

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, ADMINISTRATIVAS  
Y SOCIALES



# **Diseño e implementación de algoritmo de arribo simultáneo para vehículos aéreos no tripulados.**

TESIS

que presenta para obtener el grado de  
*MAESTRÍA EN INGENIERÍA*

**Ing. José Ramón Anaya Álvarez.**

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Rigoberto Martínez Clark

CODIRECTOR DE TESIS: Dr. Carlos Alberto Chávez Guzmán

TECATE, B.C.

Octubre del 2024.



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, ADMINISTRATIVAS  
Y SOCIALES**

**VOTOS APROBATORIOS DE TESIS DE MAESTRÍA**

**Fecha:** 1 de noviembre de 2024

**Nombre del autor:** JOSÉ RAMÓN ANAYA ÁLVAREZ

**Título de la tesis:** Diseño e implementación de algoritmo de arribo simultáneo para vehículos aéreos no tripulados

CERTIFICAMOS QUE ESTA TESIS HA SIDO APROBADA POR LOS MIEMBROS DEL COMITÉ DE TESIS PARA SU DEFENSA EN EXAMEN ORAL.

Favor de regresar esta forma debidamente firmada y acompañada de la tesis del estudiante, para su revisión a la Coordinación del programa y Coordinación de Investigación y Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Grado Académico	Nombre	Firma	Función
DOCTOR	RIGOBERTO MARTINEZ CLARK		Presidente
DOCTOR	CARLOS ALBERTO CHÁVEZ GUZMÁN		Secretario
DOCTOR	JUAN FRANCISCO FLORES RESENDIZ		Sinodal
DOCTOR	JESUS DAVID AVILÉS VELAZQUEZ		Sinodal
DOCTOR	JOVAN OSEAS MÉRIDA RUBIO		Sinodal

Este formato deberá entregarse a la coordinación del programa por lo menos dos semanas antes de la fecha de examen elegida, con las firmas correspondientes y acompañado de un ejemplar de la tesis.

DRA. REYNA VIRGINIA BARRAGAN QUINTERO  
Coordinación de Investigación y Posgrado

DR. JESUS DAVID AVILÉS VELAZQUEZ  
Nombre y firma del Presidente del SACC (programa).

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, ADMINISTRATIVAS Y**  
**SOCIALES**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMO DE**  
**ARRIBO SIMULTÁNEO PARA VEHÍCULOS AÉREOS**  
**NO TRIPULADOS**

**TESIS**

**que para para obtener el grado de maestría en ingeniería**

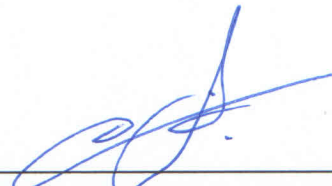
Presenta:

**Ing. José Ramón Anaya Álvarez.**

Aprobada por:



Dr. Rigoberto Martínez Clark  
Director de Tesis.



Dr. Carlos Alberto Chávez Guzmán  
Codirector de Tesis.



Dr. Jesús David Avilés Velázquez.  
Miembro del Comité.



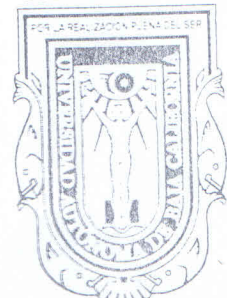
Dr. Jován Oseas Mérida Rubio.  
Miembro del Comité.



Dr. Juan Francisco Flores Resendiz.  
Miembro del Comité.

**Tecate, Baja California, Octubre del 2024.**

UNIVERSIDAD AUTONOMA  
DE BAJA CALIFORNIA



FACULTAD DE CIENCIAS DE LA  
INGENIERIA ADMINISTRATIVAS  
Y SOCIALES TECATE. B.C.

**Resumen** de la tesis del Ing. José Ramón Anaya Álvarez, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestría en Ingeniería del programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería (MYDCI) de la UABC. Tecate Baja California, México, septiembre del 2024.

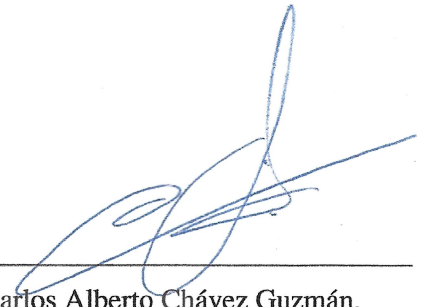
## **Diseño e implementación de algoritmo de arribo simultáneo para vehículos aéreos no tripulados**

Resumen aprobado por:



---

Dr. Rigoberto Martínez Clark.  
Director de Tesis.



---

Dr. Carlos Alberto Chávez Guzmán.  
Codirector de Tesis.

El estudio de VANTs ha cobrado gran relevancia entre las comunidades de investigadores, industriales, comunidad civil, etc. en los últimos años debido a la gran cantidad de aplicaciones en que es posible emplear estos dispositivos, desde investigación en laboratorios con ambiente controlado, hasta labores de vigilancia, búsqueda y rescate, análisis topográfico, irrigación en uso agrícola, supervisión de ganado, entre muchas otras. Es importante entender el modelo físico que describe el VANT, donde la revisión de la literatura en [48] ayuda a comprender los efectos físicos involucrados en estos mecanismos, así como presentar un modelo matemático mediante el cual es posible analizar diferentes estrategias de control para realizar un despeje vertical de manera satisfactoria y mantener la estabilidad en vuelo. Mediante el análisis y uso de herramientas para definir estrategias de control que encontramos en la literatura de [29] se estudian y observan los resultados de simulación de los distintos métodos en busca de la estrategia que proporcione la mejor solución a los problemas anteriormente descritos, en [13] se desarrolla el análisis de técnicas de control para sistemas no lineales aplicados en VANTs, donde se aplica el diseño de su controlador. Este trabajo aborda el problema de arribo simultáneo de un par de VANTS, mediante la revisión del trabajo propuesto en [36], se hace uso de los algoritmos aplicados en vuelo y se presentan los resultados de este análisis.

**Palabras Clave:** *Vehículo aéreo no tripulado, Enjambres robóticos, Movimiento coordinado, arribo simultáneo.*

## **Dedicatoria**

A mi Esposa, que sin su apoyo no hubiera sido posible la realización de este trabajo.  
Por mi hijo, quien me inspiro a ser ese ejemplo y demostrarle que siempre es posible  
superarse.

A mi madre, por creer en mi.

A la memoria de mi Padre.

## **Agradecimientos**

A la Universidad Autónoma de Baja California Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Administrativas y Sociales por el apoyo brindado en materia de uso de instalaciones y equipo de experimentación.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnología (CONAHCYT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de Maestría a través del programa de becas nacionales.

A los doctores, Jesus David Avilés, Juan Francisco Flores Reséndiz, Arturo Sinue Ontiveros, Jován Oseas Mérida Rubio , por su invaluable aporte de experiencia para enriquecer este trabajo.

Por último, a mi hermosa familia, por acompañarme y apoyarme incondicionalmente durante este trayecto.

# Índice general

Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema. . . . .	10
1.2. Objetivos . . . . .	12
1.2.1. Objetivo general. . . . .	12
1.2.2. Objetivos específicos. . . . .	12
1.3. Justificación. . . . .	13
1.4. Hipótesis. . . . .	14
1.5. Metodología. . . . .	15
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	16
<b>2. Fundamentos teóricos.</b>	<b>17</b>
2.1. Dinámica del cuadricóptero. . . . .	18
2.1.1. Sistemas de referencia. . . . .	19
2.1.2. Modelado por Euler-Lagrange. . . . .	42
2.1.3. Fricción. . . . .	47
2.1.4. Movimiento del VANT. . . . .	50
2.1.5. Modelo dinámico . . . . .	54
2.2. Arribo simultáneo. . . . .	59
2.2.1. Fundamentos para arribo simultáneo. . . . .	61
<b>3. Control del Vehículo Aéreo No Tripulado.</b>	<b>65</b>
3.1. Diseño del controlador. . . . .	66
3.2. Controlador mediante linealización por retroalimentación de estados (Feed-back linearization). . . . .	69

---

3.2.1. Controlador de traslación por linealización por retroalimentación de estados. . . . .	75
3.2.2. Simulación por linealización por retroalimentación de estados. . . . .	77
3.3. Controlador mediante BackStepping. . . . .	83
3.3.1. Simulación BackStepping. . . . .	87
<b>4. Algoritmo para arribo simultáneo.</b>	<b>93</b>
4.1. Comportamiento de Cita. . . . .	94
4.1.1. Simulación de arribo simultáneo para dos elementos VANT. . . . .	98
4.2. Implementación de algoritmo de arribo simultáneo. . . . .	100
<b>5. Resultados experimentales.</b>	<b>109</b>
5.1. Distribución del hardware. . . . .	112
5.2. Asignación de marco de referencia. . . . .	113
5.3. Arranque de plataforma <i>Crazyswarm</i> . . . . .	114
5.4. Prueba de algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo. . . . .	116
5.4.1. Programa de secuencia para la prueba del algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo. . . . .	117
5.4.2. Comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo. . . . .	120
<b>6. Conclusiones.</b>	<b>123</b>
6.1. Trabajo futuro. . . . .	124
<b>Bibliografía</b>	<b>127</b>

# Índice de figuras

1.1. Icaro [1]. . . . .	1
1.2. Diseños DaVinci [20]. . . . .	2
1.3. Primer vuelo tripulado controlado, hermanos Wright [16]. . . . .	2
1.4. Kettering Bug [35]. . . . .	3
1.5. Cuadricóptero [12]. . . . .	5
2.1. Sistema de coordenadas [45] . . . . .	19
2.2. Coordenadas polares. . . . .	20
2.3. Rotación $R_Z(\theta)$ [45]. . . . .	22
2.4. Rotación $R_X(\theta)$ [45]. . . . .	23
2.5. Rotación $R_Y(\theta)$ . [45]. . . . .	24
2.6. Regla de rotación alrededor del sistema de referencia fijo $\Sigma_E$ [45]. . . . .	26
2.7. Rotación compuesta del vector $P_0$ a $P_3 \in \Sigma_E$ [45]. . . . .	27
2.8. Rotación $R_Z(\phi)$ sobre el sistema móvil $\Sigma_1$ [45]. . . . .	29
2.9. Rotación $R_X(\Theta)$ sobre el sistema móvil $\Sigma_2$ [45]. . . . .	31
2.10. Rotación $R_Y(\psi)$ sobre el sistema móvil $\Sigma_3$ [45]. . . . .	33
2.11. Movimiento General de un VANT: traslación $\xi$ , rotación $\eta$ [45]. . . . .	36
2.12. Fuerza tangencial actuando en aspa [45]. . . . .	51
2.13. Coordenadas polares. . . . .	62
2.14. Relación entre la dinámica del robot, la ley de control de regulación y el protocolo de consenso en distancia para la emergencia de arribo simultáneo [36]. . . . .	64
3.1. Sistema en cascada, subsistemas de rotación y traslación [45]. . . . .	67
3.2. Propuesta de controlador [45]. . . . .	69
3.3. Diagrama de bloques Simulink de linealización por retroalimentación de estados [45]. . . . .	78

3.4. Trayectoria [45]. . . . .	79
3.5. Comportamiento eje X [45]. . . . .	79
3.6. Comportamiento eje Y[45]. . . . .	80
3.7. Comportamiento eje Z [45]. . . . .	80
3.8. Comportamiento Roll [45]. . . . .	81
3.9. Comportamiento Yaw [45]. . . . .	81
3.10. Comportamiento Pitch [45]. . . . .	82
3.11. Diagrama de bloques Simulink por backstepping [45]. . . . .	88
3.12. Simulación Trayectoria Backstepping [45]. . . . .	88
3.13. Comportamiento eje X [45]. . . . .	89
3.14. Comportamiento eje Y [45]. . . . .	89
3.15. Comportamiento eje Z [45]. . . . .	90
3.16. Comportamiento Roll [45]. . . . .	90
3.17. Comportamiento Pitch [45]. . . . .	91
3.18. Comportamiento Yaw [45]. . . . .	91
4.1. Arribo simultáneo de un enjambre robótico [45]. . . . .	94
4.2. Distancia $\rho$ al punto de cita [45]. . . . .	95
4.3. Arribo de dos elementos al punto de cita [45]. . . . .	96
4.4. Diagrama de bloques de simulación de arribo simultáneo en Simulink [45]. . . . .	98
4.5. Trayectoria simulada [45]. . . . .	99
4.6. Comportamiento de las distancias $\rho_i$ y $\rho_j$ en simulación [45]. . . . .	99
4.7. Arquitectura <i>CrazySwarm</i> [42]. . . . .	101
4.8. Algoritmo de arribo simultáneo para $n$ VANTs [45]. . . . .	102
5.1. VANT <i>Crazyflie 2.0</i> [12]. . . . .	110
5.2. Sistema <i>Steam VR Basestation 2.0</i> [12]. . . . .	111
5.3. Distribución del hardware para el experimento [45]. . . . .	113
5.4. Aplicación <i>Crazyflie Client</i> calibración de <i>Steam VR Basestation 2.0</i> [12]. . . . .	114
5.5. Interfase <i>CrazySwarm</i> [56]. . . . .	115
5.6. Terminal de comandos [45]. . . . .	116
5.7. Archivo <i>crazyflies.yaml</i> [56]. . . . .	116
5.8. Ventana de dialogo <i>chooser.py</i> [56]. . . . .	117

- 
- 5.9. Resultado del experimento sin regulación para la implementación de comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo, donde se muestra el comportamiento de la distancia de cada elemento al área de cita. En rojo el VANT 1 y Azul el VANT 2 [45]. . . . . 121
- 5.10. Resultado del experimento con regulación para la implementación de comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo, donde se muestra el comportamiento de la distancia de cada elemento al área de cita. En rojo el VANT 1 y Azul el VANT 2 [45]. . . . . 122

# Índice de tablas

1.1. Cronología inteligencia de enjambre aplicado en robótica de enjambre. . . .	7
1.2. Diferencias y similitudes entre sistemas robóticos. . . . .	9
2.1. Principales efectos físicos que actúan sobre un cuadricóptero. . . . .	19
2.2. Posibles secuencias para rotación compuesta sobre los ejes principales. . . .	34
5.1. Características de los VANT <i>Crazyfly</i> . . . . .	110

# Capítulo 1

## Introducción

Desde los inicios de su historia, la especie humana siempre ha volteado al cielo, y observado a las aves y otras especies voladoras capaces de surcarlo. La humanidad ha soñado con explorar esta frontera, estas manifestaciones las podemos observar en la literatura antigua, como, por ejemplo, el mito griego de Icaro (Figura 1.1) y los mitos nórdicos de brujas [8], donde mediante el uso de un objeto proxy eran capaces de surcar los cielos.



Figura 1.1 Icaro [1].

A finales del siglo XV y principios del siglo XVI, Da Vinci le regaló a la humanidad algunos prototipos de naves aéreas, como, el tornillo aéreo y la máquina voladora (Figura 1.2) [20]. A partir del siglo XVIII el ser humano logró elevarse empleando globos aerostáticos, sin embargo, éstos no podían ser controlados. Gracias a esta herramienta la humanidad dio un primer vistazo a esa frontera que durante siglos parecía inalcanzable. Durante el siglo XIX se inició con la construcción de los primeros dirigibles, que tenían la capacidad de ser controlados, en este mismo siglo se investigó el vuelo con planeadores, los cuales eran capaces volar de manera controlada durante un corto periodo de tiempo, comenzaba la construcción de los primeros aeroplanos con motor, los cuales, aun contando con impulso externo, lograban despegar y recorrer pequeñas distancias, y se empezaba a desarrollar la idea de Vehículos Aéreos No Tripulados (VANT), donde tenemos uno de los primeros registros por el ejército de Austria (año 1849) después de que se pusieran en marcha globos aerostáticos no tripulados montados con bombas sobre la ciudad de Venecia.

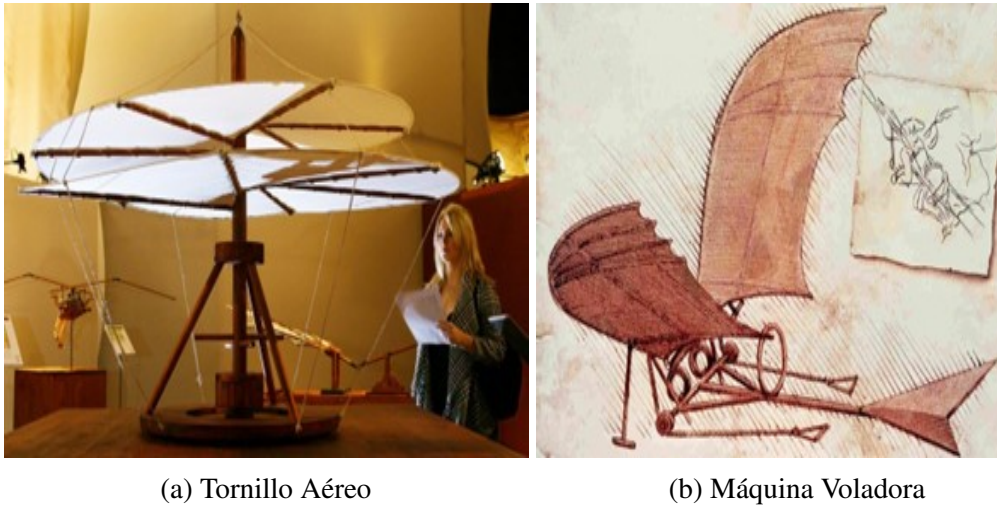


Figura 1.2 Diseños DaVinci [20].

No fue hasta principios del siglo XX, en 1903, que los hermanos Wright tuvieron éxito con el primer vuelo tripulado controlado (Figura 1.3), en este mismo año, el ingeniero español Leonardo Torres y Quevedo introdujo un sistema de control mediante señales de radio llamado “Telekino” en la Academia de Ciencias de París, con la intención de hacer pruebas de un prototipo de dirigible sin poner en riesgo vidas humanas [39].



Figura 1.3 Primer vuelo tripulado controlado, hermanos Wright [16].

Los primeros intentos para la creación de VANT's fueron llevados a cabo para uso militar durante la primera guerra mundial, donde destacan los siguientes casos:

1. 1916: La milicia de Reino Unido, con el liderazgo del capitán A.H Low construye el “Aerial Target”, VANT controlado mediante radio, desarrollado para uso de blanco para entrenamiento y sistema de defensa de dirigibles enemigos.
2. 1917: la compañía Norte Americana General Motors desarrolló el VANT conocido como “Kettering Bug” (torpedo aéreo Kettering (Figura 1.4)), que era capaz de alcanzar un blanco hasta a 120 km de su lanzamiento.



Figura 1.4 Kettering Bug [35].

Durante la segunda Guerra mundial, continuó el uso militar de VANT's, principalmente para entrenar a los operadores de cañones antiaéreos. Hasta 1959, la milicia de Estados Unidos, preocupada por las pérdidas humanas derivadas de los constantes conflictos del periodo, comenzó a planificar el uso de VANT's, en 1960 inició un programa de VANT's bajo el nombre clave “Red Wagon”, siendo en 1964, durante el enfrentamiento de Tonkin en la guerra de Vietnam que se llevaron a cabo las primeras misiones de VANT's en combate.

Durante la guerra de desgaste (1967-1970), la inteligencia israelí probó los primeros VANT's tácticos, los cuales contaban con cámaras de reconocimiento, esta prueba fue exitosa al lograr obtener imágenes del otro lado del canal de Suez. Esta fue la primera vez que se desarrolló un VANT capaz de lanzarse y aterrizar en cualquier pista corta (a diferencia de VANT's basados en aviones).

Para 1973, en la guerra de Yom Kippur, las baterías de misiles tierra-aire de egipcios y sirios causaron graves daños a los aviones de combate Israelitas. Como resultado, Israel desarrolló el IAI Scout como el primer VANT con vigilancia en tiempo real, Esta innovación

permitió obtener imágenes y señuelos de radar que ayudó a neutralizar completamente las defensas aéreas sirias al comienzo de la guerra del Líbano en 1982, salvando incontables vidas de pilotos. Para 1987, los VANT's se utilizaron por primera vez como pruebas de concepto de super-agilidad, controlados después de la parada de simulaciones de vuelo de combate que implicaban un control de vuelo tridimensional con vectorización de empuje y dirección a chorro sin cola, basado en tecnología de sigilo. [20]

Durante las décadas de los 80's y 90's, con la maduración y miniaturización de los componentes electrónicos, los VANT's fueron de mayor interés para el ejército estadounidense, los VANT's demostraron la posibilidad de crear máquinas de combate más baratas y capaces, que no representaban un riesgo para el operador, las primeras generaciones de VANT's eran principalmente modelos tipo avión para uso de vigilancia.

En el periodo que corresponde de mayo 2002 a diciembre 2005, la unión europea creó el proyecto CAPECON, el cual tenía como objetivo el desarrollo de VANT's accesibles económicamente para uso civil/comercial y comparó diferentes configuraciones aerodinámicas, definiendo configuraciones para uso y desarrollo por parte de ingenieros [35].

En 2013, al menos 50 países utilizaban VANT's, entre ellos China, Irán, Israel, Pakistán y Turquía. Los cuales diseñaron y desarrollaron sus propias variantes de VANT's, debido a su amplia proliferación, no existe una lista completa de sistemas de VANT's.

La evolución en las tecnologías de telecomunicaciones, información, control, inteligencia artificial y energía han tenido como resultado el incremento en el uso de VANT's para uso en actividades civiles, agricultura, industriales, de consumo, seguridad, rescate, geológicas, detección y seguimiento de poblaciones de animales, investigación de escenas criminales, análisis de destrucción por eventos naturales, lucha contra incendios, comercial y recreativas.

En el ámbito civil, los entornos normativos del uso de VANT's se restringió, dando como resultado normativas que limitan el área de trabajo de los VANT's, por lo que el operador solo puede hacer uso de su VANT en un área que no vaya más allá de su línea visual de visión (BVLOF, por sus siglas en inglés) [16], por este motivo los desarrolladores de VANT's civiles desarrollaron software de código cerrado para cumplir con esta normativa. Aún que es importante comentar que esta regulación, a la fecha de redacción de este documento, sigue en desarrollo por muchos países.

Es posible clasificar a los VANT's con base en la forma en que vuelan en dos grandes familias [50]

1. VANT de ala fija (simulan a los aviones)
2. VANT de ala rotatoria o multirrotores, entre ellos:

- Tricópteros.
- Cuadricópteros.
- Hexacópteros
- Octocópteros
- Coaxiales.

En vehículos de menor dimensión los cuadricópteros (Figura 1.5) presentan una ventaja, siendo ésta la facilidad de maniobra, el menor mantenimiento, la reducción de tamaño de las hélices, que lleva consigo una reducción en la administración de la energía, por lo que estas características los hacen ideales para desarrollos de investigación.



Figura 1.5 Cuadricóptero [12].

En la actualidad, existen algunos proyectos con enfoque de investigación y desarrollo hechos por desarrolladores de VANT's. Tal es el caso de desarrolladores como Bitcraze, Ardupilot, Paparazzi UAV, Drone Code, LibrePilot, Flone, OpenDroneMap, DronePan, Drone Journalism Lab Operations manual [6], por mencionar algunos. Estos proyectos presentan un entorno de código abierto y algunos proponen desarrollo de hardware para que investigadores y entusiastas de los cuadricópteros creen y prueben algoritmos y experimenten con modelos de control, inteligencia artificial y telecomunicaciones.

El entorno de código abierto permite a los investigadores analizar comportamientos y modelos matemáticos aplicados, siendo de interés el comportamiento autónomo de los sistemas mediante una interfaz computacional. Algunos ejemplos de esto serían seguimiento de trayectoria sin supervisión humana y la navegación.

Uno de los temas emergentes en el ámbito de la investigación es la interacción de múltiples cuadricópteros para la realización de tareas específicas, que mientras para un solo elemento podrían ser imposibles de realizar, el trabajo en conjunto da como resultado tareas más complejas, dada esta interacción se derivan una serie de cuestiones, las cuales requieren atención para generar un comportamiento colectivo inteligente, este comportamiento es conocido como inteligencia de enjambre.

La inspiración del comportamiento de enjambre se da por la observación en la naturaleza donde mediante estudios se ha identificado que no existe un mecanismo coordinado centralizado o estructura de control detrás de la sincronización del grupo de individuos, aun así, su nivel de funcionalidad es muy robusto, las interacciones locales, y a cierto punto aleatorias dan como resultado un comportamiento emergente de inteligencia colectiva o inteligencia de enjambre (*SI*, por sus siglas en inglés) [67].

Las aplicaciones de *SI* pueden enfocarse a diversos campos de estudio, siendo algunos de estos la investigación fundamental, ingeniería, ciencias computacionales, industria y ciencias sociales. Y pueden emplearse para aplicaciones como adquisición de material, telecomunicaciones, clasificación de datos, planeación de sistemas de calefacción, trazabilidad y predicción de objetos en movimientos, control de sistemas dinámicos y robótica de enjambre [66]. Definiendo la robótica de enjambre como el estudio del cómo crear coordinación y cooperación entre un grupo de robots, aprovecha las propiedades de los enjambres que son inspiradas por comportamientos naturales como búsqueda de alimento, bandada, clasificación, estigmergia o cooperación [18] y busca soluciones a problemas de control como el comportamiento de reunión, arribo simultáneo, consenso, movimiento coordinado, sincronización y forrajeo, por mencionar algunos.

Antes de poder definir el problema de investigación, es importante dar un breve repaso a la historia de la inteligencia de enjambre, en el Tabla 1.1 se puede observar la línea de tiempo de la inteligencia de enjambre con enfoque en la robótica de enjambre, esto con el propósito de contextualizar.

Cronología inteligencia de enjambre aplicado en robótica de enjambre [45].	
Año	Hito
1988	El término “enjambre” para uso de robótica fue usado por primera vez por G. Beni y Fukuda en sus trabajos “ <i>The concept of cellular robotic system</i> ” [10] y “ <i>Approach to the dynamically reconfigurable robotic system</i> ” [63].
1989	G. Beni y J.Wang introducen el término “inteligencia de enjambre” en su trabajo “ <i>Swarm intelligence (proceedings seventh annual meeting of the robotics society of japan)</i> ” [60].
1993	C. Ronald Kube y Hong Zohng construyen un Sistema multi-robots inspirado en el comportamiento colectivo de enjambres naturales. [61] Gregory Ducken et al. definieron enjambre robótico con respecto a diferentes características, incluyendo, tamaño del enjambre, topología de comunicación, ancho de banda de comunicación, velocidad de reorganización, habilidad de los elementos del enjambre, heterogeneidad y homogeneidad del enjambre.
1994-1999	Se condujeron muchos trabajos para la emulación de diferentes comportamientos de enjambre y su implementación en sistemas robóticos, entre estos primeros trabajos se encuentran “ <i>From local actions to global tasks: stigmergy and collective robotics</i> ”[44] de R.Beckers, O.Holland y J. L. Deneubourg y “ <i>Stigmergy, self-organization, and sorting in collective robotics</i> ”[43] de O.Holland y C.Melhuish, entre otros .
2004	G. Beni realizó un nuevo intento para describir enjambre de manera más precisa, el plantea que un enjambre debe ser simple, similar y tener la capacidad de autoorganizarse, y deben cumplir con la característica de escalabilidad y contar con comunicación solo entre los elementos del enjambre. Estas propiedades son las bases de la actual robótica de enjambre. [11] E.Shan. en su trabajo “ <i>Swarm robotics: from source of inspiration to domains of application</i> ”[67] agregó algunas características más, la cuales son: autonomía y que deben consistir en pequeños números de grupos homogéneos, y cada grupo debe de contener un gran número de elementos.

Tabla 1.1 Cronología inteligencia de enjambre aplicado en robótica de enjambre.

G. Beni [11] propuso las siguientes características para definir un sistema robótico de enjambre:

- Flexibilidad.
- Escalabilidad.
- Robustez.

Hay otras características, que, aunque no siempre son exhibidas por los sistemas robóticos de enjambre son indispensables para diferenciarlos de otros sistemas robóticos, como sistemas multi agente y sistemas de sensores, están incluidas:

- Autonomía.
- Autoorganización.
- Auto ensamble.
- Descentralizado.
- Estigmergía.

