

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO**  
*Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería*



**APLICACIÓN DE ANÁLISIS DINÁMICO A DIFERENTES  
CONFIGURACIONES EN PROTOTIPO DIDÁCTICO DE LABORATORIO**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

**ROSA LILIA PEREZ ARCE**

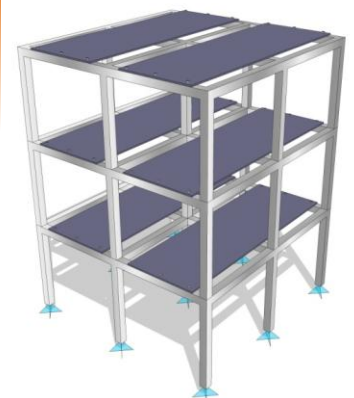
DIRECTOR DE TESIS:

**M.I. JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ**

SINODALES:

**M.C. MIGUEL MARIO JUAREZ VILLARREAL**

**M.C. ALBERTO PARRA MEZA**



*Ensenada, Baja California, Febrero 2011*

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERIA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

UNIDAD ENSENADA

## Aplicación de análisis dinámico a diferentes configuraciones en prototipo didáctico de laboratorio

### TESIS

Que para obtener el grado de maestría en ingeniería presenta:

**Rosa Lilia Pérez Arce**

Aprobada por:

**M.I. Joel Melchor Ojeda Ruíz**

Director de tesis

**M.C. Miguel M. Juárez Villarreal**

Miembro del comité

**M.C. Alberto Parra Meza**

Miembro del comité

Ensenada Baja California, México. Febrero 2011

# Contenido

<b>RESUMEN</b>	<b>III</b>
<b>DEDICATORIA</b>	<b>IV</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>V</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>VII</b>
<b><u>1 INTRODUCCIÓN</u></b>	<b><u>1</u></b>
<b>1.1 ANTECEDENTES</b>	<b>5</b>
<b>1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>9</b>
<b>1.3 JUSTIFICACIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1.4 OBJETIVOS</b>	<b>12</b>
<b><u>2 MARCO TEÓRICO</u></b>	<b><u>13</u></b>
<b>2.1 MODELOS ESTRUCTURALES</b>	<b>15</b>
2.1.1 MODELO ELÁSTICO	17
2.1.2 MODELO INDIRECTO	19
2.1.3 MODELO DIRECTO	19
2.1.4 MODELOS DE RESISTENCIA	19
2.1.5 MODELOS DINÁMICOS	20
<b>2.2 MODELO DIDÁCTICO</b>	<b>20</b>
<b>2.3 PROCESO DE MODELADO</b>	<b>21</b>
<b>2.4 CONFIGURACIÓN ESTRUCTURAL</b>	<b>22</b>
2.4.1 IRREGULARIDAD EN PLANTA	26
2.4.2 PISO DÉBIL	30
2.4.3 PISO FLEXIBLE EN NIVELES INTERMEDIOS	31
<b>2.5 FUNDAMENTOS DE DINAMICA ESTRUCTURAL</b>	<b>33</b>
2.5.1 GRADOS DE LIBERTAD	33
2.5.2 SISTEMAS SIN AMORTIGUACIÓN	34
2.5.3 EDIFICIO SIMPLE	37

2.5.4	FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS NORMALES	41
2.5.5	PERIODO DE VIBRACIÓN	43
2.5.6	REDUCCIÓN DE MATRICES	44
<b>2.6</b>	<b>MARCOS PLANOS</b>	<b>47</b>
2.6.1	MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS LOCALES	49
2.6.2	TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS	51
<b>2.7</b>	<b>MARCOS TRIDIMENSIONALES</b>	<b>53</b>
2.7.1	ANÁLISIS PSEUDO TRIDIMENSIONAL	54
2.7.2	MATRIZ DE MASA DE UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL	59
<b>3</b>	<b><u>METODOLOGÍA Y ANÁLISIS</u></b>	<b>60</b>
<b>3.1</b>	<b>GENERALIDADES DEL PROTOTIPO</b>	<b>61</b>
3.1.1	PROPIEDADES DEL MATERIAL	62
3.1.2	DISTRIBUCION DE MASA	63
<b>3.2</b>	<b>METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS</b>	<b>64</b>
<b>3.3</b>	<b>PISO DÉBIL</b>	<b>66</b>
<b>3.4</b>	<b>ENTREPISOS FLEXIBLES</b>	<b>73</b>
<b>3.5</b>	<b>IRREGULARIDAD EN PLANTA</b>	<b>78</b>
<b>4</b>	<b><u>RESULTADOS</u></b>	<b>88</b>
<b>4.1</b>	<b>RESULTADOS PISO DÉBIL</b>	<b>88</b>
<b>4.2</b>	<b>RESULTADOS ENTREPISOS FLEXIBLES</b>	<b>89</b>
<b>4.3</b>	<b>RESULTADOS IRREGULARIDAD EN PLANTA</b>	<b>90</b>
<b>5</b>	<b><u>CONCLUSIONES</u></b>	<b>92</b>
<b>6</b>	<b><u>GUÍA DE PRÁCTICAS</u></b>	<b>94</b>
<b>6.1</b>	<b>ESTRUCTURA DE LA PRÁCTICA DE LABORATORIO</b>	<b>94</b>
<b>6.2</b>	<b>PRÁCTICA 1</b>	<b>96</b>
<b>6.3</b>	<b>PRÁCTICA 2</b>	<b>99</b>
<b>6.4</b>	<b>PRÁCTICA 3</b>	<b>101</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>103</b>
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>124</b>

# Resumen

No es extraño ni ajeno a esta ciudad de Ensenada sentir algún sismo, tampoco lo es la importancia que tiene el análisis sísmico como parte primordial del cálculo de una estructura y es por esto que la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) se preocupa de que los estudiantes de Ingeniería Civil cuenten con conocimientos de dinámica estructural. Como parte de la enseñanza de este campo se encuentra el trabajar con modelos de laboratorio que representen el comportamiento de las estructuras bajo el efecto de un sismo.

En esta tesis se presenta la metodología para calcular las propiedades dinámicas de un prototipo estructural de laboratorio (en proyecto), considerando tres configuraciones diferentes al arreglo base, piso débil, entrepisos flexibles e irregularidad en planta; de tal forma que, al observar el comportamiento dinámico de este prototipo, se utilice como herramienta para los estudiantes de la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD).

La propuesta del prototipo base consta de una estructura de aluminio con tres niveles y tres marcos interconectados. Se usan dos metodologías distintas para el cálculo de las propiedades dinámicas: El método por marcos planos y el método pseudo tridimensional. Este último contiene parámetros distintos al método de marcos planos por contener el grado de libertad de rotación en planta. Como resultado se presentan ambos cálculos dinámicos, el ejemplo de prácticas de laboratorio con las metodologías usadas y se deja como aportación un programa elaborado con interfaz gráfica que calcula los parámetros dinámicos para cada configuración, permitiendo modificar los parámetros de entrada, para comparar los resultados..

# Dedicatoria

*Este trabajo de tesis lo dedico a la luz de mi vida que es Dios y al amor de mi vida, Joel. Así también a mi familia, amigos y a quienes hicieron posible la realización de este trabajo...*

# Agradecimientos

**A Dios.** Por todas las bendiciones que he recibido y en especial por darme ese rayito de luz cuando lo necesite.

**A mí muy amado esposo Joel.** Gracias puyu por todo tu amor, paciencia, motivación y en especial por tu ayuda en este trabajo, que también es tuyo, Te amo.

**A mí familia.** Mami, Papi y hermanos porque fueron la base para que llegara a ser quien soy y por el apoyo moral que me dieron durante este proceso.

**A mí director de tesis.** Ing. Ojeda, muchísimas gracias por su apoyo moral y técnico. Por su tiempo y dedicación en los momentos donde no entendía nada, pero sobre todo gracias por la amistad y confianza que siempre mostro conmigo.

**A mis sinodales.** Ing. Miguel Mario e Ing. Parra, les agradezco la ayuda brindada en la realización de este trabajo, su paciencia y amistad.

**A mis Amigos.** Mayra, Lupita, Linda, Ernesto, Damián, Elías, Alberto, Pedro, Alfredo, Serafín gracias a todos por ayudarme en todo lo que necesite, por su compañía y su valiosa amistad.

**A mis Maestros.** A todos mis maestros de la Universidad y a quienes me impartieron las materias en la Maestría, M.I Ricardo Sánchez y Dr. Fortunato Espinoza, gracias por sus conocimientos brindados y su amistad.

A la **Universidad Autónoma de Baja California** y al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por todas las facilidades y apoyos recibidos durante la realización de este trabajo.

# Lista de Tablas

<b>Tabla</b>	<b>Página</b>
Tabla 1. Propiedades del Aluminio grado 6000.....	63
Tabla 2. Comparación de resultados por el método analítico y SAP2000.....	71
Tabla 3. Desplazamientos modales de la configuración Piso débil .....	72
Tabla 4. Comparación de resultados por el método analítico y SAP2000.....	76
Tabla 5. Desplazamientos modales de la configuración Piso débil .....	76
Tabla 6. Coordenadas del centro de masas en los tres niveles .....	79
Tabla 7. Coordenadas de los sistemas resistentes .....	79
Tabla 8. Datos geométricos de transformación .....	79
Tabla 9. Parámetros dinámicos de irregularidad en planta .....	85
Tabla 10. Formas modales de irregularidad en planta .....	86
Tabla 11. Comparación de parámetros dinámicos de piso débil y configuración base .....	89
Tabla 12. Comparación de parámetros dinámicos de entresijos flexibles y configuración base.....	90
Tabla 13. Comparación de parámetros dinámicos entre el método analítico y Sap2000 de la configuración de irregularidad en planta .....	91

# Lista de Figuras

Figura	Página
Figura 1. Prototipo .....	6
Figura 2. (A) Modelo reducido en metacrilato de la Sala de Lectura de la Universidad de Basilea.....	7
Figura 3. (A) Modelo reducido de la cubierta de la Casa de la Opera de Sídney, Australia. (B) Casa de la Opera de Sídney, Australia.....	8
Figura 4. Configuración irregularidad en planta .....	9
Figura 5. Configuración piso débil .....	9
Figura 6. Configuración de entresijos flexibles.....	10
Figura 7. Modelo de elementos finitos de la parte central de la catedral metropolitana de la ciudad de México .....	13
Figura 8. Proyecto de ensayo en laboratorio de un modelo a escala .....	17
Figura 9. Configuración Estructural .....	24
Figura 10. Formas sencillas y complejas en planta y elevación.....	25
Figura 11. Simetría en Planta .....	27
Figura 12. Configuraciones típicas en planta de edificios prismáticos.....	27
Figura 13. Torsión .....	29
Figura 14. Una discontinuidad de rigidez produce una zona de debilidad .....	30
Figura 15. Edificio con piso flexible intermedio.....	32
Figura 16. Diagrama de oscilador simple.....	34
Figura 17. Desplazamientos relativos .....	36
Figura 18. Modelo de un marco representando a un edificio simple .....	38
Figura 19. Marco plano de dos niveles .....	48
Figura 20. Grados de libertad de una barra.....	50
Figura 21. Especificación de los desplazamientos en una barra .....	50

Figura 22. Segmento de viga de un marco tridimensional, que muestra las fuerzas y desplazamientos en las coordenadas nodales.....	53
Figura 23. Edificio de dos niveles con los 3 grados de libertad por piso. ....	55
Figura 24. Relación entre los desplazamientos en planta del piso rígido $i$ y del marco plano $j$ en dicho piso. ....	56
Figura 25. Perspectiva de Prototipo base.....	61
Figura 26. Sección transversal.....	62
Figura 27. Prototipo con placas de acero.....	63
Figura 28. Diagrama de flujo para la determinación de las propiedades dinámicas.....	64
Figura 29. (A) Marco lateral y (B) Marco Central de la configuración piso débil.....	67
Figura 30. Deformación de piso débil.....	69
Figura 31. Configuración del primer modo.....	72
Figura 32. Configuración del segundo modo.....	73
Figura 33. Configuración del tercer modo.....	73
Figura 34. (A) Marco lateral y (B) Marco Central de la configuración entrepiso flexible.....	74
Figura 35. Deformación de entrepiso flexible.....	74
Figura 36. Configuración del primer modo.....	77
Figura 37. Configuración del segundo modo.....	77
Figura 38. Configuración del tercer modo.....	77
Figura 39. Marcos resistentes en irregularidad en planta.....	78
Figura 40. (A) Marco $1X=3Y$ y (B) Marco Central $2x=2Y$ de la configuración irregularidad en planta.....	80
Figura 41. Formas modales en planta del primer modo.....	87
Figura 42. Formas modales en planta del segundo modo.....	87
Figura 43. Formas modales en planta del tercer modo.....	87

# 1

## Introducción

*“Aplicación de análisis dinámico a diferentes configuraciones en prototipo didáctico de laboratorio”*

Desde que la humanidad se adaptó al sedentarismo este ha estado caracterizado por las construcciones, que proveen refugio y seguridad al ser humano. Desde entonces dichas construcciones han sido defendidas contra toda clase de enemigos, desde los naturales hasta los invasores humanos. Sin embargo, ni el hombre ni sus construcciones, han estado a salvo del más grande enemigo de las estructuras, los terremotos. Los sismos al ser fenómenos naturales siempre han estado presentes, y a lo largo del tiempo el ser humano, ha buscado entender su comportamiento y tratar de minimizar sus efectos. Una de las primeras explicaciones que se le daba era de carácter mítico y se asociaba al castigo o ira divina. En la historia se pueden ver sucesos de pérdidas de construcciones importantes por terremotos, como el caso del Coloso de Rodas en el año 223 a.C.

En América hay registros de sismos que provocaron gran destrucción; entre los más grandes se encuentra el sismo de Lima del 28 de octubre de 1746. En México, en

1985, un gran terremoto sacudió la capital dejando más de 6 500 muertes y grandes daños en la región oeste de México.<sup>1</sup>

La región de Baja California no es relegada por estos fenómenos naturales, al contrario, debido a que el proceso de separación de la península respecto del macizo continental está activo; lo que da origen al sistema de fallas conocidas como San Andrés-Golfo de California. Se sabe que la península de Baja California es parte de la Placa del Pacífico mientras que el resto del país (México) está ubicado en la Placa de Norteamérica. Diversos estudios han demostrado que el movimiento relativo entre estas dos placas es de aproximadamente 6 centímetros por año.<sup>2</sup>

Por lo anterior es de suma importancia el cálculo estructural de edificios considerando efectos sísmicos en nuestra región. El efecto que causan los sismos en las estructuras depende principalmente de las características dinámicas tanto de la estructura como del movimiento mismo. En si el problema es complejo ya que las características del movimiento son variables de un temblor a otro y durante un mismo temblor, agregándole a eso el tipo de terreno donde están desplantadas las estructuras.

Todo el cálculo antisísmico que se proponga, siempre será el resultado de una aproximación. Los edificios no se construyen como máquinas de precisión, con materiales homogéneos y de fórmulas lo suficientemente simples, para poder determinarlo con exactitud.

---

<sup>1</sup> Suarez, G. y Z. Jiménez, *Sismos en la Ciudad de México y el terremoto de septiembre de 1985*, Cuadernos del Instituto de Geofísica, No. 3, 1986.

<sup>2</sup> CICESE (2010), *Preguntas frecuentes y capsulas informativas* [Pagina web]. <http://sismologia.cicese.mx/resnom>

A causa de las incertidumbres, indeterminaciones y complejidades que se presentan por todo ello, en el cálculo de la mayoría de las construcciones antisísmicas, José Creixell (1993) llegó a la conclusión de que el diseño de las mismas *“es más bien un arte que una ciencia. Sin embargo, el arte de la construcción, de manera imprescindible, tiene que fundarse sólidamente en los postulados y las verificaciones de la técnica, el cálculo y la experimentación.”*<sup>3</sup>

Esta tesis presenta la forma de recurrir a la experimentación estructural para saber su comportamiento dinámico, por medio de un prototipo de laboratorio a escala, todo esto para complementar el material didáctico de las materias de Estructuras en la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD), con el propósito de ampliar y facilitar el concepto de ingeniería estructural. Los resultados del comportamiento del prototipo se logran modificando la forma base por medio de tres configuraciones elegidas para este trabajo.

El presente capítulo describe un breve resumen de trabajos previos, así como la importancia del aprendizaje por medio de la experimentación. También se ve el planteamiento del problema que se pretende resolver y los objetivos generales y específicos a los que se desea llegar.

El capítulo 2 muestra la teoría existente relacionada con los conceptos básicos de la dinámica estructural, así también la importancia de la experimentación por medio de

---

<sup>3</sup> José Creixell, *Construcciones antisísmicas y resistentes al viento*, Ed.Limusa, 3ra. Edición, México D.F. 1993.

modelos didácticos a escala y la descripción del comportamiento que se espera de las configuraciones calculadas.

La metodología y análisis usado en esta tesis se presenta en el capítulo 3. Se describen las generalidades del prototipo en propiedades geométricas así como del material empleado. También se incluye el cálculo de las propiedades dinámicas usando marcos planos para obtener 3 grados de libertad, desplazamientos laterales por cada nivel de la estructura. Se presenta además el método Pseudo tridimensional utilizado para la configuración de irregularidad en planta, da como resultado 9 grados de libertad, tres grados de libertad por cada nivel.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos derivados del estudio previo y se hace la comparación de estos.

Una parte importante de esta tesis esta presentada en el capítulo 5, esta es la propuesta de prácticas de laboratorio, estas con la finalidad del uso didáctico por parte de los estudiantes del FIAD.

Por último el capítulo 6 muestra las conclusiones y aportaciones que se obtuvieron de este trabajo.

## 1.1 ANTECEDENTES

*En estos últimos años se han tenido cambios en la forma de enseñar y de aprender, esto ha originado que las personas tengan más opciones para el aprendizaje y también en la enseñanza.*<sup>4</sup>

La experimentación consiste en poner a la persona en contacto con un fenómeno (conocido o parcialmente conocido) que lo motive y lo incite a reproducirlo, con el fin de conocerlo mejor, dominarlo y utilizarlo. Esta es una técnica que requiere la participación del interesado en aprender y que también le permite verificar los conocimientos adquiridos.

En trabajos previos se había tomado en cuenta la importancia de que la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD) tuviera un laboratorio mejor equipado para la aplicación de los conocimientos vistos en las aulas. El objetivo particular es el de reforzar el material para la carrera de ingeniería civil, contando con un prototipo para el análisis dinámico de diferentes configuraciones en una estructura<sup>5</sup>, este prototipo es un modelo a escala de estructura geométrica regular a base de marcos, con tres niveles, en ambos sentidos con dos claros de 0.7m y una altura de entrepiso de 0.6 m (Figura 1).

Por muchos años los modelos han sido utilizados en ingeniería civil como un complemento y una alternativa de análisis. Los modelos estructurales y las estructuras a

---

<sup>4</sup> Bazán-Rodríguez (2004) *Modelos educativos basados en nuevas tecnologías*. UNLP. España

<sup>5</sup> Sánchez, Heidy (2007) *Diseño de prototipo y propuesta de mesa vibratoria para el estudio de configuraciones estructurales*, Tesis de Maestría, UABC, B.C. México.

escala reducida, llamados también réplicas, siempre han jugado un papel muy importante en la enseñanza de la ingeniería estructural, investigación y diseño.

El objetivo del estudio dinámico de una estructura es predecir el comportamiento y seguridad que tendrá ésta al presentarse una excitación como un sismo. Una de muchas aplicaciones que esta tiene en ingeniería es saber el daño estructural que tuvo una estructura ante un sismo, se revisa la estructura antes y después del evento y se compara la respuesta en base a datos importantes como frecuencias y periodos de vibración. Es por esto importante el estudio de estructuras mediante la dinámica estructural, sin embargo esta a veces resulta un tanto difícil ya que se basa en modelos matemáticos complejos, y que una explicación experimental resultaría de mucha ayuda en el aprendizaje del alumno.

El hecho de hacer el modelo físicamente y comprobar lo predicho, no excluye que se tenga que corroborar los resultados analíticamente, y para hacer más segura la respuesta, comprobarlo por medio de programas computacionales que garanticen la fiabilidad de la respuesta obtenida es lo ideal. Hoy en día la tecnología avanza a pasos colosales y es por eso que se tiene la posibilidad de comparar resultados por medio de programas estructurales que a su vez utilizan procedimientos como elementos finitos, métodos matriciales, entre otros, sin embargo *“En nuestra época no sería razonable*

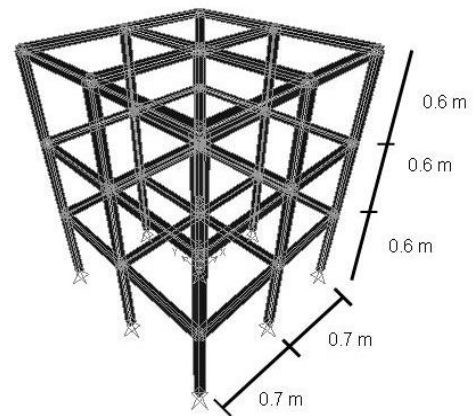


Figura 1. Prototipo

*desaprovechar las enormes posibilidades que nos brinda la ciencia y la tecnología, sólo que hay que conocer sus límites y darles su justo valor. Se ha comparado la computación con el becerro de oro. Lo malo no fue construirlo sino adorarlo.”<sup>6</sup>*

Como prueba de lo interesante y útil que resulta incluir prototipos para la experimentación y principalmente hablando de Ingeniería civil, se pueden observar a continuación ejemplos de su aplicación.

Heinz Hossdorf (1925-2006) Utilizó modelos reducidos (Figura 2) para comprobar el comportamiento resistente de sus propias concepciones, así también utilizó materiales como el microhormigón en su laboratorio de ensayos sobre modelos físicos.



(A)



(B)

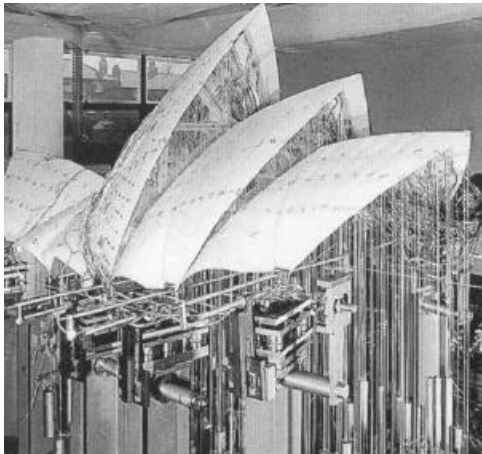
Figura 2. (A) Modelo reducido en metacrilato de la Sala de Lectura de la Universidad de Basilea.  
(B) Sala de lectura de la Universidad de Basilea, Suiza.

Así como el Ingeniero Heinz Hossdorf tuvo como estrategia estructural para la arquitectura contemporánea, el uso de modelos reducidos, también hubo otros que como

---

<sup>6</sup> Moisset de Espanés (1992) *Intuición y razonamiento en el diseño estructural*, Ed. Escala, Bogotá, Colombia.

parte de proyectos importantes optaron también utilizar estas técnicas. Uno de los edificios más importantes de Sídney, Australia, es la Casa de la Ópera (Figura 3), proyecto del arquitecto Jørn Utzon, el cual contaba con cubiertas de cascaron y parte que fue delegada al Ingeniero Peter Rice.



(A)



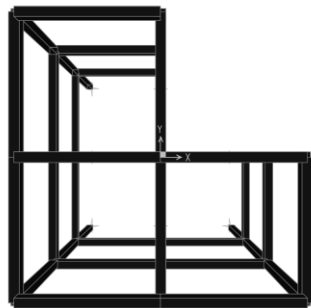
(B)

Figura 3. (A) Modelo reducido de la cubierta de la Casa de la Opera de Sídney, Australia. (B) Casa de la Opera de Sídney, Australia

## 1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta tesis se pretende exponer la respuesta que va a tener el prototipo ante diferentes configuraciones estructurales, teniendo en cuenta que ya se tiene un modelo base (Figura 1), las configuraciones que se calcularán serán las siguientes:

- ✓ *Irregularidad en planta.*- Esta configuración se lograra modificando el prototipo en su base, provocando que la estructura presente torsión.



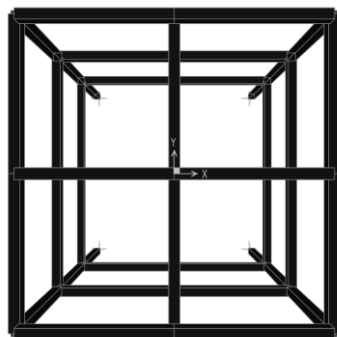
Planta



Isométrico

Figura 4. Configuración irregularidad en planta

- ✓ *Piso débil.*-En esta configuración se quitaran columnas intermedias de la base.



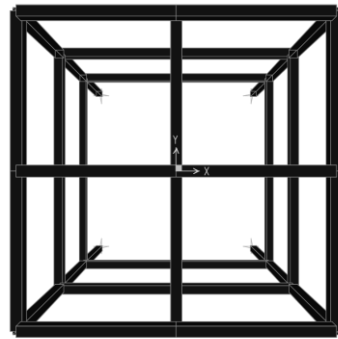
Planta



Isométrico

Figura 5. Configuración piso débil

- ✓ *Entrepisos flexibles.*-En esta configuración se quitaran columnas intermedias en los entrepisos.



**Planta**



**Isométrico**

Figura 6. Configuración de entrepisos flexibles

Los resultados comprobarán la respuesta de las configuraciones antes mencionadas, por el método analítico que se describen en el capítulo 2 y el uso del programa de diseño estructural SAP2000, permitiendo así a los estudiantes tener una noción completa del análisis y su comportamiento real.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN

Según la teoría constructivista del aprendizaje, los estudiantes son el eje y los protagonistas del proceso y el maestro es solo un guía que orienta, motiva y retroalimenta al alumno, por lo que es de suma importancia que la universidad cuente con herramientas propias del aprendizaje activo.<sup>7</sup>

El realizar esta investigación es para que generaciones futuras que ingresen a la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD) cuenten con la posibilidad de aprender experimentando en el laboratorio, que será el caso de la experimentación por medio del prototipo antes mencionado, ya que se implementarán diferentes prácticas de laboratorio para usarlo.

El conocimiento de conceptos a veces tan complicados teóricamente se verá reconocido más fácilmente con el modelo de laboratorio, de tal forma que será complementado lo que se ve en clase con lo que el prototipo podrá aportar como instrumento de aprendizaje.

---

<sup>7</sup> Ruiz, Daniel et al (2006), *Herramientas de aprendizaje activo en las asignaturas de ingeniería estructural*, Bogotá Colombia.

## 1.4 OBJETIVOS

El objetivo principal del presente trabajo es fomentar el aprendizaje activo de los estudiantes de los cursos de ingeniería civil.

Y como objetivos particulares, a continuación se enlistan los más importantes:

- ✓ Identificación del procedimiento de análisis para cada caso de configuración estructural.
- ✓ Obtención de los parámetros de vibración por medio de métodos analíticos y de SAP en las diferentes configuraciones del modelo, los cuales serán útiles para las prácticas de laboratorio.
- ✓ Comparación entre los métodos analíticos y el programa SAP de la respuesta dinámica del prototipo.
- ✓ Adecuación en las prácticas propuestas considerando los resultados de las configuraciones.

