



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E  
INGENIERÍA (MYDCI)

Tesis de Doctorado

Diseño de controladores lineales dinámicos para la  
sincronización maestro-esclavo de osciladores caóticos  
de tipo Lure

Por: M. C. Ricardo Castillo

**Director de tesis:**


 Dr. Raúl Rascón

**Co-director de tesis:**

 Dr. Luis Moreno-Ahedo

 Facultad de Ingeniería

 Mexicali, B.C., México

 27 de mayo de 2025



# DEDICATORIA

A mis Padres



## AGRADECIMIENTOS

A mis sinodales por sus valiosos comentarios.



## Resumen

En el presente trabajo de tesis se estudia el problema de sincronización de osciladores caóticos. En particular, se abordará el problema de sincronización de osciladores considerando el esquema maestro-esclavo con esquemas de controladores lineales con ganancia estática y dinámica.

Los osciladores caóticos que se sincronizarán tiene la característica de ser de tipo Lure, es decir, su función puede ser separada en dos componentes, uno lineal y el otro no lineal, esta característica permite emplear herramientas matemáticas de la teoría de control de sistemas no lineales.

En la literatura se han propuesto diversos esquemas de sincronización entre los que está el acoplamiento estático. No obstante, este esquema presenta ciertas desventajas en su desempeño como el reducido rango de valores de su ganancia de control y el hecho de que existen configuraciones entrada-salida para las cuales no existe sincronización.

Estas limitaciones han llevado a la comunidad científica del área de Sistemas Complejos y Dinámica No lineal a desarrollar nuevas estrategias de control de sincronización controlada, entre las que destaca el acoplamiento dinámico, en donde la ganancia de control varía en el tiempo y es solución de cierta ecuación diferencial ordinaria cuyo orden es preestablecido. Para este acoplamiento, se propone un esquema de sintonización de las ganancias de control basado en diagramas de estabilidad en el plano de parámetros. También se introduce el análisis de la estabilidad basado en la Teoría de Sistemas Perturbados Lineales, la cual nos auxilia como herramienta para entender la sincronización como un problema de control.

Por último, el resultado principal del presente trabajo estriba en la introducción de una ley de control novedosa basada en la combinación de una ley de control estática y una dinámica, a este esquema se le llama acoplamiento estático-dinámico, el cual toma las mejores características de desempeño de los dos esquemas antes descritos pa-

ra proporcionar un desempeño extraordinario para sincronizar osciladores caóticos. Se presentan tanto resultados numéricos como analíticos.

# ÍNDICE GENERAL

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación . . . . .	1
1.2	Definición del problema . . . . .	3
1.3	Objetivos de la investigación . . . . .	4
1.3.1	Objetivo general . . . . .	4
1.3.2	Objetivos particulares . . . . .	4
1.4	Hipótesis . . . . .	4
1.5	Descripción del trabajo y principales resultados . . . . .	5
1.6	Capitulado . . . . .	6
1.7	Metodología de trabajo . . . . .	7
<b>I</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Caos</b>	<b>13</b>
2.1	Orígenes históricos . . . . .	13
2.2	Caos en el mapa logístico . . . . .	16
2.2.1	Análisis numérico del mapa logístico . . . . .	17
2.2.2	Análisis experimental del mapa logístico . . . . .	20
2.2.3	Exponente de Lyapunov como medida del caos . . . . .	23
2.3	Osciladores caóticos . . . . .	26
2.3.1	Galería de osciladores caóticos . . . . .	27
2.3.2	Implementación electrónica de osciladores caóticos . . . . .	27
2.3.3	Diseño del oscilador electrónico de Rössler . . . . .	34
2.3.3.1	Simulación (emulación) . . . . .	36
2.3.3.2	Experimentación . . . . .	38

<b>3 Exponentes de Lyapunov</b>	<b>43</b>
<b>4 Sincronización</b>	<b>51</b>
4.1 Orígenes y perspectivas . . . . .	51
4.2 Sincronización: fenómeno natural y tecnológico . . . . .	57
4.2.1 Tipos de acoplamiento . . . . .	58
4.2.2 Sincronización completa . . . . .	59
4.3 Medidas de sincronización completa . . . . .	59
<b>II Resultados de investigación</b>	<b>63</b>
<b>5 Sincronización Maestro-Eslavo</b>	<b>65</b>
5.1 Formulación del problema de sincronización . . . . .	66
<b>6 Acoplamiento estático</b>	<b>71</b>
<b>7 Controlador dinámico lineal de primer orden</b>	<b>83</b>
<b>8 Controlador dinámico lineal mas estático</b>	<b>91</b>
<b>9 Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>101</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Planteamiento de una investigación de carácter teórico. . . . .	8
2.1	Análisis en el tiempo de las trayectorias de la ecuación logística. . . . .	17
2.2	Diagrama de bifurcación del mapa logístico. . . . .	18
2.3	Sensibilidad a las condiciones iniciales. . . . .	19
2.4	El multiplicado analógico AD633AN implementa la ecuación logística. Imagen tomada de la hoja de datos . . . . .	20
2.5	Circuito para discretizar la ecuación logística (2.3), el buffer es un LF398. . . . .	21
2.6	Diagrama esquemático del circuito que implementa el mapa logístico. . . . .	22
2.7	Órbitas del mapa logístico electrónico y su diagramas de telaraña. . . . .	24
2.8	Exponente de Lyapunov $\lambda$ del mapa logístico versus el parámetro $r$ . . . . .	26
2.9	Atractor de Lorenz. . . . .	28
2.10	Atractor de Rössler. . . . .	28
2.11	Atractor de Chen. . . . .	29
2.12	Atractor de Lu. . . . .	29
2.13	Trayectorias y atractores de osciladores caóticos. . . . .	30
2.14	Op-amp sumador-restador algebraico, ver (Sheingold 1975). . . . .	31
2.15	Circuitos auxiliares para implementar osciladores electrónicos caóticos. . . . .	33
2.16	Circuitos para implementar las operaciones algebraicas de la ecuaciones (2.13). . . . .	35
2.17	Esquemático del oscilador electrónico de Rössler en Altium Designer. . . . .	37
2.18	Implementación del oscilador de Rössler en MultiSim. . . . .	39
2.19	Simulación del oscilador electrónico de Rössler dado en (2.18). . . . .	40
2.20	Proyección del atractor del oscilador electrónico de Rössler en un osciloscopio analógico. . . . .	41

3.1	Representación de dos trayectorias de un sistema dinámico evolucionando en el tiempo a partir de condiciones iniciales cercanas en el espacio-fase.	43
3.2	Representación de una trayectoria $\varphi(\cdot, \mathbf{x}_0)$ y del flujo $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$ del sistema (3.2).	45
3.3	Representación de la divergencia de dos trayectorias que inician a partir de condiciones iniciales cercanas. . . . .	46
4.1	Simpatía de dos péndulos según Christiaan Huygens, ver (Huygens 1893).	52
4.2	Retrato de Christiaan Huygens de (1629-1695). Tomado de Wikipedia. . . . .	52
4.3	Cronómetro marino de John Harrison inventado en 1761, ver (Sobel 1996).	53
4.4	Ejemplo de comportamientos en enjambres de especies. Imágenes de Adobe stock . . . . .	54
4.5	Ejemplos de robótica de enjambres. Imágenes de Adobe stock . . . . .	55
5.1	Sincronización Mestro-Eslavo. . . . .	69
6.1	Diagrama a bloques del sistema $MS$ acoplado con el controlador $C_s$ . . . . .	72
6.2	Condiciones de estabilidad para la sincronización MS del oscilador de Rössler utilizando acoplamiento estático. . . . .	75
6.3	Simulación numérica de la ecuación (6.2) considerando el oscilador de Rössler para los casos $b_1 \rightarrow c_1$ con $k_s = 4.2$ y $k_s = 4.8$ . . . . .	79
6.4	Análisis numérico de la sincronización MS del sistema Rössler con acoplamiento estático para el caso de $b_1 \rightarrow c_1$ . . . . .	80
7.1	Diagrama de bloques de la sincronización MS con acoplamiento dinámico. . . . .	84
7.2	Gráficos de estabilidad en el espacio de parámetros $(k_d, \alpha)$ para la sincronización MS del sistema de Rössler utilizando acoplamiento dinámico de primer orden. . . . .	86
7.3	Simulación numérica de la ecuación (7.2) considerando el oscilador de Rössler para el caso $b_1 \rightarrow c_1$ para dos puntos del espacio de parámetros $(\alpha, k_d)$ . . . . .	88
8.1	Diagrama de bloques del esquema de sincronización MS propuesto con la combinación de controladores estáticos y dinámicos. . . . .	92

8.2	Análisis de estabilidad de la sincronización MS del sistema Rössler con el acoplamiento estático más dinámico lineal (8.1). Claramente, el controlador propuesto induce sincronización para todas las combinaciones de vectores de entrada-salida. Por lo tanto, tiene un rendimiento superior en comparación con los controladores estáticos y dinámicos de primer orden, para los cuales los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 2 y 6, respectivamente. . . . .	94
8.3	Simulaciones numéricas de la ecuación (8.3) muestra el rendimiento del acoplamiento estático mas dinámico del oscilador de Rossler para el caso $b_1 \rightarrow c_1$ para los puntos $P_1$ y $P_2$ de las gráficas de la figura (8.2a). . . . .	95
8.4	Resultados numéricos para la sincronización maestro-esclavo del oscilador de Lorenz (8.10) aplicando el controlador estático más dinámico (8.2) considerando $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{c}_2$ con $k_s = 20$ y $b_1 \rightarrow c_1$ con $(k_d, \alpha) = (5, 3)$ . . . . .	100



## INTRODUCCIÓN

“Conducir por orden mis pensamientos, comenzando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para ascender poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más complejos.”

---

René Descartes

## 1.1. Motivación

El control de sistemas lineales invariantes en el tiempo mediante controladores estáticos de salida está bien desarrollado y se han establecido ampliamente las condiciones suficientes para garantizar la asignación de polos (Kailath 1980; C.-T. Chen 1999). Sin embargo, el conjunto de sistemas que son estabilizables por realimentación estática de salida no es genérico, como se señala en (Allwright et al. 2005; Syrmos et al. 1997). No obstante, hace décadas surgió un interés por los controladores variables en el tiempo, véase (R. W. Brockett 1983; Claude Samson 1993; Coron 1995). Brockett formalizó este enfoque (R. Brockett 1999), y hoy en día se conoce como el problema de estabilización de Brockett, que se formula como: para las matrices dadas ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ), en qué circunstancias existe una matriz  $\mathbf{K}$  variable en el tiempo tal que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BK}(t)\mathbf{Cx}$  es asintóticamente estable, donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y las matrices tienen dimensiones apropiadas. Para la teoría de control, el problema de Brockett se considera un problema abierto.

No obstante, el problema de Brockett puede abordarse considerando ganancias periódicas en el tiempo  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t + T)$ , véase (Meerkov 1980; Khargonekar et al. 1985; Ae-

yels y Willems 1991; Leonov 2001). Por lo tanto, el problema de estabilización se reduce a un sistema lineal con coeficientes periódicos, donde la teoría de Floquet-Lyapunov se aplica ampliamente y juega un papel central (Floquet 1883; Lyapunov 1992). A este respecto, existe una amplia literatura sobre el tema, en particular, referirse a la monumental obra de Yakubovich (Yakubovich y Starzhinskii 1975).

En consecuencia, el control periódico tiene que ver con el diseño y análisis de controladores periódicos en el tiempo para estabilización. Este enfoque no es nuevo, y se remonta al famoso problema de estabilización de un péndulo en su posición superior haciendo vibrar su soporte resuelto hace décadas (Stephenson 1908; Kapitza 1951). Posteriormente, Meerkov formalizó el planteamiento en su teoría del control vibracional (Meerkov 1980). Desde entonces, varios aspectos teóricos del control periódico han sido ampliamente estudiados por un gran número de investigadores, para más detalles, véase el vasto trabajo de Bittanti (Bittanti y Colaneri 2009) y las referencias en él.

Aunque se ha investigado mucho sobre la teoría de control periódico (Bittanti y Colaneri 2009). La investigación sobre su aplicación en situaciones prácticas es limitada, lo que se deduce del reducido número de aplicaciones prácticas, véase (Morin y C. Samson 1997; Hong 2002; Webb et al. 1991). Este hecho se debe a dos factores principales:

- En primer lugar, la naturaleza del control periódico es oscilatoria; por lo tanto, el actuador debe ser capaz de manejar esta acción. En la práctica, la ganancia periódica utiliza funciones armónicas simples (Kapitza 1951) o constantes a trozos (Ahmad 2010).
- En segundo lugar, la ganancia periódica se convierte en una excitación paramétrica en el sistema dinámico, es decir, los coeficientes del sistema son funciones variables en el tiempo. Estos sistemas se denominan excitados paramétricamente (Nayfeh y Mook 1979), donde puede producirse el fenómeno de resonancia paramétrica y provocar efectos perjudiciales en el comportamiento del sistema (Boltin 1964).

Con el fin de abordar este problema, en (Ayala y Luis Moreno-Ahedo 2021), se introdujo el controlador de realimentación de estado no lineal  $u = k_c \text{sign}(x, \dot{x})x$ , donde

$sign(\cdot)$  es la función de signo,  $x$  el estado, y  $k_c$  la ganancia.

Esta estrategia se conoce como modificación de la rigidez (Goh y Caughey 1985; Onoda, Endot et al. 1991) y es bien conocida en el campo del control semiactivo de vibraciones (Onoda, Sanot et al. 1992; Fisco y Adeli 2011). En particular, la modificación de la rigidez aplicando reglas de conmutación ha recibido considerable atención en la últimas décadas (J.-C. Chen 1984; Ramaratnam y Jalili 2006; Ledezma-Ramirez et al. 2011; L. Moreno-Ahedo y Diarte-Acosta 2019). El controlador  $u$  induce un fenómeno disipativo no lineal denominado amortiguamiento histerético (Caughey y Vijayaraghavan 1970; Y. Zhang e Iwan 2003) relacionado con el amortiguamiento en materiales (Reid 1956; Bert 1973). Este tipo de controlador, aunque efectivo tiene serias limitaciones.

Bajo este contexto, la principal motivación del presente trabajo de tesis es desarrollar leyes de control dinámicas en el tiempo para resolver problemas de estabilización en sistemas dinámicos no lineales. De esta forma se pretende formular una alternativa de solución al problema de estabilización de Brockett.

## 1.2. Definición del problema

Dado un sistema de control en lazo cerrado con retroalimentación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(t)\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

donde  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  son matrices de dimensiones apropiadas.

Encontrar la matriz de ganancias  $\mathbf{K}(t)$  variable en el tiempo tal que el sistema lineal (1.1) es asintóticamente estable considerando que  $\mathbf{K}(t)$  es solución de cierta ecuación diferencial ordinaria lineal.

Como sistema de control a estabilizar abordaremos el problema clásico de la sincronización de sistemas, a saber, la sincronización de sistemas osciladores caóticos maestro-esclavo.

### 1.3. Objetivos de la investigación

Se presentan los objetivos general y específicos de la propuesta de tesis

#### 1.3.1. Objetivo general

Diseñar un controlador dinámico lineal basado en realimentación de salida para garantizar la sincronización maestro-esclavo en osciladores caóticos tipo Lure, mediante el análisis de estabilidad con funciones maestras de Lyapunov y la teoría de sistemas lineales perturbados, que permita mejorar las condiciones de sincronización.

#### 1.3.2. Objetivos particulares

1. Analizar la estabilidad del error de sincronización de osciladores caóticos tipo Lure en configuración maestro-esclavo mediante funciones maestras de Lyapunov, identificando las condiciones suficientes y necesarias para garantizar convergencia asintótica del error.
2. Analizar teóricamente la dinámica de los osciladores caóticos tipo Lure en configuración maestro-esclavo, usando la teoría de sistemas lineal perturbados para identificar las condiciones suficientes para garantizar convergencia asintótica del error.
3. Diseñar un controlador híbrido basado en acoplamiento dinámico y estático, derivando un procedimiento semi-analítico para la sintonización de sus ganancias.

### 1.4. Hipótesis

El diseño de un controlador híbrido conformado por un acoplamiento estático mas otro dinámico basado en realimentación de salida, y sintetizado mediante la teoría de sistemas perturbados, garantiza la sincronización maestro-esclavo en osciladores caóticos tipo Lure con mayor robustez, en comparación con esquemas de control puramente

estáticos o dinámicos de primer orden.

## 1.5. Descripción del trabajo y principales resultados

Se muestra en (Huang et al. 2009) que para acoplamiento unidireccional difuso, es decir, un controlador con retroalimentación de salida de ganancia estática, hay casos de configuraciones de una entrada y una salida para los cuales este acoplamiento no puede llevar a cabo la sincronizar maestro esclavo.

Ante esta problemática, en los últimos años se ha propuesto controladores de ganancia dinámica, (Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Buscarino et al. 2019; Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020), donde la ganancia dinámica es solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Este enfoque aunque novedoso fue estudiado por J. Suykens (Suykens y Vandewalle 1997; Suykens, Curran et al. 1999), donde la condición de sector de la no-linealidad da la funcional del sistema permite el uso de funciones de Lyapunov tipo Lure-Postnikov para obtener condiciones de estabilidad como LMIs. Sin embargo, la condición de sector es restrictiva.

No obstante en citados trabajos (Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Buscarino et al. 2019; Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020), no se usa esta restricción, lo cual generaliza la aplicabilidad del controlador dinámico, pero remover la restricción no permite obtener resultados analíticos como los dados en (Suykens y Vandewalle 1997; Suykens, Curran et al. 1999). Es decir en (Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Buscarino et al. 2019; Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020) los resultados obtenidos son meramente numéricos producto de aplicar el formalismo de la función maestra de estabilidad definida por (Pecora y Carroll 1990).

El presente trabajo además de presentar una alternativa novedosa al problema de estabilidad de Brockett, pretende subsanar las principales desventajas del control dinámico definido por (Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Buscarino et al. 2019; Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020), como lo es: una metodología de sintonización de las ganancias basada en los dominios estabilidad en el plano de pará-

metros y la prueba de estabilidad analítica mediante un teorema basado en los círculos de Gersgorin, la abscisa espectral y cotas del valor propio mas grande de la solución matricial de la ecuación de Lyapunov.

## 1.6. Capitulado

La presente tesis se divide en dos partes:

- Parte I referente al Marco Teórico el cual contiene los capítulos:
  - Capítulo 2, en el cual relatamos brevemente la línea de tiempo de los principales hitos históricos en el desarrollo de la teoría del caos desde el punto de vista de sus protagonistas. A su vez describimos el fenómeno de caos utilizando como caso de estudio el mapa logístico. Este caso de estudio es abordado: analíticamente usando resultados teóricos, numéricamente usando algoritmos y experimentalmente implementando electrónicamente la versión analógica del mapa logístico usando amplificadores operacionales. Esta triada nos permite exponer los retos y la riqueza de los sistemas caóticos. Bajo esta vertiente, también se introducen los osciladores caóticos y su implementación electrónica donde introducimos una metodología general para implementar osciladores caóticos con electrónica analógica, la cual se basa en un amplificador operacional algebraico (sumador-restador)
  - En el capítulo 3 exponemos los fundamentos teóricos una herramienta esencial en el estudio de los sistemas caóticos: el exponente de Lyapunov.
  - Finalmente en el capítulo 4 abordamos los conceptos de sincronización de sistemas y la función maestra de estabilidad como medida de la sincronización de sistemas acoplados
- La parte de resultados de investigación contiene los capítulos:
  - El capítulo 5 define la problemática a resolver sobre la sincronización maestro esclavo de osciladores caóticos de tipo Lure con acoplamiento unidirec-

cional

- El capítulo 6 aborda las desventajas del acoplamiento estático o difuso.
- El capítulo 7 define el acoplamiento dinámico de primer orden, a la vez que se describen sus principales ventajas y desventajas. Introducimos una herramienta de diseño de este controlador basada en dominios de estabilidad en el plano de parámetros.
- En el capítulo 8 introducimos nuestro principal resultado de investigación donde diseñamos un controlador que conjuga las ventajas de los controladores estático y dinámico, a la vez que definimos una técnica de diseño mediante un procedimiento dado por un algoritmo. Para la sintonización de las ganancias del controlador introducimos una técnica semi-analítica basada en parte en el criterio geométrico de la abscisa espectral y en el cómputo de los dominios de estabilidad. Esta técnica esta justificada por el teorema de estabilidad de nuestra autoría que proporciona las condiciones necesarias para que el controlador estático mas dinámico aplicando a la dinámica del error del sistema maestro esclavo lleve al error a cero.
- Por último el capítulo 9 proporciona las conclusiones.

## 1.7. Metodología de trabajo

La metodología empleado en esta tesis corresponde al tipo de *investigación teórica* propuesta por (Razo 2012):

La investigación teórica se enfoca en demostrar, mediante los resultados obtenidos, la validez científica de teorías, leyes, conceptos o conocimientos dentro de un área de estudio específica, lo cual constituye su objeto central de análisis. A través de este proceso, se busca establecer fundamentos sólidos que permitan confirmar, refutar o modificar los planteamientos teóricos examinados.

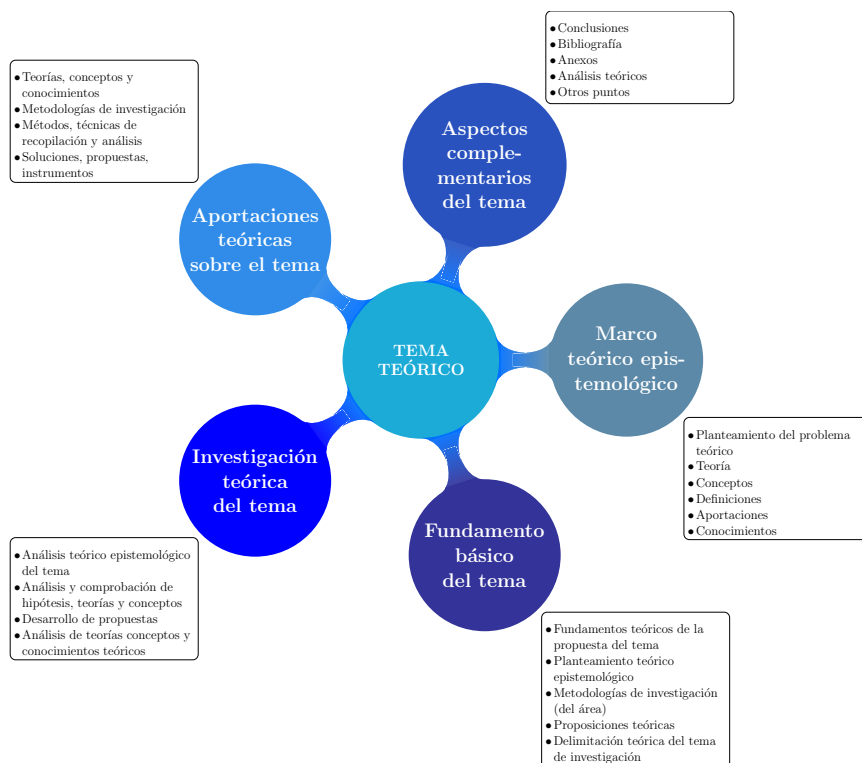


Figura 1.1: Planteamiento de una investigación de carácter teórico.

Como consecuencia de este tipo de investigación, es posible llegar a la verificación de una teoría, su rechazo por falta de consistencia o evidencia suficiente, o incluso su reformulación para ajustarla a nuevos hallazgos. Asimismo, este enfoque puede dar lugar a la generación de nuevos conocimientos teóricos con aplicaciones potenciales en el campo de estudio, lo que contribuye al desarrollo y evolución del saber científico.

Es decir, la investigación de tipo teórica no solo evalúa críticamente el conocimiento existente, sino que también asienta cimientos para innovaciones conceptuales y avances disciplinares del área de estudio. En la figura (1.1) se presenta el esquema sobre cómo plantear un tema de investigación de carácter teórico.

A continuación se presenta la metodología de una investigación de carácter teórico:

### ■ 1. Planteamiento del problema

- Planteamiento del problema

- Definición del problema de estudio
- Planteamiento y delimitación teórico-conceptual
- Objeto de estudio
  
- **2. Antecedentes documentales de la problemática**
  
- **3. Conceptos y definiciones sobre el tema**
  
- **4. Propositiones de la investigación**
  - Hipótesis
  - Objetivos
  - Planeación de la investigación
  
- **5. Delimitación del marco teórico y conceptual del tema**
  - Marco teórico
  - Marco conceptual
  - Referencias documentales
  
- **6. Diseño y recopilación de información documental**
  
- **7. Análisis de la información documental**
  
- **8. Comparación de posiciones documentales encontradas**
  - Comprobación de hipótesis
  - Posición respecto a la problemática
  
- **9. Aportación sobre el tema**
  - Leyes, teorías y postulados
  - Difusión de resultados



# **Parte I**

## **Marco teórico**



## CAPÍTULO 2

### CAOS

“El caos no es una condición anómala, sino una ley del cosmos.”

---

Henri Poincaré

EN ESTE CAPÍTULO, se presenta una breve reseña sobre caos en sistemas dinámicos, con el objetivo de introducir el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales considerando la ecuación logística. Este concepto está estrechamente ligado al caos. La ecuación logística también permitirá definir el concepto de exponente de Lyapunov.

#### 2.1. Orígenes históricos

Fue la década de 1970 a 1980 cuando el término "caos" comenzó a usarse ampliamente para describir ciertos fenómenos complejos ocurridos en sistemas dinámicos. El término proviene de la palabra griega  $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$ <sup>1</sup>, según la mitología griega este se refiere a un concepto primordial que representa el vacío o el desorden original del cosmos antes de la creación del mundo ordenado.

Una de las primeras referencias documentadas sobre el estudio del fenómeno caótico en sistemas dinámicos se atribuye al matemático francés Henri Poincaré, quien se percató que en ciertos sistemas dinámicos (El problema de los tres cuerpos), las soluciones pueden ser extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En su obra *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, él escribió:

---

<sup>1</sup>Pronunciado como xa.os según la transcripción fonética en el Alfabeto Fonético Internacional (AFI)

*Una causa muy pequeña que escape a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de ver, y entonces decimos que ese efecto es debido al azar. Si conociéramos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación inicial del universo, podríamos predecir con la misma exactitud el estado futuro de ese universo. Pero incluso si las leyes naturales ya no tuviesen ningún secreto para nosotros, solo podríamos conocer la situación inicial de manera aproximada. Si esto nos permite predecir el estado posterior con la misma aproximación, eso es todo lo que necesitamos, y decimos que el fenómeno ha sido previsto, que está gobernado por leyes. Pero no siempre es así; puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan estados muy diferentes, y entonces una pequeña causa puede desencadenar un gran efecto... (Poincaré 1892)*

Aunque Poincaré se percató de la transcendencia de estos hechos, sus estudios sobre el tema no tuvieron una continuación adecuada, esto debido a diversos motivos. El primero de ellos eran las limitaciones tecnológicas pues no existían aun las computadoras. Segundo, Poincaré era un matemático polifacético que contribuyó en diversas ramas de las Matemáticas y esto desvió su intereses sobre el tema. Tercero, las prioridades científicas de la época concernientes a los conceptos de la relatividad y la física cuántica emergieron revolucionando la física. Una excelente referencia histórica sobre este tema esta dada por James Gleick en (Gleick 1987).

Un hito en el estudio de los sistemas caóticos, fue dado en el año 1963, cuando E. Lorenz publicó su famoso artículo titulado 'Deterministic Nonperiodic Flow'. Este artículo es ampliamente reconocido como el primer trabajo en el que se describe el concepto de caos en sistemas deterministas. En él, Lorenz introdujo el ahora famoso modelo del "atractor Lorenz", que muestra cómo sistemas dinámicos pueden exhibir un comportamiento caótico y sensible a las condiciones iniciales, a pesar de ser deterministas.

Sin embargo, de la época de Poincaré al tiempo de Lorenz existió un gran número de científicos que contribuyeron al desarrollo de la teoría del caos. La siguiente lista describe brevemente algunos de sus máximos y reconocidos expositores en la siguiente línea de tiempo:

- Jacques Hadamard.** (1898) Hadamard trabajó en la dinámica de sistemas y mostró que una partícula moviéndose sobre una superficie con curvatura negativa exhibiría un comportamiento altamente sensible a las condiciones iniciales, lo que más tarde sería reconocido como comportamiento caótico.
- Aleksandr Lyapunov.** (1892) Lyapunov estudió la estabilidad de sistemas dinámicos y desarrolló lo que hoy se conoce como exponentes de Lyapunov, que miden la tasa de separación de trayectorias infinitesimalmente cercanas en un sistema dinámico. Este concepto es fundamental para entender la sensibilidad a las condiciones iniciales, una característica clave de los sistemas caóticos.
- George David Birkhoff.** (1931) Birkhoff, extendió el trabajo de Poincaré. Su famoso teorema ergódico demostró la existencia de comportamientos impredecibles en ciertos sistemas dinámicos, lo que sería una idea central en la teoría del caos.
- Mary Cartwright y J.E. Littlewood.** (1942-1945) En los años 1940, Cartwright y Littlewood trabajaron en ecuaciones diferenciales no lineales que describían el comportamiento de sistemas electrónicos. Estudiaron soluciones oscilatorias complejas que presentaban comportamientos caóticos. Este trabajo, aunque no fue identificado como teoría del caos en su momento, fue un precursor importante en el estudio de sistemas no lineales.
- Pierre Fatou y Gaston Julia.** (1917-1920) Estos dos matemáticos franceses investigaron las propiedades de funciones iteradas, particularmente las funciones racionales. Sus trabajos llevaron a la creación de los conjuntos de Julia y Fatou, que son ejemplos tempranos de comportamiento caótico en sistemas dinámicos complejos.
- Andrey Kolmogorov y Vladimir Arnold.** (1954-1963) Kolmogorov y sus estudiantes, en particular Arnold, desarrollaron la teoría KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Esta teoría aborda la estabilidad de sistemas dinámicos hamiltonianos y muestra cómo, en mu-

chos casos, los sistemas dinámicos no degeneran completamente en caos, sino que pueden mantener islas de comportamiento periódico.

**Benoît Mandelbrot. (1967)** Aunque su trabajo sobre fractales se popularizó más tarde, Mandelbrot comenzó a estudiar la irregularidad y la auto-semejanza en la naturaleza durante las décadas de 1950 y 1960. Su trabajo ayudó a descubrir que los sistemas caóticos a menudo presentan estructuras fractales.

**Edward Lorenz. (1963)** Lorenz, un meteorólogo, descubrió lo que ahora se conoce como el 'efecto mariposa' mientras modelaba el clima en 1963. Él mostró cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales podían conducir a diferencias enormes en los resultados a largo plazo, un comportamiento característico del caos.

