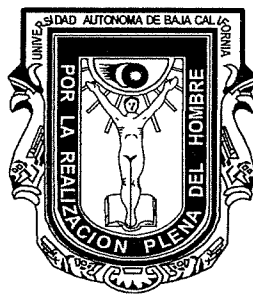


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES OCEANOLÓGICAS



**Modelo de Propagación de Oleaje en
Coordenadas Curvilíneas**

TESIS

**QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS NECESARIOS
PARA OBTENER EL GRADO DE**

MAESTRO EN CIENCIAS EN OCEANOGRAFIA COSTERA

PRESENTA

César Augusto Vázquez Peredo

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MEXICO. ENERO, 2007.

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES OCEANOLÓGICAS
POSGRADO EN OCEANOGRAFIA COSTERA

Modelo de Propagación de Oleaje en
Coordenadas Curvilíneas

TESIS

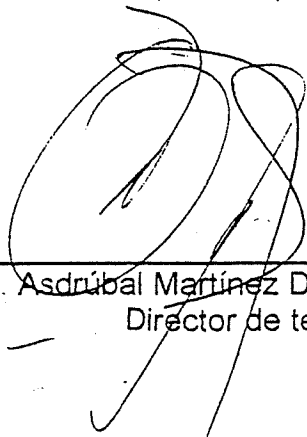
QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS NECESARIOS
PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

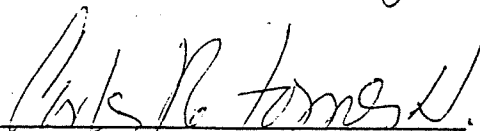
PRESENTA

César Augusto Vázquez Peredo

Aprobada por:



Dr. Asdrúbal Martínez Díaz de León
Director de tesis



Dr. Carlos R. Torres Navarrete
Sinodal



Dr. Rafael Hernández Walls
Sinodal



Dr. José E. Castillo
Sinodal

I. Resumen

Una de las metodologías más socorrida al modelar la propagación de oleaje en aguas de profundidad variable es la que se conoce como la aproximación de *Pendiente Suave* (*Mild-Slope* en inglés). Esta aproximación permite obtener una ecuación integrada verticalmente relativamente sencilla. No obstante, ya que el fondo se supone como localmente plano, el potencial obtenido por los primeros modelos de pendiente suave no satisface la condición de frontera del fondo.

Se ha propuesto resolver esta cuestión en términos de potenciales de velocidad que incluyan modos de oscilación no propagativos. En el presente trabajo se propone una solución en términos de una transformación del espacio físico de propagación por un espacio ortogonal curvilíneo que se adapte a la geometría del ambiente. El resultado obtenido es una ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficientes variables, la cual se resuelve numéricamente.

Para corroborar la validez del modelo, se comprobó que es posible reproducir de forma casi idéntica los resultados generados por los modelos con modos evanescentes a partir de la solución de sistemas de ecuaciones entre 3 y 6 veces más pequeños. Esto sin duda hace más eficiente la implementación y solución en cuanto al tiempo de cómputo y los requerimientos de memoria.

Sin embargo, el modelo se restringe a situaciones en las que la derivada de la función del fondo sea continua, debido a que se requiere resolver una ecuación diferencial por el método de características. Esto impide que el modelo se pueda aplicar sobre batimetrías irregulares, como son cambios abruptos de profundidad, picos o escalones. Sin embargo, esta dificultad se puede salvar aproximando el contorno en el piso por una función con derivadas continuas.

II. Agradecimientos

Agradezco el apoyo otorgado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca para estudios de Maestría en Ciencias en Oceanografía Costera con número de referencia 179625.

Agradezco el apoyo otorgado por Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca terminal de tesis como parte del proyecto U40822-F, “Corrientes y Oleaje en el golfo de Tehuantepec (COGOTE)”, a cargo del Dr. Reginaldo Durazo Arvizu.

III. Índice

I.	Resumen.....	iii
II.	Agradecimientos.....	iv
III.	Índice.....	v
IV.	Lista de Figuras.....	vi
1.	Introducción.....	1
1.1	Antecedentes	2
1.2	Objetivos.....	9
1.2.1	Objetivo General.....	9
1.2.2	Objetivos Específicos.....	10
2.	Ecuaciones Rectoras.....	11
2.1	Derivación de las ecuaciones de movimiento en coordenadas curvilíneas ortogonales.....	11
2.2	Solución Numérica	19
3.	Resultados y Discusiones.....	22
3.1	Fondo plano.....	24
3.2	Disminución Rápida de la Profundidad.....	25
3.3	Disminución Rápida de la Profundidad con Ondulaciones.....	30
4.	Conclusión.....	35
5.	Bibliografía.....	37
Apéndice I.	Derivación del perfil vertical del potencial de velocidad.....	41
Apéndice II.	Transformada de Liouville.....	43
Apéndice III.	Condiciones de frontera.....	44
Apéndice IV.	Gráficas de otros textos.....	46

IV. Lista de Figuras

- Figura 0.1.** Ejemplo del cambio de coordenadas. En el sistema (ξ, ζ) la línea constante $\zeta = -H$ corresponde a la curva $h(x)$ en el sistema (x, z) 14
- Figura 2.2.** Notación dada a la función f evaluada en los puntos alrededor de (ξ, ζ) El subíndice i se refiere al desplazamiento de la coordenada ξ , mientras que el subíndice j corresponde a ζ20
- Figura 3.1.** Muestra los resultados arrojados por el *MCC* para un fondo plano. La línea oscura muestra la elevación de la superficie del agua mientras que los contornos corresponden al potencial de velocidad; la línea punteada muestra el valor de longitud de onda. (a) Caso de aguas profundas: $\lambda = 12\text{m}$, $h = 6\text{m}$, $h/\lambda = 0.5$, con una frecuencia de 2.26/s. (b) Caso de aguas someras: $\lambda = 18\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $h/\lambda = 0.05$, con una frecuencia de 1.07/s. En ambos casos la amplitud de la onda incidente fue de 0.3m..... 24
- Figura 3.2.** Gráfica de la función de fondo dada por la ecuación 3.1 y malla utilizada por el cálculo del potencial de velocidad. Las líneas de la malla muestran sitios en los que las coordenadas ξ y ζ son constantes..... 26
- Figura 3.3.** Líneas equipotenciales del campo de oleaje que se propaga sobre el fondo dado por la ec. 3.3; la línea superior corresponde a la elevación de la superficie. Ambas gráficas se obtuvieron por medio de la *EPS*. (a) Corresponde a la parte imaginaria del potencial de velocidad (b) Parte real del mismo potencial.....27
- Figura 3.4.** Similar a la figura 3.3, pero estas gráficas se obtuvieron utilizando el *MCC*.....28
- Figura 3.5.** Similar a la figura 3.4, aquí se muestra únicamente el intervalo de 6 a 12 m..... 29
- Figura 3.6.** Gráfica del fondo generado por la ecuación 3.2. Esta es la malla generada para el cálculo del potencial de velocidad como en la figura 3.2. Esta malla tiene 90 puntos horizontales y 30 verticales..... 31
- Figura 3.7.** Potencial de velocidad y elevación de la superficie en coordenadas cartesianas, similar a la figura 3.3 pero para el fondo dado por la ecuación 3.2..... 32
- Figura 3.8.** Potencial de velocidad y elevación de la superficie en coordenadas curvilíneas, similar a la figura 3.4 pero para el fondo dado por la ecuación 3.2..... 33

Figura AIV.1 (*Figura 4 en Athanassoulis y Belibassakis (1999)*). Líneas equipotenciales del campo de oleaje y elevación de la superficie libre en una región de batimetría variable, obtenido con —, el modelo ER y - - -, el modelo SR, respectivamente. La profundidad está dada por la ecuación (3.1). La frecuencia angular de la onda incidente es $\omega = 2$ rad s^{-1} y su altura $H = 1$ m. (a) Parte real del potencial de onda $\Phi(x; z) = -0.5(igH/\omega) \varphi(x, z)$ y la elevación de la superficie libre $\eta(x) = 0.5H\varphi(x, z = 0)$. (b) Parte imaginaria del potencial de onda y elevación de la superficie libre.....46

Figura AIV.2 (*Figura 7 en Athanassoulis y Belibassakis (1999)*). Similar a la figura AIV.2, pero para el fondo dado por la ecuación (3.2).....47

1. Introducción

El entendimiento de la infinidad de procesos que ocurren en la zona costera es de vital importancia por ser ésta la región en donde se produce la mayor interacción del hombre con el océano. Aquí se producen centenares de relaciones que afectan la actividad humana desde distintos ángulos: pesca, turismo, ecología, acuicultura, transportación, entre otros.

Una de las materias de interés físico más importante en la zona costera es sin lugar a duda el estudio del oleaje. El oleaje es un aspecto a tomar en cuenta en aplicaciones tan diversas como el diseño y construcción de estructuras marinas (puertos, marinas, rompeolas, espigones), navegación, dispersión de contaminantes, transporte de sedimentos, dinámica de poblaciones biológicas y otras (Maa, Hsu et al., 1998).

A medida que las olas se aproximan a la costa, los efectos de la variación del fondo se hacen presentes. La ola que originalmente se desplazaba sin restricciones relativas a la profundidad, comienza a ser frenada por fricción con el fondo; esta fricción trae como consecuencia fenómenos como someramiento, refracción, reflexión y ruptura. Además, la interacción de la ola con las fronteras (playas, paredes, rompeolas) genera a su vez difracción y disipación de energía (Silva, 2004).

Debido a la alta no linealidad de los procesos antes mencionados, su estudio resulta ser matemáticamente muy complicado. Se ha intentado resolver este problema en base a varias aproximaciones de las ecuaciones de movimiento, siendo las más comunes las que se conocen como *aproximaciones de Boussinesq* y los modelos de *Pendiente Suave* (*Mild Slope* en inglés) (Dingemans, 1997). La diferencia fundamental entre ambas aproximaciones es que los modelos de

Boussinesq conservan algunos términos no lineales mientras que los modelos de pendiente suave son del todo lineales.

En el presente trabajo se presenta un modelo de propagación de oleaje que cumple las condiciones propias de la *Pendiente Suave* (Berkhoff, 1972). Este modelo se genera en el marco de un sistema de coordenadas curvilíneas que permite empatar el espacio físico con el espacio computacional en el que se resuelven las ecuaciones; con esto se busca mejorar los resultados obtenidos respecto a los modelos cartesianos sin incrementar demasiado la complejidad de las ecuaciones, ni añadir demasiados puntos para obtener mejor resolución.

1.1 Antecedentes

Peregrine (1967) partió de las ecuaciones no lineales de Boussinesq en aguas de profundidad constante para estudiar una ola solitaria desplazándose lo largo de un canal con profundidad variable. Más tarde, G. Wei y J. T. Kirby (1995) proponen una variación del modelo de Boussinesq, incluyendo en la ecuación de movimiento términos correspondientes a advección y gradiente de presión, y términos dispersivos no lineales con derivadas espaciales y temporales. El estudio de ecuaciones de este tipo ha cobrado gran importancia en últimas fechas, de la mano del desarrollo de nuevas técnicas computacionales que hacen más eficiente el cálculo numérico; podemos resaltar por ejemplo el Modelo FUNWAVE (Kirby, Wei et al., 1998), el cual se basa en las ecuaciones de Boussinesq. Aquellos interesados en conocer más el tema pueden referirse a una buena recopilación de trabajos sobre modelos de Boussinesq hecha recientemente por Kirby (2003).

Por otro lado, están los modelos lineales de *pendiente suave*, como el modelo del cual nos ocuparemos en el presente trabajo. El primer modelo de *pendiente suave* para la predicción de oleaje en zona costera fue propuesto por Berkhoff (1972); en ese trabajo, Berkhoff partió de la ecuación de continuidad escrita en términos del potencial de velocidad y la modificó haciendo dos suposiciones fundamentales: i) que la estructura vertical del potencial de velocidad se aproxima localmente al de una onda propagándose sobre un fondo plano y ii) que los efectos debidos a términos de orden cuadrado y superior que incluyan la pendiente y la curvatura del fondo son despreciables.