En la Tabla 1.2, podemos observar las diferencias y similitudes de los distintos tipos de sistemas robóticos, donde se observa que, por simplicidad en diseño de elementos, bajo costo e interacción entre un alto número de miembros los sistemas robóticos de enjambre son un área de estudio de interés.

Diferencias y similitudes entre sistemas robóticos [45].				
Características	Sistemas robóticos			
	Sistemas robóticos de enjambres	Sistema Multi robot (MRS, por sus siglas en inglés)	Sistema Multi robot (MAS, por sus siglas en inglés)	Redes de sensores
Número de Miembros	Alto (comparado con otros sistemas)	Bajo (comparado con sistemas robóticos de enjambre)	Bajo (comparado con sistemas robóticos de enjambre)	Alto (comparado MRS y MAS)
Diseño e implementación de Robots	Diseño sencillo. Los robots individualmente no son capaces de realizar tareas	Robots individuales con capacidad de llevar a cabo tareas	Robots individuales con capacidad de llevar a cabo tareas	los nodos pueden ser diseñados simples o complejos
Auto organización	Si	Si	Si	Si
Sistema de control	Descentralizado	Descentralizado/centralizado	Descentralizado/centralizado	Descentralizado/centralizado
Homogeneidad/ Heterogeneidad	mayormente homogéneo	mayormente heterogéneo	Ambos	Homogéneo
Autonomía	Si	No	No	Si
Entorno de trabajo	No estructurado/ desconocido	No estructurado/ desconocido y estructurado/ conocido	estructurado/ conocido	estructurado/ conocido
Movilidad	Si	Si	No mayormente	No
Robustez	Si (alta)	Si	Si	Si
Escalabilidad	Si (alta)	Si (Baja)	Si	Si
Flexibilidad	Si (alta)	Si (Baja)	Si	Si
Costo	Bajo	Medio	Medio	Medio

Tabla 1.2 Diferencias y similitudes entre sistemas robóticos.

## 1.1. Planteamiento del problema.

Los sistemas robóticos de enjambre es un campo de estudio aún en desarrollo y los proyectos realizados para el análisis de sus comportamientos son en su mayoría simulaciones computacionales, esto debido a la simplicidad, tiempo y bajos recursos que involucran cambios a nivel de software y diseño de prototipo durante el desarrollo. [18]. Existen pocos proyectos dedicados a hacer pruebas en condiciones de laboratorio entre los que podemos encontrar Swarmanoid [25], Kilobot [55], Marsbee [28], kobot [2], entre otros, por lo que es un área vigente de estudio donde grandes corporaciones dedican recursos para su desarrollo.

El gran reto para pasar de simulación a pruebas con robótica de enjambre aplicada (incluyendo pruebas de laboratorio controladas donde se designa un lugar con condiciones ideales y pocas irrupciones en el comportamiento del sistema) radica principalmente en las características que debe de cumplir para considerarse sistema de enjambre robótico, en particular las características de robustez, ser un sistema descentralizado y la funcionalidad de seguimiento/arribo simultáneo (Tabla 1.2 ).

- La robustez requiere redundancia en el sistema, esto es, que los elementos del sistema sean capaces de continuar con sus tareas, aunque exista falla o malfuncionamiento en la operación de otros elementos, o una variable irruptora en el entorno.
- Un sistema se considera descentralizado cuando no requiere de un elemento líder para la coordinación en realización de una tarea, ya que se trata de un punto de falla en el sistema. Para que se pueda considerar un sistema robótico de enjambre, el sistema requiere ser capaz de sobrellevar ese punto de falla, siendo un aspecto de gran importancia la redundancia [18, 11].
- Coordinación descentralizada, sin importar si una parte de los elementos quedan fuera de funcionamiento durante la realización de la tarea, la operación del sistema continuará. Simplicidad del sistema, en sistemas robóticos de enjambre los elementos son sencillos, esta característica reduce tasa de error en el sistema completo [18, 63, 60], siendo un área de oportunidad el desarrollo de algoritmos que nos permitan mantener estas características.
- La funcionalidad de seguimiento/arribo simultáneo es la cualidad por la cual el sistema robótico de enjambres pasa de la tarea de seguimiento a la de arribo simultáneo mediante un consenso, el cual se define como un procedimiento por medio del cual las cadenas de software acuerdan un cambio en el estado de la tarea del sistema [41].

Las características mencionadas anteriormente son un área de oportunidad importante en el tema de las telecomunicaciones en VANT's. Por lo que los elementos del sistema, al momento de estar realizando una tarea asignada, deben ser capaces de comunicarse entre ellos sin necesidad de estar conectados a una antena/red central (robustez), debe comunicarse por medio de una red local, ahora bien, debido a la característica de simplicidad en el diseño de los elementos, cada elemento debe contar con unidades de telecomunicación y procesamiento que les permitan trabajar de manera individual y a la vez compartir información entre ellos, como ubicación, velocidad, estado de tarea asignada, alarmas, entre otras. Con el objetivo de mantener las funciones asignadas para la realización de la tarea, la cual para labores de esta tesis se considera la función de seguimiento/arribo simultáneo, esta información debe ser capaz de ser compartida por un medio de telecomunicaciones, siendo de suma importancia mantener un ancho de banda saludable para que la red no se sature y se pueda realizar un buen seguimiento del estado de las tareas. Por lo anterior, este trabajo de tesis propone el desarrollo de un algoritmo de control descentralizado que permita la emergencia del comportamiento colectivo seguimiento/arribo simultáneo en un enjambre de cuadricópteros en ambiente de laboratorio.

## 1.2. Objetivos

Este trabajo de tesis plantea alcanzar los siguientes objetivos

### 1.2.1. Objetivo general.

Diseñar e implementar un algoritmo de control para la emergencia de arribo simultáneo de un grupo de cuadricópteros mediante herramientas de código abierto en un cuarto de ambiente controlado.

### 1.2.2. Objetivos específicos.

Para poder lograr este objetivo general, se requiere llevar a cabo de manera sistemática los siguientes objetivos específicos:

- Seleccionar el modelo de cuadricóptero para objeto de estudio.
- Definir el tamaño del enjambre/cantidad de objetos de estudio.
- Modelar matemáticamente el cuadricóptero.
- Validar el modelado matemático en el objeto de estudio. Diseñar y simular el algoritmo de control para seguimiento de trayectoria para cuadricópteros.
- Diseñar y simular el algoritmo de control para arribo simultáneo para cuadricópteros.
- Seleccionar y definir las características del cuarto para prueba de ambiente controlado. Validar el algoritmo de control para seguimiento de trayectoria en los objetos de estudio en cuarto de prueba para ambiente controlado.
- Validar el algoritmo de arribo simultáneo para seguimiento en los objetos de estudio en cuarto de prueba para ambiente controlado.
- Implementar los algoritmos en pruebas de comportamiento diseñados para observar el comportamiento de seguimiento de trayectoria/arribo simultáneo de un grupo de cuadricópteros.

### **1.3. Justificación.**

El empleo de robótica de enjambre es un concepto aún en desarrollo [25, 55, 28, 2] en ámbitos fuera de simulaciones computarizadas, por lo que crear aplicaciones de robótica de enjambre a cuadricópteros de investigación aplicada en un ambiente controlado genera la oportunidad de estudiar los comportamientos fuera de la simulación.

Los algoritmos de seguimiento de trayectoria y arribo simultáneo son de suma importancia, ya que la gran mayoría de las aplicaciones requieren este tipo de comportamientos para el desarrollo de las tareas asignadas en su comportamiento de enjambre, teniendo como algunos ejemplos de aplicaciones: búsqueda y rescate, seguridad, distribución de redes como wifi, agricultura, análisis de comportamiento de grupos de animales, entre otras.

Esta tesis tiene como propósito desarrollar una aplicación en ambiente controlado de robótica de enjambre que será enfocado en los comportamientos de seguimiento de trayectoria y arribo simultáneo, mediante el uso de una red de comunicación local.

## 1.4. Hipótesis.

Con la finalidad de valorar el desarrollo de la investigación, se han planteado las siguientes hipótesis:

- Hipótesis 1
  - H0: El error promedio en el seguimiento de trayectoria del VANT es menor a 10 mm.
  - Ha: El error promedio en el seguimiento de trayectoria del VANT es mayor a 10 mm.
  
- Hipótesis 2:
  - H0: El tiempo de llegada a la zona deseada es igual entre todos los robots del grupo.
  - Ha: El tiempo de llegada a la zona deseada no es igual entre todos los robots del grupo.
  
- Hipótesis 3:
  - H0: El periodo de procesamiento de la ley de control es menor de 10 ms .
  - Ha: El periodo de procesamiento de la ley de control es mayor de 10ms.

## 1.5. Metodología.

Se utilizará la metodología de Euler-Lagrange para el modelado matemático de los VANTs, debido a las propiedades que aporta para el estudio dinámico.

Una vez definido el modelo matemático se diseñará el algoritmo de control de regulación de posición mediante herramientas de control no lineal como lo son la linealización por retroalimentación de estados y backstepping. Para verificar la viabilidad de los algoritmos de control, se realizarán simulaciones por medio del software Matlab para analizar los comportamientos y definir que algoritmo presenta un mejor desempeño.

La implementación de algoritmos en el mundo real se caracteriza por su alta complejidad en el modelado de estos mismos, por lo que se optará por la metodología Hodge-Mock la cual es basada en programación orientada a objetos (OOP por sus siglas en inglés) [62, 59] para la implementación de robots comerciales . Hodge-Mock se concibió para uso de simulación de software y prototipos de laboratorio para analizar la viabilidad en introducir automatización en el control de tráfico aéreo [53] . Por otra parte el objetivo de la OOP es el desarrollo de módulos de programación modelados con características del mundo real, los cuales son capaces de ser usados en conjunto de manera jerárquica (padre-hijos) [25] , esta característica es clave para lograr la modularidad, reutilizar módulos de código ya validado y depurar solo funciones específicas, lo cual en el caso del desarrollo de los algoritmos de modelado matemático de VANT's, seguimiento de trayectoria y arribo simultáneo, permitirá modelar las respuestas a los errores para posteriormente procesar de manera ordenada para lograr la estabilidad del sistema de VANT's.

## 1.6. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera:

El Capítulo 2 abordará los fundamentos teóricos, donde se presentará las ecuaciones básicas para lograr comprender la física detrás de los VANT y los algoritmos de arribo simultáneo.

En el Capítulo 3 se propondrán, analizarán y simularán distintas propuestas de controladores para VANT, con la finalidad de seleccionar el que proporcione mejor desempeño y estabilidad para el control del VANT.

En el Capítulo 4 se verá el diseño, simulación e implementación del algoritmo de arribo simultáneo con aplicación a un grupo de VANTs.

En el Capítulo 5 se analizarán los resultados encontrados en el trabajo propuesto bajo esta tesis.

Mientras que en el Capítulo 6 se enuncian las conclusiones y se enlista el trabajo futuro derivado de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos.

Para analizar el comportamiento y posteriormente seleccionar una estrategia de control de un VANT, es necesario realizar su modelado matemático, el cual tiene como finalidad obtener los parámetros en una expresión matemática de las fuerzas físicas que actúan sobre el VANT, para controlar es necesario medir, con el fin de lograr este cometido se hace uso de las leyes físicas, donde como primer paso se analizan las expresiones de cinemática, las cuales expresan el movimiento de un cuerpo sin tomar en cuenta las fuerzas que lo provocan. Una vez que se conoce el comportamiento cinemático de un cuerpo, se analizará el comportamiento dinámico del VANT mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, que además de la estructura matemática del modelo dinámico, aporta gran cantidad de propiedades que son claves para la identificación paramétrica, análisis y diseño de algoritmos de control. La primera parte de esta sección tiene como objetivo proveer las bases de las matemáticas requeridas para obtener el modelado matemático de un VANT, el cual es de suma importancia para el resto de esta investigación. En la segunda parte se proveerán las bases matemáticas relacionadas con los algoritmos de arribo simultáneo.

## 2.1. Dinámica del cuadricóptero.

Esta sección está enfocada en describir analíticamente la dinámica de un VANT, considerando la representación de un cuadricóptero establecida en [8, 61, 44].

Un cuadricóptero típicamente está constituido por un marco mecánico de cuatro brazos, los cuales tienen una distancia igual entre ellos al centro, que puede ser en configuración “+” o “X”, en el extremo de cada brazo se encuentra un rotor, los cuales generan el torque necesario para generar la dinámica del sistema.

Cada uno de los rotores es identificado en orden ascendente del 1 al 4 (ej. rotor1;  $\omega_1$ ) y son agrupados en pares, dependiendo la configuración en la que giran sus hélices, siendo esta dada de la siguiente manera:

- Rotor 1 ( $\omega_1$ ) y Rotor 3 ( $\omega_3$ ), movimiento en contra del sentido del reloj (*counter-clockwise CCW*).
- Rotor 2 ( $\omega_2$ ) y Rotor 4 ( $\omega_4$ ), movimiento en sentido del reloj (*clockwise CW*).

Los rotores generan una fuerza de empuje ascendente que eleva el cuadricóptero. La diferencia en su velocidad de rotación causa un desbalance en el torque aplicado al centro de masa del cuerpo del cuadricóptero, teniendo como consecuencia un cambio en la postura. Al asignar la velocidad de rotación de las 4 hélices por separado, podemos configurar el empuje y el torque total sobre los ejes x, y, z en el marco mecánico del cuadricóptero. De esta manera somos capaces de controlar la postura y la posición del cuadricóptero en el espacio tridimensional.

La configuración “+” ofrece una mejor agilidad, mientras la configuración “X” se considera más estable [26]. Para fines de esta tesis se considerara la configuración “X” mostrado en la Figura 1.5, este equipo es un modelo de cuadricóptero “*Crazyflie 2.1*” del fabricante “*bitcraze*” [12], se trata de una plataforma de código abierto para uso de investigación.

El cuadricóptero es un sistema mecánico complejo, considera diversos efectos físicos de las áreas de aerodinámica y mecánica [15]. El modelo del cuadricóptero debe considerar todos los efectos importantes, incluidos los giroscópicos. Una breve lista de los principales efectos que actúan sobre un cuadricóptero [37] se describen en la Tabla 2.1.

Principales efectos físicos que actúan sobre un cuadricóptero [45].		
Efecto	Fuente	Formulación
Efectos Aerodinámicos	Rotación de Propelas	$C\Omega^2$
Contra-torques inerciales	Cambio en la velocidad de rotación de la propela	$J\dot{\Omega}$
Efecto gravitatorio	Posición del centro de masa	
Efecto giroscópico	Cambio en la orientación del cuerpo rígido Cambio en la orientación del plano de la hélice	$I\dot{\theta}\psi$ $J\Omega_r\theta, \phi$
Efecto giroscópico	Todo movimiento de cuadricóptero	$C\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

Tabla 2.1 Principales efectos físicos que actúan sobre un cuadricóptero.

### 2.1.1. Sistemas de referencia.

Las dinámicas de rotación del *Crazyfly 2.1* son modeladas en esta sección. Consideremos el marco de referencia a tierra (fijo) como  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  y el marco de referencia del cuerpo (móvil)  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$ , ilustrado en la Figura 2.1,

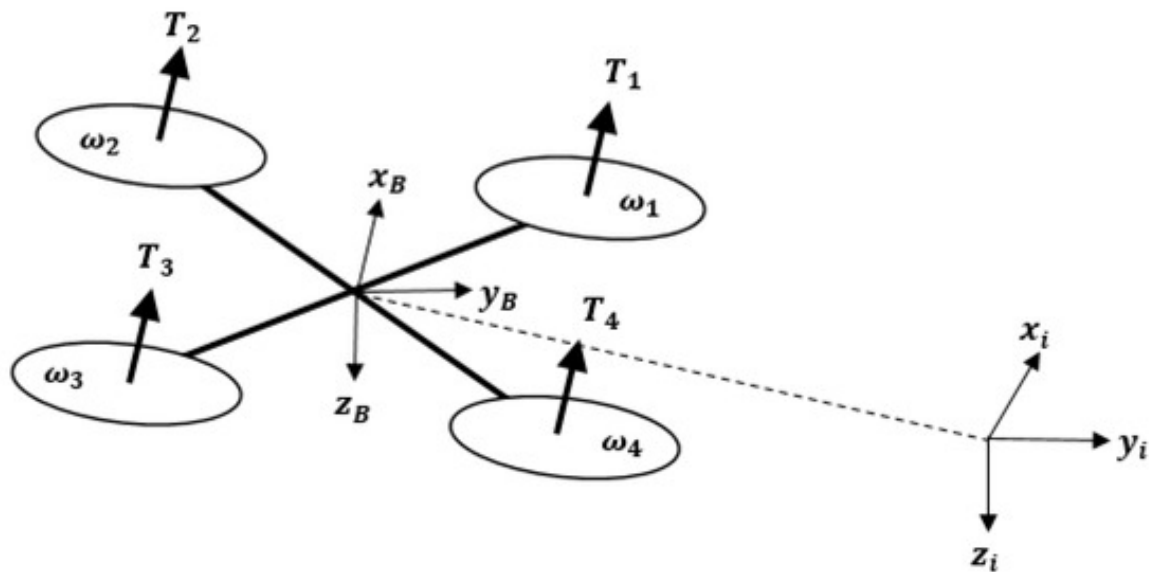


Figura 2.1 Sistema de coordenadas [45]

#### Marco de referencia fijo y marco de referencia móvil.

Para el análisis inicial se considera que el marco de referencia a tierra y el del cuerpo comparten el mismo origen, donde el centro de masa del VANT se encuentra en el origen de

ambos sistemas de referencia. Sean las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario en el VANT registradas en el vector  $P \in \mathbb{R}^3$ , por ejemplo, uno de sus rotores.

Las coordenadas de tal punto en el sistema de referencia a tierra  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  que contienen en el vector  $P_0[p_{0x}, p_{0y}, p_{0z}]^T$ ; Mientras las coordenadas del mismo punto en el sistema de referencia del cuerpo  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$  que contienen en el vector  $P_1[p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}]^T$ ; considere Vectores bases y unitarios sobre cada uno de los ejes principales de los sistemas de referencia  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  y  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$  (Figura 2.2), el vector unitario del sistema de referencia a tierra está dado por  $\{i_0, j_0, k_0\}$ , donde  $i_0 = [1, 0, 0]^T$ ,  $j_0 = [0, 1, 0]^T$  y  $k_0 = [0, 0, 1]^T$ . Se define el vector unitario del cuerpo de manera similar, dado por  $\{i_1, j_1, k_1\}$ .

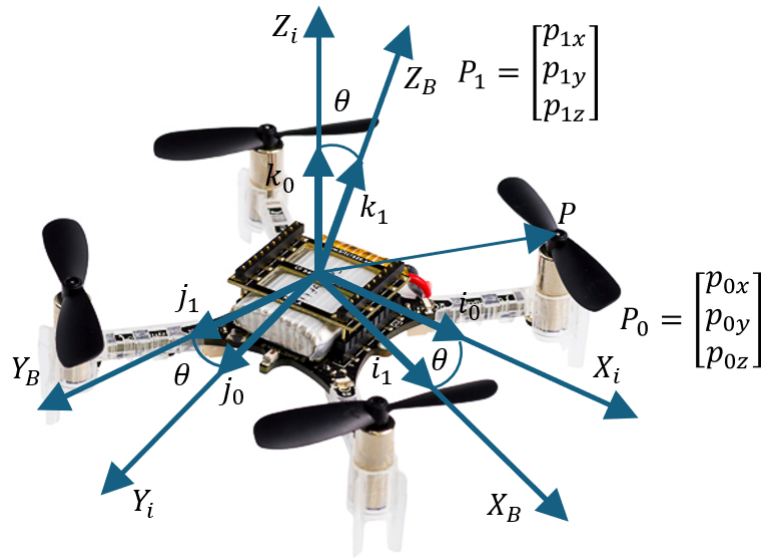


Figura 2.2 Marco de referencia móvil  $\Sigma_B$  con orientación relativa al marco de referencia a tierra  $\Sigma_E$  [45].

Cualquier punto arbitrario en el VANT del origen de ambos sistemas de referencia al centro de masa del VANT pueden expresarse en función de las bases de vectores unitarios de la siguiente manera:

$$P_0 = p_{0x}i_0 + p_{0y}j_0 + p_{0z}k_0 \quad (2.1)$$

$$P_1 = p_{1x}i_1 + p_{1y}j_1 + p_{1z}k_1 \quad (2.2)$$

donde la ecuación (2.1) corresponde al marco de referencia a tierra y la ecuación (2.2) al marco de referencia del cuerpo.

Los vectores  $P_0$  y  $P_1$  representan el mismo punto arbitrario en el VANT (vector  $P$ ). De las ecuaciones (2.1) y (2.2) se deduce que la relación entre sus componentes se expresa como el producto escalar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_{0x} &= p_0 \cdot i_0 = p_1 \cdot i_0 = (p_{1x}i_1 + p_{1y}j_1 + p_{1z}k_1) \cdot i_0 \\ P_{0x} &= p_{1x}i_1 \cdot i_0 + p_{1y}j_1 \cdot i_0 + p_{1z}k_1 \cdot i_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} P_{0y} &= p_0 \cdot j_0 = p_1 \cdot j_0 = (p_{1x}i_1 + p_{1y}j_1 + p_{1z}k_1) \cdot j_0 \\ P_{0y} &= p_{1x}i_1 \cdot j_0 + p_{1y}j_1 \cdot j_0 + p_{1z}k_1 \cdot j_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P_{0z} &= p_0 \cdot k_0 = p_1 \cdot k_0 = (p_{1x}i_1 + p_{1y}j_1 + p_{1z}k_1) \cdot k_0 \\ P_{0z} &= p_{1x}i_1 \cdot k_0 + p_{1y}j_1 \cdot k_0 + p_{1z}k_1 \cdot k_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i_0 & j_1 \cdot i_0 & k_1 \cdot i_0 \\ i_1 \cdot j_0 & j_1 \cdot j_0 & k_1 \cdot j_0 \\ i_1 \cdot k_0 & j_1 \cdot k_0 & k_1 \cdot k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$P_0 = R_0^1 P_1 \quad (2.7)$$

donde la matriz de rotación del vector  $P_1$  hacia el marco de referencia a tierra es descrita por la notación

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i_0 & j_1 \cdot i_0 & k_1 \cdot i_0 \\ i_1 \cdot j_0 & j_1 \cdot j_0 & k_1 \cdot j_0 \\ i_1 \cdot k_0 & j_1 \cdot k_0 & k_1 \cdot k_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Cualquier punto arbitrario en el VANT representado por el vector  $P_1$  en el marco de referencia del cuerpo, está relacionado al marco de referencia a tierra a través de las proyecciones geométricas en la matriz  $R_0^1$  (ecuación 2.8).

Dadas las propiedades matemáticas de la matriz  $R_0^1$  se observa que se trata de un sistema ortogonal [ $SO(3)$ ] donde  $R_0^{1-1} = R_0^{1T}$  por lo tanto

$$\begin{aligned} P_1 &= R_0^{1T} P_0 \\ R_0^{1T} &= R_1^0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$P_1 = R_1^0 P_0 \quad (2.10)$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} i_0 \cdot i_1 & j_0 \cdot i_1 & k_0 \cdot i_1 \\ i_0 \cdot j_1 & j_0 \cdot j_1 & k_0 \cdot j_1 \\ i_0 \cdot k_1 & j_0 \cdot k_1 & k_0 \cdot k_1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) representa la matriz de rotación de cualquier punto arbitrario del marco de referencia a tierra con respecto al marco de referencia del cuerpo.

Ahora se realiza el análisis del comportamiento de una rotación  $\theta$  del marco de referencia del cuerpo con respecto al marco de referencia fijo sobre cada uno de los ejes del sistema ortogonal con la finalidad de obtener las matrices de rotación  $R_Z(\theta)$ ,  $R_X(\theta)$  y  $R_Y(\theta)$ . Para el análisis de la matriz de rotación alrededor del eje  $Z$  se considera una rotación  $\theta \in \mathbb{R}$  del marco de referencia del cuerpo  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$  paralelo al eje  $Z_E$  del sistema a tierra  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  resultando en  $Z_B \parallel Z_E$  (Figura 2.3).

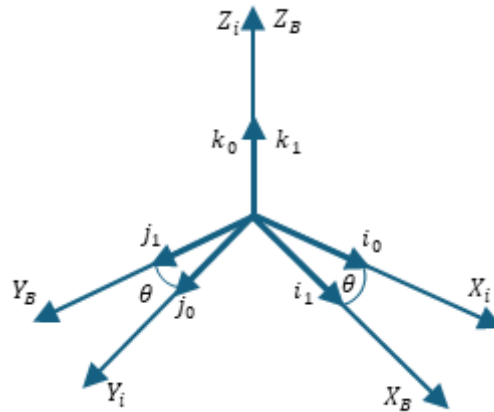


Figura 2.3 Rotación  $R_Z(\theta)$  [45].

De la Figura 2.3 mediante la relación del producto punto de los vectores  $\{i_0, j_0, k_0\}$  y  $\{i_1, j_1, k_1\}$  se deducen las relaciones:

$$\begin{aligned}
i_1 \cdot i_0 &= \cos \theta & j_1 \cdot i_0 &= -\operatorname{sen} \theta & k_1 \cdot i_0 &= \cos \frac{\pi}{2} \\
i_1 \cdot j_0 &= \operatorname{sen} \theta & j_1 \cdot j_0 &= \cos \theta & k_1 \cdot j_0 &= \cos \frac{\pi}{2} \\
i_1 \cdot k_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & j_1 \cdot k_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & k_1 \cdot k_0 &= \cos 0
\end{aligned}$$

$$R_0^1(\theta) = R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

la ecuación (2.12) representa la rotación de  $\theta$  alrededor del eje  $Z$ , representada por la notación  $R_Z(\theta)$ .

De manera análoga se analiza la matriz de rotación alrededor del eje  $X$ , considerando una rotación  $\theta \in \mathbb{R}$  del marco de referencia del cuerpo  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$  paralelo al eje  $X_E$  del sistema a tierra  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  resultando en  $X_B||X_E$  (Figura 2.4).

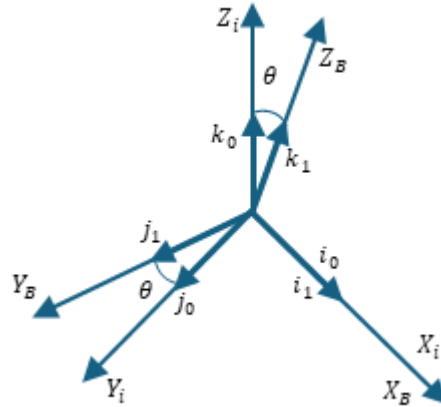


Figura 2.4 Rotación  $R_X(\theta)$  [45].

De la Figura 2.4 mediante la relación del producto punto de los vectores  $\{i_0, j_0, k_0\}$  y  $\{i_1, j_1, k_1\}$  se deducen las relaciones:

$$\begin{aligned}
i_1 \cdot i_0 &= \cos 0 & j_1 \cdot i_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & k_1 \cdot i_0 &= \cos \frac{\pi}{2} \\
i_1 \cdot j_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & j_1 \cdot j_0 &= \cos \theta & k_1 \cdot j_0 &= -\operatorname{sen} \theta \\
i_1 \cdot k_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & j_1 \cdot k_0 &= \operatorname{sen} \theta & k_1 \cdot k_0 &= \cos \theta
\end{aligned}$$

$$R_0^1(\theta) = R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

la ecuación (2.13) representa la rotación de  $\theta$  alrededor del eje  $X$ , representada por la notación  $R_X(\theta)$ .

Finalmente se analiza la matriz de rotación alrededor del eje  $Y$ , considerando una rotación  $\theta \in \mathbb{R}$  del marco de referencia del cuerpo  $\Sigma_B[X_B, Y_B, Z_B]$  paralelo al eje  $Y_E$  del sistema a tierra  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  resultando en  $Y_B || Y_E$  (Figura 2.5).