**David Ruelle y Floris Takens (1971)** Estos físicos propusieron formalmente que la turbulencia podría entenderse como una transición hacia el caos a través de una bifurcación de Hopf en sistemas dinámicos.

El caos está relacionado con la sensibilidad de las condiciones iniciales, para entender este concepto, introduciremos y analizaremos el mapa logístico (May 1976). Esta sencilla ecuación presenta en su dinámica varios fenómenos relacionados con bifurcación y caos.

## 2.2. Caos en el mapa logístico

Se escogió esta ecuación por su simplicidad. No obstante, su comportamiento dinámico la hace idónea para explicar varios conceptos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

El mapa logístico fue estudiado por el biólogo australiano Robert May en (May 1976), este trabajo marco un hito en el devenir de la teoría del caos por la diversidad de comportamientos dinámicos que pueden presentarse. El mapa esta dado por:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \tag{2.1}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y además:

- $r \geq 0 \in \mathbb{R}$ , llamado tasa de crecimiento,
- $x_n$  es la población en la generación  $n$ ,
- $x_{n+1}$  es la población en la siguiente generación  $n + 1$ .

El mapa (2.1) se resuelve recursivamente dada una condición inicial  $x_0$ . Para diferentes valores del parámetro  $r$  la solución<sup>1</sup> del mapa tiene un comportamiento característico. En el análisis del mapa logístico se distinguen al menos tres comportamientos bien diferenciados:

- Para  $r < 1$  la orbita  $x_n \rightarrow 0$ , es decir, la población se extingue,
- Para  $1 < r < 3$  la población crece y alcanza un estado de equilibrio,
- Para  $r > 3$  ocurre el fenómeno de bifurcaciones de duplicación de período y eventualmente un régimen caótico.

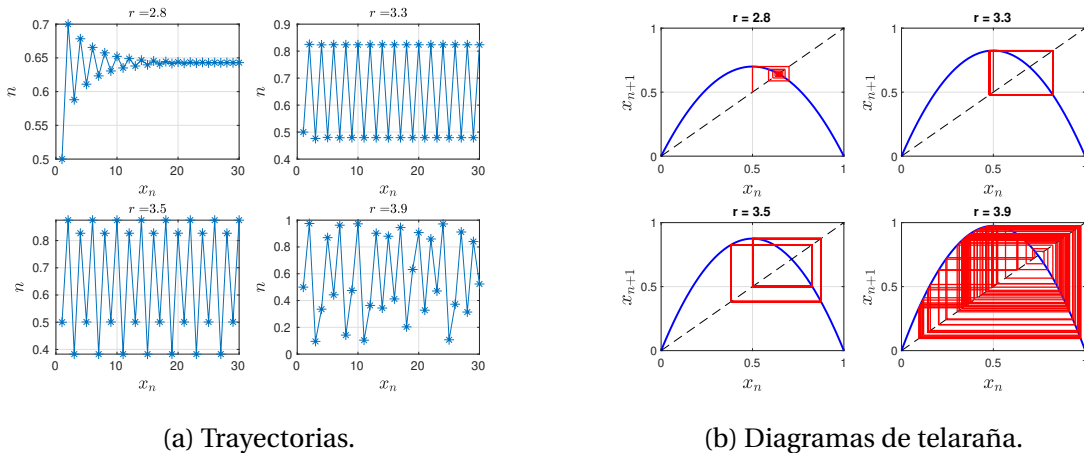


Figura 2.1: Análisis en el tiempo de las trayectorias de la ecuación logística.

### 2.2.1. Análisis numérico del mapa logístico

Por ejemplo, las trayectorias del mapa logístico para los casos  $r = 2.8$ ,  $r = 3.3$ ,  $r = 3.5$  y  $r = 3.9$  se muestran la figura (2.1a). Donde se observan los siguientes comportamientos: convergencia hacia un punto de equilibrio cuando  $r = 2.8$ , señal periódica de período  $N = 2$  cuando  $r = 3.3$ , período  $N = 4$  cuando  $r = 3.5$  y caótica cuando  $r = 3.9$ . Por

<sup>1</sup>También se le conoce como trayectoria u orbita

otro lado, se pueden utilizar un diagrama de telaraña<sup>1</sup>, el cual es una representación para ilustrar el comportamiento de las trayectorias. Este diagrama es de utilidad para visualizar cuando la trayectoria del mapa logístico converge hacia un punto fijo (equilibrio o estado estacionario), es  $N$ -periódica o presenta caos, esto dependiendo del valor del parámetro  $r$  del mapa. En donde se gráfica la función  $f(x_n) = r x_n(1 - x_n)$  del mapa, las coordenadas  $(x_n, x_{n+1})$  y la línea recta  $x_n = x_{n+1}$  en cuya intercesión con  $f$  revela los puntos de equilibrio del mapa. La figura (2.1b) muestra los diagramas de telaraña para los casos arriba descritos. De la figura se observa, convergencia hacia un punto de equilibrio, dos trayectorias periódicas y una caótica.

Es obvio que el comportamiento de la trayectoria depende del parámetro  $r$ , por lo que resulta útil determinar en un diagrama el comportamiento de la trayectoria para un número considerablemente grande de generaciones  $n$  conforme el parámetro  $r$  se incrementa. Este diagrama de bifurcación del mapa logístico se muestra en la figura (2.2), donde se muestra que conforme  $r$  se incrementa la periodicidad de la trayectoria se duplica hasta llegar a una trayectoria caótica, esto se conoce como ruta de duplicación de periodos hacia el caos<sup>2</sup>.

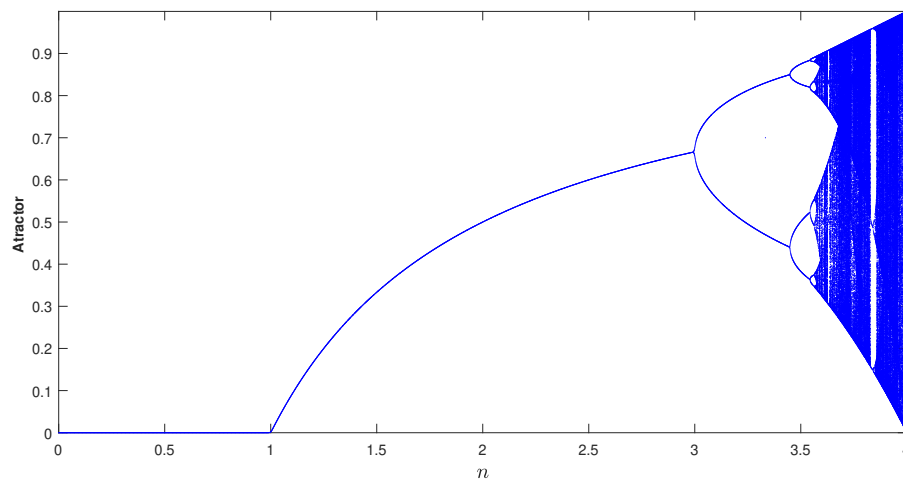


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.

Por otro lado, el caos está relacionado con la sensibilidad a las condiciones inicia-

<sup>1</sup>Cobwebs

<sup>2</sup>Period-doubling route to chaos

les para enfatizar esta característica se analizará las trayectorias del mapa logístico para varias condiciones iniciales ligeramente desviadas de una condición inicial  $x_0$  para diversos valores de  $r$  dados por  $r = 2.8, 3.14, 3.5$  y  $3.8$ . Las trayectorias correspondientes se muestran en la figura (2.3).

En particular, las trayectorias cuando  $r = 3.14$  se muestran en la figura (2.3b), en donde se observan que estas trayectorias divergen para condiciones ligeramente diferentes y son impredecibles. A causa de esta divergencia que se dice que un principio fundamental del caos es la sensibilidad a las condiciones iniciales.

En un sistema caótico, la distancia entre dos trayectorias en el espacio fase a menudo se incrementa exponencialmente en el tiempo. Si  $d_0$  es la distancia inicial entre dos condiciones iniciales, sea  $d(t)$  es la distancia después de algún tiempo  $t$  dada por  $d(t) \approx d_0 e^{\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es llamado exponente de Lyapunov. Si  $\lambda$  es positivo, las trayectorias divergen caso contrario convergen. Es decir, si  $\lambda > 0$  el sistema es caótico. Una definición será dada en las siguientes secciones.

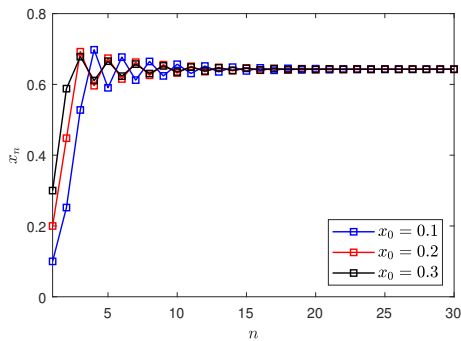
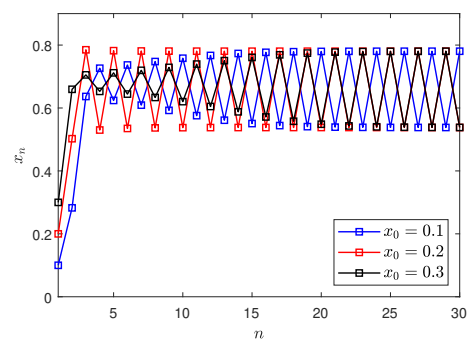
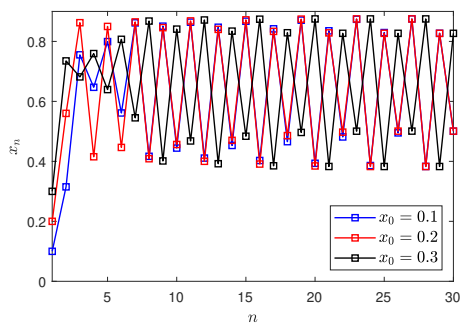
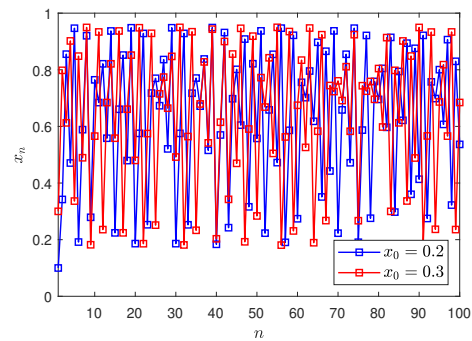
(a)  $r = 2.8$ (b)  $r = 3.14$ (c)  $r = 3.5$ (d)  $r = 3.8$ 

Figura 2.3: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

### 2.2.2. Análisis experimental del mapa logístico

Aunque el mapa logístico modela la dinámica de una población de organismos vivos, es posible implementar un circuito electrónico que emule el comportamiento discreto del mapa (L'Her et al. 2016). Para ello se hará uso de dos circuitos integrados el multiplicador analógico AD633AN y el muestreador-retenedor LF398.

La ecuación que gobierna la etapa de multiplicación del AD633AN es proporcionada en la hoja de datos del fabricante y esta dada por:

$$W = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10V} \left( \frac{R1 + R2}{R1} \right) + S \quad (2.2)$$

$$1k\Omega \leq R1, R2 \leq 100k\Omega$$

Considerando la configuración del circuito de la figura (2.4), la ecuación del multiplicador AD633AN dada en (2.2) y la ecuación logística (2.1), podemos escribir la siguiente ecuación:

$$V_{out} = \left( 1 + \frac{R_{var}}{R} \right) \frac{V_{in}(t)(10 - V_{in}(t))}{10} \quad (2.3)$$

Donde  $R1 = R$  es una resistencia de valor fijo de  $1k\Omega$  y  $R2 = R_{var}$  es un potenciómetro de  $0-3k\Omega$ . Note que  $R_{var}$  y  $R$  conforman un divisor de voltaje cuya salida esta conectada en la terminal Z del AD633AN. Mientras que  $V_{in}$  es un voltaje de entrada conectada en la terminal Z del AD633AN. Mientras que  $Y4 = 0$  y  $X1 = 10V$ .

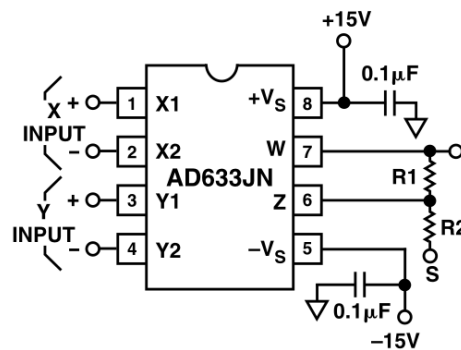


Figura 2.4: El multiplicado analógico AD633AN implementa la ecuación logística. Imagen tomada de la hoja de datos

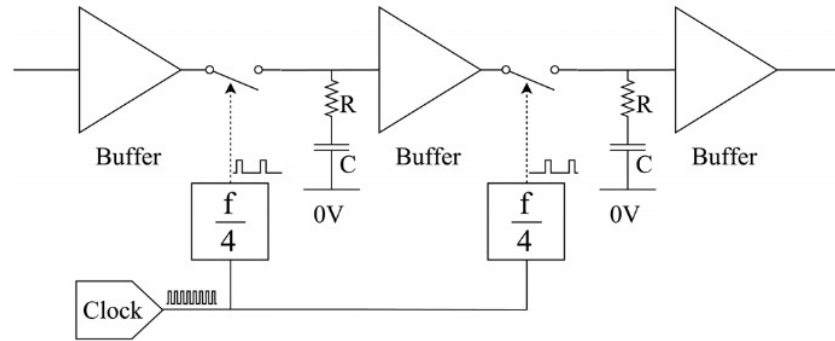


Figura 2.5: Circuito para discretizar la ecuación logística (2.3), el buffer es un LF398.

La ecuación (2.3) puede ser reducida a la ecuación logística (2.1) considerando el siguiente cambio de variables:

- $x_n \equiv \frac{V_{in}}{10}$
- $x_{n+1} \equiv \frac{V_{out}}{10}$
- $r \equiv \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right)$

Por lo tanto, sustituyendo estas relaciones en la ecuación (2.3) se obtiene una ecuación que relaciona funcionalmente las diferencias  $x_n$  y  $x_{n+1}$ . Sin embargo, tal relación no está dada en tiempo discreto, para realizar la operación de discretización del tiempo utiliza un amplificador muestreador-retenedor<sup>1</sup> dado por el integrado LF398. La figura (2.5) muestra el diagrama de conexión del muestreador-retenedor.

El diagrama esquemático completo del circuito que muestre las conexiones entre el AD633AN y LF398 se muestra en la figura (2.6), donde se ha añadido elementos correspondientes a: seguidores de voltaje implementados con los amplificadores operacionales AD823 y un potenciómetro digital implementado con el MPC4131. El MPC4131 es controlado usando el protocolo I<sup>2</sup>C, las instrucciones para proporcionar el valor del potenciómetro es establecido con un Arduino Uno.

Se realizaron tres experimentos en la plataforma experimental del mapa logístico electrónico dado en la figura (2.6), considerando distintos valores del parámetro  $r$  del mapa, a saber:

<sup>1</sup>Sample and hold amplifier

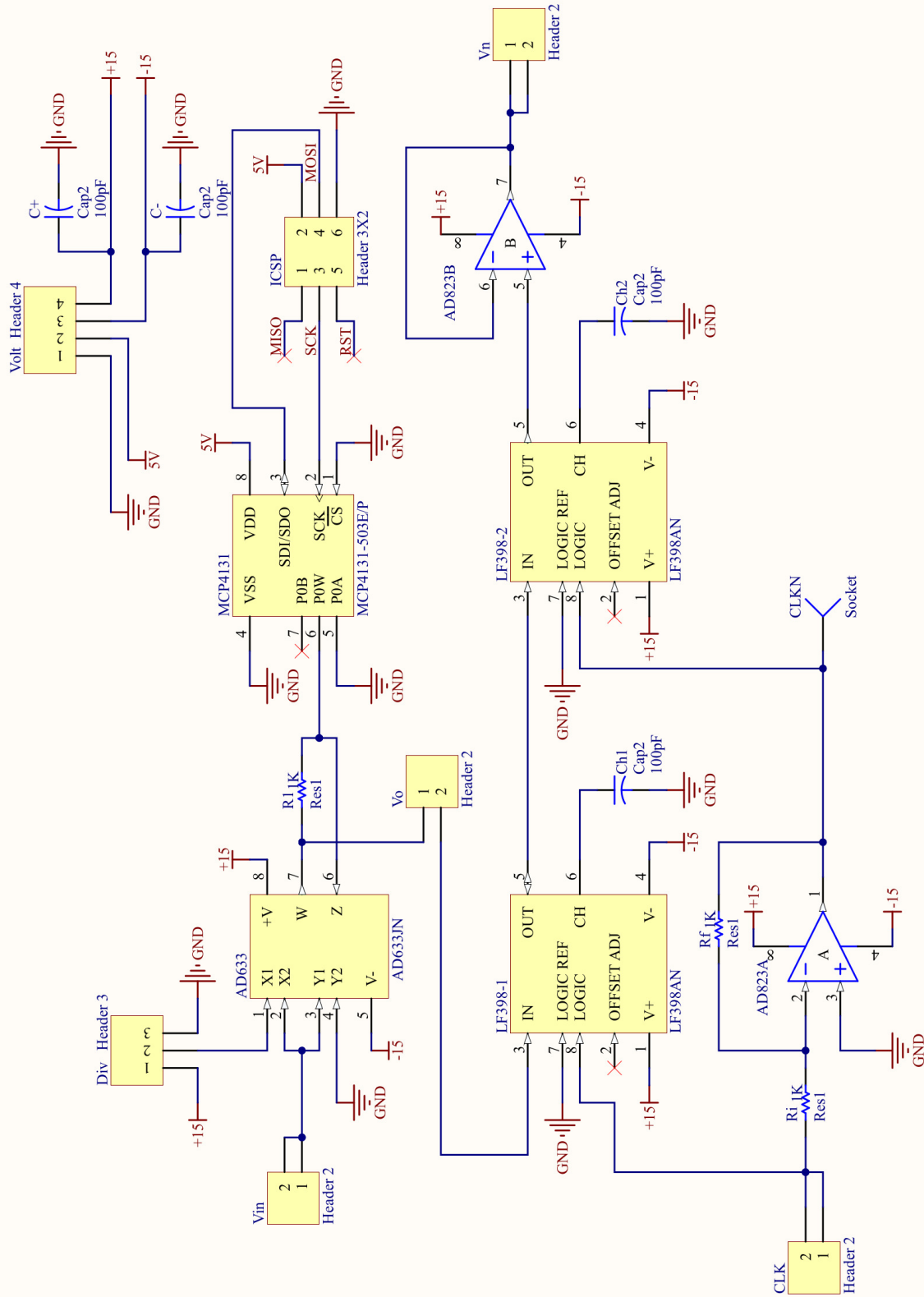


Figura 2.6: Diagrama esquemático del circuito que implementa el mapa lógico.

- 1 Para  $r = 3.43$ , la órbita tiene dos puntos fijos dados por  $p_1 = 0.847$ ,  $p_2 = 0.4446$ , por lo cual se dice que la órbita es 2-periódica.
- 2 Para  $r = 3.48$  la órbita tiene cuatro puntos fijos dados por  $p_1 = 0.8694$ ,  $p_2 = 0.8317$ ,  $p_3 = 0.4872$  y  $p_4 = 0.3951$ , por lo cual se dice que la órbita es 4-periódica.
- 3 Para  $r = 3.8$  la órbita no presenta periodicidad, por lo cual se dice que es caótica.

Los valores numéricos arriba mostrados se obtuvieron numéricamente realizando simulaciones del mapa logístico.

Por otro lado, la figura (2.7) muestra los resultados experimentales correspondientes a la captura de datos con un osciloscopio. En la figura se muestran la órbita  $x_n$ , mientras que para el diagrama telaraña el osciloscopio opera en modo XY con  $x_n$  y  $x_{n+1}$ .

Aunque la simulación numérica y la emulación experimental son útiles para determinar la naturaleza de las orbitas, es necesario una herramienta matemática que proporcione un criterio para determinar la naturaleza de una órbita. Este enfoque nos permite introducir formalmente el concepto de exponente de Lyapunov, dado a continuación.

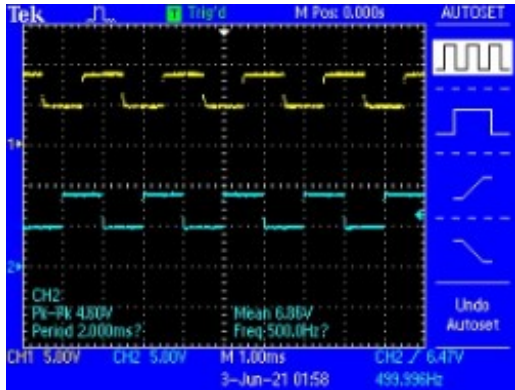
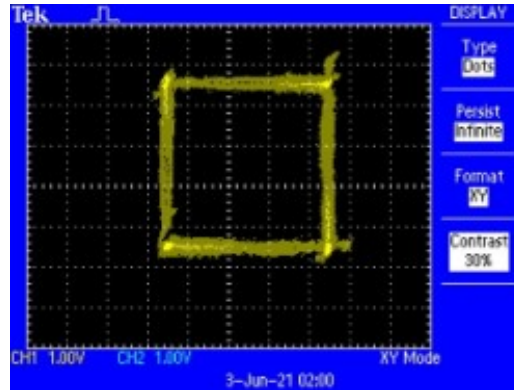
### 2.2.3. Exponente de Lyapunov como medida del caos

Se sabe que el mapa logístico está definido por:

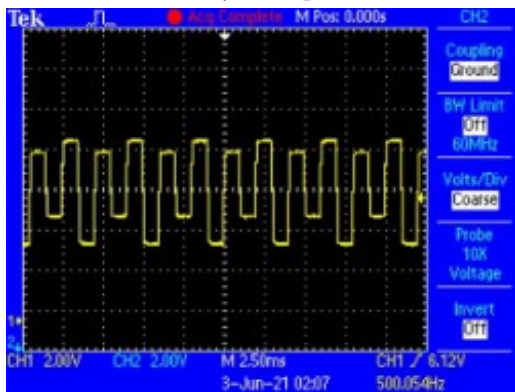
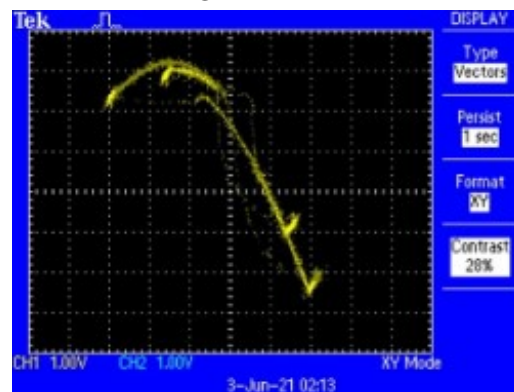
$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n)$$

Se consideran dos trayectorias que parten de condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas  $x_0$  y  $x_0 + \delta_0$ , donde  $\delta_0$  es la distancia entre ellas. En el paso  $n + 1$  la distancia de separación entre la trayectorias es aproximadamente:

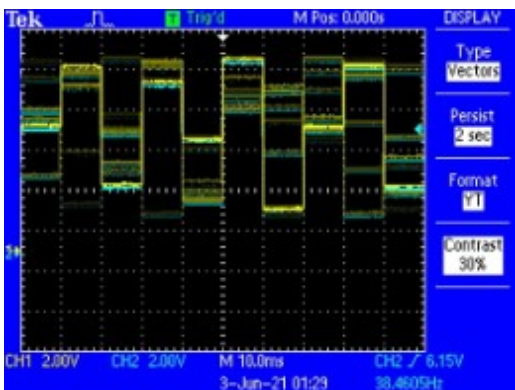
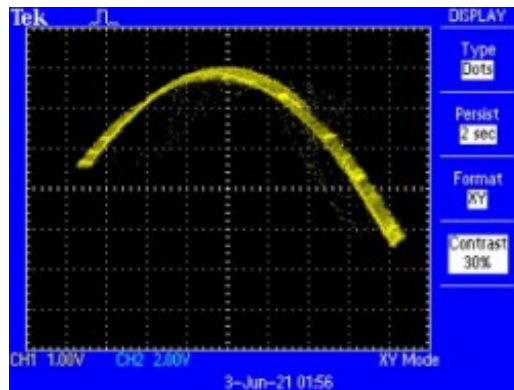
$$\delta_{n+1} \approx \delta_n \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n}$$

(a) Órbita  $x_n$  y  $x_{n+1}$  para  $r = 3.43$ .

(b) Diagrama de telaraña.

(c) Órbita  $x_n$  para  $r = 3.48$ .

(d) Diagrama de telaraña.

(e) Órbita  $x_n$  y  $x_{n+1}$  para  $r = 3.8$ .

(f) Diagrama de telaraña.

Figura 2.7: Órbitas del mapa logístico electrónico y su diagramas de telaraña.

donde  $\frac{df(x)}{dx}$  es la derivada de la función del mapa logístico, i.e.,  $\frac{df(x)}{dx} = r(1 - 2x)$ . La distancia  $\delta_n$  entre las trayectorias evoluciona conforme la siguiente relación:

$$\delta_n \approx \delta_0 \prod_{i=1}^n \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

Reescribiendo la ecuación anterior como:

$$\delta_n \approx \delta_0 e^{\lambda n}$$

Entonces se puede determinar si las trayectorias divergen o convergen exponencialmente, según el valor de  $\lambda$  llamado el exponente de Lyapunov; el cual que mide la tasa promedio de crecimiento o decrecimiento exponencial de la separación de la trayectorias. Por otro lado, tomando el logaritmo de las expresión anteriores, tenemos:

$$\ln \delta_n = \ln \delta_0 + \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

$$\ln \delta_n = \ln \delta_0 + n\lambda$$

Dividiendo por  $n$  y por simple analogía, cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos la definición del exponente de Lyapunov para mapas iterativos:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

En particular, para el mapa logístico, el exponente de Lyapunov  $\lambda$  se obtiene considerando que la derivada es  $\frac{df(x)}{dx} = r(1 - 2x)$ , es decir:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |r(1 - 2x_i)|$$

donde  $x_i$  es la trayectoria del mapa para un valor de  $r$ . La gráfica correspondiente de  $\lambda(r)$  se muestra en la figura (2.8).

De la figura cuando  $\lambda > 0$  la trayectoria del mapa logístico es caótica, es decir, no presenta periodicidad o patrón alguno, y la respuesta del mapa es sensible a las condiciones

iniciales.

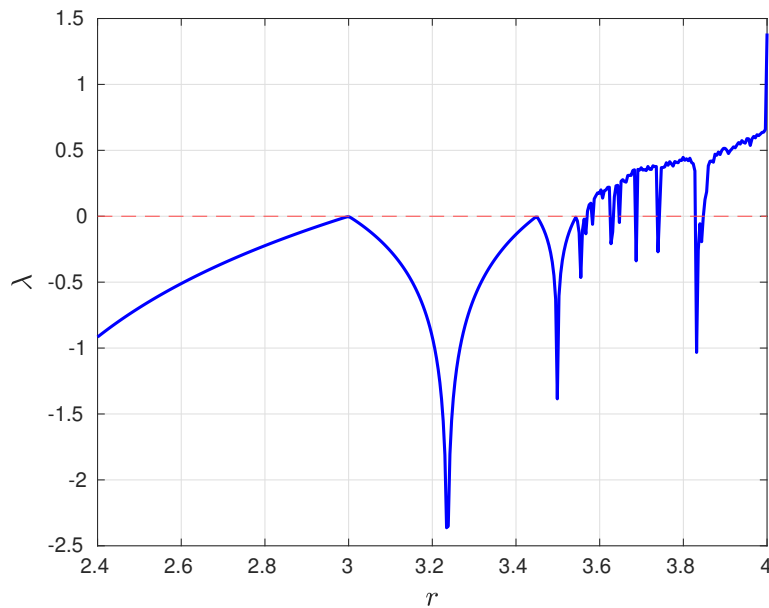


Figura 2.8: Exponente de Lyapunov  $\lambda$  del mapa logístico versus el parámetro  $r$ .

En la siguiente sección se introduce un tipo de sistema dinámico en tiempo continuo que presenta un régimen caótico.

### 2.3. Osciladores caóticos

Un oscilador caótico es modelado matemáticamente con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, el cual oscila en el tiempo sin predecibilidad, es decir, sus trayectorias son intrincadas y no tienen un periodo determinado. A su vez, el sistema es sensible a las condiciones iniciales. Estas dos características ocurren aunque el sistema sea determinista. Este hecho fue descubierto por Lorenz en 1963 (Lorenz 1963), quien mostró cómo un modelo matemático de un sistema meteorológico simple podía exhibir un comportamiento caótico, dando consigo uno de los primeros descubrimientos en el área, ahora el modelo de este oscilador es llamado el oscilador de Lorenz.

Desde entonces, varios osciladores caóticos han sido descubiertos y estudiados en diversos campos de conocimientos como la electrónica, biología, mecánica y física. En-

tre los que podemos encontrar es: el oscilador de Duffing, el péndulo caótico y el oscilador de Van der Pol por mencionar algunos (Banerjee y Ranjan 2001).

Los osciladores caóticos a menudo exhiben lo que se conoce como atractores extraños. Estos son conjuntos de trayectorias en el espacio fase (phase space) en los cuales la dinámica del sistema eventualmente se establece. Estos muestran un comportamiento complejo pero confinado en un espacio.

Usualmente, la dinámica de los osciladores caóticos depende en gran medida de los valores de sus parámetros, por lo que al variar estos el oscilador muestra transiciones o bifurcaciones. Estas transiciones suelen ser descritas por diagramas de bifurcación, donde el sistema pasa de un comportamiento periódico a uno caótico.

En resumen, los osciladores caóticos se pueden caracterizar por su: no linealidad, sensibilidad a las condiciones iniciales, modelo matemático determinista, atractores extraños, impredecibilidad y bifurcaciones.

### 2.3.1. Galería de osciladores caóticos

En esta sección se describen los siguientes osciladores caóticos:

- Oscilador de Lorenz descrito en la figura (2.9)
- Oscilador de Rössler descrito en la figura (2.10)
- Oscilador de Chen descrito en la figura (2.11)
- Oscilador de Lu descrito en la figura (2.12)

Mientras que en la figura (2.13), se han graficado las trayectorias en el tiempo  $t$  y las proyecciones del atractor en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $zy$ .