Después de establecer las dos condiciones que forman la base de los modelos de *Pendiente Suave*, Berkhoff integró las ecuaciones en la vertical para eliminar la dependencia de esta coordenada de la ecuación de movimiento resultante, y que esta quedase únicamente en función de las coordenadas horizontales. De esta forma el potencial de velocidad queda descompuesto en dos partes “independientes”: la componente horizontal (ya sea en una o dos dimensiones) que se obtiene al resolver la ecuación de pendiente suave, y la componente vertical que está determinada de antemano por una función del tipo coseno hiperbólico; en realidad las componentes no son del todo independientes, ya que la componente vertical depende del número de onda, el cual a su vez depende de las variaciones horizontales del fondo.

La misma ecuación de Berkhoff fue derivada por otros métodos en los trabajos de Smith y Sprinks (1975), Lozano y Meyer (1976) y Booij (1981). El rango de validez de la suposición de *pendiente suave* fue estudiado por Booij (1983), quien encontró que la ecuación de Berkhoff coincide con la teoría lineal para valores de pendiente hasta de $1/3$.

Con el paso del tiempo, la *Ecuación de Pendiente Suave (EPS)* se fue fortaleciendo, como en los trabajos de Booij (1983), Kirby (1983) y Kirby (1984), en los que se incluye la interacción del oleaje con corrientes y términos disipativos. Más tarde, Kirby (1986) introduce una variación de la *EPS* para reproducir los datos experimentales obtenidos por Davies y Heathershaw (1984) del comportamiento de un tren de ondas viajando sobre un fondo ondulado. En su trabajo, Kirby supone que las ondulaciones (de amplitud pequeña) están sobrepuestas en un fondo de pendiente suave y obtiene una ecuación que difiere sólo en un término (relacionado con las ondulaciones del fondo) de la ecuación de Berkhoff.

Casi diez años después del trabajo de Kirby, Chamberlain y Porter (1995) proponen la *Ecuación de Pendiente Suave Modificada (EPSM)*, la cual es una generalización de la *EPS* en cuya derivación se incluyen los términos de segundo orden y de curvatura que habían sido eliminados por Berkhoff. El resultado es una ecuación más completa que incluye como casos especiales la *EPS* y la ecuación para fondo ondulado de Kirby. La *EPSM* ha demostrado ser una herramienta muy poderosa para determinar la evolución del oleaje cercano a la costa. Como ejemplo podemos citar dos modelos de propagación de oleaje que se basan en esta ecuación: el Modelo *RIDE* (Maa, Hsu et al., 2002) y un Modelo generado en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, el *WAPO2D* (Silva, 2004).

Una vez propuestas las ecuaciones, queda el problema de resolverlas. En su forma original, tanto la *EPS* como la *EPSM* son ecuaciones diferenciales elípticas del tipo de la ecuación de Helmholtz. Hasta el momento, es imposible encontrar una solución analítica a las ecuaciones; la única solución posible se obtiene

numéricamente, sin embargo dado que en general las matrices que resultan de la discretización de la *EPS* y la *EPSM* no son diagonalmente dominantes, no es viable resolverlas por métodos iterativos simples (Lynch, 2005).

De entre los mecanismos utilizados para enfrentar esta dificultad, destacamos los siguientes:

- Radder (1979) introdujo una parabolización de la *EPS* que se restringe a los casos en los que la onda sigue una dirección de propagación preferente y los efectos de reflexión son despreciables; toda vez que la ecuación se convierte en parabólica, es posible implementar métodos iterativos simples de solución. Esta aproximación ha sido utilizada en varios trabajos como el de Kirby y Dalrymple (1983), Kirby (1986) y Dalrymple (1988), y es la base del modelo de propagación de oleaje conocido como REF/DIF 1 (1994).

- Ebersole (1985), Copeland (1985) y Li y Wang (1999) propusieron cambiar la *EPS* por un sistema hiperbólico de ecuaciones en donde se busca calcular la amplitud y fase de una función de potencial de velocidad. Esta aproximación se puede resolver también por métodos iterativos simples, sin embargo reproduce sólo los efectos de difracción y refracción, pero no de reflexión.

- Se ha propuesto también la utilización de métodos iterativos más avanzados. Un ejemplo es el método de *Mallas múltiples* de Li y Anastasiou (1992). Otro ejemplo es el de Oliveira y Anastasiou (1998), quienes compararon los resultados obtenidos al aplicar el método del *Gradiente Bi-Conjugado Estable* y el de *Residuos Mínimos Generalizados* encontrando que el primero converge de manera más rápida y eficiente que el segundo. Otros trabajos resuelven el problema transformando la ecuación diferencial elíptica en un par de ecuaciones integrales (Chamberlain, 1993;

Chidlow, 2005), encontrando incluso un algoritmo para medir el error relacionado con el cálculo.

- Un mecanismo de solución más básico y sencillo es el resolver el problema numérico directamente por eliminación gaussiana. El problema de este método es que dada la enorme demanda de memoria, sólo puede utilizarse en el estudio de regiones pequeñas. Maa et al. (1997) propusieron una forma de librar esta dificultad con un método que cambia la necesidad de espacio de memoria interna por espacio de disco duro.

En el presente trabajo se decidió utilizar el método de eliminación gaussiana para resolver las ecuaciones obtenidas; dado que los dominios de propagación estudiados no son demasiado grandes, este método es aparentemente el más sencillo y rápido de implementar. De momento se dejó de lado investigar si es o no la elección óptima.

Se ha dicho anteriormente que la *EPSM* es una versión mejorada de la *EPS* original, en la que se incluyen los efectos debidos a la curvatura y términos de segundo orden de la pendiente del fondo. Sin embargo, en 1993, Massel (1993) introdujo una aproximación que además incluye la presencia de modos de oscilación no propagativos (llamados evanescentes) deduciendo un sistema de $N+1$ ecuaciones (que incluye N modos no propagativos y un propagativo) por el Método Galerkin de Eigenfunciones; esta misma idea fue retomada por Porter y Staziker (1995) utilizando un método variacional para obtener la que se conoce como *Ecuación de Pendiente Suave Extendida (EPSE)*. Los autores afirman que el incluir modos no propagativos mejora perceptiblemente los resultados obtenidos en comparación con

las ecuaciones anteriores, y además asegura que el flujo de masa sea continuo a pesar de que la pendiente del fondo no lo sea (Porter and Staziker, 1995).

Pese a su superioridad sobre la *EPSM* y la *EPS*, la *EPSE* comparte una deficiencia con sus antecesoras. Esta deficiencia viene de la misma suposición de pendiente suave: la estructura vertical del potencial de velocidad se aproxima localmente al de una onda propagándose sobre un fondo plano. De esta manera, es la componente vertical del potencial de velocidad en el fondo la que se hace cero, y no la componente perpendicular al fondo como lo exige la condición de frontera sobre suelo impermeable; la diferencia entre la dirección vertical y la dirección perpendicular se hace más evidente a medida que la pendiente del fondo se vuelve mayor.

Dos problemas surgen a partir de este punto: i) las velocidades calculadas por estas ecuaciones cercanas al fondo se tornan bastante imprecisas y ii) se pierde la conservación de energía de la onda. Athanassoulis y Belibassakis (1999) propusieron la inclusión de un nuevo modo de oscilación al que llamaron *modo de la inclinación del fondo (sloping-bottom mode)*, además de derivar un sistema acoplado de ecuaciones en el que no es necesario predeterminedar la forma funcional del potencial vertical.

En contraparte, Chandrasekera y Cheung (2001) propusieron un esquema más sencillo que el de Athanassoulis y Belibassakis, el cual consta de sólo un par de ecuaciones acopladas derivadas de la condición de frontera en el fondo y la ecuación de Laplace; en este trabajo sin embargo, se toma la forma funcional tradicional del potencial vertical y se agrega un factor que concuerda con la condición de frontera en el fondo. Kim y Bai (2004) a su vez, proponen una nueva ecuación de pendiente

suave (a la que llamaron *Ecuación de Pendiente Suave Complementaria*) en términos de la función de corriente y no del potencial de velocidad; al cambiar la función de corriente por el potencial, la condición de frontera en el fondo se convierte en una condición de Neumann. Finalmente, Chamberlain y Porter (2006) por medio de una transformación de variables obtuvieron una aproximación multi-modal más sencilla de la ecuación de pendiente suave.

A pesar de que estas ecuaciones han demostrado reproducir satisfactoriamente la evolución de una onda propagándose sobre un fondo variable, distan cada vez más de la simplicidad del la *EPS* original. La complejidad introducida hace que el costo computacional y el trabajo para resolver las ecuaciones sea cada vez mayor.

El presente trabajo deduce una ecuación de propagación de oleaje en fondo variable cuya solución satisface la condición de frontera en el fondo. La idea original fue planteada por Biggs y Chamberlain (2006) y consiste en transformar el espacio cartesiano de propagación en un espacio curvilíneo en el que el fondo sea representado como una recta horizontal; de esta forma la condición de frontera en el fondo se transforma en una simple condición de Neumann.

La idea de mezclar ecuaciones de propagación de oleaje y coordenadas curvilíneas no es del todo nueva. Anteriormente se han utilizado este tipo de transformaciones, principalmente para lidiar con fronteras laterales irregulares. Algunos ejemplos del uso de coordenadas curvilíneas en modelos de Boussinesq los encontramos en Shi, Dalrymple et al. (2001), y en Shi, Kirby et al. (2003). Hay también trabajos que combinan el uso de ecuaciones de pendiente suave y coordenadas curvilíneas, por ejemplo, Zhang, Zhu et al. (2005) utilizan la aproximación hiperbólica de la *EPS* para obtener una ecuación en coordenadas

curvilíneas con dispersión de energía; Shi y Kirby (2005) transforman la aproximación parabólica de la *EPS* incluyendo efectos de corrientes externas; finalmente, Porter y Porter (2006) persiguiendo el mismo interés que el presente trabajo, aplicaron técnicas de mapeo conforme (conformal mapping) para deducir una aproximación (“simple” según sus palabras) para ondas propagándose sobre cualquier tipo de batimetría.

La ecuación deducida en este trabajo por medio de la transformación del espacio de propagación en coordenadas curvilíneas recupera la forma de la *EPS*, por lo que simplifica en gran medida los cálculos y permite la utilización de esquemas anteriores de solución; además, incluye un término en el que se pueden contar efectos de disipación de energía. Por supuesto que se debe pagar un precio por esta simplificación: a diferencia de la *EPS*, los coeficientes de esta aproximación dependen de las métricas de la transformación y deben integrarse numéricamente. Aún así, el resultado es bastante satisfactorio, como se verá más adelante.

En la segunda parte de este trabajo se deriva la ecuación de pendiente suave en coordenadas curvilíneas junto con las condiciones de frontera lateral, y se muestra la forma de la solución numérica; en el último capítulo se comparan los resultados arrojados por esta ecuación con los obtenidos por otros autores.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Generar un modelo lineal de propagación de oleaje costero en coordenadas curvilíneas capaz de cumplir la condición de frontera para el potencial de velocidad en el fondo.

1.2.2 Objetivos específicos

- Deducir las ecuaciones de movimiento para el potencial de velocidad de una onda monocromática en coordenadas curvilíneas.
- Obtener y resolver el problema con condiciones de frontera que resulta de aplicar la aproximación de pendiente suave a las ecuaciones de movimiento en coordenadas curvilíneas.
- Comparar los resultados arrojados por este modelo con ejemplos estudiados por otros autores. Particularmente se busca mostrar que el presente modelo rescata la simplicidad de los primeros modelos de pendiente suave, sin perder con esto efectividad.

2 Ecuaciones rectoras

A continuación presentamos las ecuaciones de movimiento que rigen el desplazamiento unidimensional de una onda monocromática sobre una batimetría variable. Primeramente, en la sección 2.1 se muestra la derivación de las ecuaciones utilizando coordenadas curvilíneas para satisfacer la condición de frontera en el fondo; después, en la sección 2.2 se incluye el esquema numérico empleado para la solución de las ecuaciones deducidas.