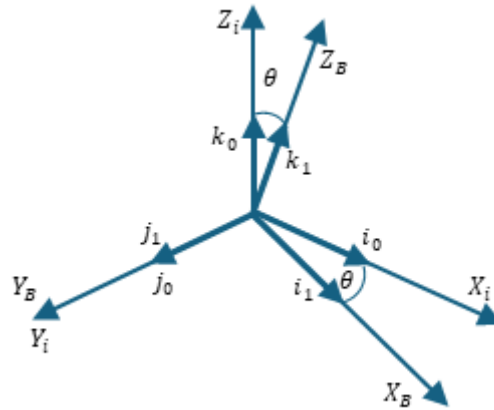


Figura 2.5 Rotación  $R_Y(\theta)$ . [45].

De la Figura 2.5 mediante la relación del producto punto de los vectores  $\{i_0, j_0, k_0\}$  y  $\{i_1, j_1, k_1\}$  se deducen las relaciones:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos \theta & j_1 \cdot i_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & k_1 \cdot i_0 &= \sin \theta \\ i_1 \cdot j_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & j_1 \cdot j_0 &= \cos 0 & k_1 \cdot j_0 &= \cos \frac{\pi}{2} \\ i_1 \cdot k_0 &= -\sin \theta & j_1 \cdot k_0 &= \cos \frac{\pi}{2} & k_1 \cdot k_0 &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$R_0^1(\theta) = R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) representa la rotación de  $\theta$  alrededor del eje  $Y$ , representada por la notación  $R_Y(\theta)$ .

### Composición de rotaciones

El comportamiento conocido como composición de rotaciones de cuerpo rígido, se trata de rotaciones consecutivas sobre los ejes principales ( $X, Y, Z$ ) que se llevan a cabo en un

orden específico, el cual no puede ser modificado o alterado; son regidas por expresiones analíticas denominadas como reglas de rotación. Los parámetros que describen estas rotaciones están dados por la notación  $(\phi, \theta, \psi)$ , la representación de estas notaciones, también conocida como representación mínima, es llevada a cabo a través de los ángulos de Euler y los ángulos YPR (Yaw-Pitch-Roll). Estas composiciones son expresadas en función de tres matrices de rotación elementales que determinan el giro con respecto a un eje principal del sistema de referencia cartesiano.

La orientación en sistemas de referencia fijos y móviles son descritos por la composición de 3 rotaciones. Siendo el caso en el que la orientación de estas composiciones con referencia al sistema fijo está dada por los ángulos YPR, mientras que la orientación para el sistema de referencia móvil está dada por los ángulos de Euler, ambos representados por los parámetros  $(\phi, \theta, \psi)$ , se nota que cada una de ellas cuentan con 12 posibles combinaciones de composiciones. Cabe resaltar que, aunque la notación de los parámetros es similar entre el sistema de referencia fijo y el sistema de referencia móvil, los resultados entre las rotaciones son diferentes.

### Rotaciones compuestas para sistemas de referencia fijos.

Para llevar a cabo 3 rotaciones alrededor de los 3 ejes del sistema de referencia fijo. Se inicia con una rotación  $\phi$  alrededor del eje  $Z$  con  $R_Z(\phi)$ , seguida de una rotación  $\theta$  alrededor del eje  $X$  con  $R_X(\theta)$ , por último una rotación  $\psi$  alrededor del eje  $Y$  con  $R_Y(\psi)$ . Cada una de estas rotaciones se llevan a cabo alrededor del sistema de referencia a tierra  $\Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$ , no se generan sistemas de referencia cartesianos adicionales, por lo que se deduce que las coordenadas transformadas se consideran dentro del mismo sistema de referencia  $\Sigma_E$ .

Se consideran los vectores  $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \Sigma_E[X_i, Y_i, Z_i]$  donde el vector  $P_0[P_{0X}, P_{0Y}, P_{0Z}]^T \in \Sigma_E$  (Figura 2.6) registra la posición inicial. El vector  $P_1 \in \Sigma_E$  registra la transformación de coordenadas del vector  $P_0$  rotado  $\phi = \frac{\pi}{2}$  alrededor de  $Z$ , entonces se deduce que

$$P_1 = R_Z(\phi)P_0 \quad (2.15)$$

el vector  $P_2 \in \Sigma_E$  registra la transformación de coordenadas del vector  $P_1$  rotado  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alrededor de  $X$ , entonces se deduce que

$$P_2 = R_X(\theta)P_1 \quad (2.16)$$

Finalmente el vector  $P_3 \in \Sigma_E$  registra la transformación de coordenadas del vector  $P_2$  rotado  $\psi = \frac{\pi}{2}$  alrededor de  $Y$ , entonces se deduce que

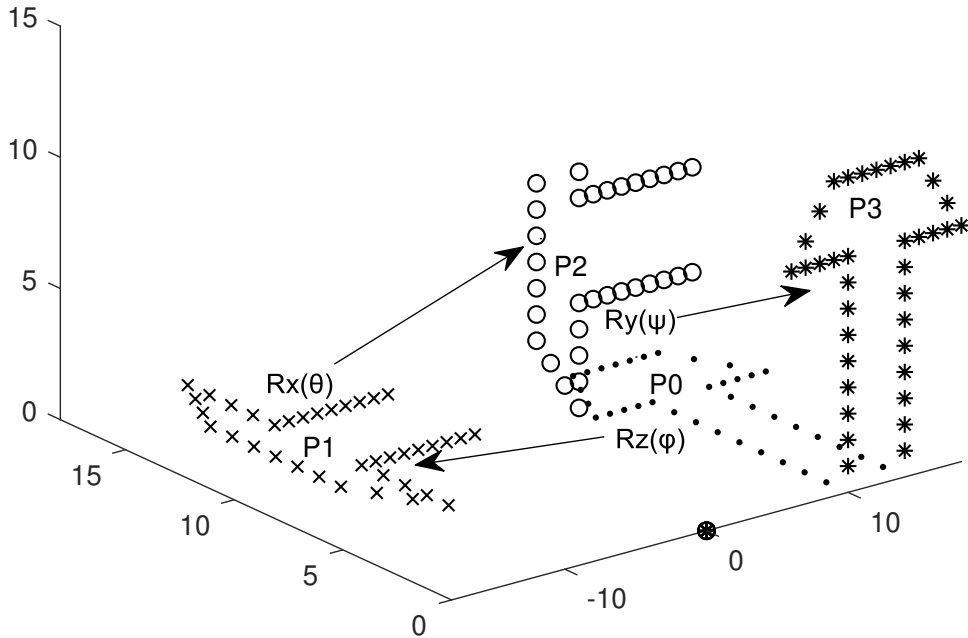


Figura 2.6 Regla de rotación alrededor del sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$  [45].

$$P_3 = R_Y(\psi)P_2 \quad (2.17)$$

el proceso de las rotaciones compuestas en referencia al sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$  se puede reescribir por las ecuaciones (2.15) a (2.17) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_1 &= R_Z(\phi)P_0 \\ P_2 &= R_X(\theta)P_1 = R_X(\theta)R_Z(\phi)P_0 \\ P_3 &= R_Y(\psi)P_2 = R_Y(\psi)R_X(\theta)R_Z(\phi)P_0 \end{aligned}$$

Por lo que se puede deducir que la composición de rotaciones con respecto a un sistema de referencia fijo este dado por (Figura 2.7):

$$P_3 = R_Y(\psi)R_X(\theta)R_Z(\phi)P_0 \quad (2.18)$$

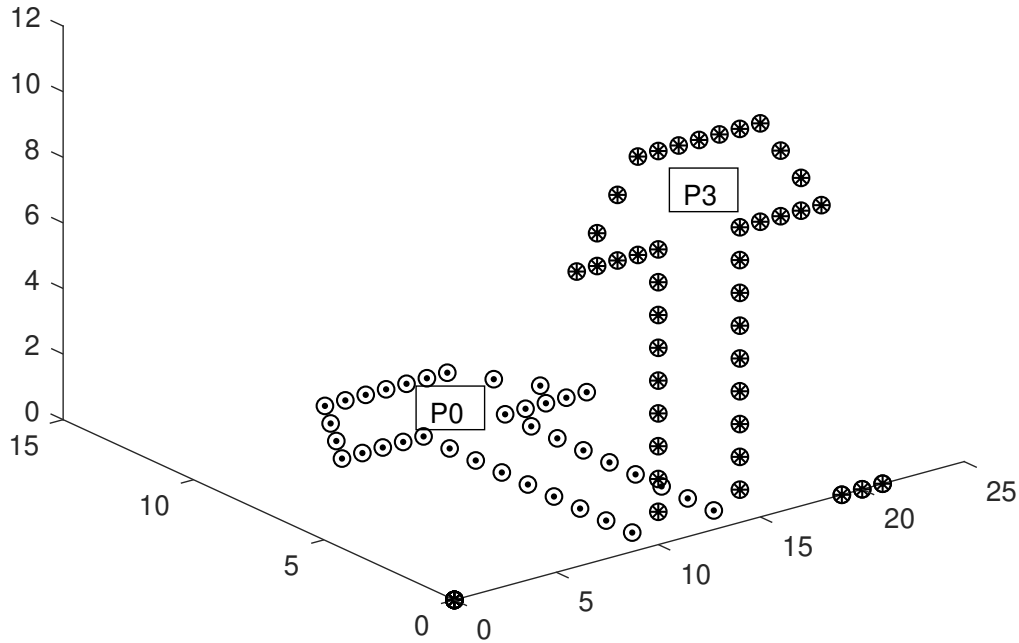


Figura 2.7 Rotación compuesta del vector  $P_0$  a  $P_3 \in \Sigma_E$  [45].

De la misma manera, por las propiedades de los sistemas ortogonales ( $SO(3)$ ) podemos obtener el vector  $P_0$  por medio de:

$$P_0 = R_Y(\psi)^T R_X(\theta)^T R_Z(\phi)^T P_3 \quad (2.19)$$

### Rotaciones compuestas para sistemas de referencia móviles

Para el caso de rotaciones compuestas en sistemas de referencia móvil, se considera que el sistema de referencia móvil  $\Sigma_B = \Sigma_1$  comparte de manera inicial origen con el sistema de referencia fijo  $\Sigma_E = \Sigma_0$ , y el vector  $P_1$ , el cual contiene la información del elemento a rotar, esta rígidamente acoplado al sistema móvil  $\Sigma_1$ , mediante la igualdad

$$P_0 = R_{Z_0}(\phi)P_1 \quad (2.20)$$

En el caso donde  $\phi = 0$ , el cual gira alrededor del eje  $Z_0$ , se observa que  $\Sigma_0 = \Sigma_1$  y los ejes  $X_0 = X_1$ ,  $Y_0 = Y_1$  y  $Z_0 = Z_1$  por tanto de la ecuación (2.20) se deduce que  $R_{Z_0}(\phi) = I$  y

el vector  $P_0 = P_1$ .

Cuando  $\phi \neq 0$  el vector  $P_1$ , el cual esta rígidamente acoplado al sistema de referencia móvil  $\Sigma_1$  gira con respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$ .

Si  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , el vector  $P_1$  gira  $R_{Z_0}(\phi)$  alrededor de  $Z_0$  y de esta rotación, por la ecuación (2.20) se observa que:

$$P_0 = R_{Z_0}(\phi)P_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{1Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{1Z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{0X} \\ P_{0Y} \\ P_{0Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{1Y} \\ P_{1X} \\ P_{1Z} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Los ejes principales del sistema de referencia móvil con respecto al sistema de referencia fijo se encuentran relacionados mediante la matriz de rotación  $R_{Z_0}^T(\phi)$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R_{Z_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ -X_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se observa que los ejes principales entre los sistemas de referencia móvil y fijo sufren una transformación de la siguiente forma (Figura 2.8)

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_1 \\ X_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

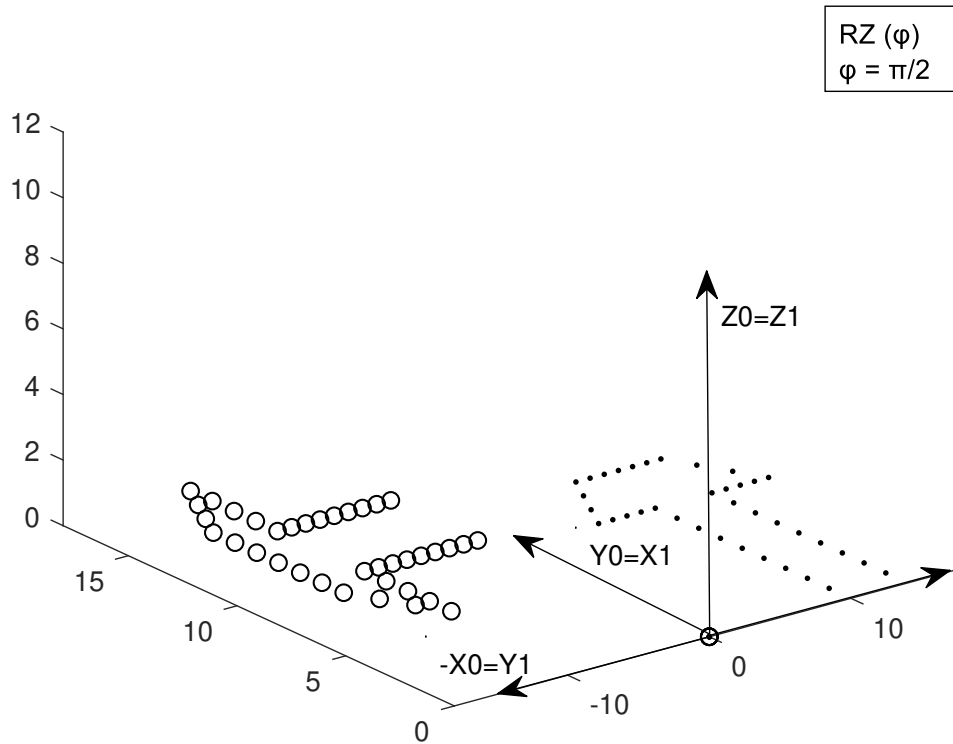


Figura 2.8 Rotación  $R_Z(\phi)$  sobre el sistema móvil  $\Sigma_1$  [45].

Para el Segundo paso se propone una rotación de  $\theta$ , es importante considerar que, a diferencia de la composición de rotaciones en sistemas fijos, en el caso de la composición de rotaciones en sistemas móviles esta rotación tendrá efecto sobre el eje  $X_1$ . Donde la igualdad encargada de describir la rotación está dada por

$$P_1 = R_{X_1}(\theta)P_2 \quad (2.23)$$

Se observa que el vector  $P_1$  se considera el sistema de referencia fijo  $\Sigma_1[X_1, Y_1, Z_1]$  en este paso y si  $\theta = 0$  entonces  $R_{X_1}(\theta) = I$  y  $P_1 = P_2$ , ahora el vector  $P_2$  contiene la información del elemento a rotar y está rígidamente acoplado al nuevo sistema de referencia móvil  $\Sigma_2[X_2, Y_2, Z_2]$ , cuando  $\theta \neq 0$  el sistema de referencia móvil  $\Sigma_2$  sufre una transformación de coordenadas y lleva consigo la información del vector  $P_2$ .

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , el vector  $P_2$  gira  $R_{X_1}(\theta)$  alrededor de  $X_1$ , y por la ecuación (2.23) se observa que:

$$\begin{aligned}
 P_1 = R_{X_1}(\theta)P_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{2X} \\ P_{2Y} \\ P_{2Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{2X} \\ P_{2Y} \\ P_{2Z} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{1Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{2X} \\ -P_{2Z} \\ P_{2Y} \end{bmatrix} \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Debido a que el vector  $P_2$  se encuentra rígidamente acoplado al sistema de referencia móvil  $\Sigma_2$ , se puede deducir que la transformación de los ejes principales del sistema de referencia móvil  $\Sigma_2$  con respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_1$  se encuentran relacionados mediante la matriz de rotación  $R_{X_1}^T(\theta)$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = R_{X_1}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Z_1 \\ -Y_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se observa que los ejes principales entre los sistemas de referencia móvil  $\Sigma_2$  y el sistema de referencia fijo  $\Sigma_1$  sufren una transformación de la siguiente forma (Figura 2.9)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -Z_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

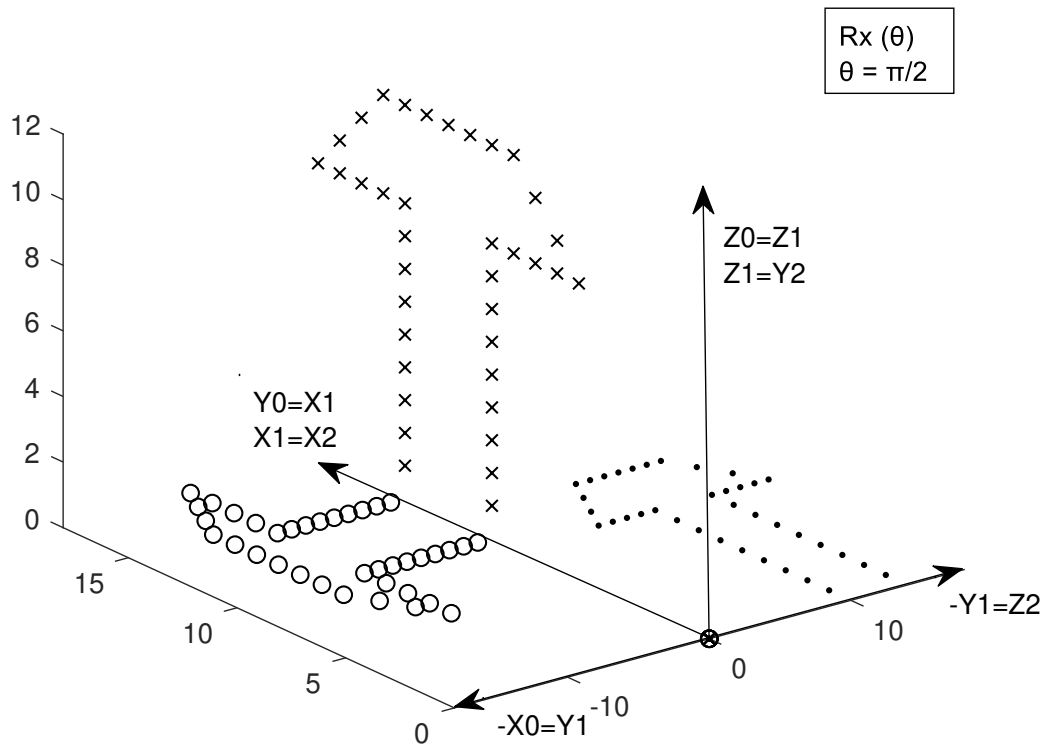


Figura 2.9 Rotación  $R_X(\Theta)$  sobre el sistema móvil  $\Sigma_2$  [45].

Es posible observar que la relación entre el vector  $P_0$  en el sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$  y el vector  $P_2$  en sistema de referencia móvil  $\Sigma_2$  están relacionados mediante la sustitución de la ecuación (2.23) en la ecuación (2.20)

$$P_0 = R_{Z_0}(\phi)R_{X_1}(\theta)P_2 \quad (2.26)$$

Para finalizar se propone una rotación  $\psi$  sobre el eje  $Y_2$ , donde la igualdad que describe esta rotación está dada por

$$P_2 = R_{Y_2}(\psi)P_3 \quad (2.27)$$

Se observa que el vector  $P_2$  pasa a ser considerado el sistema de referencia fijo  $\Sigma_2[X_2, Y_2, Z_2]$  y en el caso donde  $\psi = 0$  entonces  $R_{Y_2}(\psi) = I$  y  $P_2 = P_3$ , el vector  $P_3$  contiene la información del elemento a rotar y esta rígidamente acoplado al nuevo sistema de referencia móvil  $\Sigma_3[X_3, Y_3, Z_3]$ , cuando  $\psi \neq 0$  el sistema de referencia móvil  $\Sigma_3$  sufre una transformación de coordenadas y lleva consigo la información del vector  $P_3$ .

Si  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , el vector  $P_3$  gira  $R_{Y_2}(\psi)$  alrededor de  $Y_2$ , y por la ecuación (2.26) se observa que:

$$P_2 = R_{Y_2}(\psi)P_3 = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{3X} \\ P_{3Y} \\ P_{3Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{3X} \\ P_{3Y} \\ P_{3Z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{2X} \\ P_{2Y} \\ P_{2Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{3Z} \\ P_{3Y} \\ -P_{3X} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Debido a que el vector  $P_3$  se encuentra rígidamente acoplado al sistema de referencia móvil  $\Sigma_3$ , se puede deducir que la transformación de los ejes principales con respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_2$  se encuentran relacionados mediante la matriz de rotación  $R_{Y_2}^T(\psi)$

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = R_{Y_2}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_2 \\ Y_2 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se observa que los ejes principales entre los sistemas de referencia móvil  $\Sigma_3$  y el sistema de referencia fijo  $\Sigma_2$  sufren una transformación de la siguiente forma (Figura 2.9)

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_3 \\ Y_3 \\ -X_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

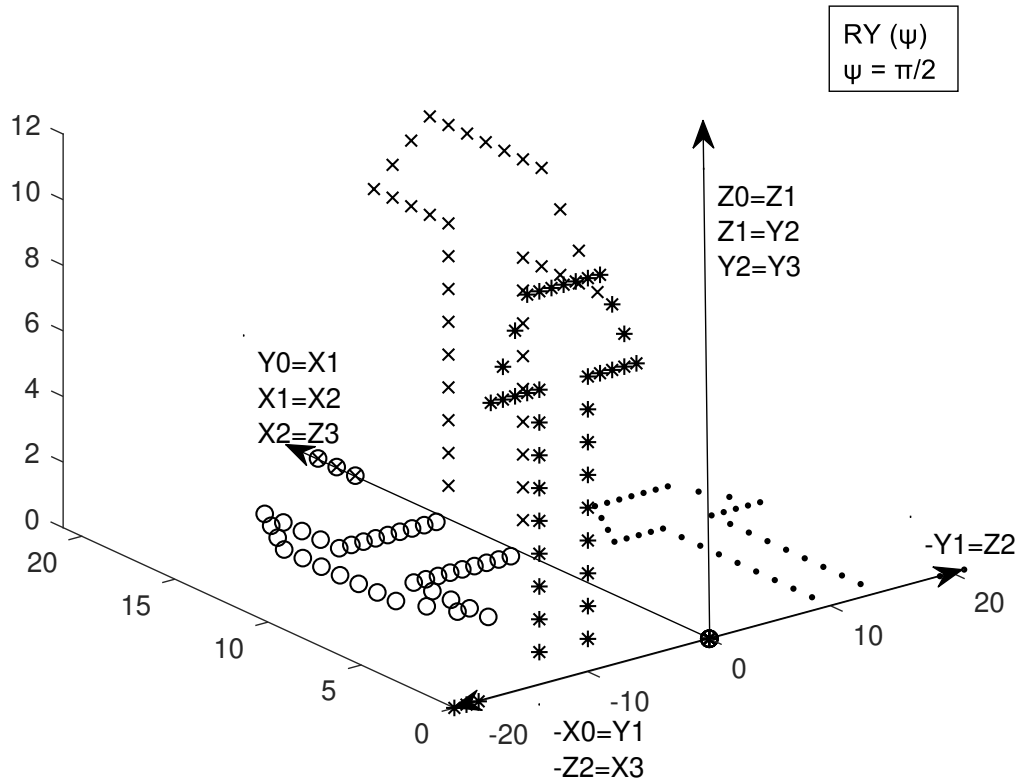


Figura 2.10 Rotación  $R_Y(\psi)$  sobre el sistema móvil  $\Sigma_3$  [45].

Es posible observar que la relación entre el vector  $P_0$  en el sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$  y el vector  $P_3$  en sistema de referencia móvil  $\Sigma_3$  están relacionados mediante la sustitución de la ecuación (2.26) en la ecuación (2.27)

$$P_0 = R_{Z_0}(\phi)R_{X_1}(\theta)R_{Y_2}(\psi)P_3 \tag{2.30}$$

La ecuación (2.30) define la regla de rotación compuesta para sistemas móviles, mediante la transformación del vector  $P_3$  rígidamente acoplado al sistema de referencia móvil  $\Sigma_3$  con respecto al vector de origen  $P_0$  en el sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$ .

Se puede observar que la diferencia entre las matrices de rotación compuesta para un sistema fijo, ecuación (2.18), y un sistema móvil, ecuación (2.30), radica en el orden de las matrices de rotación, el cual se invierte según el caso observado.

### Ángulos de Euler

Se denominan ángulos de Euler a los parámetros independientes  $(\phi, \theta, \psi)$  que determinan la orientación del sistema de referencial móvil  $\Sigma_B$  con respecto a un sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$ , son definidos mediante la composición de rotaciones consecutivas de los ejes fundamentales, existen hasta 12 secuencia de rotación posibles, cada una de ellas compuesta por 3 ejes fundamentales móviles, en la Tabla 2.2 se puede observar las posibles combinaciones, de las cuales la más utilizada es la secuencia  $ZYZ$ , cuya regla de rotación está dada por

$$R_{ZYZ}^e(\phi, \theta, \psi) = R_{Z0}(\phi)R_{Y1}(\theta)R_{Z3}(\psi) \quad (2.31)$$

Posibles secuencias para rotación compuesta sobre los ejes principales [45].			
$R_{XYZ}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{XZY}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{XZX}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{YXY}(\phi, \theta, \psi)$
$R_{YZY}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{ZXY}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{XYX}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{ZYZ}(\phi, \theta, \psi)$
$R_{YZX}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{YXZ}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{ZYX}(\phi, \theta, \psi)$	$R_{ZXX}(\phi, \theta, \psi)$

Tabla 2.2 Posibles secuencias para rotación compuesta sobre los ejes principales.

Es posible determinar la posición del vector  $P_3$  del sistema de referencia móvil mediante la regla de rotación dada por la ecuación (2.31) y la ecuación (2.30)

$$P_0 = R_{ZYZ}^e(\phi, \theta, \psi)P_3 \quad (2.32)$$

donde la matriz de rotación compuesta está dada por:

$$R_{ZYZ}^e(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ZYZ}^e(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

### Ángulos YPR (Yaw-Pitch-Roll)

Para obtener la orientación relativa mediante el sistema fijo  $\Sigma_E$  se hace a través de los ángulos YPR, por medio de la composición de 3 rotaciones de los ejes elementales

por la regla de rotación dada por el análisis de la ecuación (2.18), donde los ángulos Roll  $\phi$  (Balanceo), pitch  $\theta$  (inclinación) y yaw  $\psi$  (orientación) forman la matriz de rotación  $R^{rpy}(\phi, \theta, \psi)$ . Al igual que los ángulos de Euler, los ángulos YPR tienen 12 secuencias de rotación posibles (Tabla 2.2), para fines de análisis usaremos la combinación XYZ con la notación  $R_{XYZ}^{rpy}(\phi, \theta, \psi)$ .

La regla de rotación compuesta puede ser calculada mediante la ecuación (2.18), y es dada por

$$R_{XYZ}^{rpy}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\text{sen } \psi \\ 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$R_{XYZ}^{rpy}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -\text{sen } \phi \cos \psi + \cos \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi & \text{sen } \phi \text{sen } \psi + \cos \phi \text{sen } \theta \cos \psi \\ \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \psi + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \text{sen } \psi & -\cos \phi \text{sen } \psi + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \cos \psi \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \text{sen } \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

### Cinemática directa.

Para representar la posición y orientación de un VANT en el espacio tridimensional, y las relaciones existentes entre el sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$  y el sistema de referencia móvil  $\Sigma_B$ , es importante considerar que el origen del sistema de referencia móvil  $\Sigma_B$  se encuentra situado en el centro de masa del VANT. La orientación del sistema de referencia móvil  $\Sigma_B$  respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$  es determinado por los ángulos de rotación  $\eta[\phi, \theta, \psi]$ , y está dado por los ángulos yaw-pitch-roll o los ángulos de Euler.

El modelo cinemático se obtiene por la ecuación (2.35)

$$P_0 = \xi + R(\eta)P_d \quad (2.35)$$

donde:

$P_0$  : Vector que contiene la información de un punto arbitrario en el VANT con respecto al  $\Sigma_E$ .