### 2.3.2. Implementación electrónica de osciladores caóticos

Para la implementación electrónica de osciladores caóticos es práctica común utilizar amplificadores operacionales<sup>1</sup> (Buscarino 2017). Dentro de los cuales encontramos op-amps sumadores, amplificadores inversores para operar restas y op-amps integradores. Sin embargo, en este trabajo se utilizará el sumador-restador algebraico descrito

---

<sup>1</sup>Abreviado como op-amps

Descubierto por Edward Lorenz mientras desarrollaba un modelo de convección atmosférica simplificado usando un conjunto de ecuaciones diferenciales. Al realizar una simulación del modelo, Lorenz se percató que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales podían llevar a resultados muy diferentes, descubriendo así el caos determinista.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\quad (2.4)$$

donde  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = \frac{8}{3} \approx 2.67$

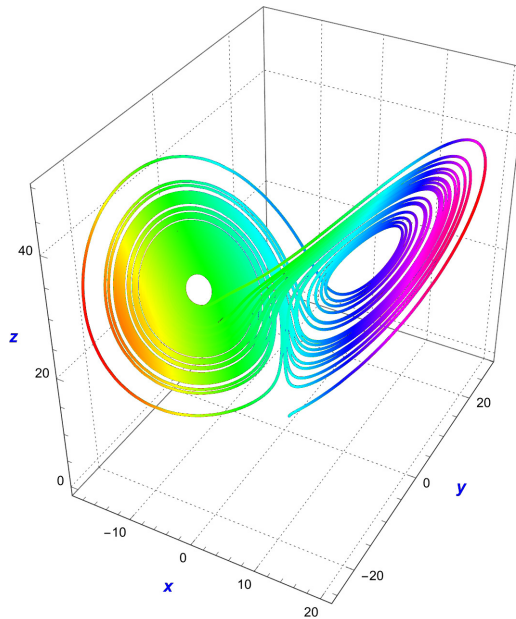


Figura 2.9: Atractor de Lorenz.

La ecuación de Rössler. Propuesta por el matemático alemán Otto Rössler en 1976. Rössler estudió el caos y la dinámica no lineal, y su trabajo se centró en entender cómo sistemas aparentemente simples pueden exhibir comportamientos complejos.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xy - cz\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ .

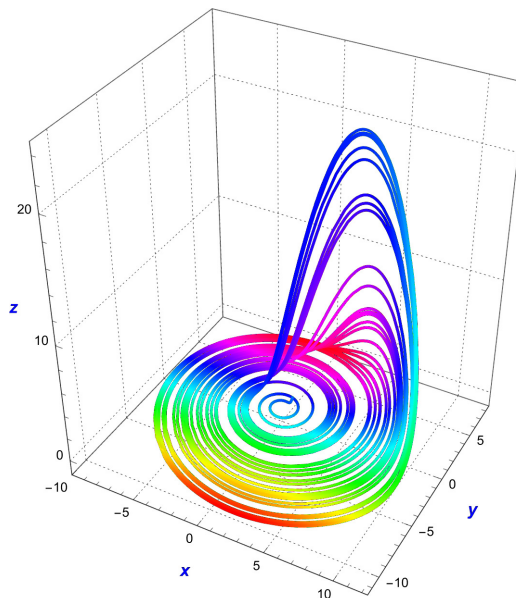


Figura 2.10: Atractor de Rössler.

El sistema de Chen, fue propuesto por el profesor Guanrong Chen en 1999 como una variante del sistema de Lorenz, y exhibe un comportamiento caótico pero con diferencias sutiles en la estructura del atractor caótico.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\quad (2.6)$$

donde  $a = 35$ ,  $\beta = 3$  y  $c = 28$ .

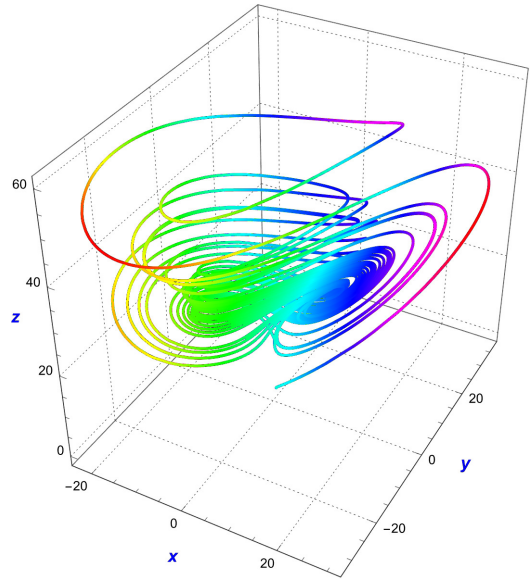


Figura 2.11: Atractor de Chen.

El oscilador caótico de Lu se origina del trabajo de Ching-Yao Lu, un investigador en dinámicas no lineales, quien introdujo este sistema en 1999. El sistema Lu se desarrolló como parte de una exploración más amplia del comportamiento caótico en sistemas autónomos tridimensionales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + cy \\ \dot{z} &= xy - \beta z = z\end{aligned}\quad (2.7)$$

donde  $a = 36$ ,  $\beta = 3$  y  $c = 20$ .

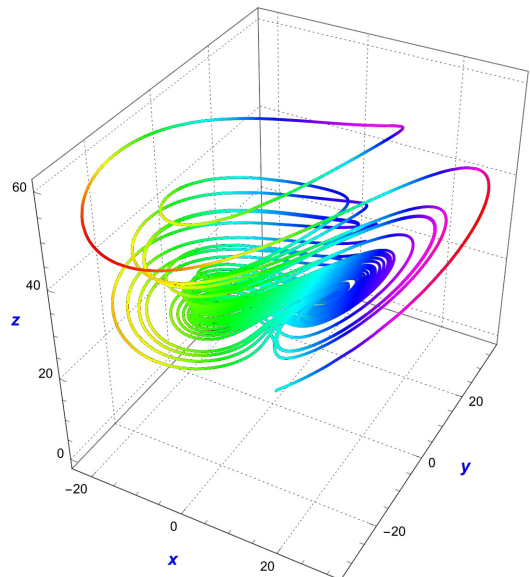
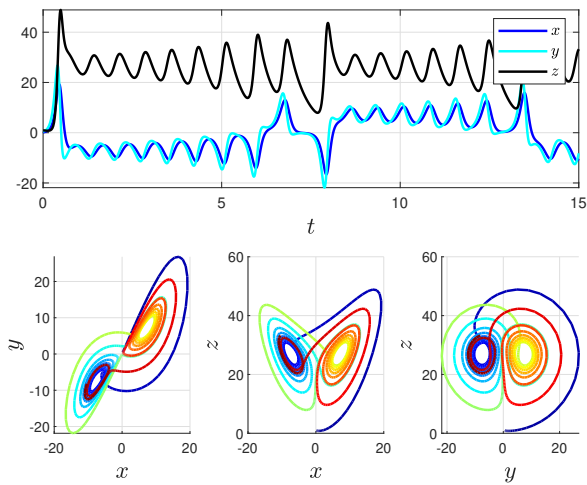
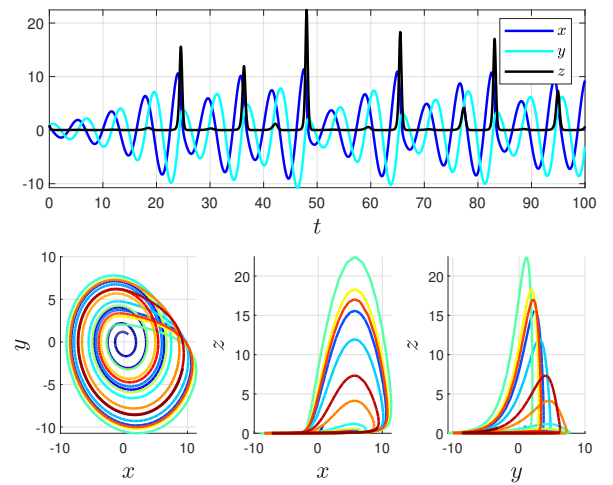


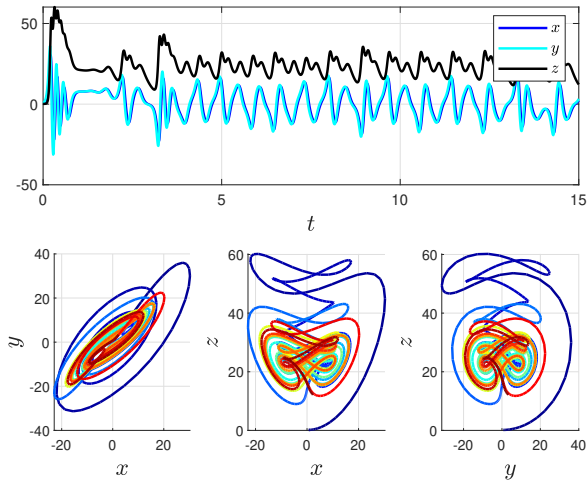
Figura 2.12: Atractor de Lu.



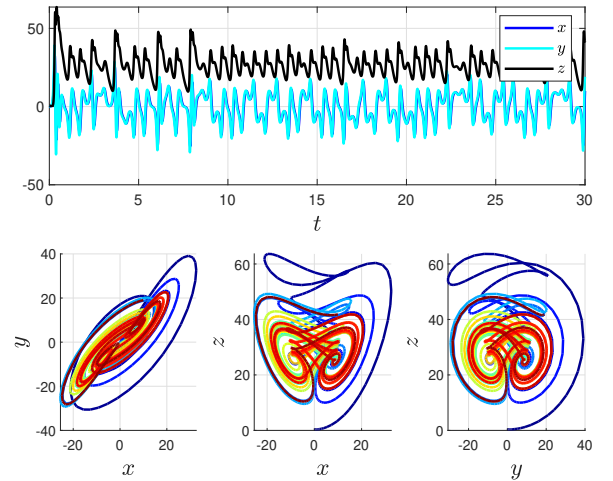
(a) Oscilador de Lorenz



(b) Oscilador de Rössler



(c) Oscilador de Chen



(d) Oscilador de Lu

Figura 2.13: Trayectorias y atractores de osciladores caóticos.

en (Sheingold 1975) y el cual es poco conocido en libros de texto, esta configuración de op-amp tiene la ventaja de reducir en cierta medida en numero de op-amps utilizados en las operaciones algebraicas, la configuración del op-amp sumador-restador esta dado en la figura (2.14).

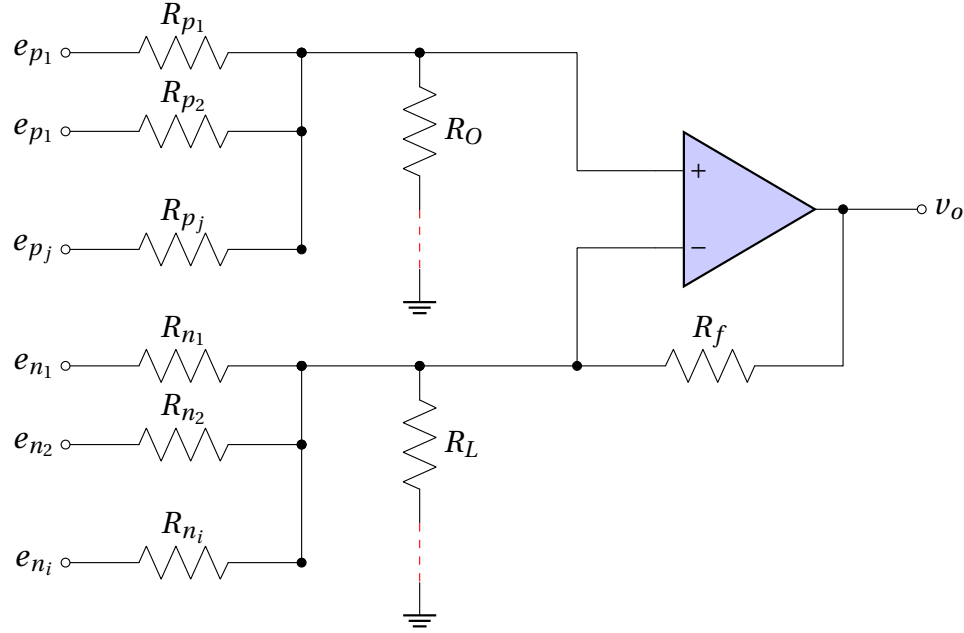


Figura 2.14: Op-amp sumador-restador algebraico, ver (Sheingold 1975).

En el circuito sumador-restador de la figura (2.14) se tiene que  $e_{p_1}, e_{p_2} \cdots e_{p_j}$  representan  $j$ -esimos los voltajes a sumar, y  $e_{n_1}, e_{n_2} \cdots e_{n_i}$  son  $i$ -esimos voltajes a restar, de modo que el voltaje de salida  $v_o$  esta dado por:

$$v_o = a_1 e_{p_1} + a_2 e_{p_2} + \cdots + a_j e_{p_j} - (b_1 e_{n_1} + b_2 e_{n_2} + \cdots + b_i e_{n_i}) \quad (2.8)$$

donde  $a_j \in \mathbb{R}^+$  son las ganancias de la terminal no-inversora y  $b_i \in \mathbb{R}^+$  las ganancias de la terminal inversora de las operaciones aritméticas involucradas.

Es decir:

- $e_{p_1}, e_{p_2} \cdots e_{p_j}$  son los voltajes que se suman y entran en terminal no inversora del op-amp a través de las resistencias  $R_{p_1}, R_{p_2}, \dots$
- $e_{n_1}, e_{n_2} \cdots e_{n_i}$  son los voltajes que se restan y entran en la terminal inversora del op-amp a través de las resistencias  $R_{n_1}, R_{n_2}, \dots$

- $a_1, a_2, a_3, \dots$  son las ganancias de los voltajes sumados
- $b_1, b_2, b_3, \dots$  son las ganancias de los voltajes restados
- Las resistencias  $R_o$  y  $R_L$  dependerán de los cálculos
- La resistencia  $R_f$  es de retroalimentación

Los valores de las resistencias son encontradas de acuerdo a las siguientes reglas (Sheingold 1975):

1. Se debe elegir una resistencia de carga equivalente  $R_p$ . Esta corresponde a la resistencia medida en los terminales de entrada del amplificador operacional.
2. La suma de los coeficientes positivos  $a_j$  se denota como  $\Sigma a$ .
3. La suma de los coeficientes negativos  $b_i$  más uno se denota como  $\Sigma b + 1$ .
4. Criterios de selección de resistencias:
  - Si  $\Sigma a > \Sigma b + 1$ , se debe incluir  $R_L$
  - Si  $\Sigma a < \Sigma b + 1$ , se debe incluir  $R_o$
  - Si  $\Sigma a = \Sigma b + 1$ , no se requieren ni  $R_L$  ni  $R_o$
5. La resistencia de realimentación  $R_f$  equivale al valor mayor entre  $(\Sigma a, \Sigma b + 1)$  multiplicado por  $R_p$ .

$$R_f = R_p \text{ máx}(\Sigma a, \Sigma b + 1)$$

6. La resistencia  $R_L$  o  $R_o$  se calcula como  $R_f$  dividido entre el valor absoluto de relación  $(\Sigma b + 1 - \Sigma a)$ :

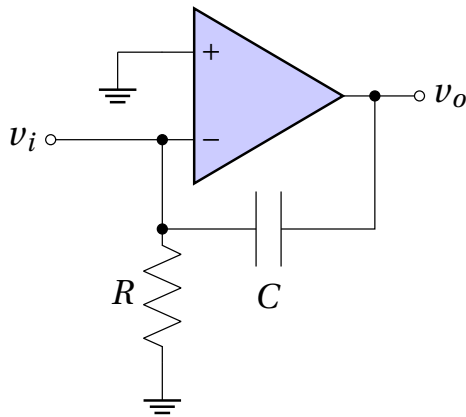
$$R = \frac{R_f}{|\Sigma b + 1 - \Sigma a|}$$

7. Las resistencias de entrada  $R_{p_j}$  y  $R_{n_i}$  se determinan mediante:

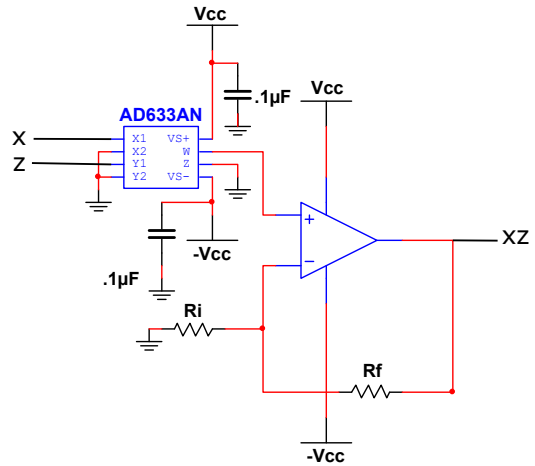
$$R_{p_j} = \frac{R_f}{a_j} \quad \text{y} \quad R_{n_i} = \frac{R_f}{b_i}$$

Por otro lado, para la operación analógica de integración se usará el op-amp integrador inversor mostrado en la figura (2.15a). Donde la salida de voltaje  $V_{out}$  esta dada por la siguiente relación:

$$V_o = -\frac{1}{RC} \int V_{in} dt \tag{2.9}$$



(a) Op-amp integrator (Sheingold 1975)



(b) Configuración del AD633N para obtener términos cruzados de las ecuaciones.

Figura 2.15: Circuitos auxiliares para implementar osciladores electrónicos caóticos.

Para implementar las ecuaciones (2.13) con el op-amp sumador-restador de la figura (2.14) y el op-amp integrador inversor de la figura (2.15a), definiremos una  $R_p$  igual para cada una de las ecuaciones, según el paso 1 del procedimiento de diseño. También es importante tomar en cuenta que la operación de integración invierte el sentido de la operación algebraica correspondiente, por lo que el signo de la operación algebraica de suma-resta se debe de escribir con el signo contrario.

Para obtener el valor de la multiplicación de los términos cruzados de las ecuaciones, se utilizó el multiplicador analógico AD633JN, cuyo valor de salida del multiplicador esta dado por:

$$W = \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{10} + z \tag{2.10}$$

donde usan las terminales  $x_1, y_1$  y  $z = x_2 = y_2 = z = 0v$ . Debido a que el multiplicador divide entre 10 el voltaje de salida, se le agregó un op-amp amplificador no-inversor de ganancia 10, el diagrama se muestra en la figura (2.15b).

Aunque en la hoja de datos del fabricante del AD633N no existe la recomendación de usar circuitos adicionales en la salida  $W$ , en la práctica se necesita un seguidor de voltaje para tener una alta impedancia de salida, ver figura (2.15b).

### 2.3.3. Diseño del oscilador electrónico de Rössler

Para ilustrar el procedimiento para implementar un oscilador caótico usando el op-amp sumador-restador, se llevará a cabo el diseño, simulación e implementación en una placa de circuito impreso (PCB)<sup>1</sup> del oscilador de Rössler dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xy - cz\end{aligned}\tag{2.11}$$

El primer paso, es realizar un escalamiento de las variables para no saturar los op-amps, para ello se define el cambio de variables dado por  $X = \frac{x}{2}$ ,  $Y = \frac{y}{2}$  y  $Z = \frac{z}{2}$ , es decir,  $x = 2X$ ,  $y = 2Y$  y  $z = 2Z$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -Y - Z \\ \dot{Y} &= X + aY \\ \dot{Z} &= \frac{b}{2} + 2XY - cZ\end{aligned}\tag{2.12}$$

Con fines prácticos el oscilador será considerado como un sistema forzado, para ello se definen entradas en cada una de las ecuaciones dinámicas del oscilador escalado (2.12), es decir:

$$\dot{X} = -Y - Z + u_x\tag{2.13a}$$

$$\dot{Y} = X + aY + u_y\tag{2.13b}$$

$$\dot{Z} = \frac{b}{2} + 2XY - cZ + u_z\tag{2.13c}$$

En cada una de las ecuaciones (2.13) utilizaremos como resistencia de carga el valor de  $R_p = 6.8\text{k}\Omega$ .

---

<sup>1</sup>del inglés Print Circuit Board

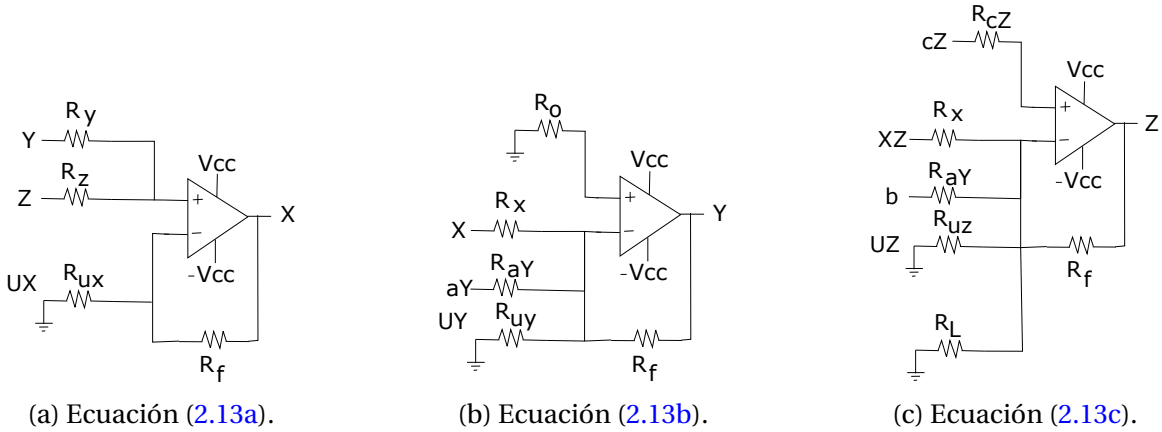


Figura 2.16: Circuitos para implementar las operaciones algebraicas de la ecuaciones (2.13).

a *Ecuación (2.13a)*. La ecuación a implementar es  $\dot{X} = -(Y + Z - u_x)$ , por tanto las ganancias, considerando la ecuación (2.8), son:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  y  $b_1 = 1$  respectivamente. Por lo que se tienen las siguientes relaciones  $\Sigma a_i = 2$  y  $(1 + \Sigma b_i) = 2$ . Según la metodología de diseño se tiene  $\Sigma a = (1 + \Sigma b)$  por lo que las resistencias  $R_L$  y  $R_o$  no son necesarias. La resistencia de retroalimentación se calcula como  $R_f = R_p \times \max(\Sigma a, (1 + \Sigma b)) = R_p \times 2 = 6.7\text{k}\Omega \times 2 = 13.4\text{k}\Omega \approx 12\text{k}\Omega$ . Por otro lado, las resistencias de entrada  $R_i = R_f/a_i$  y  $R_{10i} = R_f/b_{10i}$ , se calculan como  $R_Y \equiv R_1 = R_f/1 = 12\text{k}\Omega$ ,  $R_X \equiv R_2 = R_f/1 = 12\text{k}\Omega$  y  $R_{u_x} \equiv R_{101} = R_f/1 = 12\text{k}\Omega$ . La figura (2.16a) muestra el op-amp sumador-restador que implementa la operación algebraica de la ecuación (2.13a).

b *Ecuación (2.13b)*. La ecuación a implementar es  $\dot{Y} = -(X + aY + u_y)$  donde  $a = 0.2$ , por tanto, las ganancias son  $a_i = 0$ ,  $b_{101} = 1$ ,  $b_{102} = 0.2$  y  $b_{103} = 1$ . Luego entonces,  $\Sigma a_i = 0$  y  $(1 + \Sigma b_i) = 3.2$ , de donde  $\Sigma a < (1 + \Sigma b)$ , por lo tanto la resistencia  $R_o$  es requerida. Para  $R_f = R_p \times \max(\Sigma a, (1 + \Sigma b)) = 6.7\text{k}\Omega \times 3.2 = 21.44\text{k}\Omega \approx 22\text{k}\Omega$ . Mientras que  $R_o = R_f/(1 + \Sigma b - \Sigma a) = 21.44\text{k}\Omega/3.2 = 6.7\text{k}\Omega$ . Por otro lado, las resistencias de entrada  $R_{10i} = R_f/b_{10i}$ , se calculan como  $R_X \equiv R_{101} = R_f/1 = 22\text{k}\Omega$ ,  $R_X \equiv R_{102} = R_f/0.2 = 110\text{k}\Omega \approx 100\text{k}\Omega$  y  $R_{u_x} \equiv R_{103} = R_f/1 = 22\text{k}\Omega$ . La figura (2.16b) muestra el op-amp sumador-restador que implementa la operación algebraica de la ecuación (2.13b).

c *Ecuación (2.13c)*. La ecuación a implementar es  $\dot{Z} = -(cZ - \beta \frac{1}{2} - 2XY - u_z)$ , don-

de  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . Las ganancias son  $a_1 = 5.7$ ,  $b_{101} = 0.2$ ,  $b_{102} = 2$  y  $b_{103} = 1$ , entonces,  $\Sigma a_i = 5.7$  y  $(1 + \Sigma b_i) = 3.2$  de donde  $\Sigma a > (1 + \Sigma b)$  por lo que  $R_L$  es necesaria. Para  $R_f = R_p \times \max(\Sigma a, (1 + \Sigma b)) = 6.7\text{k}\Omega \times 5.7 = 38.19\text{k}\Omega \approx 39\text{k}\Omega$ , mientras que  $R_L = R_f / (1 + \Sigma b - \Sigma a) = 38.19\text{k}\Omega / 2.5 = 15.276\text{k}\Omega \approx 15\text{k}\Omega$ . Las resistencias de entrada son  $R_Z \equiv R_1 = 39\text{k}\Omega / 5.7 = 6.8421\text{k}\Omega \approx 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{XZ} \equiv R_{101} = 38.19\text{k}\Omega / 0.2 = 190\text{k}\Omega \approx 200\text{k}\Omega$ ,  $R_b \equiv R_{102} = 38.19\text{k}\Omega / 2 = 19\text{k}\Omega \approx 20\text{k}\Omega$  y  $R_{u_z} \equiv R_{103} = 38.19\text{k}\Omega / 1 \approx 39\text{k}\Omega$ . La figura (2.16b) muestra el op-amp sumador-restador que implementa la operación algebraica de la ecuación (2.13b).

Para contar con una plataforma para la experimentación de osciladores caóticos, se ha realizado el diseño e implementación de una placa de circuito impreso, esta fue realizada con el software Altium Designer V24.8.2. En la figura (2.17) se muestra el esquemático del oscilador electrónico de Rössler.

### 2.3.3.1. Simulación (emulación)

La simulación del oscilador electrónico del esquemático (2.18) es llevada a cabo con el simulador de circuitos NI Multisim 14.2, se utilizó este simulador pues contiene el modelo SPICE<sup>1</sup> del AD633N. En la simulación se utilizará el op-amp tipo FET TL082 y para el op-amp integrador se ha usado  $R_i = 1\text{k}\Omega$  y  $R_f = 9\text{k}\Omega$ . La tolerancia de las resistencia es 0%, los capacitores de los integradores tienen condiciones iniciales iguales a  $V_{IC} = 0.5\text{V}$ . Los resultados de la simulación se muestran en la figura (2.19), donde se ha graficado el voltaje de las variables  $x, y, z$  en el tiempo, y la proyección del atractor en los planos  $xy, xz$  y  $yz$  respectivamente. Como se puede deducir el resultado de la simulación SPICE de la figura (2.19) tienen correspondencia con la simulación numérica del sistema de Rössler (2.11) dada en la figura (2.13b).

Note que aunque los dos resultados expuestos en figuras (2.19) y (2.13b) son producto de una simulaciones numéricas, el enfoque de cada una de las simulación es conceptualmente diferente. En sentido estricto la simulación del sistema (2.11) es realizada usando técnicas de solución de ecuaciones diferenciales. Mientras que la simulación del circuito (2.18) usa SPICE.

<sup>1</sup>del inglés Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis

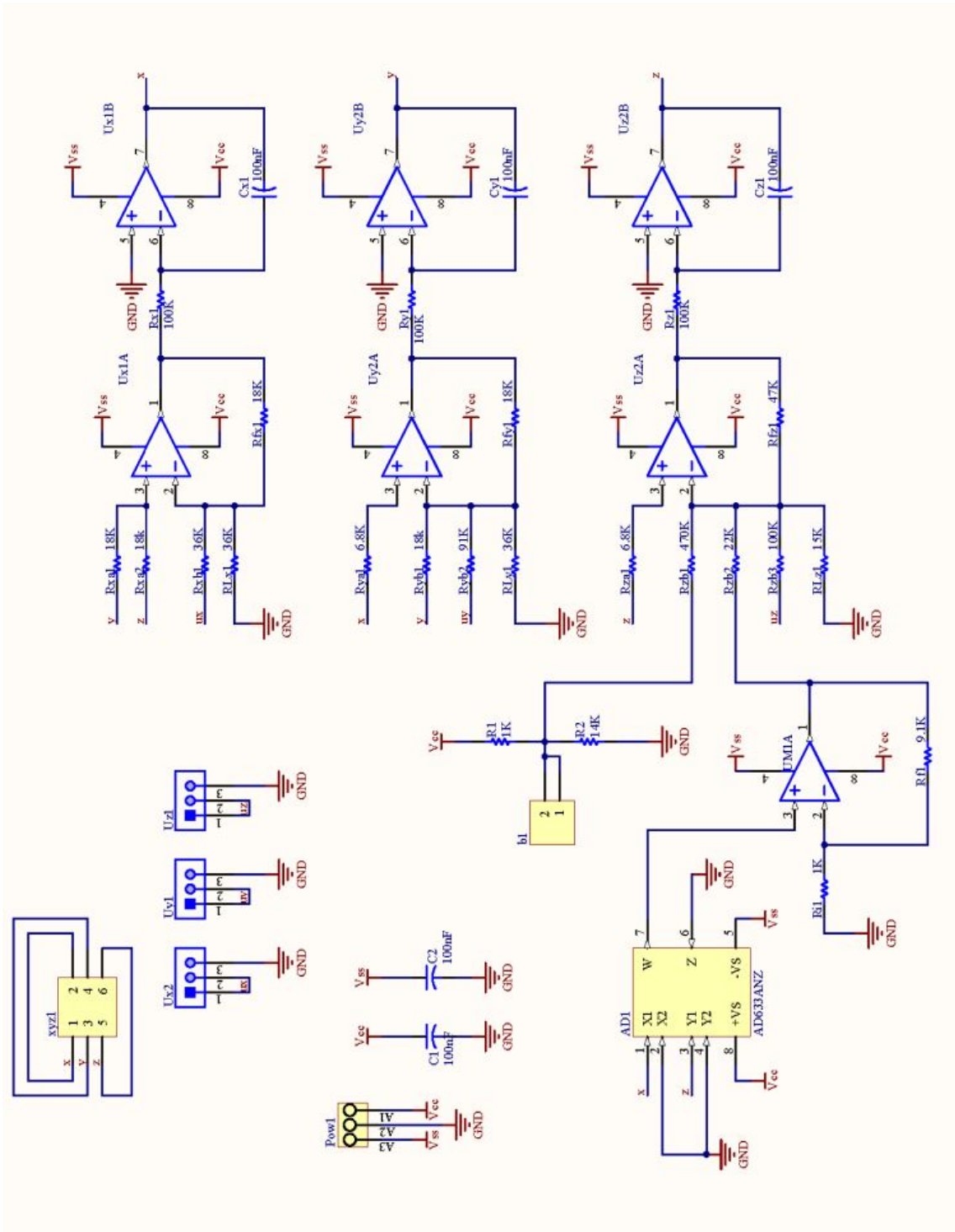


Figura 2.17: Esquemático del oscilador electrónico de Rössler en Altium Designer.