# 2

## Marco teórico

Una valiosa ayuda para el proceso de diseño puede obtenerse a través de la experimentación: se trata de estudiar los fenómenos, ahora no a través de modelos analíticos de la estructura, sino a través de modelos físicos de la misma. Esto puede llevarse a muy diversos niveles. En ocasiones resulta muy útil para entender un aspecto parcial de cómo responde una estructura ante determinado tipo de carga, hacer un modelo simple de ella, a base de palitos de madera o de las piezas de un mecano por ejemplo, y aplicarle empujes con las manos. No se trata de obtener determinaciones cuantitativas de la respuesta, sino de lograr una representación física de la manera en que se deforma la estructura. Esto resulta para algunas mentes menos dadas al razonamiento abstracto más convincente y confiable que los resultados de un modelo similar resuelto analíticamente.<sup>8</sup>

Una forma mucho más refinada de proceder es a través del ensayo de un

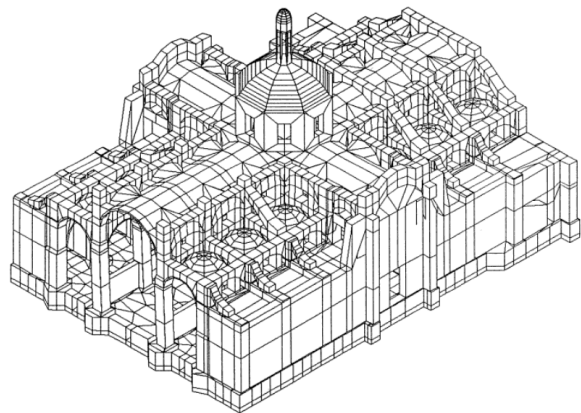


Figura 7. Modelo de elementos finitos de la parte central de la catedral metropolitana de la ciudad de México

---

<sup>8</sup> Meli, R. (2002). *Diseño estructural*. México, Ed. Limusa

modelo a escala de la estructura, o de parte de ella, En este caso las dimensiones, las propiedades de los materiales y las cargas en el modelo se determinan siguiendo requisitos estrictos fijados por relaciones deducidas de una teoría llamada análisis dimensional. De esta manera, la respuesta del modelo ante determinado sistema de carga, medida en términos de desplazamientos o deformaciones, se puede relacionar con la de la estructura real y sacar de ello conclusiones acerca de la bondad del diseño. Nuevamente, este método tiene la ventaja de permitir una observación objetiva y física del fenómeno. Sin embargo, la necesidad de emplear reducciones muy grandes a escala del modelo con respecto a la estructura real lleva, por los requisitos del análisis dimensional, al empleo de materiales que tienen propiedades mecánicas radicalmente distintas en el modelo con respecto al prototipo, por lo cual difícilmente puede representarse el comportamiento de la estructura más allá de un intervalo inicial lineal. Esto, junto con la dificultad de reproducir fielmente la estructura en sus mínimos detalles que puedan influir significativamente en la respuesta estructural, hace que difícilmente puedan obtenerse en modelos físicos resultados más confiables de lo que se obtienen por medio de modelos analíticos.

Actualmente están disponibles sistemas de cómputo que permiten generar una gran variedad de modelos estructurales y analizar su respuesta ante una gran variedad de condiciones de carga. Estos sistemas permiten visualizar en forma grafica los modelos y generar de manera automática muchas de las propiedades geométricas y mecánicas requeridas para el análisis. También cuentan con utilerías de resultados que generan representaciones graficas de las configuraciones de deformaciones y de esfuerzos, o aun

de las formas de vibrar de las estructuras sujetas a efectos dinámicos. La mayoría de estos sistemas de cómputo están basados en la técnica de elementos finitos; la complejidad de los problemas y el número de ecuaciones simultáneas que estos sistemas pueden resolver son asombrosos.

En esta tesis la importancia que se le da al prototipo como modelo experimental es en el aspecto educativo, complementando así los resultados del modelo físico con los obtenidos por medio de métodos analíticos y los del programa de elementos finitos. En el presente capítulo se podrán observar los distintos tipos de modelos que hay para el uso en ingeniería y lo que este puede llegar a dar como resultado, además de resaltar la importancia de la configuración estructural para el comportamiento dinámico de una estructura.

## 2.1 MODELOS ESTRUCTURALES

Para iniciar este apartado es importante definir el concepto de modelo y prototipo.

Se llama **PROTOTIPO** a la estructura que se desea diseñar.



**MODELO** a la maqueta a escala con la que pretendemos encontrar los parámetros de diseño.

Un modelo se define como una representación física de una estructura o una porción de esta. Comúnmente el modelo se construye a una escala reducida. Esta definición evolucionó a partir del estudio “Análisis experimental para estructuras de

concreto”, realizado por el comité 444 del ACI, pero es aplicable a modelos de cualquier material.

Una segunda definición dada por Janney et al. (1970) es:

*“Un modelo estructural es cualquier elemento estructural o ensamble de elementos estructurales contruidos a escala reducida, los cuales serán probados y para los cuales se deben emplear las leyes de similitud para interpretar los resultados”*<sup>9</sup>

Ambas definiciones se pueden aplicar al realizar un gran número de estudios en modelos de prototipos como edificios, puentes, presas, torres, etc. En donde el tipo de carga puede incluir fuerza estática, sísmica, de viento, etc.

También se le considera modelo estructural a versiones a escala reducida, o incluso como componentes de las estructuras empleadas en la práctica.<sup>10</sup>

La base de los modelos reducidos es la teoría de la semejanza. La semejanza dinámica completa entre modelo y prototipo es imposible, es decir, cada fuerza presentada en el problema se reduce de una manera diferente (no en la misma proporción) de prototipo a modelo. Sin embargo, el modelo puede ser aun una buena representación del movimiento real si una fuerza es tan dominante sobre las demás que también pese a la diferente proporción en que se reducen, es dominante en el modelo.<sup>11</sup>

---

<sup>9</sup> Janney,J.,Breen,J. y Geymayer,H. (1970). *Use of models in structural engineering*. Detroit,, MI, USA: ACI SP-24, American Concrete Institute.

<sup>10</sup> Croll, J.G.A., Walker A.C.(1975) *Elementos de estabilidad estructural*. McMillan, Londres.

<sup>11</sup> Juan P. Martin (2003), *Ingeniería Fluvial*, Edición UPC.

En cuanto a la clasificación de estos modelos estructurales, hay una gran variedad de formas de tipificarlos, sin embargo una de las más importantes es según la función que desempeñe, según Harris, H. y Sabnis, G. (1999) el modelo recibe la siguiente clasificación:

### 2.1.1 Modelo Elástico

En este tipo de modelo existe una semejanza geométrica directa con el prototipo pero el material con el que se construye debe de ser elástico y homogéneo, donde no es necesario que sea el mismo al del prototipo.

El estudio experimental de problemas estructurales a través de ensayos sobre modelos elásticos a escala, construidos a partir de los

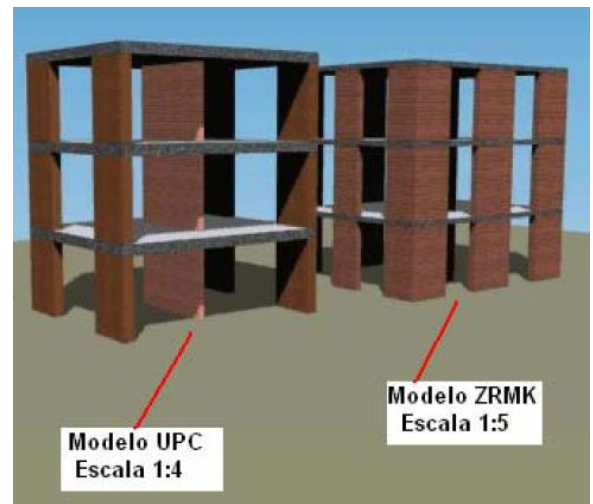


Figura 8. Proyecto de ensayo en laboratorio de un modelo a escala

criterios de semejanza, tiene como ventaja principal el menor costo frente a los ensayos de prototipos. Una gran cantidad de estudios sobre modelos estructurales hechos con materiales plásticos se realizaron desde 1960 en adelante<sup>12</sup>.

Este modelo está restringido a simular el comportamiento del prototipo en el rango elástico y no se puede predecir con él los modos desarrollados en la estructura cuando ésta entra en el rango inelástico.

Este tipo de modelos tienen muchas aplicaciones, especialmente la demostración de comportamientos estructurales de manera didáctica. Para estos modelos regularmente

<sup>12</sup> Harris, H., Sabnis, G., White, R., Mirza, M. "Structural Modeling and Experimental Techniques". Prentice-Hall, Inc. 1983, p.65.

se utilizan materiales con módulos de elasticidad de valor bajo para de esta manera acentuar deformaciones y hacer visible dichos comportamientos.

Los modelos elásticos han sido utilizados extensamente para estudiar la respuesta de edificios de varios niveles, puentes, presas y otro tipo de estructuras sujetas a cargas estáticas, dinámicas y térmicas.

Los modelos elásticos de componentes estructurales como columnas, marcos, losas y cascarones han sido utilizados en estudios de estabilidad elástica. Muchas de estas aplicaciones ahora se pueden llevar a cabo utilizando programas de computación, usualmente esta solución es mas económica y eficiente. Sin embargo existen muchas situaciones estructurales donde el uso de modelos elásticos puede ser benéfico.

En el caso de modelos educacionales el uso de materiales elásticos es aun esencial. El gran énfasis que se le ha dado al laboratorio y a la demostración de conceptos estructurales en el currículo del ingeniero, requiere del modelado físico. La mayoría de estos modelos de aplicación pueden satisfacerse con materiales en el intervalo elástico lineal

El trabajo experimental puede ser llevado a cabo en prototipos escalados o en modelos que no siguen una escala; existen pocas dudas en la confiabilidad de las pruebas realizadas en prototipos con factor de escala de 1:2, a 1:3. Sin embargo en modelos más pequeños en el orden de 1:5 o menores los resultados obtenidos son vistos con escepticismo.

### **2.1.2 Modelo Indirecto**

Un modelo indirecto es una forma especial de modelo elástico que es utilizado para obtener diagramas de influencia para reacciones y esfuerzos internos resultantes como fuerzas cortantes, momentos flexionantes y fuerzas axiales. Las cargas aplicadas a los modelos indirectos no tienen correspondencia con las cargas actuantes en el prototipo.

En ocasiones un modelo indirecto no tiene semejanza física con el prototipo, por ejemplo: Un marco cuyo comportamiento es controlado por sus propiedades de rigidez ( $EI$ ), puede ser modelado con un modelo indirecto que reproduzca correctamente los valores relativos de rigidez, esto puede ser realizado sin llevar a cabo un escalamiento preciso de la sección transversal del elemento. (Una forma circular en el modelo puede representar una sección W en el prototipo).

### **2.1.3 Modelo Directo**

Un modelo directo es geoméricamente similar al prototipo en todos los aspectos y las cargas deben aplicarse de la misma manera que en el prototipo. Los esfuerzos y deformaciones en el modelo para cada condición de carga son representativos de cantidades similares en el prototipo para la correspondiente condición de carga.

### **2.1.4 Modelos de resistencia**

Este tipo de modelos son también llamados de resistencia última, modelos realistas o Replicas. Están hechos de materiales que son similares a los del prototipo, de tal manera

que el modelo pueda predecir el comportamiento del prototipo para todas las condiciones de carga hasta la falla.

### **2.1.5 Modelos dinámicos**

Estos modelos se utilizan para estudiar vibraciones o los efectos de las cargas dinámicas en las estructuras. Pueden ser probados en una mesa sísmica para estudiar los efectos de las cargas sísmicas o en un túnel de viento para estudiar los efectos aeroelásticos.

Una descripción más detallada merecen los modelos didácticos y de investigación ya que el objetivo de este trabajo de tesis es el de diseñar un modelo para fines didácticos, por lo que éstos se estudiarán en la sección 2.2.

## **2.2 MODELO DIDÁCTICO**

Los modelos didácticos se han usado desde hace mucho tiempo para transmitir a los estudiantes desde conceptos estructurales básicos hasta los más complejos.

El grado de sofisticación necesario en cada caso marca una gran diferencia. Los modelos didácticos deben ser construidos tan simples como sea posible para demostrar conceptos de estudio y las distorsiones en la similitud entre el modelo y el prototipo son permitidas. Los modelos de investigación deben ser realizados con mucha precisión, pues de estos pueden resultar teorías sobre ciertos comportamientos.

Los modelos de diseño pueden ser utilizados solo como instrumentos conceptuales para tener una mejor idea de cómo una estructura propuesta podría comportarse ante ciertas condiciones de carga. Para el propósito de este trabajo se estudiara solo aquellos modelos utilizados para demostrar comportamiento elástico lineal de las estructuras

Una de las primeras referencias hechas sobre modelos cargados, especialmente elaborados para demostraciones en clase, fue hecha por Rathbun, J (1924)<sup>13</sup>; el uso bloques de madera sostenidos por alambres para formar un arco, Godden, D. (1974)<sup>14</sup> reporto un extenso estudio de los modelos demostrativos para la enseñanza de la ingeniería estructural, cubriendo teoría elástica y teoría plástica.

En la universidad de Sydney, Australia se le ha dado un énfasis substancial a las técnicas experimentales con laboratorios apropiados (Cowan 1961)<sup>15</sup>.

Existen laboratorios en Estados Unidos que utilizan modelos elásticos para analizar estructuralmente sistemas indeterminados, algunos desde 1920.

Estos modelos se pueden encontrar en las instalaciones de algunas universidades como MIT, Princeton, Lehigh, Carnegie-Mellon, Cornell, Johns Hopkin, University of California Berkeley, Collage of the city of New York y Drexel entre otras.

## 2.3 PROCESO DE MODELADO

---

<sup>13</sup> Rathbun, J. (1924). *Analysis of the stresses in the ring of a concrete skew Arch-Transactions A.S.C.E.*

<sup>14</sup> Godden, D. (1974) *An investigation of the relationships between problem solving strategies, representation and memory.* The Quarterly Journal of Experimental Psychology, Volumen 26, USA.

<sup>15</sup> Cowan, H.J. y Dixon, J.(1924). *Building science laboratory manual.* University of Sidney publishing, Australia.

El éxito del estudio de modelos es aquella que se caracteriza por una cuidadosa planificación de las medidas muy diversas en el proceso de modelado físico.

Los pasos para elaborar un modelo típico son los siguientes:

- 1) Definir cuál es el alcance del problema, decidiendo que es lo que se necesita del modelo y que no se necesita.
- 2) Especificar requisitos de similitudes para la geometría, materiales, carga y la interpretación de los resultados.
- 3) Decidir el tamaño del modelo y el nivel requerido de precisión
- 4) Seleccionar los materiales del modelo
- 5) Planificar la fabricación
- 6) Seleccionar la instrumentación, equipo necesario para obtener esfuerzos, fuerzas, desplazamientos y otros parámetros.
- 7) Diseñar y preparar el equipo para cargar el modelo

## **2.4 CONFIGURACIÓN ESTRUCTURAL**

Muchos errores que ocasionan grandes daños o colapsos, se originan en las fallas de configuración. Sin embargo no se pretende sugerir que la configuración estructural es lo principal y que las técnicas de diseño y construcción de ingeniería son secundarias, sino que todo está relacionado para contribuir en la seguridad y eficiencia del edificio. A lo anterior el ingeniero William Holmes, escribió en 1976:

*Se sabe desde hace mucho tiempo que la configuración, la sencillez y alineación del sistema resistente a los sismos de una estructura, es tan importante, o acaso más, que las fuerzas laterales de diseño.<sup>16</sup>*

Y además que, lamentablemente, los métodos de análisis sísmico usuales no logran cuantificar adecuadamente la mayoría de estos problemas. De cualquier forma, dada la naturaleza errática de los sismos, así como la posibilidad de que se exceda el nivel de diseño, es aconsejable evitar el planteamiento de configuraciones riesgosas, independientemente del grado de sofisticación que sea posible lograr en el análisis de cada caso.<sup>17</sup>

El término configuración estructural se refiere a la forma global del edificio como al tamaño, naturaleza y ubicación de los elementos estructurales y componentes no estructurales dentro de él. También se define como el tamaño y la forma del edificio, incluyendo la naturaleza, el tamaño y la situación de los elementos estructurales, así como el de los elementos no estructurales que puedan influir en el comportamiento estructural (Figura 9).<sup>18</sup>

Esto comprende elementos como muros, columnas, pisos, escaleras y también la cantidad y tipo de divisiones interiores. Esta amplia definición de configuración es

---

<sup>16</sup> Holmes, W. (1979). *The rehabilitation of history corner of the the Stanford University main quad*. Second U.S. National Conference of Earthquake engineering.

<sup>17</sup> Applied Technology Council (ATC) (Report ATC 3-06), *Tentative Provisions for Development of Seismic regulations for Buildings*. Palo Alto, 1978.

<sup>18</sup> C. Arnold y R. Reitherman, (1987) *Configuración y diseño sísmico de edificios*, México, D.F., Editorial Limusa.

necesaria debido a la intrincada relación de estos tres tipos de elementos de configuración, respecto al comportamiento sísmico.

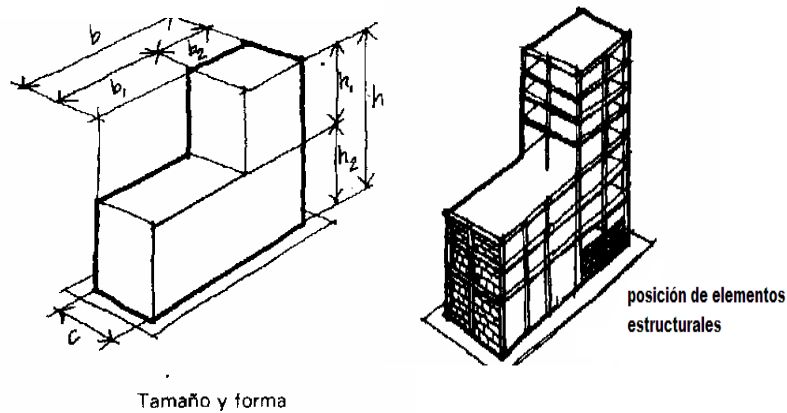


Figura 9. Configuración Estructural

El concepto de configuración estructural tiene que considerar aspectos como morfología, tecnología, solución estructural y estética. Estos conceptos, aunque parezcan aislados, están relacionados, sin embargo a veces son independientes. Los tópicos obligados de morfología estructural y que se incluyen en los principios de ingeniería son: dimensión absoluta, solidez, simetría y regularidad. El principal y que mejor describe el comportamiento sísmico de las estructuras es la dimensión total de la construcción.<sup>19</sup>

Por otro lado, la simetría y la robustez intervienen, ya que conviene evitar una distribución irregular de las fuerzas inducidas por el sismo. La meta del diseño sísmico correcto es que todos los miembros estructurales contribuyan a la resistencia y disipación de energía. A continuación se exponen brevemente los aspectos más relevantes de la incidencia de los problemas que son referentes a la disposición de elementos que se verán dentro de las tres configuraciones determinadas para esta tesis mostrada en la sección 1.2.

<sup>19</sup> Ángeles, Pablo (2010). Tesis *Diseño por torsión sísmica de estructuras de mampostería*, México, D.F., UNAM.

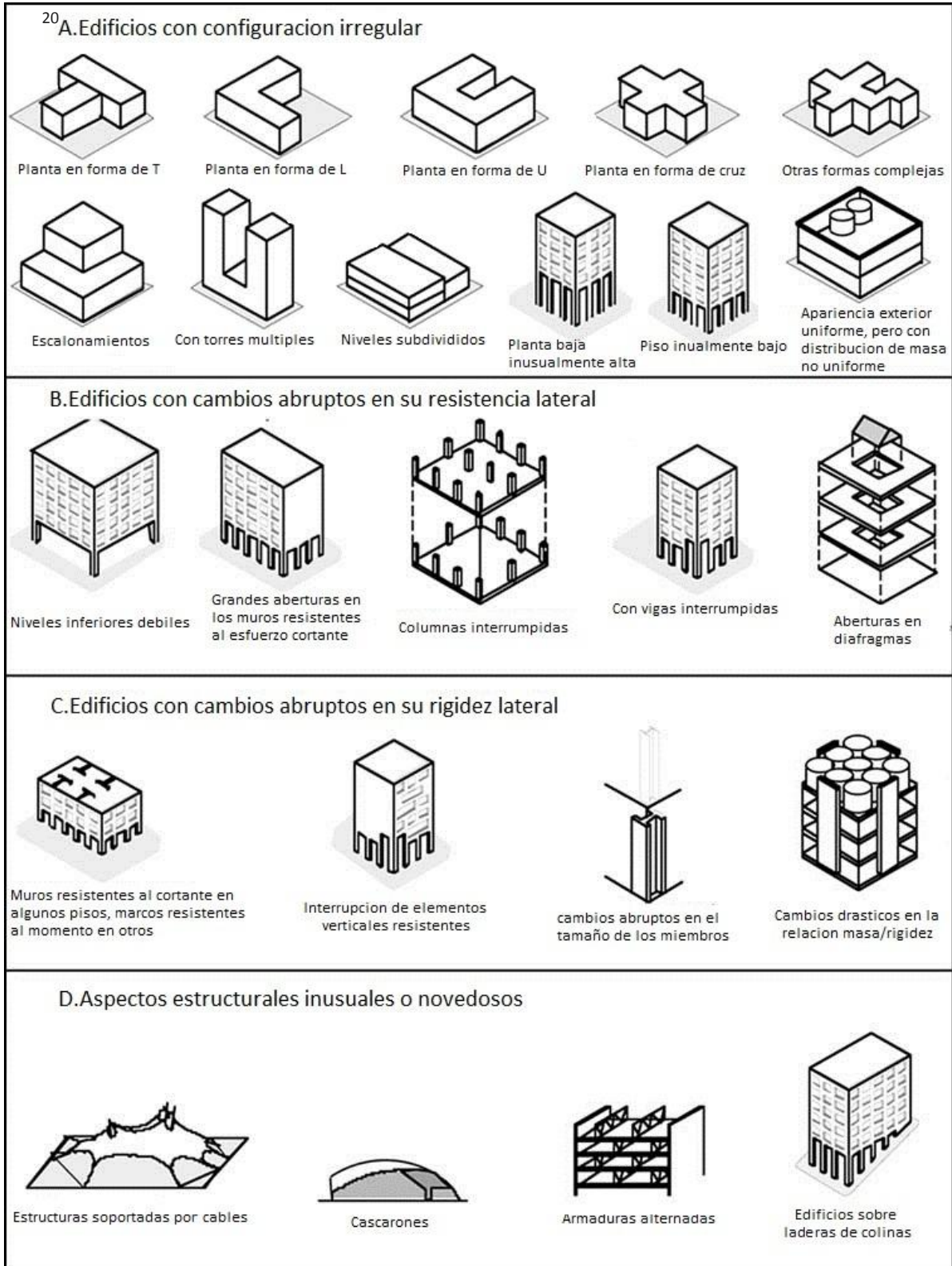


Figura 10. Formas sencillas y complejas en planta y elevación

<sup>20</sup> Interpretación gráfica de "irregularidades en estructuras o en sistemas de marcos", (1987) del comentario de SEAOC Recommended Lateral Force Requirements and cometary, Tomado de Configuración y diseño sísmico de edificios, Arnold, C. y Reitherman, R.

### 2.4.1 Irregularidad en planta

Uno de los aspectos principales en esta configuración es la simetría, la cual denota una propiedad geométrica del edificio. Un edificio es simétrico respecto a dos ejes en planta si su geometría es idéntica en cualquiera de los lados de cualquier eje que se estén considerando (Figura 11). Simetría estructural significa que el centro de masa y el centro de resistencia están localizados en el mismo punto.

Puede haber simetría en la elevación, pero tiene menor significado dinámico que la simetría en planta. La única advertencia que aparece en todos los reglamentos y libros de texto que tratan sobre configuraciones que las formas simétricas son preferibles a aquellas que no lo son. Las dos razones básicas para esto, pueden ser que en términos puramente geométricos, la asimetría tiende a producir excentricidad entre el centro de masa y el centro de rigidez, y por lo tanto provoca torsión. La segunda razón puede ser que la asimetría tiende a concentrar esfuerzos.

No es raro que elementos principales como los núcleos de servicio, estén dispuestos asimétricamente dentro de una configuración simétrica. El término de falsa simetría se usa para denominar esta condición y para enfatizar que la simetría va mas allá de la simple geometría de la forma exterior, hacia las distribuciones internas de elementos resistentes y componentes no estructurales.

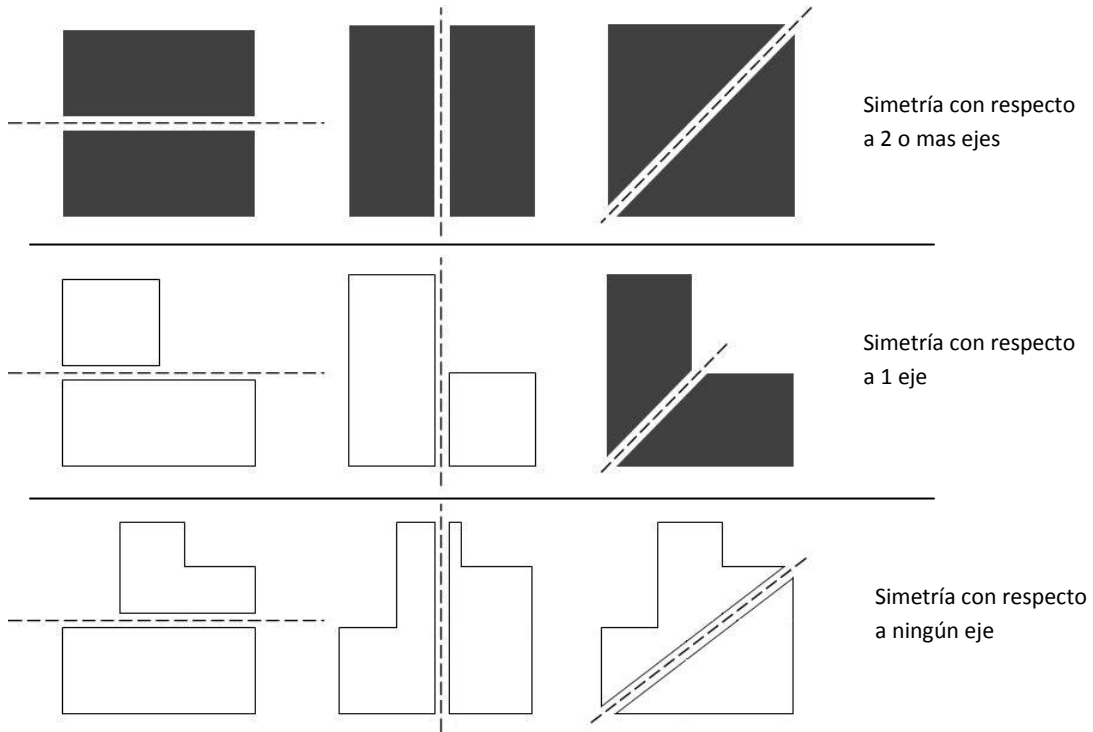


Figura 11. Simetría en Planta

En cambio para un edificio que parece asimétrico, es posible que tenga sistemas resistentes diseñados de tal manera que el edificio actúe dinámicamente de un modo simétrico, y se reduzca al mínimo la probabilidad de una torsión significativa (Figura 12).