$\xi$  : Vector de traslación  $[\xi_{X0}, \xi_{Y0}, \xi_{Z0}]^T$  contiene las coordenadas del centro de masa del VANT con respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$ .

$R(\eta)$  : Matriz de rotación  $[\phi, \theta, \psi]$ , dada por los ángulos Yaw-Pitch-Roll, o los ángulos de

Euler.

$P_d$  : Vector que contiene la información de un punto arbitrario en el VANT con respecto a  $\Sigma_B$ .

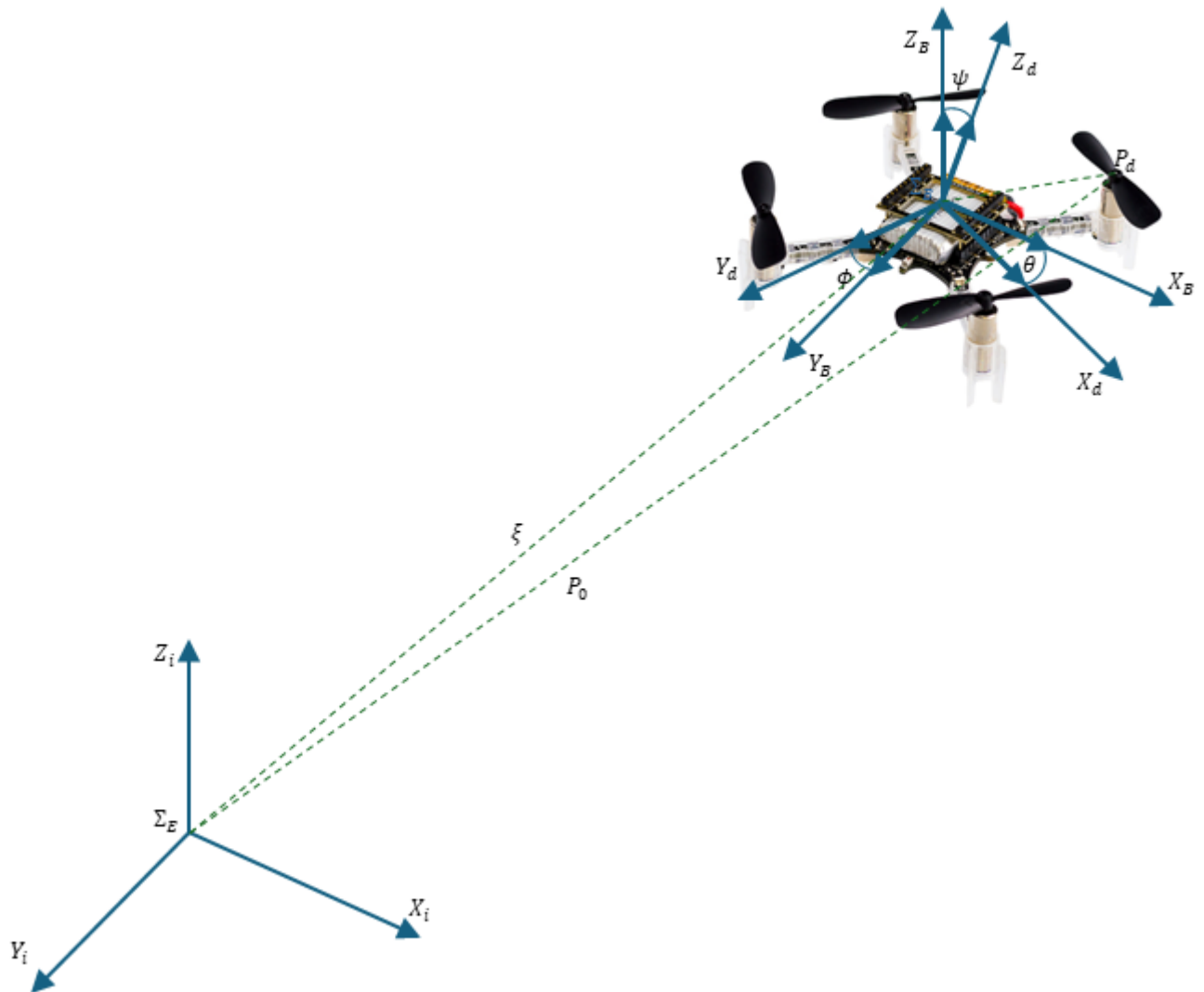


Figura 2.11 Movimiento General de un VANT: traslación  $\xi$ , rotación  $\eta$  [45].

De la ecuación (2.35) se observan dos términos, el primer término nos presenta la información del vector de movimiento de traslación ( $\xi$ ) con respecto al sistema fijo, y el segundo término el vector de rotación ( $\eta$ ), de este análisis se puede deducir que se requieren 6 parámetros para la orientación del sistema.

### Cinemática diferencial.

La cinemática diferencial en un VANT nos provee de un mapa vectorial el cual relaciona la velocidad cartesiana total  $\dot{P}_0$  con la componente de velocidad del movimiento de translación  $\dot{\xi}$  del centro de masa del VANT y la velocidad angular  $\omega_0$  con la composición de rotaciones. Este comportamiento esta dado por la ecuación (2.36)

$$\dot{P}_0 = \frac{d}{dt} [\xi + R(\eta)P_d] \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{P}_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_d(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \eta) \\ \mathcal{W}(\eta) \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde:

$\dot{P}_0$ : Velocidad cartesiana total.

$f_d$ : Mapa vectorial encargado de describir la orientación relativa respecto al sistema  $\Sigma_E$ , contiene la componente de velocidad cartesiana  $\dot{\xi}$ , los ángulos  $\eta$  que describen la orientación relativa del sistema, la velocidad rotacional  $\dot{\eta}$  y las coordenadas del vector  $P_d$  ligado al sistema de referencia móvil  $\Sigma_B$ .

$\omega_0$ : Velocidad angular.

$\mathcal{W}$ : Matriz de transformación que relaciona la velocidad rotacional  $\dot{\eta}$  con la velocidad angular  $\omega_0$ , mediante el producto cruz de estos dos elementos.

### Cinemática diferencial-ángulos de Euler.

De la ecuación (2.35) se sustituye el término de la composición de rotaciones  $R(\eta)$  por el de de la composición de rotaciones en función de los ángulos de Euler (2.33).

$$P_0 = \xi + R_{ZYZ}^e P_d \quad (2.37)$$

Se puede observar que la ecuación (2.37) es continua en el tiempo y diferenciable por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{P}_0 &= \dot{\xi} + \dot{R}_{ZYZ}^e P_d + R_{ZYZ}^e \dot{P}_d \\ \dot{P}_d &= 0 \in \mathbb{R}^3 \\ \dot{P}_0 &= \dot{\xi} + \dot{R}_{ZYZ}^e P_d \end{aligned} \quad (2.38)$$

Del segundo término de la ecuación (2.38) obtenemos  $\dot{R}_{ZYZ}^e$  el cual se deduce que

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ZYZ}^e &= \frac{d}{dt} R_{ZYZ}^e = \frac{d}{dt} [R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi)] \\ &= \dot{R}_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + R_{Z0}(\phi) \dot{R}_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{R}_{Z2}(\psi) \quad (2.39)\end{aligned}$$

Se observa de la ecuación (2.39), por medio de las propiedades de las matrices antisimétricas [48] obtenemos la siguiente ecuación

$$= S(\dot{\phi}k_0) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + R_{Z0}(\phi) S(\dot{\theta}j_1) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) S(\dot{\psi}k_2) R_{Z2}(\psi) \quad (2.40)$$

Mediante las propiedades de la matriz identidad, se modifica la ecuación (2.40) para obtener

$$\begin{aligned}&= S(\dot{\phi}k_0) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + R_{Z0}(\phi) S(\dot{\theta}j_1) R_{Z0}^T(\phi) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) \dots \\ &+ R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) S(\dot{\psi}k_2) \{R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta)\}^T \{R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta)\} R_{Z2}(\psi) \quad (2.41)\end{aligned}$$

Nuevamente mediante el uso de las propiedades de las matrices antisimétricas sustituimos en la ecuación (2.41) para obtener

$$\begin{aligned}&= S(\dot{\phi}k_0) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) + S(R_{Z0}(\phi) \dot{\theta}j_1) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) \dots \\ &+ S(R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{\psi}k_2) R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) \\ &= [S(\dot{\phi}k_0) + S(R_{Z0}(\phi) \dot{\theta}j_1) + S(R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{\psi}k_2)] R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) R_{Z2}(\psi) \quad (2.42)\end{aligned}$$

de la ecuación (2.42) se observa que la matriz  $S(\omega_0)$  está dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}S(\omega_0) &= S(\dot{\phi}k_0) + S(R_{Z0}(\phi) \dot{\theta}j_1) + S(R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{\psi}k_2) \\ S(\omega_0) &= S(\dot{\phi}k_0 + R_{Z0}(\phi) \dot{\theta}j_1 + R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{\psi}k_2) \quad (2.43)\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector de velocidad angular usando la matriz de rotación de Euler toma la siguiente forma

$$\omega_0 = \dot{\phi}k_0 + R_{Z0}(\phi) \dot{\theta}j_1 + R_{Z0}(\phi) R_{Y1}(\theta) \dot{\psi}k_2 \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin \phi \dot{\theta} \\ \cos \phi \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&\omega_0 = \begin{bmatrix} -\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.44) y (2.45) representan la velocidad angular completa respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_E$  y  $\dot{\eta}[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$  respecto a la regla de rotación  $z_0, y_1, z_2$  por medio de los ángulos de Euler, de la ecuación (2.45) se puede obtener la matriz de transformación que representa la secuencia de Euler, tal que:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \begin{bmatrix} \omega_{0x} \\ \omega_{0y} \\ \omega_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
\mathcal{W}_{ZYZ}^e &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\omega_0 = \mathcal{W}_{ZYZ}^e \dot{\eta} \tag{2.47}$$

De la ecuación (2.42), sustituimos con el término de velocidad angular (2.43) y el término de la matriz de rotación por los ángulos de Euler, obtenemos la ecuación (2.48)

$$\dot{P}_0 = \dot{\xi} + S(\omega_0)R_{ZYZ}^e P_d \tag{2.48}$$

aplicando las propiedades de las matrices antisimétricas a la ecuación (2.48) es posible reescribirla de tal manera que

$$\dot{P}_0 = \dot{\xi} + \omega_0 X R_{ZYZ}^e P_d \quad (2.49)$$

las ecuaciones (2.46), (2.47) y (2.49) describen la estructura de la cinemática diferencial de un VANT mediante los ángulos de Euler y queda definida por:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} + \omega_0 X R_{ZYZ}^e P_d \\ \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

### Cinemática diferencial-ángulos YPR.

De manera similar al análisis realizado anteriormente, de la ecuación (2.35) se sustituye el término de la composición de rotaciones  $R(\eta)$  por el de de la composición de rotaciones en función de los ángulos YPR (2.34).

$$P_0 = \xi + R_{XYZ}^{rpy} P_d \quad (2.51)$$

Donde la ecuación (2.51) es continua en el tiempo y diferenciable por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{P}_0 &= \dot{\xi} + \dot{R}_{XYZ}^{rpy} P_d + R_{XYZ}^{rpy} \dot{P}_d \\ \dot{P}_d &= 0 \in \mathbb{R}^3 \\ \dot{P}_0 &= \dot{\xi} + \dot{R}_{XYZ}^{rpy} P_d \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aplicando el análisis realizado a las ecuaciones (2.39) a (2.42) se observa que la relación de la velocidad angular por medio de los ángulos YPR se relaciona por medio de

$$\dot{R}_{XYZ}^{rpy} = [S(\dot{\phi}k) + S(R_Z(\phi)\dot{\theta}j) + S(R_Z(\phi)R_Y(\theta)\dot{\psi}i)]R_Z(\phi)R_Y(\theta)R_X(\psi) \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} S(\omega_0) &= S(\dot{\phi}k) + S(R_Z(\phi)\dot{\theta}j) + S(R_Z(\phi)R_Y(\theta)\dot{\psi}i) \\ S(\omega_0) &= S(\dot{\phi}k + R_Z(\phi)\dot{\theta}j + R_Z(\phi)R_Y(\theta)\dot{\psi}i) \\ \omega_0 &= \dot{\phi}k + R_Z(\phi)\dot{\theta}j + R_Z(\phi)R_Y(\theta)\dot{\psi}i \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\omega_0 = \begin{bmatrix} -\text{sen } \phi \dot{\theta} + \text{cos } \phi \text{cos } \theta \dot{\psi} \\ \text{cos } \phi \dot{\theta} + \text{sen } \phi \text{cos } \theta \dot{\psi} \\ \dot{\phi} - \text{sen } \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen } \phi & \text{cos } \phi \text{cos } \theta \\ 0 & \text{cos } \phi & \text{sen } \phi \text{cos } \theta \\ 1 & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \mathcal{W}_{XYZ}^{rpy} &= \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen } \phi & \text{cos } \phi \text{cos } \theta \\ 0 & \text{cos } \phi & \text{sen } \phi \text{cos } \theta \\ 1 & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

De tal manera que la estructura de la cinemática diferencial por medio de los ángulos YPR es llevada a cabo por la ecuación (2.57)

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} + \omega_0 X R_{XYZ}^{rpy} P_d \\ \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen } \phi & \text{cos } \phi \text{cos } \theta \\ 0 & \text{cos } \phi & \text{sen } \phi \text{cos } \theta \\ 1 & 0 & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

### 2.1.2. Modelado por Euler-Lagrange.

La dinámica provee varias herramientas para el análisis del movimiento de sistemas mecánicos, siendo algunos ejemplos la mecánica vectorial de Newton, la formulación de Newton-Euler, Newton-Lagrange, dinámica hamiltoniana, mecánica analítica, Euler-Lagrange, entre otros. Este trabajo aborda el comportamiento dinámico del VANT por medio de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, debido a las propiedades que aporta para el estudio dinámico, facilita la identificación de parámetros, análisis y diseño de controladores.

El análisis por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange requiere de las expresiones de energía cinética y potencial, las cuales serán analizadas a continuación[38].

#### Energía cinética.

La fórmula de la energía cinética de un VANT es deducida a partir de la cinemática diferencial, la ecuación general es dada por:

$$\begin{aligned}\kappa(\dot{\xi}, \xi, \omega_0, \eta) &= \frac{1}{2}m_d \|\dot{P}_0\|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_d \|\dot{\xi} + \omega_0 XR(\eta)P_d\|^2\end{aligned}\quad (2.58)$$

donde:

$m_d$ : Masa total del VANT.

$R(\eta)$ : Regla de Rotación, dada por los ángulos de Euler o ángulos Yaw-Pitch-Roll.

El término cuadrático  $\|\dot{P}_0\|^2$  observado en la ecuación de la energía cinética corresponde al vector de velocidad, el cual por medio de las propiedades del producto punto, adquiere la forma  $\|\dot{P}_0\|^2 = \dot{P}_0^T \dot{P}_0$ , sustituyendo el término  $\dot{P}_0 = \dot{\xi} + \omega_0 XR(\eta)P_d$  la ecuación toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}\kappa(\dot{\xi}, \xi, \omega_0, \eta) &= \frac{1}{2}m_d (\dot{\xi} + \omega_0 XR(\eta)P_d)^T (\dot{\xi} + \omega_0 XR(\eta)P_d) \\ &= \frac{1}{2}m_d \dot{\xi}^T \dot{\xi} + m_d \dot{\xi} (\omega_0 XR(\eta)P_d) + \frac{1}{2}m_d (\omega_0 XR(\eta)P_d)^T (\omega_0 XR(\eta)P_d) \\ &= \frac{1}{2}m_d \|\dot{\xi}\|^2 + m_d \dot{\xi} (\omega_0 XR(\eta)P_d) + \frac{1}{2}m_d \|\omega_0 XR(\eta)P_d\|^2\end{aligned}\quad (2.59)$$

Para el análisis del VANT se asume que el origen del sistema de referencia móvil  $\Sigma_E$  se encuentra situado en el centro de masa, es simétrico, por tal motivo el segundo término de la ecuación (2.59) es igual a cero, reescribiendo la ecuación de la siguiente manera

$$\kappa(\dot{\xi}, \xi, \omega_0, \eta) = \frac{1}{2}m_d\|\dot{\xi}\|^2 + \frac{1}{2}m_d\|\omega_0XR(\eta)P_d\|^2 \quad (2.60)$$

De la ecuación (2.60) el primer término corresponde a la energía cinética de transición y el segundo a la energía cinética de rotación, de este último término es posible continuar analizándolo por medio de las propiedades de las matrices antisimétricas.

$$\begin{aligned} \frac{m_d}{2}\|\omega_0XR(\eta)P_d\|^2 &= \frac{1}{2}m_d\|S(\omega_0)R(\eta)P_d\|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_d\| -S(R(\eta)P_d)\omega_0\|^2 \\ &= \frac{m_d}{2}[S(R(\eta)P_d)\omega_0]^T[-S(R(\eta)P_d)\omega_0] \\ &= \frac{m_d}{2}\omega_0^T[S^T(R(\eta)P_d)S(R(\eta)P_d)]\omega_0 \\ &= \frac{m_d}{2}\omega_0^T[-S^2(R(\eta)P_d)]\omega_0 \\ &= \frac{m_d}{2}\omega_0^T[(R(\eta)P_d)^T(R(\eta)P_d)I - (R(\eta)P_d)(R(\eta)P_d)^T]\omega_0 \\ &= \frac{1}{2}\omega_0^T[m_dP_d^T P_d I - m_dR(\eta)P_dP_d^T R(\eta)^T]\omega_0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

De la ecuación (2.61) se puede observar un término el cual está separado entre corchetes, este término es conocido como el tensor de inercia del VANT, representado por la notación  $I_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la cual es constante y esta rígidamente acoplado al centro de masa en el sistema de referencia móvil  $\Sigma_B$ , la estructura del tensor de inercia toma la forma.

$$I_d = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Como se mencionó anteriormente, al considerar al centro de masa de manera simétrica, la matriz  $I_d$  toma la forma de una diagonal, simétrica, definida positiva.

$$I_d = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Se sustituye la ecuación (2.63) en (2.61) y toma la forma

$$= \frac{1}{2} \omega_0^T I_d \omega_0 \quad (2.64)$$

De la ecuación (2.64), se observa el término de velocidad angular  $\omega_0$ , al cual relaciona la orientación  $\eta$  y la velocidad rotacional  $\dot{\eta}$ , para el análisis en términos de la regla de rotación, ya sea mediante los ángulos de Euler o ángulos Yaw-Pitch-Roll es necesario sustituir el término  $\omega_0$  por el de la matriz de transformación  $\mathcal{W}_d \dot{\eta}$ , de esta manera la ecuación (2.64) toma la forma

$$= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathcal{W}_d^T I_d \mathcal{W}_d \dot{\eta} \quad (2.65)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_d(\eta) &= \mathcal{W}_d^T I_d \mathcal{W}_d \\ &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \end{aligned} \quad (2.66)$$

El término  $M_d$  corresponde a la matriz de inercia y está dado mediante los ángulos de Euler  $\mathcal{W}_{ZYZ}^e$  (2.46) o ángulos YPR  $\mathcal{W}_{ZYZ}^{rpy}$  (2.56).

Al sustituir el término de la ecuación (2.66) en la ecuación (2.59), se obtiene

$$\kappa(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \eta) = \frac{1}{2} m_d \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \quad (2.67)$$

donde se observa que la ecuación (2.67) tiene una dependencia de las variables de traslación  $\dot{\xi}$  y rotación  $\dot{\eta}$  y  $\eta$ , por lo que se deduce que

$$\begin{aligned} \kappa_{Tras}(\dot{\xi}) &= \frac{1}{2} m_d \dot{\xi}^T \dot{\xi} \\ \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \\ \kappa(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \eta) &= \kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) \end{aligned} \quad (2.68)$$

### Energía potencial.

La energía potencial encontrada en un VANT es dada por el campo gravitatorio, y su estructura es dada por

$$\mathcal{U}(\xi) = m_d g \xi_z \quad (2.69)$$

donde:

$m_d$ : Masa total del VANT.

$g$ : Constante gravitacional.

$\xi_z$ : Altitud al centro de masa del VANT respecto al sistema fijo  $\Sigma_E$ .

La energía potencial tiene dependencia únicamente de la componente vertical, o altitud, representada por la componente  $\xi_z$ .

### Lagrangiano.

Para iniciar el modelado dinámico por medio de Euler-Lagrange es necesario como primera instancia obtener el lagrangiano  $\mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta)$  el cual proporciona la información mediante los gradientes de velocidad de traslación  $\dot{\xi}$  y rotación  $\dot{\eta}$ , además de la orientación  $\eta$  y posición  $\xi$ , se define el lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y potencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) &= \kappa(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\xi) \\ &= \kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\xi) \\ &= \frac{1}{2} m_d \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} - m_d g \xi_z \end{aligned} \quad (2.70)$$

### Ecuaciones de movimiento.

Por medio de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se obtiene un procedimiento analítico donde se observan los fenómenos físicos que actúan sobre el VANT, donde la dinámica de traslación y rotación obtienen la forma

$$\begin{bmatrix} f_{\xi} \\ \tau_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) + f_f \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) + \tau_f \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

donde:

$f_{\xi}$ : Vector de fuerzas cartesianas en el sistema de referencia  $\Sigma_E$ ,  $[f_{\xi_{x0}}, f_{\xi_{y0}}, f_{\xi_{z0}}]^T \in \Sigma_E(x_0, y_0, z_0)$ .

$f_f$ : Vector de fuerzas de fricción provocado por la velocidad de traslación por la interacción del VANT con el aire,  $[f_{f_{\xi_{x0}}}, f_{f_{\xi_{y0}}}, f_{f_{\xi_{z0}}}]^T \in \Sigma_E(x_0, y_0, z_0)$ .

$\tau_{\eta}$ : Vector de torques provocado por el movimiento rotacional, relacionado a los ángulos de orientación  $\phi, \theta, \psi$ ,  $[\tau_{\phi}, \tau_{\theta}, \tau_{\psi}]^T \in \Sigma_B(x_d, y_d, z_d)$ .

$\tau_f$ : Vector de fuerzas de fricción provocado por la velocidad de rotacional por la interacción del VANT con el aire,  $[\tau_{f_\psi}, \tau_{f_\theta}, \tau_{f_\phi}]^T \in \Sigma_B(x_d, y_d, z_d)$ .

### Dinámica de traslación.

El término  $f_\xi$  de la ecuación (2.71) proporciona la dinámica de traslación, considerando la estructura (2.70) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} [\kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\xi)] = \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \kappa_{Tras}(\dot{\xi}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \left[ \frac{1}{2} m_d \dot{\xi}^T \dot{\xi} \right] = m_d \dot{\xi} \\
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) \right] &= m_d \ddot{\xi} \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} [\kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\xi)] = -\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{U}(\xi) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \xi} m_d g \xi_z = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_x} m_d g \xi_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi_y} m_d g \xi_z \\ \frac{\partial}{\partial \xi_z} m_d g \xi_z \end{bmatrix} \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_d g \end{bmatrix} \\
 f_\xi &= m_d \ddot{\xi} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_d g \end{bmatrix} + f_{f_\xi} \tag{2.72}
 \end{aligned}$$

### Dinámica de rotación.

El término  $\tau_\eta$  de la ecuación (2.71) proporciona la dinámica de rotación, considerando la estructura (2.70) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} [\kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] = M_d(\eta) \dot{\eta} \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) \right] &= M_d(\eta) \ddot{\eta} + \dot{M}_d(\eta) \dot{\eta} \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{L}(\dot{\xi}, \xi, \dot{\eta}, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} [\kappa_{Tras}(\dot{\xi}) + \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) - \mathcal{U}(\xi)] = \frac{\partial}{\partial \eta} \kappa_{Rot}(\dot{\eta}, \eta) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \\
\tau_\eta &= M_d(\eta) \ddot{\eta} + \dot{M}_d(\eta) \dot{\eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] + \tau_f \quad (2.73)
\end{aligned}$$

De los términos 2 y 3 de la ecuación (2.73) es posible obtener el vector de torques, fuerzas centrípetas y fuerzas de Coriolis que queda expresado mediante

$$C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = \dot{M}_d(\eta) \dot{\eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \quad (2.74)$$

Sustituyendo (2.74) en (2.73), la dinámica de rotación toma la forma compacta

$$\tau_\eta = M_d(\eta) \ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + \tau_{f_\eta} \quad (2.75)$$

### 2.1.3. Fricción.

Se define como fricción al efecto físico que se opone al movimiento, en consecuencia trae consigo problemas disipativos y deformaciones elásticas debido a la conversión de la energía mecánica en térmica, teniendo como resultado de esta conversión el proceso de calentamiento en los motores del VANT durante su operación, por tal motivo es de suma importancia su análisis y consideración en el modelo dinámico y problemas relacionados al control, debido a que determinan la precisión, exactitud de posicionamiento y desempeño del VANT.

Existen varios modelos dinámicos para representar la fricción, siendo el modelo dinámico de fricción Dahl y modelo dinámico de fricción de LuGre [40] los más usados para el análisis de mecanismo, siendo este último el más completo.

Como primera instancia se abordará el fenómeno de fricción en el motor con hélice, y a continuación la interacción debido a la navegación por la velocidad de los movimientos de traslación  $\dot{\xi}$  y rotación  $\dot{\eta}$ .

### Fricción en la dinámica del motor.

El modelo de LuGre considera dentro de su estructura una zona de histéresis la cual se da a pequeñas velocidades y provoca vibración, ruido y juego mecánico, al romperse la región de histéresis se procede a una etapa transitoria con la fricción viscosa y de Coulomb la cual es denominado como efecto Stribeck, este modelo incluye asperezas, deflexión o efectos elásticos. La estructura dinámica de fricción de LuGre para el motor con hélice toma la siguiente estructura

$$\dot{Z}_r = \dot{q}_r - \sigma_{0_r} \frac{|\dot{q}_r|}{\mu_r(\dot{q}_r)} Z_r \quad (2.76)$$

$$\tau_{f_r} = \sigma_{0_r} Z_r + \sigma_{1_r} \dot{Z}_r + f_r(\dot{q}_r) \quad (2.77)$$

donde:

$Z_r$ : Estado interno del modelo dinámico de fricción.

$\dot{q}_r$ : Velocidad angular de rotor.

$\sigma_{0_r}$ : Adherencia modelada por micro resorte de rigidez, los cuales impiden el movimiento a un nivel microscópico.

$\sigma_{1_r}$ : Coeficiente de micro amortiguamiento asociado a  $\dot{Z}_r$ .

$\mu_r(\dot{q}_r)$ : Función de fricción de Coulomb y el efecto Stribeck.

$\tau_{f_r}$ : Torque en el motor.

$f_r(\dot{q}_r)$ : Función de macro amortiguamiento, típicamente es la fricción viscosa ( $B\dot{q}$ )

$\mu_r(\dot{q}_r)$  al ser una función de fricción de Coulomb y el efecto Stribeck tiene su propia estructura, cuya forma toma la siguiente forma

$$\mu_r(\dot{q}_r) = f_{c_r} + [f_{s_r} - f_{c_r}] e^{-|\frac{\dot{q}_r}{\Omega_{s_r}}|^\delta} \quad (2.78)$$

donde:

$f_{c_r}$ : Coeficiente de fricción de Coulomb.

$f_{s_r}$ : Coeficiente de fricción de Estática.

$\Omega_{s_r}$ : Constante de Stribeck, indica que tan rápido la función  $\mu_r(\dot{q}_r)$  se aproxima a la fricción de Coulomb .

$\delta$ : Numero entero positivo, típicamente 2.

Dado del modelo de fricción de LuGre, se puede deducir que el modelo de  $i$ -ésimo motor con hélice se deduce de esta manera

$$\begin{aligned}
 \tau_{r_i} &= J_i \ddot{q}_{r_i} + \tau_{f_{r_i}} \\
 \tau_{r_i} &= J_i \ddot{q}_{r_i} + \sigma_{0_{r_i}} Z_{r_i} + \sigma_{1_{r_i}} \dot{Z}_{r_i} + f_{r_i}(\dot{q}_{r_i}) \\
 \tau_{r_i} &= J_i \ddot{q}_{r_i} + \sigma_{0_{r_i}} Z_{r_i} + \sigma_{1_{r_i}} \dot{Z}_{r_i} + B_{r_i} \dot{q}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Siendo  $i = 1, 2, 3, 4$  representando cada uno de los actuadores, donde  $\tau_{r_i} \in \mathbb{R}^4$  y  $J_i$  el momento de inercia de los actuadores del VANT.

