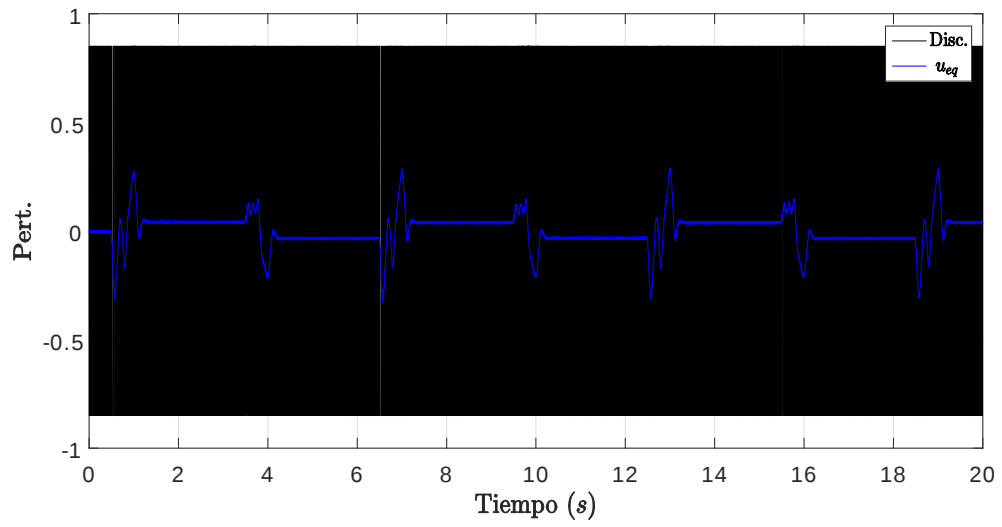


Figura 66. Perturbación estimada con los valores de los coeficientes estimados con el método directo de identificación con el observador robusto para estimar $\hat{\alpha}(t)$ y $\hat{x}_2$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Realizar un proceso adecuado de identificación de los parámetros de la planta facilita en gran medida la implementación de un sistema de control. Para los sistemas mecánicos modelados por las ecuaciones de movimiento de Lagrange, los términos producidos por las incertidumbres paramétricas tendrán una amplitud menor en comparación cuando no se aplica un proceso de identificación adecuado. Con esto, la implementación y sintonización de controladores robustos será más sencilla y se obtendrá mejor desempeño del sistema en lazo cerrado.

En esta memoria de tesis se mostró el desempeño experimental de dos métodos de identificación; el primero es un método recursivo de estimación de variaciones paramétricas utilizando el control equivalente y mínimos cuadrados, y el segundo es la estimación de parámetros utilizando el método de identificación directa basado en sistemas de estructura variable, del cual se han propuesto dos modificaciones para que fuera posible su implementación experimental. Ambos métodos se aplicaron a un sistema mecánico del tipo masa resorte amortiguador de 1GDL. En ambos métodos se tomó como referencia la estimación de parámetros utilizando la función *tfest* de Matlab[®] para definir valores nominales de los parámetros, o para definir los valores mínimos y máximos que necesita el algoritmo directo.

Entonces, una primera conclusión importante es definir, bajo el criterio de desempeño definido en el capítulo 3 donde se define el índice de calidad como la potencia del control equivalente u_{eq} , cuál algoritmo hace la mejor estimación en el sistema masa resorte amortiguador.

Para ello se realizaron diferentes experimentos donde, a partir de la estimación realizada por cada uno de los algoritmos de estimación de parámetros, se actualizó el valor de los parámetros en el observador de estado, se ejecutó el experimento en lazo abierto consideran-

do cuatro señales de entrada diferentes para cada algoritmo, a partir del cual se extrajo el control equivalente u_{eq} y, finalmente, se realizó el cálculo de su potencia. En la tabla 9 se muestran los resultados de cada control equivalente obtenido para las cuatro señales con los distintos algoritmos de estimación, con la finalidad de compararlos, donde los métodos de identificación se muestran en la tabla 9 como

- (1) $tfest$, el cual emplea el algoritmo propuesto por Mathworks[®] y que ha sido utilizado a lo largo de este trabajo para estimar valores nominales de los parámetros.
- (2) Método directo de identificación con identificador para estimar $\hat{\alpha}(t)$ y observador robusto para estimar $\hat{x}_2$.
- (3) Método directo de identificación con observador robusto para estimar $\hat{\alpha}(t)$ y observador robusto para estimar $\hat{x}_2$.
- (4) Mínimos cuadrados recursivos.