En particular, se ha utilizado el algoritmo de Runge-Kutta de Dormand-Prince<sup>1</sup> de cuarto y quinto orden, en donde el paso de integración se ajusta de manera adaptativa. En Matlab el algoritmo se implementa con el comando `ode45`.

Por otro lado, una simulación de circuitos usando SPICE se emplea el análisis nodal para establecer un sistema de ecuaciones que describe el circuito, aplicando las leyes de Kirchhoff para cada nodo del circuito, lo que lleva a establecer un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y no lineales que describen la relación entre las corrientes y voltajes en el circuito. La simulación SPICE se basa en estos seis ejes: (1) Ecuaciones nodales modificadas. (2) Método de Newton-Raphson. (3) Métodos de integración numérica. (4) Modelado de componentes no lineales. (5) Método de resolución de matrices esparcidas. (6) Análisis de puntos de operación y convergencia. Por lo que, se puede decir que la simulación con SPICE es una emulación de circuitos. Entendida la emulación como un proceso que permite a un sistema imitar el comportamiento de otro, haciendo posible que el primero funcione como si fuera el segundo.

### 2.3.3.2. Experimentación

Las mediciones experimentales se realizaron en un osciloscopio analógico de la década de los 70's, esto para evitar la discretización de los osciloscopios digitales modernos. Los resultados experimentales se muestran en la figura (2.20), donde se proyecta el atractor en los planos  $xy$   $xz$  y  $yz$  respectivamente.

---

<sup>1</sup>Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1), 19–26.

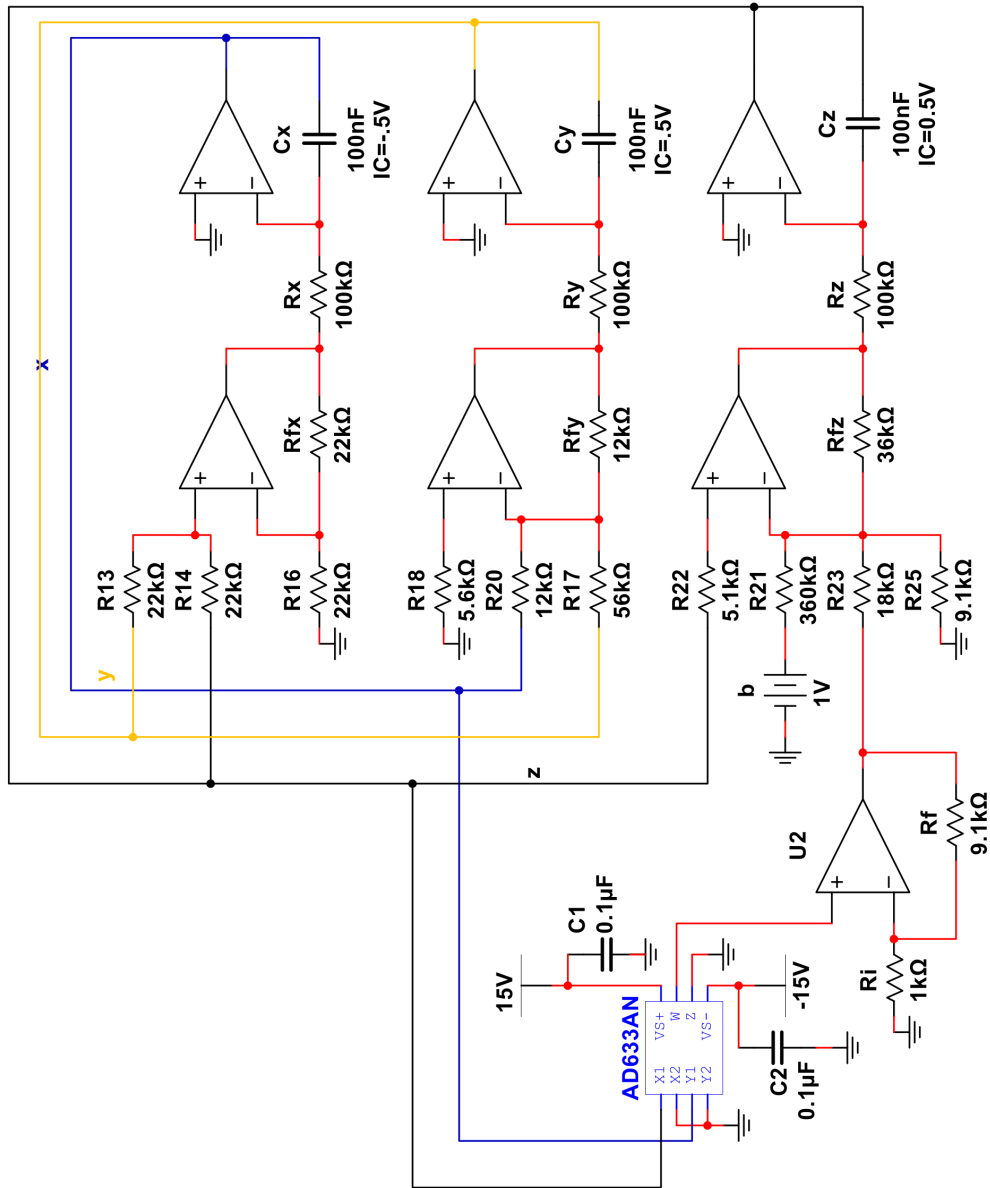
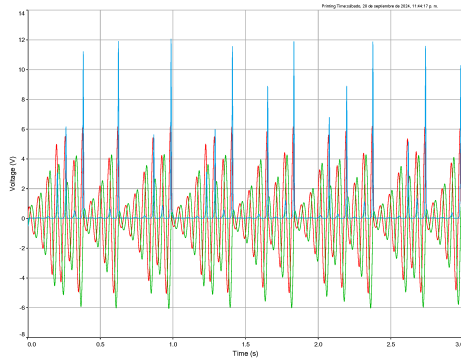
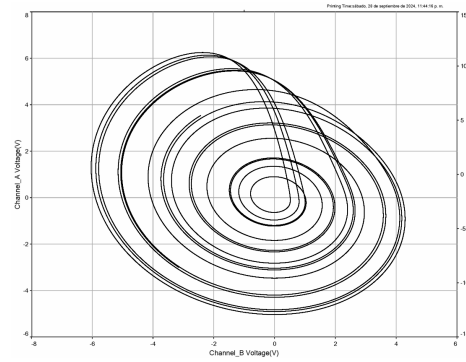


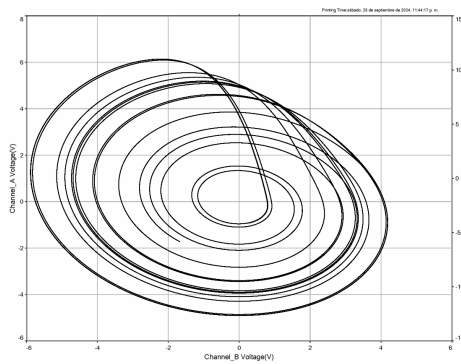
Figura 2.18: Implementación del oscilador de Rössler en MultiSim.



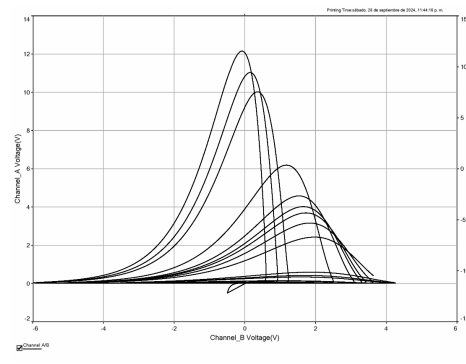
(a) Series de tiempo de  $x, y, z$ .



(b) Proyección del atractor en el plano  $xy$ .



(c) Proyección del atractor en el plano  $xz$ .



(d) Proyección del atractor en el plano  $yz$ .

Figura 2.19: Simulación del oscilador electrónico de Rössler dado en (2.18).

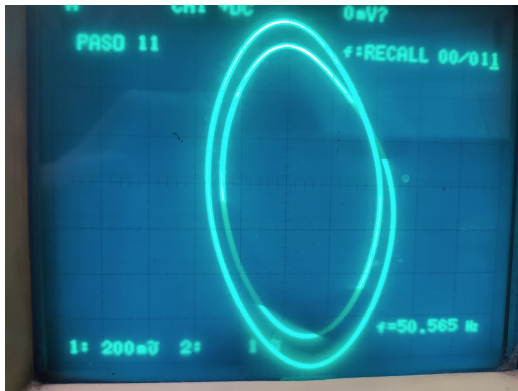
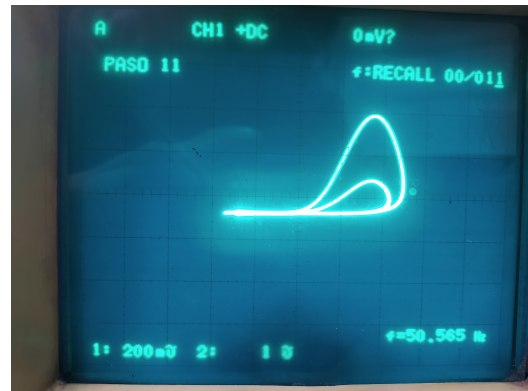
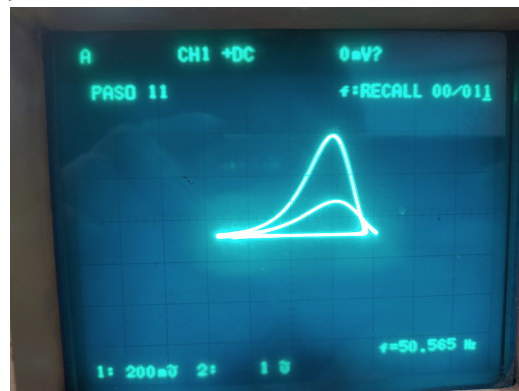
(a) Plano  $xy$ .(b) Plano  $xz$ .(c) Plano  $yz$ .

Figura 2.20: Proyección del atractor del oscilador electrónico de Rössler en un osciloscopio analógico.



# CAPÍTULO 3

## EXPONENTES DE LYAPUNOV

“La entropía mide la complejidad de la evolución dinámica,  
proporcionando un puente entre el orden y el caos”

Andrey Kolmogorov

CONSIDERANDO UN SISTEMA DINÁMICO, a grosso modo, los exponentes de Lyapunov miden la tasa exponencial promedio de divergencia o convergencia de las trayectorias que inician su movimiento con condiciones iniciales cercanas, ver figura (3.1).

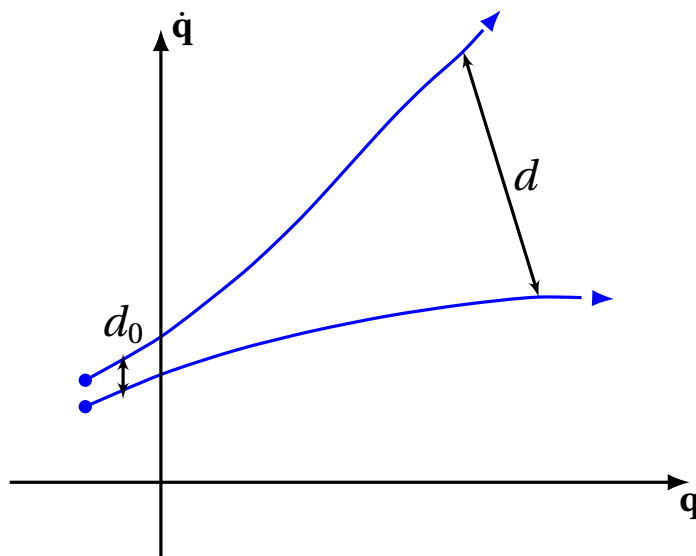


Figura 3.1: Representación de dos trayectorias de un sistema dinámico evolucionando en el tiempo a partir de condiciones iniciales cercanas en el espacio-fase.

De la figura (3.1), la distancia entre las trayectorias como función del tiempo esta dada por:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \rightarrow \lambda = \frac{1}{t} \log \frac{d(t)}{d_0} \quad (3.1)$$

Distinguimos tres casos

1. Si  $\lambda > 0$ , entonces las trayectorias divergen.
2. Si  $\lambda < 0$ , entonces las trayectorias convergen.
3. Si  $\lambda = 0$ , entonces la distancia entre las trayectorias no cambia.

Considerando el siguiente sistema no lineal autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

tal que la función  $\mathbf{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  esta definida en el dominio  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$  y donde  $t$  es el tiempo.

Si  $\mathbf{x}(t)$  es la solución de (3.2) que satisface la condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.3)$$

entonces encontrar  $\mathbf{x}(t)$  a partir de las ecuaciones (3.2) y (3.3) es conocido como el Problema del valor inicial, (Perko 2001). La solución  $\mathbf{x}(t)$  existe y es única puesto que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ .

Sea  $\varphi(t, \mathbf{x})$  la solución al problema del valor inicial definida en el intervalo solución denotado como  $I(\mathbf{x}_0)$ , donde  $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces, para  $t \in I(\mathbf{x}_0)$  el conjunto de mapas  $\varphi_t$  definido por

$$\varphi_t(\mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_0) \quad (3.4)$$

es llamado el *flujo* de la ecuación diferencial (3.2).

La expresión  $\varphi_t$  es un mapa definido como  $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con el tiempo  $t$  parametrizado. Por otro lado,  $\mathbf{x}(t) = \varphi_t(\mathbf{x}_0)$  denota el estado del sistema en el tiempo  $t$  iniciado en  $\mathbf{x}_0$ .

Si se mantiene  $\mathbf{x}_0$  fijo con  $I = I(\mathbf{x}_0)$  entonces el mapa  $\varphi(\cdot, \mathbf{x}_0): I \rightarrow E$  define una trayectoria de (3.2). Por otro lado, si  $\mathbf{x}_0 \in K$  varia a lo largo cualquier subconjunto  $K \subset E$ ,

entonces  $\varphi_t : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  puede verse como el movimiento de los puntos dentro de  $K$ , ver (Perko 2001).

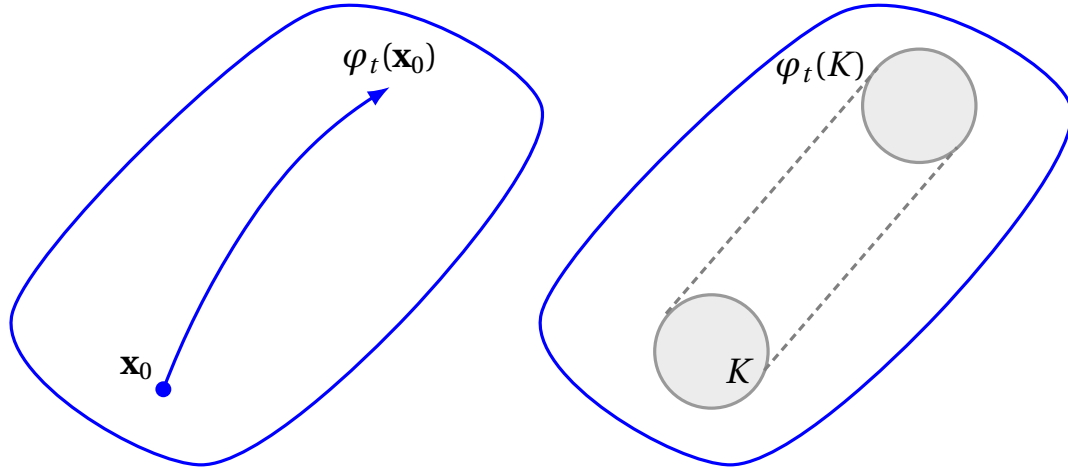


Figura 3.2: Representación de una trayectoria  $\varphi(\cdot, \mathbf{x}_0)$  y del flujo  $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$  del sistema (3.2).

En general, el flujo  $\varphi(t, \mathbf{x})$  del sistema (3.2) esta función de ambas variables  $t$  y  $\mathbf{x}$ . Donde sabemos que  $\varphi$  es diferenciable en  $t$ , puesto que el flujo es solución de la ecuación diferencial que pasa por la condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , es decir, la *derivada en el tiempo*  $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  existe. Por el teorema de la continuidad de las condiciones iniciales de la teoría de existencia y unicidad de sistemas dinámicos, se sabe que  $\varphi$  es continua en  $\mathbf{x}$ , Perko (2001). No obstante, es necesario garantizar la existencia de la derivada con respecto a  $\mathbf{x}$ , es decir,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}}(\varphi(t, \mathbf{x}_0))$  conocida como la *derivada en el espacio*. Usando el teorema de condición de suavidad de los flujos dado en Hirsch et al. (2004) es posible mostrar que tanto la derivada en el tiempo  $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  como la derivada en el espacio  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  existen y son continuas.

La derivada espacial  $D_{\mathbf{x}}(\varphi(t, \mathbf{x}_0))$  es el Jacobiano de la función  $\mathbf{x} \rightarrow \varphi_t(\mathbf{x})$ . Sin embargo, para calcularlo no hay una fórmula explícita para tal matriz, puesto que es necesario conocer la solución que pasa por  $\mathbf{x}_0$  así como las soluciones que pasan por todas las condiciones iniciales cercanas, Hirsch et al. (2004). Para sortear esta dificultad se introduce la llamada *ecuación variacional*.

Sea  $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$  una trayectoria particular del flujo  $\varphi_t$ , esta trayectoria es llamada *fidu-*

*cial*<sup>1</sup>. La trayectoria fiducial sirve para medir las desviaciones de puntos infinitesimalmente separados. Para estudiar las trayectorias cerca de  $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$  se linealizará el campo vectorial  $\mathbf{f}$  alrededor de esta trayectoria. Recordando que en general el método de linealización nos ayuda a determinar la estabilidad de una trayectoria encontrando los eigenvalores de algún tipo de matriz especial. Por ejemplo, cuando la trayectoria es un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_{eq}$ , la matriz Jacobiana es calculada, la cual nos auxilia para determinar la naturaleza  $\mathbf{x}_{eq}$  si y solo si  $\mathbf{x}_{eq}$  es hiperbólico; por otro lado, si la trayectoria es  $T$ -periódica  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$  la matriz de monodromía calculada por el teorema de Floquet nos auxilia en determinar la naturaleza de tal trayectoria R. W. Brockett (1970). No obstante, para una trayectoria aperiódica propias de sistemas caóticos evaluar alguna matriz no funcionará Meiss (2017).

Para cada punto  $\mathbf{x} \in M \subset \mathbb{R}^n$ , se considera  $T_x M$  que denota la colección de vectores 'infinitesimales' adjuntos a  $\mathbf{x}$ , es decir, vectores tangentes a  $\mathbf{x}$  y  $T_x M$  es el espacio tangente. Hacer uso del espacio tangente permite un caracterización fiel de los atractores, Hao (1991).

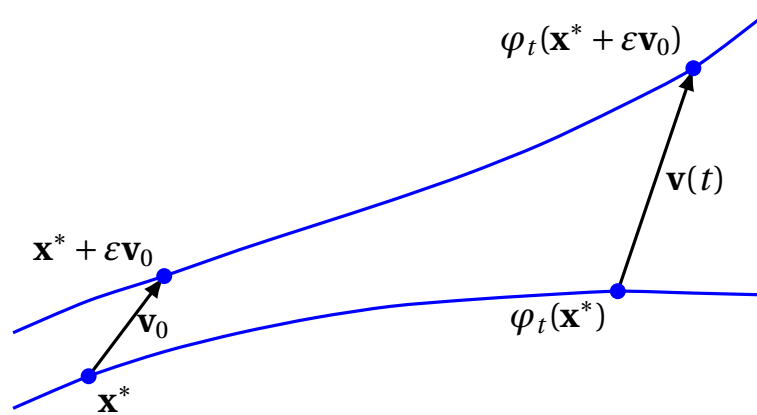


Figura 3.3: Representación de la divergencia de dos trayectorias que inician a partir de condiciones iniciales cercanas.

Suponiendo que  $\varphi_t(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{v}_0)$  inicia cerca del punto fiducial  $\mathbf{x}^*$ , donde  $\mathbf{v}_0 \in T_x M$ , ver figure (3.3). Puesto que  $\varphi_t \in C^1(E)$ , entonces se puede expandir  $\varphi_t(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{v}_0)$  en serie de

<sup>1</sup> del latín *fiduciales* que en este contexto significa estándar para comparación

Taylor alrededor de  $\varepsilon$  y despreciando los términos de orden superior:

$$\varphi_t(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{v}_0) \approx \varphi_t(\mathbf{x}^*) + \varepsilon D_{\mathbf{x}} \varphi_t(\mathbf{x}^*) \mathbf{v}_0 \quad (3.5)$$

entonces la desviación inicial del vector  $\mathbf{v}_0$  evoluciona de acuerdo a

$$\mathbf{v} \equiv D_{\mathbf{x}} \varphi_t(\mathbf{x}^*) \mathbf{v}_0 \quad (3.6)$$

Por lo tanto, se llega a la definición de *exponente de Lyapunov*:

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|D_{\mathbf{x}} \varphi_t(\mathbf{x}^*) \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (3.7)$$

La relación (3.7) esta dada por el hecho que la separación exponencial de las trayectorias esta dada por  $\|\mathbf{v}\| \approx \exp^{\lambda t} \|\mathbf{v}_0\|$  entonces  $\lambda \approx \frac{1}{t} \log \|\mathbf{v}\| / \|\mathbf{v}_0\|$ .

El exponente de Lyapunov depende generalmente de las condiciones iniciales de la trayectoria fiducial. Sin embargo, cualquier vector de condiciones iniciales puede ser usado debido a que todos los vectores tendrán algún componente a lo largo de la dirección del exponente de Lyapunov más grande. Este hecho esta basado en el Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets<sup>1</sup> el cual garantiza la existencia del límite y justifica el uso de condiciones iniciales arbitrarias para calcular el exponente. En la definición (3.7), el limite (lím) puede ser reemplazado por limite superior (lím sup) para garantizar la existencia del exponente del Lyapunov.

Nótese que  $D_{\mathbf{x}} \varphi_t(\mathbf{x}^*)$  es la derivada en el espacio del flujo, es decir, para conocer la desviación  $\mathbf{v}$  se necesita la derivada parcial del flujo con respecto a  $\mathbf{x}$ , es decir,  $\frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}}$  la cual no se conoce, para sortear este problema se introduce la ecuación variacional cuya solución es  $\mathbf{v}$ .

Para ello se sustituye la aproximación  $\varphi_t(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{v}_0) \approx \varphi_t(\mathbf{x}^*) + \varepsilon \mathbf{v}$  en la ecuación (3.2) y se expande  $\mathbf{f}$  en series de Taylor alrededor de  $\varepsilon$  despreciando términos de orden supe-

---

<sup>1</sup>Oseledets, V. I. (1968). A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 19, 197-231.

rior:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi_t(\mathbf{x}^*) + \varepsilon \mathbf{v}) &= \mathbf{f}(\varphi_t(\mathbf{x}^*) + \varepsilon \mathbf{v}) \\ \frac{d}{dt}(\varphi_t(\mathbf{x}^*)) + \varepsilon \frac{d\mathbf{v}}{dt} &\approx \mathbf{f}(\varphi_t(\mathbf{x}^*)) + \varepsilon D\mathbf{f}_x(\varphi_t(\mathbf{x}^*))\mathbf{v}\end{aligned}\quad (3.8)$$

donde  $D\mathbf{f}_x(\varphi_t(\mathbf{x}^*))$  es una matriz Jacobiana. Puesto que  $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$  es la solución de (3.2), el término izquierdo de cada lado de relación anterior se cancela, por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = D\mathbf{f}(\varphi_t(\mathbf{x}^*))\mathbf{v}\quad (3.9)$$

Se define  $\mathbf{A}(t) \equiv D\mathbf{f}(\varphi_t(\mathbf{x}^*))$  donde la dependencia del tiempo esta dada por la trayectoria fiducial, entonces se tiene

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}\quad (3.10)$$

lo cual define una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variantes en el tiempo. La ecuación anterior es llamada *ecuación variacional* dado que su solución  $\mathbf{v}$  mide las pequeñas variaciones con respecto a la trayectoria fiducial.

Para la ecuación variacional (3.10) sean  $\phi_1(t, t_0), \phi_2(t, t_0) \dots \phi_n(t, t_0)$  un conjunto de soluciones de (3.10) asociadas con las condiciones iniciales  $\phi_1(t_0, t_0) = \mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \dots 0]$ ,  $\phi_2(t_0, t_0) = \mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \dots 0]$  y  $\phi_n(t_0, t_0) = \mathbf{e}_n = [0 \ 0 \dots 1]$ . Tal que, la matriz  $n \times n$  definida como

$$\Phi(t, t_0) = [\phi_1(t_0, t_0) \ \phi_2(t_0, t_0) \dots \phi_n(t_0, t_0)]\quad (3.11)$$

tal que  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$  donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. La matriz  $\Phi(t, t_0)$  es llamada la *matriz de transición de estados*.

La matriz de transición de estados  $\Phi(t, t_0)$  tiene las siguientes propiedades, (Furuta et al. 1988):

- (a)  $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)$
- (b)  $\mathbf{v}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{v}_0$
- (c)  $\exists \Phi^{-1}(t, t_0)$
- (d)  $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$

$$(e) \quad \Phi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t) \quad \forall t$$

$$(f) \quad \Phi(t, t_0) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots$$

La propiedad (f) corresponde a la expansión sucesiva de Picard. Por la propiedad (b), la solución de (3.10) esta dada por  $\mathbf{v}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{v}_0$ . Por lo tanto. la definición de exponente de Lyapunov (3.7) puede ser reducida a:

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\Phi(t, t_0)\mathbf{v}_0\|}{\|\mathbf{v}_0\|} \quad (3.12)$$

Para calcular (3.12) es necesario resolver simultaneamente y numéricamente las ecuaciones (3.2) y (3.10):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}(t)\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

con condiciones iniciales arbitrarias para  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  y  $\Phi(0, 0) = \mathbf{I}$ .

Sin embargo, la ecuación (3.10) requiere ser resuelta numéricamente, (Parker y Chua 1989). Por tanto, se considera un intervalo de tiempo  $I = [0, t_f]$  de la solución (3.10) y sea  $t_k \in I$  el tiempo discreto tal que  $t_k = kt_h$  donde  $t_h = \frac{t_f}{N}$  con  $N \in \mathbb{N}$  y  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , entonces por la propiedad (d) de la matriz de transición de estados, se puede expresar la solución en el tiempo  $t = t_f$  de la ecuación variacional (3.10) como  $\mathbf{v}(t_f) = \Phi(t_f, 0)\mathbf{v}_0$  donde  $\Phi(t_f, 0)$  esta dada por:

$$\Phi(t_f, 0) = \Phi(t_f, t_{N-1})\Phi(t_{N-1}, t_{N-2}) \cdots \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, 0) \quad (3.14)$$

Se ha elegido una discretización del tiempo de paso fijo por simplicidad y aplicabilidad algorítmica.

En resumen, el cálculo del exponente de Lyapunov conlleva los siguientes pasos:

1. **Linearización:** Calcular la matriz Jacobiana  $J(t)$  del sistema

2. **Evolución paralela:** Resolver simultáneamente:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = J(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} \quad (3.16)$$

3. **Renormalización:** Periódicamente reescalar  $\delta\mathbf{x}$

4. **Cálculo del exponente:**

$$\lambda \approx \frac{1}{t_N} \sum_{k=1}^N \ln \left( \frac{\|\delta x_k\|}{\|\delta x_{k-1}\|} \right) \quad (3.17)$$

Interpretación de resultados:

- $\lambda > 0$ : Sistema caótico (sensibilidad a condiciones iniciales)
- $\lambda = 0$ : Sistema marginalmente estable (e.g., límite cíclico)
- $\lambda < 0$ : Sistema convergente (atractor puntual)

# CAPÍTULO 4

## SINCRONIZACIÓN

“La sincronización es la danza espontánea que surge cuando sistemas individuales, siguiendo sus propias reglas simples, se alinean misteriosamente en un ritmo colectivo. Es un fenómeno ubicuo, desde el parpadeo sincrónico de luciérnagas hasta los latidos coordinados del corazón humano”

---

Steven Strogatz, Sync (Capítulo 1)

### 4.1. Orígenes y perspectivas

**D**EL DIBUJO MOSTRADO en la Figura (4.1), a primera vista se puede dar por hecho que fue realizado por una niña o niño. Pero, por más inaudito que parezca, fue realizado por el astrónomo, físico, matemático e inventor holandés Christiaan Huygens, quien fue contemporáneo de Newton y un gigante de su tiempo (Huygens 1893). En la Figura (4.2) se muestra un retrato sobre óleo de él.

Entre muchos otros logros, aportaciones y descubrimientos, destacan el descubrimiento Titán, la luna más grande de Saturno, el desarrollo la teoría ondulatoria de la luz, la formulación de las leyes del movimiento pendular, el estudio matemático de la cicloide. En esta historia se atañe el hecho de que Huygens inventó y patentó en 1656 el reloj de péndulo. Esto lo realizó en el siglo XVII, una época durante la cual la expansión colonial de las grandes potencias europeas y el mercantilismo forjaban el devenir del Orbe, y grandes cambios y conflictos se avizoraban en el horizonte.

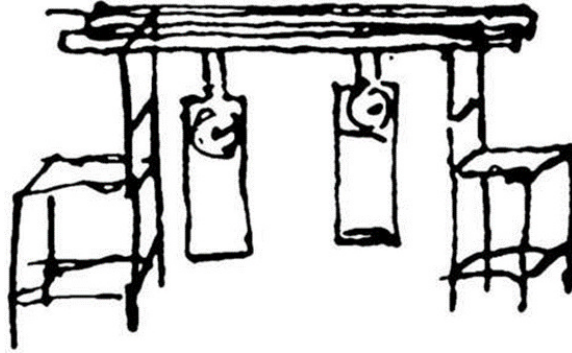


Figura 4.1: Simpatía de dos péndulos según Christiaan Huygens, ver (Huygens 1893).