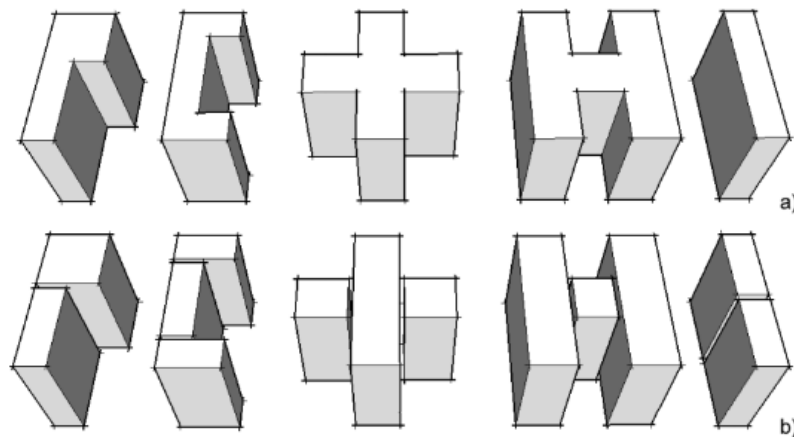


Figura 12. Configuraciones típicas en planta de edificios prismáticos

## Torsión

La torsión ha sido causa de importantes daños de edificios sometidos a sismos intensos, que van desde la distorsión a veces visible de la estructura y por tanto su pérdida de imagen y confiabilidad hasta el colapso estructural (Figura 13)<sup>21</sup>.

La torsión se produce por la excentricidad existente entre el centro de masa y el centro de rigidez. Algunos de los casos que pueden dar lugar a dicha situación en planta son:

- 1) Posición de elementos rígidos de manera asimétrica con respecto al centro de gravedad del piso.
- 2) Colocación de grandes masas en forma asimétrica con respecto a la rigidez.
- 3) Combinación de las dos situaciones anteriores.

Debe tenerse presente que los muros divisorios y de fachada que se encuentren adosados a la estructura vertical tienen generalmente una gran rigidez y, por lo tanto, habitualmente participan estructuralmente en la respuesta al sismo y pueden ser causantes de torsión, como en el caso corriente de los edificios de esquina.

Cuantitativamente, puede considerarse que una excentricidad entre el centro de la masa y de rigidez es grande cuando supera el 10% de la dimensión en planta bajo análisis. En un caso así deben tomarse medidas correctivas en el planteamiento estructural del edificio.

---

<sup>21</sup> Organización Panamericana de la Salud, (1999). *Fundamentos para la mitigación de desastres en establecimientos de salud*. Washington ,D.C.

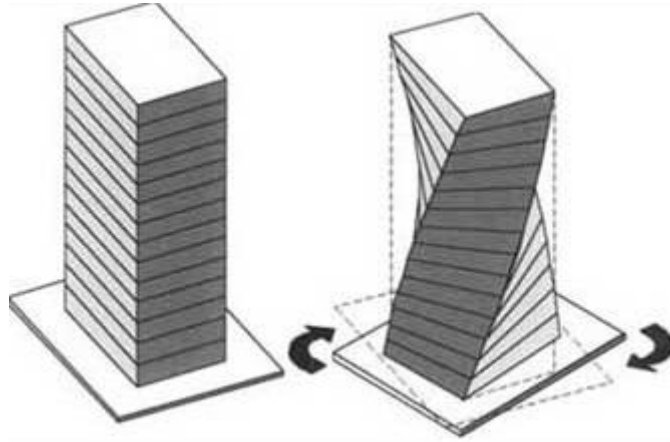


Figura 13. Torsión

Si se contempla además la situación en altura, el panorama de la torsión puede complicarse aún más cuando hay irregularidades verticales, como los escalonamientos. En efecto, la parte superior del edificio transmite a la inferior un cortante excéntrico, lo cual provoca torsión del nivel de transición hacia abajo, independientemente de la simetría o asimetría estructural de los pisos superiores e inferiores.

Como todos los problemas de configuración, el de la torsión debe ser enfrentado desde la etapa de diseño espacial y de forma de la edificación. Los correctivos necesarios para el problema de la torsión pueden resumirse en general en los siguientes puntos:

- ✓ Las torsiones deben ser consideradas inevitables, debido a la naturaleza del fenómeno y a las características de la estructura. Por esta razón, se sugiere proveer a los edificios de rigidez, mediante la cual se busca reducir la posibilidad de giro en planta.

- ✓ A efectos del control de la torsión, debe estudiarse con cuidado el planteamiento de la estructura en planta y en altura, así como la presencia y la necesidad de aislamiento de los muros divisorios no estructurales que puedan intervenir estructuralmente en el momento de un sismo. Finalmente, el objetivo debe ser proveer a la estructura con la mayor simetría posible de la rigidez con respecto a la masa.

### 2.4.2 Piso débil

El más importante del conjunto de problemas causados por discontinuidad de resistencia es el piso débil. Este nombre se aplica comúnmente a los edificios cuya planta baja es más débil que las plantas superiores. Sin embargo, un piso débil en cualquier nivel crea problemas, pero como las fuerzas generalmente son mayores hacia la base del edificio. Una discontinuidad de rigidez entre el primer y segundo nivel tiende a provocar la condición más grave.

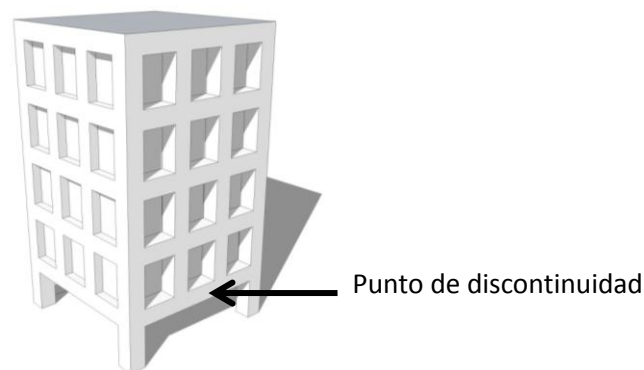


Figura 14. Una discontinuidad de rigidez produce una zona de debilidad

Existe piso débil cuando hay una discontinuidad de resistencia o rigidez entre la estructura vertical de un piso y el resto de la estructura. Puede presentarse debido a la diferencia de altura del primer nivel y del resto o también cuando hay discontinuidad en las columnas<sup>22</sup>.

El problema básico de todas las variaciones de piso débil es que la mayor parte de las fuerzas sísmicas de un edificio, y cualquier deformación estructural consecuente, tenderán a concentrarse en el piso más débil, en lugar de distribuirse de manera uniforme entre todos los pisos.

Las soluciones para el problema de piso débil comienzan por su eliminación, significa que hay que evitar la discontinuidad modificando el diseño arquitectónico. Si no es posible por razones de programa o imagen, el siguiente paso es investigar la forma para reducir la discontinuidad, como son aumentar el número de columnas o agregar contraventeo. Además no se pueden olvidar de las posibilidades de solución arquitectónica, donde no se requiera discontinuidad estructural.

### **2.4.3 Piso flexible en niveles intermedios**

Varios tipos de esquemas arquitectónicos y estructurales conducen a la formación de los llamados pisos flexibles (Figura 15), es decir, pisos que son más vulnerables al daño sísmico que los restantes, debido a que tienen menor rigidez, menor resistencia o ambas cosas.

---

<sup>22</sup> Bonilla, R. (2004). *Tesis Configuración del diseño sísmico*. Universidad de San Carlos de Guatemala. Guatemala.

La interrupción de elementos verticales de la estructura ha probado ser la causa de múltiples colapsos parciales o totales en edificios sometidos a sismos, sobre todo cuando la interrupción de los elementos verticales resistentes (muros y columnas) se presenta en los pisos inferiores. La razón del deslizamiento del piso recae en que el nivel en que se interrumpen los elementos es más flexible que los restantes, con lo que aumenta el problema de estabilidad, pero además porque se origina un cambio brusco de rigidez que ocasiona una mayor acumulación de energía en el piso más débil.

Los casos más usuales de interrupción de elementos verticales, que ocurre generalmente por razones espaciales, formales o estéticas, son los siguientes:

- 1) Interrupción de las columnas.
- 2) Interrupción de muros estructurales (muros de cortante).
- 3) Interrupción de muros divisorios, concebidos erróneamente como no estructurales, alineados con pórticos.
- 4) Eliminación de muros perimetrales

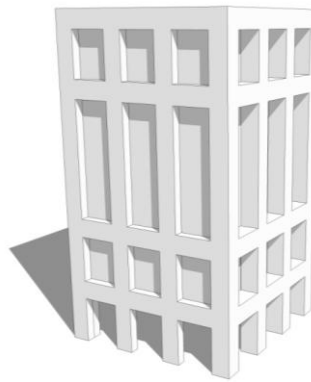


Figura 15. Edificio con piso flexible intermedio

## 2.5 FUNDAMENTOS DE DINAMICA ESTRUCTURAL

En los problemas de ingeniería no siempre es posible obtener soluciones matemáticas rigurosas. Cuando los problemas involucran propiedades de materiales, distribución de cargas y condiciones de contorno complejas, es necesario hacer simplificaciones o idealizaciones para reducir el problema a una solución matemática con resultados aceptables. La relación entre un sistema físico y una posible solución matemática se obtiene con el modelo matemático. Esta es la denominación simbólica del sistema idealizado de sustitución que incluye todas las simplificaciones impuestas al problema físico.<sup>23</sup>

### 2.5.1 Grados de libertad

Se le conoce como número de grados de libertad al número de coordenadas independientes necesarias para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier instante de tiempo. Cualquier estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, el proceso de selección o idealización de un modelo matemático apropiado permite reducir los grados de libertad a un número discreto y en algunos casos hasta uno solo. Al adoptar cualquier modelo matemático, se asume que cada elemento del sistema representa una sola propiedad; es decir que, la masa  $m$ , representa solo la propiedad de inercia, mientras que  $k$  representa solo la elasticidad.

---

<sup>23</sup> Paz, Mario, (1992). *Dinámica Estructural. Teoría y Cálculo*, Editorial Reverté.

Los modelos matemáticos pueden aportar un conocimiento exacto y completo del comportamiento del modelo mismo, pero solo pueden dar una información limitada o aproximada del comportamiento del sistema físico real.

## 2.5.2 Sistemas sin amortiguación

Un modelo base dentro de la dinámica estructural es el análisis de un sistema simple y fundamental, el sistema de un grado de libertad en el cual se desprecia la fuerza de amortiguación, además se considera como si estuviera libre de la acción de fuerzas exteriores durante su movimiento vibratorio. Este sistema con un grado de libertad se conoce como oscilador simple sin amortiguación y usualmente se representa como en la Figura 16.

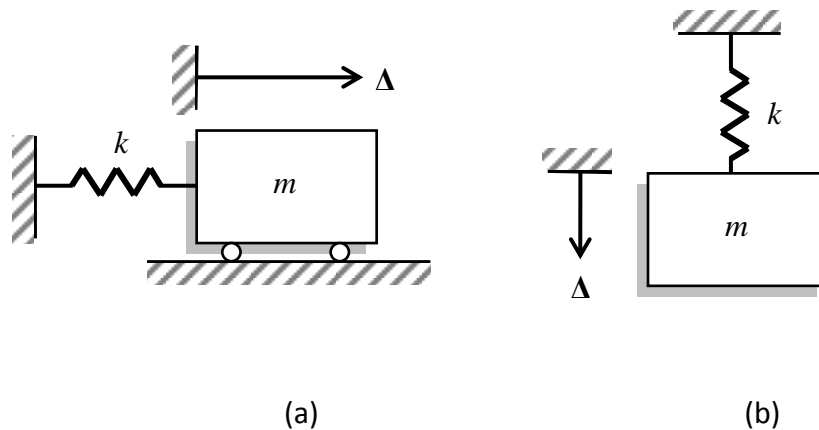


Figura 16. Diagrama de oscilador simple

Estas figuras representan modelos matemáticos que son dinámicamente equivalentes. Aquí la masa  $m$  está restringida por el resorte  $k$  a moverse linealmente a lo largo de un eje de coordenadas. La característica mecánica del resorte está dada por la relación entre la magnitud de la fuerza  $F$  aplicada en un extremo libre y el desplazamiento  $\Delta$  que resulta en ese extremo. La constante de proporcionalidad entre la fuerza y el

desplazamiento de un resorte lineal, se llama constante del resorte, y habitualmente se designa con la letra  $k$ , por lo tanto se puede decir que:

$$F = k \Delta \quad (1)$$

A veces es necesario determinar la constante del resorte equivalente de un sistema en el que dos o más resortes están dispuestos en paralelo o en serie. En el caso de dos resortes en paralelo, la fuerza total que se requiere para producir un desplazamiento relativo de una unidad de sus extremos es igual a la suma de las constantes de los resortes. Por definición esta fuerza total es la constante del resorte equivalente y está dada por

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (2)$$

Y para casos generales de  $n$  resortes la constante equivalente es

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i \quad (3)$$

Cuando dos resortes están unidos en serie, la fuerza  $F_i$  produce en sus extremos los siguientes desplazamientos relativos:

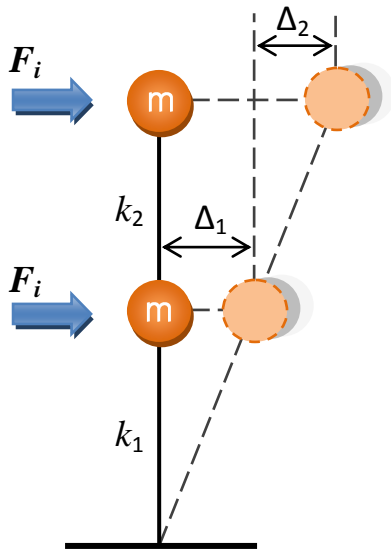
Por lo tanto, el desplazamiento total  $\Delta$  del extremo libre de los dos resortes en serie es

$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ , o sustituyendo  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$

$$\Delta = \frac{F_i}{k_1} + \frac{F_i}{k_2} \quad (4)$$

En general, para  $n$  resortes en serie, la constante del resorte equivalente se obtiene de:

$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (5)$$



$$\Delta_1 = \frac{F_i}{k_1} \quad ; \quad \Delta_2 = \frac{F_i}{k_2} \quad (6)$$

Figura 17. Desplazamientos relativos

### ***Ecuación diferencial de un oscilador simple***

La ecuación de un oscilador simple sin amortiguación de vibración libre es

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (7)$$

Y su solución es 
$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración determinadas por las condiciones iniciales:

$$A = y_0 \quad (9)$$

$$B = \frac{U_0}{\omega} \quad (10)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Es la frecuencia natural en rad/s} \quad (11)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Es la frecuencia natural en cps} \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{Es el periodo natural en segundos} \quad (13)$$

### 2.5.3 Edificio simple

No siempre se puede describir el comportamiento de una estructura usando un solo grado de libertad, en general es necesario modelar la estructura con múltiples grados de libertad. Realmente las estructuras son sistemas continuos, los cuales contienen un número infinito de grados de libertad y necesitan cálculos más elaborados para poder llegar a una buena aproximación en su comportamiento.

Un edificio simple puede ser descrito como un edificio en el cual no se producen rotaciones en los miembros horizontales a la altura de los pisos, de hecho es muy parecido en características a una viga en voladizo deformada solamente por el esfuerzo a corte<sup>24</sup>. Para seguir esta deformación en un edificio (Figura 18) se deben suponer las siguientes condiciones:

1. Toda la masa de la estructura está concentrada al nivel de los pisos

<sup>24</sup> Paz, Mario, (1992). *Dinámica Estructural. Teoría y Cálculo*, Editorial Reverté.

2. Las vigas de los pisos son infinitamente rígidas en relación de las columnas
3. La deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales presentes en las columnas.

La primera condición transforma el problema de un infinito número de grados de libertad en un sistema que contiene grados de libertad como numero de masas concentradas en los pisos. La segunda condición establece que la unión de vigas y columnas deben de estar fijadas sin rotación y por último la tercera condición establece que las vigas deben de permanecer rígidas durante el movimiento de la estructura.

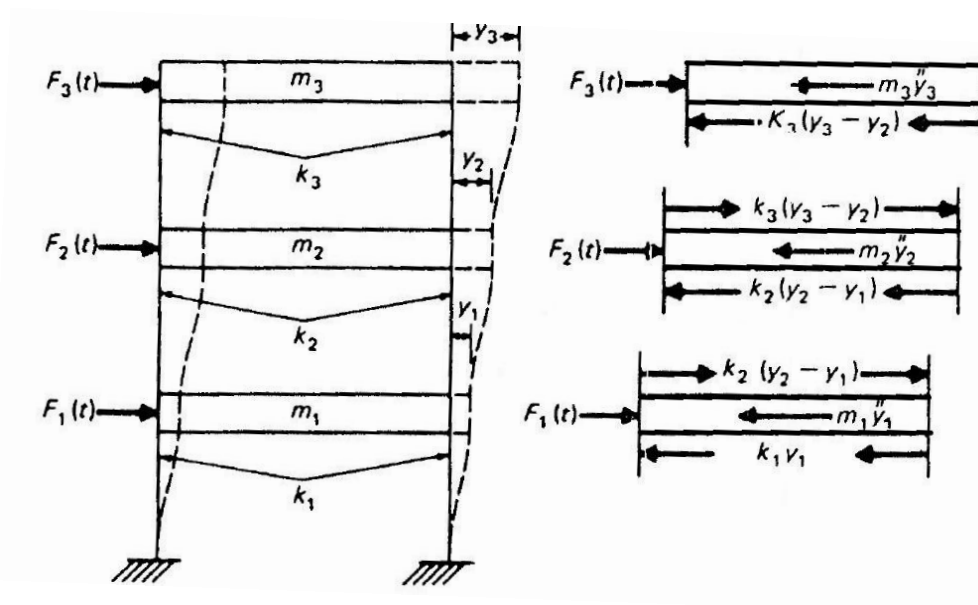


Figura 18. Modelo de un marco representando a un edificio simple

Para una columna uniforme, con sus dos extremos fijos sin posible rotación, la constante del resorte será:

$$k = \frac{12EI}{L^3} \tag{14}$$

Y para una columna con extremo fijo y el otro articulado por

$$k = \frac{3 EI}{L^3} \quad (15)$$

Donde  $E$  es el modulo de elasticidad del material,  $I$  el momento de inercia de la sección y  $L$  la altura de entrepiso.

Las ecuaciones de movimiento de un edificio simple de tres niveles, son:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2 (y_2 - y_1) - F_1(t) = 0 \quad (16)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) - F_2(t) = 0 \quad (17)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) - F_3(t) = 0 \quad (18)$$

Este sistema de ecuaciones constituye la formulación de rigidez de las ecuaciones de movimiento para este edificio simple de tres niveles. Las ecuaciones pueden escribirse convenientemente usando matrices como

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{F\} \quad (19)$$

Donde  $[M]$  y  $[K]$  son, respectivamente, las matrices de masa y rigidez dadas por

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

y por

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Y donde  $\{y\}, \{\ddot{y}\}, \{F\}$ , son respectivamente, los vectores de desplazamiento, aceleración y fuerza dados por:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

La matriz de masa, corresponde a una matriz diagonal (los elementos distintos a cero solo están en la diagonal principal). Los elementos de la matriz de rigidez, son llamados coeficientes de rigidez. En general, el coeficiente de rigidez  $k_{ij}$ , se define como la fuerza en la coordenada  $i$  cuando la coordenada  $j$  se desplaza una unidad, mientras que las otras coordenadas permanecen fijas.

La idealización de una estructura como un edificio simple proporciona un modelo matemático simple y útil para el análisis de sistemas dinámicos. Este modelo permite la representación de la estructura, por medio de masas concentradas e interconectadas con resortes elásticos.

### ***Vibración de un edificio simple***

Se considera que una estructura esta en vibración libre cuando no está sometida a excitación externa y su movimiento solo está gobernado solamente por las condiciones de equilibrio. Este análisis proporciona valiosa información de las propiedades dinámicas acerca de la estructura, frecuencias naturales y sus modos normales.

### 2.5.4 Frecuencias naturales y modos normales

El problema de vibración libre requiere que el vector fuerza  $\{F\}$  sea igual a cero en las ecuaciones de movimiento, por lo tanto tenemos:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \quad (23)$$

El proceso de solución de este sistema de ecuaciones, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la forma

$$([K] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\} \quad (24)$$

Que en matemáticas se conoce como problema característico.

Para obtener soluciones no triviales para un problema característico, se requiere que el determinante de los coeficientes de las incógnitas  $\{\phi\}$  sea igual a cero, esto es,

$$([K] - \omega^2[M]) = \{0\} \quad (25)$$

Las raíces  $\omega_i^2$ , de esta ecuación, proveen las frecuencias naturales  $\omega_i$ . Es posible entonces, resolver las incógnitas  $\{\phi\}_i$  en función de los valores relativos. Los vectores  $\{\phi\}_i$  que corresponden a las raíces  $\omega_i^2$  son los modos normales (vectores característicos) del sistema dinámico. La ordenación en una matriz de los modos normales constituye una matriz modal  $[\Phi]$  del sistema. Es particularmente conveniente normalizar los vectores característicos para hacerlos satisfacer la siguiente condición:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

Donde los vectores característicos  $[\Phi]_i$  se obtienen dividiendo los componentes de  $\{\phi\}_i$  entre  $\sqrt{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i}$ .

Los vectores característicos (modos normales), satisfacen las importantes condiciones de ortogonalidad

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \quad \text{para } i \neq j \quad (27)$$

$$\{\phi\}_i [M] \{\phi\}_j = 1, \quad \text{para } i = j \quad (28)$$

y

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0, \quad \text{para } i \neq j \quad (29)$$

$$\{\phi\}_i [K] \{\phi\}_j = \omega_i^2, \quad \text{para } i = j \quad (30)$$

Las relaciones anteriores son equivalentes a

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (31)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega] \quad (32)$$

En donde  $[\Phi]$  es la matriz modal del sistema y  $[\Omega]$  es una matriz diagonal que contiene los valores característicos  $\omega_i^2$  en la diagonal principal.

Para un sistema dinámico con pocos grados de libertad, las frecuencias naturales y modos normales pueden ser determinados por el desarrollo del determinante y

calculando las raíces de la ecuación característica. Sin embargo, para un sistema con un gran número de grados de libertad, este método es poco práctico. Por lo tanto es necesario recurrir a otros métodos numéricos que usualmente utilizan un proceso de iteración o con la ayuda de un programa computacional.

### 2.5.5 Periodo de vibración

La ecuación de movimiento (19) pone en evidencia que la respuesta sísmica de un sistema elástico, depende de su frecuencia de vibración  $\omega$ , o lo que es lo mismo, depende de su periodo de vibración, expresado en la ecuación (33). Esto refleja que la respuesta máxima de un sistema a un temblor varía principalmente con el periodo de vibración. La representación grafica de esta variación se denomina espectro de respuesta. Los sistemas de varios grados de libertad pueden caracterizarse para experimentar su respuesta ante los sismos, por medio de sus periodos y frecuencias naturales de vibración, y que, en particular, dado que el primer modo es que tiene mayor participación, el primer Periodo o fundamental es la característica más importante para definir el comportamiento de una estructura ante sismos. La determinación del periodo de una estructura es resultado del análisis dinámico de la misma.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (33)$$

Se le llama periodo de vibración al tiempo requerido para un sistema sin amortiguar en completar un ciclo de vibración libre, donde  $T$  es periodo de vibración

natural, en unidades de segundos. El periodo es relativo a la frecuencia circular de vibración  $\omega$  que está en unidades de radianes por segundo.<sup>25</sup>

La frecuencia natural cíclica de vibración está indicada por

$$f = \frac{1}{T} \quad (34)$$

Las unidades de  $f$  son en hertz (Hz) o ciclos por segundo (cps)

### 2.5.6 Reducción de matrices

En el proceso de discretización, a veces es necesario dividir una estructura en un gran número de elementos por los cambios de geometría, cargas o propiedades del material. Cuando los elementos son ensamblados para formar la estructura, los desplazamientos desconocidos, estos son, los grados de libertad, pueden ser muchos. En consecuencia, las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento para el sistema serán de grandes dimensiones. La solución del problema de valores característicos correspondiente, para determinar las frecuencias naturales y los modos normales, será relativamente difícil. En estos casos, es deseable reducir las dimensiones de las matrices de rigidez y de masa, para conseguir que la solución del problema característico sea más manejable. Esta reducción se conoce también con el nombre de condensación.

Un método utilizado para reducir el problema dinámico, es la condensación estática. Este método, aun cuando es de aplicación simple, es solo aproximado y puede ocasionar errores.

---

<sup>25</sup> Chopra, A. (2007). Dynamics of structures. Ed. Prentice Hall, New Jersey, EUA.

### Condensación estática

Un método práctico, para lograr la reducción de la matriz de rigidez, es identificar aquellos grados de libertad que se desean condensar o reducir como grados de libertad dependientes o secundarios y expresarlos en función de los grados de libertad seleccionados como primarios e independientes. La relación entre los grados de libertad primarios y secundarios se establece por medio de relaciones estáticas; a ello se debe su nombre, método de condensación estática<sup>26</sup>.

Aquellos grados (secundarios) que serán reducidos o condensados, son designados por las primeras  $s$  coordenadas y los grados de libertad que quedan (primarios) son designados por las últimas  $p$  coordenadas. Con este arreglo de las coordenadas, la ecuación de rigidez de la estructura, puede ser escrita usando matrices con particiones, como:

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sp}] \\ [K_{ps}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_s\} \\ \{\Delta_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Donde  $\{\Delta_s\}$ , es el vector de desplazamiento que corresponde a los  $s$  grados de libertad por reducir, y  $\{\Delta_p\}$  el vector correspondiente a los  $p$  grados de libertad restantes, que fueron seleccionado como independientes o primarios. En la ecuación (35) se ha supuesto que no existen fuerzas externas aplicadas a los  $s$  grados de libertad secundarios. La simple operación de multiplicar las matrices indicadas en la ecuación (35), produce las siguientes ecuaciones:

$$[K_{ps}] \{\Delta_s\} + [K_{pp}] \{\Delta_p\} = \{F_p\} \quad (36)$$

<sup>26</sup> Guyan, R.J.(1965) , *Reduction of stiffness and Mass Matrices*, AIAA Journal, Vol.3,No.2.

$$[K_{ss}]\{\Delta_s\} + [K_{sp}]\{\Delta_p\} = \{0\} \quad (37)$$

La ecuación (37) es equivalente a

$$\{\Delta_s\} = [\bar{T}]\{\Delta_p\} \quad (38)$$

Donde  $[\bar{T}]$  es la matriz de transformación dada por

$$[\bar{T}] = -[K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \quad (39)$$

Aplicando la ecuación (38), y haciendo uso de la ecuación(39), se obtiene la ecuación reducida de rigidez, que relaciona las fuerzas y los desplazamientos para las coordenadas, esto es,

$$[\bar{K}]\{\Delta_p\} = \{F_p\} \quad (40)$$

En donde  $[\bar{K}]$  es la matriz reducida de rigidez dada por

$$[\bar{K}] = [K_{pp}] - [K_{ps}][K_{ss}]^{-1}[K_{sp}] \quad (41)$$

La ecuación (38) que expresa la relación estática entre las coordenadas secundarias  $\{\Delta_s\}$  y las coordenadas primarias  $\{\Delta_p\}$ , puede también ser escrita, usando la identidad  $\{\Delta_p\} = [I]\{\Delta_p\}$ , como

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta_s\} \\ \{\Delta_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\bar{T}] \\ [I] \end{Bmatrix} \{\Delta_p\} \quad (42)$$

Lo cual de la forma simplificada queda como la ecuación (43).

$$\{\Delta\} = [T]\{\Delta_p\} \quad (43)$$

Donde

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta_s\} \\ \{\Delta_p\} \end{Bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} [\bar{T}] \\ [I] \end{bmatrix} \quad (44)$$

De la siguiente forma se puede expresar la matriz reducida de rigidez como la transformación de la matriz de rigidez del sistema  $[K]$ :

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (45)$$

## 2.6 MARCOS PLANOS

El análisis dinámico de pórticos planos, por el método de rigidez, requiere la introducción de los efectos axiales en la matriz de rigidez y en la matriz de masa. También requiere la transformación de coordenadas para referir todas las matrices de los elementos de la estructura a un sistema común de coordenadas.

Los pórticos están formados por elementos elásticos (vigas y columnas) conectados en ciertos puntos llamados nodos. En los marcos los grados de libertad son los giros o desplazamientos de los nodos, como se muestra en la Figura 19.