Con el objetivo de entender el fenómeno de fricción descrito anteriormente se considera que  $f_{s_r} > f_{c_r}$ , al aplicar un torque  $\tau_r$  de manera que  $\tau_r \ll f_{s_r}$ , el objeto se mantendrá estático, al incrementar  $\tau_r$  empiezan a darse los micro desplazamientos  $Z_r$  causando un estiramiento en los micro resortes, aquí es donde se observa el efecto de ruido o vibración que van acompañados de un comportamiento de histéresis. El desplazamiento  $Z_r$  está asociado a la velocidad  $\dot{Z}_r$  y el coeficiente  $\sigma_{1_r}$ . Al aumentar más el torque  $\tau_r$  hasta que  $\tau_r > f_{s_r}$  los micro resortes llegan a su punto de quiebre, abandonando la fase de fricción estática y dando inicio la fase Stribeck y después a la fase de fricción viscosa.

### Fricción en la dinámica de traslación y rotación.

Al igual que en el análisis de la fricción dinámica del motor, el VANT al efectuar un cambio de posición  $\xi$  y  $\eta$  interactúa con el medio por el que se desplaza, en este caso el aire, donde ocurren perturbaciones y turbulencia, dando como resultado oposición al desplazamiento, efectos térmicos, deformaciones elásticas entre otros efectos. Es posible analizar estos comportamientos físicos por medio del modelo de LuGre.

Es posible observar el comportamiento del componente de fricción cartesiana mediante la siguiente estructura

$$\dot{Z}_\xi = \dot{\xi} - \sigma_{0_\xi} \frac{|\dot{\xi}|}{\mu_\xi(\dot{\xi})} Z_\xi \tag{2.80}$$

$$\mu_\xi(\dot{\xi}) = f_{c_\xi} + [f_{s_\xi} - f_{c_\xi}] e^{-|\frac{\dot{\xi}}{\xi_s}|^\delta} \tag{2.81}$$

$$f_{f_\xi} = \sigma_{0_\xi} Z_\xi + \sigma_{1_\xi} \dot{Z}_\xi + B_\xi \dot{\xi} \quad (2.82)$$

donde  $f_{f_\xi} \in \mathbb{R}^3$ , contiene los efectos físicos de fricción dados por el desplazamiento en los ejes de  $\xi \in \Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Es posible observar el comportamiento del componente de fricción rotacional se observa

$$\dot{Z}_\eta = \dot{\eta} - \sigma_{0_\eta} \frac{|\dot{\eta}|}{\mu_\eta(\dot{\eta})} Z_\eta \quad (2.83)$$

$$\mu_\eta(\dot{\eta}) = f_{c_\eta} + [f_{s_\eta} - f_{c_\eta}] e^{-|\frac{\dot{\eta}}{\eta_s}|^\delta} \quad (2.84)$$

$$\tau_{f_\eta} = \sigma_{0_\eta} Z_\eta + \sigma_{1_\eta} \dot{Z}_\eta + B_\eta \dot{\eta} \quad (2.85)$$

donde  $\tau_{f_\eta} \in \mathbb{R}^3$ , contiene los efectos físicos de fricción dados por el cambio en la orientación  $\eta(\phi, \theta, \psi)$ .

#### 2.1.4. Movimiento del VANT.

El movimiento del VANT es dado por 4 motores con sus hélices acoplados rígidamente al cuerpo sólido  $\Sigma_B$ , los cuales mediante la aplicación de un voltaje producen un torque  $\tau_{r_i}$ , por medio de la combinación de velocidades angulares  $\omega_i$  en cada rotor, incluyendo sentido y magnitud (como se explica al principio de la sección 2.1).

Por simplicidad los motores deben estar colocados de manera simétrica a la misma distancia  $l_{r_i}$  del centro de masa en el cuerpo sólido, otro aspecto a considerar es que las hélices deben tener la misma longitud  $l_{h_i}$  y torsión, lo que permite generar las fuerzas de propulsión, el sentido en la torsión de las hélices con dirección CW es diferente al sentido en la torsión de las hélices con dirección CCW .

La combinación adecuada de las magnitudes de velocidades angulares  $\omega_i$  con sus respectivos sentidos (CW, CCW) cancela las fuerzas tangenciales generada por los motores, y de esta manera generar los movimientos de traslación  $\xi$  y rotación  $\eta$ .

Es posible analizar la fuerza de propulsión producida por el torque  $\tau_r$  mediante

$$\tau_r = l_h \times f_T \quad (2.86)$$

donde:

$l_h$ : Vector de coordenadas de longitud del aspa.

$f_T$ : Fuerza tangencial de la hélice.

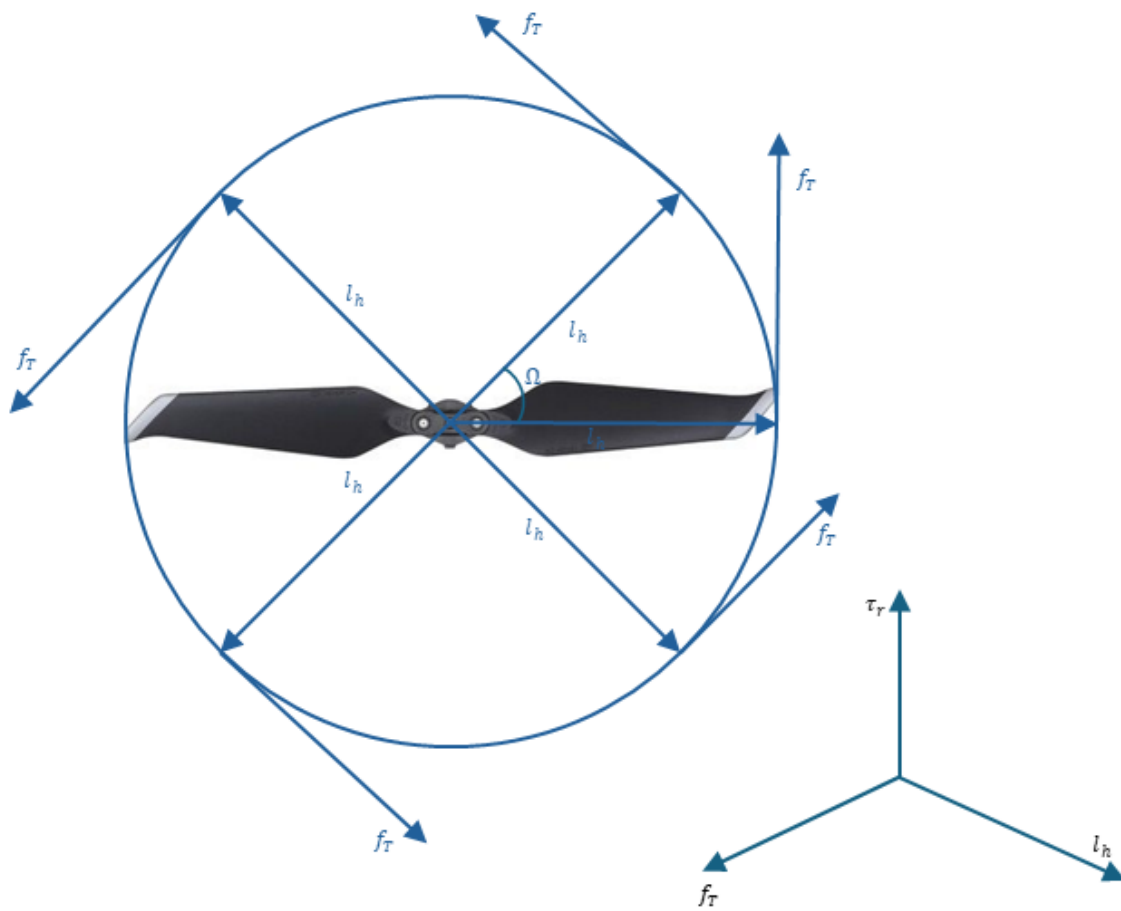


Figura 2.12 Fuerza tangencial actuando en aspa [45].

En la Figura 2.12 se puede observar un ángulo existente entre la fuerza tangencial  $f_T$  y la longitud  $l_h$  es  $\frac{\pi}{2}$ , dada esta observación es posible reescribir la ecuación (2.86) mediante las propiedades del producto cruz vectorial

$$\begin{aligned}
\tau_{r_i} &= \|l_h\| \|f_{T_i}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{l_h \times f_{T_i}}{\|l_h \times f_{T_i}\|} \\
\tau_{r_i} &= \|l_h\| \|f_{T_i}\| \frac{l_h \times f_{T_i}}{\|l_h \times f_{T_i}\|} \\
f_p &= \|f_{T_i}\| \frac{l_h \times f_{T_i}}{\|l_h \times f_{T_i}\|} \\
\tau_{r_i} &= \|l_h\| f_{p_i} \tag{2.87}
\end{aligned}$$

la norma euclidiana del vector  $l_h$  es igual a la longitud  $l_h$  del asa, por lo que la ecuación (2.87) toma la forma

$$\tau_{r_i} = l_h f_{p_i} \tag{2.88}$$

$$f_{p_i} = \frac{\tau_{r_i}}{l_h} \tag{2.89}$$

### Movimiento de traslación.

La fuerza de propulsión  $f_p$  permite el ascenso vertical del VANT, esta fuerza es dada mediante las contribuciones de las fuerzas individuales  $\sum f_{p_i}$ , la resultante se observa sobre el eje  $z_d \in \Sigma_d(x_d, y_d, z_d)$ , debido a esta observación se puede deducir  $f_p = (f_{p_1} + f_{p_2} + f_{p_3} + f_{p_4})k_d$ , por otro lado, las componentes de los ejes  $x_d, y_d \in \Sigma_d$  son cero

$$f_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{p_1} + f_{p_2} + f_{p_3} + f_{p_4} \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

Se sustituye la ecuación (2.89) en (2.89), es reescrita como

$$f_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau_{r_1}}{l_h} + \frac{\tau_{r_2}}{l_h} + \frac{\tau_{r_3}}{l_h} + \frac{\tau_{r_4}}{l_h} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

Por las componentes cero de los ejes  $x_d, y_d$  en el vector de propulsión  $f_p$  se deduce la naturaleza subactuada del VANT, para llevar acabo el movimiento de traslación  $(\xi_{x_0}, \xi_{y_0})$  es necesario se realice de manera indirecta mediante el movimiento de rotación  $\eta \in \Sigma_d$ , el cual es proyectado hacia la fuerza cartesiana  $f_\xi \in \Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$  a través de la matriz de

transformación  $R(\eta)$ , dada por los ángulos de Euler o los ángulos YPR, la relación existente de esta proyección se describe como

$$f_{\xi} = R(\eta)f_p \quad (2.92)$$

se sustituirá la matriz de rotación  $R(\eta)$  por medio de los ángulos de Euler, reescribiendo la ecuación (2.92) como

$$\begin{aligned} f_{\xi} &= R_{ZYZ}^e(\eta)f_p \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} f_p \\ \begin{bmatrix} f_{\xi_{x0}} \\ f_{\xi_{y0}} \\ f_{\xi_{z0}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \frac{1}{l_h} (\tau_{r1} + \tau_{r2} + \tau_{r3} + \tau_{r4}) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \frac{1}{l_h} (\tau_{r1} + \tau_{r2} + \tau_{r3} + \tau_{r4}) \\ \cos(\theta) \frac{1}{l_h} (\tau_{r1} + \tau_{r2} + \tau_{r3} + \tau_{r4}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Para que el VANT pueda realizar maniobras de ascenso/descenso se requiere que la proyección en el sistema de referencia fijo  $\Sigma_0$  de la fuerza de propulsión  $f_p$  sea igual a la fuerza de gravedad  $g$ , siendo  $f_{\xi_{z0}} = \cos(\theta) \frac{1}{l_h} (\tau_{r1} + \tau_{r2} + \tau_{r3} + \tau_{r4}) = -m_d g$ .

### Movimiento de rotación.

El movimiento de rotación de un VANT es dado por las fuerzas tangenciales  $fT_{ri}$  en los rotores, estas fuerzas se pueden sumar y restar con el propósito de compensar la fuerza de propulsión, este efecto depende del sentido de las fuerzas tangenciales  $fT_{ri}$ , donde los rotores  $r_1$  y  $r_3$  cuentan con un sentido CW y los rotores  $r_2$  y  $r_4$  en sentido CCW, el producto de esta combinación de fuerzas da como resultado la orientación  $(\phi, \theta, \psi)$  con respecto al sistema de referencia fijo  $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ .

En este sentido para rotar el VANT alrededor del eje  $z_0$  un ángulo  $\phi$  se requiere un torque equivalente a

$$\tau_{\phi} = \tau_{r1} + \tau_{r3} - (\tau_{r2} + \tau_{r4}) \quad (2.94)$$

para una rotación  $\theta$  alrededor del eje  $y_1$  el torque necesario es dado por

$$\tau_{\theta} = \tau_{r3} - \tau_{r1} \quad (2.95)$$

y en el caso de una rotación  $\psi$  alrededor del eje  $z_2$  un torque dado por

$$\tau_\psi = \tau_{r4} - \tau_{r2} \quad (2.96)$$

es posible relacionar los torques de los 4 motores con la fuerza de propulsión (2.91) y los torques (2.94), (2.95) y (2.96) de la orientación  $\eta$  por medio de la estructura

$$\begin{bmatrix} f_p \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_h} & \frac{1}{l_h} & \frac{1}{l_h} & \frac{1}{l_h} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{r4} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

la fuerza de propulsión  $f_p$  y los toques de orientación  $\tau_\eta$  son estructuras de control diseñadas por el usuario, las cuales dan como resultado las señales de control que se envían a los rotores, los torques aplicados a cada rotor son calculados mediante

$$\begin{bmatrix} \tau_{r1} \\ \tau_{r2} \\ \tau_{r3} \\ \tau_{r4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4l_h} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4l_h} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4l_h} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4l_h} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_p \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

### 2.1.5. Modelo dinámico

Las formas específicas de la matrices de inercia  $M_d(\eta)$  y de Coriolis  $C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}$  tiene una fuerte dependencia de la matriz de rotación  $R(\eta)$  seleccionada, debido a esta dependencia, este trabajo de investigación hará uso de la matriz de rotación por medio de los ángulos de Euler  $R_{ZYZ}^e(\eta)$  para el desarrollo del modelo dinámico.

Para analizar las ecuaciones de manera clara, a partir de este punto se representará los términos de seno y coseno de la siguiente manera

*seno:* s

*coseno:* c

**Matriz de inercia  $M_d(\eta)$ .**

La ecuación (2.66) describe la matriz de inercia  $M_d(\eta)$ , descrita en términos de los ángulos de Euler por las ecuaciones (2.46) y (2.63)

$$\begin{aligned}
M_d(\eta) &= \mathcal{W}_{ZYZ}^e T I_d \mathcal{W}_{ZYZ}^e \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\
M_d(\eta) &= \begin{bmatrix} I_{zz} & 0 & I_{zz}c\theta \\ 0 & I_{xx}s^2\phi + I_{yy}c^2\phi & (I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta \\ I_{zz}c\theta & (I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta & [I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi]s^2\theta + I_{zz}c^2\theta \end{bmatrix} \quad (2.99)
\end{aligned}$$

$M_d(\eta) = M_d(\eta)^T$ , debido a esto la matriz  $M_d(\eta)$  es simétrica y semidefinida positiva, es posible hacerla definida positiva de forma local mediante la restricción  $[\theta \in (0, \pi)$  y  $\phi \in (-\pi, 0)]$ .

De la ecuación (2.68) la porción de la energía cinética rotacional  $\kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta})$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\kappa_{Rot}(\eta, \dot{\eta}) &= \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{zz} & 0 & I_{zz}c\theta \\ 0 & I_{xx}s^2\phi + I_{yy}c^2\phi & (I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta \\ I_{zz}c\theta & (I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta & [I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi]s^2\theta + I_{zz}c^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{zz}\dot{\phi} + I_{zz}c\theta\dot{\psi} & [I_{xx}s^2\phi + I_{yy}c^2\phi]\dot{\theta} + & I_{zz}c\theta\dot{\phi} + [(I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta]\dot{\theta} + \\ (I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta\dot{\psi} & & [(I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi)s^2\theta + I_{zz}c^2\theta]\dot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (I_{zz}\dot{\phi}^2 + 2I_{zz}c\theta\dot{\psi}\dot{\phi} + [I_{xx}s^2\phi + I_{yy}c^2\phi]\dot{\theta}^2 + 2(I_{yy} - I_{xx})c\phi c\phi s\theta\dot{\psi}\dot{\theta} + \\ &\quad [(I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi)s^2\theta + I_{zz}c^2\theta]\dot{\psi}^2) \quad (2.100)
\end{aligned}$$

**Matriz de Coriolis  $C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}$ .**

La estructura del vector de Coriolis es descrito por medio de la ecuación (2.74), esta estructura contiene la derivada de la matriz de inercia  $M_d(\eta)$ , ecuación (2.99) y de la energía cinética rotacional  $\kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta})$  ecuación (2.100)

$$C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \left[ \frac{d}{dt} M_d(\eta) \right] \dot{\eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta})$$

$$\frac{d}{dt} M_d(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_{zz}s\theta\dot{\theta} \\ 0 & 2[I_{xx} - I_{yy}]c\phi s\phi\dot{\phi} & (I_{yy} - I_{xx})(c^2\phi - s^2\phi)s\theta\dot{\phi} + (I_{yy} - I_{xx})c\phi - s\phi c\theta\dot{\theta} \\ -I_{zz}s\theta\dot{\theta} & (I_{yy} - I_{xx})(c^2\phi - s^2\phi)s\theta\dot{\phi} + (I_{yy} - I_{xx})c\phi - s\phi c\theta\dot{\theta} & 2[I_{yy} - I_{xx}]c\phi s\phi s^2\theta\dot{\phi} + 2[(I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi) - I_{zz}]c\theta s\theta\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} \kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta}) \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \kappa_{rot}(\eta, \dot{\eta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [I_{xx} - I_{yy}]s\phi c\phi\dot{\theta}^2 + [I_{yy} - I_{xx}][c^2\phi - s^2\phi]s\theta\psi\dot{\theta} + [I_{yy} - I_{xx}]c\phi s\phi s^2\theta\psi^2 \\ [I_{xx}c^2\phi + I_{yy}s^2\phi - I_{zz}]s\theta c\theta\psi^2 - I_{zz}s\theta\psi\dot{\phi} + [I_{yy} - I_{xx}]c\phi s\phi c\theta\psi\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.102)$$

se sustituyen los valores de las ecuaciones (2.101) y (2.102) en (2.74), para obtener el vector de coriolis

$$\begin{aligned}
C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} &= \left[ \frac{d}{dt} M_d(\eta) \right] \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_d(\eta) \dot{\eta} \right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [I_{yy} - I_{xx}] s \phi c \phi \dot{\theta}^2 - ([I_{yy} - I_{xx}] [c^2 \phi - s^2 \phi]) s \theta \dot{\psi} \dot{\theta} - \\ \quad ([I_{yy} - I_{xx}] c \phi s \phi s^2 \theta) \dot{\psi}^2 \\ 2 [I_{xx} - I_{yy}] c \phi s \phi \dot{\phi} \dot{\theta} + ([I_{yy} - I_{xx}] [c^2 \phi - s^2 \phi] + I_{zz}) s \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \\ \quad [I_{xx} c^2 \phi - I_{yy} s^2 \phi - I_{zz}] s \theta c \theta \dot{\psi}^2 \\ I_{zz} s \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + [I_{yy} - I_{xx}] [c^2 \phi - s^2 \phi] s \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + [I_{yy} - I_{xx}] c \phi s \phi c \theta \dot{\theta}^2 + \\ 2 [I_{yy} - I_{xx}] c \phi s \phi s^2 \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + 2 ([I_{xx} c^2 \phi + I_{yy} s^2 \phi] - I_{zz}) c \theta s \theta \dot{\theta} \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.103)
\end{aligned}$$

de la ecuación (2.103) se observa términos cuadráticos ( $\dot{\theta}^2$ ,  $\dot{\psi}^2$ ), estos términos representan las fuerzas centrípetas, por otro lado, los términos de productos cruzados ( $\dot{\theta} \dot{\psi}$ ,  $\theta \dot{\phi}$ ,  $\phi \dot{\psi}$ ) representan los torques de Coriolis, la acción de Coriolis tiene el efecto de desviar la componente de traslación  $\xi$  del centro de masa del VANT por el efecto de rotación.

### Estructura del modelo dinámico.

De las ecuaciones de movimiento del modelado por Euler-LaGrange se observa que la estructura matemática de un VANT tipo cuadricóptero contiene una componente de traslación (2.72) y una de rotación (2.75), dada por forma compacta

$$\begin{bmatrix} f_\xi \\ \tau_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d \ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_d g \end{bmatrix} + f_{f_\xi} \\ M_d(\eta) \ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + \tau_{f_\eta} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Con la finalidad de simular los efectos físicos en el VANT, para estudiar el comportamiento dinámico, y posteriormente el diseño de algoritmos de control la ecuación (2.104) adquiere la forma compacta

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \frac{1}{m_d} \left[ f_{\xi} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_d g \end{bmatrix} - f_{f_{\xi}} \right] \\ \dot{\eta} \\ M_d(\eta)^{-1} [\tau_{\eta} - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} - \tau_{f_{\eta}}] \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

cabe recordar que los componentes de fricción (ecuaciones 2.80 y 2.83) y los motores (ecuaciones 2.76 y 2.79 ) tienen sus propias dinámicas, por lo cual también se requiere analizar, simular y crear sus algoritmos de control

## 2.2. Arribo simultáneo.

La robótica de enjambres es un enfoque novedoso en los sistemas multi-robot, el cual obtiene su inspiración en el comportamiento de los organismos sociales, tales como colonias de hormigas, cardúmenes de peces o bandadas de aves [54]. El objetivo principal de un enjambre robótico es la de coordinar de manera auto-organizada un grupo de robots con prestaciones limitadas, y que presentan las características descritas en la tabla (1.2) del capítulo 1, de tal forma que emerjan comportamientos colectivos debidos a la interacción local entre los integrantes del enjambre [5]. La auto-organización es un fenómeno frecuentemente observado en la naturaleza, y se define como la coordinación de un colectivo de individuos sin la intervención de fuerzas externas al grupo o por la influencia de un líder [23].

El campo de estudio de la robótica de enjambre es amplio, y podemos encontrar en la literatura numerosos enfoques [7], entre ellos, agregación, flocado, flotación, agrupación y clasificación de objetos, navegación, formación de rutas, despliegue, manipulación colaborativa, asignación de tareas, cita entre otros, el trabajo presentado en esta tesis esta enfocado en la cita.

El problema conocido como cita en los sistema multi-robot hace referencia a la reunión de un grupo de robots originalmente dispersos sobre un terreno [34]. Este problema se puede considerar de diferentes aristas, por ejemplo, en [52] los autores emplearon la teoría de sistemas imaginarios negativos para el diseño de un controlador para cita aplicado a un grupo de robots móviles con ruedas (RMRs) bajo linealización entrada-salida con el fin de representar un sistema de integrador simple. En este caso, solamente un subconjunto de los robots conocía la posición del punto de reunión. Por otro lado, en [22] diseñaron una estrategia de control descentralizada para reunir un grupo de robots móviles empleando la posición y orientación de los elementos del grupo y aplicando herramientas de la teoría de grafos. En este trabajo, los RMRs fueron llevados a una configuración común en el espacio de estados. Los trabajos previamente descritos versan sobre la selección óptima del área de reunión en el espacio de trabajo por parte del grupo de robots, uno de los varios aspectos a considerar en este comportamiento colectivo.

De manera análoga, un caso particular de la cita consiste en el problema de arribo simultáneo de los miembros del grupo al punto o área de reunión. La importancia de abordar esta situación radica en su relevancia para aplicaciones prácticas, como la entrega de paquetes autónomos, la exploración de áreas desconocidas y la coordinación de flotas de robots en entornos industriales. La resolución efectiva de este problema no solo impulsa la eficiencia

operativa, sino que también tiene implicaciones en términos de ahorro de energía, reducción de la congestión y optimización de los recursos.

Por ejemplo, [4] presenta un par de algoritmos para arribo simultáneo y secuencial en un grupo de vehículos aéreos no tripulados (VANT's), este algoritmo se encarga de planificar las rutas de vuelo, considerando la evasión de colisiones con obstáculos u otros VANT's además de que los robots deben mantenerse en zonas de vuelo autorizadas. Para alcanzar el objetivo planteado, el algoritmo para la planificación de rutas se basa en el problema de asignación por cuello de botella lineal. Por otro lado, [24] aplicaron una variante del algoritmo de optimización por colonias de hormigas para resolver el problema de arribo simultáneo en un grupo de VANT's. Este protocolo de optimización se basa en la observación del comportamiento colectivo en grupos de hormigas, y trata de representar el rastro de feromonas que dejan las hormigas cuando se desplazan. De tal forma que, si un grupo de hormigas selecciona el mismo camino, el rastro de las feromonas se vuelve más intenso que aquel seguido por un grupo menor de las mismas. De esta manera, las respuestas similares en la consigna de optimización son reforzadas en el grupo a fin de llegar a un consenso. Adicionalmente, en [9] los autores muestran resultados experimentales en la implementación de un algoritmo de arribo simultáneo basado en el consenso del tiempo esperado de arribo en un grupo de VANTs miniatura de ala fija con tareas de vigilancia.

De manera similar, [64] describen un algoritmo para arribo simultáneo en vehículos submarinos autónomos (VSA) que navegan en un ambiente con presencia de obstáculos. La planeación de la ruta de movimiento se basa en el supuesto que la evasión de obstáculos se modela como un sistema dinámico de fluido interferido, tal como las corrientes de agua evitan a las rocas en los ríos. La adición del principio de síntesis de vectores para el consenso en el tiempo estimado de arribo asegura el arribo simultáneo. Por su parte, en [65] los autores combinan la descomposición distribuida del espacio en cascarones con un esquema de selección de punto de reunión optimizado para centros de masas junto a la técnica de optimización de enjambre de partículas, con el fin de resolver el problema de arribo simultáneo en vehículos marinos autónomos (VMA), los cuales pueden incluir VSAs y buques de superficie autónomos.

Un modelo dinámico similar al empleado en este documento, es decir, la representación de un objeto desplazándose en un plano empleando coordenadas polares es empleado en el control de dirección de misiles. De tal forma que, en la literatura existen algunos ejemplos de arribo simultáneo para estos sistemas. Por ejemplo, en [33, 32] los autores emplean una ley robusta y cooperativa de direccionamiento para llevar a un grupo de misiles interceptores a impactar con objetivos fijos. Esta ley de control considera fallas en el seguimiento de la

trayectoria en algunos misiles. Similarmente, en [17] se prefiere confiar en una ley de control basada en la teoría de Lyapunov para la navegación de un grupo de misiles con el fin de enfrentar simultáneamente un conjunto de objetivos en tierra.

### 2.2.1. Fundamentos para arribo simultáneo.

Uno de los enfoques propuestos en la literatura es la representación del modelo cinemático en coordenadas cartesianas del elemento robótico en coordenadas polares [51, 3], aplicando el siguiente cambio de coordenadas [21, 36]:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \gamma &= \text{ATAN2}(y, x) - \theta + \pi \\ \delta &= \gamma + \theta\end{aligned}\tag{2.106}$$

donde:

$\rho$ : Representa la distancia radial entre la posición actual del robot, dada por las coordenadas  $(x_r, y_r)$ , y las coordenadas de la posición objetivo  $(x_g, y_g)$ . Esta distancia se calcula utilizando la fórmula de la distancia euclidiana, lo que permite evaluar la proximidad del robot con respecto a su meta y es fundamental para la implementación de algoritmos de control y navegación.