Durante aquella época medir el tiempo era un imperativo, que de llegar a buen cauce, garantizaría una ventaja encomiable sobre las naciones en pugna involucradas. Y se podría afirmar que el invento de Huygens fue durante tres siglos la mejor manera de medir el tiempo. Pero esta historia no termina con su invento.



Figura 4.2: Retrato de Christiaan Huygens de (1629-1695). Tomado de Wikipedia.

Medir el tiempo fue un desafío y un logro para el siglo XVII. No obstante, el comercio marítimo planteó un nuevo paradigma: cómo medir el tiempo en los grandes barcos mercantes. Lo anterior considerando estos barcos conformaban flojas marítimas que surcaban los mares de Oriente a Occidente, y claro a la Nueva España y sus extensos y codiciados dominios en la América de Colón.

Este problema recibió el nombre del Problema de la Longitud. El problema estriba-

ba en determinar la Longitud en el mar (la distancia de este a oeste dado un punto de referencia), este problema fue un asunto medular para la navegación global de la época, y la medición del tiempo en los barcos fue el reto científico y técnico y por el cual el Imperio Británico, mediante la Ley de la Longitud, instauró un premio con una sustanciosa recompensa monetaria.

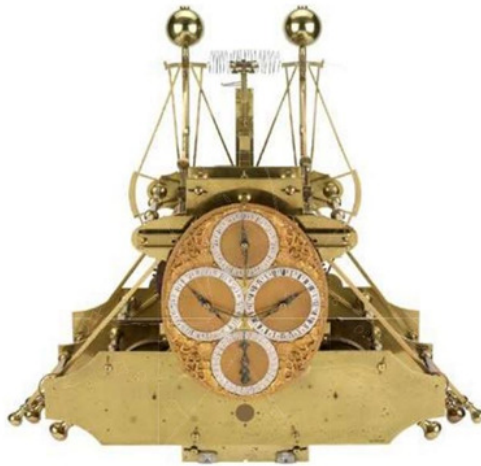


Figura 4.3: Cronómetro marino de John Harrison inventado en 1761, ver (Sobel 1996).

El Problema de la Longitud, no era un asunto trivial, pues el reloj de péndulo no funcionaba adecuadamente en los barcos, pues estos se encontraban sujetos a los embates de las olas y los vaivenes de los mares. Usando el lenguaje moderno, podemos afirmar que este problema era un problema de sincronización de dos relojes, uno en tierra y el otro colocado en los barcos.

Durante algún tiempo el problema permaneció sin una solución concreta y factible. Hasta que este fue resuelto por el relojero inglés John Harrison con la invención del cronómetro marino en 1761, esto después de décadas de diseño y construcción, su invento se muestra en la figura (4.3). Esta épica aventura de descubrimiento está narrada de manera extraordinaria en el libro *Longitud: La verdadera historia de un genio solitario que resolvió el mayor problema científico de su tiempo* de Dava Sobel (Sobel 1996).

Durante el tiempo que el problema no era resuelto, varias aproximaciones a la solución fueron propuestas. Huygens por su parte investigó el problema desde una aproximación empírica, su carácter era más de un emprendedor que un científico en forma. Huygens colgó dos de sus relojes de péndulo a una tabla de madera sostenida por un

par de sillas, como muestra el intrigante dibujo de la nuestra Figura (4.1). Hecho esto, Huygens observó un fenómeno sin parangón: los péndulos siempre oscilarán sincrónicamente en direcciones opuestas con respecto de sí mismos sin importar la posición de donde inicien su movimiento pendular. Huygens perplejo anunció sus hallazgos enviando una carta a la ‘Royal Society of London’ relatando en ella este fenómeno y nombrándolo como “sympathy of two pendulum” o la “simpatía de dos péndulos”.

Huygens sospechaba que los péndulos ejercen algún tipo de fuerza mutua a través de la tabla de madera a la que estaban sostenidos. Sin embargo, él no pudo más hipotetizar sobre las causas de este fenómeno, pues las herramientas matemáticas del Cálculo estaban en ciernes y aun no serian publicadas por Newton y Leibniz sino veinte años después en la década de 1680.

Sin duda, Huygens fue un personaje simpático, descubrió el fenómeno de la sincronización tendido en su cama mientras convalecía de una enfermedad. Recordemos, estamos en la década de 1660 y la peste negra ensombrecía mórbidamente a gran parte de Europa.



Figura 4.4: Ejemplo de comportamientos en enjambres de especies. Imágenes de Adobe stock

Desafortunadamente, el descubrimiento de Huygens no suscitó el interés de la comunidad científica de la época, y poco a poco fue relegado por el Problema de la Lon-

gitud, pues una guerra comercial y militar por la supremacía marítima se libraba. A este respecto, ¿cuántos fenómenos de simpatía pasaron desapercibidos y perdieron la oportunidad de ser estudiados debidamente de manera curiosa e inquisitiva como nuestro simpático Huygens lo hizo?

Por ejemplo, en 1680 el explorador alemán Engelbert Kaempfer durante un viaje a la mítica Siam, hoy Tailandia, observó el centelleo coordinado de enjambres de luciérnagas posadas en los árboles las cuales titilaban con regularidad y exactitud, ver figura (4.4). Este centelleo sincronizado fue un misterio científico por muchas décadas, incluso en el siglo pasado este fenómeno no era del todo entendido. Este desconocimiento incluso fue producto de artículos de investigación, por ejemplo, en la revista Science de 1917 un científico escribió <que algo así ocurra entre los insectos es ciertamente contrario a todas las leyes naturales>.

A decir verdad, los fenómenos de simpatía no son hechos aislados, pues existe una similitud entre el comportamiento de otros agrupamientos de especies animales como parvadas, colonias, cardúmenes y manadas, ver Figura (4.4).



Figura 4.5: Ejemplos de robótica de enjambres. Imágenes de Adobe stock

No obstante, aunque incipiente y latente, la idea planteada por Huygens germina-

ría, pues solo bastaban nuevas formas de análisis para que los fenómenos de simpatía pudieran ser reconocidos como fenómenos de Sincronización. De hecho, podemos afirmar que la Sincronización es una rama de la matemática.

“Y nadie echa vino nuevo en odres viejos” escribe Lucas 5:36, así pues, para captar la relevancia de los fenómenos de ‘simpatía’ se necesitó de renovados bríos. Muchas décadas después de Huygens, científicos de diversas latitudes del orbe y disciplinas se abocaron en estudiar fenómenos tan aparentemente disímiles como los péndulos de Huygens, las oscilaciones en los sistemas fisiológicos, el titilar de las luciérnagas, colonias de abejas y hormigas, las redes de neuronas, oscilaciones en reacciones químicas por mencionar algunos casos de estudios.

Entre los científicos exponentes de estos exhaustivos estudios se encuentra a (Glass y Mackey 1988; Winfree 2001; Watts 1999; Kuramoto 1984; Strogatz 2003). Dentro de todos estos estudios, se coloca el trabajo de Steven Strogatz y su libro Sincronización: Cómo el orden emerge del caos en el universo, en primer lugar por ser una fuente inigualable de divulgación e inspiración sobre el tema.

A la par que se desarrollaban los conceptos de sincronización de sistemas que ocurren en la naturaleza, el científico ruso Ilya I. Blekhman, publicó su libro seminal (Ilya Izrailevich Blekhman 1988), donde establece que “la sincronización juega un papel fundamental en la ciencia y la tecnología...” y desarrolló la idea de sincronizar sistemas hechos por el hombre, entre ellos obviamente se encuentran los robots (Bonabeau et al. 1999). Estas ideas dieron inicio al desarrollo de aplicaciones del campo de la inteligencia artificial a la robótica (Murphy 2000).

Hoy en día, este activo campo de investigación permite la sincronización de robots móviles, robots manipuladores y vehículos aéreos no tripulados por sus potenciales aplicaciones entre las que destacan:

- Agricultura de precisión
- Control de calidad
- Logística y almacenamiento
- Manufactura y ensamblaje

- Búsqueda y rescate en entornos industriales
- Inspección y mantenimiento

Así se puede hablar de robots con IA. La diferencia básica entre un robot con IA y un robot convencional es la capacidad del robot con AI junto con su software para tomar decisiones, aprender y adaptarse a su entorno basándose en los datos de sus sensores.

Para ser un poco más específicos, se está dejando atrás el mundo del diseño de robots pre-programados, es decir, en vez de programar todos los comportamientos posibles del robot, un robot IA aprenderá de los ejemplos que se le proporcionan o de la interacción con el mundo exterior y utilizará su proceso de aprendizaje para hacer predicciones sobre el entorno y cómo alcanzar objetivos, y luego usará esas predicciones para generar comportamientos y que genial idea es que sigan comportamientos inspirados en la naturaleza de los enjambres para realizar tareas cooperativas.

Arquímedes afirmó, <dadme una palanca y moveré el mundo>. De igual manera podemos afirmar que Huygens descubrió un fenómeno para el cual no tuvo explicación alguna en su tiempo, pasarían siglos para que tal extraordinario fenómeno cobraría una relevancia de tal envergadura; que sin menor a dudas podemos afirmar que la idea de Huygens mueve al mundo tal cual se vislumbra hoy en día y proyecta ideas de un futuro promisorio, alucinante y fascinante.

## 4.2. Sincronización: fenómeno natural y tecnológico

La palabra sincronizar se usó por primera vez en 1624 con el sentido de ocurrir al mismo tiempo. Viene del griego: el prefijo *σύν* (juntos) y la palabra *χρόνος* (tiempo). Más tarde, en 1806, adquirió el significado de hacer que algo sea sincrónico (Boccaletti et al. 2008).

La sincronización es un fenómeno cooperativo fascinante presente en sistemas biológicos, químicos, físicos y sociales. Su estudio se remonta a observaciones históricas, como las de Huygens con los péndulos, y desempeña un papel crucial en la supervivencia de especies, el funcionamiento de células cardíacas, neuronas, procesos cognitivos humanos e incluso en el procesamiento consciente. Por ejemplo, en humanos, los es-

tímulos conscientes generan sincronización de oscilaciones gamma en áreas corticales distribuidas, mientras que los inconscientes solo producen oscilaciones locales. Además, fenómenos como el brillo sincronizado de luciérnagas o los aplausos coordinados en una audiencia demuestran su impacto en la interacción social. Sin embargo, la sincronización también está asociada a enfermedades neurológicas como la epilepsia.

En la Ingeniería, conceptos similares son fundamentales en computación distribuida, teoría de control y telecomunicaciones. Por ejemplo, en redes de sensores, los nodos pueden necesitar calcular funciones comunes, como promedios, mientras que en sistemas multi-agente, los agentes coordinan su velocidad y dirección para alcanzar consenso. Así, la sincronización no solo es esencial en la naturaleza, sino también en aplicaciones tecnológicas avanzadas.

Es decir, la sincronización se refiere a un estado en el que sistemas, que están conectados de cierta forma predefinida, se coordinan, ajustando sus ritmos para funcionar de manera organizada. Es un fenómeno que surge de la interacción entre procesos y está relacionado con la auto-organización de la materia, como cuando varios elementos se regulan para trabajar en armonía.

### 4.2.1. Tipos de acoplamiento

Cuando dos sistemas dinámicos no están conectados, cada uno funciona de manera independiente, manteniendo su propia dinámica sin afectar al otro. Matemáticamente, sus dinámicas se describen por separado, sin términos de interacción. Esto significa que sus fases y frecuencias evolucionan sin sincronización ni ajuste mutuo.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= G(\mathbf{y})\end{aligned}\tag{4.1}$$

Un sistema dinámico acoplado *unidireccionalmente* se describe mediante:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= G(\mathbf{y}) + K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es una función diferente de cero en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ .

Un sistema dinámico acoplado bi-direccionalmente se describe mediante:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}) + K_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= G(\mathbf{y}) + K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde  $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  son funciones diferente de cero en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  con  $i = 1, 2$ .

La función de acoplamiento puede adoptar múltiples formas, siendo el **acoplamiento difusivo** el más común:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(H(\mathbf{x}) - \mathbf{y}),\tag{4.4}$$

donde  $0 \leq \sigma \leq 1$  es la *la fuerza de acoplamiento* y  $H$  es una función de respuesta. En el presente trabajo abordaremos solamente acoplamiento unidireccional tipo difusivo aplicado a osciladores caóticos.

#### 4.2.2. Sincronización completa

El concepto de sincronización se extendió a los sistemas caóticos a partir de los trabajos pioneros de (Fujisaka y Yamada 1983) quienes demostraron que dos sistemas caóticos idénticos pueden pasar de comportamientos independientes a oscilaciones perfectamente sincronizadas al aumentar su acoplamiento.

El tipo más fuerte de sincronización en estos sistemas es la sincronización completa (o idéntica), estudiada por (I. I. Blekhman 1964). Aquí, sistemas idénticos —que parten de condiciones iniciales distintas— terminan reproduciendo exactamente sus trayectorias con el tiempo. Esta propiedad, sorprendente en sistemas caóticos (donde pequeñas diferencias iniciales suelen amplificarse), ha permitido aplicaciones como comunicación segura, control del caos y monitoreo de dinámicas complejas.

### 4.3. Medidas de sincronización completa

Para determinar cuando dos sistemas acoplados exhiben sincronización completa es necesario contar con un medida para discriminar la efectividad de la técnica de sin-

cronización. Para ello mencionaremos tres técnicas comunes para tal efecto:

### Error de sincronización

Considerando dos sistemas acoplados unidireccionalmente con acoplamiento difusivo, estos presentan una sincronización completa si se satisface la siguiente relación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = 0 \quad (4.5)$$

Esta condición se puede verificar monitoreando a lo largo del tiempo el error de sincronización definido como  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

### Correlación cruzada

La sincronización completa también puede estimarse utilizando la correlación cruzada entre las variables de estado  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{y}(t)$ , la cual está dada por la integral de convolución:

$$\mathbf{C}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{y}(t + \tau) dt \quad (4.6)$$

donde  $*$  denota el complejo conjugado y  $\tau$  es un desplazamiento temporal entre las dos señales.

En situaciones prácticas en las que sólo se puede acceder a una variable por sistema, la correlación cruzada puede calcularse a partir de series de tiempo escalares de las variables disponibles  $x(t)$  e  $y(t)$  de los sistemas acoplados, es decir:

$$C(\tau) = \frac{\langle [x(t) - \langle x(t) \rangle][y(t + \tau) - \langle y(t) \rangle] \rangle}{\sqrt{\langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle}} \quad (4.7)$$

donde los paréntesis angulares denotan la media en el tiempo. Ambas cantidades son útiles para estimar la calidad de la sincronización. La sincronización completa se logra cuando  $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  o  $\mathbf{C}(\tau) \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ .

### Exponente de Lyapunov

Un marco de trabajo bastante eficiente, elegante y ampliamente utilizado para evaluar la estabilidad de estados sincronizados es la función maestra de estabilidad (MSF)<sup>1</sup>, introducida por (Huang et al. 2009). La cual se basa en los conceptos del Exponente de Lyapunov y la ecuación variacional

La MSF mide la desviación exponencial en el que una perturbación infinitesimal, es decir la MSF proporciona el mayor exponente transversal de Lyapunov de la sincronización. Una condición necesaria para que la sincronización ocurra es que la este exponente de Lyapunov sea negativa.

Consideremos el sistema dinámico completo que consiste de osciladores no lineales descrito por

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (4.8)$$

donde  $x$  es un vector  $n$ -dimensional y  $F(x)$  es el campo de velocidad. El escenario más común es considerar una red de  $N$  osciladores acoplados es

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_i) - \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x_j) \quad (4.9)$$

donde  $H(x)$  es una función de acoplamiento,  $\varepsilon$  es una parámetro de acoplamiento y  $G$  es una matriz de acoplamiento determinada por la topología de conexión. Para el sistema descrito en la ecuación (4.9), la ecuación variacional que gobierna la evolución en el tiempo del conjunto de vectores infinitesimales sobre la solución sincronizada  $\delta x_i(t) \equiv x_i(t) - s(t)$  es

$$\frac{d\delta y_i}{dt} = DF(s) * \delta x_i - \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} DH(s) * \delta x_j \quad (4.10)$$

donde  $DF(s)$  y  $DH(s)$  son las matrices jacobianas de las correspondiente función de vectores evaluadas en  $s(t)$ .

La trasformada  $\delta y = Q^{-1} * \delta x$ , donde  $Q$  es una matriz cuyas columnas son el conjunto de eigenvectores de  $G$ , conduce a la forma de bloque desacoplada diagonalmente

---

<sup>1</sup>(MSF siglas en inglés)

de la ecuación (4.10)

$$\frac{d\delta y_i}{dt} = [DF(s) - \varepsilon\mu_i DH(s)] * \delta y_i \quad (4.11)$$

Tenemos que  $K_i = \varepsilon\mu_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ) es un conjunto específico de valores de un parámetro de acoplamiento normalizado  $K$ . Esto nos guía a la forma genérica de todos los bloques acoplados

$$\frac{d\delta y}{dt} = [DF(s) - KDH(s)] * \delta y \quad (4.12)$$

El exponente de Lyapunov más grande determinado en la ecuación (4.12) es la MSF  $\Psi(k)$ .

Si  $\Psi(k)$  es negativo, una pequeña perturbación del estado de sincronización disminuirá exponencialmente de modo que la solución sincronizada sea estable, al menos cuando los osciladores inicien en su vecindad. La solución sincronizada es inestable si  $K$  es positivo porque pequeñas perturbaciones del estado sincronizado conducirá a trayectorias que divergen de estado.

Para la red de osciladores acoplados (ecuación (4.9)), una condición necesaria para la sincronización es entonces que todos los parámetros de acoplamiento normalizados  $K_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ) caen en un intervalo de  $K$ , donde  $K$  es negativo.

## **Parte II**

# **Resultados de investigación**



## SINCRONIZACIÓN MAESTRO-ESCLAVO

EN ESTE CAPÍTULO, se formula el problema de sincronización maestro-esclavo de osciladores caóticos como un problema de estabilidad de sistemas perturbados lineales. Se analizan estrategias de control basadas en controladores de salida con ganancia estática y dinámica de primer orden en la cual la ganancia dinámica es solución de cierta ecuación diferencial de primer orden. Basándose en estas dos leyes se propone una ley de control que es combinación de ambas, denotada como controlador estático-dinámico.

Para determinar cuando la sincronización de los osciladores ocurre, en primer lugar se empleará el cálculo del exponente máximo de Lyapunov; este enfoque es completamente numérico. Para abordar el estudio de la sincronización bajo un aspecto analítico, se utilizará el Teorema de sistemas perturbados lineales; este enfoque se basa en el hecho de que los osciladores puedan ser escritos en la Forma de Lure, la cual básicamente permite que la función de un sistema dinámico pueda ser escrito en dos componentes uno lineal y otro no lineal, la componente no lineal será denotada como la perturbación del sistema lineal. Este enfoque permite emplear herramientas de análisis como el Teorema de estabilidad de Lyapunov.

## 5.1. Formulación del problema de sincronización

Sea  $\mathcal{M}$  un oscilador caótico dado por:

$$\mathcal{M} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = F(\mathbf{x}_m) \\ y_m = c^\top \mathbf{x}_m \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $y_m \in \mathbb{R}$  es la salida,  $c^\top \in \mathbb{R}^n$  es un vector columna que representa la salida,  $(\cdot)^\top$  denota la operación de transposición de una matriz, el punto denota diferenciación con respecto al tiempo  $t$  y  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función Lipschitz continua por pedazos definida en el dominio  $D$  es que contiene el origen. El sistema  $\mathcal{M}$  es llamado el *sistema maestro*.

Considerando un oscilador idéntico al maestro pero con una entrada forzada llamado el sistema esclavo  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = F(\mathbf{x}_s) + bu \\ y_s = c^\top \mathbf{x}_s \end{cases} \quad (5.2)$$

donde  $b \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entrada y  $u \in \mathbb{R}$  es el controlador a ser definido.

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) definen el sistema ( $\mathcal{MS}$ ) maestro-esclavo, el cual es un sistema SISO<sup>1</sup> no lineal con dinámica caótica. También puede ser definido como problema de regulación en la salida para sistemas lineales (Pavlov et al. 2006).

En el sistema maestro como esclavo, se asume que ambos son sensibles a las condiciones iniciales y que las trayectorias están acotadas.

En general, una función  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es Lure cuando  $F$  se puede separar en una parte lineal y otra no lineal, formalmente damos la siguiente definición:

### Definición: Forma de Lure

Una función  $F(\mathbf{x})$  se dice de tipo Lure cuando  $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + g(\mathbf{x}, t)$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal acotada

Por tanto, para el sistema del sistema  $\mathcal{MS}$ , se asume que la función  $F$  se considera

<sup>1</sup>SISO: Single Input - Single Output o Entrada Única - Salida Única

que obedece a la forma de Lure, formalmente:

**Suposición: Forma de Lure en el sistema  $\mathcal{MS}$**

En el sistema  $\mathcal{MS}$ , la función  $F$  obedece a la forma de Lure.

A pesar de esta restricción sobre  $F$ , el número de osciladores que pueden ser expresados en la forma de Lure es amplia. Por ejemplo, los osciladores de Rössler, Chua y Lorenz, por mencionar algunos.

La condición de función acotada de la perturbación  $g$  se satisface de manera directa debido al hecho que por definición la función de ambos sistemas  $F(\mathbf{x})$  es una función Lipschitz (Khalil 1996).

Es importante no confundir la forma de Lure dada en la definición anterior con el problema de Lure, el cual es un problema clásico en teoría de control (Aizerman y Gantmacher 1964; Lefschetz 1965). Este problema consiste en analizar la estabilidad de una clase particular de sistemas no lineales compuestos por un sistema lineal interconectado a una no linealidad en el lazo de retroalimentación, esta clase de sistemas se llaman de *tipo Lure*, (Khalil 1996). La no linealidad obedece a una condición de acotamiento conocida como de sector, en la cual dada una no linealidad  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que  $\phi$  está acotada por el sector  $[k_1 \ k_2] \in \mathbb{R}$  si la desigualdad  $k_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^\top \phi(\mathbf{x}) \leq k_2 \|\mathbf{x}\|^2$  se satisface para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\|\cdot\|$  denota una norma en  $\mathbb{R}^n$ .

La sincronización maestro-esclavo de sistemas tipo Lure fue estudiada por Suykens en (Suykens y Vandewalle 1997; Suykens, Curran et al. 1999), donde la condición de sector permite el uso de funciones de Lyapunov tipo Lure-Postnikov para obtener condiciones de estabilidad como LMIs<sup>1</sup>.

Para ilustrar como un oscilador puede escribirse en la forma de Lure, se considera el oscilador de Rössler dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xy - cz\end{aligned}\tag{5.3}$$

<sup>1</sup>Linear Matrix Inequalities, es decir, Desigualdades matriciales lineales

donde el vector de estado esta definido como  $\mathbf{x}(t) = [x \ y \ z]^\top \in \mathbb{R}^3$ , y los valores de los parámetros son  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  y  $c = 5.7$  respectivamente.

Reescribiendo el oscilador de Rössler en la forma de Lure, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + xz \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  y  $g(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + xz \end{bmatrix}$ .

La ecuación anterior corresponde en forma matricial a  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}_m + g(\mathbf{x}, t)$ .

Por otro lado, para el sistema  $\mathcal{MS}$ , los estados disponibles están dados por las variables de salida ( $y_m, y_s$ ). Se define el error de salida como  $e = y_m - y_s = c^\top \mathbf{e}(t)$  donde  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$  corresponde al error de sincronización.

La sincronización que se estudia está dada por la siguiente definición, (Boccaletti 2007):

#### Definición: Sincronización completa

Se dice que el sistema  $\mathcal{MS}$  exhibe una sincronización completa cuando el error de sincronización se va a cero conforme el tiempo se incrementa, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ .

Empleando la definición de error de sincronización se puede definir la dinámica del error como:

$$\dot{\mathbf{e}} = F(\mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_s) - bu \quad (5.5)$$

Un esquema del acoplamiento maestro-esclavo se muestra figura (5.1):

La ecuación (5.5) permite definir el problema de sincronización:

#### Problema: Problema de sincronización

Para el sistema de error (5.5), encontrar el controlador  $u$  adecuado tal que  $\mathbf{e} \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

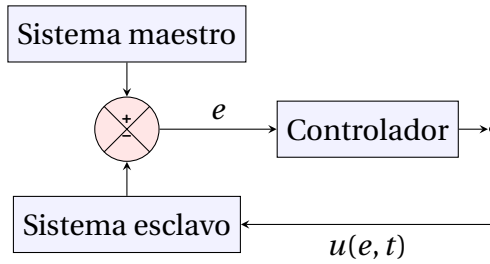


Figura 5.1: Sincronización Mestro-Esclavo.

Considere que el controlador depende del error de salida  $e$ , es decir,  $u = u(e) = u(c^T e)$ . Entonces, el problema de sincronización consiste en encontrar una regla de asignación adecuada  $u$  que relacione el error de salida tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Para ello, se estudiarán dos tipos de controladores, ver (Suykens, Curran et al. 1997; Buscarino 2017; Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020):

1. Controlador de ganancia estática
2. Controlador con ganancia dinámica

Basado en ambos esquemas se introduce un novedoso controlador llamado *controlador estático-dinámico* para la sincronización maestro-esclavo. En las siguientes secciones se abordará las principales características de ambos controladores.



## ACOPLAMIENTO ESTÁTICO

Durante sus inicios la sincronización de sistemas consideró usar el llamado control estático por retroalimentación de salida, el cual se conoce como acoplamiento estático y está definido como:

$$c_s \left\{ u_s \triangleq u = k_s(y_m - y_s) = k_s c^\top \mathbf{e} \right. \quad (6.1)$$

donde  $k_s \in \mathbb{R}$  es llamada *fuerza de acoplamiento*. El acoplamiento (6.1) es unilateral, es decir, solo el sistema esclavo recibe retroalimentación. En este caso, el acoplamiento maestro-esclavo se denomina *acoplamiento estático* porque  $k_s$  es constante en el tiempo. Por otro lado, es posible tener en cuenta ganancias dinámicas, es decir,  $k_s = k_d(t)$  entonces  $u_d = u = k_d(t) c^\top \mathbf{e}$  donde  $k_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una ganancia dinámica a definir. En este caso, el acoplamiento maestro-esclavo se denomina *acoplamiento dinámico* (Arena et al. 2020).

Aplicando el acoplamiento (6.1) al sistema de error (5.5), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{e}} = F(\mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_s) - k_s b c^\top \mathbf{e}. \quad (6.2)$$

El diagrama a bloques del sistema  $mS$  aplicando el acoplamiento estático (6.2) se esquematiza en la figura (6.1).

En la ecuación (6.2), la dupla  $(b, c^\top)$  puede tener varias combinaciones. Sin embargo, para conveniencia matemática, es costumbre analizar los casos mínimos en los cuales solo uno de los estados es medido, mientras que la acción de control es retroalimentada a una de las ecuaciones de estado, ver (Huang et al. 2009). En otras palabras,

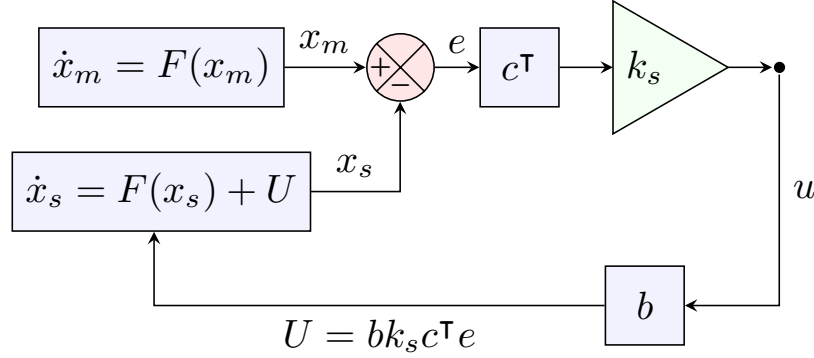


Figura 6.1: Diagrama a bloques del sistema  $mS$  acoplado con el controlador  $C_s$ .

$b = e_i$  y  $c^\top = e_j^\top$  donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  denota los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top$ . Por brevedad, la dupla  $(b, c^\top)$  se escribe como  $b_i \rightarrow c_j$ . Por ejemplo, la combinación  $b_1 \rightarrow c_2$  en  $\mathbb{R}^3$  significa  $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$  y  $c_2^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  respectivamente.

Bajo la consideración anterior, el problema de control de la ecuación (6.2) es determinar los valores de  $k_s$  tales que el error converja a cero para una dupla dada  $b_i \rightarrow c_j$ .

Por un lado, entre las estrategias de control para definir  $u$  es considerar el problema de control estático por retroalimentación de salida<sup>1</sup>. Sin embargo, este problema es considerado como un problema abierto en la Teoría de Control, ver (Syrmos et al. 1997; H. Narayanan y Hariharan Narayanan 2019). En el presente trabajo, no se aborda este enfoque. No obstante, se utiliza el enfoque de la función maestra de estabilidad descrito en capítulos anteriores, el cual nos permite determinar los valores de  $k_s$  para los cuales el exponente transversal mas grande de Lyapunov satisface  $\lambda_{max}^\top < 0$ . Para calcular  $\lambda_{max}^\top$  resolvemos numéricamente la ecuación variacional de la dinámica del error (6.2) la cual es obtenida como sigue.

Considerando  $\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}$ , donde  $\delta\mathbf{e}$  es la variación del error  $\mathbf{e}$ , entonces, de la relación  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$  se obtiene  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s + \mathbf{e} + \delta\mathbf{e}$ . Sustituyendo en la ecuación (6.2) se obtiene  $\dot{\mathbf{e}} + \delta\dot{\mathbf{e}} = F(\mathbf{x}_s + \mathbf{e} + \delta\mathbf{e}) - F(\mathbf{x}_s) - k_s b c^\top (\mathbf{e} + \delta\mathbf{e})$ , expandiendo el término  $F(\mathbf{x}_s + \mathbf{e} + \delta\mathbf{e})$  en series de Taylor y despreciando los términos de orden superior se obtiene  $F(\mathbf{x}_m) + DF(\mathbf{x}_m)\delta\mathbf{e}$  donde  $DF(\cdot)$  denota la matriz Jacobiana de la función  $F$  y  $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_s + \mathbf{e}$ . Entonces,  $\dot{\mathbf{e}} + \delta\dot{\mathbf{e}} = F(\mathbf{x}_m) + DF(\mathbf{x}_m)\delta\mathbf{e} - F(\mathbf{x}_s) - k_s b c^\top (\mathbf{e} + \delta\mathbf{e})$  usando la ecuación (6.2) la relación anterior se

<sup>1</sup>Static output feedback

reduce a:

$$\frac{d\delta\mathbf{e}}{dt} = (DF(\mathbf{x}_m) - k_s bc^\top)\delta\mathbf{e} \quad (6.3)$$

donde  $\delta\dot{\mathbf{e}} = \frac{d\delta\mathbf{e}}{dt}$ . La ecuación (6.3) se emplea para calcular los exponentes de Lyapunov  $\lambda$ . El exponente transversal mas grande de Lyapunov  $\lambda_{max}^\top$  se define como  $\lambda_{max}^\top = \max(\lambda)$  donde el exponente de Lyapunov  $\lambda$  se define como  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|\delta\mathbf{e}(t)| - \ln|\delta\mathbf{e}(0)|}{t}$ .