2.1 Derivación de las ecuaciones de movimiento en coordenadas curvilíneas ortogonales.

Consideremos una onda desplazándose en la superficie de un fluido incompresible y homogéneo sobre un fondo de profundidad variable $z = -h$ (Biggs and Chamberlain). Bajo estas condiciones el movimiento puede considerarse irrotacional y modelarse matemáticamente en términos del potencial de velocidad Φ , el cual se define por medio de las componentes cartesianas de la velocidad $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_z.$$

En el resto de esta sección emplearemos la notación de subíndice para denotar derivadas parciales, es decir, $f_x \equiv \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$.

Sustituyendo el potencial de velocidad en la ecuación de continuidad obtenemos la ecuación

$$\nabla^2_H \Phi + \Phi_{zz} = 0, \quad -h < z < 0 \quad \text{Ec. 2.1a}$$

en donde ∇_H es el operador gradiente horizontal.

La condición de frontera en el fondo está dada por la ecuación:

$$\Phi_z + \nabla_H \Phi \cdot \nabla_H h = 0, \quad z = -h \quad \text{Ec. 2.1b}$$

mientras que la condición de frontera en la superficie la escribimos del mismo modo que Zhang, Zhu et al. (2005) como

$$g\Phi_z + \left(\frac{\partial}{\partial t} + W \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad z = 0 \quad \text{Ec. 2.1c}$$

en donde W es el término en el que se puede incluir disipación de energía y cuya forma funcional se puede determinar posteriormente, aunque de momento no nos ocupa en este trabajo.

A fin de simplificar el desarrollo del problema, supongamos que la profundidad varía únicamente en la dirección de x , es decir, $h=h(x)$; de esta forma eliminamos toda dependencia de y del problema. Supongamos además que podemos expresar el potencial de velocidad como una función armónica de la forma

$$\Phi(x, z, t) = \text{Re} \left\{ \phi(x, z) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \text{Ec. 2.2}$$

en donde ω es la frecuencia angular de la onda.

Sustituyendo la ecuación para el potencial (2.2) en las ecs. (2.1) obtenemos:

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad -h < z < 0, \quad \text{Ec. 2.3a}$$

$$\phi_z + \phi_x h' = 0, \quad z = -h, \quad \text{Ec. 2.3b}$$

$$g\phi_z - \omega^2 \phi = i\omega W \phi, \quad z = 0, \quad \text{Ec. 2.3c}$$

en donde h' denota la derivada total dh/dx .

Siguiendo el procedimiento de Biggs y Chamberlain (2006), buscamos ahora trasladarnos a un sistema de coordenadas (ξ, ζ) que nos permita resolver las ecuaciones (2.3) con una mayor precisión de la que permiten las coordenadas cartesianas (x, z) . La figura 2.1 muestra gráficamente como la malla curvilínea se convierte en un espacio computacional homogéneo.

Para obtener las nuevas coordenadas en función de la geometría, hacemos que el nuevo sistema de coordenadas se adapte a las variaciones del fondo $h(x)$ proponiendo la siguiente transformación:

$$\zeta = \frac{zH}{h(x)}, \quad \text{Ec. 2.4}$$

en donde H es un factor de escalamiento. De esta forma tenemos que $\zeta=0$ cuando $z=0$ y $\zeta=-H$ cuando $z=-h(x)$. Además, queremos que ξ y ζ generen un sistema ortogonal, es decir, que cumplan la condición $\nabla\xi \cdot \nabla\zeta = 0$. Sustituyendo la ec. (2.4) en esta condición de ortogonalidad obtenemos

$$zh'\xi_x - h\xi_z = 0. \quad \text{Ec. 2.5}$$

Utilizaremos el método de características (Tveito and Winther, 2005) para resolver la ec. (2.5); sólo resta definir la condición de valor inicial. En este caso fijamos la condición como $\xi=x$ en $z=0$. Así, tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \frac{dx(z)}{dz} &= -\frac{z}{h(x)} \frac{h'(x)}{h(x)}, \\ x(z=0) &= x_0, \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.6}$$

para un valor x_0 dado. De esta forma tenemos que $\xi=x(z)$.

El problema de valor inicial dado por la ec. (2.6) lo resolvimos por medio de la función ode45 de Matlab 6.5, la cual se basa en una fórmula explícita de Runge-Kutta:

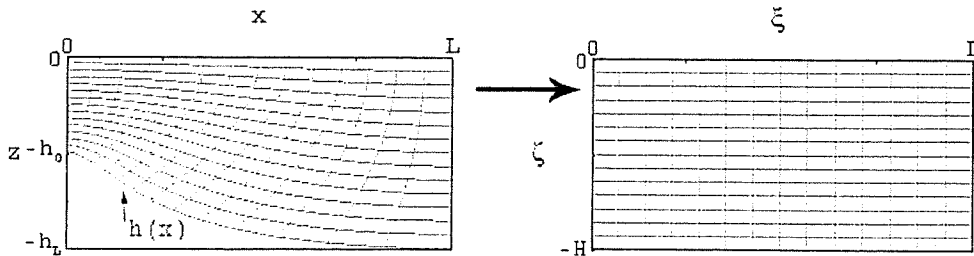


Figura 2.1. Ejemplo del cambio de coordenadas. En el sistema (ξ, ζ) la línea constante $\zeta = -H$ corresponde a la curva $h(x)$ en el sistema (x, z) .

Una vez obtenido ξ y ζ , escribimos las ecs. (2.3) en términos del nuevo sistema de coordenadas, esto es:

$$\left(\alpha\phi_\xi\right)_\xi + \left(\frac{1}{\alpha}\phi_\zeta\right)_\zeta = 0, \quad -H < \zeta < 0, \quad \text{Ec. 2.7a}$$

$$\phi_\zeta = 0, \quad \zeta = -H, \quad \text{Ec. 2.7b}$$

$$\phi_\zeta - \alpha_0 \frac{\omega^2}{g} \phi = i\alpha_0 \frac{\omega}{g} W\phi, \quad \zeta = 0, \quad \text{Ec. 2.7c}$$

en donde $\alpha = \frac{h}{H}\xi_x$, y α_0 es igual a α evaluada en $\zeta=0$. Cabe destacar que la condición de frontera en el fondo se convirtió en una simple condición de Neumann gracias al cambio de coordenadas.

Después de sustituir las condiciones de frontera 2.7b y 2.7c en la ecuación 2.7a, el potencial de velocidad ϕ adquiere la forma

$$\phi(\xi, \zeta) = \left(Ae^{ik\xi} + Be^{-ik\xi}\right) \cosh(\alpha k(\zeta + H)), \quad \text{Ec. 2.8}$$

en donde A y B son constantes. El Apéndice I muestra detalladamente la forma en la que se obtiene (2.8).

• Finalmente, sustituimos la ec. (2.8) en la condición de frontera (2.7c) para obtener

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(kh) \quad \text{Ec. 2.9}$$

la cual es la relación de dispersión para una onda monocromática que relaciona la frecuencia angular ω con el número de onda k .

Supongamos ahora que el fondo se comporta como la función

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & x \leq 0 \\ h(x) & 0 < x < \ell \\ h_\ell & x \geq \ell \end{cases} \quad \text{Ec. 2.10}$$

en donde h_0 y h_ℓ son constantes y se cumple además que $h'(0) = h'(\ell) = 0$. Bajo estas suposiciones, definimos el valor de H de la ec. (2.4) como $H = h_0$.

Aplicando un procedimiento análogo al que se sigue para obtener la ecuación de pendiente suave, supongamos que la estructura “vertical” (recordemos que ζ no es precisamente vertical) del movimiento se conoce de antemano y esta dada por la ecuación

$$f(\zeta, \xi) = \cosh(\alpha k(\zeta + h_0)), \quad \text{Ec. 2.11}$$

de tal suerte que podamos recuperar la ec. (2.8) cuando la profundidad no varía. Esta función f depende de ζ , sin embargo depende también de forma indirecta de ξ a través de α y k . Escribimos ahora el potencial de velocidad ϕ en términos de f como

$$\phi(\xi, \zeta) = f(\zeta, \xi) \cdot \varphi(\xi), \quad \text{Ec. 2.12}$$

en donde φ corresponde a la variación horizontal del potencial.

Ahora, dado que la dependencia de ζ es conocida, podemos eliminarla del problema integrando con respecto de esta variable. Así, integrando el producto de la ec. (2.7a) con la función f , obtenemos

$$\int_{-h_0}^0 \left[(\alpha \phi_\xi)_\xi + \left(\frac{1}{\alpha} \phi_\zeta \right)_\zeta \right] f d\zeta = 0. \quad \text{Ec. 2.13}$$

Por último, sustituyendo el potencial (2.12) en (2.13) y evaluando las integrales usando las condiciones de frontera (2.7b) y (2.7c), después de un poco de álgebra llegamos a la ecuación

$$(u(\xi) \cdot \phi_\xi)_\xi + v(\xi) \cdot \phi = 0, \quad \text{Ec. 2.14}$$

en donde las funciones $u(\xi)$ y $v(\xi)$ se definen como

$$u(\xi) = \int_{-h_0}^0 \alpha f^2 d\zeta \quad y \quad v(\xi) = \int_{-h_0}^0 \left[f \cdot (\alpha f_\xi)_\xi - \frac{1}{\alpha} f_\zeta^2 \right] d\zeta + f_0^2 \left(\frac{\omega^2}{g} + i \frac{\omega W}{g} \right).$$

En el caso en el que $h \approx 0$, es decir, una pendiente muy poco inclinada, tenemos que $\xi \approx x$, $\zeta \approx z$ y $\alpha \approx 1$; haciendo las sustituciones correspondientes obtenemos

$$u(x) = \int_{-h_0}^0 f^2 dz \quad y \quad v(x) = f_0^2 \left(\frac{\omega^2}{g} + i \frac{\omega W}{g} \right) - \int_{-h_0}^0 f_z^2 dz.$$

Después de evaluar las integrales resultantes y dividiendo todo entre f_0^2 , podemos escribir u y v como

$$u(x) = \frac{CC_g}{g} \quad y \quad v(x) = \frac{k^2 CC_g}{g} + \frac{i\omega W}{g},$$

en donde C se refiere a la velocidad de fase de la onda y C_g a la velocidad de grupo.

Finalmente, encontramos que la ec. (2.14) se reduce a

$$(CC_g \phi_x)_x + k^2 CC_g \phi = -i\omega W \phi,$$

la cual es la ecuación de pendiente suave con disipación de energía (Dingemans, 1997).

El problema que nos ocupará en adelante será el resolver la ecuación (2.14), con la relación de dispersión (2.9), las cuales reproducimos aquí en forma de resumen:

$$(u(\xi) \cdot \varphi_\xi)_\xi + v(\xi) \cdot \varphi = 0,$$

con

$$u(\xi) = \int_{-h_0}^0 \alpha f^2 d\zeta \quad y \quad v(\xi) = \int_{-h_0}^0 \left[f \cdot (\alpha f_\xi)_\xi - \frac{1}{\alpha} f_\zeta^2 \right] d\zeta + f_0^2 \left(\frac{\omega^2}{g} + i \frac{\omega}{g} W \right),$$

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(kh),$$

además

$$\alpha = \frac{h}{H} \xi_x \quad y \quad f(\zeta, \xi) = \cosh(\alpha k(\zeta + h_0)).$$

Con el fin de simplificar la solución de estas ecuaciones, apliquemos la transformada de Liouville a la ec. (2.14) para eliminar el término que contiene φ_ξ . El desarrollo se muestra en el apéndice II. Así, se obtiene

$$\zeta_{\xi\xi} + Q(\xi)^2 \zeta = 0, \tag{Ec. 2.15}$$

en donde $Q(\xi)^2 = \frac{v}{u} + \frac{1}{4} \left(\frac{u_\xi}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{u_{\xi\xi}}{u}$, y además

$$\zeta = \sqrt{u} \cdot \varphi. \tag{Ec. 2.16}$$

Queda entonces la cuestión de resolver la ec. (2.15) en la región $0 \leq \xi \leq \ell$; sin embargo, para encontrar una solución que sea única es necesario establecer las condiciones que deberán cumplirse en los puntos $\xi = 0$ y $\xi = \ell$.