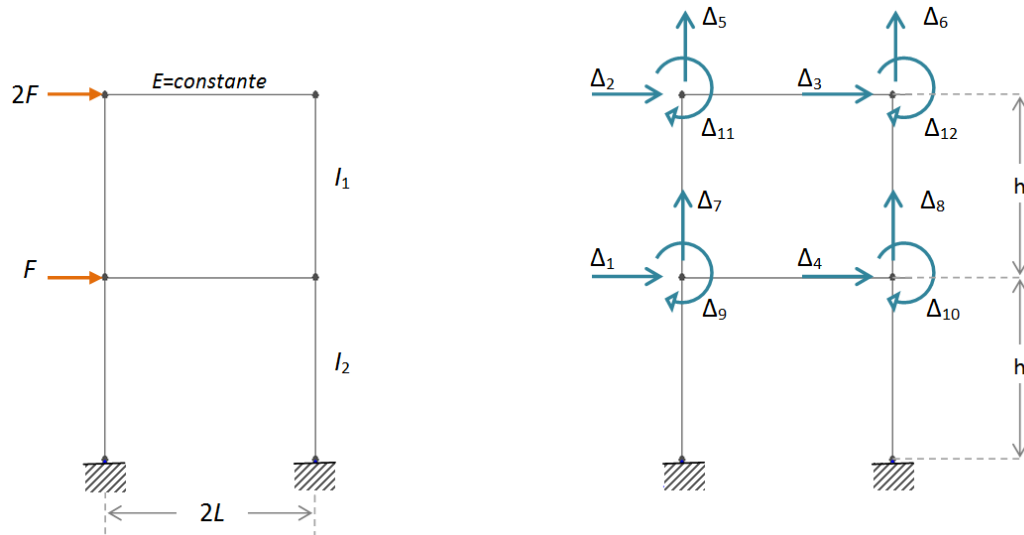


Figura 19. Marco plano de dos niveles

El nombre de desplazamientos generalizados engloba a los desplazamientos lineales y rotaciones, de la misma forma las fuerzas generalizadas son las fuerzas y momentos aplicados en un nodo. Los vectores  $\Delta$  y  $F$  de desplazamientos y fuerzas generalizadas, respectivamente, están formados de valores correspondientes para los grados de libertad. Para el ejemplo de la Figura 19, se tiene que:

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{12} \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{12} \end{Bmatrix}$$

En este ejemplo los grados de libertad del  $\Delta_9$  al  $\Delta_{12}$  son rotaciones y los demás son desplazamientos lineales; por lo tanto, las fuerzas generalizadas  $F_9$  a  $F_{12}$  son momentos, mientras que las demás fuerzas son lineales.

Para el marco de la Figura 19, la matriz  $[K]$  es de  $12 \times 12$ , en general para un sistema de  $n$  grados de libertad en el que se conocen las fuerzas generalizadas, se deberá de

calcular una matriz de rigidez de  $n \times n$  que proporciona los coeficientes de un sistema de ecuaciones con  $n$  incógnitas. Por lo tanto es conveniente seleccionar los menos posibles grados de libertad, aunque debe ser lo suficientemente adecuado para que represente las formas más importantes de deformación.

El método de rigidez se fundamenta en los principios de continuidad, la ley de Hooke y el equilibrio. El principio de continuidad se basa en la compatibilidad que hay de deformaciones entre la sección de una barra definida y las otras secciones circundantes a ella. La ley de Hooke, establece la relación que hay entre el esfuerzo y deformación en los materiales, refiriéndose como rango elástico a la relación lineal de estos. Finalmente para conjuntar las deformaciones establecidas y la ley de Hooke es necesario recurrir al equilibrio estático.<sup>27</sup>

La expresión básica del método de rigidez, es la relación  $F = K\Delta$ , en donde  $F$ , es la fuerza en la dirección del desplazamiento  $\Delta$ , que se produce debido a la rigidez  $K$ , sin embargo al considerar un sistema de fuerzas asociado a uno de desplazamientos, la expresión matricial queda de la siguiente forma

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \quad (46)$$

### 2.6.1 Matriz de rigidez en coordenadas locales

La matriz de rigidez de un elemento barra de sección prismática y constante, sometida a flexión y carga axial, puede estar definida, por las siguientes consideraciones, donde la rotación positiva es en sentido horario (Figura 20).

<sup>27</sup> Ojeda, J. (2004) *Cuaderno de apuntes de análisis estructural II*. UABC.

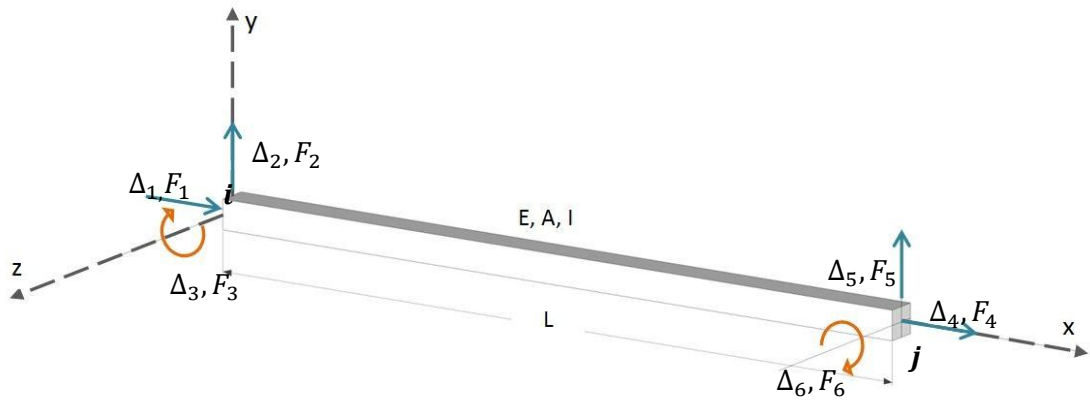


Figura 20. Grados de libertad de una barra

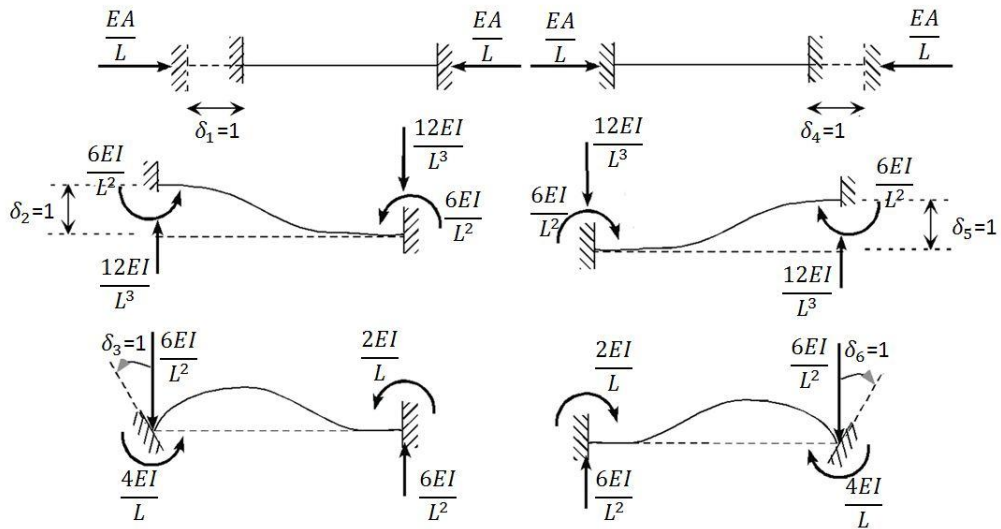


Figura 21. Especificación de los desplazamientos en una barra

Finalmente por superposición de causas y efectos mostrados en la Figura 21, el arreglo matricial para una barra con posibilidad de tres grados de libertad en cada extremo, estará dado de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

La ecuación (47) muestra como término intermedio a la matriz de rigidez  $[K]$  para una barra empotrada en los dos extremos, también esta se planteo en coordenadas locales, sin embargo es necesario que el sistema de ejes coordenados de la estructura coincida con los ejes locales de cada uno de los elementos que la forman, para así obtener una matriz global de rigidez.

### 2.6.2 Transformación de coordenadas

Se planteo anteriormente que la determinación de las fuerzas en los extremos de la barra, se lleva a cabo mediante la operación  $F = K\Delta$ , en donde el sistema de referencia es local. Si la barra presentara una inclinación  $\alpha$  (o rotación  $\theta$ ), positiva en sentido horario, entonces el sistema de referencia debe ser el sistema de coordenadas globales, por lo que se deberá hacer una transformación de coordenadas. La ecuación de transformación es la siguiente:

$$[K] = [T][k][T]^T \quad (48)$$

Al efectuar las operaciones para obtener la matriz de rigidez en coordenadas globales, se tiene, como matriz  $[K]$ :

$$\begin{bmatrix}
 \left( c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( -c^2 \frac{EA}{L} - s^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -s \frac{6EI}{L^2} \right) \\
 \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -s^2 \frac{EA}{L} - c^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( c \frac{6EI}{L^2} \right) \\
 \left( -s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( \frac{4EI}{L} \right) & \left( s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( -c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( \frac{2EI}{L} \right) \\
 \left( -c^2 \frac{EA}{L} - s^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( s \frac{6EI}{L^2} \right) \\
 \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -s^2 \frac{EA}{L} - c^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & \left( -c \frac{6EI}{L^2} \right) \\
 \left( -s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( \frac{2EI}{L} \right) & \left( s \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( -c \frac{6EI}{L^2} \right) & \left( \frac{4EI}{L} \right)
 \end{bmatrix}$$

(49)

En donde  $c = \cos\alpha$  y  $s = \sin\alpha$  de los vectores de desplazamiento lineales y angulares en cada extremo. Por lo tanto, un elemento requiere para los dos nodos de los extremos, la transformación de un total de cuatro vectores de desplazamiento. La transformación de los 12 desplazamientos nodales puede ser escrita en forma abreviada como

$$\{\Delta\} = [T]\{\bar{\Delta}\} \quad (50)$$

En donde

$$[T] = \begin{bmatrix}
 [T_1] & 0 & 0 & 0 \\
 0 & [T_1] & 0 & 0 \\
 0 & 0 & [T_1] & 0 \\
 0 & 0 & 0 & [T_1]
 \end{bmatrix} \quad (51)$$

## 2.7 MARCOS TRIDIMENSIONALES

Se le llama marcos tridimensionales o pórticos espaciales a un sistema estructural tridimensional sin muros de apoyo, compuesto de miembros interconectados y apoyados lateralmente, de modo que funcionen como una unidad, con o sin ayuda de diafragmas o sistemas de piso.<sup>28</sup>

El método de rigidez utilizado en la sección 2.6 para marcos planos, puede ser extendido también para marcos tridimensionales. Mientras que los marcos planos tienen solo 3 coordenadas de desplazamiento en cada nodo, el marco tridimensional tiene 6, tres desplazamientos en los ejes "x", "y", y "z" y rotaciones en estos ejes (Figura 22).

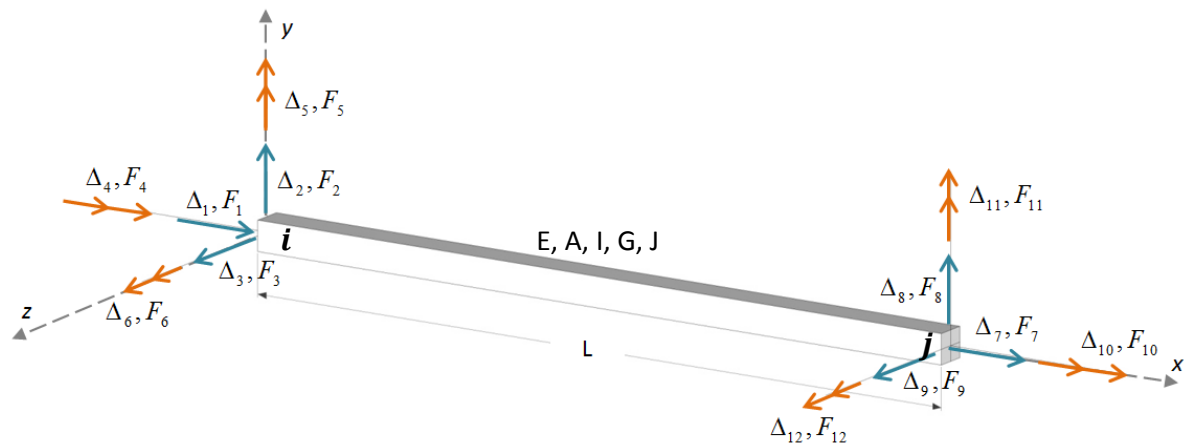


Figura 22. Segmento de viga de un marco tridimensional, que muestra las fuerzas y desplazamientos en las coordenadas nodales

Por lo tanto, un elemento de viga de una estructura espacial tiene, en sus dos nodos, un total de doce coordenadas nodales; debido a esto la matriz de rigidez o de masa para tal elemento resulta de 12 x 12.

<sup>28</sup> Nienhuys, S. et al (1976) Guía Popular de construcciones sismo-resistentes. Quito, Ecuador.

El análisis dinámico de marcos tridimensionales requiere comparativamente más tiempo que el necesario para marcos planos, ya que las matrices de masa y rigidez crecen según los grados de libertad de la estructura. Las estructuras tridimensionales también pueden calcularse mediante elementos finitos, existen varios programas comerciales de computadoras que cuentan con excelentes herramientas gráficas e interpretación de resultados, sin embargo siempre queda la duda de proporcionar los datos correctos para obtener resultados confiables.

### 2.7.1 Análisis pseudo tridimensional

Una estructura tridimensional también puede ser modelada como un ensamble de marcos planos, con propiedades de rigidez solamente en sus planos respectivos, suponiendo que las rigideces ortogonales a sus planos son bastante menores y pueden no ser consideradas. La hipótesis fundamental es la relativa a las losas de piso, las cuales son consideradas como cuerpos rígidos que conectan a los marcos. Para fines del análisis dinámico, los grados de libertad para los entrepisos son 3: 2 traslaciones horizontales y 1 rotación torsional en planta (Figura 23). Tampoco se toman en cuenta las deformaciones axiales en las columnas.<sup>29</sup>

Para calcular la matriz de rigidez en coordenadas de piso, se necesita conocer la matriz de rigidez lateral de cada uno de los marcos planos. Si se tienen  $N$  nodos y  $L$  niveles

---

<sup>29</sup> Salinas, R. (2001) Fundamentos del análisis dinámico de estructuras. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, Perú.

o entrepisos, la matriz de rigidez correspondiente a estos grados de libertad es de orden  $2N+L$ . Con el procedimiento de condensación estática explicado en la sección 2.5.6 se expresa esta matriz en términos de solamente los grados de libertad laterales y se obtiene la matriz de rigidez lateral del sistema que es de  $L$  y se denominara  $K_j$ .

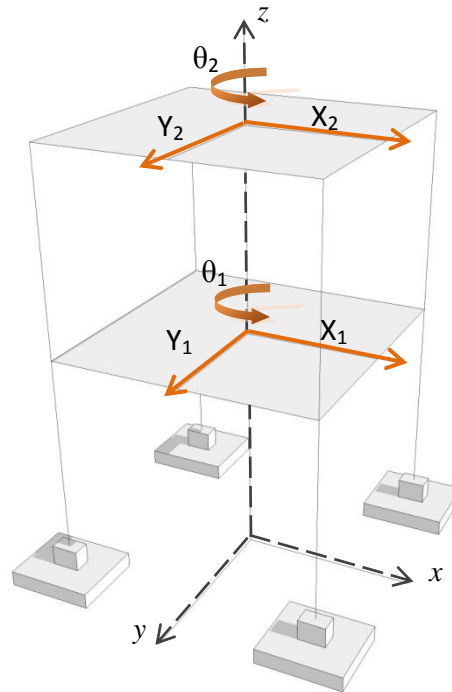


Figura 23. Edificio de dos niveles con los 3 grados de libertad por piso.

Siguiendo con el procedimiento de Bazán, E. y Meli, R (1998)<sup>30</sup>, el siguiente paso es deducir las matrices para expresar los desplazamientos laterales de cada sistema resistente en términos de los grados de libertad del edificio completo; Aguiar, R. (2008) menciona a esta matriz como *matriz de compatibilidad*<sup>31</sup>.

<sup>30</sup> Bazan, E., Meli, R. (1998) *Diseño sísmico de edificios*. Editorial Limusa-Wiley. México, D.F.

<sup>31</sup> Aguiar, R. (2008) *Análisis sísmico de edificios*. Centro de Investigaciones Científicas de la Escuela Politécnica del Ejército. Quito, Ecuador.

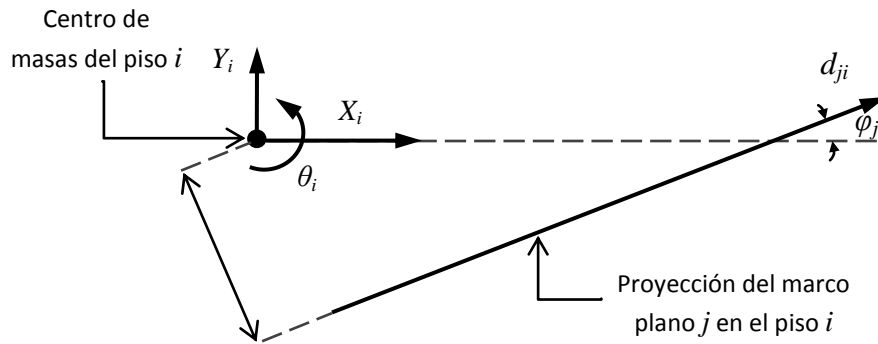


Figura 24. Relación entre los desplazamientos en planta del piso rígido  $i$  y del marco plano  $j$  en dicho piso.

Considerando la Figura 24 en donde  $X_i$ ,  $Y_i$  y  $\theta_i$  son los desplazamientos y el giro del centro de masas del piso  $i$ , el desplazamiento lateral  $d_{ji}$  del marco plano  $j$  en este piso, considerando que  $\theta_i$  es pequeño, se expresa:

$$d_{ji} = \langle \cos \varphi_j \quad \text{sen} \varphi_j \quad r_{ji} \rangle \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (52)$$

Donde  $\varphi_j$  es el ángulo entre las direcciones positivas de  $X_i$ , y de  $d_{ji}$ ,  $r_{ji}$  es la distancia de la proyección del marco plano  $j$  al centro de masas del piso y tiene signo positivo cuando el giro  $d_{ji}$  alrededor de dicho punto es del mismo sentido que  $\theta_i$ . Simplificando la ecuación (52), queda como:

$$d_{ji} = b_{ji}^T u_i \quad (53)$$

Donde:

$$b_{ji} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_j \\ \text{sen} \varphi_j \\ r_{ji} \end{Bmatrix} \quad ; \quad u_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

Cuando se consideran los  $L$  niveles del sistema resistente, se tiene que:

$$D_j = B_j U \tag{54}$$

Donde:

$$D_{ji} = \begin{Bmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ \vdots \\ d_{jL} \end{Bmatrix} \quad ; \quad U = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \theta_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ Y_L \\ \theta_L \end{Bmatrix}$$

(L elementos) (3L elementos)

$$B_j = \begin{bmatrix} b_{j1}^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{j2}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{j3}^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{jL}^T \end{bmatrix} \tag{55}$$

(L x 3L elementos)

Como  $B_j$  desempeña el papel de matriz de transformación, ya que relaciona los antiguos grados de libertad (desplazamientos laterales) con los nuevos (desplazamientos en coordenadas de piso),  $K_j$  se transforma a estos nuevos grados de libertad mediante la operación:

$$K_j^* = B_j^T K_j B_j \tag{56}$$

$K_j^*$  es una matriz de orden  $3L$ .

Se deduce que, en general, las matrices de transformación para sistemas que siguen las direcciones  $x$  y  $y$  se describen de manera condensada como:

$$B_{jx} = [I \quad 0 \quad Y]$$

$$B_{jy} = [0 \quad I \quad X]$$

$I$  es la matriz identidad,  $0$  es una matriz de ceros,  $X$  y  $Y$  son matrices diagonales cuyos elementos no nulos son las distancias (diferencias entre abscisas u ordenadas) de la proyección del sistema resistente en cuestión a los centros de masas de los pisos.

Para sistemas paralelos a los ejes  $x$  y  $y$ , la transformación de la ecuación (56) da, respectivamente:

$$K_{jx}^* = \begin{bmatrix} K_{jx} & 0 & K_{jx}Y \\ 0 & 0 & 0 \\ YK_{jx} & 0 & YK_{jx}Y \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$K_{jy}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{jy} & K_{jy}X \\ 0 & XK_{jy} & XK_{jy}X \end{bmatrix} \quad (58)$$

Para obtener la matriz  $K_e$  del edificio se suma directamente las  $K_j^*$  puesto que todas están referidas a los mismos grados de libertad, la ecuación (59) muestra la forma de la matriz. Para un edificio de  $n$  pisos  $K_e$  es cuadrada de orden  $3n$ . Puede ser que algunas  $K_j^*$  sean más pequeñas que  $K_e$  ya que el sistema plano  $j$  puede tener menos pisos que el edificio completo. Para sumar, se considera que todos los términos faltantes son ceros.

$$K_e = \begin{bmatrix} \Sigma K_{jx} & 0 & \Sigma K_{jx}Y \\ 0 & \Sigma K_{jy} & \Sigma K_{jy}X \\ \Sigma YK_{jx} & \Sigma XK_{jy} & (\Sigma YK_{jx}Y + \Sigma XK_{jy}X) \end{bmatrix} \quad (59)$$

Dado un vector de fuerzas  $F$ , se calculan los desplazamientos  $U$ , resolviendo el sistema de ecuaciones  $F=KU$ . El vector  $F$  está formado por dos fuerzas propiamente dichas y un momento torsionante en el centro de masas de cada piso, en congruencia con los grados de libertad escogidos para el edificio en conjunto.

### 2.7.2 Matriz de masa de una estructura tridimensional

La matriz de masa concentrada, para un elemento uniforme de una estructura tridimensional, es simplemente una matriz diagonal, en la cual los coeficientes correspondientes a desplazamientos lineales y de torsión de la matriz de masa, adoptan la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_n \end{bmatrix} \quad (60)$$

En la matriz  $[M]$ , a los desplazamientos laterales les corresponde la masa traslacional, representada en la ecuación (60) como  $m_n$ , del nivel en cuestión y al giro alrededor del eje vertical le corresponde la inercia rotacional de la masa con respecto a dicho eje, el cual está representado con  $J_n$ . Cuando la masa está distribuida de manera regular en planta, se puede calcular su momento de inercia como  $J = m r^2$ , donde  $m$  es la masa de piso y  $r$  el radio de giro del área de la planta. Por ejemplo,  $r = \sqrt{(a^2 + b^2)/12}$  para una planta rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$ .

# 3

## Metodología y Análisis

La teoría de modelado establece las reglas de acuerdo a las cuales la geometría, las propiedades del material, condiciones iniciales, condiciones de carga del modelo deben de estar relacionados para que el comportamiento del modelo pueda ser expresado como una función del comportamiento del prototipo. La teoría que desarrolla las funciones de correlación algunas veces llamadas leyes de escalamiento, que define la relación entre el modelo y el prototipo es la teoría de la similitud. Como ya se revisó en el capítulo anterior, existen diferentes tipos de modelos dependiendo de los requerimientos de la experimentación, en este caso se está trabajando con un modelo didáctico. Para este trabajo en específico, el modelo elegido será un modelo elástico y se va a diseñar como si fuera un edificio en miniatura con sus propias características dinámicas, por lo que no es requerido que tenga funciones de correlación ni que existan leyes de similitud entre el modelo y alguna estructura prototipo, ya que no se requiere la predicción de algún comportamiento sino la demostración de comportamientos estructurales.

El método de cálculo para cada configuración aplicada al prototipo varía según el efecto que tenga la disposición de los elementos, los parámetros asociados y la obtención de las matrices de rigidez y masa, dando como resultado la respuesta dinámica de la configuración calculada. En la sección 1.2 se describieron las tres configuraciones principales para esta tesis, a continuación se expone toda la metodología y análisis usado para los cálculos pertinentes en cada configuración, además un breve resumen de las características del prototipo base. Se presenta un método de análisis para la obtención de los parámetros de vibración por medio de métodos analíticos mostrados en la capítulo anterior y además la respuesta del programa SAP en las diferentes configuraciones.

### 3.1 GENERALIDADES DEL PROTOTIPO

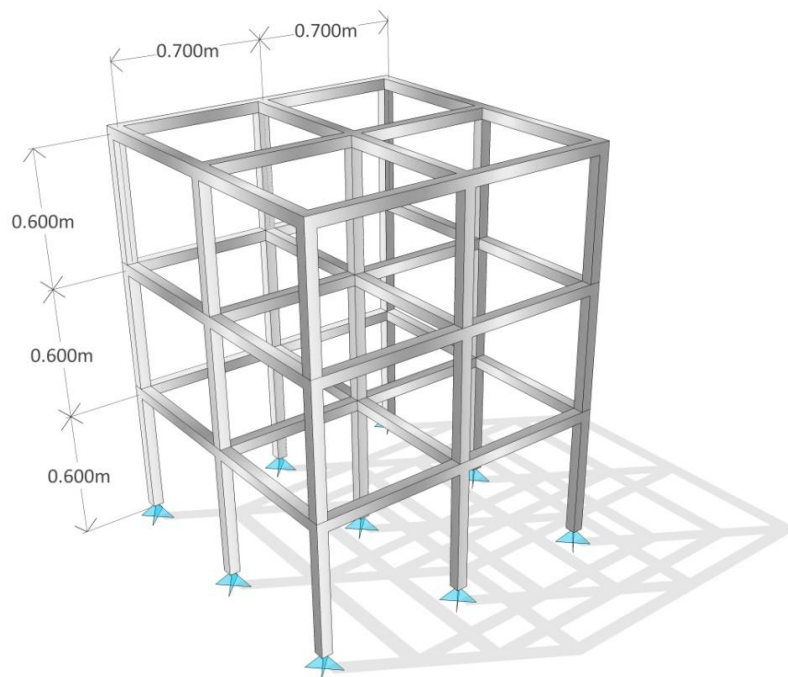


Figura 25. Perspectiva de Prototipo base

El prototipo tiene una configuración inicial la cual cuenta con una geometría regular a base de marcos con dos claros de 0.7m y tres niveles de 0.6m de altura (Figura 25).

Los elementos estructurales del prototipo, columnas y vigas, serán de sección PTR 2"x 2"x 3/16" (5 x 5 x 0.5 cm), de aluminio 6061-T6. Las conexiones se construirán de tal modo que se pueda modificar la configuración inicial. La condición de apoyo de las columnas se considerará como simplemente apoyada. Al diseñar el modelo con esta configuración regular se logrará obtener una respuesta que servirá de punto de comparación con la respuesta obtenida con las demás configuraciones.

### 3.1.1 Propiedades del material

Cuando se trabaja con modelos elásticos se recomienda construirlo con un material elástico y homogéneo. El modelo está restringido a simular el comportamiento en el intervalo elástico y se ha escogido para el diseño un material con módulo de elasticidad de bajo valor para de esta manera acentuar deformaciones y hacer visibles dichos comportamientos.