Para ilustrar cómo el acoplamiento estático logra la sincronización maestro-esclavo, se considera el caso del oscilador de Rössler, el cual reescrito en la forma de Lure está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ x + ay \\ b + z(x - c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b + xz \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = [x \ y \ z]^\top \in \mathbb{R}^3$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  and  $c = 5.7$ .

Considerando  $\mathbf{e}(t) = [e_x \ e_y \ e_z]^\top$ ,  $\mathbf{x}_m(t) = [x_m \ y_m \ z_m]^\top$  y  $\mathbf{x}_s(t) = [x_s \ y_s \ z_s]^\top$ , el sistema de error para el oscilador de Rössler esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} - k_s bc^\top \right) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_z x_m - e_x (e_z - z_m) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

donde el término de perturbación se obtiene utilizando  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_m - \mathbf{e}$ . Observe que la perturbación depende tanto del error de sincronización como del estado del sistema maestro.

Por otro lado, la ecuación variacional (6.3) para el oscilador de Rössler se reduce a:

$$\frac{d\delta\mathbf{e}}{dt} = \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_m(t) & 0 & x_m(t) - c \end{bmatrix} - k_s bc^\top \right) \delta\mathbf{e} \quad (6.6)$$

Nótese que en la ec. (6.6) la matriz Jacobiana  $DF(\mathbf{x}_m)$  depende del estado maestro.

En general, el enfoque de la función maestra de estabilidad requiere resolver la ecua-

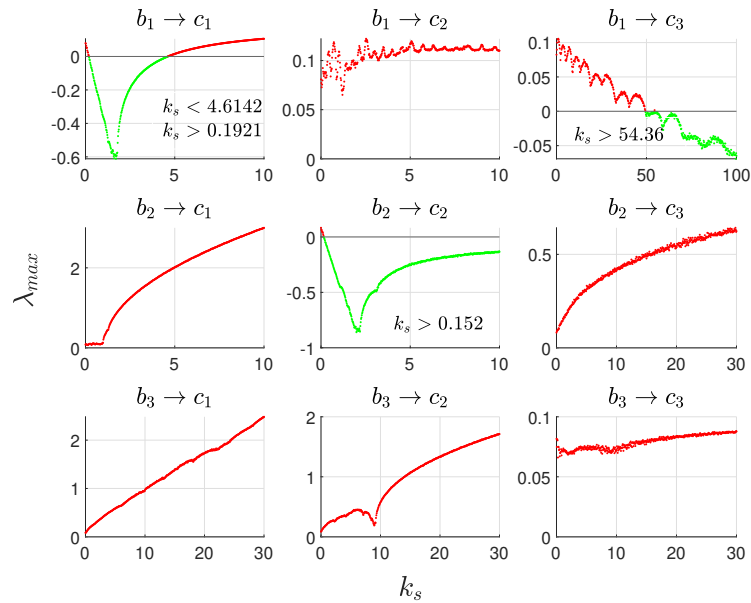
ción variacional y el oscilador maestro simultáneamente. Normalmente, la integración numérica se realiza utilizando métodos de tamaño de paso fijo para un tiempo de integración final relativamente largo para permitir que el sistema alcance el atractor. Sin embargo, la solución divergirá rápidamente si el sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo, entonces, se requiere normalizar periódicamente la solución en cada paso del tiempo de integración utilizando el proceso de Gram-Schmidt, ver (Vallejo y Sanjuan 2017) para más detalles.

Para calcular los exponentes de Lyapunov se utiliza el método Runge-Kutta de cuarto orden, para el cual el error de truncamiento local es  $\mathcal{O}(h^5)$  mientras que el error global es  $\mathcal{O}(h^4)$  donde  $h$  es el tamaño del paso. Además, el método es convergente, es decir, la solución numérica se aproxima a la solución exacta a medida que el tamaño del paso  $h$  disminuye, pero esto aumenta el coste computacional dado por  $N(4C_f + 12n)$  donde  $C_f$  es el coste de la evaluación de la función  $f$  y de la dimensión del  $n$  del sistema, y  $N$  es el número total de pasos. Cuando  $N$  es alto, el coste es aproximadamente proporcional a  $\mathcal{O}(Nn)$ . Para el método de Gram-Schmidt, la complejidad asintótica es  $\mathcal{O}(nm^2)$  donde  $n$  es la dimensión de los vectores y  $m$  es el número de vectores a ortogonalizar.

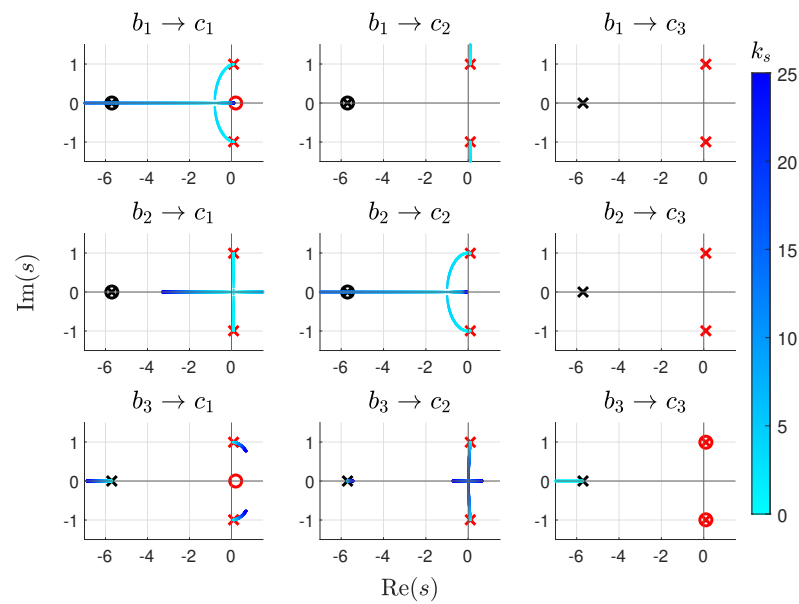
Para calcular  $\lambda_{max}^\top$ , se resuelve numéricamente (6.6) usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso de  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ , un tiempo final de integración de  $t_f = 1 \times 10^4$  y las condiciones iniciales son aleatorias pero satisfacen  $\|\delta \mathbf{e}(0)\| \leq 1$  y  $\|\mathbf{x}_m(0)\| \leq 1$ ; para más detalles sobre la aplicación, véase (Vallejo y Sanjuan 2017). Se calcula el exponente  $\lambda_{max}^\top(k_s)$  para cada  $k_s$  perteneciente al intervalo  $I_{MSF} = [0, K_f]$ , el cual se dividió en  $N = 500$  puntos equidistantes con una distancia de  $\Delta k_s = K_f/N$  y el valor  $K_f$  para cada caso de  $b_i \rightarrow c_j$  es preestablecido.

La Fig. (6.2a) muestra para cada caso de  $b_i \rightarrow c_j$  las gráficas de  $\lambda_{max}^\top(k_s)$ , donde el color verde indica los valores de  $k_s$  tales que  $\lambda_{max}^\top < 0$ . Esta figura muestra que la sincronización MS se logró para tres casos:  $b_1 \rightarrow c_1$  con  $k_s \in (0.192, 4.614)$ ,  $b_1 \rightarrow c_3$  con  $k_s > 54.36$  y  $b_2 \rightarrow c_2$  con  $k_s > 0.157$ .

Aunque el enfoque MSF proporciona las condiciones de sincronización, su aplicación requiere mucho tiempo de cálculo. No obstante, la estabilidad de la solución trivial de la ecuación (6.2) puede analizarse el teorema de sistemas lineales perturbados (SLP)



(a) Exponente mas grande de Lyapunov.



(b) Gráficas del lugar geométrico de las raíces.

Figura 6.2: Condiciones de estabilidad para la sincronización MS del oscilador de Rössler utilizando acoplamiento estático.

como sigue.

De la ecuación de la dinámica del error (6.2), si se expresa la función  $F$  en la forma de Lure se obtiene  $\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{x}_m - A\mathbf{x}_s - k_s bc^\top \mathbf{e} + g(\mathbf{x}_m) - g(\mathbf{x}_s)$ . Pero el error está dado por  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$ ,  $\dot{\mathbf{e}} = (A - k_s bc^\top)\mathbf{e} + g(\mathbf{x}_m) - g(\mathbf{x}_s)$ . Donde el término  $g(\mathbf{x}_s)$  puede ser reescrito  $g(\mathbf{x}_s) = g(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$  puesto  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_m - \mathbf{e}$ . Entonces, la expresión  $g(\mathbf{x}_m) - g(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$  puede ser definida como  $\hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m) \triangleq g(\mathbf{x}_m) - g(\mathbf{x}_m - \mathbf{e})$  de tal manera que la dinámica del error es reducida a:

$$\dot{\mathbf{e}} = A_s \mathbf{e} + \hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m), \quad (6.7)$$

donde  $A_s = A - k_s bc^\top$ .

A partir del Teorema SLP, el origen de la ecuación (6.7) asintóticamente estable si  $A_s$  es una matriz Hurwitz y  $\hat{g}$  es una perturbación desvanescente, es decir,  $\hat{g}$  satisface tanto  $\hat{g}(0, \mathbf{x}_m) = 0$  como  $\|\hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m)\| \leq \gamma \|\mathbf{e}\|$  donde  $\gamma < \frac{1}{2\lambda_{max}(P)}$  con  $P$  como solución de la ecuación de Lyapunov de  $A_s$ . Observe que el valor  $\lambda_{max}(P)$  corresponde a la abscisa espectral de  $P = P^\top$ ; es decir,  $\lambda_{max}(P) = \sigma(P) = \max\{\text{Re } \lambda \mid \lambda \in \rho(P)\}$ , donde  $\rho(P)$  es el espectro de la matriz  $P$ .

Es importante notar que la perturbación  $\hat{g}$  no es autónoma porque depende del estado del oscilador maestro, es decir,  $\hat{g}(\mathbf{e}, t)$ , como se discute en (Arena et al. 2020; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020). No obstante, se prefiere emplear la notación  $\hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m)$  porque la dependencia del estado del oscilador maestro juega un papel importante en la estabilidad como se verá a continuación.

El teorema SLP impone un cota  $\gamma$  a la perturbación  $\hat{g}$  determinada por el sistema lineal nominal. Sin embargo, la perturbación tiene un límite inherente porque la función  $F$  es Lipchitz, la cual no es trivial de calcular. De hecho, las técnicas de análisis lineal no pueden utilizarse directamente para verificar que  $\hat{g}$  es una perturbación desvanescente. No obstante, el teorema SLP ofrece un enfoque alternativo e interesante para determinar las condiciones de sincronización, ya que permite la aplicación de varias técnicas de análisis lineales, como el método del lugar geométrico raíz, el criterio de Routh-Hurwitz y el método de D-partición (Parks y Hahn 1993). Sin embargo, las condiciones de estabilidad obtenidas pueden ser conservadoras porque la perturbación puede no ser des-

vaneciente, como se muestra a continuación.

En la ecuación (6.7), se dice que la matriz  $A_s$  es Hurwitz si su polinomio característico  $p_{A_s}(s)$  es estructuralmente Hurwitz, es decir, si existe un subdominio del espacio de parámetros para el que  $p_{A_s}$  is Hurwitz, ver (Lehnigk 1966).

El polinomio característico  $p_{A_s}$  de la matriz  $A_s$  del sistema lineal nominal de la ecuación (6.7) esta dado por  $p_{A_s}(s) = \det(A - sI - k_s b_i c_j^\top)$  el cual usando el complemento de Schur se reduce a:

$$p_{A_s}(s) = \det(A - sI) - k_s c_j^\top \text{adj}(A - sI) b_i, \quad (6.8)$$

donde  $\text{adj}(\cdot)$  denota la matriz adjunta. Nótese que, utilizando el método de Faddeev-Leverrier, se puede demostrar que el orden del segundo término en  $p_{A_s}(s)$  es menor que  $n$ .

Para el polinomio característico  $p_{A_s}$  resultante (6.8) del sistema de Rössler, se aplica el método del lugar de la raíz para obtener en la Fig.(6.2b) las correspondientes gráficas del lugar geométrico raíces para todos los casos de  $b_i \rightarrow c_j$ , donde las ramas están coloreadas según los valores numéricos de  $k_s$ , mientras que las cruces ( $\times$ ) y los círculos ( $\circ$ ) representan los polos y ceros del sistema de lazo cerrado. De la figura (6.2) se deduce que la matriz  $A_s$  es estructuralmente Hurwitz sólo para dos casos:  $b_1 \rightarrow c_1$  con  $k_s \rightarrow (0, 2.5)$  y  $b_2 \rightarrow c_2$  con  $k_s > 0.2$ .

Las condiciones de estabilidad determinadas anteriormente no garantizan que el origen de la ecuación (6.7) sea asintóticamente estable, porque la perturbación puede no desvanecerse para algunos valores de  $k_s$ . Esto puede verificarse comparando las condiciones de estabilidad proporcionadas por los enfoques MSF y SLP en las figuras (6.2), en las que se observa una discrepancia entre los intervalos de  $k_s$ . Por ejemplo, en el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$ , el intervalo de estabilidad correspondiente, calculado utilizando el enfoque MSF es  $k_s \in I_{MSF} = (0, 192, 4, 614)$ , véase la figura 6.2a, mientras que para el enfoque SLP el intervalo obtenido es  $k_s \in I_{SLP} = (0, 2, 5)$ , véase la figura 6.2b.

Esta discrepancia se produce porque la perturbación no se desvanece para ciertos valores de  $k_s$ . Esto se debe principalmente a que la perturbación  $\hat{g}$  depende de los estados del oscilador maestro. Para entender cómo esto afecta a la estabilidad, se debe in-

vestigar cómo la desigualdad  $\|\hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m)\| - \gamma\|\mathbf{e}\| \leq 0$  se comporta en el tiempo calculando la solución numérica de la ecuación (6.2) para dos casos particulares pero ilustrativos. Considerando el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$  para los valores de  $k_s$  tales que  $k_s = 2.0 \in I_{MSF} \cap I_{SLP}$  y  $k_s = 4.8 \notin I_{MSF}$  donde  $\gamma|_{k_s=2.0} = 0.1633$  y  $\gamma|_{k_s=4.8} = 0.0073155$  con  $\gamma$  aproximada como  $\gamma \approx \frac{1}{2\lambda_{max}(P)}$ . La figura (6.3) muestra para ambos valores de  $k_s$  los gráficos correspondientes del error  $\mathbf{e}$ , la desigualdad, el controlador  $u$  y los estados del oscilador maestro.

De la figura (6.3), se deduce que para  $k_s = 2.0$  la desigualdad se cumple en todo el intervalo de tiempo de la solución. Sin embargo, para  $k_s = 4.8$ , la desigualdad se viola en varios instantes de tiempo; por lo tanto, el término  $\hat{g}$  no se comporta como una perturbación desvanescente. En consecuencia, no se puede alcanzar el estado de sincronización.

Observe que los instantes de tiempo en los que se viola la desigualdad coinciden con los picos del oscilador maestro, véanse los gráficos **ii-iv** en la Fig. (6.3b). Para comprender el efecto de los picos en la sincronización, se relaciona los instantes temporales de los picos con las proyecciones de las trayectorias del sistema MS en los planos  $(x_m, x_s)$ ,  $(y_m, y_s)$  y  $(z_m, z_s)$  respectivamente. La figura (6.4a) muestra esta relación, donde se marca y numera los picos del estado  $z_m$  del oscilador maestro y luego se asocian con las proyecciones de las trayectorias. De la figura se deduce que el efecto de los picos es acumulativo, por lo que no se consigue la sincronización.

La aparición de estos picos o eventos instantáneos es intrínseca a la dinámica de los sistemas caóticos. Este comportamiento complica el análisis y diseño de controladores para lograr la sincronización de los sistemas maestro-esclavo. Por lo tanto, se requiere un controlador que considere y reduzca el efecto de los picos de una perturbación acotada.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, se puede concluir que el acoplamiento estático tiene dos inconvenientes importantes. En primer lugar, el número de casos de  $b_i \rightarrow c_j$  donde se produce la sincronización es limitado. En segundo lugar, el rango de valores de la fuerza de acoplamiento puede ser reducido. Por otra parte, determinar las condiciones de sincronización en el espacio de parámetros requiere emplear el enfoque MSF, pero este procedimiento consume mucho tiempo de cálculo. De ahí que el princi-

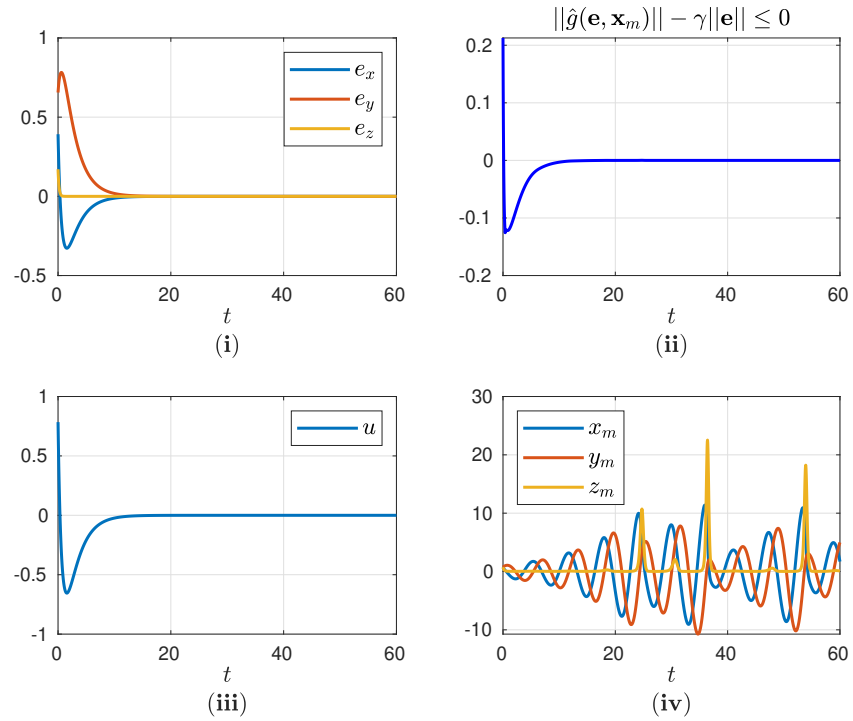
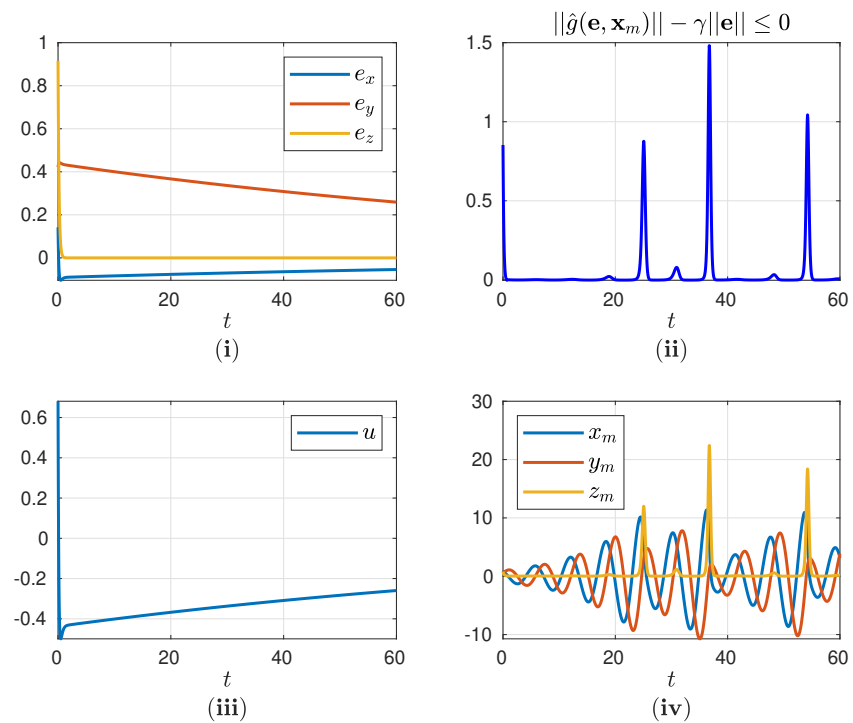
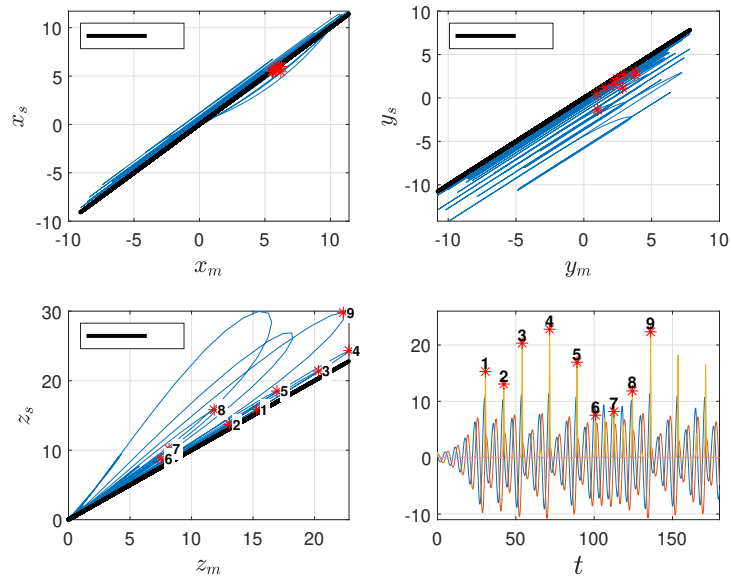
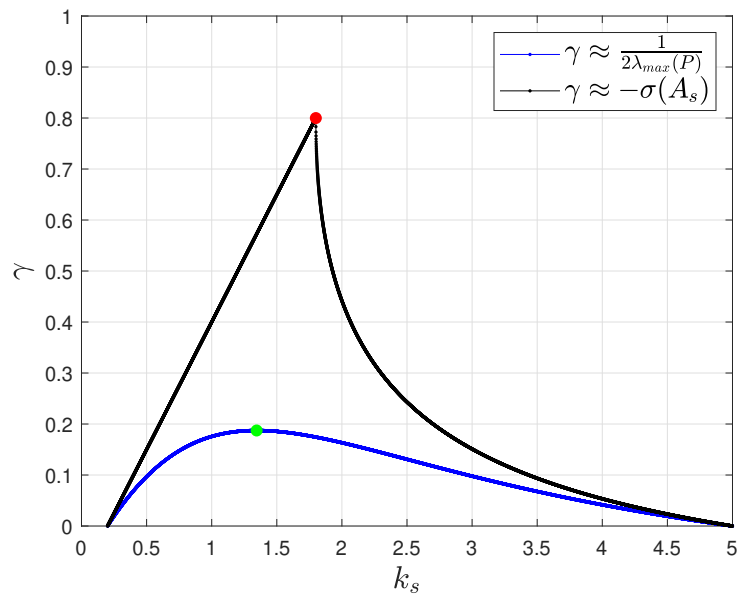
(a) Case  $k_s = 4.2$ .(b) Case  $k_s = 4.8$ .

Figura 6.3: Simulación numérica de la ecuación (6.2) considerando el oscilador de Rössler para los casos  $b_1 \rightarrow c_1$  con  $k_s = 4.2$  y  $k_s = 4.8$ .



(a) Proyección de las trayectorias del sistema MS cuando  $k_s = 4.8$ . La línea (—) es la variación de sincronización proyectada sobre el plano.



(b) Comparación de la estimación de la cota de perturbación  $\gamma(k_s)$  cuando  $\gamma \approx 1/2\lambda_{\max}(P)$  y  $\gamma \approx -\sigma(A_s)$ .

Figura 6.4: Análisis numérico de la sincronización MS del sistema Rössler con acoplamiento estático para el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$ .

pal objetivo del presente estudio sea abordar estas cuestiones. Para ello, se formulan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo se pueden mejorar los controladores lineales para lograr la sincronización maestro-esclavo de los sistemas Lure?
- ¿Se puede utilizar el teorema del sistema lineal perturbado como una herramienta matemática fiable para establecer condiciones de estabilidad válidas?

La primera cuestión tiene que ver con el diseño. En los últimos años, varios investigadores han propuesto emplear controladores dinámicos lineales para mejorar el desempeño de los controladores de ganancia estática (Buscarino et al. 2019; Pena Ramirez, Garcia et al. 2020; Arena et al. 2020). Por lo tanto, en el presente estudio, se revisa brevemente estos controladores. Sin embargo, se introducen algunos aspectos originales como el cálculo de los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros para determinar las ganancias de control, un análisis comparativo empleando los enfoques MSF y SLP, y una regla de diseño para la sintonía basada en la abscisa espectral. Además, también se proponen un controlador novedoso que comprende el acoplamiento estático y dinámico para contrarrestar los principales inconvenientes del controlador de ganancia estática para la sincronización MS.

La segunda cuestión plantea un reto, ya que se pregunta en qué circunstancias puede aplicarse el análisis de estabilidad lineal para establecer condiciones válidas para la estabilidad de la solución síncrona en los sistemas acoplados. En general, la idea de emplear un método lineal para analizar sistemas no lineales es similar a la de utilizar el método de linealización de Lyapunov para explorar la estabilidad local de sistemas no lineales.

Para responder a estas preguntas de investigación, el análisis anterior proporciona las siguientes ideas clave. En primer lugar, asumimos que la cota  $\gamma$  de la perturbación puede aproximarse como  $\gamma \approx \frac{1}{2\lambda_{max}(P)}$ . En segundo lugar, si un controlador dinámico lineal puede aumentar  $\gamma$ , entonces la perturbación se desvanece en un dominio más amplio de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, el problema de control puede formularse como un problema

de optimización, es decir, ¿cuáles valores de los parámetros del sistema producen una cota  $\gamma$  máxima?

Observe que la cota  $\gamma$  aumenta cuando  $\lambda_{max}(P)$  disminuye. Sin embargo,  $\lambda_{max}(P)$  requiere el cálculo de la solución  $P$  de la ecuación de Lyapunov, para lo cual se han desarrollado varios métodos bien establecidos (Barnett y Storey 1970; Gaji y Qureshi 1995). Sin embargo, cuando se requiere una expresión en términos de los parámetros del sistema, la solución  $P$  se vuelve engorrosa e inmanejable para sistemas de alto orden. No obstante, podemos emplear estimaciones de  $\lambda_{max}(P)$  que proporcionan ciertas relaciones entre los coeficientes de la ecuación de Lyapunov (Mori y Deresei 1984; Kwon et al. 1996). Por ejemplo, considerando  $Q = I$ , una cota útil es:

$$\lambda_{max}(P) \geq -\frac{1}{2 \max \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\}}, \quad (6.9)$$

donde  $\lambda_i(A)$  son los valores propios de la matriz  $A$ . Observe que el denominador corresponde a la abscisa espectral de  $A$ , es decir,  $\sigma(A) = \max \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\}$ , por lo tanto, se puede escribir  $\lambda_{max}(P) \geq \frac{-1}{2\sigma(A)}$ .

Puesto que  $\gamma \leq 1/2\lambda_{max}(P)$ , la cota  $\gamma$  puede ser estimada mediante la siguiente relación:

$$\gamma \leq -\sigma(A). \quad (6.10)$$

Nótese que la estimación  $\lambda_{max}(P)$  es conservadora y la investigación para determinar límites más precisos continúa (Mori y Kokame 2002; Lin y T. Zhang 2022). No obstante, la estimación dada arriba proporciona una regla de sintonización sencilla con un significado geométrico. Por ejemplo, considerando el esquema de acoplamiento estático del sistema de Rössler para el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$ . Para determinar el valor de  $k_s$  para el que la cota de  $\gamma$  es máximo, se calcula numéricamente  $\gamma$  para  $k_s \in (0, 2.5)$ . La figura (6.4b) muestra el gráfico de  $\gamma$  versus  $k_s$ , donde se emplean las aproximaciones  $\gamma \approx 1/2\lambda_{max}(P)$  y  $\gamma \approx -\sigma(A)$ . De la figura se deduce que la expresión (6.10) no proporciona una buena aproximación de la cota de perturbación, pero sugiere qué valores de  $k_s$  la cota  $\gamma$  puede aumentar.

## CONTROLADOR DINÁMICO LINEAL DE PRIMER ORDEN

En el capítulo anterior, se empleó un controlador de ganancia estático para lograr la sincronización MS de osciladores caóticos. Sin embargo, el análisis de estabilidad reveló algunos inconvenientes. En el presente capítulo, se analizará el desempeño del controlador dinámico lineal de primer orden y se demostrará cómo permite un incremento en la cota de la perturbación. En este controlador, su ganancia dinámica es la solución de una cierta ecuación diferencial lineal de primer orden prescrita. Se realizará un análisis de estabilidad aplicando y comparando los enfoques MSF y PSL para determinar los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros.

Para mejorar las condiciones de sincronización, se permite que la ganancia  $k_s$  se convierta en dinámica  $k_s = h(t)$ , donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por lo tanto, el controlador se escribe como  $u = h(t)c^\top \mathbf{e}$ , y aplicándolo al sistema lineal nominal de la ecuación (5.5), obtenemos  $\dot{\mathbf{e}} = (A - h(t)bc^\top)\mathbf{e}$ . Por tanto, se puede formular el problema de control para este sistema lineal con coeficientes variables en el tiempo en términos del llamado problema de estabilización de Brockett (R. Brockett 1999), el cual se formula de la siguiente manera: Dadas las matrices  $(A, b, c^\top)$ , ¿bajo qué circunstancias existe una ganancia  $h(t)$  dependiente del tiempo tal que el sistema sea asintóticamente estable?