El Apéndice III muestra como se obtienen las condiciones de frontera, resultando:

$$\begin{aligned} \zeta_{\xi}(0) + \left(ik_0 - \frac{u_{\xi}(0)}{2u(0)} \right) \zeta(0) &= 2ik_0 \sqrt{u(0)} A^- \\ \zeta_{\xi}(\ell) - \left(ik_{\ell} + \frac{u_{\xi}(\ell)}{2u(\ell)} \right) \zeta(\ell) &= -2ik_{\ell} \sqrt{u(\ell)} A^+ e^{-ik_{\ell}\ell} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.17}$$

en donde k_0 y k_{ℓ} son los números de onda que corresponden a las profundidades h_0 y h_{ℓ} en (2.10) respectivamente. Además, las amplitudes complejas A^{\pm} son conocidas y pertenecen a ondas incidentes que se propagan desde $\xi = \pm\infty$.

Por último, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que no hay onda incidente viajando desde $\xi = +\infty$, es decir, que $A^+ = 0$, tenemos

$$\zeta_{\xi\xi} + Q(\xi)^2 \zeta = 0, \quad \text{en } 0 \leq \xi \leq \ell$$

$$\text{con } Q(\xi)^2 = \frac{v}{u} + \frac{1}{4} \left(\frac{u_{\xi}}{u} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{u_{\xi\xi}}{u},$$

y con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \zeta_{\xi}(0) + \left(ik_0 - \frac{u_{\xi}(0)}{2u(0)} \right) \zeta(0) &= 2ik_0 \sqrt{u(0)} A^- \\ \zeta_{\xi}(\ell) - \left(ik_{\ell} + \frac{u_{\xi}(\ell)}{2u(\ell)} \right) \zeta(\ell) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, es posible calcular la elevación superficial η a partir del potencial de velocidad φ en $z=0$ como:

$$\eta = -\frac{2i\omega}{gA^-}, \quad \text{Ec. 2.18}$$

en donde ω es la frecuencia angular de la onda, g es la aceleración de la gravedad, i es el número imaginario y A^- es la amplitud de la onda incidente.

En la siguiente sección se describe como es resuelto numéricamente este problema.

2.2 Solución numérica

Dado que el problema planteado en la sección anterior no tiene, en general, solución analítica, es necesaria la utilización de métodos numéricos. Para lograr esto debemos sobreponer al espacio físico continuo un espacio computacional discreto en cuyos puntos se buscará la solución. Así, generamos una malla cuadriculada de m renglones y n columnas para las coordenadas ξ y ζ como en la figura 2.1.

Se mencionó anteriormente que no buscamos plantear un nuevo esquema de solución a la *EPS*; en cambio, tomando en cuenta que los casos a estudiar se restringen a espacios reducidos, simplemente optamos por implementar la solución numérica más sencilla: *Discretización por Diferencias Finitas (DDF)*. La implementación por *DDF*, permite además el fácil mantenimiento y actualización de los códigos, contrario a otros métodos como *Elementos Finitos*, en donde cada actualización requeriría la reescritura de todo el código.

Utilizamos la discretización por diferencias centradas de segundo grado, y con el fin de simplificar los cálculos, adoptaremos la siguiente notación: al evaluar una función f en el punto (ξ, ζ) la representaremos por f_{ij} , mientras que al evaluarla en $(\xi - \Delta\xi, \zeta)$ la representaremos por $f_{i-1,j}$, y así sucesivamente, como se muestra en la figura 2.2. ¡Cuidado! No se debe confundir esta notación con la notación de las derivadas parciales de la sección anterior.

En vista que la ecuación 2.15 depende sólo de la variable ξ , eliminamos el subíndice j de la notación anterior y la escribimos en forma discreta como:

$$\zeta_{i+1} + (\Delta\xi^2 Q - 1)\zeta_i + \zeta_{i-1} = 0, \quad \text{Ec. 2.19}$$

mientras que las condiciones de frontera lateral dadas en 2.17 quedan como:

$$\varsigma_{i+1} + 2\Delta\xi \left(ik_0 - \frac{u_\xi(0)}{2u(0)} \right) \varsigma_i - \varsigma_{i-1} = 2ik_0 \sqrt{u(0)} A^- \quad \text{Ec. 2.20}$$

$$\varsigma_{i+1} - 2\Delta\xi \left(ik_\ell + \frac{u_\xi(\ell)}{2u(\ell)} \right) \varsigma_i - \varsigma_{i-1} = 0. \quad \text{Ec. 2.21}$$

Para la evaluación en los nodos $i=1$ e $i=n$, combinamos las ecs. 2.19 y 2.20, y 2.19 y 2.21, respectivamente.

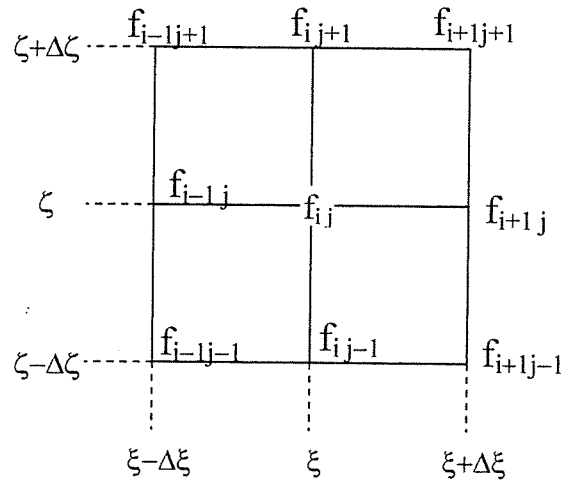


Figura 2.2. Notación dada a la función f evaluada en los puntos alrededor de (ξ, ζ) . El subíndice i se refiere al desplazamiento de la coordenada ξ , mientras que el subíndice j corresponde a ζ .

Esta discretización genera un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que puede ser escrito en forma matricial como:

$$Ax = b, \quad \text{Ec. 2.24}$$

en donde A es una matriz tridiagonal de $n \times n$, x es el vector columna con las n incógnitas ς_i y b es el vector columna de dimensión n cuyas entradas son todas cero excepto por la primera que incluye la onda incidente.

Salvo el primero y último, la matriz A está formada por renglones de la forma:

$$1 \quad (\Delta \xi^2 Q - 1) \quad 1;$$

ahora, dado que en Q el término dominante está relacionado con el número de onda (el resto se refiere a cambios del número de onda, velocidad de fase y velocidad de grupo), podemos aproximar a Q por k^2 . De esta forma, podemos ver que en general la matriz A no es diagonalmente dominante ($(\Delta \xi k)^2 - 1 \leq 2$), por lo que no es posible implementar un método iterativo simple para resolver el problema (Tveito, 2005). Sin embargo, como se ha resaltado antes, las matrices utilizadas hasta el momento son pequeñas (se trabajó con matrices de 100x100 cuando muy grandes), por lo que resulta fácil aplicar un método directo de solución. En este caso se recurrió a la herramienta provista en el programa MATLAB 6.5 la cual resuelve el sistema de ecuaciones $Ax=b$ por eliminación gaussiana mediante la instrucción $A \setminus b$.

Previo a la solución del problema, está por supuesto la evaluación de los coeficientes $u(\xi)$ y $v(\xi)$ definidos en la ecuación (2.14), los cuales se obtienen al integrar en la vertical la ecuación de movimiento. La integral se evalúa numéricamente utilizando una versión mejorada de la *Regla de Simpson* (Press, 1986) de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\int f d\xi = \left(\frac{5}{12} f_{i,1} + \frac{13}{12} f_{i,2} + f_{i,3} + f_{i,4} + \dots + f_{i,m-2} + \frac{13}{12} f_{i,m-1} + \frac{5}{12} f_{i,m} \right) \Delta \xi.$$

En el siguiente capítulo se muestran algunos ejemplos de la aplicación del presente modelo y se comparan con resultados obtenidos previamente por otros autores utilizando modelos distintos.

3. Resultados y Discusión

En este capítulo presentamos y discutimos una serie de resultados obtenidos con el modelo deducido en el capítulo anterior y los comparamos con resultados similares obtenidos por otros autores. Cabe señalar que, siguiendo el ejemplo de los trabajos que sirven como referencia del presente modelo, únicamente presentamos y comparamos resultados gráficos, y no numéricos.

Como se ha dicho, los modelos de pendiente suave son de gran utilidad por ser relativamente fáciles de implementar: basta resolver una sola ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Sin embargo, las aproximaciones tendientes a linealizar las ecuaciones introducen un factor de error muy grande al suponer la superficie de propagación como localmente plana. Esto genera que la solución obtenida no cumpla del todo la condición de frontera en el fondo, situación que se agrava a medida que la inclinación se hace mayor. Athanassoulis y Belibassakis (1999) propusieron una solución al problema incluyendo modos de oscilación no propagativos, de entre los que resalta lo que llamaron el *modo de la inclinación del fondo*. Este procedimiento sin embargo complica el problema pues ahora no sólo hay que resolver una ecuación sino un sistema de ellas (dependiendo del número de modos es el número de ecuaciones).

El modelo presentado en este trabajo resuelve el problema de la condición de frontera transformando el espacio físico de propagación en un espacio curvilíneo en donde el fondo variable se convierte en un fondo plano. De esta forma la condición de frontera del fondo pasa a ser una condición de Neumann simple, la cual puede ser satisfecha completamente por la solución. A diferencia del modelo de Athanassoulis y Belibassakis, la transformación del espacio resulta en una sola ecuación como en

los modelos de pendiente suave originales e incluso se reduce a la ecuación de Berkhoff (1972) en pendientes muy pequeñas. La única complicación que surge es la integración numérica para el cálculo de los coeficientes definidos en la ec. 2.14, sin embargo, esto es mucho más simple que resolver el sistema de ecuaciones que resulta en los modelos con modos de oscilación no propagativos.

No obstante la ventaja de tener que resolver una sola ecuación, un inconveniente surge de la forma en que se ha planteado la transformación. Dado que la transformación de coordenadas conlleva la solución de una ecuación diferencial por el método de *características*, es requisito que tanto la función que determina el fondo, $h(x)$, como su derivada sean continuas (Lynch, 2005). Esto imposibilita la aplicación del presente modelo a batimetrías con picos o escalones; además, el paso de profundidad constante a variable debe ser suave y progresivo, de lo contrario, el sistema transformado tendrá secciones que se traslapen.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar este modelo (al que en adelante nos referiremos como *MCC*: "*Modelo de pendiente suave en Coordenadas Curvilíneas*") en tres tipos de fondos distintos: fondo plano, disminución rápida de la profundidad y disminución rápida con ondulaciones. Los dos últimos casos fueron estudiados de manera extensiva por Athanassoulis y Belibassakis (1999), quienes además compararon los resultados obtenidos por su modelo (al que llamaron *Representación Mejorada: RM*) con aquellos obtenidos utilizando el modelo de Porter y Staziker (1995) (llamado *Ecuación de Pendiente Suave Extendida EPSE*) y el modelo de Chamberlain y Porter (1995) (*Ecuación de Pendiente Suave Modificada EPSM*).