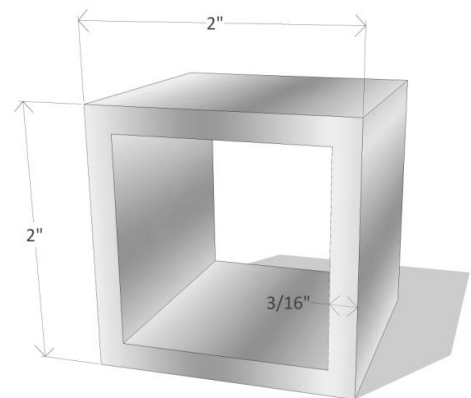


Figura 26. Sección transversal

En este caso se trabajará con una sección PTR 2"x 2"x 3/16" (5 x 5 x 0.5 cm) en aluminio grado 6000, en específico con la aleación 6061-T6 con las propiedades mostradas en la Tabla 1.

Propiedades físicas	Sistema métrico	Sistema ingles	Sistema técnico	comentarios
Densidad	2.7 g/cc	0.0975 lb/in <sup>3</sup>	2.7 ton/m <sup>3</sup>	
<b>Propiedades mecánicas</b>				
Resistencia a la tensión, ultima	310 MPa	45000 psi	38 ton/m <sup>2</sup>	
Resistencia a la tensión, yield	275 MPa	39900 psi	35 ton/m <sup>2</sup>	
Elongación al quiebre	12%	12%	12%	En una muestra de 0.5 por 1.6cm
Modulo de elasticidad	68 GPa	10000 ksi	7310000 ton/m <sup>2</sup>	Promedio de Tension y compresion
Modulo de Poison	0.33	0.33	0.33	
Modulo de corte	26 GPa	3770 ksi	2748120 ton/m <sup>2</sup>	
Resistencia al corte	205 MPa	29700 psi	24 ton/m <sup>2</sup>	

Tabla 1. Propiedades del Aluminio grado 6000

### 3.1.2 Distribucion de masa

Para el diseño de la estructura se consideró un peso de entrepiso de 110 kg para simular esta carga se deberán colocar placas de acero de 1.45 x 0.5 x 0.01 m con un peso aproximado de 55 kg cada una. (Peso específico acero 7850 kg/m<sup>3</sup>)(Figura 27).

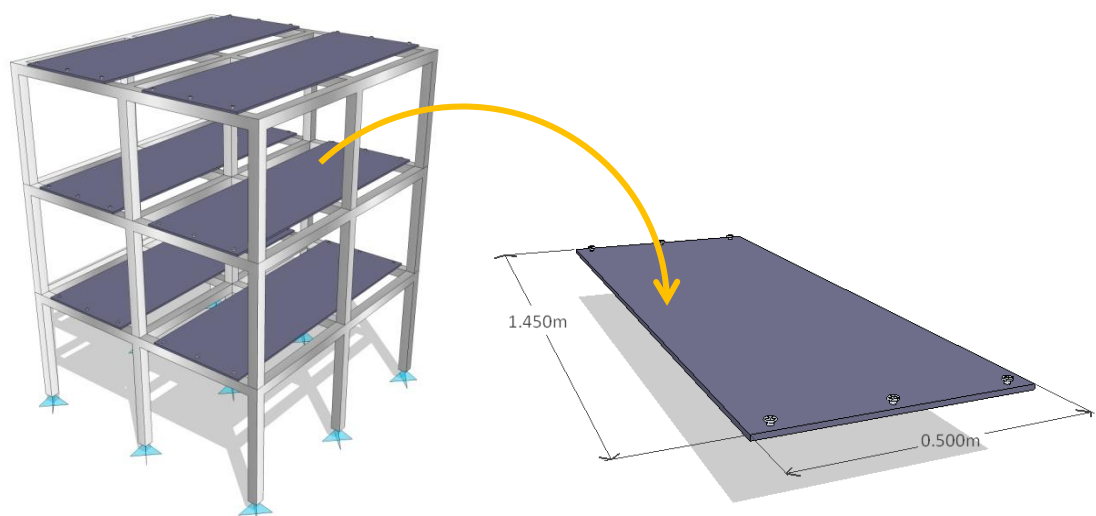


Figura 27. Prototipo con placas de acero

### 3.2 METODOLOGÍA PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS

Esta metodología se aplica para la configuración de piso débil y de interrupción de columnas intermedias.

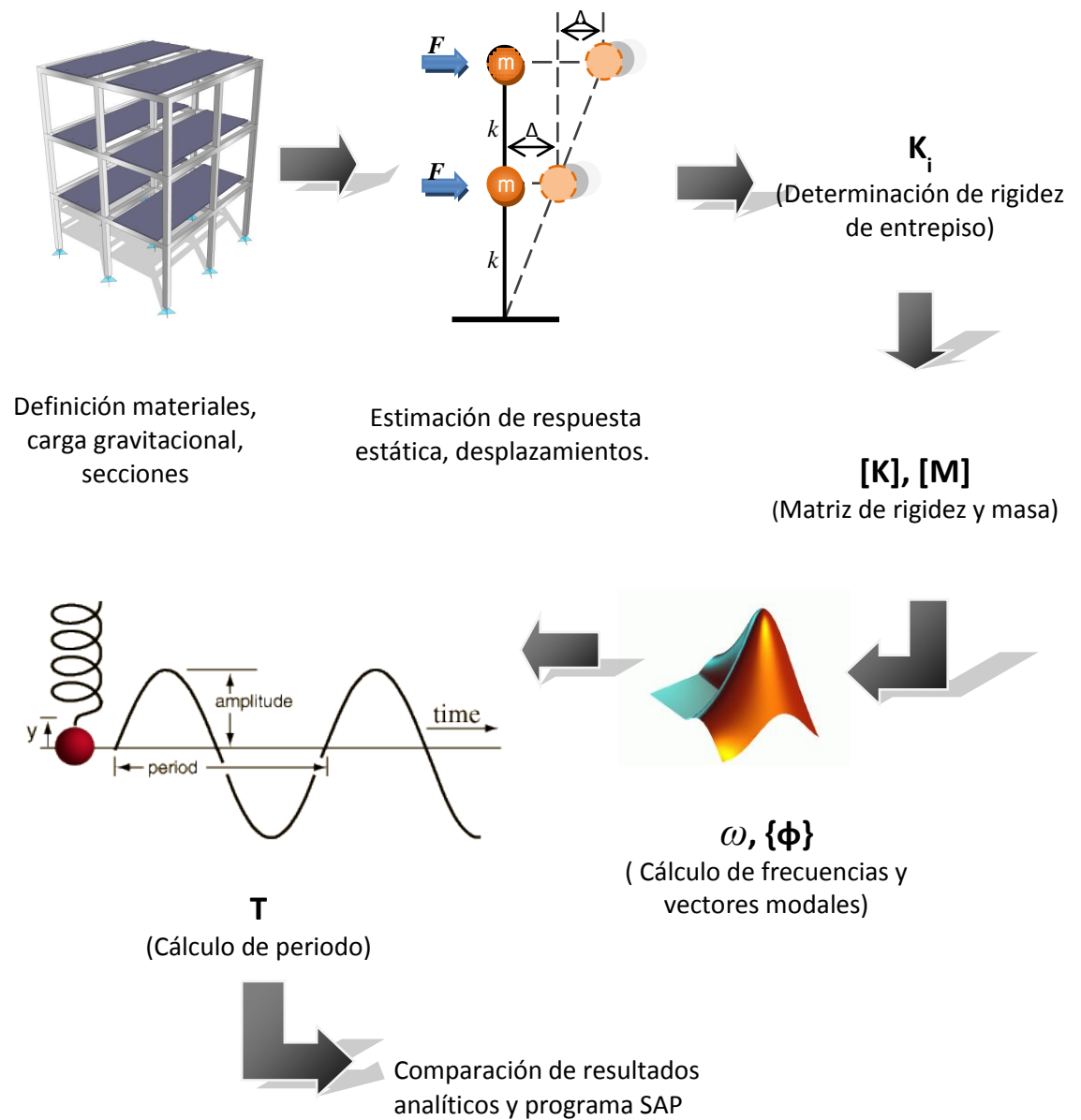


Figura 28. Diagrama de flujo para la determinación de las propiedades dinámicas

Como se puede observar en el diagrama de flujo de la Figura 28, es el resumen de los pasos generales para la obtención de las propiedades dinámicas, mismos que se presentaran en la siguiente sección.

Se inicia con la definición de los datos principales de la estructura, dimensionamiento y propiedades del material mencionados en la sección 3.1.

Se continúa con la estimación de la respuesta estática, donde se obtienen los desplazamientos relativos y así poder comparar resultados de rigidez lateral con los mostrados por medio de la condensación estática.

Para la determinación de la rigidez de entrepiso, se necesita obtener la rigidez lateral por marco para después hacer una condensación de todos los grados de libertad presentes en la estructura y reducirlos a solo los principales grados de libertad laterales, que simbolizara el movimiento de la masa concentrada por piso. Ya con las rigideces de entrepiso se ensambla la matriz de rigidez del sistema y la matriz de masa.

Por medio de un lenguaje de programación matricial se obtienen las frecuencias y periodos. Por último se comparan los resultados de la metodología analítica y los mostrados por SAP2000.

Para efectos prácticos solo se presenta en esta sección los cálculos para la configuración de piso débil, ya que se emplea la misma metodología para el caso de interrupción de columnas.

### 3.3 PISO DÉBIL

Las características de esta configuración fueron descritas en la sección 2.4.2. Siguiendo la metodología para esta configuración considerando marcos planos y apoyos articulados, primero se obtiene la rigidez por marco plano.

En el caso de barras doblemente empotrada se usara la matriz (49), mostrada en el capítulo 2.6.2, la cual ya está transformada de coordenadas locales a globales. Sin embargo para algunas columnas de la base, que se encuentran articuladas en un extremo y empotradas en el otro, es necesario utilizar la matriz (61), mostrada a continuación.

$$\begin{bmatrix} \left( c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{3EI}{L^3} \right) & (0) & \left( -c^2 \frac{EA}{L} - s^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -s \frac{3EI}{L^2} \right) \\ \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & (0) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -s^2 \frac{EA}{L} - c^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( c \frac{3EI}{L^2} \right) \\ (0) & (0) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ \left( -c^2 \frac{EA}{L} - s^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{3EI}{L^3} \right) & (0) & \left( c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( s \frac{3EI}{L^2} \right) \\ \left( -cs \frac{EA}{L} + cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -s^2 \frac{EA}{L} - c^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & (0) & \left( cs \frac{EA}{L} - cs \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{3EI}{L^3} \right) & \left( -c \frac{3EI}{L^2} \right) \\ \left( -s \frac{3EI}{L^2} \right) & \left( c \frac{3EI}{L^2} \right) & (0) & \left( s \frac{3EI}{L^2} \right) & \left( -c \frac{3EI}{L^2} \right) & \left( \frac{3EI}{L} \right) \end{bmatrix} \quad (61)$$

Para encontrar la matriz de rigidez de cada elemento, se elaboro una hoja de cálculo en el programa *Excel*, el cual se dividió en dos marcos, los laterales y el central

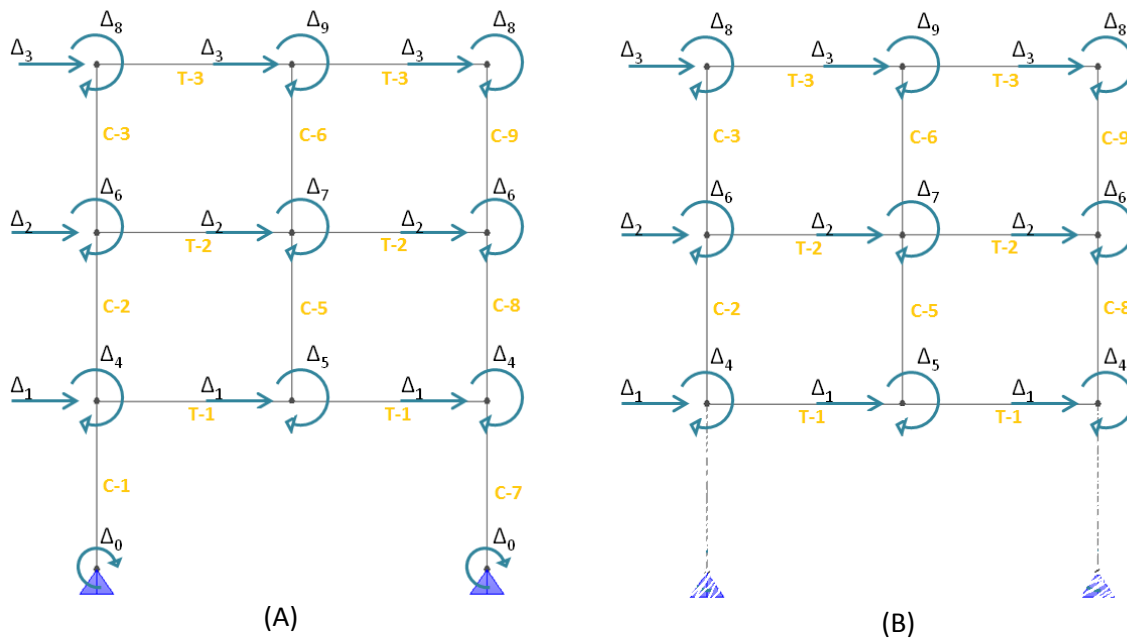


Figura 29. (A) Marco lateral y (B) Marco Central de la configuración piso débil

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación de la matriz (61), eliminando los coeficientes de desplazamiento vertical ya que estos se desprecian, en una columna de la base y de una viga doblemente empotrada. Los demás elementos se encuentran en el Anexo 1.

**Columna**

**Propiedades**

			0	$\Delta 0$	$\Delta 1$	$\Delta 4$		
$\phi =$	90	$E =$	7310000	28.23	0.00	-28.23	-16.94	0
$\cos =$	0.00	$A =$	0.000819	0.00	0.00	0.00	0.00	$\Delta 0$
$\text{sen} =$	1.00	$I =$	2.7804E-07	-28.23	0.00	28.23	16.94	$\Delta 1$
		$L =$	0.6	-16.94	0.00	16.94	10.16	$\Delta 4$

Unidades: Modulo de elasticidad (E), ton/m<sup>2</sup>. Área transversal(A), m<sup>2</sup>.Momento de inercia (I), m<sup>4</sup>. Longitud (L), m.

Viga

Propiedades

		$\Delta 1$	$\Delta 4$	$\Delta 1$	$\Delta 5$			
$\phi =$	0	E =	7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 1$
cos =	1.00	A =	0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 4$
sen =	0.00	I =	2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 1$
		L =	0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 5$

Una vez que se tiene las matrices de rigidez de todos los elemento, se ensambla la matriz global de rigidez obteniéndose la matriz de la ecuación (62) para un marco lateral y la matriz de la ecuación (63) para el marco central.

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	$\Delta 7$	$\Delta 8$	$\Delta 9$
$\Delta 1$	395.20	-338.75	0.00	-33.87	-33.87	-67.75	-33.87	0.00	0.00
$\Delta 2$	-338.7454	677.49	-338.75	67.75	33.87	0.00	0.00	-67.75	-33.87
$\Delta 3$	0	-338.7454	338.75	0.00	0.00	67.75	33.87	67.75	33.87
$\Delta 4$	-33.87454	67.74908	0	70.65	11.61	13.55	0	0	0
$\Delta 5$	-33.87454	33.87454	0	11.614128	36.78	0.00	6.77	0	0
$\Delta 6$	-67.74908	0	67.74908	13.549816	0.00	77.43	11.61	13.55	0
$\Delta 7$	-33.87454	0	33.87454	0	6.77	11.614128	50.33	0	6.77
$\Delta 8$	0	-67.74908	67.74908	0	0.00	13.549816	0	50.33	11.61
$\Delta 9$	0	-33.87454	33.87454	0	0.00	0	6.774908	11.61	36.78

(62)

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	$\Delta 7$	$\Delta 8$	$\Delta 9$
$\Delta 1$	338.75	-338.75	0.00	-67.75	-33.87	-67.75	-33.87	0.00	0.00
$\Delta 2$	-338.7454	677.49	-338.75	67.75	33.87	0.00	0.00	-67.75	-33.87
$\Delta 3$	0	-338.7454	338.75	0.00	0.00	67.75	33.87	67.75	33.87
$\Delta 4$	-67.74908	67.74908	0	50.33	11.61	13.55	0	0	0
$\Delta 5$	-33.87454	33.87454	0	11.614128	36.78	0.00	6.77	0	0
$\Delta 6$	-67.74908	0	67.74908	13.549816	0.00	77.43	11.61	13.55	0
$\Delta 7$	-33.87454	0	33.87454	0	6.77	11.614128	50.33	0	6.77
$\Delta 8$	0	-67.74908	67.74908	0	0.00	13.549816	0	50.33	11.61
$\Delta 9$	0	-33.87454	33.87454	0	0.00	0	6.774908	11.61	36.78

(63)

Como el prototipo está conformado por tres marcos, dos marcos laterales y un central, la matriz total debe ser la suma de los tres, por lo tanto, la matriz de rigidez total de la configuración de piso débil queda de la siguiente forma:

	$\Delta 1$	$\Delta 2$	$\Delta 3$	$\Delta 4$	$\Delta 5$	$\Delta 6$	$\Delta 7$	$\Delta 8$	$\Delta 9$
$\Delta 1$	1129.15	-1016.24	0.00	-135.50	-101.62	-203.25	-101.62	0.00	0.00
$\Delta 2$	-1016.24	2032.47	-1016.24	203.25	101.62	0.00	0.00	-203.25	-101.62
$\Delta 3$	0	-1016.24	1016.24	0.00	0.00	203.25	101.62	203.25	101.62
$\Delta 4$	-135.498	203.247	0	191.63	34.84	40.65	0.00	0.00	0.00
$\Delta 5$	-101.624	101.624	0	34.842384	110.33	0.00	20.32	0.00	0.00
$\Delta 6$	-203.247	0	203.24724	40.649448	0.00	232.28	34.84	40.65	0.00
$\Delta 7$	-101.624	0	101.62362	0	20.32	34.842384	150.98	0.00	20.32
$\Delta 8$	0	-203.247	203.24724	0	0.00	40.649448	0	150.98	34.84
$\Delta 9$	0	-101.624	101.62362	0	0.00	0	20.324724	34.84	110.33

(64) Matriz global ensamblada

Aplicando la condensación estática mostrada en el capítulo 2.5.6. Se obtiene la matriz de rigidez condensada  $[k_{tt}]$ , quedando de la siguiente forma:

**Matriz condensada**

$$k_{tt} = \begin{pmatrix} 801.6 & -816.7 & 155.8 \\ -816.7 & 1473.1 & -719.8 \\ 155.8 & -719.8 & 572.6 \end{pmatrix}$$

**Desplazamientos (m)**

Los desplazamientos de entrepiso se obtuvieron multiplicando el vector de fuerzas por la inversa de la matriz condensada de rigidez

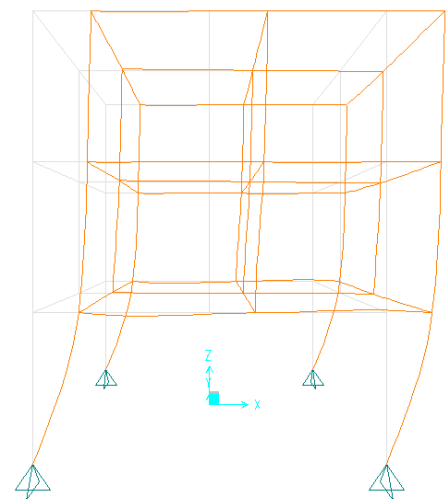


Figura 30. Deformación de piso débil

$$\delta = \begin{pmatrix} 0.0393 \\ 0.0469 \\ 0.0500 \end{pmatrix}$$

### ***Rigideces de entrepiso***

Una vez que se tienen los desplazamientos, se calculan la rigideces de cada entrepiso utilizando la formula  $k = \left[ \frac{F}{\delta} \right]$  donde se divide la fuerza cortante entre el desplazamiento relativo de cada entrepiso. Por lo tanto se obtienen las siguientes rigideces en unidades de ton/m.

$$k = \begin{pmatrix} 322.74 \\ 263.58 \\ 76.33 \end{pmatrix}$$

### ***Matrices de rigidez y de masa***

Con estas rigideces de entrepiso y de acuerdo con el procedimiento utilizado en las ecuaciones (20) y (21) se ensamblan las matrices de rigidez y de masa.

$$K = \begin{pmatrix} 339.91 & -263.58 & 0 \\ -263.58 & 586.31 & -322.74 \\ 0 & -322.74 & 322.74 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0.0112 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0112 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0112 \end{pmatrix}$$

### ***Frecuencias de vibración***

Con la matriz de rigidez y con la matriz de masa se resuelve el problema de valores característicos mostrados en la ecuación (25) y se encuentran las frecuencias (Hz) utilizando un programa elaborado en MATLAB (Anexo 2):

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 1947 \\ 29745 \\ 79823 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 44.12 \\ 172.47 \\ 282.53 \end{pmatrix}$$

### **Periodos de vibración**

Para encontrar los periodos utilizamos la ecuación (33), los cuales están en unidades de segundos:

$$T = \begin{pmatrix} 0.142 \\ 0.036 \\ 0.022 \end{pmatrix}$$

Los parámetros dinámicos calculados anteriormente de forma analítica son comparados con la respuesta del prototipo deducido en el programa de elementos finitos SAP2000, en la tabla se puede ver dicha comparación.

Entrepiso	Desplazamientos $\delta$ (m)		Frecuencias $\omega$ (Hz)		Periodos $T$ (s)	
	Analítico	SAP	Analítico	SAP	Analítico	SAP
1	0.0393	0.0453	44.120	39.538	0.142	0.158
2	0.0469	0.0538	172.467	156.09	0.036	0.040
3	0.0500	0.0576	282.529	291.75	0.022	0.022

Tabla 2. Comparación de resultados por el método analítico y SAP2000

### **Configuraciones modales**

Obteniendo la ecuación  $|K - \omega^2 M| = 0$  con los valores de las matrices anteriormente mencionadas, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 339.91 - 0.0112\omega_1^2 & -263.57 & 0 \\ -263.57 & 586.31 - 0.0112\omega_2^2 & -322.74 \\ 0 & -322.74 & 322.74 - 0.0112\omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{Bmatrix} = 0$$

El sistema de ecuaciones no tiene solución única por lo que se toma como valor inicial de  $z_{1j}=1$ . En la tabla se muestran los valores de desplazamiento modal, para cada periodo T.

Entrepiso	Modo 1	Modo 2	Modo 3
	T=0.142s	T=0.036s	T=0.022s
1	1	1	1
2	1.207	0.026	-2.101
3	1.294	-0.796	1.187

Tabla 3. Desplazamientos modales de la configuración Piso débil

**Formas modales**

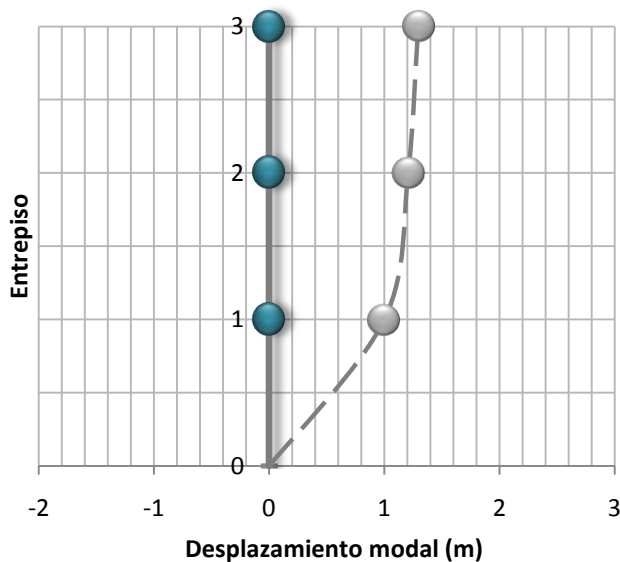


Figura 31. Configuración del primer modo

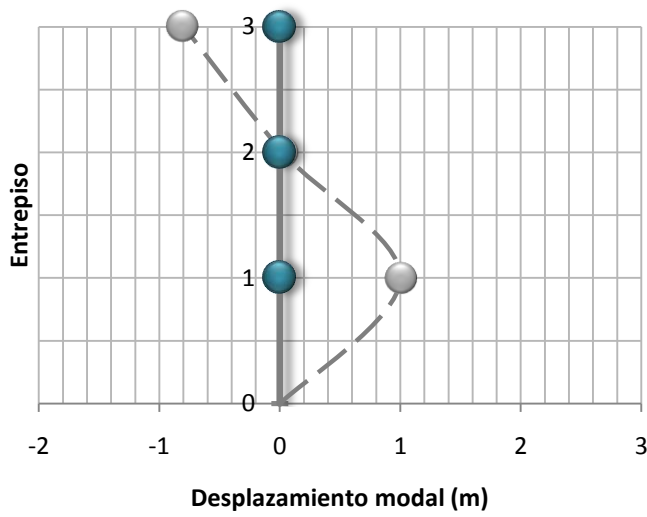


Figura 32. Configuración del segundo modo

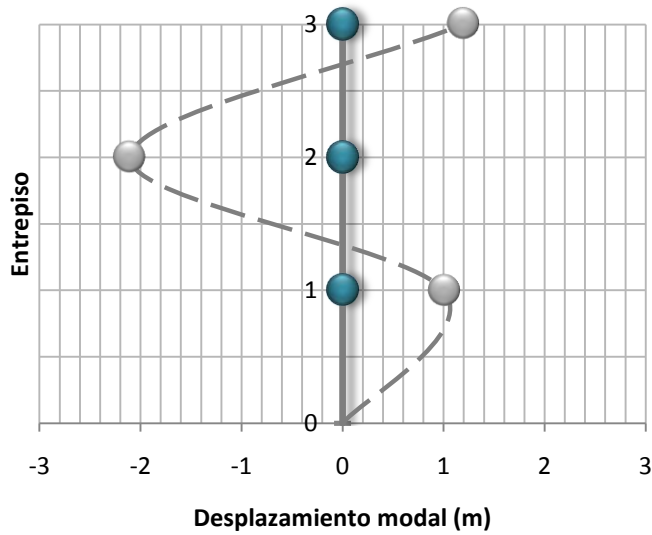


Figura 33. Configuración del tercer modo

### 3.4 ENTREPISOS FLEXIBLES

Las características de esta configuración fueron descritas en la sección 2.4.3. Siguiendo la metodología desarrollada de la configuración de piso débil descrito en el capítulo anterior, se tiene como resultado del comportamiento esperado, lo que a continuación se describe.

En el caso de entrepiso flexible se tienen dos marcos diferentes tomando en cuenta los grados de libertad en cada nodo mostrados en la Figura 34 .