El problema de estabilización de Brockett se considera un problema de control abierto. Sin embargo, para abordar este problema, se puede formular un enfoque práctico considerando el controlador  $u = u_d = h(\mathbf{e}, t)$ , donde  $h$  es la solución a la ecuación dife-

rencial de primer orden dada por:

$$\mathcal{C}_d \begin{cases} u_d = -h(t), \\ \dot{h} = -\alpha h - k_d c^\top \mathbf{e}, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde  $k_d, \alpha \in \mathbb{R}$  son las ganancias del controlador a determinar con  $\alpha > 0$  para asegurar que  $h \rightarrow 0$  cuando  $\mathbf{e} \rightarrow 0$ .

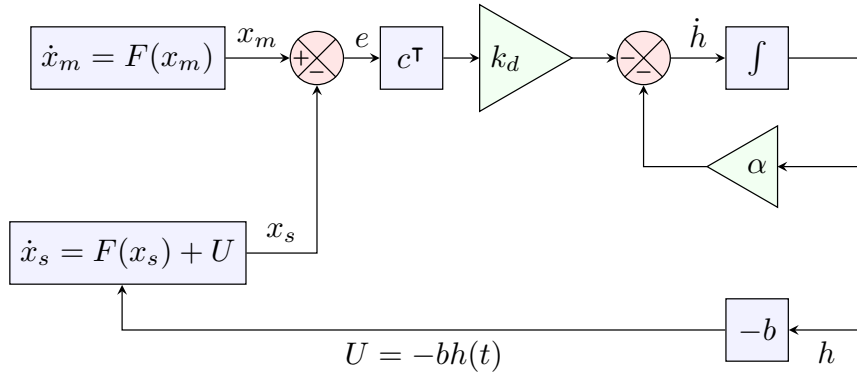


Figura 7.1: Diagrama de bloques de la sincronización MS con acoplamiento dinámico. .

El controlador (7.1) implementa un acoplamiento dinámico de primer orden para la sincronización MS de osciladores caóticos. La Fig. (7.1) muestra el diagrama de bloques correspondiente, y la dinámica de error (5.5) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= F(\mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_s) + bh(t), \\ \dot{h} &= -\alpha h - k_d c^\top \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Por lo tanto, el problema consiste en determinar los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(k_d, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ .

Para ello, se aplica el enfoque de la MSF al sistema (7.2), cuya ecuación variacional es:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{e}} \\ \delta \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DF(\mathbf{x}_m) & b \\ -k_d c^\top & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{e} \\ \delta h \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Se resuelve la ecuación (7.3) utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden tamaño de paso fijo  $\Delta t = 0.001$  y un tiempo final de integración  $t_f = 10,000$  y calculamos

$\lambda_{max}^\top$  para cada punto  $(k_d, \alpha)$  en  $R$  donde  $R$  es una malla rectangular de  $N \times N$  puntos equidistantes, con  $N = 100$  donde el tamaño de  $R$  es prescrito para cada caso de  $b_i \rightarrow c_j$ .

Para mostrar el desempeño del acoplamiento dinámico de primer orden, se analiza la sincronización MS del oscilador de Rössler. Los gráficos de estabilidad correspondientes para todos los casos de  $b_i \rightarrow c_j$  se muestran en la Fig. (7.2a), donde las regiones de estabilidad son contornos verdes en los que  $\lambda_{max}^\top < 0$ .

Comparando las condiciones de estabilidad para el acoplamiento estático proporcionadas en la Fig. (6.2a) con las de la Fig. (7.2a), se deduce que el controlador dinámico no sólo aumenta el número de casos de  $b_i \rightarrow c_j$  en los que se alcanza el estado de sincronización, sino que también amplía el rango de valores de las ganancias del controlador. Esto es el resultado de un aumento de la cota  $\gamma$  tal que la perturbación se desvanece.

Los gráficos de estabilidad de la Fig. (7.2a) proporcionan una herramienta de diseño para sintonizar el controlador dinámico. Sin embargo, cabe mencionar que la aplicación del enfoque de la MSF requiere una cantidad significativa de tiempo computacional, porque se calcula  $\lambda_{max}^\top$  para cada punto  $(k_d, \alpha) \in R$ .

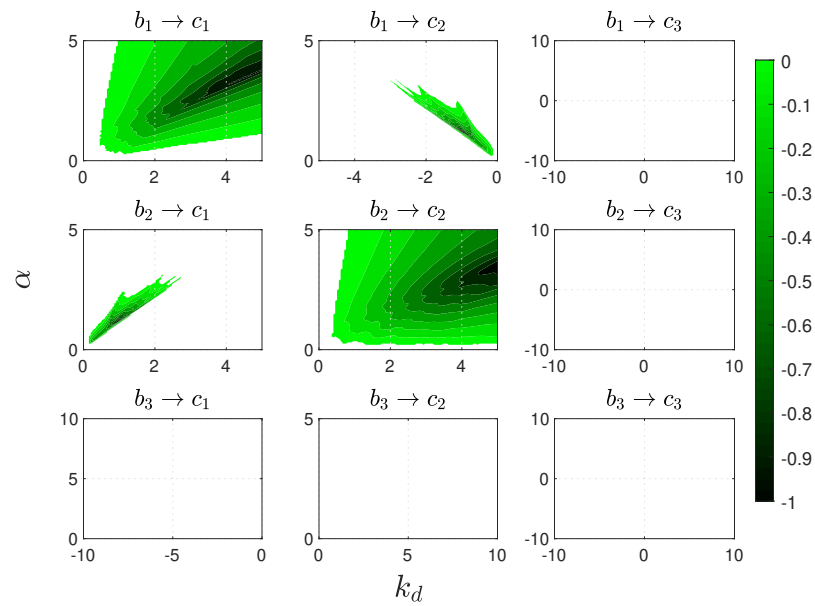
Por otro lado, también se analiza la estabilidad del origen del sistema (7.2) aplicando el enfoque SLP. Para ello, se expresa la función  $F(\mathbf{x})$  en la forma Lure, esto permite escribir el sistema de error (7.2) como:

$$\dot{\mathbf{e}} = A_d \mathbf{e} + \hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m), \quad (7.4)$$

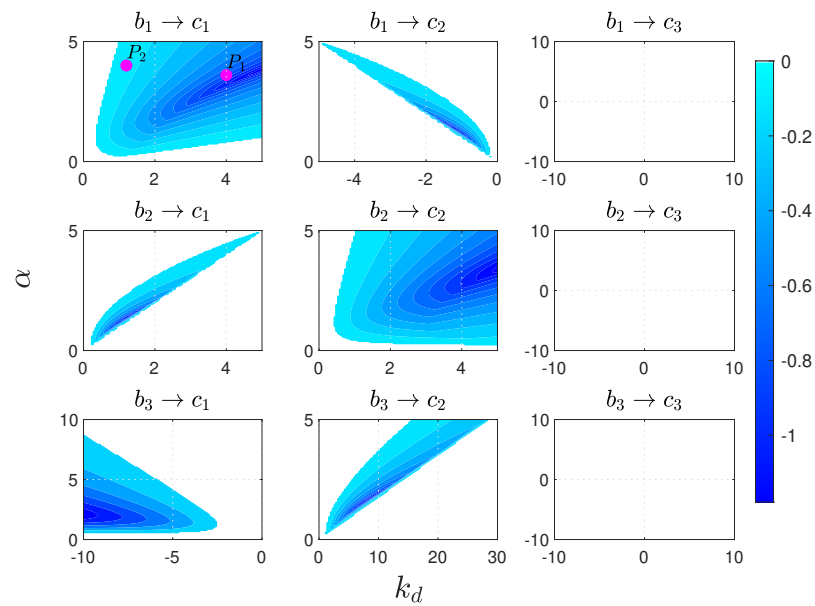
donde  $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $A_d = \begin{bmatrix} A & b \\ -k_d c^\top & -\alpha \end{bmatrix}$  es una matriz de bloques y  $\hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} \hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m) \\ 0 \end{bmatrix}$ .

De acuerdo al Teorema de SLP, la solución trivial del sistema (7.4) es asintóticamente estable si la matriz  $A_d$  es Hurwitz y el término  $\hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m)$  es una perturbación desvanescente. El polinomio característico de  $A_d$  es:

$$p_{A_d}(s) = \det \begin{bmatrix} A - sI & b \\ -k_d c^\top & -\alpha - s \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$



(a) Análisis mediante el mayor exponente de Lyapunov transversal. ● sincronización. ○ no sincronización.



(b) Análisis mediante el criterio de Routh-Hurwitz. ●  $A_s$  es Hurwitz. ○  $A_s$  no es Hurwitz.

Figura 7.2: Gráficos de estabilidad en el espacio de parámetros  $(k_d, \alpha)$  para la sincronización MS del sistema de Rössler utilizando acoplamiento dinámico de primer orden.

que puede reducirse, aplicando la fórmula de Schur, a:

$$p_{A_d}(s) = -\det(A - sI)(s + \alpha) - k_d c^\top \text{adj}(A - sI)b. \quad (7.6)$$

Para la sincronización MS del sistema Rössler, la figura (7.2b) muestra para cada caso de  $b_i \rightarrow c_j$  los correspondientes gráficos de estabilidad de la matriz  $A_d$  como contornos de la abscisa espectral  $\sigma(A_d)$ , tal relación permite explicar la correspondencia entre los contornos en las figuras (7.2a) y (7.2b). De la figura se deduce que el polinomio  $p_{A_d}(s)$  es estructuralmente Hurwitz en varios casos de  $b_i \rightarrow c_j$ . Sin embargo, esto no garantiza la estabilidad asintótica del origen de la ecuación (7.2).

Para aumentar la cota de  $\gamma$ , se buscó los valores de los parámetros que minimizan la abscisa espectral. Aumentar la cota de  $\gamma$  permite que la perturbación sea desvaneciente, lo que puede inducir sincronización. Esta última afirmación expresa una condición necesaria, pero no suficiente.

Por ejemplo, comparando los gráficos de estabilidad mostrados en las figura (7.2a) y (7.2b), se observa que el enfoque SLP indica la existencia de dominios de estabilidad para los casos  $b_3 \rightarrow c_{1,2}$ . Sin embargo, el enfoque MSF reveló que la sincronización no se produce en estos casos. En otras palabras, los dominios de estabilidad de las figuras no coincidían. Por lo tanto, para el presente controlador dinámico de primer orden, el enfoque SLP no se puede utilizarse para determinar válidas condiciones de sincronización.

Considerando el dominio de estabilidad para el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$  mostrado en la figura (7.2b), donde se indicó en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$ , los puntos:  $P_1 = (4, 3.6)$  y  $P_2 = (1.2, 4)$ . Para estos puntos, las simulaciones numéricas correspondientes de la ecuación (7.2) son graficadas las figuras (7.3a) y (7.3b), donde se ha graficado el error  $\mathbf{e}$ , la desigualdad con respecto al error extendido  $\hat{\mathbf{e}}$ , el control  $u = h(t)$  y el estado del oscilador maestro  $\mathbf{x}_m$ . Para estos puntos, las cotas correspondientes  $\gamma$  se aproximan como  $\gamma|_{P_1} \approx 0.1340$  y  $\gamma|_{P_2} \approx 0.03387$ .

De la figura (7.3), se observa que el error llega a cero para ambos puntos; es decir, se alcanza el estado de sincronización. Estas simulaciones nos permiten destacar dos

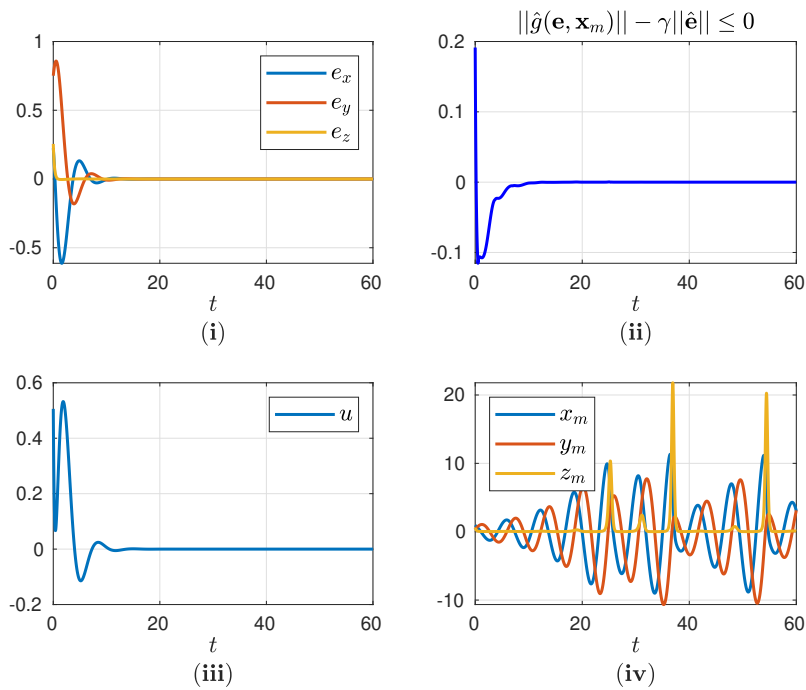
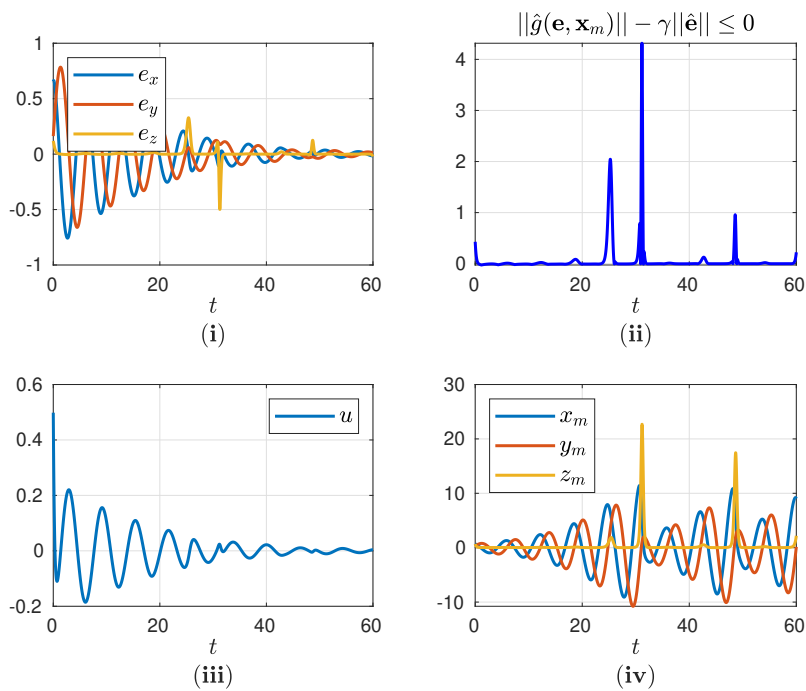
(a) Para  $P_1 = (4, 3.6)$  y  $\gamma \approx 0.1340$ .(b) Para  $P_2 = (1.2, 4)$  a  $\gamma \approx 0.03388$ .

Figura 7.3: Simulación numérica de la ecuación (7.2) considerando el oscilador de Rössler para el caso  $b_1 \rightarrow c_1$  para dos puntos del espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$ .

aspectos importantes. En primer lugar, en principio, el controlador dinámico lineal de primer orden debería incrementar el límite de la perturbación; sin embargo, este incremento no puede compararse con el límite del acoplamiento estático porque los sistemas son diferentes en el sentido de que para el control dinámico de primer orden, el orden del sistema a sincronizar se incrementa en uno. En segundo lugar, para el punto  $P_2$ , la desigualdad se viola en varios instantes de tiempo, pero se logra la sincronización. Este hecho demuestra que la estimación de la cota corresponde al peor de los casos previstos por el Teorema SLP, esto en relación con la aplicación del teorema de estabilidad de Lyapunov.

De la discusión anterior, se concluye que un controlador dinámico lineal de primer orden puede mejorar las condiciones de sincronización. Un paso más para mejorar estas condiciones es considerar aumentar el orden del esquema de acoplamiento, como lo proponen (Pena Ramirez, Arellano-Delgado et al. 2018; Pena Ramirez y Nijmeijer 2019; Buscarino et al. 2019). Sin embargo, hasta la fecha, no existe un procedimiento bien establecido para seleccionar el modelo matemático de un controlador dinámico de alto orden o una técnica de ajuste para el controlador. Es importante señalar que aumentar el orden del controlador dinámico puede aumentar los parámetros del sistema.

En consecuencia, en lugar de aumentar el orden del esquema de acoplamiento, aquí se propone un nuevo controlador que incorpora los acoplamientos estático y dinámico de primer orden. Además, este controlador logra la sincronización, de modo que la técnica de sintonización de los parámetros es matemáticamente manejable.



## CONTROLADOR DINÁMICO LINEAL MAS ESTÁTICO

Considere la ley de control  $u$  que comprende el acoplamiento estático y el acoplamiento dinámico de primer orden dados por:

$$C_{sd} \begin{cases} U = u_s + u_d, \\ u_s = k_s \bar{b} \bar{c}^\top \mathbf{e}, \\ u_d = -bh(t), \\ \dot{h} = -\alpha h - k_d c^\top \mathbf{e}, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde la tupla  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y la ganancia  $k_s$  proporcionan un lazo de retroalimentación para el acoplamiento estático, mientras que la tupla  $(b, c^\top)$  y las ganancias  $(\alpha, k_d)$  proporcionan un segundo lazo de retroalimentación para el controlador dinámico de primer orden. El diagrama de bloques correspondiente del sistema MS acoplado utilizando el controlador dinámico lineal más estático (8.1) se muestra en la figura (8.1). Este tipo de controlador fue primero propuesto en (Suykens y Vandewalle 1997). Sin embargo, nuestro controlador difiere sustantivamente de tal como se verá a continuación.

El controlador (8.1) incorpora dos componentes:  $u_s$  y  $u_d$ . El propósito de  $u_s$  es estabilizar el sistema lineal nominal de dinámica de error determinando los vectores apropiados  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y la ganancia  $k_s$ . El objetivo de  $u_d$  es alcanzar el estado de sincronización determinando el par apropiado  $(b, c^\top)$  y calculando los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$ .

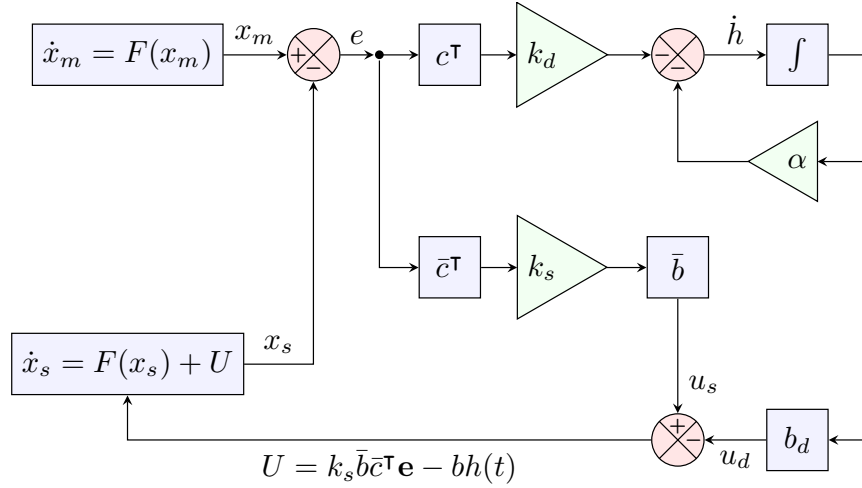


Figura 8.1: Diagrama de bloques del esquema de sincronización MS propuesto con la combinación de controladores estáticos y dinámicos.

La dinámica de error correspondiente viene dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= F(\mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_s) - k_s \bar{b} \bar{c}^T \mathbf{e} + b h(t), \\ \dot{h} &= -\alpha h - k_d c^T \mathbf{e},\end{aligned}\tag{8.2}$$

Expresando la función  $F$  en la forma de Lure nos permite reescribir la ecuación anterior en forma matricial:

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = A_{sd} \hat{\mathbf{e}} + \hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m),\tag{8.3}$$

donde  $\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $A_{sd} = \begin{bmatrix} A - k_s \bar{b} \bar{c}^T & b \\ -k_d c^T & -\alpha \end{bmatrix}$  es una matriz de bloques y  $\hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m) = \begin{bmatrix} \hat{g}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m) \\ 0 \end{bmatrix}$ .

En la matriz a bloques  $A_{sd}$ , la matriz  $A_s = A - k_s \bar{b} \bar{c}^T$  corresponde a la matriz de lazo cerrado del acoplamiento estático. Para el controlador estático-dinámico (8.1), la matriz  $A_s$  se elige de modo que sea Hurwitz utilizando los vectores  $(\bar{b}, \bar{c}^T)$  y  $k_s$ . Mientras, que los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$  se determinan utilizando el enfoque MSE, esto implica resolver la ecuación variacional de (8.2) dada por:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{e}} \\ \delta \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DF(\mathbf{x}_m) - k_s \bar{b} \bar{c}^T & b \\ -k_d c^T & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{e} \\ \delta h \end{bmatrix}.\tag{8.4}$$

Por lo tanto, la implementación del controlador (8.1) implica utilizar el criterio de Routh-Hurwitz para determinar el par  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y la fuerza de acoplamiento  $k_s$  que genera  $A_s$  Hurwitz. Posteriormente, se emplea el enfoque MSF para calcular los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$ . El siguiente algoritmo proporciona una descripción general de los pasos necesarios para aplicar el controlador.

---

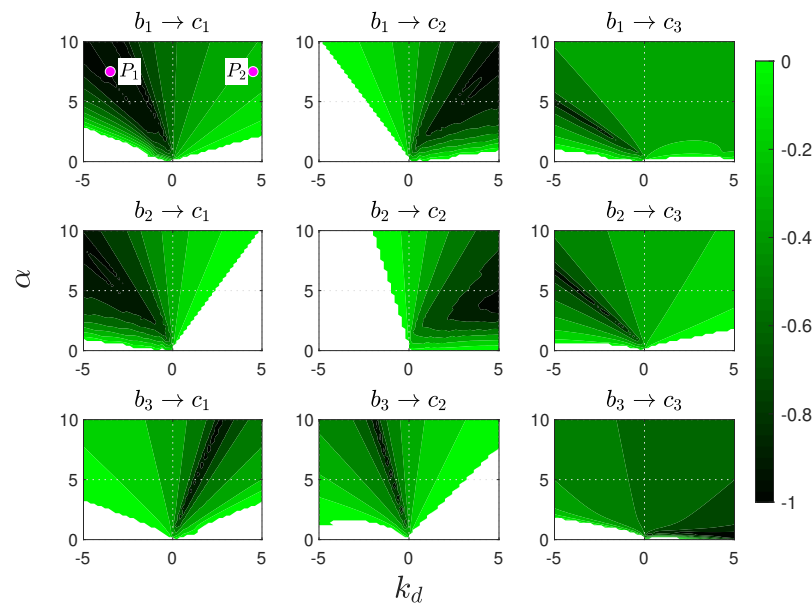
**Algoritmo 1** Procedimiento para la puesta a punto del controlador estático más dinámico propuesto (8.1)

---

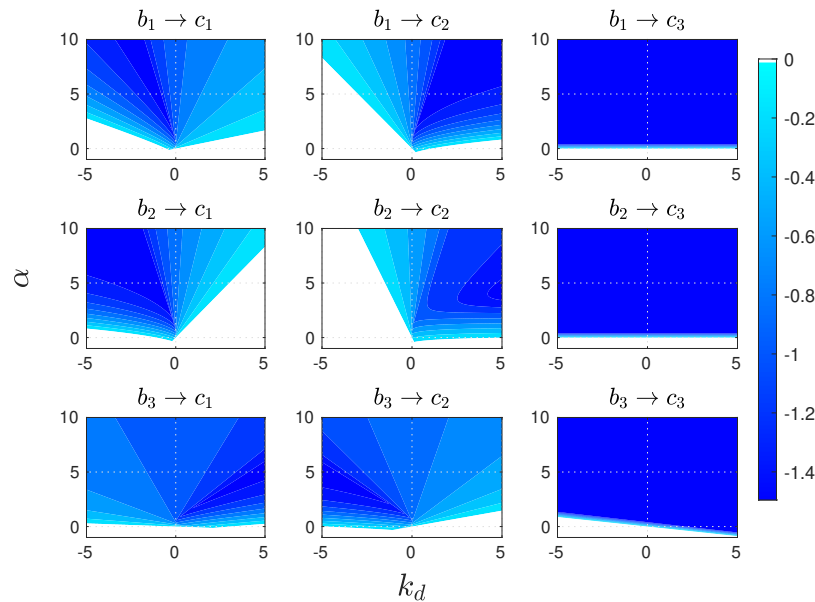
- 1: Encontrar  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y  $k_s$  talque  $A_s$  sea Hurwitz     $\triangleright$  Aplicar de métodos de análisis lineal
  - 2: Calcular los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$  para cada  $b_i \rightarrow c_j$      $\triangleright$  Aplicar del enfoque MSF
  - 3: A partir de los resultados obtenidos en el Paso 2, elija los valores de  $\alpha$  y  $k_d$  para los cuales el mayor exponente transversal de Lyapunov, calculado a partir de la ecuación variacional Eq. (8.4), sea más negativo.
- 

Por ejemplo, para la sincronización MS del sistema Rössler usando el controlador (8.1). Primero, para determinar los vectores  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y la ganancia  $k_s$  para los cuales la matriz  $A_s$  es Hurwitz, se emplean los resultados proporcionados por el método del lugar de las raíces aplicado al sistema lineal  $(A_s, \bar{b}, \bar{c}^\top)$  mostrado en la Fig. (6.2b), donde se muestran los gráficos del lugar de las raíces para los casos de  $\bar{b}_i \rightarrow \bar{c}_j^\top$ . De la figura, para simplificar, se elige el caso de  $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{c}_1^\top$  y la ganancia  $k_s = 2$ . En segundo lugar, para calcular los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros  $(\alpha, k_d)$ , se aplica el enfoque MSF a cada caso de  $b_i \rightarrow c_j^\top$  utilizando el procedimiento descrito en las secciones anteriores. Los diagramas de estabilidad correspondientes se muestran en la Fig. (8.2a), donde se observa que el número de casos en los que se alcanza el estado de sincronización ha aumentado y el área de los dominios de estabilidad es más amplia. Este notable resultado se debe al hecho de que la cota  $\gamma$  de la perturbación ha sido aumentada por el controlador dinámico (8.1).

En la figura (8.2a), se marcan los puntos:  $P_1 = (k_d, \alpha) = (-3.5, 7.5)$  y  $P_2 = (4.5, 7.5)$ . Estos puntos pertenecen a un dominio de estabilidad en el que se alcanza el estado de sincronización. Sin embargo, para  $P_1$  el exponente transversal de Lyapunov más grande es  $\lambda_{max}^\top = -0.4443$ , mientras que para  $P_2$ , es  $\lambda_{max}^\top = -0.1483$ . La simulación numérica correspondiente de la ecuación (8.3) se muestra en la figura (8.3) para estos puntos.



(a) Análisis a través del mayor exponente transversal de Lyapunov. ● sync  
○ no sync.



(b) Análisis utilizando el criterio de Routh-Hurwitz  
●  $A_s$  Hurwitz. ○  $A_s$  No Hurwitz.

Figura 8.2: Análisis de estabilidad de la sincronización MS del sistema Rössler con el acoplamiento estático más dinámico lineal (8.1). Claramente, el controlador propuesto induce sincronización para todas las combinaciones de vectores de entrada-salida. Por lo tanto, tiene un rendimiento superior en comparación con los controladores estáticos y dinámicos de primer orden, para los cuales los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 2 y 6, respectivamente.

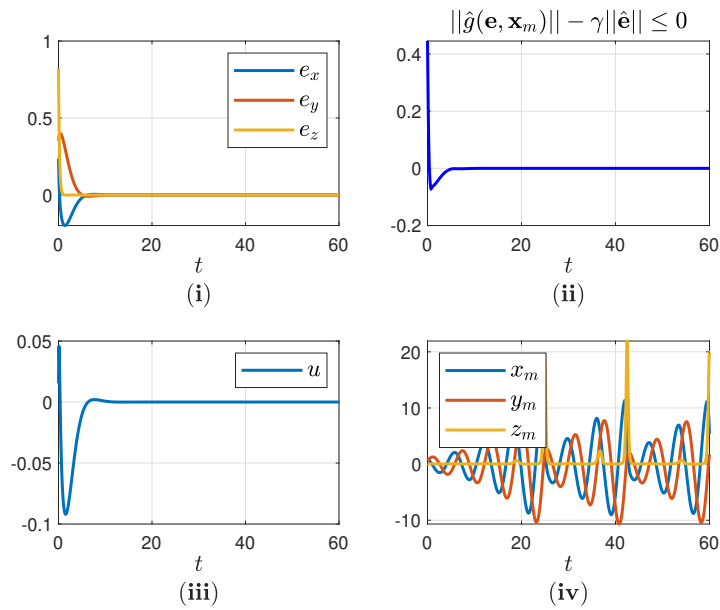
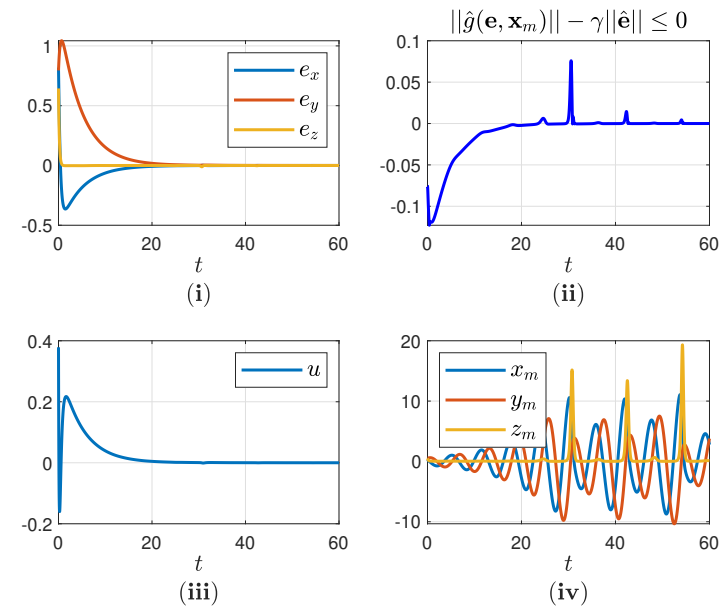
(a)  $P_1 = (-3.5, 7.5)$ .(b)  $P_2 = (4.5, 7.5)$ .

Figura 8.3: Simulaciones numéricas de la ecuación (8.3) muestra el rendimiento del acoplamiento estático mas dinámico del oscilador de Rossler para el caso  $b_1 \rightarrow c_1$  para los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de las gráficas de la figura (8.2a).