3.1 Fondo Plano

El primer caso que se estudió fue simplemente para verificar la funcionalidad del MCC. Se consideró un fondo plano bajo las condiciones de *aguas profundas* y *aguas someras*, es decir, valores de profundidad h y longitud de onda λ tales que $h/\lambda > 0.5$ y $h/\lambda < 0.05$ respectivamente. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.1. Cabe resaltar que la elevación de superficie libre se calcula a partir del

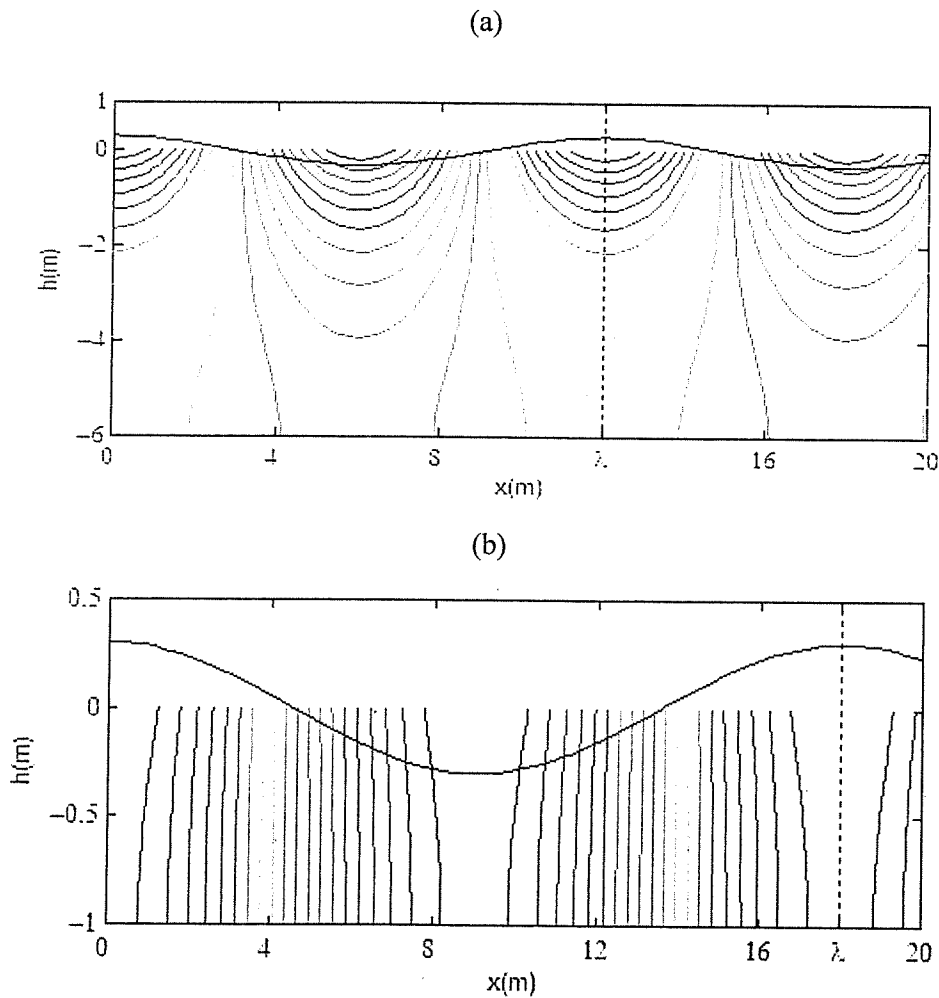


Figura 3.1. Las gráficas muestran los resultados arrojados por el MCC para un fondo plano. La línea oscura muestra la elevación de la superficie del agua mientras que los contornos corresponden al potencial de velocidad; la línea punteada muestra el valor de longitud de onda. (a) Caso de aguas profundas: $\lambda=12\text{m}$, $h=6\text{m}$, $h/\lambda=0.5$, con una frecuencia de 2.26/s. (b) Caso de aguas someras: $\lambda=18\text{m}$, $h=1\text{m}$, $h/\lambda=0.05$, con una frecuencia de 1.07/s. En ambos casos la amplitud de la onda incidente fue de 0.3m.

valor del potencial de velocidad en $z=0$ utilizando la ec. 2.21; por ésta razón los contornos de potencial pueden quedar por arriba o por debajo de dicha superficie.

Es claro que el modelo reproduce de forma satisfactoria la propagación de una onda tanto en agua profunda como en agua somera; la longitud de la onda que resulta del MCC corresponde a la que se espera conforme al cálculo en aguas profundas y someras, y la amplitud nunca excede la amplitud inicial. Es importante resaltar que en ambos casos las líneas equipotenciales son perpendiculares al fondo; esto quiere decir que la velocidad en el fondo es cero, cumpliendo así la condición de frontera.

Los resultados que se presentan aquí son idénticos a los que se pueden obtener con cualquier modelo de pendiente suave en un fondo horizontal (los resultados obtenidos con la *EPS* no se presentan aquí por ser idénticos a los que se muestran en la fig. 3.1).

3.2 Disminución Rápida de la Profundidad

La parte medular de este trabajo es el presentar una solución alternativa en situaciones en las que los modelos de pendiente suave fallen. Massel (1993) presentó uno de estos casos, en donde los modelos de pendiente suave tradicionales eran incapaces de cumplir la condición de frontera en el fondo. El estudio de Massel corresponde a un fondo dado por la siguiente ecuación:

$$h(x) \equiv h_p(x) = \begin{cases} h_1 = 6m, & x < a = 0 \\ \frac{1}{2}(h_1 + h_3) - \frac{1}{2}(h_1 - h_3) \tanh\left(3\pi\left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\right)\right), & a < x < b; \\ h_3 = 2m, & x > b = 20m \end{cases} \quad \text{Ec. 3.1}$$

la cual corresponde a una profundidad que permanece constante fuera del intervalo (a,b) , y que disminuye de manera abrupta dentro del intervalo, aunque la variación

de la pendiente sea gradual (es decir, se cumple que la derivada de la profundidad sea continua). La figura 3.2 muestra la gráfica de la función del fondo, lo mismo que la malla generada de acuerdo con las ecuaciones 2.4 y 2.6; la pendiente máxima del fondo es de 0.94, mientras que la pendiente promedio es 0.2. La malla curvilínea se ajusta perfectamente al fondo, a diferencia de una malla cartesiana, en la que el fondo tendría que aproximarse por medio de pequeños escalones.

Se simuló la propagación de una onda con frecuencia de $2s^{-1}$; esto es, una onda cuya razón h/λ varía desde 0.4 (cercano a aguas profundas) en la parte más profunda hasta 0.17 (cercano a aguas someras) en la menos profunda. La amplitud inicial de la onda fue de 1m (0.5m sobre el nivel medio).

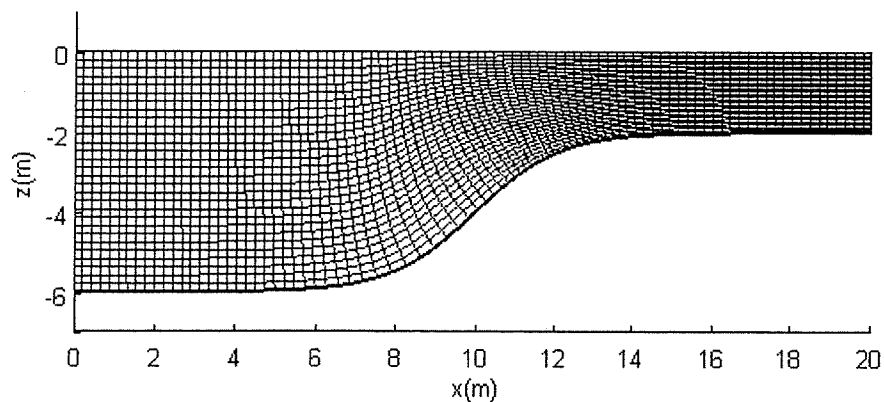


Figura 3.2. Gráfica de la función de fondo dada por la ecuación 3.1 (línea oscura) y malla utilizada par el cálculo del potencial de velocidad. Las líneas de la malla muestran sitios en los que las coordenadas ξ y ζ son constantes.

El comportamiento de la onda se puede observar en las figuras 3.3 y 3.4, en donde es posible comparar la diferencia entre un modelo convencional de pendiente suave en coordenadas cartesianas y el presente *MCC*.

Las diferencias entre el uso de coordenadas cartesianas y las coordenadas curvilíneas son claras; en tanto que ambos modelos son casi idénticos cerca de la

superficie, la semejanza se hace patente a profundidades cercanas al fondo en la región en la que la pendiente es mayor: el modelo *EPS* genera líneas equipotenciales que intersectan.

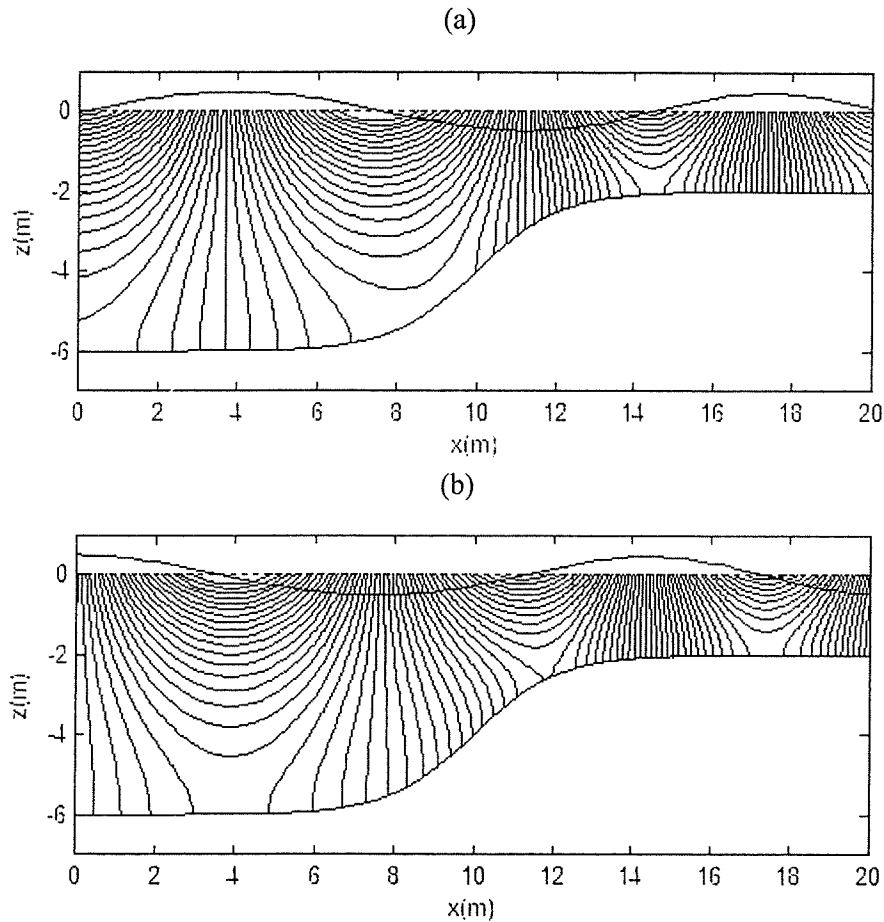


Figura 3.3. Líneas equipotenciales del campo de oleaje que se propaga sobre el fondo dado por la ec. 3.3; la línea superior corresponde a la elevación de la superficie. Ambas gráficas se obtuvieron por medio de la *EPS*. (a) Corresponde a la parte imaginaria del potencial de velocidad (b) Parte real del mismo potencial.

al fondo de manera vertical mientras que las líneas equipotenciales del *MCC* son perpendiculares al piso, cumpliendo así la condición de frontera dada en la ecuación 2.1b.