$\gamma$ : Ángulo del error de orientación, medido desde el eje del vector de velocidad del robot hacia el vector que va de  $(x, y)$  a  $(x_g, y_g)$ .

$\delta$ : Orientación con respecto al marco de referencia deseado (ver Figura 2.13).

Considerando coordenadas polares, el modelo cinemático del elemento robótico puede representarse como [36]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= v \frac{\sin \gamma}{\rho} - \omega \\ \dot{\delta} &= v \frac{\sin \gamma}{\rho}\end{aligned}\tag{2.107}$$

sin pérdida de generalidad, el objeto de control puede ser considerado como la regulación asintótica del sistema (2.107) hacia el origen del vector de estados,  $(\rho = 0, \gamma = 0, \delta = 0)$ , mediante la aplicación del siguiente teorema:

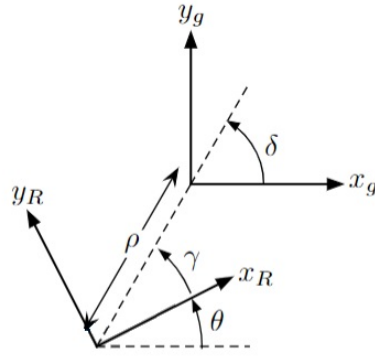


Figura 2.13 Representación en coordenadas polares de un elemento robótico móvil [36].

**Teorema 1.** [3] Considere el modelo cinemático de un elemento robótico en coordenadas polares (2.107), junto con la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} v &= k_1 \rho \cos \gamma \\ \omega &= k_2 \gamma + k_1 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta) \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde:

$v$ : Velocidad lineal.

$\omega$ : Velocidad angular.

con  $k_1, k_2, k_3 \in \mathfrak{R}^+$ .

Por tanto, el sistema en lazo cerrado (2.107)-(2.108) converge asintóticamente al estado  $(\rho(t), \gamma(t), \delta(t))^T = (0, 0, 0)^T$  mientras  $t \rightarrow \infty$ , navegando similarmente a la conducción natural de un vehículo llevada a cabo por un operador humano.

*Prueba.* Considere la función

$$V = \frac{1}{2} (\rho^2 + \gamma^2 + k_3 \delta^2)$$

Una función candidata de Lyapunov, cuya derivada con respecto al tiempo, considerando el sistema en lazo cerrado (2.106)-(2.108) se da por

$$\dot{V} = -k_1 \rho^2 \cos^2 \gamma - k_2 \gamma^2 \leq 0$$

que es negativa semidefinida. Aplicando el teorema de Barbalat, se obtiene que  $\rho, \gamma, \delta = 0$  as  $t \rightarrow \infty$ .

La consideración de conducción dada por teorema 1, hace referencia al movimiento del robot con velocidad lineal positiva hacia la dirección deseada. Esto significa que el elemento robótico llega a su destino de frente. Para este caso  $\gamma \rightarrow 0$  con el fin de llevar al robot sobre la línea del vector  $\rho$ .

El problema de arribo simultáneo de un conjunto de elementos robóticos se realiza bajo el supuesto que los robots se desplazan sobre un espacio de trabajo finito y libre de obstáculos. Para alcanzar el objetivo, los robots emplean un protocolo de consenso basado en sus distancias hacia la zona de reunión, considerando que los robots emplean la misma ley de control para la regulación de su postura hacia dicha zona. Para reducir la diferencia en distancias de ambos robots, representados en coordenadas polares, con respecto a la zona de cita, se puede utilizar la ganancia para arribo simultáneo en conjunto con la ley de control de regulación de postura, tal como se describe en el siguiente teorema

**Teorema 2** (Protocolo para arribo simultáneo [36]). *Considere el par de robots  $i$  y  $j$ , representados en coordenadas polares. Estos elementos robóticos arribarán simultáneamente al punto de reunión, por medio de un protocolo de consenso en distancia, si se emplea el controlador (2.108) multiplicado por la siguiente ganancia*

$$K_{r_i} = 1 + \left( \frac{\rho_i - \rho_j}{\max(\rho_i, \rho_j)} \right) \quad (2.109)$$

De tal forma que, la ley de control para el robot  $i$  queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v &= K_{r_i} k_1 \rho \cos \gamma \\ \omega &= K_{r_i} (k_2 \gamma + k_1 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta)) \end{aligned} \quad (2.110)$$

De manera similar se construye la ley de control para el robot  $j$ .

*Prueba.* Considere el error de distancia de los robots  $i$  y  $j$  con respecto al punto de reunión como  $e_\rho = \rho_i - \rho_j$ . La dinámica del error de distancia está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_\rho &= \dot{\rho}_i - \dot{\rho}_j \\ \dot{e}_\rho &= -v_i \cos \gamma_i + v_j \cos \gamma_j \end{aligned} \quad (2.111)$$

reemplazando (2.108) y (2.110) en (2.111)

$$-\left(1 + \frac{e_\rho}{\max(\rho_i, \rho_j)}\right) \rho_i \cos^2 \gamma_i + \left(1 - \frac{e_\rho}{\max(\rho_i, \rho_j)}\right) \rho_j \cos^2 \gamma_j \quad (2.112)$$

tomando en cuenta que en el control de regulación de pose (2.108) el error de orientación es disminuido para llevar al robot a desplazarse en línea recta de frente hacia su objetivo, o sea  $\gamma \rightarrow 0$ . Esto implica que  $\cos^2 \gamma \rightarrow 1$ , por tanto, la dinámica del error de distancia esta dado por

$$\dot{e}_\rho = -e_\rho \left(1 + \frac{\rho_i + \rho_j}{\max(\rho_i, \rho_j)}\right) \quad (2.113)$$

lo cual muestra que el origen del sistema dinámico de  $e_\rho$  es exponencialmente estable, por tanto, los robots lograrán el consenso en sus distancias hacia el punto de reunión.

La ganancia descrita en el teorema dos funciona de la siguiente manera: al multiplicar la ganancia (2.109) con la ley de control (2.108) como se aprecia en (2.110), se tienen dos escenarios. Para el robot que se encuentra más alejado de la zona de cita, la ganancia  $K_r \in (1, 2]$  por tanto se tiene una amplificación de la velocidad hasta un máximo del doble. Por su parte, para el robot que se encuentra más cercano la ganancia de cita queda en el intervalo  $K_r \in [0, 1)$ , produciendo una atenuación en la velocidad. Observe que  $K_r = 1$  solamente si  $\rho_i = \rho_j$ . En la Figura 2.14 se puede apreciar un esquema con la relación del protocolo de consenso con la ley de control de regulación para la emergencia del arribo simultáneo.

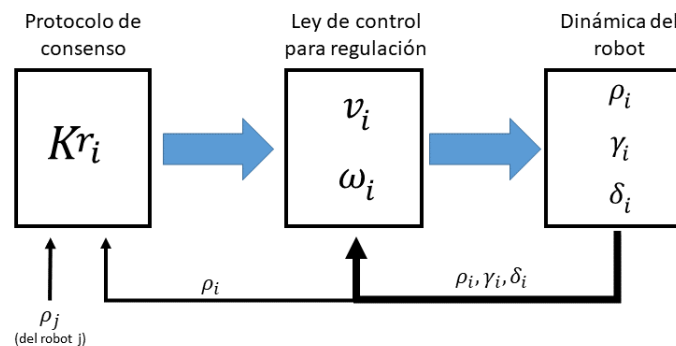


Figura 2.14 Relación entre la dinámica del robot, la ley de control de regulación y el protocolo de consenso en distancia para la emergencia de arribo simultáneo [36].

## **Capítulo 3**

# **Control del Vehículo Aéreo No Tripulado.**

En esta sección será analizado el desarrollo de distintas técnicas de control para un VANT, las cuales serán evaluadas mediante una simulación en el software Matlab con la finalidad de observar el comportamiento y desempeño de cada uno de ellos. En general, utilizamos controladores en cascada basados en modelos implementados abordo para operación en tiempo real. La atención se centró en el control de postura, ya que es el corazón del problema de control.

### 3.1. Diseño del controlador.

El modelo compacto en la ecuación (2.105) de la sección 2.1.5 describe las ecuaciones diferenciales del sistema. Este modelo se simplificará para cumplir con las restricciones de tiempo real del bucle de control integrado [14]. El sistema se puede reescribir en su forma de espacio de estados  $\dot{X} = F(X, U)$ , donde  $U$  corresponde al vector de entradas y  $X$  al vector de estado elegido de la siguiente manera:

Vector de Estados:

$$X = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ z \\ \dot{z} \\ x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \dot{X}_1 & X_8 &= \dot{X}_7 \\ X_4 &= \dot{X}_3 & X_{10} &= \dot{X}_9 \\ X_6 &= \dot{X}_5 & X_{12} &= \dot{X}_{11} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$f(X,U) = \begin{bmatrix} X_2 \\ \left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right) X_4 X_6 + \left(\frac{J_r}{I_{xx}}\right) \omega_r X_4 + \left(\frac{l}{I_{xx}}\right) U_2 \\ X_4 \\ \left(\frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\right) X_2 X_6 - \left(\frac{J_r}{I_{yy}}\right) \omega_r X_2 + \left(\frac{l}{I_{yy}}\right) U_3 \\ X_6 \\ \left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\right) X_2 X_4 + \left(\frac{1}{I_{zz}}\right) U_4 \\ X_8 \\ g - \left(\frac{\cos(X_3)}{m_d}\right) U_1 \\ X_{10} \\ \left(\frac{U_1}{m_d}\right) U_x \\ X_{12} \\ \left(\frac{U_1}{m_d}\right) U_y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$U_x = \cos(X_1) \sin(X_3)$$

$$U_y = \sin(X_1) \sin(X_3)$$

$$(3.5)$$

Del sistema (3.4) se puede observar que las componentes de rotación ( $X_\xi$ ) no dependen de las componentes de traslación ( $X_\eta$ ), sin embargo, las componentes de traslación ( $X_\eta$ ) dependen de las componentes de rotación ( $X_\xi$ ), de esta observación es posible deducir que el sistema pueda ser descrito como la contribución de dos subsistemas, el subsistema de rotación y el subsistema de traslación, y por lo tanto se obtiene un sistema en cascada como se observa en la Figura 3.1.

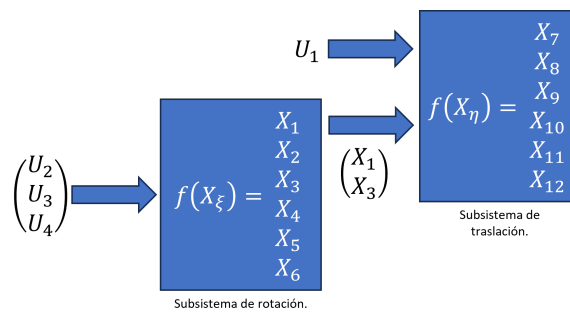


Figura 3.1 Sistema en cascada, subsistemas de rotación y traslación [45].

Mediante el análisis del punto de equilibrio observamos

$$\begin{aligned}
 0 &= X_2 \\
 0 &= \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 + \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) \omega_r X_4 + \left( \frac{l}{I_{xx}} \right) U_2
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= X_4 \\
 0 &= \left( \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) X_2 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{yy}} \right) \omega_r X_2 + \left( \frac{l}{I_{yy}} \right) U_3
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= X_6 \\
 0 &= \left( \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) X_2 X_4 + \left( \frac{1}{I_{zz}} \right) U_4
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= X_8 \\
 0 &= g - \left( \frac{\cos(X_3)}{m_d} \right) U_1 \\
 U_1 &= \frac{m_d g}{\cos(X_3)} = 0
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= X_{10} \\
 0 &= \left( \frac{U_1}{m_d} \right) \cos(X_1) \sin(X_3) \\
 U_1 &= \frac{m_d}{\cos(X_1) \sin(X_3)} = 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= X_{12} \\
 0 &= \left( \frac{U_1}{m_d} \right) \sin(X_1) \sin(X_3) \\
 U_1 &= \frac{m_d}{\sin(X_1) \sin(X_3)} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Existen restricciones en  $X_1, X_3 \neq \pi, \frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}$ .

De manera general, se propone una estructura de control representado en la Figura 3.2, donde se crea un lazo de control cerrado para las dinámicas del subsistema translación y un lazo de control cerrado para las dinámicas de rotación que satisfagan la característica subactuada del sistema.

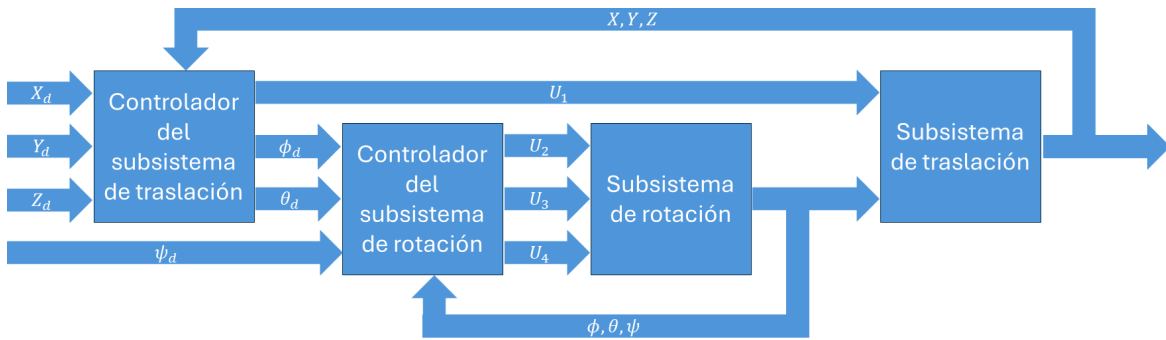


Figura 3.2 Propuesta de controlador [45].

### 3.2. Controlador mediante linealización por retroalimentación de estados (Feedback linearization).

El primer controlador propuesto para esta tesis se trata del control mediante linealización por retroalimentación de estados [29], con la finalidad de mejorar el procesamiento de las señales, se procede a iniciar mediante el lazo de control de rotación  $f(X_\xi)$  que describen el comportamiento del ángulo  $\phi$ , dando como resultado el sistema de segundo orden:

$$\dot{f}(X_{\xi_\phi}, U_2) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 + \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) \omega_r X_4 + \left( \frac{l}{I_{xx}} \right) U_2 \end{bmatrix}
 \tag{3.12}$$

Se define el error para el problema de trayectoria como:

$$e_1 = X_1 - \phi_d \quad e_2 = X_2 - \dot{\phi}_d \quad (3.13)$$

de la ecuación (3.13) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$X_1 = e_1 + \phi_d \quad X_2 = e_2 + \dot{\phi}_d \quad (3.14)$$

se hace el primer cambio de variables tomando la ecuación  $e_1$  del conjunto de ecuaciones (3.13) y se deriva con respecto al tiempo.

$$\dot{e}_1 = \dot{X}_1 - \dot{\phi}_d \quad (3.15)$$

por las ecuaciones (3.12) y (3.14) se deduce que

$$\dot{X}_1 = X_2 = e_2 + \dot{\phi}_d$$

y se resuelve la ecuación (3.15) para obtener

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 + \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_d \\ \dot{e}_1 &= e_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

para el siguiente cambio de variables se toma la ecuación  $e_2$  del conjunto (3.9) y se deriva con respecto al tiempo.

$$\dot{e}_2 = \dot{X}_2 - \ddot{\phi}_d \quad (3.17)$$

De la ecuación (3.8) se resuelve para  $\dot{X}_2$  con la ecuación (3.17), por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 + \ddot{\phi}_d &= \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r + \left( \frac{l}{I_{xx}} \right) U_2 \\ \dot{e}_2 &= \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r + \left( \frac{l}{I_{xx}} \right) U_2 - \ddot{\phi}_d \end{aligned} \quad (3.18)$$

con la finalidad del análisis matemático se crea la variable  $C$  la cual queda definida de la siguiente manera

$$C = \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r - \ddot{\phi}_d \quad (3.19)$$

se sustituye la ecuación (3.19) en (3.18) y se obtiene

$$\dot{e}_2 = C + \left(\frac{l}{I_{xx}}\right) U_2 \quad (3.20)$$

el sistema con cambio de variables queda descrito por las ecuaciones (3.16) y (3.20)

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} e_2 \\ C + \left(\frac{l}{I_{xx}}\right) U_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde el vector de campos se define por

$$f(e) = \begin{bmatrix} e_2 \\ C \end{bmatrix}; g(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} \end{bmatrix}; h(e) = e_1 + \phi_d$$

y

$$Y = h(e)$$

se define

$$Y = e_1 + \phi_d \quad (3.22)$$

la derivada con respecto al tiempo de  $Y$  es dada por

$$\dot{Y} = \frac{\partial h}{\partial e} [f(e) + g(e)U_2] \stackrel{\text{def}}{=} L_f h(e) + L_g h(e)U_2 \quad (3.23)$$

por las derivadas de Lie de  $h$  con respecto a  $f$  se obtiene

$$L_f h(e) = \frac{\partial h(e)}{\partial e} f(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ C \end{bmatrix}$$

$$L_f h(e) = e_2$$

que proporciona la primera porción de la ecuación (3.23), para la segunda porción se resuelve la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $g$

$$L_g h(e) = \frac{\partial h(e)}{\partial e} g(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} \end{bmatrix}$$

$$L_g h(e) = 0$$

se sustituye en la ecuación (3.23)

$$\dot{Y} = e_2$$

se observa que  $\dot{Y}$  es independiente de  $U$  por lo que se procede a derivar de nuevo para obtener  $\ddot{Y}$ , con el valor de  $h(e) = \dot{Y} = L_f h(e) = e_2$ , se calcula la segunda derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$

$$\begin{aligned} L_f^2 h(e) &= \frac{\partial h(e)}{\partial e} f(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ C \end{bmatrix} \\ L_f^2 h(e) &= C \end{aligned} \quad (3.24)$$

y la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $g$ , con notación  $L_f L_g h(e)$  para conveniencia del cálculo

$$\begin{aligned} L_f L_g h(e) &= \frac{\partial h(e)}{\partial e} g(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} \end{bmatrix} \\ L_f L_g h(e) &= \frac{l}{I_{xx}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

se sustituyen las ecuaciones (3.24) y (3.25) en (3.23) para obtener

$$\ddot{Y} = C + \left( \frac{l}{I_{xx}} \right) U_2 \quad (3.26)$$

donde se observa la entrada  $U_2$  mediante la cual el mapeo de entradas-salidas se puede llevar a cabo por medio de un par de integradores, el control por retroalimentación de estados dado por

$$U_2 = \frac{1}{L_f L_g h(e)} (-L_f^2 h(e) + v) \quad (3.27)$$

se sustituyen las ecuaciones (3.24) y (3.25) en (3.27)

$$U_2 = \frac{I_{xx}}{l} (-C + v_2) \quad (3.28)$$

y la ecuación (3.19) en (3.28) para obtener la retroalimentación de estados

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{I_{xx}}{l} \left[ - \left( \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r - \ddot{\phi}_d \right) + v_2 \right] \\ U_2 &= \frac{I_{xx}}{l} \left( - \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 + \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r + \ddot{\phi}_d + v_2 \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

se cierra el lazo de control sustituyendo la ecuación (3.28) en el sistema (3.21) y se resuelve para obtener el sistema (3.30).

$$\dot{e}_\phi = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ C + \left(\frac{l}{I_{xx}}\right) \left(\frac{I_{xx}}{l} (-C + v_2)\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

El sistema en lazo cerrado (3.30) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \quad (3.31)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

analizando la matriz de control  $[ABA]$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\text{Rank} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2$$

donde ambas columnas son linealmente independientes por lo tanto el sistema es controlable.  $(A - BK)$  debe ser Hurwitz por lo tanto

$$|SI - A + BK| = (S + d_{\phi 1})(S + d_{\phi 2}); d_{\phi 1}, d_{\phi 2} \geq 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{\phi 1} & K_{\phi 2} \end{bmatrix} \right| = S^2 + (d_{\phi 1} + d_{\phi 2})S + (d_{\phi 1} \times d_{\phi 2})$$

$$\left| \begin{bmatrix} S & -1 \\ K_{\phi 1} & S + K_{\phi 2} \end{bmatrix} \right| = S^2 + (d_{\phi 1} + d_{\phi 2})S + (d_{\phi 1} \times d_{\phi 2})$$

$$S^2 + K_{\phi 2}S + K_{\phi 1} = S^2 + (d_{\phi 1} + d_{\phi 2})S + (d_{\phi 1} \times d_{\phi 2}) \quad (3.33)$$

$$K_{\phi 2} = d_{\phi 1} + d_{\phi 2} \quad (3.34)$$

$$K_{\phi 1} = d_{\phi 1} \times d_{\phi 2} \quad (3.35)$$

Se propone una ley de control donde

$$v_2 = -K_{\phi 1} \times e_1 - K_{\phi 2} \times e_2 \quad (3.36)$$

se sustituye la ley de control (3.36) en el sistema linealizado (3.30)

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ -K_{\phi 1} \times e_1 - K_{\phi 2} \times e_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

mediante el análisis del punto de equilibrio del sistema linealizado en la ecuación (3.38) se puede observar la existencia y unicidad de los puntos de equilibrio

$$0 = e_{20}$$

$$0 = -K_{\phi 1} \times e_{10} - K_{\phi 2} \times e_{20}$$

$$0 = -K_{\phi 1} \times e_{10}$$

$$0 = e_{10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{10} \\ \dot{e}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

se sustituye la ley de control (3.36) en (3.29) y da como resultado en la nueva entrada de control del sistema por retroalimentación de estados.

$$U_2 = \frac{I_{xx}}{l} \left( - \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 + \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) X_4 \Omega_r + \ddot{\phi}_d - K_{\phi 1} \times e_1 - K_{\phi 2} \times e_2 \right) \quad (3.39)$$

De manera análoga, el procedimiento es repetido para el resto de las ecuaciones en el subsistema de orientación para obtener las entradas de control por retroalimentación de estados.

$$\begin{aligned} e_3 &= X_3 - \theta_d & e_4 &= X_4 - \dot{\theta}_d \\ K_{\theta 1} &= d_{\theta 1} \times d_{\theta 2} & K_{\theta 2} &= d_{\theta 1} + d_{\theta 2} \end{aligned}$$

$$U_3 = \frac{I_{yy}}{I} \left( - \left( \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) X_2 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{yy}} \right) X_2 \Omega_r + \ddot{\theta}_d - K_{\theta 1} \times e_3 - K_{\theta 2} \times e_4 \right) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} e_5 &= X_3 - \psi_d & e_6 &= X_4 - \dot{\psi}_d \\ K_{\psi 1} &= d_{\psi 1} \times d_{\psi 2} & K_{\psi 2} &= d_{\psi 1} + d_{\psi 2} \end{aligned}$$

$$U_4 = I_{zz} \left( - \left( \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) X_2 X_4 + \ddot{\psi}_d - K_{\psi 1} \times e_5 - K_{\psi 2} \times e_6 \right) \quad (3.41)$$

### 3.2.1. Controlador de traslación por linealización por retroalimentación de estados.

El controlador de traslación  $f(X_\eta)$  se encarga de regular los movimientos ortogonales  $(X, Y, Z)$ , se deduce que se compone de un subcontrol de altitud, el cual se encarga de mantener al VANT en una posición fija sobre el eje  $Z$  y un subcontrol de posición, el cual posiciona al VANT sobre el plano  $(X, Y)$  [14], dada esta deducción, el control de altitud esta dado por el sistema de segundo orden del subsistema de traslación

$$\dot{f}(X_{\eta z}, U_1) = \begin{bmatrix} \dot{X}_7 \\ \dot{X}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_8 \\ g - \left( \frac{\cos(X_3)}{m_d} \right) U_1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

mediante el análisis por retroalimentación de estados, se obtiene

$$\begin{aligned} e_7 &= X_7 - z_d & e_8 &= X_8 - \dot{z}_d \\ K_{z1} &= d_{z1} \times d_{z2} & K_{z2} &= d_{z1} + d_{z2} \end{aligned}$$

$$U_1 = \frac{m_d}{\cos X_3} (-g + \ddot{z}_d - K_{z1} \times e_7 - K_{z2} \times e_8) \quad (3.43)$$

el control de posición mantiene el VANT sobre el punto deseado al plano  $(X, Y)$  con referencia al punto de inicio, es posible lograr un movimiento horizontal en el VANT mediante la orientación del vector de empuje hacia la dirección deseada. Esto se logra mediante la rotación del sistema de referencia móvil en el VANT, en otras palabras, mediante la rotación de los ángulos Pitch y Roll, lo cual provoca una respuesta en las posiciones  $Y_d$  o  $X_d$ . Dado este efecto, el control de posición produce las salidas  $\theta_d$  y  $\phi_d$  [14]. El vector de orientación

con respecto al sistema de referencia fijo es dado por  $R$ , la matriz de rotación, al cual se aplica aproximación de ángulo pequeño, que da como resultado:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Dada la matriz de traslación  $R$ , es posible simplificar las dinámicas del movimiento horizontal a

$$\begin{bmatrix} m_d \ddot{X} \\ m_d \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta U_1 \\ \phi U_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

donde  $-\theta = U_x$  y  $\phi = U_y$ , y da como resultado el sistema para el control de posición

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{m_d} U_x \\ \frac{U_1}{m_d} U_y \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

de las ecuaciones (3.46) y (3.4) es posible obtener los sistemas de segundo orden:

$$\dot{f}(X_{\eta_x}, U_x) = \begin{bmatrix} \dot{X}_9 \\ \dot{X}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{10} \\ \frac{U_1}{m_d} U_x \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\dot{f}(X_{\eta_y}, U_y) = \begin{bmatrix} \dot{X}_{11} \\ \dot{X}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ \frac{U_1}{m_d} U_y \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

aplicando el análisis de linealización por retroalimentación de estados a las ecuaciones (3.47) y (3.48), se obtiene

$$\begin{aligned} e_9 &= X_9 - x_d & e_{10} &= X_{10} - \dot{x}_d \\ K_{x1} &= d_{x1} \times d_{x2} & K_{x2} &= d_{x1} + d_{x2} \\ U_x &= \frac{m_d}{U_1} (\ddot{x}_d - K_{x1} \times e_9 - K_{x2} \times e_{10}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= X_{11} - y_d & e_{12} &= X_{12} - \dot{y}_d \\ K_{y1} &= d_{y1} \times d_{y2} & K_{y2} &= d_{y1} + d_{y2} \\ U_y &= \frac{m_d}{U_1} (\ddot{y}_d - K_{y1} \times e_{11} - K_{y2} \times e_{12}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.2.2. Simulación por linealización por retroalimentación de estados.

Para la simulación del desempeño de los controladores diseñados mediante retroalimentación de estados se hizo uso del software Matlab Simulink R2018a, con una computadora con las siguientes características

1. Procesador AMD Ryzen 5 3500U.
2. RAM 32.0 GB.
3. Sistema operativo 64 bits.
4. Procesador x64.

Los valores de las ganancias del controlador están dados por

1.  $d_{\phi 1} = 10$
2.  $d_{\phi 2} = 10$
3.  $d_{\theta 1} = 10$
4.  $d_{\theta 2} = 10$
5.  $d_{\psi 1} = 100$
6.  $d_{\psi 2} = 100$
7.  $d_{z1} = 200$
8.  $d_{z2} = 200$
9.  $d_{x1} = 10$
10.  $d_{x2} = 10$
11.  $d_{y1} = 10$
12.  $d_{y2} = 10$

el diagrama de bloques del controlador en simulink se representa en la figura 3.3, donde se observa el modelo en cascada propuesto en la Figura 3.2, cada uno de los elementos corresponde de izquierda a derecha al algoritmo de control de traslación, algoritmo de control de orientación, planta de orientación y la planta de traslación con sus correspondientes

retroalimentaciones, cabe mencionar que esta representación corresponde a la de un elemento de VANT.