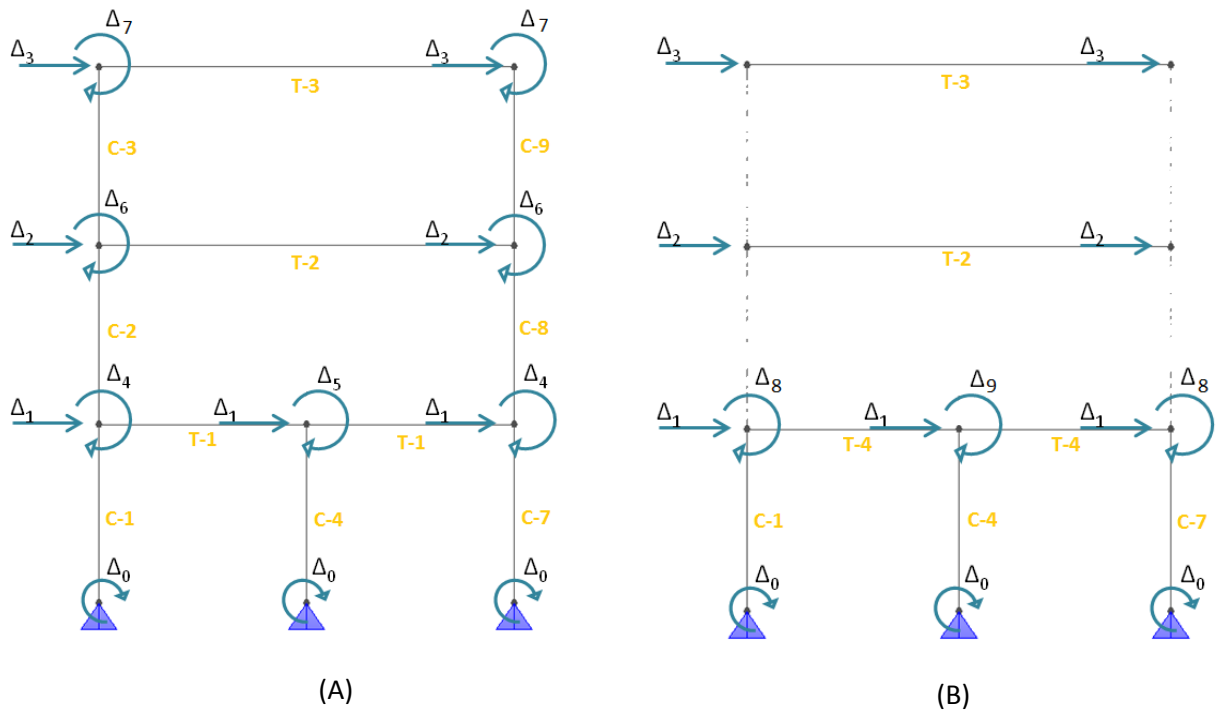


Figura 34. (A) Marco lateral y (B) Marco Central de la configuración entrepiso flexible

Los calculos de la matriz de rigidez, se encuentran en el anexo 3.

**Matriz condensada**

$$k_{tt} = \begin{pmatrix} 502.7 & -358.18 & 86.87 \\ -358.18 & 557.86 & -255.42 \\ 86.87 & -255.42 & 176.84 \end{pmatrix}$$

**Desplazamientos (m)**

Los desplazamientos de entrepiso se obtuvieron multiplicando el vector de fuerzas por la inversa de la matriz condensada de rigidez

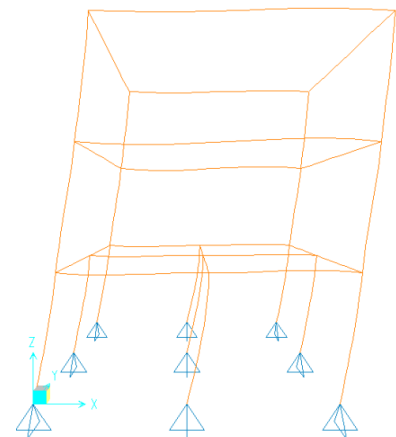


Figura 35. Deformación de entrepiso flexible

$$\delta = \begin{pmatrix} 0.0203 \\ 0.0379 \\ 0.0505 \end{pmatrix}$$

### **Rigideces de entrepiso**

$$k = \begin{pmatrix} 79.74 \\ 113.41 \\ 147.84 \end{pmatrix}$$

### **Matrices de rigidez y de masa**

En este caso, se prefirió usar la matriz condensada como  $K$  ya que se acercaban más los resultados finales de SAP2000.

$$K = \begin{pmatrix} 502.7 & -358.18 & 86.87 \\ -358.18 & 557.86 & -255.42 \\ 86.87 & -255.42 & 176.84 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0.0112 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0112 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0112 \end{pmatrix}$$

### **Frecuencias de vibración**

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 2180 \\ 21892 \\ 86410 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 46.69 \\ 147.96 \\ 293.96 \end{pmatrix}$$

### **Periodos de vibración**

Para encontrar los periodos ( $T$ ) utilizamos la ecuación (33), los cuales están en unidades de segundos.

$$T = \begin{pmatrix} 0.135 \\ 0.043 \\ 0.021 \end{pmatrix}$$

Los parámetros dinámicos calculados anteriormente de forma analítica son comparados con la respuesta del prototipo deducido en el programa de elementos finitos SAP2000, en la tabla se puede ver dicha comparación.

Entrepiso	Desplazamientos $\delta$ (m)		Frecuencias $\omega$ (Hz)		Periodos $T$ (s)	
	Analítico	SAP	Analítico	SAP	Analítico	SAP
1	0.0203	0.0203	46.69	46.80	0.135	0.134
2	0.0379	0.0378	147.96	148.19	0.043	0.042
3	0.0505	0.0502	293.96	295.97	0.021	0.021

Tabla 4. Comparación de resultados por el método analítico y SAP2000

### Configuraciones modales

En la tabla se muestran los valores de desplazamiento modal, para cada periodo T.

Entrepiso	Modo 1	Modo 2	Modo 3
	T=0.135s	T=0.043s	T=0.021s
1	1	1	1
2	2.017	0.539	-1.179
3	2.810	-0.743	0.491

Tabla 5. Desplazamientos modales de la configuración piso débil

**Formas modales**

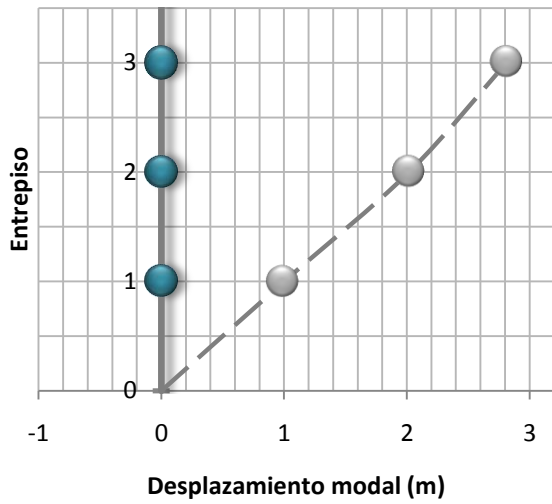


Figura 36. Configuración del primer modo

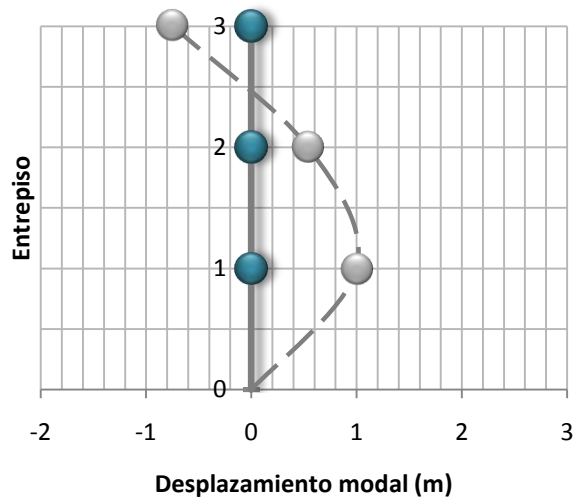


Figura 37. Configuración del segundo modo

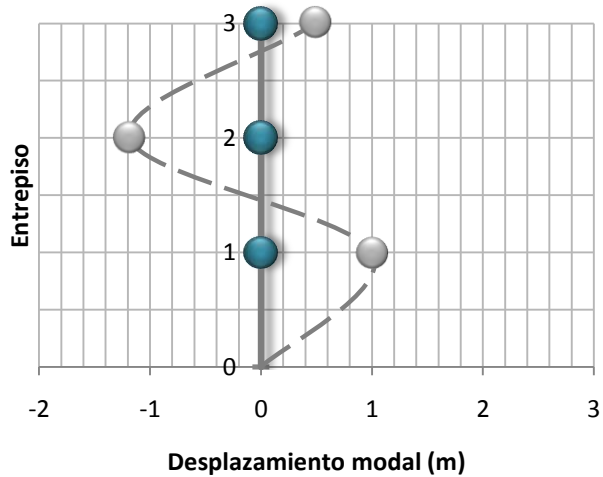


Figura 38. Configuración del tercer modo

### 3.5 IRREGULARIDAD EN PLANTA

Las características de esta configuración fueron descritas en la sección 2.4.1. Siguiendo la metodología de la sección 2.7.1 para esta configuración considerando marcos planos y apoyos articulados, se obtiene la rigidez.

Para efectos prácticos en la identificación de los marcos, se nombro a cada sistema resistente con la nomenclatura 1X, 1Y, 2X, 2Y, 3X y 3Y, como se muestra en la siguiente figura.

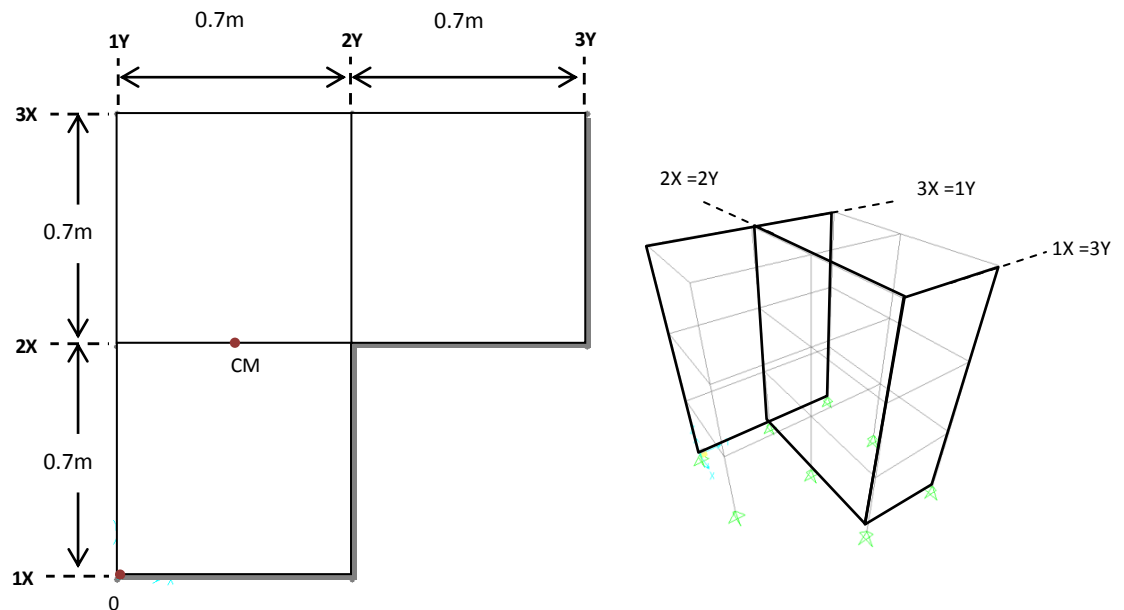


Figura 39. Marcos resistentes en irregularidad en planta

En la Tabla 6 y Tabla 7 se encuentran las coordenadas del centro de masa (CM) y de los sistemas resistentes respectivamente en relación al punto cero ubicado en la esquina inferior izquierda de la planta como se muestra en la Figura 39.

Coordenadas centro de masas		
Nivel	$x_i$ (m)	$y_i$ (m)
1	0.350	0.700
2	0.350	0.700
3	0.350	0.700

Tabla 6. Coordenadas del centro de masas en los tres niveles

Sistemas resistentes			
SR, <i>j</i>	$Y_i$ (m)	SR, <i>j</i>	$X_i$ (m)
1X	0.000	1Y	0.000
2X	0.700	2Y	0.700
3X	1.400	3Y	1.400

Tabla 7. Coordenadas de los sistemas resistentes

En la Tabla 8 se encuentran los datos geométricos para transformar desplazamientos de los sistemas resistentes del modelo a grados de libertad de los centros de masas.

Sistema resistente <i>j</i>	Angulo $\phi_j$ <i>i=1 -3</i> (grados)	Distancia $r_{ij}$ (m)
		Nivel 1-3 ( $y_I - Y_j$ o $X_j - x_I$ )
1X	0	0.700 - 0.000 = 0.700
2X	0	0.700 - 0.700 = 0.000
3X	0	0.700 - 1.400 = - 0.700
1Y	90	0.000 - 0.350 = - 0.350
2Y	90	0.700 - 0.350 = 0.350
3Y	90	1.400 - 0.350 = 1.050

Tabla 8. Datos geométricos de transformación

Los pasos anteriores son previos al método pseudo tridimensional, sin embargo también se debe de encontrar la matriz lateral para cada marco diferente en la configuración o también llamado sistema resistente.

Para obtener la matriz de rigidez lateral para cada marco se utilizaron los mismos pasos que para los casos anteriores y que se pueden ver en la sección 3.3. Los marcos que se usaron en este procedimiento se muestran en la Figura 40.

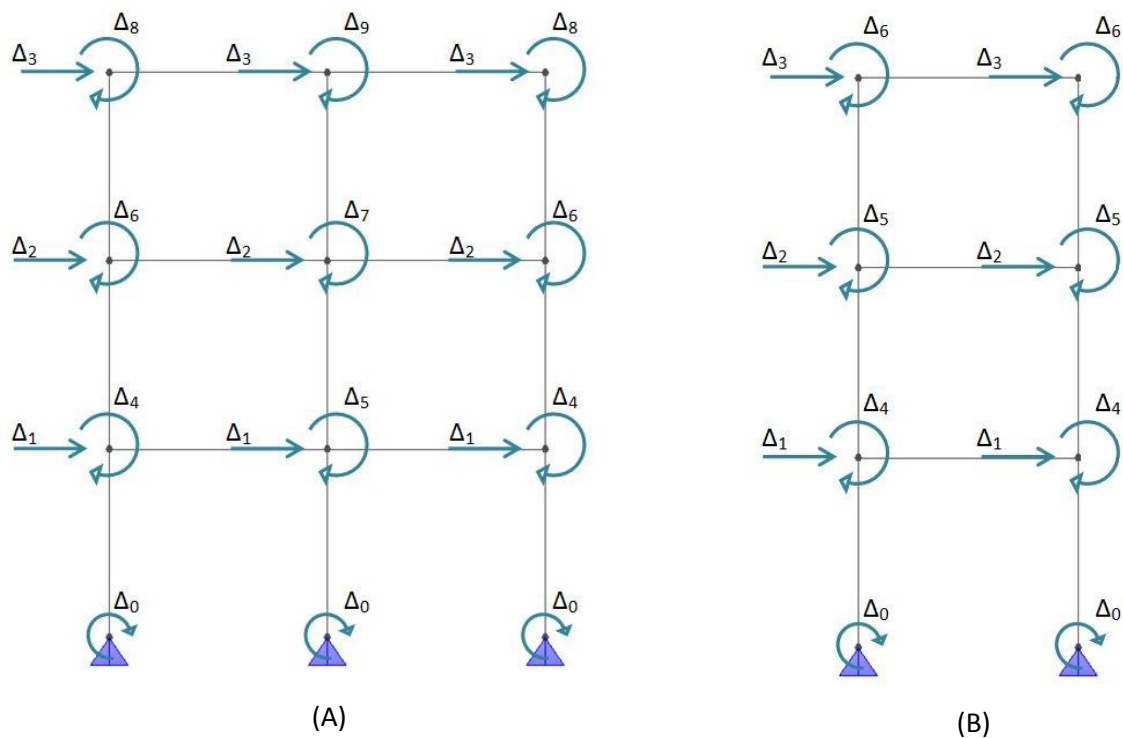


Figura 40. (A) Marco 1X=3Y y (B) Marco Central 2x=2Y de la configuración irregularidad en planta

**Matriz de rigidez**

Para este procedimiento se obtuvieron dos matrices condensadas, que corresponden a los marcos mostrados en el Figura 40.

$$K_{1X} = K_{3Y} \begin{pmatrix} 222.24 & -195.22 & 39.25 \\ -195.22 & 557.86 & -154.04 \\ 39.25 & -154.04 & 118.31 \end{pmatrix}$$

$$K_{2X} = K_{3X} = K_{1Y} = K_{2Y} \begin{pmatrix} 340.52 & -296.72 & 54.50 \\ -296.72 & 499.76 & -240.90 \\ 54.50 & -240.90 & 190.99 \end{pmatrix}$$

Después de tener las matrices condensadas se calculan las matrices de transformación como lo indica la ecuación (55).

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1X}^T &= \langle 1.000 & 0.000 & 0.700 \rangle & \mathbf{b}_{1Y}^T &= \langle 0.000 & 1.000 & -0.350 \rangle \\ \mathbf{b}_{2X}^T &= \langle 1.000 & 0.000 & 0.000 \rangle & \mathbf{b}_{2Y}^T &= \langle 0.000 & 1.000 & 0.350 \rangle \\ \mathbf{b}_{3X}^T &= \langle 1.000 & 0.000 & -0.700 \rangle & \mathbf{b}_{3Y}^T &= \langle 0.000 & 1.000 & 1.050 \rangle \end{aligned}$$

Estos valores son los mismos para los tres niveles.

Se ordenan los grados de libertad, colocando primero los desplazamientos horizontales de todos los pisos, luego los verticales y finalmente los giros, por lo tanto se tiene:

$$\mathbf{U} = \langle u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \rangle$$

$$\mathbf{B}_{1X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.700 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.700 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{1Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.350 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.350 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.350 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{2X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{2Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.350 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.350 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.350 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{3X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.700 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.700 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.700 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{3Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.050 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.050 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.050 \end{pmatrix}$$

Para obtener las matrices transformadas se efectúa la operación mostrada en la ecuación (56), las siguientes matrices son para los sistemas resistentes 1X y 1Y, las demás se pueden encontrar en el anexo 4:

Sistema 1X

$$\mathbf{K}_{1X}^* = \mathbf{B}_{1X}^T \cdot \mathbf{K}_{1X} \cdot \mathbf{B}_{1X}$$

$$\mathbf{K}_{1X}^* = \begin{pmatrix} 222.24 & -195.22 & 39.25 & 0 & 0 & 0 & 155.57 & -136.65 & 27.48 \\ -195.22 & 321.60 & -154.04 & 0 & 0 & 0 & -136.65 & 225.12 & -107.83 \\ 39.25 & -154.04 & 118.31 & 0 & 0 & 0 & 27.48 & -107.83 & 82.82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 155.57 & -136.65 & 27.48 & 0 & 0 & 0 & 108.90 & -95.66 & 19.23 \\ -136.65 & 225.12 & -107.83 & 0 & 0 & 0 & -95.66 & 157.58 & -75.48 \\ 27.48 & -107.83 & 82.82 & 0 & 0 & 0 & 19 & -75.48 & 57.97 \end{pmatrix}$$

Sistema 1Y

$$\mathbf{K}_{1Y}^* = \mathbf{B}_{1Y}^T \cdot \mathbf{K}_{1Y} \cdot \mathbf{B}_{1Y}$$

$$\mathbf{K}_{1Y}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 340.52 & -296.72 & 54.50 & -119.18 & 103.95 & -19.08 \\ 0 & 0 & 0 & -296.72 & 499.76 & -240.90 & 103.85 & -174.92 & 84.32 \\ 0 & 0 & 0 & 54.50 & -240.90 & 190.99 & -19.08 & 84.32 & -66.85 \\ 0 & 0 & 0 & -119.18 & 103.85 & -19.08 & 41.71 & -36.35 & 6.68 \\ 0 & 0 & 0 & 103.95 & -174.92 & 84.32 & -36.35 & 61.22 & -29.51 \\ 0 & 0 & 0 & -19.08 & 84.32 & -66.85 & 6.68 & -29.51 & 23.40 \end{pmatrix}$$

Por último ensamblando la matriz total transformada  $K_e$  como lo indica la ecuación

(59) , se obtiene:

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 903.28 & -788.66 & 148.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -82.80 & 71.05 & -10.68 \\ -788.66 & 1321.12 & -635.84 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 71.05 & -124.71 & 60.80 \\ 148.25 & -635.84 & 500.29 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -10.68 & 60.80 & -50.88 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 903.28 & -788.66 & 148.25 & 233.35 & -204.98 & 41.21 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -788.66 & 1321.12 & -635.84 & -204.98 & 337.68 & -161.74 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 148.25 & -635.84 & 500.29 & 41.21 & -161.74 & 124.23 \\ -82.80 & 71.05 & -10.68 & 233.35 & -204.98 & 41.21 & 604.20 & -528.98 & 102.56 \\ 71.05 & -124.71 & 60.80 & -204.98 & 337.68 & -161.74 & -528.98 & 879.47 & -422.37 \\ -10.68 & 60.80 & -50.88 & 41.21 & -161.74 & 124.23 & 102.56 & -422.37 & 328.79 \end{pmatrix}$$

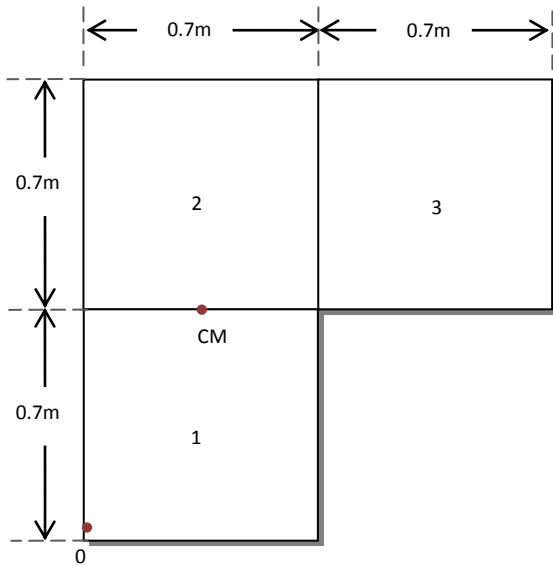
### **Matriz de masa**

En la matriz M, a los desplazamientos laterales les corresponde la masa traslacional del nivel en cuestión y al giro en eje vertical le corresponde la inercia rotacional de la masa con respecto a dicho eje. Tratándose de fuerzas sísmicas que obran en los centros de masas de los niveles, es conveniente que los ejes verticales pasen por tales centros.

La carga a utilizar por entrepiso es de 110 kg, por lo que la masa será de 11.2 kg.

Enseguida se muestra el cálculo para obtener los momentos de inercia, donde  $J=mr^2$ .

*Obtención del centro geométrico*



No.	b	h	A
1	0.7	0.7	0.49
2	0.7	0.7	0.49
3	0.7	0.7	0.49
		$\Sigma=$	1.47

No.	x	y	A·x	A·y
1	0.35	0.35	0.172	0.172
2	0.35	1.05	0.172	0.515
3	1.05	1.05	0.515	0.515
$\Sigma=$	1.75	2.45	0.858	1.201

$$X_c = \frac{0.858}{1.47} = 0.583$$

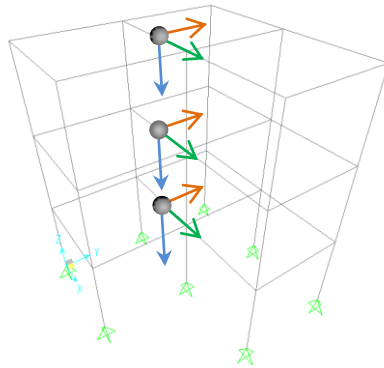
$$Y_c = \frac{1.201}{1.47} = 0.817$$

No.	I	dx	dy	A·(dx) <sup>2</sup>	A·(dy) <sup>2</sup>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>
1	0.020	0.2333	0.4667	0.02667778	0.1067	0.047	0.127
2	0.020	0.2333	0.2333	0.02667778	0.0267	0.047	0.047
3	0.020	0.4667	0.2333	0.10671111	0.0267	0.127	0.047
$\Sigma=$	0.060	0.933	0.933	0.160	0.160	0.220	0.220

Para obtener el radio de giro se sustituye en la siguiente ecuación:

$$r^2 = \frac{I}{A} \rightarrow r_x^2 = 0.149 \quad r_y^2 = 0.149 \quad \rightarrow r^2 = 0.299$$

Sustituyendo en la formula de masa rotacional, se obtiene:



$$J = mr^2 \rightarrow (0.0056) (0.299) = 0.00168$$

- Masa traslacional en  $y = 0.0056$  ton
- Masa traslacional en  $x = 0.0056$  ton
- Masa rotacional en  $z = 0.00168$  ton

Ensamblando la matriz de masas, queda de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0017 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0017 \end{pmatrix}$$

Periodo T (s)		frecuencia circular $\omega$ (Hz)		frecuencia ciclica $\omega$ (rad/sec)	
Analitico	SAP	Analitico	SAP	Analitico	SAP
0.0881	0.0872	71.340	72.027	11.3507	11.463
0.0799	0.0799	78.592	78.651	12.5156	12.518
0.0525	0.0510	119.779	123.130	19.0476	19.596
0.0222	0.0220	282.404	285.610	45.0450	45.457
0.0202	0.0202	311.209	311.310	49.5050	49.547
0.0132	0.0128	475.707	491.900	75.7576	78.289
0.0112	0.0111	561.205	565.250	89.2857	89.962
0.0101	0.0101	619.302	619.440	99.0099	98.587
0.0066	0.0064	955.122	974.660	151.5152	155.12

Tabla 9. Parámetros dinámicos de irregularidad en planta

Continuando con la metodología de las configuraciones anteriores para obtener los parámetros dinámicos, se soluciona el problema de los valores característicos de la ecuación (25). Los resultados de periodos y frecuencias se pueden ver en la Tabla 9.

Las formas modales de esta configuración se obtuvieron del cálculo de  $\phi$  mediante la ecuación(24). En la Tabla 10 se muestran los vectores modales para cada periodo calculado anteriormente mostrado la Tabla 9.

Periodo	T=0.088	T=0.080	T=0.053	T=0.022	T=0.020	T=0.013	T=0.011	T=0.010	T=0.007
Sentido									
x1	2.1247	5.212	-0.8403	-3.5363	9.0282	-1.3371	2.2785	-6.6748	-0.8001
x2	3	7.3113	-1.0998	-1.0579	2.6388	-0.2748	-3.2827	9.7238	1.1917
x3	3.4257	8.3262	-1.2103	3.1137	-7.9808	1.11	1.4638	-4.3582	-0.5376
y1	-4.9159	2.2948	1.7657	8.4879	3.7736	3.0816	-6.2613	-2.4159	2.2803
y2	-6.8689	3.195	2.5061	2.4496	1.0831	0.9308	9.1572	3.4935	-3.2868
y3	-7.8086	3.6264	2.8681	-7.5082	-3.3145	-2.7186	-4.1113	-1.5549	1.4659
$\theta_1$	-3.5379	-0.0542	9.6236	-6.0767	0.0286	16.6726	4.4076	-0.1667	12.1961
$\theta_2$	-4.9658	0.0018	13.6005	-1.7895	0.1272	5.0018	-6.3393	-0.0647	-17.612
$\theta_3$	-5.6565	0.0401	15.5389	5.3387	0.0741	-14.716	2.8134	0.1136	7.8602

Tabla 10. Formas modales de irregularidad en planta

En la figuras 41, 42 y 43 se muestran las formas modales en planta para cada nivel. Como nota se tiene que las cantidades que se encuentran dentro de estas figuras están escaladas a 1/100, con el objetivo de observar mejor los desplazamientos modales.