Athanassoulis y Belibassakis (1999) encontraron resultados similares al comparar su RM con versiones anteriores de modelos de pendiente suave. Tanto la

EPSM y la EPSE generan contornos de potencial que intersectan de forma vertical al fondo, lo cual, como ya se ha discutido, es síntoma de inconsistencia con la condición de frontera. La figura 3.5 se hizo bajo las mismas condiciones que la figura 4 en el

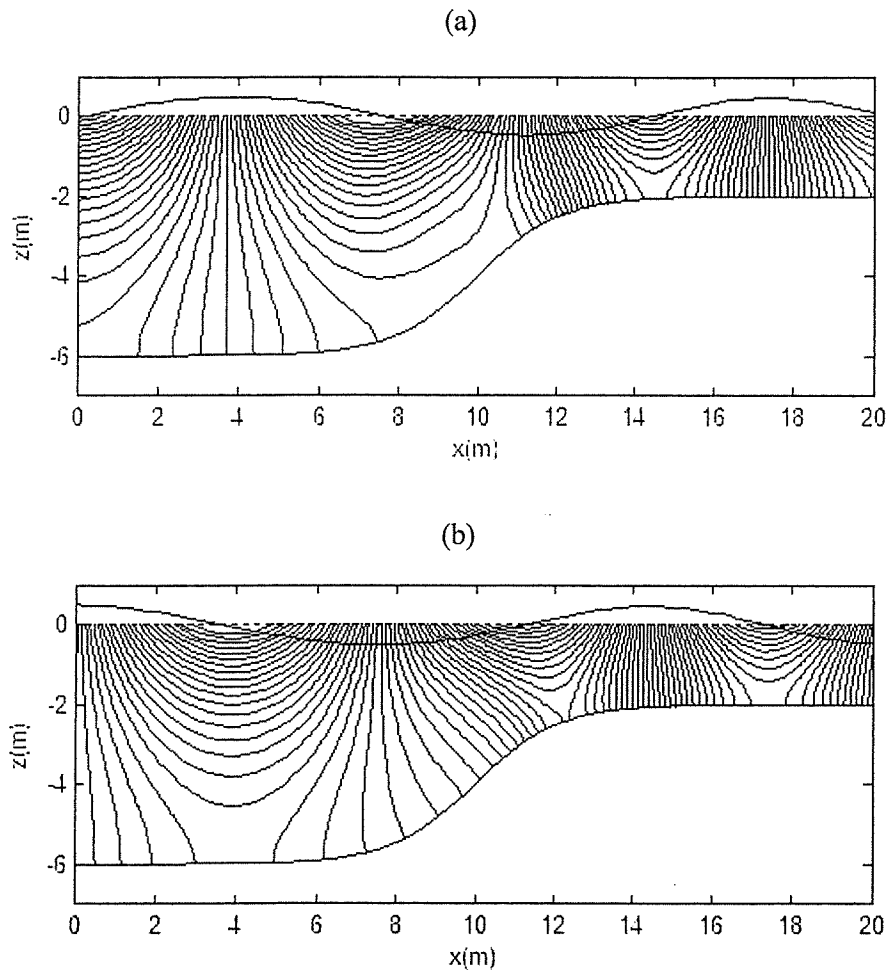


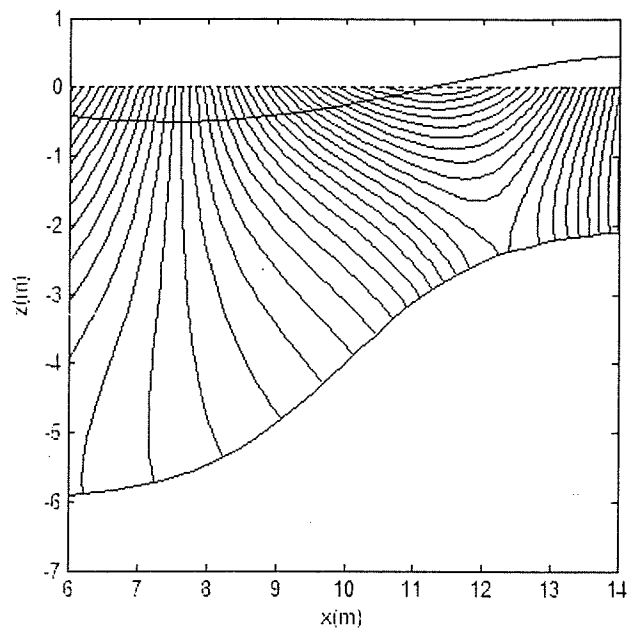
Figura 3.4. Similar a la figura 3.3, pero estas gráficas se obtuvieron utilizando el *MCC*.

trabajo de Athanassoulis y Belibassakis, la cual se incluye en el Apéndice IV a fin de comparar los modelos.

Los resultados obtenidos por el *RM* y el *MCC* son prácticamente idénticos: en ambos casos las líneas equipotenciales presentan un comportamiento análogo y lo

más importante, en ambos casos estas líneas son perpendiculares al fondo; de igual forma, la elevación de la onda en la superficie es la misma. Cabe resaltar el hecho de que es posible reproducir los resultados obtenidos por el *RM*, que para este caso

(a)



(b)

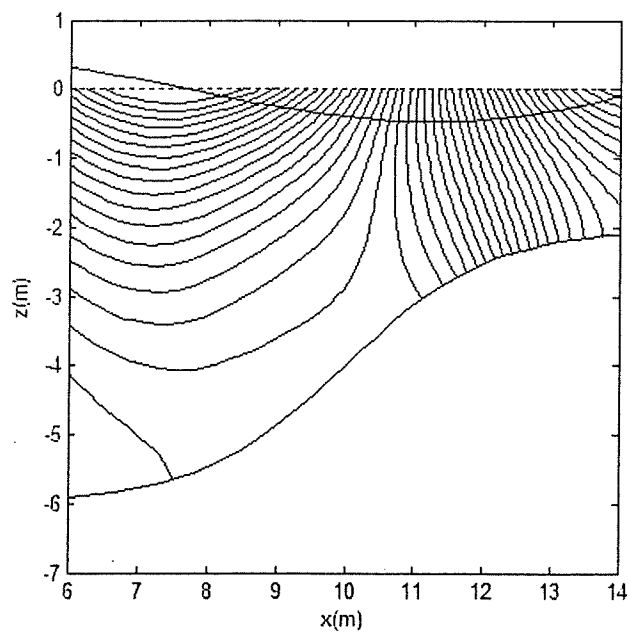


Figura 3.5. Similar a la figura 3.4, aquí se muestra únicamente el intervalo de 6 a 12m.

necesitó la inclusión de 6 modos de oscilación distintos, generando la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones 7 veces más grande que el sistema resuelto por el modelo *MCC*.

En promedio, se estima que para tener una buena resolución en los resultados numéricos, es necesario introducir entre 20 y 30 puntos por longitud de onda en la discretización (Athanasoulis and Belibassakis, 1999). Para resolver el presente problema generamos una matriz tridiagonal de 100x100, a diferencia de Athanasoulis y Belibassakis, quienes tuvieron que resolver un sistema de 700x700. Esta es una notable ventaja del *MCC* contra los modelos que incluyen modos no propagativos de oscilación; además no es necesario determinar la convergencia o no convergencia de la solución.

3.3 Disminución Rápida de la Profundidad con Ondulaciones

Este es otro de los casos de estudio presentados por Athanasoulis y Belibassakis (1999) con el fin de entender mejor el comportamiento del *RM*. Este ejemplo fue también retomado por Chamberlain y Porter (2006) en su *Aproximación Multi-Modal de una onda sobre fondo variable (AMM)*.

La función que representa el fondo es una variación del caso anterior, y está dado por la ecuación:

$$h(x) \equiv h_p(x) + h_s(x) = h_p(x) - 0.67 \exp(-0.05(x - 12.5)^2) \cos(x - 12.5)m, \quad \text{Ec. 3.2}$$

en donde h_p corresponde a la disminución rápida de profundidad dada por la ec. 3.1 y h_s a la una ondulación suave alrededor de los 12.5m y que termina con un fondo horizontal. Cabe resaltar el hecho de que la ecuación que aparece en el trabajo de

Athanassoulis y Belibassakis (ecuación 6.3) tiene un error de signo, el cual ha sido corregido en este trabajo.

- En la figura 3.6 se puede ver la forma que toma esta nueva batimetría, así como la malla utilizada en esta ocasión. En este caso la función tiene una inclinación mayor que el ejemplo anterior, alcanzando una pendiente máxima de 1.2 cerca de $x = 11\text{m}$.

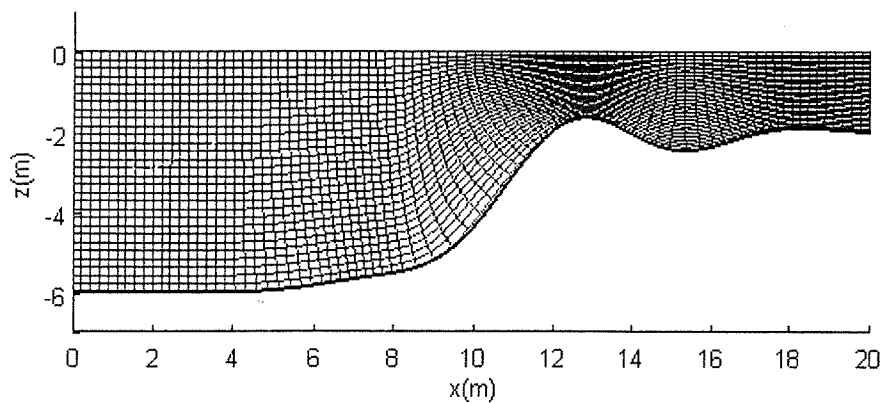


Figura 3.6. Gráfica del fondo generado por la ecuación 3.2. Esta es la malla generada para el cálculo del potencial de velocidad como en la figura 3.2. Esta malla tiene 90 puntos horizontales y 30 verticales.

Los resultados en coordenadas cartesianas y curvilíneas se presentan en las figuras 3.7 y 3.8.

De nueva cuenta se observan resultados similares en los puntos alejados de la zona en donde la pendiente es pronunciada; por el contrario, en la vecindad de la ondulación, se observa gran diferencia en los contornos equipotenciales. En coordenadas cartesianas (fig. 3.7) sobresale a la vista que las velocidades no satisfacen la condición de frontera del fondo; la velocidad vertical en este caso es cero, no así la velocidad perpendicular a la superficie. La implementación de las

coordenadas curvilíneas nuevamente corrige el error y genera velocidades que cumplen la condición de frontera.

Ahora bien, comparemos los resultados en la figura 3.8 con los resultados presentados en la figura 7 de Athanassoulis y Belibassakis (la cual incluimos en el Apéndice IV) y la figura 4 de Chamberlain y Porter. Salvo diferencias en cuanto al número de contornos, los contornos equipotenciales son iguales. Esto quiere decir que el *MCC* es capaz de reproducir los resultados de los otros dos modelos, claro esta, a un costo menor.

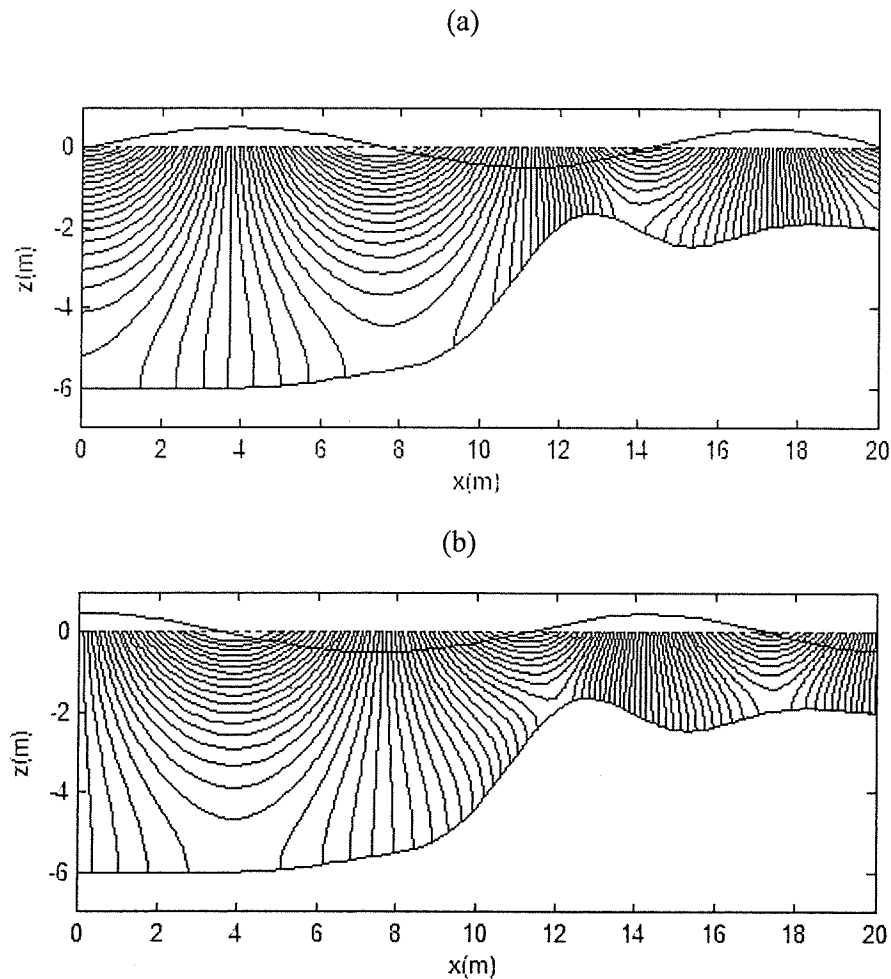


Figura 3.7. Potencial de velocidad y elevación de la superficie en coordenadas cartesianas, similar a la figura 3.3 pero para el fondo dado por la ecuación 3.2.