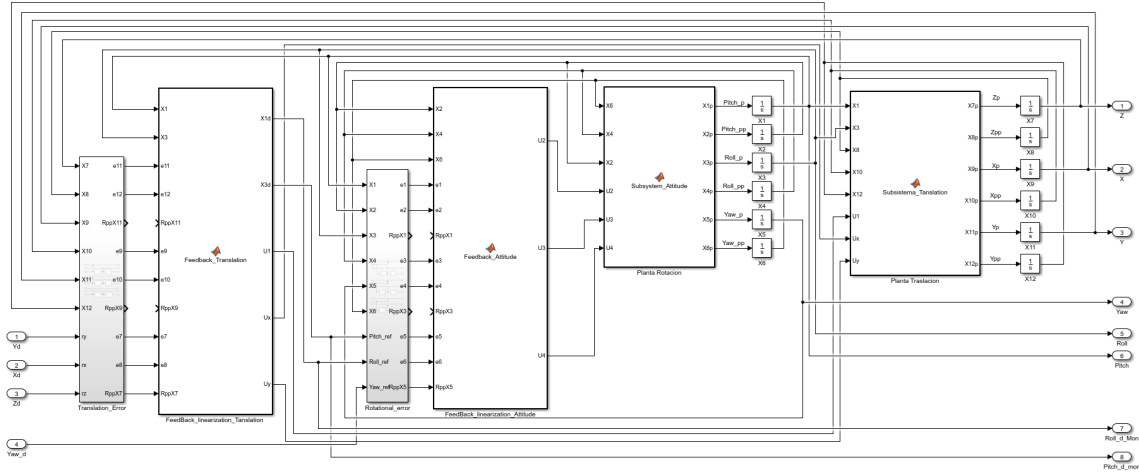


Figura 3.3 Diagrama de bloques Simulink de linealización por retroalimentación de estados [45].

Se siguió una trayectoria circular en  $(X, Y, Z)$ , con un rango de tiempo 25 segundos, descrita por

$$\begin{aligned}
 X_d &= r \cos(\omega * Tm) \\
 Y_d &= r \sin(\omega * Tm) \\
 Z_d &= Z_1 - r \cos(\omega * Tm) \\
 \omega &= \frac{2 * \pi}{Ts}
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

donde

$r$  = Radio de la trayectoria

$Tm$  = Tiempo de muestreo

$Ts$  = Tiempo para completar la trayectoria

$Z_1$  = Distancia en el eje Z al centro de la circunferencia

El VANT simulado está basado en la información de un equipo crazyfly [12] el cual mide 92 milímetros en su diagonal y tiene un peso de 28 gramos.

Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 3.4, se puede deducir del comportamiento de simulación observado que el controlador es capaz de seguir la trayectoria propuesta.

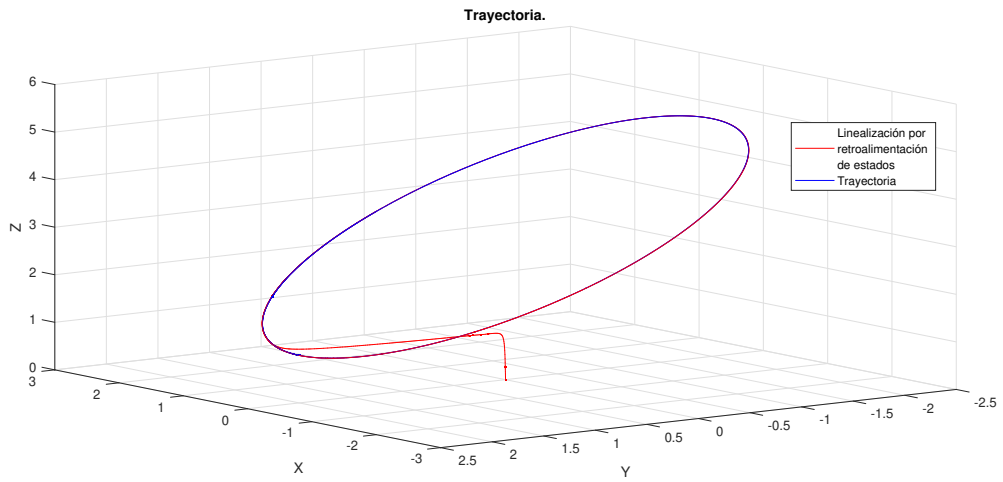


Figura 3.4 Trayectoria [45].

Las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 muestran los comportamientos del algoritmo de control de traslación (sistema cardinal  $[X, Y, Z]$ ), se observa que el controlador es capaz de seguir la trayectoria deseada sin complicaciones.

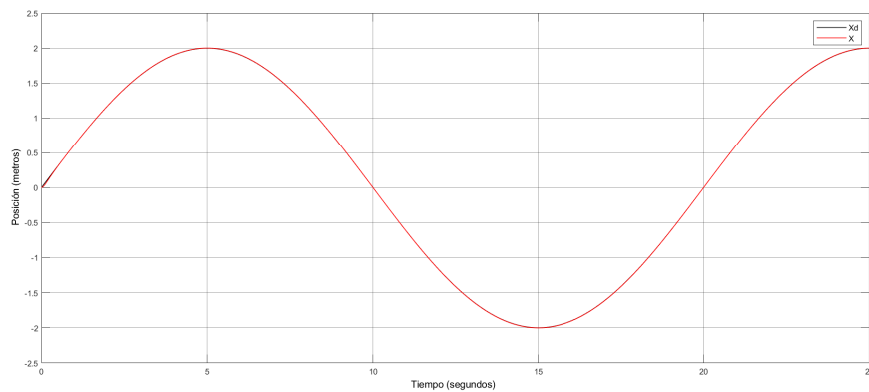


Figura 3.5 Comportamiento eje X [45].

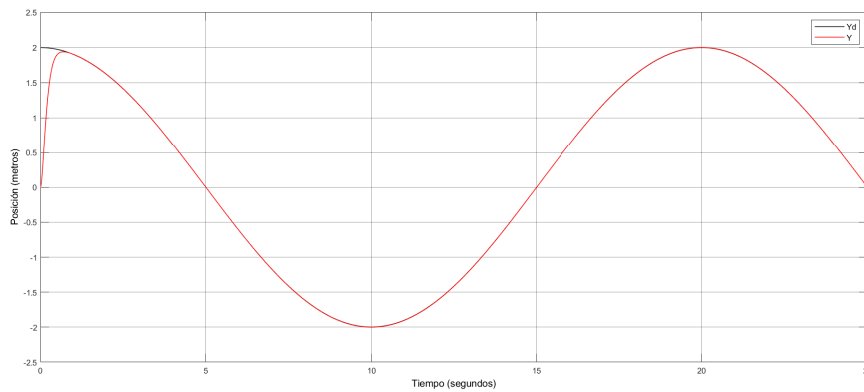


Figura 3.6 Comportamiento eje Y[45].

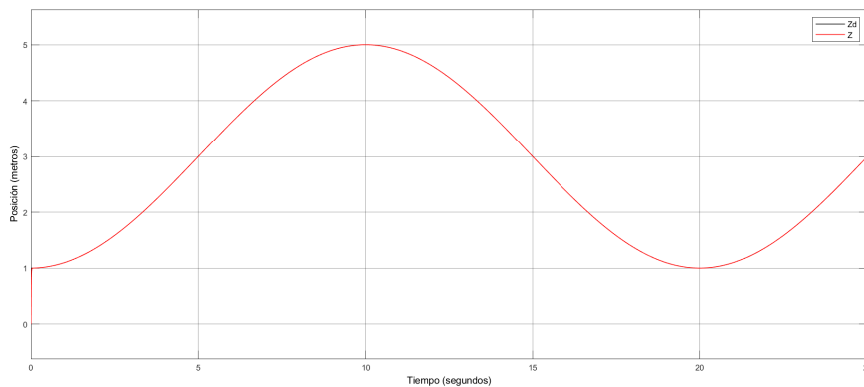


Figura 3.7 Comportamiento eje Z [45].

Por otro lado, las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10 muestran los comportamientos del algoritmo de control de orientación ( $\psi, \phi, \theta$ ), se observa que el controlador presenta perturbaciones con respecto al error, sin embargo, es capaz de corregirse.

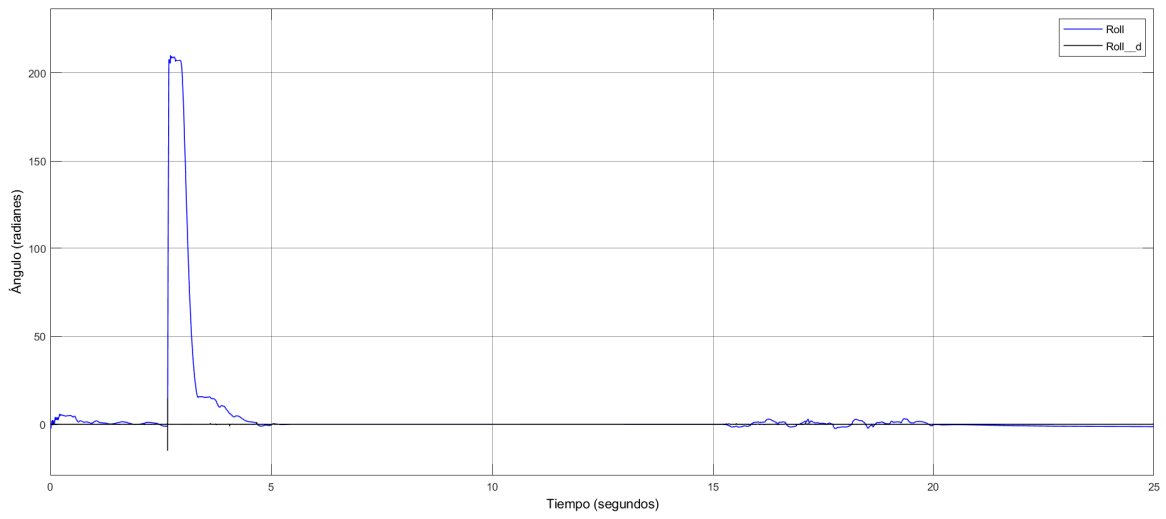


Figura 3.8 Comportamiento Roll [45].

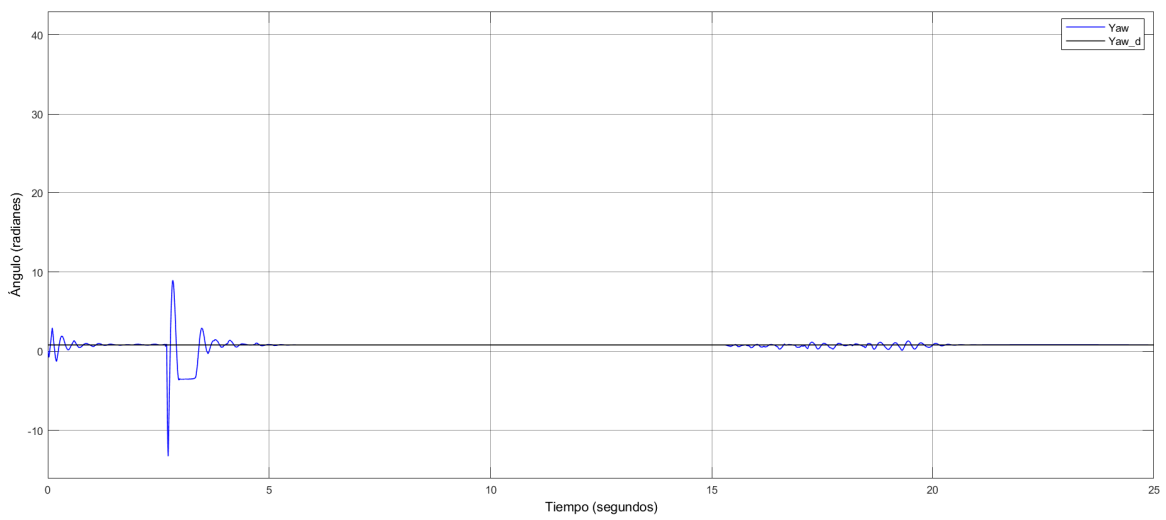


Figura 3.9 Comportamiento Yaw [45].

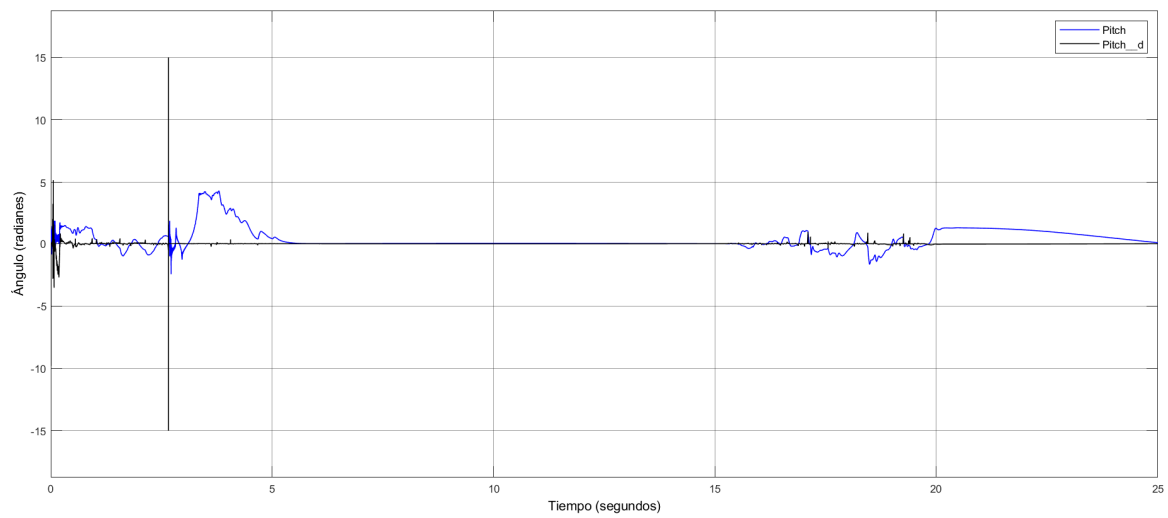


Figura 3.10 Comportamiento Pitch [45].

### 3.3. Controlador mediante BackStepping.

Dados los resultados del control mediante linealización por retroalimentación de estados, como segundo controlador esta tesis propone control mediante backstepping [29]. Con la finalidad de mejorar el procesamiento de las señales, se procede a iniciar mediante el lazo de control de rotación  $f(X_\xi)$  que describen el comportamiento del ángulo  $\phi$ , ecuación (3.12).

Para llevar a cabo el análisis mediante backstepping es necesario que el sistema de ecuaciones tome la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= U\end{aligned}\quad (3.52)$$

dado que la ecuación (3.12) no cumple esta característica, como primer paso, es necesario llevar a cabo un cambio de variables que nos permita transformar el sistema de ecuaciones a la forma deseada.

Se propone el siguiente sistema de ecuaciones para realizar el cambio de variables.

$$\begin{aligned}Z_1 &= X_{1d} - X_1 \\ \dot{Z}_1 &= \dot{X}_{1d} - \dot{X}_1 = \dot{X}_{1d} - X_2\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\xi &= Z_1 \\ g(\eta) &= 1 \\ f(\eta) &= \dot{X}_{1d} \\ \phi_{(z_1)} &= X_2\end{aligned}$$

para el segundo cambio de variables se propone

$$\begin{aligned}f_a(\eta, \xi) &= \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right) X_4 X_6 + \left(\frac{J_r}{I_{xx}}\right) \omega_r X_4 \\ g_a(\eta, \xi) &= \frac{l}{I_{xx}} \\ U_2 &= \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} (U_{2a} - f_a(\eta, \xi)) \\ U_2 &= \frac{I_{xx}}{l} \left( U_{2a} - \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right) X_4 X_6 - \left(\frac{J_r}{I_{xx}}\right) \omega_r X_4 \right) \\ \dot{X}_2 &= U_{2a}\end{aligned}\quad (3.53)$$

de esta manera el sistema de ecuaciones de las ecuaciones (3.12) toma la forma de las ecuaciones (3.52), y es posible realizar el análisis mediante backstepping.

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= \dot{X}_{1d} - X_2 \\ \dot{X}_2 &= U_{2a}\end{aligned}\tag{3.54}$$

Se propone la función candidata de Lyapunov en la forma

$$V_1 = \frac{1}{2}Z_1^2\tag{3.55}$$

se deriva (3.55) para obtener

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= Z_1\dot{Z}_1 \\ \dot{V}_1 &= Z_1(\dot{X}_{1d} - \phi_{(z_1)})\end{aligned}\tag{3.56}$$

con la final que la ecuación (3.56) sea definido positivo se propone

$$\phi_{(z_1)} = \alpha_1 Z_1 + \dot{X}_{1d}\tag{3.57}$$

se sustituye (3.57) en (3.56)

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= Z_1(\dot{X}_{1d} - \alpha_1 Z_1 - \dot{X}_{1d}) \\ &= Z_1(-\alpha_1 Z_1) \\ \dot{V}_1 &= -\alpha_1 Z_1^2 < 0 \forall Z_1 \neq 0\end{aligned}\tag{3.58}$$

se realiza nuevamente un cambio de variables, en la forma de

$$Z_2 = X_2 - \phi_{(z_1)}\tag{3.59}$$

$$Z_2 = X_2 - \alpha_1 Z_1 - \dot{X}_{1d}\tag{3.59}$$

$$X_2 = Z_2 + \alpha_1 Z_1 + \dot{X}_{1d}\tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_2 &= \dot{X}_2 - \alpha_1 \dot{Z}_1 - \ddot{X}_{1d} \\
&= U_{2a} - \alpha_1 (\dot{X}_{1d} - X_2) - \ddot{X}_{1d} \\
&= U_{2a} - \alpha_1 (\dot{X}_{1d} - Z_2 - \alpha_1 Z_1 - \dot{X}_{1d}) - \ddot{X}_{1d} \\
\dot{Z}_2 &= U_{2a} + \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) - \ddot{X}_{1d}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

se propone la función candidata de Lyapunov

$$V_c = V_1 + \frac{1}{2} Z_2^2 \tag{3.62}$$

se deriva (3.62) para obtener

$$\begin{aligned}
\dot{V}_c &= \dot{V}_1 + Z_2 \dot{Z}_2 \\
\dot{V}_c &= \dot{V}_1 + Z_2 (U_{2a} + \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) - \ddot{X}_{1d})
\end{aligned} \tag{3.63}$$

con la finalidad que la ecuación (3.63) sea definido positivo se propone

$$\phi_{(z_1, z_2)} = U_{2a} = -\alpha_2 Z_2 + \ddot{X}_{1d} - \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) \tag{3.64}$$

y es sustituida en la ecuación (3.63)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_c &= \dot{V}_1 + Z_2 (-\alpha_2 Z_2 + \ddot{X}_{1d} - \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) + \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) - \ddot{X}_{1d}) \\
&= \dot{V}_1 + Z_2 (-\alpha_2 Z_2) \\
\dot{V}_c &= -\alpha_1 Z_1^2 - \alpha_2 Z_2^2 < 0 \forall Z_1, Z_2 \neq 0
\end{aligned} \tag{3.65}$$

se sustituye la ecuación (3.64) en la ecuación (3.53), para obtener la ley de control mediante backstepping

$$U_2 = \frac{I_{xx}}{I} \left( Z_1 - \alpha_2 Z_2 + \ddot{X}_{1d} - \alpha_1 (Z_2 + \alpha_1 Z_1) - \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) X_4 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{xx}} \right) \omega_r X_4 \right) \tag{3.66}$$

donde

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_{1d} - X_1 \\ Z_2 &= X_2 - \alpha_1 Z_1 - \dot{X}_{1d} \end{aligned}$$

de manera análoga se repite el procedimiento para obtener las leyes de control de las componentes del sistema, teniendo como resultado

$$U_3 = \frac{I_{yy}}{I} \left( Z_3 - \alpha_4 Z_4 + \ddot{X}_{3d} - \alpha_3 (Z_4 + \alpha_3 Z_3) - \left( \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) X_2 X_6 - \left( \frac{J_r}{I_{yy}} \right) \omega_r X_2 \right) \quad (3.67)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_3 &= X_{3d} - X_3 \\ Z_4 &= X_4 - \alpha_3 Z_3 - \dot{X}_{3d} \\ U_4 &= \frac{I_{zz}}{I} \left( Z_5 - \alpha_6 Z_6 + \ddot{X}_{5d} - \alpha_5 (Z_6 + \alpha_5 Z_5) - \left( \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) X_2 X_4 \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_5 &= X_{5d} - X_5 \\ Z_6 &= X_6 - \alpha_5 Z_5 - \dot{X}_{5d} \\ U_1 &= \frac{m_d}{\cos X_3} (Z_7 - \alpha_8 Z_8 + \ddot{X}_{7d} - \alpha_7 (Z_8 + \alpha_7 Z_7) - g) \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_7 &= X_{7d} - X_7 \\ Z_8 &= X_8 - \alpha_7 Z_7 - \dot{X}_{7d} \\ U_x &= \frac{m_d}{U_1} (Z_9 - \alpha_{10} Z_{10} + \ddot{X}_{9d} - \alpha_9 (Z_{10} + \alpha_9 Z_9)) \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_9 &= X_{9d} - X_9 \\ Z_{10} &= X_{10} - \alpha_9 Z_9 - \dot{X}_{9d} \\ U_y &= \frac{m_d}{U_1} (Z_{11} - \alpha_{12} Z_{12} + \ddot{X}_{11d} - \alpha_{11} (Z_{12} + \alpha_{11} Z_{11})) \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde

$$Z_{11} = X_{11d} - X_{11}$$

$$Z_{12} = X_{12} - \alpha_{11}Z_{11} - \dot{X}_{11d}$$

### 3.3.1. Simulación BackStepping.

Para la simulación del análisis de los controladores diseñados mediante backstepping se hizo uso del software Matlab Simulink R2018a. Se hizo uso del mismo equipo de cómputo.

Los valores de las ganancias del controlador están dados por

1.  $\alpha_1 = 100$
2.  $\alpha_2 = 300$
3.  $\alpha_3 = 200$
4.  $\alpha_4 = 400$
5.  $\alpha_5 = 10$
6.  $\alpha_6 = 3$
7.  $\alpha_7 = 15$
8.  $\alpha_8 = 60$
9.  $\alpha_9 = 15$
10.  $\alpha_{10} = 3$
11.  $\alpha_{11} = 15$
12.  $\alpha_{12} = 3$

El diagrama de bloques del controlador en simulink se representa en la Figura 3.11, donde se observa el modelo en cascada propuesto en la Figura 3.2, cada uno de los elementos corresponde de izquierda a derecha al algoritmo de control de traslación, algoritmo de control de orientación, planta de orientación y la planta de traslación con sus correspondientes retroalimentaciones, cabe mencionar que esta representación corresponde a la de un elemento de VANT.

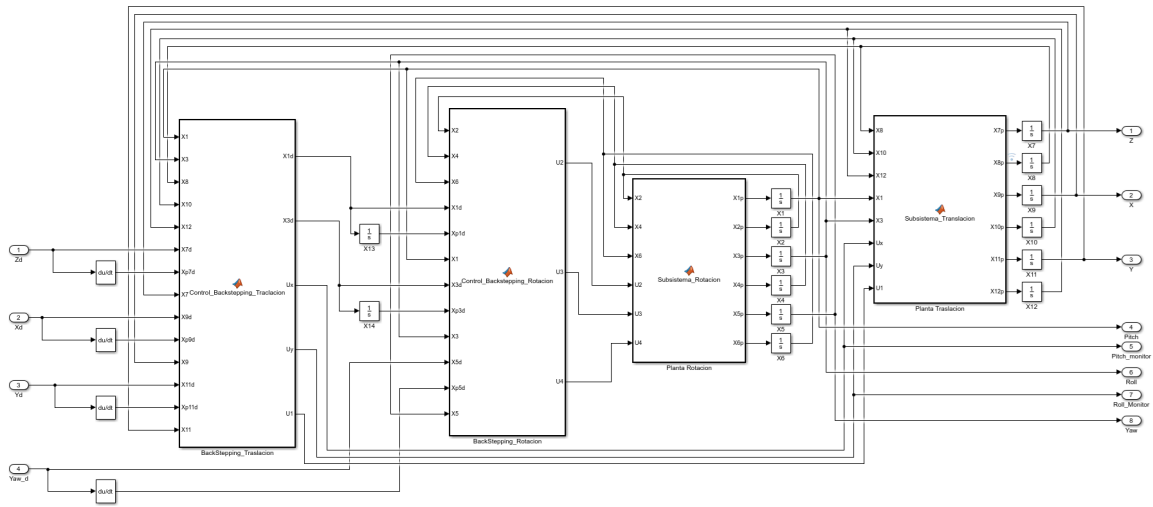


Figura 3.11 Diagrama de bloques Simulink por backstepping [45].

con la finalidad de comparar el ejercicio planteado anteriormente se siguió una trayectoria igual con el mismo tiempo de muestreo

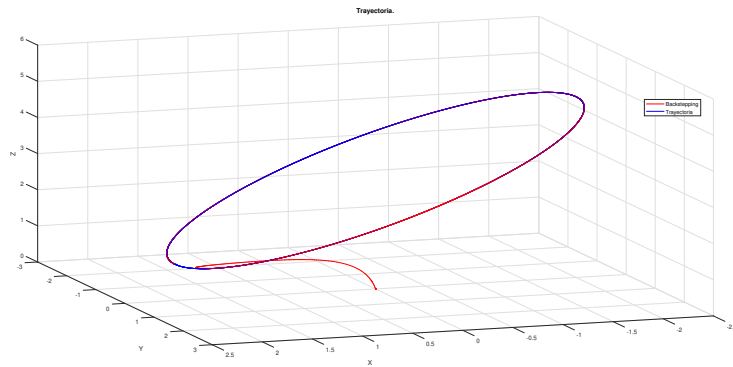


Figura 3.12 Simulación Trayectoria Backstepping [45].

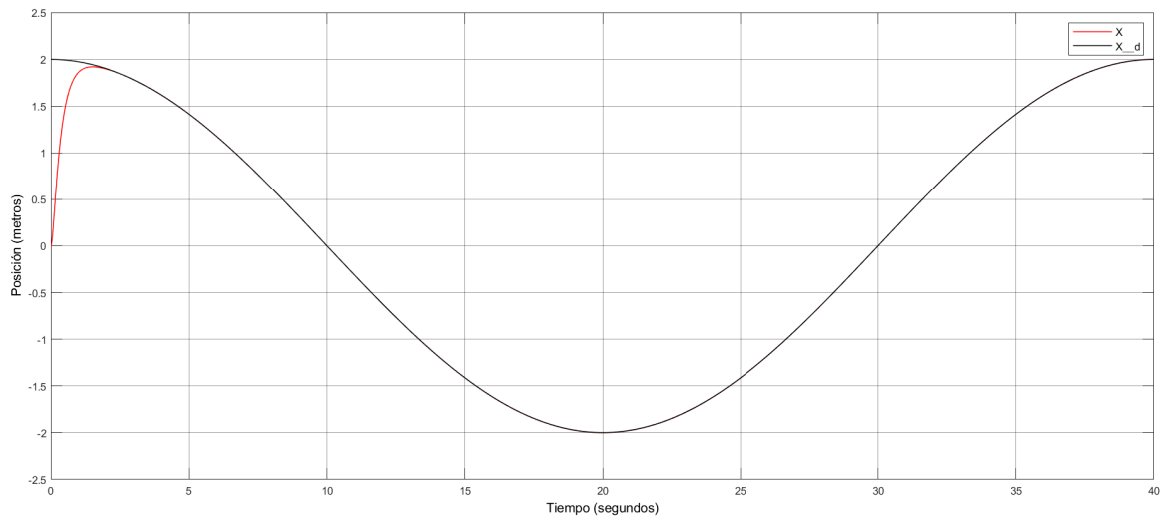


Figura 3.13 Comportamiento eje X [45].