Y las señales de entrada u se muestran en la tabla 9 como

- A = Señal periódica cuadrada, la cual tiene un periodo de $P = 6s$, ciclo de trabajo $D = 50\%$ y amplitud pico-pico $A = 1$.
- B = Senoidal de alta frecuencia, donde $u = A \sin(2\pi ft + \varphi)$ con $A = 1,5$, $f = 3$ y $\varphi = 0$.
- C = Senoidal de frecuencia media, donde $u = A \sin(2\pi ft + \varphi)$ con $A = 1,5$, $f = 1$ y $\varphi = 0$.
- D = Senoidal de baja frecuencia, donde $u = A \sin(2\pi ft + \varphi)$ con $A = 0,5$, $f = 0,1$ y $\varphi = 0$.

De esta tabla se puede concluir que el método recursivo de estimación de variaciones paramétricas que utiliza el control equivalente y mínimos cuadrados, permite contar con un mejor modelo del sistema con parámetros más cercanos a la realidad.

Por otro lado, las estimaciones de los coeficientes paramétricos mediante la aplicación del algoritmo que emplea el método de identificación directa, se pudieron implementar experi-

	Potencia del u_{eq} por tipo de señal			
Método	A	B	C	D
1)	0,0207	0,2395	0,1276	0,1083
2)	0,0245	0,0534	0,0532	0,1041
3)	0,0057	0,0606	0,0582	0,1177
4)	0,0019	0,0094	0,0806	0,1060

Tabla 9. Potencia del control equivalente u_{eq} obtenido a partir de los distintos métodos de estimación de coeficientes o variaciones paramétricas.

mentalmente en el sistema mecánico gracias a las dos modificaciones realizadas ingresando el observador propuesto por [24], ya que el algoritmo original requería del vector de estado completo, lo que dificulta en gran medida su aplicación en la práctica. Además de este problema, este algoritmo presentó mayor dificultades para su implementación, la principal de ellas fue la elección de la señal de entrada en el proceso de identificación, la cual debe de cumplir la condición de señal persistente y, a pesar de cumplir con las condiciones establecidas en [11], se obtuvieron resultados diferentes para diferentes señales de entrada que cumplieran la condición de señal persistente para sistemas lineales. Numéricamente fue posible su implementación con el algoritmo original, ya que se contaba con la velocidad y se conocía de antemano el valor de los parámetros y, en la parte experimental, se obtuvieron resultados aceptables con señales de entrada que no respetaron el criterio dado en [11]. Es importante mencionar que a pesar de que este método realiza una identificación en línea, la convergencia es muy lenta, por lo que no es factible su utilización dentro de un sistema de control en tiempo real.

5.1 Trabajo futuro

Como consecuencia del trabajo realizado en esta tesis se pueden plantear las siguientes actividades para trabajos futuros.

En lo que se refiere al algoritmo de estimación recursivo basado en el control equivalente y mínimos cuadrados las actividades son las siguientes:

- Aplicar el método recursivo a sistemas mecánicos no lineales, como el péndulo simple y

a sistemas con 2 o más GDL.

- Tomar en cuenta términos no lineales fuertes dentro de los modelos de los mecanismos, como fricción seca y zonas muertas, que puedan ser llevados a la forma de regresor lineal y que permitan estimar sus parámetros.
- Definir los criterios para las señales de entradas que garanticen la convergencia del algoritmo.
- Establecer una metodología para la selección y diseño del filtro pasabajas que permita la estimación del control equivalente.