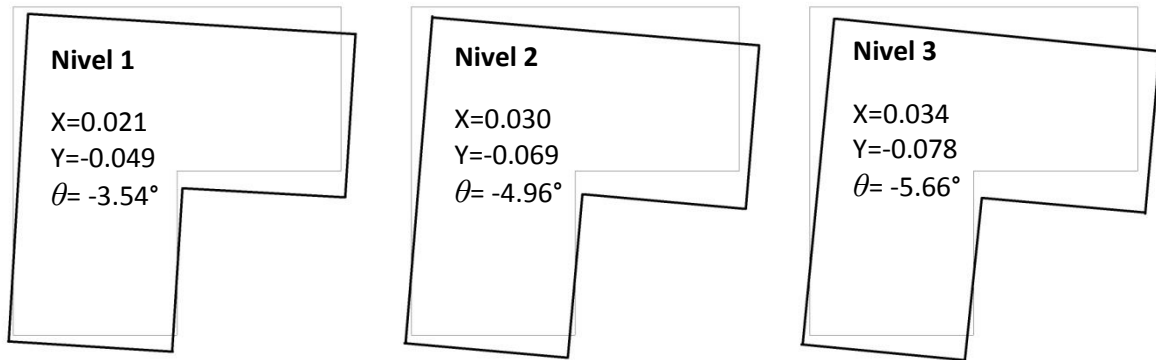


Figura 41. Formas modales en planta del primer modo

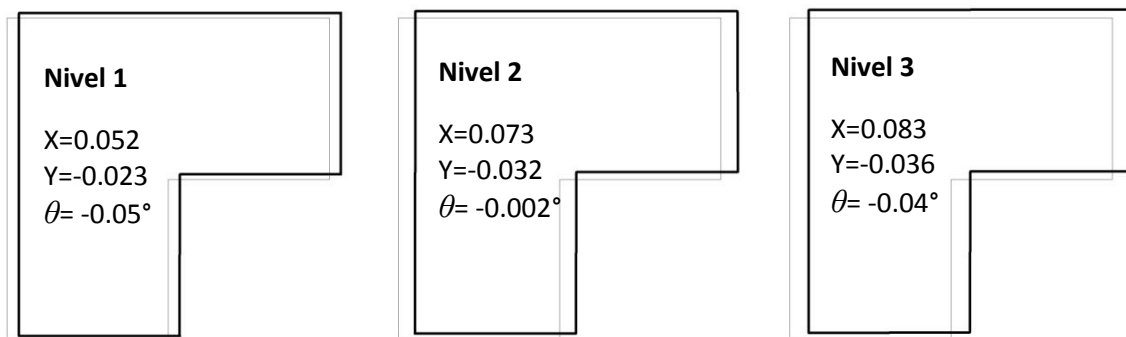


Figura 42. Formas modales en planta del segundo modo

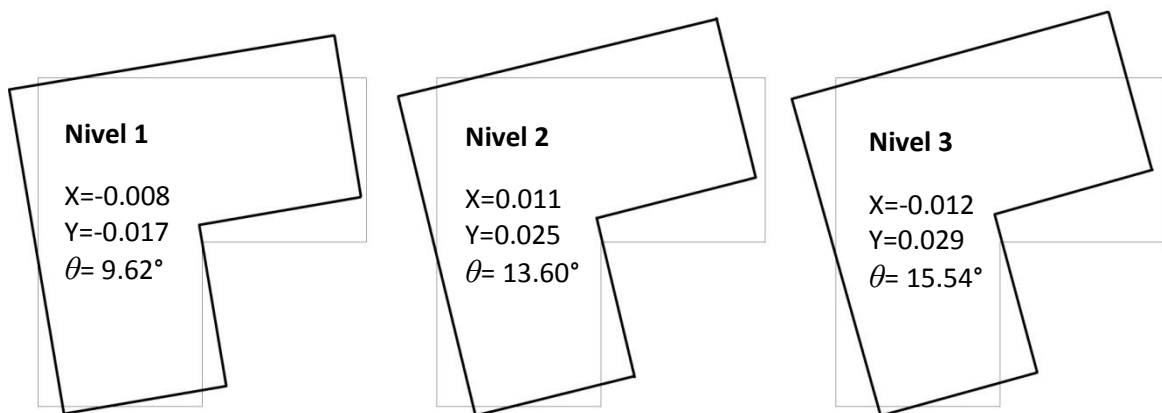


Figura 43. Formas modales en planta del tercer modo

# 4 Resultados

Después de realizar todos los cálculos analíticos y obtener resultados mediante los programas computacionales, se muestran a continuación los resultados de los parámetros dinámicos para cada configuración. Se hacen comparaciones con respecto a resultados del Sap2000 y el método analítico desarrollado en la metodología, así también se comparan los resultados respecto al modelo base.

## 4.1 RESULTADOS PISO DÉBIL

En la Tabla 11 se presenta la comparación de resultados entre la configuración base y de piso débil. Como datos representativos se encuentran en la tabla la rigidez de entrepiso, los desplazamientos y el periodo. Como se esperaba para la configuración débil, la rigidez es menor en el primer entrepiso por la falta de columnas intermedias. Los desplazamientos son mayores en el piso débil y el periodo fundamental aumenta en relación a la configuración base. Los resultados del método analítico y los de Sap2000 se encuentran muy aproximados.

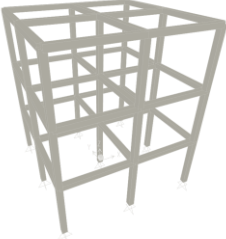

	Configuración base	Configuración piso débil	
			
Entrepiso	Rigidez Entrepiso	Método analítico	Sap2000
3	305.02	305.01	277.78
2	273.97	294.24	250.00
1	151.85	72.187	70.093
Entrepiso	Desplazamientos (m)		
3	0.030	0.053	0.054
2	0.027	0.050	0.051
1	0.019	0.042	0.043
	Periodo (s)		
1	0.108	0.146	0.158
2	0.034	0.037	0.040
3	0.022	0.023	0.022

Tabla 11. Comparación de parámetros dinámicos de piso débil y configuración base

## 4.2 RESULTADOS ENTREPISOS FLEXIBLES

La Tabla 12 muestra la comparación entre la rigidez de entrepiso, desplazamientos y periodos de la configuración base y entrepisos flexibles. Se puede comprobar que debido a la falta de elementos en los entrepisos superiores, la rigidez es menor en estos niveles comparado con la base. En este caso los datos de Sap2000 y el método analítico son similares, como nota cabe destacar que se utilizó en el caso de la matriz de rigidez la matriz condensada del sistema, ya que los resultados daban más cercanos a los de Sap2000, esto comparado con utilizar la matriz de rigidez ensamblada con las rigideces de entrepiso.



	Configuración base	Configuración Entrepiso flexible	
			
Entrepiso	Rigidez Entrepiso	Método analítico	Sap2000
3	305.02	79.74	80.65
2	273.97	113.41	114.29
1	151.85	147.84	147.78
Entrepiso	Desplazamientos (m)		
3	0.030	0.051	0.050
2	0.027	0.038	0.038
1	0.019	0.020	0.020
	Periodo (s)		
1	0.108	0.135	0.134
2	0.034	0.043	0.042
3	0.022	0.021	0.021

Tabla 12. Comparación de parámetros dinámicos de entresijos flexibles y configuración base

#### 4.3 RESULTADOS IRREGULARIDAD EN PLANTA

Por último se tiene los resultados de la configuración de irregularidad en planta en la Tabla 13, se muestra la comparación de los resultados usando el método analítico y los obtenidos con el programa Sap2000. En este caso particular debido a la excentricidad del centro de masas y el centro de rigidez se esperaba que hubiera torsión, misma que se refleja en las rotaciones respecto al eje  $z$ . Los resultados son afines entre si, por lo que se comprueba que el método utilizado es correcto.


		
Desplazamientos (m, grados )	Método analítico	Sap2000
3x	0.0337	0.0337
2x	0.0300	0.0299
1x	0.0218	0.0217
3y	-0.0015	-0.0014
2y	-0.0013	-0.0012
1y	-0.0009	-0.0009
3 $\theta_z$	0.0062	0.0056
2 $\theta_z$	0.0054	0.0049
1 $\theta_z$	0.0037	0.0035
Periodo (s)		
1	0.0881	0.0872
2	0.0799	0.0799
3	0.0525	0.0510
4	0.0222	0.0220
5	0.0202	0.0202
6	0.0132	0.0128
7	0.0112	0.0111
8	0.0101	0.0101
9	0.0064	0.0064
Frecuencia (rad/s)		
1	11.350	11.463
2	12.516	12.518
3	19.048	19.596
4	45.045	45.457
5	49.505	49.547
6	75.758	78.289
7	89.286	89.962
8	99.010	98.587
9	151.515	155.12

Tabla 13. Comparación de parámetros dinámicos entre el método analítico y Sap2000 de la configuración de irregularidad en planta

# 5

## Conclusiones

De la presente investigación se desprenden las siguientes conclusiones.

1. Lo documentado en el marco teórico, se puede aplicar como complemento a las materias de estructuras y sirve de comprobación del comportamiento físico del prototipo de laboratorio.
2. Se identificaron dos procedimientos de análisis para la obtención de la matriz de rigidez y de masa en los tres casos de configuración, utilizando el método de rigidez y el método Pseudo tridimensional.
3. Se obtuvieron los parámetros de vibración por el método analítico y por medio del programa Sap2000, con una semejanza de resultados muy cercana.
4. Se comparo el comportamiento de la configuración base respecto a las configuraciones de piso débil y entrepisos flexibles, corroborando así las predicciones del comportamiento dinámico.

5. Se hizo un manual de prácticas para el laboratorio y tres programas en Matlab para cada configuración, como uso didáctico en la comprobación de la metodología descrita en esta tesis y para uso futuro en la comprobación del comportamiento del modelo de laboratorio.

# 6

## Guía de Prácticas

En este apartado se presentan algunas de las prácticas de laboratorio que se pueden desarrollar por la metodología utilizada en esta tesis. Como ya se mencionó anteriormente la experimentación es un método efectivo para introducir conceptos básicos de análisis estructural y de dinámica estructural.

En el caso del comportamiento de la configuración base, ya se ha documentado anteriormente y se tiene el estudio completo de los parámetros dinámicos, esto con la finalidad de comparar resultados entre las otras configuraciones en esta tesis descritas. Gracias a los programas que se dejaron como aporte didáctico se pueden hacer modificaciones en cuanto a dimensiones y material del prototipo.

Cada una de estas prácticas ayudara al estudiante a comprender de una manera clara diversos conceptos de análisis y dinámica estructural.

### **6.1 ESTRUCTURA DE LA PRÁCTICA DE LABORATORIO**

Con cada una de las prácticas de laboratorio a realizar se deberá generar un reporte.

Un reporte tiene una estructura lógica y su finalidad es transmitir la información obtenida experimentalmente. Las partes de un reporte pueden variar dependiendo del objetivo, en este caso se propone el siguiente contenido:

- a) Nombre de la práctica
- b) Nombre de quien o quienes elaboran la practica
- c) Nombre del asesor de la práctica
- d) Objetivo de la práctica: Escribir el o los resultados que se buscan
- e) Teoría o antecedentes: escribir aquello que se conoce sobre el tema
- f) Material o equipo
- g) Procedimiento a seguir
- h) Datos obtenidos
- i) Procesamiento de los datos
- j) Resultados en donde se podrán incluir gráficas si se requieren
- k) Conclusiones
- l) Bibliografía



## 6.2 PRÁCTICA 1

### ***DISCONTINUIDAD DE RIGIDEZ. PISO FLEXIBLE***

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

Nombre de los integrantes del equipo: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Nombre del profesor: \_\_\_\_\_

### **OBJETIVO**

Se estudiará el concepto de discontinuidad de Resistencia y Rigidez, se demostrara en el laboratorio y de manera analítica que cuando existe condición de piso débil, las deflexiones en el nivel donde existe el cambio brusco de rigidez son mayores.

El alumno deberá incluir en el reporte final otros casos en los que existe discontinuidad de resistencia y ejemplos de estructuras que sufrieron daño debido a la condición de piso débil durante un sismo. Se compararan los resultados obtenidos con las propiedades dinámicas definidas para la configuración de piso débil.

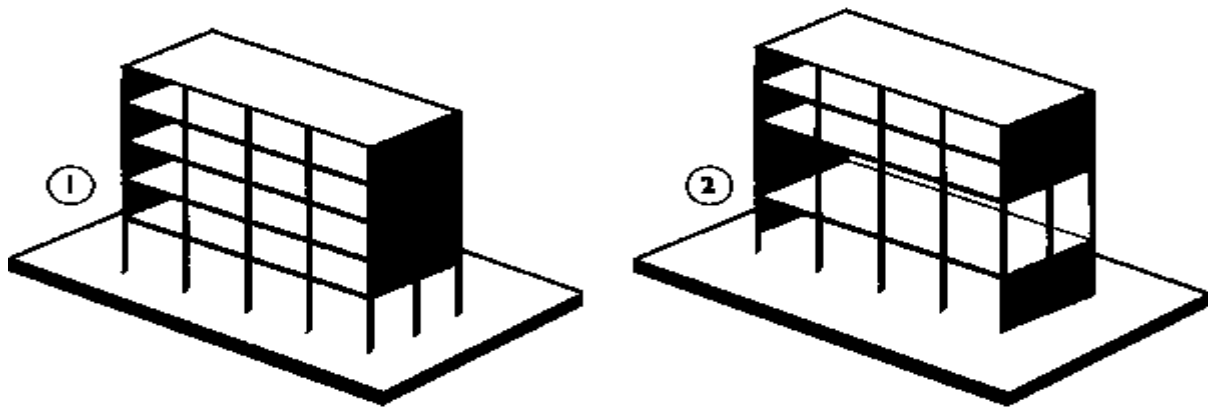
También deberá presentar las posibles soluciones para este tipo de configuración

### **TEORÍA**

El más importante del conjunto de problemas causados por discontinuidad de resistencia y rigidez es el de piso flexible. Este nombre se aplica comúnmente a los edificios cuya planta baja es más débil que las plantas superiores. Sin embargo, un piso débil en cualquier nivel causa problemas, pero como las fuerzas generalmente son mayores hacia la base del edificio, una discontinuidad de rigidez entre el primero y segundo piso tienden a provocar la condición más grave.

También puede haber discontinuidad debido a un concepto de diseño muy común, en el cual no todos los elementos estructurales verticales se proyectan hacia la cimentación, sino que terminan en el segundo piso para aumentar los claros de la planta baja.

El problema básico de todas estas variaciones de piso débil es que la mayor parte de las fuerzas sísmicas de un edificio y cualquier deformación estructural consecuente, tendera a concentrarse en el piso más débil o en el punto de la discontinuidad, en lugar de distribuirse de manera más uniforme entre todos los pisos.



1. Planta baja libre
2. Piso flexible en niveles intermedios

#### MATERIAL

1. Prototipo
2. Equipo FORTUS<sup>32</sup> para medición de vibración consistente en:
  - Computadora portátil
  - Acelerómetro de 3 canales
  - Tarjeta de adquisición de datos de 16 canales
  - Módulo de conexión
  - Cables blindados de 20, 30 y 50 m
  - Fuente de voltaje
  - Mesa vibratoria
3. Transductores para medir desplazamientos

<sup>32</sup> El equipo FORTUS que se menciona arriba, es un conjunto de instrumentos que se diseñó para la medición de vibraciones y que se encuentra en el laboratorio de dinámica de la FIAD.

**PROCEDIMIENTO**

- Se armará el prototipo con su configuración inicial y se probará en la mesa sísmica bajo una señal continua.
- Se mediarán los desplazamientos en el primer nivel.
- Se armará el prototipo de tal manera que presente condición de piso débil y entrepisos flexibles.
- Se probará, medirán y registrarán los desplazamientos experimentados en cada nivel
- Calcular el periodo de la estructura de cada configuración.
- Se procesarán los datos y se compararán.



**DATOS OBTENIDOS EXPERIMENTALMENTE**

Configuración	Frecuencia (Hz)	Periodo (s)	Desplazamiento (cm)
Piso débil			
Entrepiso Flexible			

**DATOS OBTENIDOS DE MANERA ANALÍTICA**

Configuración	Frecuencia (Hz)	Periodo (s)	Desplazamiento (cm)
Piso débil			
Entrepiso Flexible			

**RESULTADOS.**

**CONCLUSIONES**

**BIBLIOGRAFÍA**

## 6.3 PRÁCTICA 2

### *IRREGULARIDAD EN PLANTA (Parte 1)*

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

Nombre de los integrantes del equipo: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

Nombre del profesor: \_\_\_\_\_

### **OBJETIVO**

Se estudiará el concepto de simetría en planta así como el de plantas complejas. Se demostrará que al existir irregularidades en planta aparecen grandes esfuerzos en la zona de transición, los cuales producen con frecuencia daños en los elementos no estructurales, en la estructura vertical y aun en el diafragma de la planta.

Se introducirá el concepto de torsión; fenómeno que se presenta cuando existen irregularidades en la configuración en planta y se estudiara el daño que puede ocasionar.

El alumno deberá explicar de qué manera se pueden solucionar los problemas ocasionados por este tipo de configuración en planta.

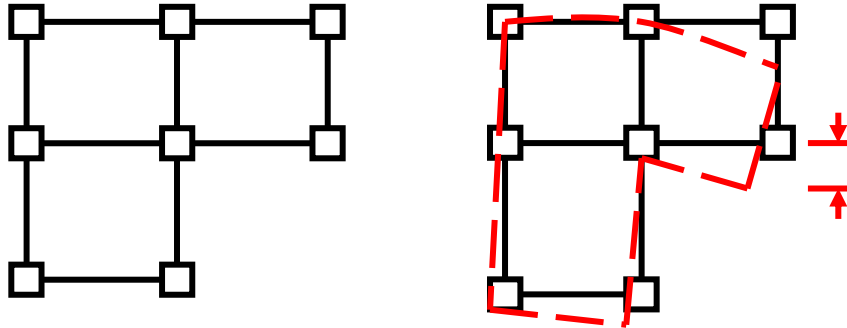
### **TEORÍA**

La esquina interior o entrante es una característica común de la configuración general del edificio que, en planta asume la forma de L, T, U, H, o una combinación de estas formas.

Estas configuraciones presentan dos problemas. El primero es que tienden a producir variaciones de rigidez y por lo tanto movimientos diferenciales entre diversas

partes del edificio, provocando una concentración local de esfuerzos en la esquina entrante.

El segundo problema de este tipo de configuración es la torsión. Esta se produce porque el centro de masa y el centro de rigidez de esta forma no pueden coincidir geoméricamente para todas las posibles direcciones del sismo.



## MATERIAL

1. Prototipo
2. Equipo FORTUS para medición de vibración
3. Transductores para medir desplazamientos

## PROCEDIMIENTO

- Se armará el prototipo de tal manera que presente una configuración de L en planta.
- Se probará y se medirán los desplazamientos experimentados en la dirección X y Y de la esquina interior
- Se procesaran los datos y se compararán con los datos obtenidos con la configuración inicial.

## RESULTADOS.

## CONCLUSIONES

## BIBLIOGRAFÍA

## 6.4 PRÁCTICA 3

### **LOCALIZACION DEL CENTRO DE MASA Y RIGIDEZ**

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

Nombre de los integrantes del equipo: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Nombre del profesor: \_\_\_\_\_

### **OBJETIVO**

Como parte fundamental del cálculo de irregularidad en planta se encuentra la localización del centro de masas y de rigidez. En esta práctica se obtendrán las coordenadas de centro de masas y de rigidez según la geometría del prototipo y de las características de los elementos.

### **TEORÍA**

Uno de los aspectos principales en esta configuración de la irregularidad en planta es la simetría, la cual denota una propiedad geométrica del edificio. Un edificio es simétrico respecto a dos ejes en planta si su geometría es idéntica en cualquiera de los lados de cualquier eje que se estén considerando. Simetría estructural significa que el centro de masa y el centro de resistencia están localizados en el mismo punto. Lo ideal es que el C.M., coincida con el C.R. En este caso todos los pórticos que están en un determinado sentido se mueven lo mismo, no hay problema de torsión.

Se recuerda que el C.R. es el lugar geométrico donde al aplicar las fuerzas sísmicas la estructura se traslada y no rota. El C.M es el punto geométrico donde se supone se concentra la masa de cada nivel.

Al formar la matriz de masas  $[M]$ , a los desplazamientos laterales les corresponde la masa traslacional del nivel en cuestión y al giro alrededor del eje vertical le corresponde la inercia rotacional de la masa con respecto a dicho eje. Cuando la masa está distribuida de manera regular en planta, se puede calcular su momento de inercia como  $J = m r^2$ , donde  $m$  es la masa de piso y  $r$  el radio de giro del área de la planta. Por ejemplo,  $r = \sqrt{(a^2 + b^2)/12}$  para una planta rectangular de dimensiones  $a$  y  $b$ .



### MATERIAL

1. Prototipo
2. Cinta métrica
3. Placas de acero para simular la masa de la losa.

### PROCEDIMIENTO

- Se armará el prototipo de tal manera que presente una configuración de L en planta.
- Se calculara la masa traslacional y rotacional correspondiente a cada entrepiso
- Se ubicara el centro de masas y de rigidez en cada nivel.

**CALCULOS.**

**RESULTADOS.**

**CONCLUSIONES**

**BIBLIOGRAFÍA**

---

# Anexo 1

---

Matriz De Rigidez  
por elemento y  
general

---

Configuración piso débil

---

**Columna C-1 y C-7**

**Propiedades**

			0	$\Delta 0$	$\Delta 1$	$\Delta 4$		
$\phi =$	90	E=	7310000	28.23	0.00	-28.23	-16.94	0
cos =	0.00	A=	0.000819	0.00	0.00	0.00	0.00	$\Delta 0$
sen=	1.00	I=	2.7804E-07	-28.23	0.00	28.23	16.94	$\Delta 1$
		L=	0.6	-16.94	0.00	16.94	10.16	$\Delta 4$

**Trabe T-1**

**Propiedades**

			$\Delta 1$	$\Delta 4$	$\Delta 1$	$\Delta 5$		
$\phi =$	0	E=	7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 1$
cos =	1.00	A=	0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 4$
sen=	0.00	I=	2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 1$
		L=	0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 5$

**Columna C-2 y C-8**

**Propiedades**

			$\Delta 1$	$\Delta 4$	$\Delta 2$	$\Delta 6$		
$\phi =$	90	E=	7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 1$
cos =	0.00	A=	0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 4$
sen=	1.00	I=	2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 2$
		L=	0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 6$

**Trabe T-2**

**Propiedades**

			$\Delta 2$	$\Delta 6$	$\Delta 2$	$\Delta 7$		
$\phi =$	0	E=	7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 2$
cos =	1.00	A=	0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 6$
sen=	0.00	I=	2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 2$
		L=	0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 7$

**Columna C-5****Propiedades**

			$\Delta 1$	$\Delta 5$	$\Delta 2$	$\Delta 7$		
$\phi =$	90	E=	7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 1$
cos =	0.00	A=	0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 5$
sen=	1.00	I=	2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 2$
		L=	0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 7$

**Columna C-3 y C-9****Propiedades**

			$\Delta 2$	$\Delta 6$	$\Delta 3$	$\Delta 8$		
$\phi =$	90	E=	7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 2$
cos =	0.00	A=	0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 6$
sen=	1.00	I=	2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 3$
		L=	0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 8$

**Trabe T-3****Propiedades**

			$\Delta 3$	$\Delta 8$	$\Delta 3$	$\Delta 9$		
$\phi =$	0	E=	7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 3$
cos =	1.00	A=	0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 8$
sen=	0.00	I=	2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 3$
		L=	0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 9$

**Columna C-6****Propiedades**

			$\Delta 2$	$\Delta 7$	$\Delta 3$	$\Delta 9$		
$\phi =$	90	E=	7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 2$
cos =	0.00	A=	0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 7$
sen=	1.00	I=	2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 3$
		L=	0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 9$

---

# Anexo 2

---

Programa en  
Matlab para  
Piso débil

---

Configuración Piso débil

---

```

%Programa para cálculo de Matrices de rigidez
clear all;
%matriz Global para el marco 1
M1=[395.20  -338.75  0.00  -33.87  -33.87  -67.75  -33.87  0.00
0.00
-338.7454  677.49  -338.75  67.75  33.87  0.00  0.00  -67.75
-33.87
0  -338.7454  338.75  0.00  0.00  67.75  33.87  67.75
33.87
-33.87454  67.74908  0  70.65  11.61  13.55  0  0  0
-33.87454  33.87454  0  11.614128  36.78  0.00  6.77  0
0
-67.74908  0  67.74908  13.549816  0.00  77.43  11.61
13.55  0
-33.87454  0  33.87454  0  6.77  11.614128  50.33  0
6.77
0  -67.74908  67.74908  0  0.00  13.549816  0  50.33
11.61
0  -33.87454  33.87454  0  0.00  0  6.774908  11.61
36.78
];

%matriz Global para el marco 2
M2=[338.75  -338.75  0.00  -67.75  -33.87  -67.75  -33.87  0.00
0.00
-338.7454  677.49  -338.75  67.75  33.87  0.00  0.00  -67.75
-33.87
0  -338.7454  338.75  0.00  0.00  67.75  33.87  67.75
33.87
-67.74908  67.74908  0  50.33  11.61  13.55  0  0  0
-33.87454  33.87454  0  11.614128  36.78  0.00  6.77  0
0
-67.74908  0  67.74908  13.549816  0.00  77.43  11.61
13.55  0
-33.87454  0  33.87454  0  6.77  11.614128  50.33  0
6.77
0  -67.74908  67.74908  0  0.00  13.549816  0  50.33
11.61
0  -33.87454  33.87454  0  0.00  0  6.774908  11.61
36.78
];

%Suma de matrices de 3 marcos (el doble de M1 más M2)
M3=M1*2+M2;

%Definición de submatrices
kdd=M3(1:3,1:3);%Matriz de desplazamiento horizontal
kdf=M3(1:3,4:9);%Matriz de giro y desplazamiento
kdft=M3(4:9,1:3);%Matriz de giro y desplazamiento transpuesta
kff=M3(4:9,4:9);%Matriz de giro.