Como se ha dicho anteriormente, el RM supone la existencia de modos de oscilación no propagativos que afectan el comportamiento de la onda al desplazarse sobre un fondo variable. Matemáticamente hablando, cada uno de estos modos introducen una nueva ecuación que es necesario resolver, lo mismo que nuevos parámetros a calcular (como el número de onda por ejemplo). Además, es necesario establecer la

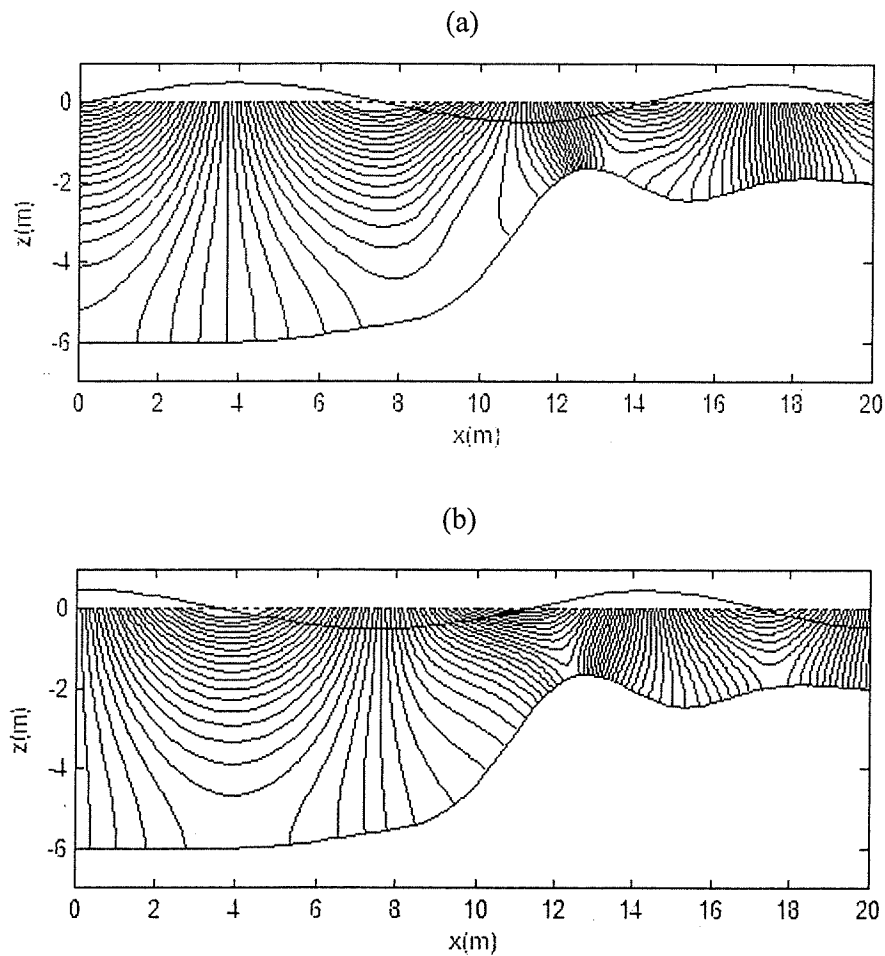


Figura 3.8. Potencial de velocidad y elevación de la superficie en coordenadas curvilíneas, similar a la figura 3.4 pero para el fondo dado por la ecuación 3.2.

convergencia de la solución y determinar el número de modos necesarios para cada problema; en el caso estudiado en esta sección, utilizaron 6 modos de oscilación, es

decir, generaron un sistema de siete ecuaciones, y por consiguiente, una matriz siete veces más grande que la utilizada en este trabajo.

En el caso de la *AMM*, Chamberlain y Porter mostraron que pueden obtener el mismo resultado que el *RM* con sólo un modo no propagativo y el modo de inclinación del fondo de Athanassoulis y Belibassakis, es decir, tienen que resolver un sistema de tres ecuaciones (casi la mitad de tamaño que el *RM*). Esta simplificación, aunque importante, requiere la solución de un sistema tres veces mayor al de nuestro *MCC*. Además, la simplificación de la *AMM* viene de una transformación del potencial de velocidad, para la cual es necesario el cálculo de las entradas de la matriz de transformación; este trabajo es similar al que se necesita hacer para la transformación de coordenadas en el *MCC*.

Podemos decir entonces que la transformación a coordenadas curvilíneas sustituye de manera efectiva la inclusión de modos de oscilación no propagativos (incluido el modo de la inclinación del fondo), retomando así la simplicidad de los primeros modelos de pendiente suave. Sin embargo, no debemos dejar de tener en cuenta la restricción de este *MCC* respecto a la continuidad de la derivada del fondo. Esta limitación impide que el modelo sea aplicado de forma directa en un entorno real, en donde muy seguramente existirán picos o escalones entre otras superficies irregulares. Aún así creemos que el *MCC* sigue siendo una herramienta muy útil en el estudio de la evolución de oleaje en zona costera.

4. Conclusión

En el presente trabajo se estudió la propagación de oleaje cercano a la zona costera, en donde las variaciones del fondo se traducen en efectos de refracción, difracción y reflexión. En este sentido, se propuso un modelo de propagación que pertenece al tipo de los llamados modelos de *pendiente suave*. Estos modelos en su forma más simple, resultan sencillos y prácticos, sin embargo, dada la naturaleza de las aproximaciones hechas en su derivación, son muy poco precisos en cuanto al cálculo de velocidades cercanas al fondo. A últimas fechas, autores como Athanassoulis y Belibassakis (1999) y Chamberlain y Porter (2006) han propuesto una solución al problema de las velocidades en el fondo al modificar los modelos que incluyen varios modos evanescentes ((Massel, 1993) y (Porter and Staziker, 1995)) incluyendo un modo de oscilación relativo a la inclinación del fondo. Sin embargo, estos modelos multimodales implican la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, perdiéndose así la simplicidad de los modelos de pendiente suave originales.

En este trabajo, siguiendo la idea de Biggs y Chamberlain (2006), se propuso una solución alternativa al problema de las velocidades: una transformación en coordenadas curvilíneas ortogonales del espacio físico de propagación a un espacio computacional en el que el fondo permanezca constante. Al tener un fondo siempre horizontal, la aproximación de pendiente suave que supone la superficie de propagación como localmente plana se satisface a cabalidad. Además, esta transformación nos permite reproducir la evolución de la onda en base a una sola ecuación, recobrando la sencillez original.

Se mostró que la ecuación derivada se reduce a la ecuación de pendiente suave de Berkhoff (1972) en casos en los que la pendiente es pequeña. Además, se revisaron casos estudiados de forma extensiva por Athanassoulis y Belibassakis, y Chamberlain y Porter; se comprobó que es posible reproducir de forma casi idéntica los resultados generados por los modelos con modos evanescentes a partir de la solución de sistemas de ecuaciones entre 3 y 6 veces más pequeños. Esto sin duda hace más eficiente la implementación y solución en cuanto al tiempo de cómputo y los requerimientos de memoria.

Uno de los puntos débiles del modelo es sin duda la restricción con respecto a la derivada de la función del fondo. Dado que en el proceso de la transformación de coordenadas se requiere resolver una ecuación diferencial por el método de características, es necesario que la derivada del fondo sea continua. Esto impide que el modelo se pueda aplicar sobre batimetrías irregulares, como son cambios abruptos de profundidad, picos o escalones, a diferencia, por ejemplo, del modelo de Chamberlain y Porter, en donde esta restricción no se toma en cuenta. Sin embargo, esta dificultad se puede salvar aproximando el contorno en el piso por una función con derivadas continuas.

Esta es una primera versión de un trabajo que encierra la idea de mejorarse en el futuro. Es deseable expandir el modelo para variaciones del fondo no sólo en una sino en dos dimensiones. Además, se buscará explorar a detalle la naturaleza de términos disipativos que puedan ser incluidos en el modelo, como fricción con el fondo y ruptura de la ola, ya que de momento todos los cálculos se realizaron sin tomar en cuenta pérdidas de energía.

5. Bibliografía

- Athanassoulis, G. A. and K. A. Belibassakis (1999). *A consistent couple-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions*. Journal of fluid mechanics **389**: 275-301.
- Berkhoff, J. C. W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proceedings of the 13th Coastal Engineering Conference, Vancouver, Canada.
- Biggs, N. R. T. and P. G. Chamberlain (2006). An approximation to two-dimensional wave scattering by topography using orthogonal curvilinear coordinates. 21st International workshop on water waves and floating bodies, University of Loughborough.
- Booij, N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current, Technical University of Delft: 130.
- Booij, N. (1983). *A note on the accuracy of the mild-slope equation*. Coastal Engineering **7**: 191-203.
- Chamberlain, P. G. (1993). *Wave scattering over uneven depth using the mild-slope equation*. Wave motion **17**: 267-285.
- Chamberlain, P. G. and D. Porter (1995). *The modified mild-slope equation*. Journal of fluid mechanics **291**: 393-407.
- Chamberlain, P. G. and D. Porter (2006). *Multi-mode approximations to wave scattering by an uneven bed*. Journal of fluid mechanics **556**: 421-441.
- Chandrasekera, C. N. and K. F. Cheung (2001). *Linear refraction-diffraction model for steep bathymetry*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **127**(3): 161-170.
- Chidlow, S. (2005). Approximation to linear wave scattering by topography using an integral approach. Department of Mathematics. Reading, University of Reading.
- Copeland, G. J. M. (1985). *A practical alternative to the "Mild-Slope" wave equation*. Coastal Engineering **9**: 125-149.
- Dalrymple, R. A. (1988). *Model for refraction of water waves*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **114**(4): 423-435.

- Davies, A. G. and A. D. Heathershaw (1984). *Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography*. Journal of fluid mechanics **144**: 419-443.
- Dingemans, M. W. (1997). Water wave propagation over uneven bottoms: Part 1- Lilinear wave propagation. Singapore, World Scientific.
- Ebersole, B. A. (1985). *Refraction-diffraction model for linear water waves*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **111**(6): 939-953.
- Kim, J. W. and K. J. Bai (2004). *A new complementary mild-slope equation*. Journal of fluid mechanics **511**: 25-40.
- Kirby, J. T. (1983). Propagation of weakly nonlinear surface water waves in regions with varying depth and current. Newark, University of Delaware: 327.
- Kirby, J. T. (1984). *A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography*. Journal of geophysical research **89**(C1): 745-747.
- Kirby, J. T. (1986). *A general wave equation for waves over rippled beds*. Journal of fluid mechanics **162**: 171-186.
- Kirby, J. T. (1986). *Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves*. Journal of geophysical research **91**(C1): 933-952.
- Kirby, J. T. (2003). Boussinesq models and applications to nearshore wave propagation, surfzone processes and wave-induced currents. Advances in Coastal Modeling, V. C. Lakhan, Elsevier: 1-41.
- Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple (1983). *A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography*. Journal of fluid mechanics **136**: 453-466.
- Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple (1994). Combined refraction diffraction model. Documentation and user's manual. Newark, Center for applied coastal research, University of Delaware: 171.
- Kirby, J. T., G. W. Wei, et al. (1998). FUNWAVE 1.0. Fully nonlinear Boussinesq wave model. Documentation and user's manual. Newark, Center of Applied Coastal Research, University of Delaware: 54.
- Li, B. and K. Anastasiou (1992). *Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique*. Coastal Engineering **16**(3): 245-266.
- Li, R. and H. Wang (1999). *A modified for of mild-slope equation with weakly nonlinear effect*. China Ocean Engineering **13**(3): 327-333.