En lo que se refiere al algoritmo de estimación directa las actividades son las siguientes:

- Modificar el algoritmo de tal forma que la convergencia sea más rápida.
- Resolver el problema de las condiciones sobre las señales de entrada.

Referencias

- [1] Hendricks, E., Jannerup, O., & Sørensen, P. H. (2008). Linear systems control: deterministic and stochastic methods. Springer Science & Business Media.
- [2] Söderström, T., & Stoica, P. (1988). System identification. Prentice-Hall, Inc.
- [3] Edwards, C., & Spurgeon, S. (1998). Sliding mode control: theory and applications. Springer.
- [4] Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). Applied nonlinear control (Vol. 199, No. 1). Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- [5] Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (1999). Sliding mode control in electromechanical systems. Taylor & Francis.
- [6] Perruquetti, W., & Barbot, J. P. (2002). Sliding mode control in engineering. CRC Press.
- [7] Dávila Montoya, J. A. (2005). Observación e identificación de sistemas vía modos deslizantes de segundo orden (Master dissertation, Tesis de maestría. UNAM. Cd. de México).
- [8] Alvarez, J., Rosas, D., & Peña, J. (2009). Analog implementation of a robust control strategy for mechanical systems. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 56(9), 3377-3385.
- [9] Kelly, R., & Santibáñez, V. (2003). Control de movimiento de robots manipuladores. Pearson Educación, SA. ISBN 84-205-3831-0.
- [10] Ljung, L. (1999). System Identification: Theory for the User, PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series.
- [11] Xu, J. X., & Hashimoto, H. (1993). Parameter identification methodologies based on variable structure control. International Journal of Control, 57(5), 1207-1220.
- [12] Davila J, Fridman L, Poznyak A. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. Int J Control 2006; 79(10):1251–62.
- [13] Ljung, L. (2014). System Identification Toolbox Reference. The MathWorks.
- [14] Ogata, K. (1998). Ingeniería de Control Moderna. Tercera Edición, Editorial Prentice Hall. ISBN 970-17-0048-1.

- [15] Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems. 2002. Third Edition, Prentice Hall Editorial. ISBN 0-13-067389-7.
- [16] Filippov, A. F. 1998. "Differential equations with discontinuous righthand sides". Kluwer Academic Publishers, London, 304 pp.
- [17] Utkin, V. I. (1978). Sliding modes and their applications in variable structure systems. Mir, Moscow.
- [18] Rosas Almeida, D. I. (2005). Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores discontinuos (Doctoral dissertation, Tesis doctoral. CICESE. Ensenada).
- [19] Ljung, L., & Söderström, T. (1983). Theory and practice of recursive identification. Cambridge, MA: MIT press.
- [20] Besançon, G. (2007). Nonlinear observers and applications (Vol. 363, pp. 1-33). Berlin: springer.
- [21] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. IEEE Transactions on automatic control, 16(6), 596-602.
- [22] Alvarez, J., Orlov, I., & Acho, L. (2000). An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a coulomb friction oscillator. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 122(4), 687-690.
- [23] Utkin, V. I. (2013). Sliding modes in control and optimization. Springer Science & Business Media.
- [24] Rosas Almeida, D. I., Alvarez, J., & Fridman, L. (2006). Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 17(9), 842-861.
- [25] Bu, X. W., Wu, X. Y., Chen, Y. X., & Bai, R. Y. (2015). Design of a class of new nonlinear disturbance observers based on tracking differentiators for uncertain dynamic systems. International Journal of Control, Automation and Systems, 13(3), 595-602.
- [26] Rosas, A. D., Velazquez, V. K., Olivares, F. L., Camacho, T. A., & Williams, I. (2017). Methodology to assess quality of estimated disturbances in active disturbance rejection control structure for mechanical system. ISA transactions, 70, 238-247.

- [27] Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (2009). Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC press.
- [28] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., & Levant, A. (2014). Sliding mode control and observation (Vol. 10, pp. 978-0). New York: Birkhäuser.