Como se puede ver en la figura (8.3), para el punto  $P_1$  el error de sincronización decae a cero exponencialmente más rápido que en el punto  $P_2$ . Para obtener una medida de este hecho, se utilizó el Error Absoluto Integral Ponderado en el Tiempo (ITAE) dado por  $ITAE = \sum_{i=x,y,z} \int_0^{\infty} t \cdot |e_i(t)| dt$ . Por lo tanto, el ITAE para  $P_1$  es  $ITAE_{P_1} = 2.8463$  mientras que para  $P_2$  es  $ITAE_{P_2} = 41.2726$ . Esta simulación muestra cómo seleccionar los parámetros del controlador de acuerdo con el Paso 3 del algoritmo (1).

Por otro lado, también se aplicó el enfoque SLP para analizar la estabilidad del origen de la dinámica del error (8.3). Por lo tanto, por el Teorema SLP, el origen de la ecuación (8.3) es asintóticamente estable si la matriz de estado  $A_{sd}$  es Hurwitz y su parte no lineal es una perturbación que se desvanece. Para determinar los dominios de estabilidad en los que  $A_{sd}$  es estable, se aplica el criterio de Routh-Hurwitz a su polinomio característico (8.6) dado por:

$$p_{A_{sd}}(s) = \det \begin{pmatrix} A - k_s \bar{b} \bar{c}^T - sI & b \\ -k_d c^T & -\alpha - s \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

que se reduce, aplicando la fórmula de Schur, a:

$$p_{A_{sd}}(s) = -\det(A - k_s \bar{b} \bar{c}^T - sI)(s + \alpha) - k_d c^T \text{adj}(A - k_s \bar{b} \bar{c}^T - sI)b. \quad (8.6)$$

Los diagramas de estabilidad correspondientes se muestran en la figura (8.2b), donde se nota su semejanza con los obtenidos utilizando el enfoque MSE, mostrado en la Fig. (8.2a). Una conclusión importante con respecto a este resultado es que el enfoque SLP se puede utilizar para establece condiciones de estabilidad validas

El resultado anterior confirma que el controlador estático más dinámico lineal (8.1) aumenta la cota de perturbación  $\gamma$ . Para probar esta afirmación analíticamente, se formula el teorema de nuestra autoría dado a continuación.

Considere el esquema de sincronización:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m = F(\mathbf{x}_m), \\ y_m = c^\top \mathbf{x}_m, \end{cases} \\
 \mathcal{S} & \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = F(\mathbf{x}_s) + U, \\ y_s = c^\top \mathbf{x}_s, \end{cases} \\
 \mathcal{C}_{sd} & \begin{cases} U = k_s \bar{b} \bar{c}^\top \mathbf{e} - b h(t), \\ \dot{h} = -\alpha h - k_d c^\top \mathbf{e}, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

donde  $\mathbf{x}_{(\cdot)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_{(\cdot)}, h \in \mathbb{R}$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz, los vectores  $b, c^\top \bar{b}, \bar{c}^\top \in \mathbb{R}^n$ , y los parámetros  $k_s, k_d, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$  y el error  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s$

#### Teorema: Sobre la estabilidad del controlador estático-dinámico

El controlador  $\mathcal{C}_{sd}$  aplicado al sistema  $\mathcal{M}\mathcal{S}$  y sintonizado aplicando el algoritmo 1 alcanza el estado de sincronización incrementando la cota

$$\gamma \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{8.8}$$

de la perturbación desvanescente  $\hat{G}$  asociada con la dinámica de error del sistema perturbado lineal del esquema (8.7):

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = A_{sd} \hat{\mathbf{e}} + \hat{G}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_m), \tag{8.9}$$

donde  $\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{e} \quad h]^\top$ ,  $A_{sd} = \begin{bmatrix} A - k_s \bar{b} \bar{c}^\top & b \\ -k_d c^\top & -\alpha \end{bmatrix}$ ,  $P$  es la solución de la ecuación de Lyapunov para  $A_{sd}$  considerando  $Q = I$  y  $\lambda_{(\cdot)}$  denota el valor propio máximo o mínimo.

Según (Mori y Deresei 1984), una cota superior para  $\lambda_{\max}(P)$ , considerando  $Q = I$ , se da en términos de la abscisa espectral  $\lambda_{\max}(P) \geq -1/2\sigma(A_{sd})$ . Por lo tanto, se puede estimar la perturbación  $\gamma$  utilizando  $\gamma \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \leq -\sigma(A_{sd})$ . Esta relación simple sirve como

una regla de diseño, donde se seleccionan los parámetros del sistema tales la abscisa espectral  $\sigma(A_{sd})$  de la matriz  $A_{sd}$  se minimice, garantizando un incremento de la cota  $\gamma$ . Además, la estimación de  $\gamma$  proporciona un significado geométrico relacionado con el margen de estabilidad del sistema lineal nominal y se emplea en la prueba del teorema.

$$\lambda_{max}(P) = \sigma(P) = \max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \rho(P)\}$$

Para demostrar el teorema anterior, se emplea el teorema de los círculos de Gersgorin dado a continuación:

#### Teorema: Círculos de Gersgorin

Para una matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sus valores propios  $\lambda_i$  satisfacen la relación  $\lambda_i(A) \in \bigcup_{i=1}^n D_i$ , donde  $D_i$  son los círculos de Gersgorin definidos por  $D_i = \{s \in \mathbb{C} : |s - a_{ii}| \leq R_i\}$  centrado en  $a_{ii}$  con radio  $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Expresando las matrices  $A_s$  y  $A_{sd}$  como  $A_s = [a_{ij}^s] \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  y  $A_{sd} = [a_{ij}^{sd}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . En la matriz de bloques  $A_{sd}$ , la submatriz  $A_s = A - k_s \bar{b} \bar{c}^\top$  es estable debido a la selección apropiada tanto de la tupla  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  como de la ganancia estática  $k_s$ , como describe el algoritmo 1. Como  $A_s$  es Hurwitz, los centros de sus círculos de Gersgorin se encuentran en el semiplano complejo izquierdo  $\mathbb{C}^-$ . Además, la tupla  $(\bar{b}, \bar{c}^\top)$  y la ganancia  $k_s$  se pueden elegir de manera que la abscisa espectral  $\sigma(A_s)$  sea mínima, mientras que la tupla  $(b, c^\top)$  y los parámetros  $(\alpha, k_d)$  se eligen de manera que  $\hat{\epsilon} \rightarrow 0$ .

La prueba del teorema sobre la estabilidad del controlar estático-dinámico

#### Prueba:

Para  $A_s = [a_{ij}^s]$  los centros de los círculos de Gersgorin son  $a_{ii}^s$ . Por suposición,  $A_s$  es una matriz de Hurwitz, lo que implica que  $a_{ii}^s \in \mathbb{C}^- \quad \forall i = 1 \dots n-1$ . Como  $a_{nn}^{sd} = \alpha < 0$  esto implica que  $a_{ii}^{sd} = a_{ii}^s \cup \alpha \in \mathbb{C}^-$  y  $\lambda_i(A_{sd}) \in \bigcup_{i=1}^n D_i$ . Por lo tanto, debido a la continuidad de los valores propios con respecto a los parámetros del sistema, existe  $\min \sigma(A_{sd}) \in \mathbb{C}^-$  para el cual la cota  $\gamma \leq -\sigma(A_{sd})$  aumenta.

El teorema propuesto proporciona solo una condición necesaria porque algunos parámetros del sistema pueden producir  $\min \sigma(A_{sd}) \in \mathbb{C}^-$  pero  $\hat{\epsilon} \neq 0$ . Esto se puede de-

mostrar con un contraejemplo simple proporcionado por los dominios de estabilidad de la Fig. (8.2), donde se observa que los diagramas de estabilidad en algunos casos de  $b_i \rightarrow c_j$  no coinciden; en otras palabras, los dominios de estabilidad en la Fig. 8.2b aseguran que  $\min \sigma(A_{sd}) \in \mathbb{C}^-$  pero este hecho no garantiza que  $\hat{e} \rightarrow 0$  como se muestra en la Fig. 8.2a. Incluso si se satisface  $\lambda_i(A_{sd}) \in \mathbb{C}$ , no implica que  $\hat{e} \rightarrow 0$ .

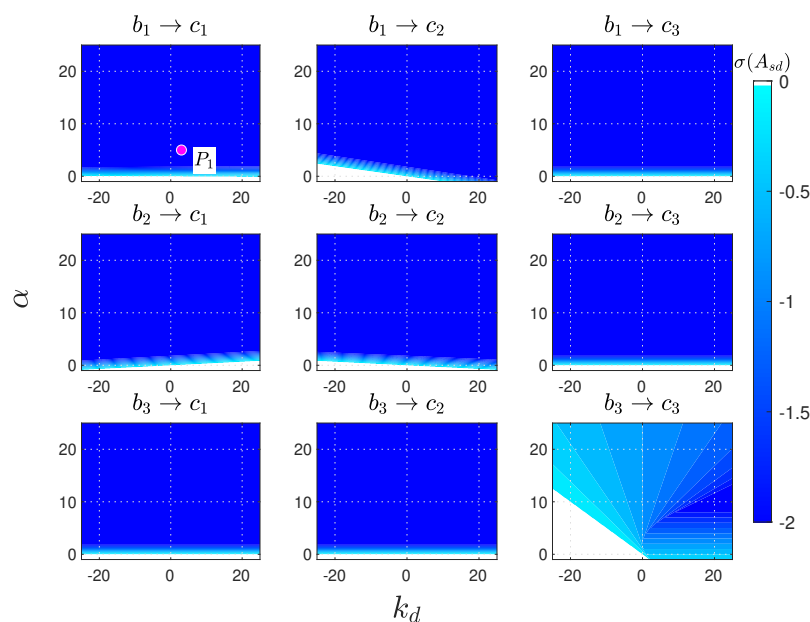
Para fines comparativos, se aplica el controlador estático más dinámico (8.2) a la sincronización maestro-esclavo del sistema Lorenz dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= x(b - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}\tag{8.10}$$

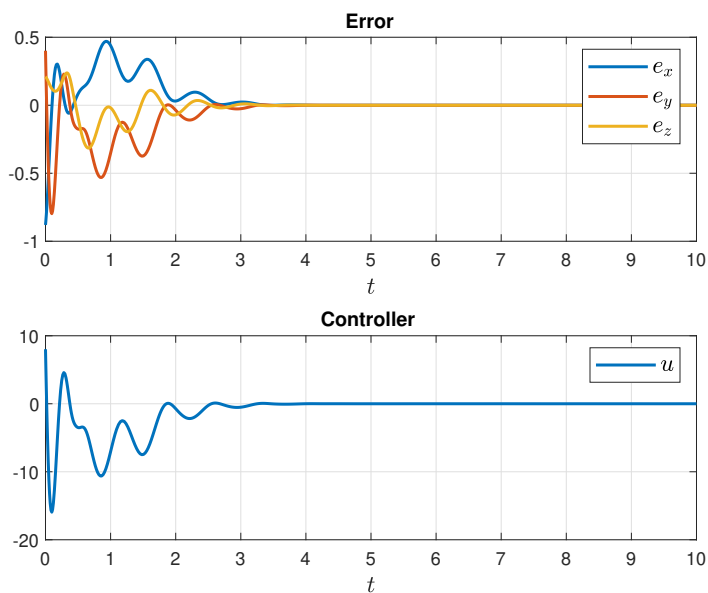
donde  $a = 10$ ,  $b = 28$  y  $c = 2$

Para el componente estático del controlador (8.2), se utilizó  $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{c}_2$  con  $k_s = 20$ . Por lo tanto, el diagrama de estabilidad correspondiente para todos los casos  $b_i \rightarrow c_j$  se muestra en la figura (8.4a), donde se puede observar que el estado de sincronización se puede alcanzar para todos los casos de  $b_i \rightarrow c_j$  y los dominios de estabilidad son amplios. Adicionalmente, en la misma figura, se indica el punto  $P_1 = (k_d, \alpha) = (5, 3)$  para el caso de  $b_1 \rightarrow c_1$ .

La simulación numérica correspondiente del sistema de error (8.2) para el oscilador de Lorenz (8.10), considerando  $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{c}_2$  con  $k_s = 20$  y  $b_1 \rightarrow c_1$  con  $(k_d, \alpha) = (5, 3)$  se muestra en la figura (8.4b). En donde se puede observar que el error se acerca a cero.



(a) Gráficas de estabilidad.



(b) Simulación numérica.

Figura 8.4: Resultados numéricos para la sincronización maestro-esclavo del oscilador de Lorenz (8.10) aplicando el controlador estático más dinámico (8.2) considerando  $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{c}_2$  con  $k_s = 20$  y  $b_1 \rightarrow c_1$  con  $(k_d, \alpha) = (5, 3)$ .

## CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este estudio se ha centrado en el análisis y diseño de controladores lineales para la sincronización maestro-esclavo (MS) de osciladores caóticos. Aunque es bien sabido que los controladores de retroalimentación de salida estática pueden no lograr la sincronización MS para algunos vectores de entrada y salida única, aquí, con la ayuda del teorema de sistemas lineales perturbados (SLP), se demostró que esta falla se debe al hecho de que la acotación de la perturbación asociada con la dinámica del error se viola localmente. Esto se ha ilustrado utilizando el sistema de Rössler. Nuestro análisis ha revelado que la acotación de la perturbación que desaparece juega un papel crucial en el establecimiento de las condiciones de sincronización; por lo tanto, se requiere un controlador que aumente este límite.

Se ha demostrado que un primer paso para mejorar la sincronización es reemplazar el controlador estático por un controlador dinámico gobernado por una ecuación diferencial lineal de primer orden. Se ha realizado un análisis de estabilidad aplicando los enfoques de la función de estabilidad maestra y SLP. Este análisis proporciona los dominios de estabilidad en el espacio de parámetros como contornos en términos del exponente de Lyapunov más grande y la abscisa espectral. Sin embargo, los gráficos obtenidos correspondientes al enfoque SLP indican que en algunos casos, el controlador dinámico de primer orden también falla en lograr la sincronización MS porque la perturbación no desaparece. Por lo tanto, se requiere una mejora adicional en el controlador.

Para este fin, se ha introducido una ley de control compuesta por una parte estática

y una parte dinámica de primer orden. El controlador de ganancia estático se ha utilizado para estabilizar el sistema lineal nominal de la dinámica de error, mientras que el controlador dinámico de primer orden mejoró las condiciones de sincronización. Hemos demostrado que el controlador estático más dinámico logra la sincronización MS en varios casos de los vectores de entrada-salida, en los que los dominios de estabilidad tienen una región más amplia en el espacio de parámetros, porque el controlador aumenta el límite de la perturbación, lo que permite que la perturbación desaparezca en un dominio más grande del espacio de estados. Este resultado se ha demostrado mediante la introducción de un teorema basado en el teorema de los círculos de Gershgorin. Además, se demuestra que el criterio de Routh-Hurwitz nos permite esbozar los dominios de estabilidad y se introduce una regla de ajuste para las ganancias de control relacionadas con la abscisa espectral.

En definitiva, los resultados presentados aquí han demostrado que la combinación de control estático y dinámico mejora las propiedades de sincronizabilidad del sistema considerado. Creemos que el controlador propuesto puede ser aplicable a otros osciladores caóticos en los que los controladores puramente estáticos o puramente dinámicos fallan.

Por otro lado, como trabajo futuro se propone: 1) Mostrar la robustez de los controladores propuestos cuando existe discrepancia en los valores nominales de los parámetros en los osciladores utilizando la ecuación diferencial de sensibilidad. 2) El formalismo de la función maestra de estabilidad es aplicado cuando no existe discrepancia en los valores nominales de los parámetros de los sistemas maestro esclavo, hasta la fecha no existe un enfoque bien establecido que defina la función maestra de estabilidad para este caso, este problema se conoce como la función maestra de estabilidad extendida.

## BIBLIOGRAFÍA

- Aeyels, D. y J. L. Willems (dic. de 1991). «Towards pole assignment for linear time-invariant systems by periodic static output feedback». En: *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 925-926. DOI: 10.1109/CDC.1991.261455.
- Ahmad, Babar (2010). «Stabilization of Kapitza oscillator by symmetric periodical forces». En: *Nonlinear Dynamics* 62.3, págs. 499-506. DOI: 10.1007/s11071-010-9736-0.
- Aizerman, M. A. y F. R. Gantmacher (1964). *Absolute Stability of Regulator Systems*. USA: Holden-Day.
- Allwright, J. C., A. Astolfi y H. P. Wong (2005). «A note on asymptotic stabilization of linear systems by periodic, piecewise constant, output feedback». En: *Automatica* 41.2, págs. 339-344. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.09.009.
- Arena, Paolo et al. (jul. de 2020). «Lyapunov approach to synchronization of chaotic systems with vanishing nonlinear perturbations: From static to dynamic couplings». En: *Physical Review E* 102.1. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012211.
- Ayala, Rafael y Luis Moreno-Ahedo (mar. de 2021). «Active damping for vibration control based on the switched stiffness technique». En: *Journal of Vibroengineering*. DOI: 10.21595/jve.2021.21729.
- Banerjee, Santo y Chittaranjan Ranjan (2001). *Control and Synchronization in Nonlinear Oscillators*. Boca Raton, FL: CRC Press. DOI: 10.1201/9780429068287.
- Barnett, S. y C. Storey (1970). *Matrix methods in stability theory*. London: Nelson.
- Bert, C. W. (1973). «Material damping». En: *Journal of Sound and Vibration* 29.2, págs. 129-153. DOI: 10.1016/S0022-460X(73)80131-2.

- Bittanti, Sergio y Patrizio Colaneri (2009). *Periodic systems : filtering and control*. London: Springer.
- Blekhman, I. I. (ene. de 1964). «The problem of synchronization of dynamical systems». En: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 28.2, págs. 239-265. DOI: 10.1016/0021-8928(64)90160-1.
- Blekhman, Ilya Izrailevich (1988). *Synchronization in Science and Technology*. Trad. del ruso por Eugene I. Rivin. English Translation. Includes illustrations. New York: ASME Press, págs. xiii, 255.
- Boccaletti, Stefano (2007). *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Boccaletti, Stefano, Irene Leyva y Alessandro Amann (2008). *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bolotin, V. V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*. San Francisco: Holden-Day.
- Bonabeau, Eric, Marco Dorigo y Guy Theraulaz (1999). *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. New York: Oxford University Press.
- Brockett, Roger (1999). «A stabilization problem». En: *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Ed. por Vincent Blondel. London: Springer. Cap. 16, págs. 75-78. DOI: 10.1007/978-1-4471-0807-8\_16.
- Brockett, Roger W. (1970). *Finite dimensional linear systems*. SIAM. Cambridge, Massachusetts.
- (1983). «Asymptotic stability and feedback stabilization». En: *Differential Geometric Control Theory*. Ed. por R. S. Millman R. W. Brockett y H. J. Sussmann. Boston: Birkhauser, págs. 181-191.
- Buscarino, Arturo (2017). *A Concise Guide to Chaotic Electronic Circuits*. Cham, Switzerland: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-52147-6.
- Buscarino, Arturo, Luigi Fortuna y Luca Patanè (sep. de 2019). «Master-slave synchronization of hyperchaotic systems through a linear dynamic coupling». En: *Physical Review E* 100.3. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.032215.

- Caughey, T. K. y A. Vijayaraghavan (1970). «Free and forced oscillations of a dynamic system with linear hysteretic damping (non-linear theory)». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 5.3, págs. 533-555. DOI: 10.1016/0020-7462(70)90015-6.
- Chen, Chi-Tsong (1999). *Linear system theory and design*. 3rd. New York: Oxford University Press.
- Chen, Jay-Chung (1984). «Response of Large Space Structures with Stiffness Control». En: *Journal of Spacecraft and Rockets* 21.5, págs. 463-467. DOI: 10.2514/3.25681.
- Coron, Jean-Michel (1995). «Stabilizing Time-Varying Feedback». En: *IFAC Proceedings Volumes* 28.14, págs. 159-166.
- Fisco, N. R. y H. Adeli (2011). «Smart structures: Part I - Active and semi-active control». En: *Scientia Iranica* 18.3 A, págs. 275-284. DOI: 10.1016/j.scient.2011.05.034.
- Floquet, G (1883). «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques». En: *Annales scientifiques de l'cole Normale Supérieure* 2e serie, 12, págs. 47-88.
- Fujisaka, Hirokazu y Tomoji Yamada (ene. de 1983). «Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems:» en: *Progress of Theoretical Physics* 69.1, págs. 32-47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
- Furuta, Katsuhisa, Akira Sano y Derek P. Atherton (1988). *State variable methods in automatic control*. Chichester England ; New York: Wiley.
- Gaji, Z. y M. T. J. Qureshi (1995). *Lyapunov matrix equation in system stability and control*. San Diego: Academic Press.
- Glass, Leon y Michael C. Mackey (1988). *From clocks to chaos: The rhythms of life*. Princeton University Press. DOI: 10.1515/9781400859037.
- Gleick, James (1987). *Chaos: Making a New Science*. New York: Viking Penguin.
- Goh, C. J. y T. K. Caughey (1985). «A quasi-linear vibration suppression technique for large space structures via stiffness modification». En: *International Journal of Control* 41.3, págs. 803-812. DOI: 10.1080/0020718508961164.
- Hao, Bai-Lin (1991). *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos*. Singapore: World Scientific.
- Hirsch, Morris W., Stephen Smale y Robert L. Devaney (2004). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. 2nd. San Diego, CA: Academic Press.

- Hong, Keum-Shik (2002). «An open-loop control for underactuated manipulators using oscillatory inputs: steering capability of an unactuated joint». En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10.3, págs. 469-480. DOI: 10.1109/87.998037.
- Huang, Liang et al. (sep. de 2009). «Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems». En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 80.3. DOI: 10.1103/PhysRevE.80.036204.
- Huygens, Christiaan (1893). *Correspondencia 1664–1665*. Ed. por M. Nijhoff. Vol. 5. La Societe Hollandaise des Sciences.
- Kailath, Thomas (1980). *Linear systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Kapitza, P. L. (1951). «Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates and pendulum with a vibrating suspension». En: *In Collected papers of P.L. Kapitza*. Ed. por D. Tar Harr. Vol. 2. London: Pergamon Press Ltd., págs. 714-737.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*. 2nd. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Khargonekar, P., K. Poolla y A. Tannenbaum (1985). «Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30.11, págs. 1088-1096. DOI: 10.1109/TAC.1985.1103841.
- Kuramoto, Yoshiki (1984). *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Berlin: Springer-Verlag.
- Kwon, Wook Hyun, Young Soo Moon y Sang Chul Ahn (ene. de 1996). «Bounds in algebraic Riccati and Lyapunov equations: A survey and some new results». En: *International Journal of Control* 64.3, págs. 377-389. DOI: 10.1080/00207179608921634.
- L'Her, Alexandre et al. (mar. de 2016). «Electronically-implemented coupled logistic maps». En: *European Physical Journal B* 89.3. DOI: 10.1140/epjb/e2016-60986-8.
- Ledezma-Ramirez, D. E., N. S. Ferguson y M. J. Brennan (2011). «Shock isolation using an isolator with switchable stiffness». En: *Journal of Sound and Vibration* 330.5, págs. 868-882. DOI: 10.1016/j.jsv.2010.09.016.
- Lefschetz, Solomon (1965). «Liapunov Stability and Controls». En: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control* 3.1, págs. 1-6. DOI: 10.1137/0303001.

- Lehnigk, S. H. (1966). *Stability theorems for linear motions, with an introduction to Liapunov's direct method*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Leonov, G. A. (2001). «The Brockett Stabilization Problem». En: *Automation and Remote Control* 62.5, págs. 847-849. DOI: 10.1023/A:1010291327649.
- Lin, Minghua y Teng Zhang (2022). «On an upper bound for the eigenvalues of the solution of the continuous algebraic Riccati equation». En: *Applied Mathematics Letters* 132, pág. 108194. DOI: 10.1016/j.aml.2022.108194.
- Lorenz, Edward N. (1963). «Deterministic Nonperiodic Flow». En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2, págs. 130-141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
- Lyapunov, A. M. (1992). *General Problem of the Stability Of Motion*. London; Washington, D.C.: Taylor y Francis.
- May, Robert M. (1976). «Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics». En: *Nature* 261.5560, págs. 459-467. DOI: 10.1038/261459a0.
- Meerkov, Semyon M. (1980). «Principle of Vibrational Control: Theory and Applications». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.4, págs. 755-762. DOI: 10.1109/TAC.1980.1102426.
- Meiss, J. D. (2017). *Differential dynamical systems*. Philadelphia: SIAM.
- Moreno-Ahedo, L. y S. Diarte-Acosta (2019). «Stability analysis of linear systems with switchable stiffness using the Floquet theory». En: *Journal of Vibration and Control* 25.5, págs. 963-976. DOI: 10.1177/1077546318811419.
- Mori, T. y A. Deresei (1984). «A brief summary of the bounds on the solution of the algebraic matrix equations in control theory». En: *International Journal of Control* 39 (2), págs. 246-257. DOI: 10.1080/00207178408933163.
- Mori, T. y H. Kokame (2002). «On solution bounds for three types of Lyapunov matrix equations: Continuous, discrete and unified equations». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.10, págs. 1767-1770. DOI: 10.1109/TAC.2002.803557.
- Morin, P. y C. Samson (1997). «Time-varying exponential stabilization of a rigid spacecraft with two control torques». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.4, págs. 528-534. DOI: 10.1109/9.566663.

- Murphy, Robin R. (2000). *Introduction to AI Robotics*. 1st. Includes illustrations. Cambridge, Mass.: MIT Press, págs. xix, 466. DOI: 10.7551/mitpress/3767.001.0001.
- Narayanan, H. y Hariharan Narayanan (2019). «On the linear static output feedback problem: The annihilating polynomial approach». En: *Linear Algebra and Its Applications* 579, págs. 336-364. DOI: 10.1016/j.laa.2019.06.005.
- Nayfeh, Ali Hasan y Dean T. Mook (1979). *Nonlinear oscillations*. New York: Wiley.
- Onoda, Junjiro, Takao Endo et al. (1991). «Vibration Suppression by Variable-Stiffness Members». En: *AIAA Journal* 29.6, págs. 977-983. DOI: 10.2514/3.59943.
- Onoda, Junjiro, Tetsuji Sanot y Kohichi Kamiyama (1992). «Active, Passive, and Semiactive Vibration Suppression by Stiffness Variation». En: *AIAA Journal* 30.12, págs. 2922-2929. DOI: 10.2514/3.48978.
- Parker, Thomas S. y Leon O. Chua (1989). *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Berlin ; New York: Springer Verlag.
- Parks, P. C. y V. Hahn (1993). *Stability theory*. New York: Prentice Hall.
- Pavlov, Alexey, Nathan Wouw y Henk Nijmeijer (2006). *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: A Convergent Dynamics Approach*. USA: Birkhäuser Boston.
- Pecora, Louis M. y Thomas L. Carroll (1990). «Synchronization in Chaotic Systems». En: *Physical Review Letter* 64.8, págs. 821-825.
- Pena Ramirez, J., A. Arellano-Delgado y H. Nijmeijer (jul. de 2018). «Enhancing master-slave synchronization: The effect of using a dynamic coupling». En: *Physical Review E* 98.1. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.012208.
- Pena Ramirez, J., E. Garcia y J. Alvarez (ene. de 2020). «Master-slave synchronization via dynamic control». En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 80. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.104977.
- Pena Ramirez, J. y H. Nijmeijer (dic. de 2019). «Enforcing synchronization in oscillators with Huygens' coupling via feed-forward control». En: *Nonlinear Dynamics* 98.4, págs. 3009-3023. DOI: 10.1007/s11071-019-05062-x.
- Perko, Lawrence (2001). *Differential equations and dynamical systems*. 3rd. New York: Springer, xiv, 553 p.

- Poincaré, Henri (1892). *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Vol. 1-3. Paris, France: Gauthier-Villars et Fils.
- Ramaratnam, Arun y Nader Jalili (2006). «A switched stiffness approach for structural vibration control: Theory and real-time implementation». En: *Journal of Sound and Vibration* 291.1-2, págs. 258-274. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.06.012.
- Razo, C. M. (2012). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- Reid, T. J. (1956). «Free Vibration and Hysteretic Damping». En: *The Journal of the Royal Aeronautical Society* 60.544, pág. 283. DOI: 10.1017/S0368393100135242.
- Samson, Claude (1993). «Time-varying Feedback Stabilization of Car-like Wheeled Mobile Robots». En: *The International Journal of Robotics Research* 12.1, págs. 55-64. DOI: 10.1177/027836499301200104.
- Sheingold, D. (jun. de 1975). «Calculating Resistances for Sum and Difference Networks». En: *Electronics*, págs. 125-126.
- Sobel, Dava (1996). *Longitud: La verdadera historia de un genio solitario que resolvió el problema científico más grande de su tiempo*. Madrid: Editorial Debate.
- Stephenson, A (1908). «On a New Type of Dynamical Stability». En: *Mem. Proc. Manchester Lit. Philos. Soc.* 52, págs. 1-10.
- Strogatz, Steven H. (2003). *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. 1st. Includes illustrations. New York: Hyperion, págs. viii, 338.
- Suykens, J. A. K., P. F. Curran y L. O. Chua (1997). «Master-Slave Synchronization Using Dynamic Output Feedback». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 07.03, págs. 671-679. DOI: 10.1142/S0218127497000467.
- (1999). «Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems». En: *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 46.7, págs. 841-850. DOI: 10.1109/81.774230.
- Suykens, J. A. K. y J. Vandewalle (1997). «Master-Slave Synchronization of Lur'e Systems». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 7.12, págs. 2917-2928.
- Syrmos, V. L. et al. (1997). «Static output feedback - A survey». En: *Automatica* 33.2, págs. 125-137. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00141-0.

- Vallejo, J. C. y M. A. F. Sanjuan (2017). *Predictability of Chaotic Dynamics: A Finite-time Lyapunov Exponents Approach*. New York: Springer.
- Watts, Duncan J. (1999). *Small worlds: The dynamics of networks between order and randomness*. Princeton University Press.
- Webb, Steven G., Robert A. Calico y William E. Wiesel (1991). «Time-periodic control of a multi-blade helicopter». En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14.6, págs. 1301-1308. DOI: 10.2514/3.20787.
- Winfrey, Arthur T. (2001). *The geometry of biological time*. 2nd. Springer.
- Yakubovich, V. A. y V. M. Starzhinskii (1975). *Linear differential equations with periodic coefficients*. New York: Wiley.
- Zhang, Yunfeng y Wilfred D. Iwan (2003). «Some observations on two piecewise-linear dynamic systems with induced hysteretic damping». En: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38.5, págs. 753-765. DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00131-7.