- Lozano, C. and R. E. Meyer (1976). *Leakage and response of wave trapped by round islands*. Physics of fluids **19**: 1075-1088.
- Lynch, D. R. (2005). Numerical partial differential equations for environmental scientists and engineers. Dartmouth, New Hampshire, Springer.
- Maa, J. P.-Y., T.-W. Hsu, et al. (1998). RDE Model: A program for simulating water wave transformation for harbor planning. Tainan, Taiwan, Hydraulics and Ocean Engineering Dept.: 44.
- Maa, J. P.-Y., T.-W. Hsu, et al. (2002). *The RIDE model: an enhanced computer program for wave transformation*. Ocean Engineering **29**: 1441-1458.
- Maa, J. P.-Y., M.-H. Maa, et al. (1997). Using the Gaussian elimination method for large banded matrix equations. Gloucester Point, VA, Virginia institute of marine science, College of William and Mary: 19.
- Massel, S. R. (1993). *Extended refraction-diffraction equation for surface waves*. Coastal Engineering **19**: 97-126.
- Oliveira, F. S. B. F. and K. Anastasiou (1998). *An efficient computational model for water wave propagation in coastal regions*. Applied Ocean Research **20**: 263-271.
- Peregrine, D. H. (1967). *Long waves on a beach*. Journal of fluid mechanics **27**(4): 815-827.
- Porter, D. and D. J. Staziker (1995). *Extensions of the mild-slope equation*. Journal of fluid mechanics **300**: 367-382.
- Porter, R. and D. Porter (2006). *Approximations to the scattering of water waves by steep topography*. Journal of fluid mechanics **Under consideration**.
- Radder, A. C. (1979). *On the parabolic equation method for water-wave propagation*. Journal of fluid mechanics **95**(1): 159-176.
- Shi, F., R. A. Dalrymple, et al. (2001). *A fully nonlinear Boussinesq model in generalized curvilinear coordinates*. Coastal Engineering **42**: 337-358.
- Shi, F. and J. T. Kirby (2005). *Curvilinear parabolic approximation for surface wave transformation with wave-current interaction*. Journal of computational physics **204**: 562-586.

- Shi, F., J. T. Kirby, et al. (2003). *Wave simulations in Ponce de Leon inlet using Boussinesq Model*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **129**(3): 124-135.
- Silva, R. (2004). Manual del usuario y documento de referencia del programa WAPO2D. México, Universidad Nacional Autónoma de México: 57.
- Smith, R. and T. Sprinks (1975). *Scattering of surface waves by a conical island*. Journal of fluid mechanics **72**(2): 373-384.
- Tveito, A. and R. Winther (2005). Introduction to partial differential equations. Heidelberg, Alemania, Springer.
- Wei, G. W. and J. T. Kirby (1995). *Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations*. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **121**(5): 251-261.
- Zhang, H., L. Zhu, et al. (2005). *A numerical model for wave propagation in curvilinear coordinates*. Coastal Engineering **52**: 513-533.

Apéndice I. Derivación del perfil vertical del potencial de velocidad

En regiones de profundidad constante, $h=cte$, tenemos que los ejes x y ξ coinciden; además tenemos que $\alpha = \frac{h}{H}$ es constante. Podemos entonces resolver el sistema de ecuaciones (2.7) por separación de variables; suponiendo que $\phi = \Xi(\xi) \cdot Z(\zeta)$ y sustituyendo ϕ en (2.7a) obtenemos

$$\frac{1}{\Xi} \frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} = -\frac{1}{\alpha^2 Z} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}.$$

Como el lado izquierdo de esta ecuación es función sólo de ξ y el lado derecho es función sólo de ζ , igualamos ambos lados a la constante $-k^2$. Tenemos entonces el par de ecuaciones

$$\Xi_{\xi\xi} + k^2 \Xi = 0 \quad y \quad Z_{\zeta\zeta} - \alpha^2 k^2 Z = 0,$$

cuyas soluciones generales son

$$\begin{aligned} \Xi(\xi) &= Ae^{ik\xi} + Be^{-ik\xi} & y \\ Z(\zeta) &= Ce^{\alpha k\zeta} + De^{-\alpha k\zeta}. \end{aligned}$$

Resta sustituir estas funciones en las condiciones de frontera. De la ec. (2.7b) obtenemos

$$Ce^{-\alpha kH} = De^{\alpha kH} \equiv \frac{1}{2} \tilde{C},$$

en donde \tilde{C} es una constante. Después de reemplazar el valor de C y D en la ecuación para Z , encontramos

$$Z(\zeta) = \tilde{C} \cdot \cosh(\alpha k(\zeta + H)).$$

Por último llegamos a que el potencial de velocidad ϕ adquiere la forma:

$$\phi(\xi, \zeta) = (Ae^{ik\xi} + Be^{-ik\xi}) \cosh(\alpha k(\zeta + H)),$$

en donde la constante \tilde{C} fue incluida en el valor de A y B .

Apéndice II. Transformada de Liouville

Escribamos la ec. (2.14) como:

$$\varphi_{\xi\xi} + p(\xi)\varphi_{\xi} + q(\xi)\varphi = 0, \quad \text{Ec. AII.1}$$

$$\text{con } p(\xi) = \frac{u_{\xi}}{u} \quad \text{y} \quad q(\xi) = \frac{v}{u}.$$

Definamos una nueva función ζ que cumpla $\varphi = \zeta \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \int^{\xi} p(\eta) d\eta\right]$.

Sustituyendo en la ec. (AII.1) obtenemos

$$\zeta_{\xi\xi} + Q(\xi)^2 \zeta = 0,$$

$$\text{en donde } Q(\xi)^2 = \frac{v}{u} + \frac{1}{4} \left(\frac{u_{\xi}}{u}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{u_{\xi\xi}}{u}.$$

Ahora, al evaluar la integral que aparece en la definición de ζ , encontramos que

$$\int^{\xi} p(\eta) d\eta = \text{Ln}(u);$$

por lo tanto, tenemos que

$$\zeta = \sqrt{u} \cdot \varphi.$$

Apéndice III. Condiciones de frontera

Supongamos que la solución para los segmentos de profundidad constante definidos en (2.10) se compone por la superposición lineal de dos ondas. De acuerdo con la ec. (2.8) tenemos que

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} A^- e^{ik_0\xi} + B^- e^{-ik_0\xi}, & \text{en } \xi \leq 0 \\ A^+ e^{-ik_\ell\xi} + B^+ e^{ik_\ell\xi}, & \text{en } \xi \geq \ell \end{cases}, \quad \text{Ec. AIII.1}$$

en donde k_0 y k_ℓ son los números de onda que corresponden a las profundidades h_0 y h_ℓ en (2.10) respectivamente. Además, las amplitudes complejas A^\pm son conocidas y pertenecen a ondas incidentes que se propagan desde $\xi = \pm\infty$ respectivamente; por el contrario, las amplitudes complejas B^\pm son desconocidas y corresponden a ondas salientes que se propagan hacia $\xi = \pm\infty$ respectivamente.

En términos de la nueva función ζ definida por la ec. (2.16), la ecuación (AIII.1) puede escribirse como

$$\zeta(\xi) = \begin{cases} (A^- e^{ik_0\xi} + B^- e^{-ik_0\xi}) \sqrt{u(0)}, & \text{en } \xi \leq 0 \\ (A^+ e^{-ik_\ell\xi} + B^+ e^{ik_\ell\xi}) \sqrt{u(\ell)}, & \text{en } \xi \geq \ell \end{cases}. \quad \text{Ec. AIII.2}$$

Para definir las condiciones de frontera, recordemos que φ representa la variación en ξ del potencial de velocidad, por lo que φ y φ_ξ deben ser continuas en $\xi = 0$ y $\xi = \ell$. Ahora, se debe cumplir que u sea continua aunque su primera derivada no lo sea. Podemos expresar estas condiciones de continuidad para φ_ξ como

$$\varphi_\xi(-0) = \varphi_\xi(+0) \quad \text{y} \quad \varphi_\xi(-\ell) = \varphi_\xi(+\ell),$$

que en términos de ζ quedan como

$$\zeta_{\xi}(-0) = \zeta_{\xi}(+0) - \frac{1}{2} \frac{u_{\xi}(+0) \cdot \zeta(0)}{u(0)}$$

$$\zeta_{\xi}(+l) = \zeta_{\xi}(-l) - \frac{1}{2} \frac{u_{\xi}(-l) \cdot \zeta(l)}{u(l)} .$$

Sustituyendo (AIII.2) en las dos ecuaciones anteriores obtenemos las condiciones de frontera

$$\zeta_{\xi}(0) + \left(ik_0 - \frac{u_{\xi}(0)}{2u(0)} \right) \zeta(0) = 2ik_0 \sqrt{u(0)} A^-$$

$$\zeta_{\xi}(l) - \left(ik_l + \frac{u_{\xi}(l)}{2u(l)} \right) \zeta(l) = -2ik_l \sqrt{u(l)} A^+ e^{-ik_l l} .$$

Apéndice IV. Gráficas de otros textos

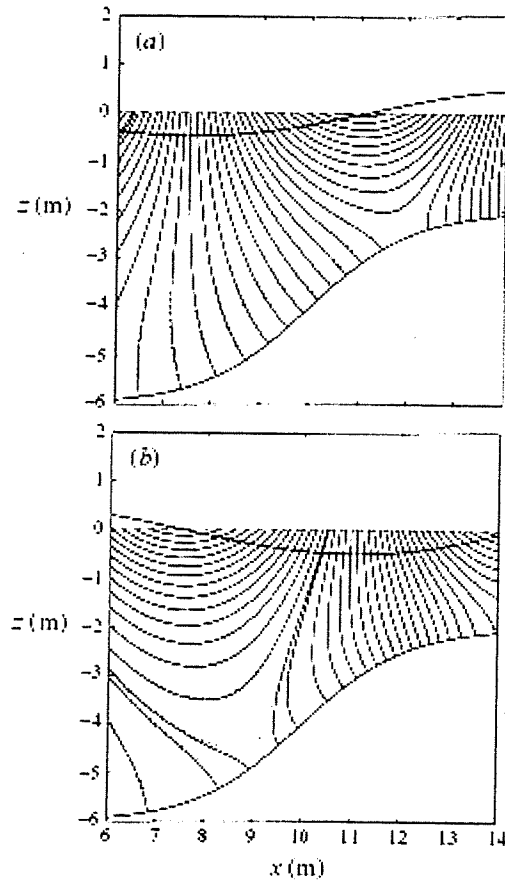


Figura AIV.1 (Figura 4 en Athanassoulis y Belibassakis (1999)). Líneas equipotenciales del campo de oleaje y elevación de la superficie libre en una región de batimetría variable, obtenido con —, el modelo ER y - - -, el modelo SR, respectivamente. La profundidad está dada por la ecuación (3.1). La frecuencia angular de la onda incidente es $\omega = 2 \text{ rad s}^{-1}$ y su altura $H = 1 \text{ m}$. (a) Parte real del potencial de onda $\Phi(x; z) = -0.5(igH/\omega)\varphi(x, z)$ y la elevación de la superficie libre $\eta(x) = 0.5H\varphi(x, z = 0)$. (b) Parte imaginaria del potencial de onda y elevación de la superficie libre.

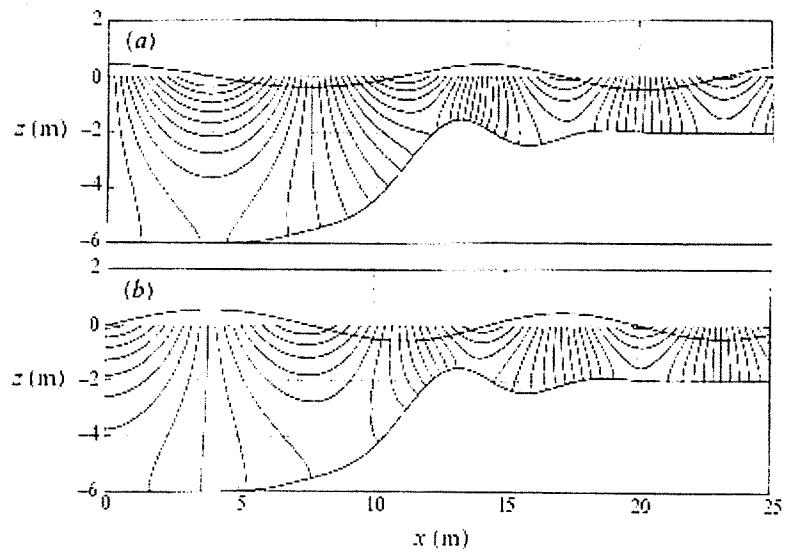


Figura AIV.2 (Figura 7 en Athanassoulis y Belibassakis (1999)). Similar a la figura AIV.2, pero para el fondo dado por la ecuación (3.2).