```

```
%Ensamble de submatrices
M4=[kdd,kdf;kdft,kff];

%Obtener delta
P=[1;1;1];%vector de fuerzas
ktt=(kdd-kdf*kff^-1*kdft);%Matriz condensada de rigidez
delta=ktt\P;%Solucion vector delta.
deltar=[delta(3)-delta(2);delta(2)-delta(1);delta(1)];
%Rigidez de entrepiso
F=[1;2;3];
k=F./deltar;%%%%%%%%%
%calculo de matriz de rigidez y de masa.
K=[k(3)+k(2),-k(2),0;-k(2),k(2)+k(1),-k(1);0,-k(1),k(1)];%Matriz
de Rigidez ensamblada
%Ingresar valores de las masas
m1=input('Peso 1: ');
m2=input('Peso 2: ');
m3=input('Peso 3: ');
m1=.0112;m2=.0112;m3=.0112;
M=[m1,0,0;0,m2,0;0,0,m3];%/9.81;%masa=Peso/gravedad... Matriz de
masas concentradas

%Calculo de frecuencias con problema de valores caracteristicos
eW=eig(K/M);%calculo de Eigen Valores
W=sqrt(eW);%Vector de frecuencias
%calculo de Periodo
%T1=2*pi/W(1);
%T2=2*pi/W(2);
%T3=2*pi/W(3);
T=2*pi./W;
```



---

# Anexo 3

---

Matriz De Rigidez  
por elemento y  
general

---

Configuración Entrepiso  
Flexible

---

**Columna C-1 y C-7****Propiedades**

			0	$\Delta 0$	$\Delta 1$	$\Delta 4$	
$\phi =$	90	E= 7310000	28.23	0.00	-28.23	-16.94	0
cos =	0.00	A= 0.000819	0.00	0.00	0.00	0.00	$\Delta 0$
sen=	1.00	I= 2.7804E-07	-28.23	0.00	28.23	16.94	$\Delta 1$
		L= 0.6	-16.94	0.00	16.94	10.16	$\Delta 4$

**Trabe T-1****Propiedades**

			$\Delta 1$	$\Delta 4$	$\Delta 1$	$\Delta 5$	
$\phi =$	0	E= 7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 1$
cos =	1.00	A= 0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 4$
sen=	0.00	I= 2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 1$
		L= 0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 5$

**Columna C-4****Propiedades**

			$\Delta 0$	$\Delta 0$	$\Delta 1$	$\Delta 5$	
$\phi =$	90	E= 7310000	28.23	0.00	-28.23	-16.94	$\Delta 0$
cos =	0.00	A= 0.000819	0.00	0.00	0.00	0.00	$\Delta 0$
sen=	1.00	I= 2.7804E-07	-28.23	0.00	28.23	16.94	$\Delta 1$
		L= 0.6	-16.94	0.00	16.94	10.16	$\Delta 5$

**Columna C-2 y C-8****Propiedades**

			$\Delta 1$	$\Delta 4$	$\Delta 2$	$\Delta 6$	
$\phi =$	90	E= 7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 1$
cos =	0.00	A= 0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 4$
sen=	1.00	I= 2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 2$
		L= 0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 6$

**Trabe T-2**

<b>Propiedades</b>		$\Delta 2$	$\Delta 7$	$\Delta 2$	$\Delta 7$	
$\phi = 0$	E= 7310000	4276.35	0.00	-4276.35	0.00	$\Delta 2$
cos = 1.00	A= 0.000819	0.00	5.81	0.00	2.90	$\Delta 7$
sen= 0.00	I= 2.7804E-07	-4276.35	0.00	4276.35	0.00	$\Delta 2$
	L= 1.4	0.00	2.90	0.00	5.81	$\Delta 7$

**Columna C-3 y C-9**

<b>Propiedades</b>		$\Delta 2$	$\Delta 7$	$\Delta 3$	$\Delta 8$	
$\phi = 90$	E= 7310000	112.92	-33.87	-112.92	-33.87	$\Delta 2$
cos = 0.00	A= 0.000819	-33.87	13.55	33.87	6.77	$\Delta 7$
sen= 1.00	I= 2.7804E-07	-112.92	33.87	112.92	33.87	$\Delta 3$
	L= 0.6	-33.87	6.77	33.87	13.55	$\Delta 8$

**Trabe T-3**

<b>Propiedades</b>		$\Delta 3$	$\Delta 8$	$\Delta 3$	$\Delta 8$	
$\phi = 0$	E= 7310000	4276.35	0.00	-4276.35	0.00	$\Delta 3$
cos = 1.00	A= 0.000819	0.00	5.81	0.00	2.90	$\Delta 8$
sen= 0.00	I= 2.7804E-07	-4276.35	0.00	4276.35	0.00	$\Delta 3$
	L= 1.4	0.00	2.90	0.00	5.81	$\Delta 8$

**Trabe T-4**

<b>Propiedades</b>		$\Delta 1$	$\Delta 10$	$\Delta 1$	$\Delta 11$	
$\phi = 0$	E= 7310000	8552.70	0.00	-8552.70	0.00	$\Delta 1$
cos = 1.00	A= 0.000819	0.00	11.61	0.00	5.81	$\Delta 10$
sen= 0.00	I= 2.7804E-07	-8552.70	0.00	8552.70	0.00	$\Delta 1$
	L= 0.7	0.00	5.81	0.00	11.61	$\Delta 11$

## Matriz de rigidez marco lateral

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	310.52	-225.83	0.00	-33.87	16.94	-67.75	0	0	0
2	-225.83	451.66	-225.83	67.75	0	0.00	-67.75	0	0
3	0.00	-225.83	225.83	0	0	67.75	67.75	0	0
4	-33.87	67.75	0	70.65	11.61	13.55	0	0	0
5	16.94	0	0	11.61	33.39	0	0	0	0
6	-67.75	0.00	67.75	13.55	0	71.62	13.55	0	0
7	0	-67.75	67.75	0	0	13.55	44.52	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## Matriz de rigidez marco central

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	84.69	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.87	16.94
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	33.87	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	43.55	11.61
9	16.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	11.61	33.39

## Matriz de rigidez general de configuración de entrepisos flexibles

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	705.72	-451.66	0.00	-67.75	33.87	-135.50	0.00	33.87	16.94
2	-451.66	903.32	-451.66	135.50	0.00	0.00	-135.50	0.00	0.00
3	0.00	-451.66	451.66	0.00	0.00	135.50	135.50	0.00	0.00
4	-67.75	135.50	0.00	141.31	23.23	27.10	0.00	0.00	0.00
5	33.87	0.00	0.00	23.23	66.78	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-135.50	0.00	135.50	27.10	0.00	143.24	27.10	0.00	0.00
7	0.00	-135.50	135.50	0.00	0.00	27.10	89.04	0.00	0.00
8	33.87	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	43.55	11.61
9	16.94	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	11.61	33.39

---

# Anexo 4

---

Matrices  
transformadas de  
los sistemas  
resistentes

---

Configuración irregularidad  
en planta

---

$$\mathbf{K}_{2X}^* = \mathbf{B}_{2X}^T \cdot \mathbf{K}_{2X} \cdot \mathbf{B}_{2X}$$

$$\mathbf{K}_{2X}^* = \begin{pmatrix} 340.52 & -296.71 & 54.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -296.71 & 499.77 & -240.89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54.50 & -240.89 & 190.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3X}^* = \mathbf{B}_{3X}^T \cdot \mathbf{K}_{3X} \cdot \mathbf{B}_{3X}$$

$$\mathbf{K}_{3X}^* = \begin{pmatrix} 340.52 & -296.71 & 54.50 & 0 & 0 & 0 & -238.3657 & 207.6978 & -38.1501 \\ -296.71 & 499.77 & -240.89 & 0 & 0 & 0 & 207.6978 & -349.8364 & 168.6252 \\ 54.50 & -240.89 & 190.99 & 0 & 0 & 0 & -38.1501 & 168.6252 & -133.6913 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -238.37 & 207.70 & -38.15 & 0 & 0 & 0 & 166.86 & -145.39 & 26.71 \\ 207.70 & -349.84 & 168.63 & 0 & 0 & 0 & -145.39 & 244.89 & -118.04 \\ -38.15 & 168.63 & -133.69 & 0 & 0 & 0 & 26.71 & -118.04 & 93.58 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2Y}^* = \mathbf{B}_{2Y}^T \cdot \mathbf{K}_{2Y} \cdot \mathbf{B}_{2Y}$$

$$\mathbf{K}_{2Y}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 340.52 & -296.71 & 54.50 & 119.18 & -103.85 & 19.08 \\ 0 & 0 & 0 & -296.71 & 499.77 & -240.89 & -103.85 & 174.92 & -84.31 \\ 0 & 0 & 0 & 54.50 & -240.89 & 190.99 & 19.08 & -84.31 & 66.85 \\ 0 & 0 & 0 & 119.18 & -103.85 & 19.08 & 41.71 & -36.35 & 6.68 \\ 0 & 0 & 0 & -103.85 & 174.92 & -84.31 & -36.35 & 61.22 & -29.51 \\ 0 & 0 & 0 & 19.08 & -84.31 & 66.85 & 6.68 & -29.51 & 23.40 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{3Y}^* = \mathbf{B}_{3Y}^T \cdot \mathbf{K}_{3Y} \cdot \mathbf{B}_{3Y}$$

$$\mathbf{K}_{3Y}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 222.2422 & -195.2188 & 39.2454 & 233.35 & -204.98 & 41.21 \\ 0 & 0 & 0 & -195.2188 & 321.6070 & -154.0412 & -204.98 & 337.69 & -161.74 \\ 0 & 0 & 0 & 39.2454 & -154.0412 & 118.3178 & 41.21 & -161.74 & 124.23 \\ 0 & 0 & 0 & 233.35 & -204.98 & 41.21 & 245.02 & -215.23 & 43.27 \\ 0 & 0 & 0 & -204.98 & 337.69 & -161.74 & -215.23 & 354.57 & -169.83 \\ 0 & 0 & 0 & 41.21 & -161.74 & 124.23 & 43.27 & -169.83 & 130.45 \end{pmatrix}$$

---

# Anexo 5

---

Programa en Matlab  
para entepisos  
flexibles

---

Configuración Entepisos  
flexibles

---

```

%Programa de CALCULO DE RIGIDEZ PARA ENTREPISO FLEXIBLE
%funciones a utilizar
%MRE=rigidezbiempotrado(E,A,I,FI,L)  FI=0 viga      F=90 columna
%MRCA=rigidezcolumnaarticulada(E,A,I,FI,L)  F=90 siempre...
%A=Col Biempotrada
%B=Col Aticulada
%C=Viga Biempotrada
%MRM=rigidezmarco(A,B,C)
%VALORES PARA op En FUNCION rigidezmarco(MCB,MCA,MVB,op)
%MARCO_GENERAL=0; DEBIL_M1=1; DEBIL_M2=2; IRREGULARIDAD_M2=3;

MARCO_GENERAL=0; DEBIL_M1=1; DEBIL_M2=2; IRREGULARIDAD_M2=3;
FLEXIBLE_M1=4;FLEXIBLE_M2=5;
%Datos generales
%leer datos de figura pisodebil.fig
%Propiedades del material
Eef=findobj(gcbf,'tag','Eef');Eef=str2num(get(Eef,'string'));%[ton/m^2]
modulo de elasticidad
Avef=findobj(gcbf,'tag','Avef');Avef=str2num(get(Avef,'string'));%[m^2]
Area transversal
Acef=findobj(gcbf,'tag','Acef');Acef=str2num(get(Acef,'string'));%[m^2]
Area transversal
Ief=findobj(gcbf,'tag','Ief');Ief=str2num(get(Ief,'string'));%[m^4]
momento de inercia
Lcef=findobj(gcbf,'tag','Lcef');Lcef=str2num(get(Lcef,'string'));%[m]
Longitud de columna
Lvef=findobj(gcbf,'tag','Lvef');Lvef=str2num(get(Lvef,'string'));%[m]
Longitud de viga
fxef=findobj(gcbf,'tag','fxef');fxef=str2num(get(fxef,'string'));%[ton]
fuerza en x
fyef=findobj(gcbf,'tag','fyef');fyef=str2num(get(fyef,'string'));%[ton]
fuerza en y
mzef=findobj(gcbf,'tag','mzef');mzef=str2num(get(mzef,'string'));%[ton]
fuerza en mz
mef=findobj(gcbf,'tag','mef');mef=str2num(get(mef,'string'));%[ton] masa

%Botones de razon
rlef=findobj(gcbf,'tag','rlef');rlef=get(rlef,'value');
r2ef=findobj(gcbf,'tag','r2ef');r2ef=get(r2ef,'value');
%Ejes y tabla
tablaef=findobj(gcbf,'tag','tablaef');
ejelef=findobj(gcbf,'tag','ejelef');
eje2ef=findobj(gcbf,'tag','eje2ef');

MVB2ef=rigidezbiempotrado(Eef,Avef,Ief,0,Lvef*2);%VIGA Biempotrada
doble
MCBef=rigidezbiempotrado(Eef,Acef,Ief,90,Lcef);%Columna Biempotrada
MCAef=rigidezcolumnaarticulada(Eef,Acef,Ief,90,Lcef);%Columna
Articulada
MVBef=rigidezbiempotrado(Eef,Avef,Ief,0,Lvef);%VIGA Biempotrada

%M0=rigidezmarco(MCB,MCA,MVB,MARCO_GENERAL);%Marco General
if rlef==1 %Tipo de apoyo articulado (columna)

```

```

        M1ef=rigidezmarco(MCBef,MCAef,MVBef,MVB2ef,FLEXIBLE_M1);%piso debil
Marco 1
        M2ef=rigidezmarco(MCBef,MCAef,MVBef,MVB2ef,FLEXIBLE_M2);%piso debil
Marco 2
end
if r2ef==1 %Tipo de apoyo biempotrado (columna)
        M1ef=rigidezmarco(MCBef,MCBef,MVBef,MVB2ef,FLEXIBLE_M1);%piso debil
Marco 1
        M2ef=rigidezmarco(MCBef,MCBef,MVBef,MVB2ef,FLEXIBLE_M2);%piso debil
Marco 2
end
%Matriz General
MGef=M1ef*2+M2ef;
%Submatriz--Condensacion estatica
%Definicion de submatrices
kddef=MGef(1:3,1:3);%Matriz de desplazamiento horizontal
kdfef=MGef(1:3,4:9);%Matriz de giro y desplazamiento
kdftef=MGef(4:9,1:3);%Matriz de giro y desplazamiento transpuesta
kffef=MGef(4:9,4:9);%Matriz de giro.

%Ensamble de submatrices
M4ef=[kddef,kdfef;kdftef,kffef];

%Obtener delta
Pef=[fxef;fyef;mzef];%vector de fuerzas
kttef=(kddef-kdfef*kffef^-1*kdftef);%Matriz condensada de rigidez
deltaef=kttef\Pef;%Solucion vector delta.
deltaref=[deltaef(3)-deltaef(2);deltaef(2)-deltaef(1);deltaef(1)];
%Rigidez de entrepiso
Fef=[fxef;fxef+fyef;fxef+fyef+mzef];
kef=Fef./deltaref;
%Multiplicar k por 3
%calculo de matriz de rigidez y de masa.
Kef=[kef(3)+kef(2),-kef(2),0;-kef(2),kef(2)+kef(1),-kef(1);0,-
kef(1),kef(1)];%Matriz de Rigidez ensamblada
%Ingresar valores de las masas
Mef=[mef,0,0;0,mef,0;0,0,mef];%/9.81;%masa=Peso/gravedad... Matriz de
masas concentradas REVISAR ORDEN

%Calculo de frecuencias con problema de valores caracteristicos
eWef=eig(kttef/Mef);%calculo de Eigen Valores
Wef=sqrt(eWef);%Vector de frecuencias
%calculo de Periodo
Tef=2*pi./Wef;

D=3;%Tres niveles
[phief,wns]=eig(Kef,Mef);%phi=eigenvectores, wns=eigenvalores
%Calculo del vector G
for i=1:D
        Gef(i)=phief(:,i)'*Mef*ones(D,1)/(phief(:,i)'*Mef*phief(:,i));
        Noref(:,i)=phief(:,i)./phief(D,i);
end
Modef=[0,0,0;Noref];
Phief=[0,0,0;phief];

```

```
for i=1:D
    GPhief(:,i)=Gef(i)*Phief(:,i);%una columna de GPhi es igual al Valor
de G multiplicado por una columna de Phi
end

%para graficar
h=[0,1,2,3];%Niveles del edificio
subplot(eje1ef);plot(GPhief(:,1),h,'r',GPhief(:,2),h,'c',GPhief(:,3),h,'g
');
subplot(eje2ef);plot(Modef(:,1),h,'r',Modof(:,2),h,'c',Modof(:,3),h,'g');

set(tablaef,'Data',[Tef deltaef kef]);%Desplegar los periodos en la tabla
```



---

# Anexo 6

---

Programa en Matlab  
para de  
irregularidad en  
planta

---

Configuración irregularidad  
en planta

---

```

%Programa de CALCULO DE RIGIDEZ PARA IRREGULARIDAD EN PLANTA
%funciones a utilizar
%MRE=rigidezbiempotrado(E,A,I,FI,L)  FI=0 viga      F=90 columna
%MRCA=rigidezcolumnaarticulada(E,A,I,FI,L)  F=90 siempre...
%A=Col Biempotrada
%B=Col Aticulada
%C=Viga Biempotrada
%MRM=rigidezmarco(A,B,C)
%VALORES PARA op En FUNCION rigidezmarco(MCB,MCA,MVB,op)
%MARCO_GENERAL=0; DEBIL_M1=1; DEBIL_M2=2; IRREGULARIDAD_M2=3;

MARCO_GENERAL=0; DEBIL_M1=1; DEBIL_M2=2; IRREGULARIDAD_M2=3;
FLEXIBLE_M1=4;FLEXIBLE_M2=5;
%Datos generales
%leer datos de figura pisodebil.fig
%Propiedades del material
Eip=findobj(gcbf,'tag','Eip');Eip=str2num(get(Eip,'string'));%[ton/m^2]
modulo de elasticidad
Avip=findobj(gcbf,'tag','Avip');Avip=str2num(get(Avip,'string'));%[m^2]
Area transversal
Acip=findobj(gcbf,'tag','Acip');Acip=str2num(get(Acip,'string'));%[m^2]
Area transversal
Iip=findobj(gcbf,'tag','Iip');Iip=str2num(get(Iip,'string'));%[m^4]
momento de inercia
Lcip=findobj(gcbf,'tag','Lcip');Lcip=str2num(get(Lcip,'string'));%[m]
Longitud de columna
Lvip=findobj(gcbf,'tag','Lvip');Lvip=str2num(get(Lvip,'string'));%[m]
Longitud de viga
fxip=findobj(gcbf,'tag','fxip');fxip=str2num(get(fxip,'string'));%[ton]
fuerza en x
fyip=findobj(gcbf,'tag','fyip');fyip=str2num(get(fyip,'string'));%[ton]
fuerza en y
mzip=findobj(gcbf,'tag','mzip');mzip=str2num(get(mzip,'string'));%[ton]
fuerza en mz
Mt=findobj(gcbf,'tag','Mt');Mt=str2num(get(Mt,'string'));%[ton] masa
traslacional
Mr=findobj(gcbf,'tag','Mr');Mr=str2num(get(Mr,'string'));%[ton] masa
rotacional
posx1=findobj(gcbf,'tag','posx1');posx1=str2num(get(posx1,'string'));%pos
icion geometrica centro de masas
posx2=findobj(gcbf,'tag','posx2');posx2=str2num(get(posx2,'string'));
posx3=findobj(gcbf,'tag','posx3');posx3=str2num(get(posx3,'string'));
posy1=findobj(gcbf,'tag','posy1');posy1=str2num(get(posy1,'string'));
posy2=findobj(gcbf,'tag','posy2');posy2=str2num(get(posy2,'string'));
posy3=findobj(gcbf,'tag','posy3');posy3=str2num(get(posy3,'string'));

%Botones de razon
rlip=findobj(gcbf,'tag','rlip');rlip=get(rlip,'value');
r2ip=findobj(gcbf,'tag','r2ip');r2ip=get(r2ip,'value');
% tablas
tablaip=findobj(gcbf,'tag','tablaip');
tabphiip=findobj(gcbf,'tag','tabphiip');

```

```

%*****
**
%*****
**
%CALCULO POR EL METODO PSEUDO-TRIDIMENSIONAL*****
%***CONFIGURACION DE IRREGULARIDAD EN PLANTA *****
*****
%*****
**
FIV=0; FIC=90;
MCB3d=rigidezbiempotrado (Eip,Acip, Iip, FIC, Lcip);%Columna Biempotrada
MCA3d=rigidezcolumnaarticulada (Eip,Acip, Iip, FIC, Lcip);%Columna Articulada
MVB3d=rigidezbiempotrado (Eip,Avip, Iip, FIV, Lvip);%VIGA Biempotrada

if r1ip==1 %Tipo de apoyo articulado (columna)
    M3=rigidezmarco (MCB3d,MCA3d,MVB3d,0, IRREGULARIDAD_M2);%Irregularidad
en planta marco 2
    M0=rigidezmarco (MCB3d,MCA3d,MVB3d,0,MARCO_GENERAL);%Matriz de rigidez
para marco General
end
if r2ip==1 %Tipo de apoyo biempotrado (columna)
    M3=rigidezmarco (MCB3d,MCB3d,MVB3d,0, IRREGULARIDAD_M2);%Irregularidad
en planta marco 2
    M0=rigidezmarco (MCB3d,MCB3d,MVB3d,0,MARCO_GENERAL);%Matriz de rigidez
para marco General

end
%*****CALCULO DE LAS MATRICES CONDENSADAS PARA C/
MARCO*****
kdd=M0(1:3,1:3);%Matriz de desplazamiento horizontal
kdf=M0(1:3,4:9);%Matriz de giro y desplazamiento
kdft=M0(4:9,1:3);%Matriz de giro y desplazamiento transpuesta
kff=M0(4:9,4:9);%Matriz de giro.
%Ensamble de submatrices
MMG=[kdd,kdf;kdft,kff];
ktt=(kdd-kdf*kff^-1*kdft);%Matriz condensada de rigidez
KTTMMG=ktt;

%*****CALCULO DE LAS MATRICES CONDENSADAS PARA C/
MARCO*****
kdd=M3(1:3,1:3);%Matriz de desplazamiento horizontal
kdf=M3(1:3,4:9);%Matriz de giro y desplazamiento
kdft=M3(4:9,1:3);%Matriz de giro y desplazamiento transpuesta
kff=M3(4:9,4:9);%Matriz de giro.
%Ensamble de submatrices
MMI=[kdd,kdf;kdft,kff];
ktt=(kdd-kdf*kff^-1*kdft);%Matriz condensada de rigidez
KTTMMI=ktt;

%TRANSFORMACION A 3 GRADOS DE LIBERTAD CON POSICION DEL CENTRO DE MASAS
%POSICION DEL CENTRO DE MASAS POR NIVEL (SE PUEDE CALCULAR)
POS=[1 posx1 posy1;
    2 posx2 posy2;
    3 posx3 posy3];%METER COMO DATO

```

```

%Sistemas resistentes
SIS=[1 0 1 0;
     2 Lvip 2 Lvip;
     3 Lvip*2 3 Lvip*2];
%Datos geometricos para transformar desplazamientos
GEO=[1 0 POS(1,3) SIS(1,2) POS(1,3)-SIS(1,2);
     2 0 POS(2,3) SIS(2,2) POS(2,3)-SIS(2,2);
     3 0 POS(3,3) SIS(3,2) POS(3,3)-SIS(3,2);
     1 90 SIS(1,4) POS(1,2) SIS(1,4)-POS(1,2);
     2 90 SIS(2,4) POS(2,2) SIS(2,4)-POS(2,2);
     3 90 SIS(3,4) POS(3,2) SIS(3,4)-POS(3,2)];

%matrices de transformacion
bj=[cosd(GEO(1,2)) sind(GEO(1,2)) GEO(1,5);
    cosd(GEO(2,2)) sind(GEO(2,2)) GEO(2,5);
    cosd(GEO(3,2)) sind(GEO(3,2)) GEO(3,5);
    cosd(GEO(4,2)) sind(GEO(4,2)) GEO(4,5);
    cosd(GEO(5,2)) sind(GEO(5,2)) GEO(5,5);
    cosd(GEO(6,2)) sind(GEO(6,2)) GEO(6,5)];

B1x=[eye(3)*bj(1,1) eye(3)*bj(1,2) eye(3)*bj(1,3)];
B2x=[eye(3)*bj(2,1) eye(3)*bj(2,2) eye(3)*bj(2,3)];
B3x=[eye(3)*bj(3,1) eye(3)*bj(3,2) eye(3)*bj(3,3)];
B1y=[eye(3)*bj(4,1) eye(3)*bj(4,2) eye(3)*bj(4,3)];
B2y=[eye(3)*bj(5,1) eye(3)*bj(5,2) eye(3)*bj(5,3)];
B3y=[eye(3)*bj(6,1) eye(3)*bj(6,2) eye(3)*bj(6,3)];

K1x=B1x'*KTTMMI*B1x;
K2x=B2x'*KTTMMG*B2x;
K3x=B3x'*KTTMMG*B3x;
K1y=B1y'*KTTMMG*B1y;
K2y=B2y'*KTTMMG*B2y;
K3y=B3y'*KTTMMI*B3y;

%Matriz de rigidez transformada a 3 grados de libertad
Ke=K1x+K2x+K3x+K1y+K2y+K3y;

%Calcular centroide de planta...
%CPLANTA=[]

%Ensamblado de la matriz de masas
Vmasas=[Mt Mt Mt Mt Mt Mt Mr Mr Mr];
Mmasas=diag(Vmasas);

%Calculo de frecuencias con problema de valores caracteristicos
eW3d=eig(Ke/Mmasas);%calculo de Eigen Valores
W3d=sqrt(eW3d);%Vector de frecuencias
%calculo de Periodo
T3d=2*pi./W3d;

%calculo del desplazamiento
vfuerza=[fxip fxip fxip fyip fyip fyip mzip mzip mzip];
D3d=Ke^-1*vfuerza';
%Formas modales

```

```
%NOTA: se debe redondear Ke a 4 cifras decimales
%O no salen las formas modales con eig()
[phi3d,wns3d]=eig(roundn(Ke,-4),Mmasas);
set(tablaip,'Data',[D3d T3d]);%Desplegar los periodos en la tabla

set(tabphiip,'Data',phi3d);%Desplegar los periodos en la tabla
```



# Referencias

Ruiz, Daniel et al. (2006). *Herramientas de aprendizaje activo en las asignaturas de ingeniería estructural*. Bogotá: Redalyc.

Aguiar, R. (2008). *Análisis sísmico de edificios*. Quito, Ecuador: Centro de Investigaciones Científicas de la Escuela Politécnica del Ejército.

Angeles, P. (2010). *Diseño por torsión sísmica de estructuras de mampostería*. Mexico,D.F.: Tesis UNAM.

Applied Technology Council (ATC)(Report ATC 3-06). (1978). *Tentative Provisions for Development of seismic regulations for buildings*. Palo Alto.

Arnold,C. y Reitherman,R. (1987). *Configuración y diseño sísmico de edificios*. Mexico,D.F.: Limusa.

Bazán,E., Meli,R. (1998). *Diseño sísmico de edificios*. México,D.F.: Limusa-Wiley.

Bonilla, R. (2004). *Tesis Configuración del diseño sísmico*. Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala.

Chopra, A. (2007). *Dynamics of structures*. EUA: Prentice Hall.

Cowan, H. y. (1924). *Building science laboratory manual*. Australia: University of Sidney publishing.

Creixell, J. (1993). *Construcciones antisísmicas y resistentes al viento*. Mexico, D.F.: Limusa.

Espanés, M. (1992). *Intuición y razonamiento en el diseño estructural*. Bogotá, Colombia: Escala.

Godden, D. (1974). *An investigation of the relationships between problem solving strategies, representation and memory*. U.S.A: The Quarterly Journal of Experimental Psychology, Volumen 26.``

Guyan, R. (n.d.). Reduction of stiffness and Mass Matrices. *AIAA Journal* , Vol.3.No.2.

Holmes, W. (1979). The rehabilitation of history corner of the the Stanford University main quad. *Second U.S. National Conference of Earthquake engineering*.

- J.G.A.Croll, A.C. Walker. (1975). Elements of structural Stability. Londres: McMillan.
- Janney,J.,Breen,J. y Geymayer,H. (1970). Use of models in structural engineering. Detroit,, MI, USA: ACI SP-24, American Concrete Institute.
- Juan P. Martin. (2003). Ingenieria Fluvial. UPC.
- Meli, R. (2002). *Diseño estructural*. Mexico: Limusa.
- Nienhuys, S et al. (1976). *Guía popular de construcciones sismo-resistentes*. Quito, Ecuador.
- Ojeda, J. (2004). Cuaderno de apuntes de análisis estructural II. UABC .
- Organización Panamericana de la Salud. (1999). *Fundamentos para la mitigación de desastres en establecimientos de salud*. Washington D.C.
- Paz, M. (1992). *Dinámica estructural. Teoría y cálculo*. España: Reverté.
- Rathbun, J. (1924). *Analysis of the stresses in the ring of a concrete skew Arch-Transactions A.S.C.E.*
- RESNOM. (n.d.). CICESE. Retrieved Octubre 2010, from Departamento de Sismologia CICESE: <http://sismologia.cicese.mx/resnom>
- Rodriguez-Bazan. (2004). Modelos educativos basados en nuevas tecnologías. *CITEL 2004 III Congreso Internacional de Telemática*. Cuba.
- Sabnis,G. et al. (1983). Structural Modeling and Experimental Techniques. Prentice-Hall.
- Salinas, R. (2001). *Fundamentos del análisis dinámico de estructuras*. Lima, Perú: Universidad Nacional de Ingeniería.
- Sanchez, H. (2007). Diseño de prototipo y propuesta de mesa vibratoria para el estudio de configuraciones estructurales. *Tesis de Maestría* . B.C., México: UABC.
- Suarez, G. y Z.Jimenez. (1986). *Sismos en la Ciudad de Mexico y terremoto de septiembre de 1985*. Mexico, D.F.: Cuaderno del Instituto de Geofisica.