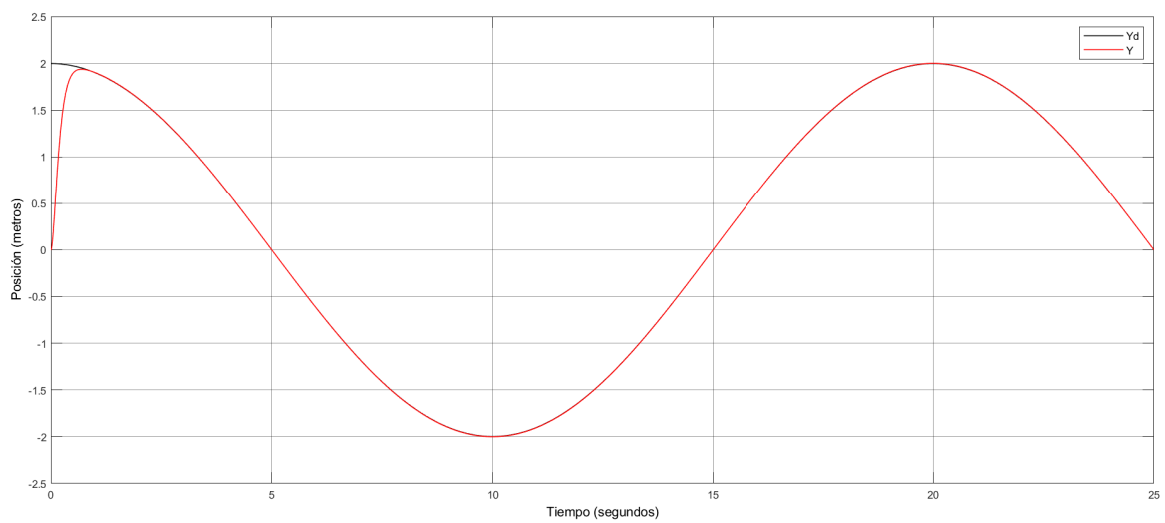


Figura 3.14 Comportamiento eje Y [45].

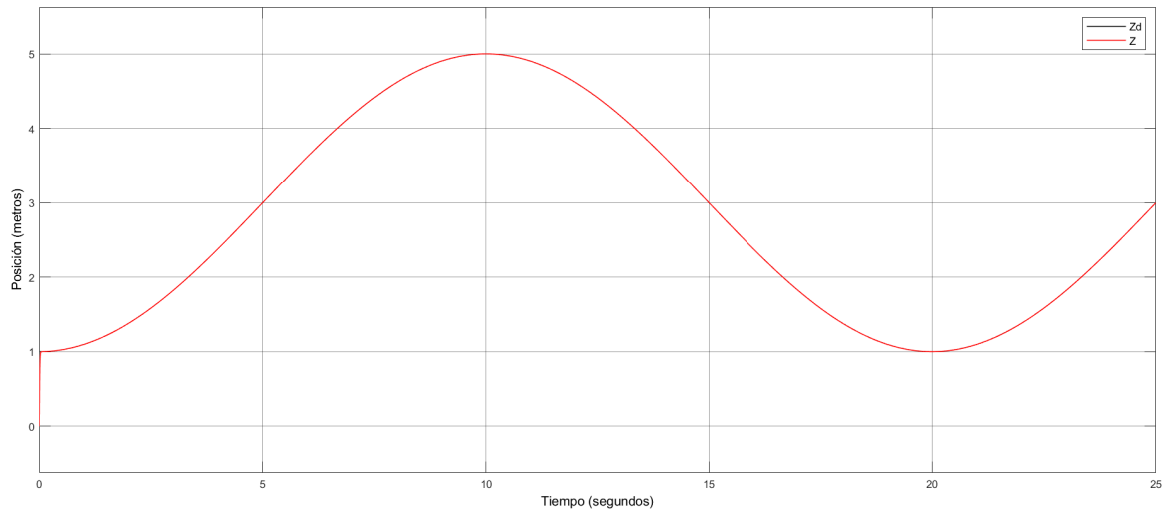


Figura 3.15 Comportamiento eje Z [45].

Las figuras 3.13, 3.14 y 3.15 muestran los comportamientos del algoritmo de control de traslación (sistema cardinal  $[X, Y, Z]$ ), es posible observar un comportamiento muy similar al ejercicio de simulación mediante retroalimentación de estados.

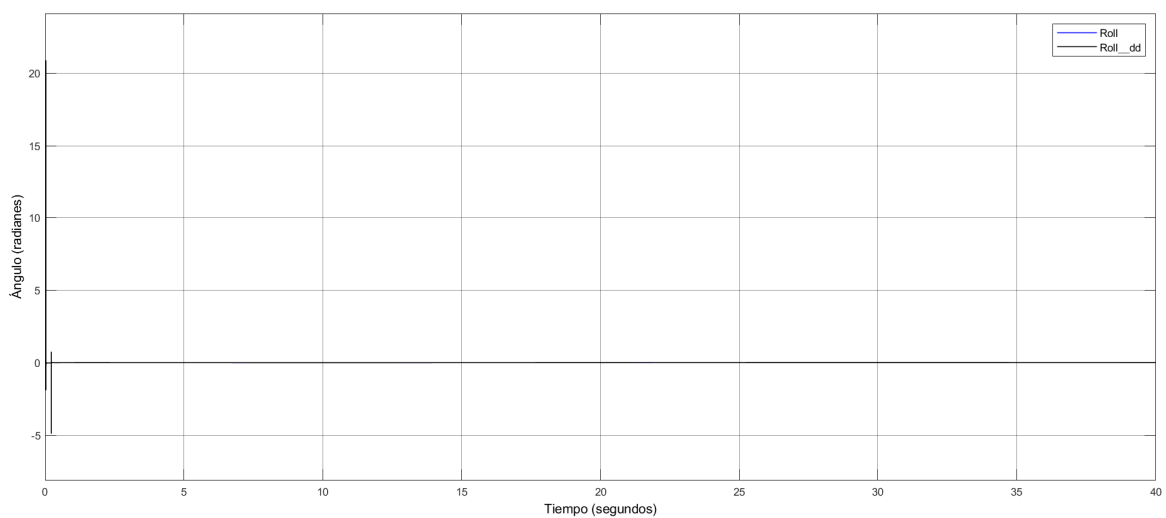


Figura 3.16 Comportamiento Roll [45].

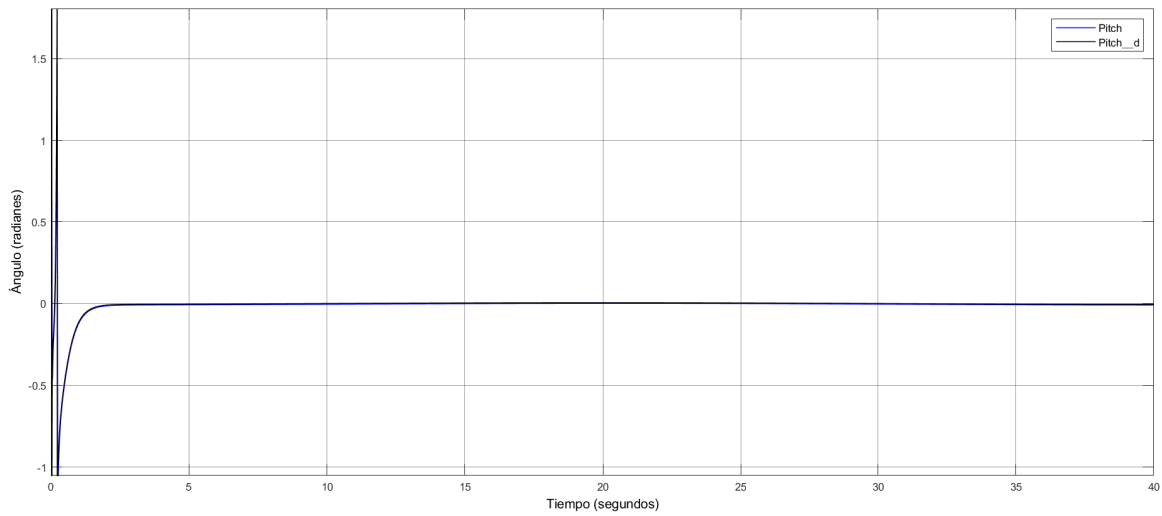


Figura 3.17 Comportamiento Pitch [45].

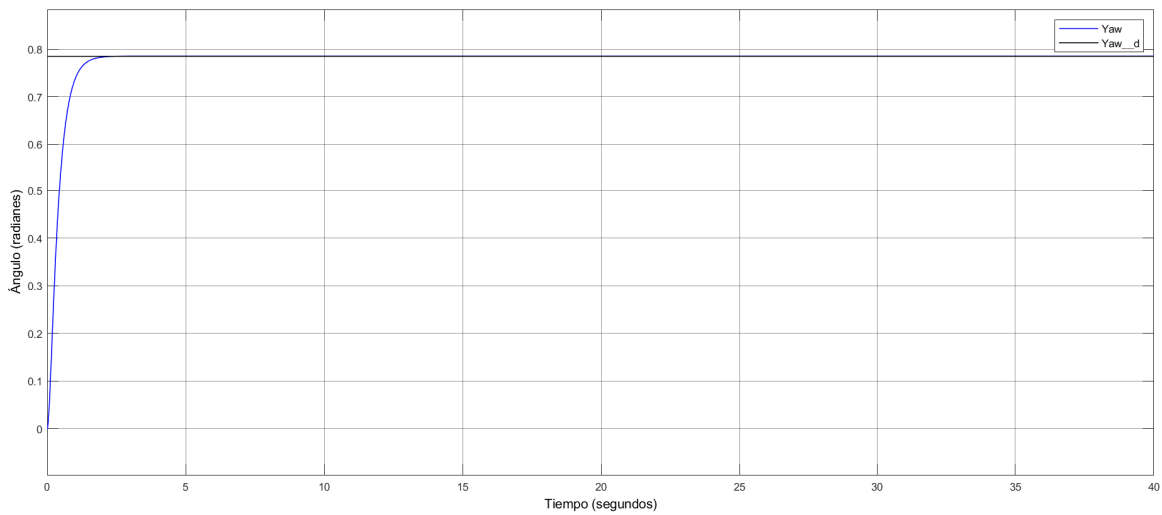


Figura 3.18 Comportamiento Yaw [45].

Se observa en las Figuras 3.16, 3.17 y 3.18 que los controladores por backstepping presenta un mejor desempeño y son capaz de dar un mejor seguimiento a la trayectoria propuesta, con base en los resultados observados en simulación es posible concluir que los controladores por medio de backstepping son más robustos por lo tanto serán los que se presentarán para el análisis de arribo simultáneo que se planteará en el siguiente capítulo.

## Capítulo 4

### Algoritmo para arribo simultáneo.

Este capítulo aborda el desarrollo del algoritmo para la emergencia de cita para arribo simultáneo, existen diferentes definiciones de este problema en la literatura, para este trabajo de tesis, se considera como la tarea en la que un grupo de VANT's deben de arribar simultáneamente a un lugar específico, conocido, o, negociado previamente al mismo tiempo [46, 31].

El algoritmo desarrollado para la emergencia de este comportamiento considera que los elementos son representados por VANTs.

A continuación, se describe el algoritmo de control propuesto para la emergencia de cita para arribo simultáneo, así mismo se considera una simulación del comportamiento a un punto de encuentro de dos VANT, que fue evaluado por medio de la simulación en el software Matlab con la finalidad de observar el comportamiento y desempeño del algoritmo. cada uno de los elementos VANT que integran la simulación cuenta con un controlador por backstepping descrito en el capítulo anterior.

## 4.1. Comportamiento de Cita.

El problema de cita es abordado de distintas maneras en la literatura, este trabajo de tesis lo considera como la tarea de un grupo de vehículos que debe arribar simultáneamente a un lugar en específico previamente negociado por el conjunto, pudiendo ser el punto de cita una coordenada en común o no (Figura 4.1) [30, 31, 47].

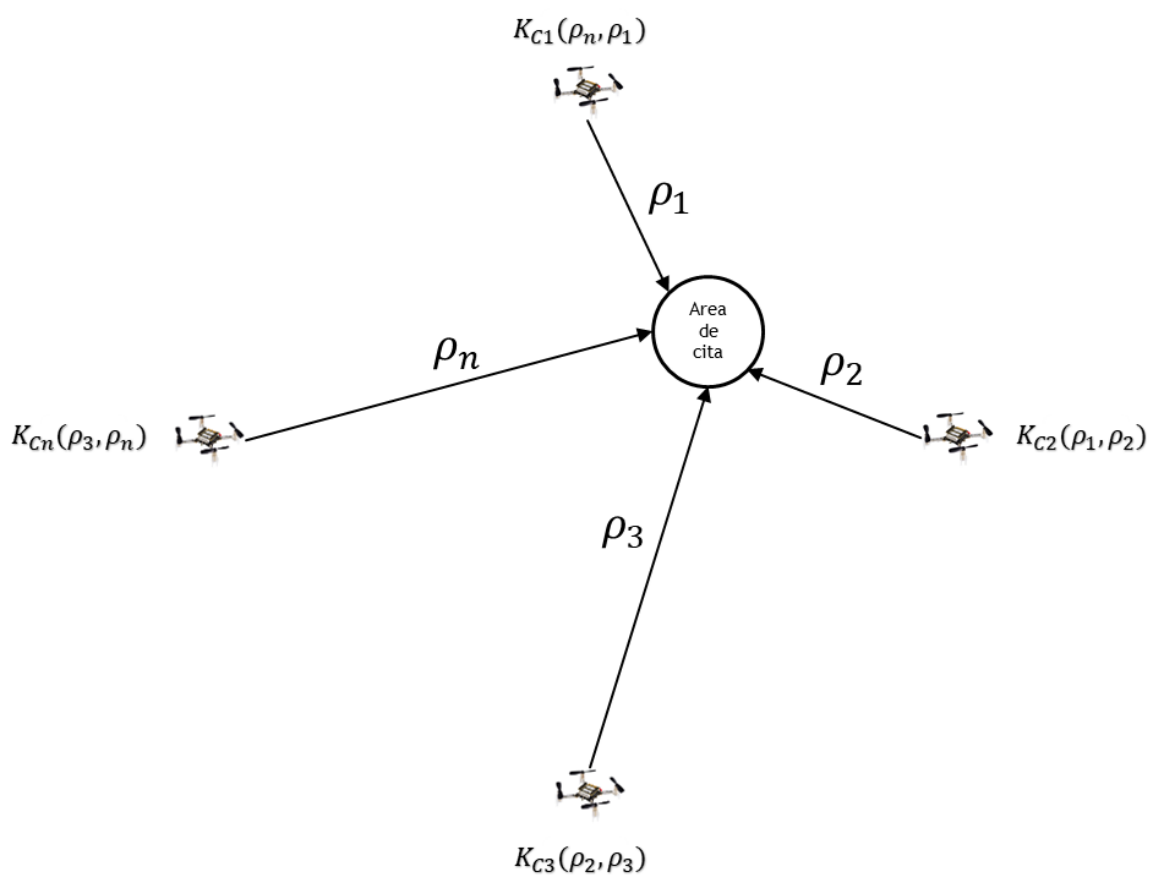


Figura 4.1 Arribo simultáneo de un enjambre robótico [45].

Si  $t_{si}$  representa el tiempo de asentamiento del  $i$ -ésimo VANT, la cita en un enjambre de  $n$  robots es posible si [36] :

$$\begin{aligned}
 & t_{si} = t_{cita} \\
 & \text{si} \\
 & (x_{di}, y_{di}) = (x_{cita}, y_{cita}) \\
 & \text{con} \\
 & i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para el desarrollo del algoritmo propuesto en este trabajo de tesis, la estrategia para lograr el comportamiento de arribo simultáneo en un enjambre robótico se logra a través de amplificar y atenuar las entradas de control  $v$  del controlador de regulación (ecuación 2.108), de tal manera que esta ganancia sea variable según la distancia  $\rho$  al punto de cita del VANT (Figura 4.2) , acotada por  $\rho_{max}$ .

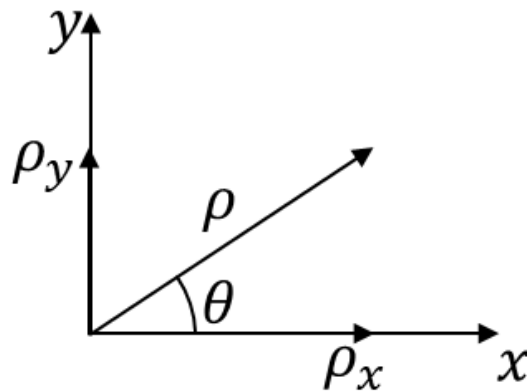


Figura 4.2 Distancia  $\rho$  al punto de cita [45].

Con la finalidad de lograr que este concepto sea entendido, se ilustra el caso donde un enjambre compuesto por dos VANT,  $i$  y  $j$  (Figura 4.3) , tienen como objetivo el arribo simultáneo al punto de cita, donde las ganancias  $K_{cita}$  correspondiente a los VANTs  $i$  y  $j$  se obtiene mediante

$$\begin{aligned}
 K_{cita_i} &= 1 + \left( \frac{\rho_i - \rho_j}{\max(\rho_i, \rho_j)} \right) \\
 K_{cita_j} &= 1 + \left( \frac{\rho_j - \rho_i}{\max(\rho_i, \rho_j)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

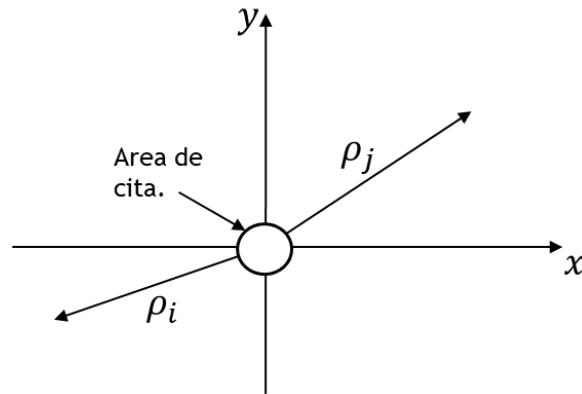


Figura 4.3 Arribo de dos elementos al punto de cita [45].

donde  $\rho_i$  y  $\rho_j$  corresponden a la distancia de los VANT  $i$  y  $j$  al punto de cita. De tal forma que, el controlador (2.108) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_i &= K_{cita_i} \rho_i \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} \\ v_j &= K_{cita_j} \rho_j \begin{bmatrix} -\sin \theta_j \\ \cos \theta_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En el conjunto de ecuaciones (2.108) se observa que la ganancia  $K_{cita_n} \in [0, \rho_{max}]$ , y tiene el siguiente comportamiento:

1. si  $\rho_i > \rho_j$ .
2. la ganancia  $K_{cita_i}$  tiene un comportamiento definido por  $1 < K_{cita_i} \leq 2$ , amplificando la velocidad  $v_i$ .
3. la ganancia  $K_{cita_j}$  tiene un comportamiento definido por  $0 < K_{cita_j} < 1$ , atenuando la velocidad  $v_j$ .

para el caso donde  $\rho_i = \rho_j$ , las ganancias de ambos VANT están dadas por  $K_{cita_i} = K_{cita_j} = 1$ . Considerando el caso más extremo, donde  $\rho_i = \rho_{max}$  y  $\rho_j = 0$ , se tienen las ganancias  $K_{cita_i} = 1$  y  $K_{cita_j} = 0$ .

En el trabajo propuesto en [19] se hace la siguiente observación: "Para aplicaciones prácticas, la definición de reunión en un punto deseado pierde sentido, de tal manera, en su lugar, se considera una zona de cita circular, centrada en el punto de cita y con radio  $r_{cita} > 0$  donde los robots que se encuentren a una distancia menor a  $r_{cita}$  con respecto al punto de cita, se consideran dentro de la zona de cita y por tanto, han alcanzado la posición deseada". Esta observación es considerada para el desarrollo del algoritmo propuesto en esta tesis.

### 4.1.1. Simulación de arribo simultáneo para dos elementos VANT.

Para el análisis del comportamiento de arribo simultáneo de dos elementos VANT se realizó una simulación en el software Matlab Simulink R2018a, donde se proponen dos elementos VANT con los controladores backstepping descritos en la sección 3.3 del Capítulo 3, la computadora en la que se realizó la simulación corresponde a la descrita en la sección 3.2.2 del Capítulo 3.

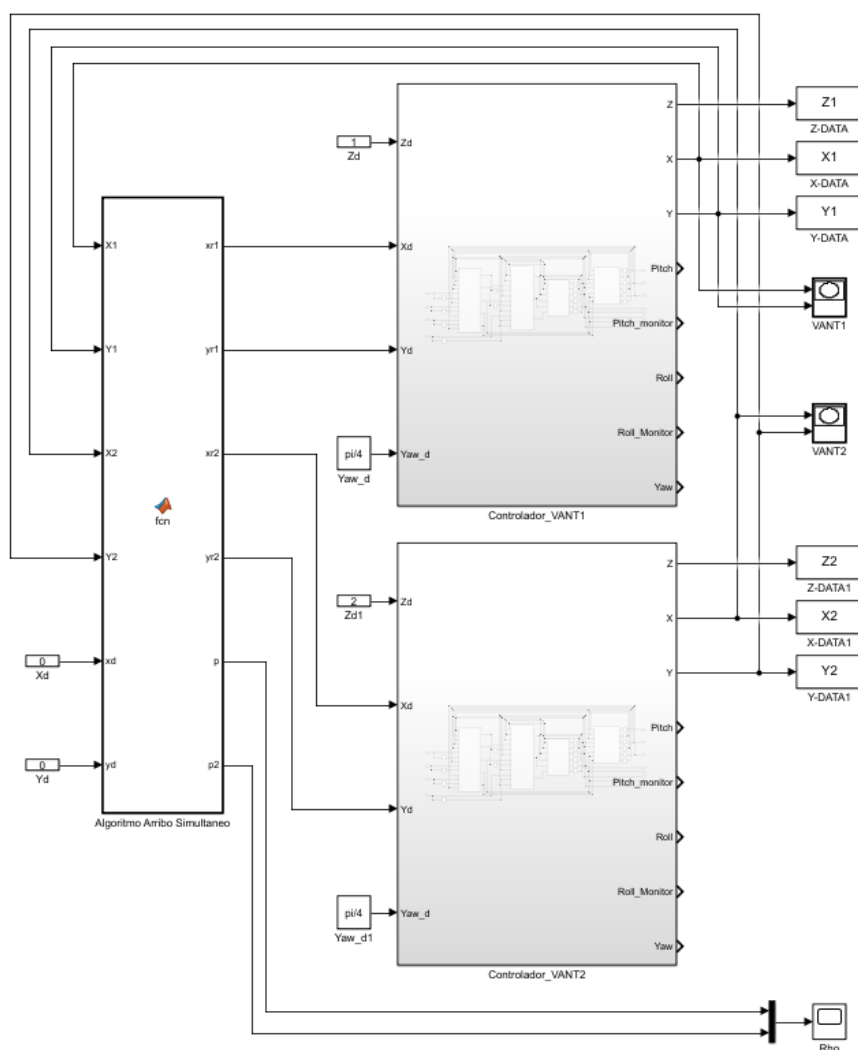


Figura 4.4 Diagrama de bloques de simulación de arribo simultáneo en Simulink [45].

La Figura 4.4 muestra el diagrama de bloques propuesto para la simulación de dos elementos VANT, el bloque a la izquierda contiene las ecuaciones propuestas en la sección anterior para la regulación de las ganancias  $K_{cita_n}$ , mientras que cada uno de los bloques a la derecha corresponden a el controlador del VANT1 y VANT2, las condiciones iniciales de

los VANT para esta simulación se encuentran en VANT1 (25, -15, 1) y VANT2 (10, 15, 1), mientras el área de cita es definida por cita (0, 0, 1)

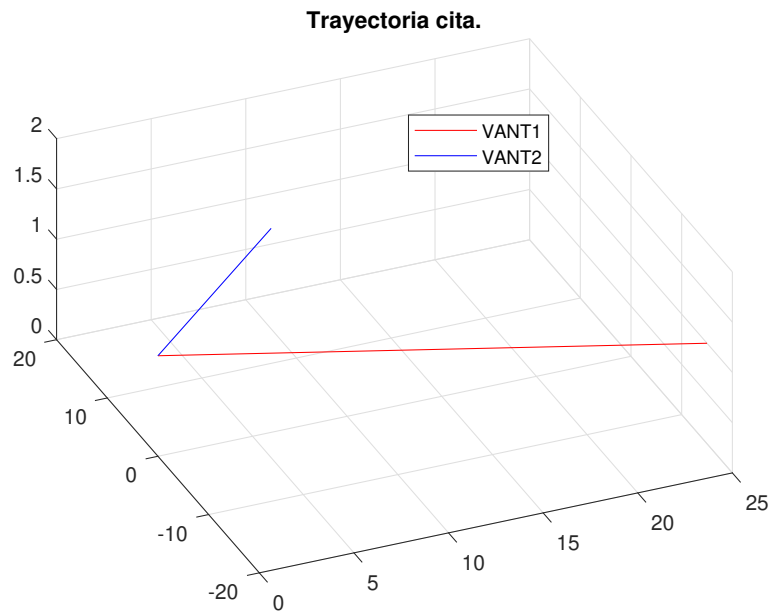


Figura 4.5 Trayectoria simulada [45].

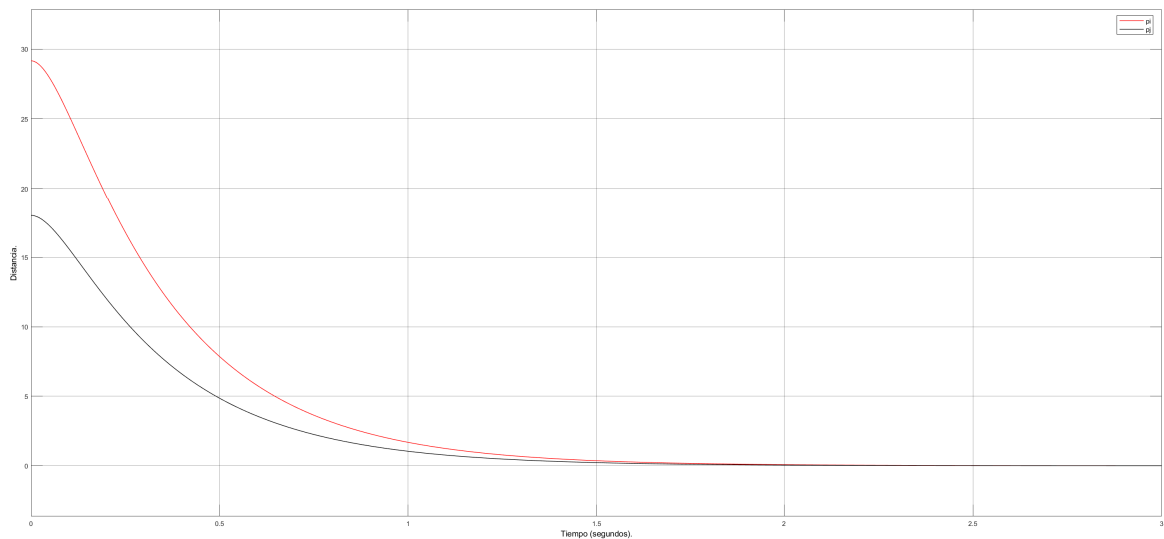


Figura 4.6 Comportamiento de las distancias  $\rho_i$  y  $\rho_j$  en simulación [45].

En la Figura 4.6 se observa el comportamiento de las distancias  $\rho_i$  y  $\rho_j$ , es posible concluir que la amplificación y atenuación es la deseada en función de las velocidades los VANT en simulación por lo que es apropiado para el problema de arribo simultáneo abordado.

## 4.2. Implementación de algoritmo de arribo simultáneo.

Para la implementación del algoritmo de arribo simultáneo se hizo uso de la plataforma de trabajo *Crazyswarm* [42], desarrollada por *bitcraze* [12] para trabajar en enjambres compuestos por VANTs *Crazyflie* (Figura 1.5), en los cuales se basó la investigación de esta tesis para la simulación de los controladores de los VANT.

La plataforma *Crazyswarm* es un desarrollo para uso de investigación de enjambres robóticos de VANTs basado en ROS (por sus siglas en inglés, *Robot Operating System*) [27, 49], ROS es una estructura de trabajo de código abierto que proporciona una colección de librerías de software y herramientas para ayudar a los desarrolladores a crear aplicaciones robóticas complejas, está construido sobre una arquitectura distribuida, por lo que es posible trabajar en múltiples máquinas. Esto permite utilizar ROS tanto en proyectos a pequeña como a gran escala. Proporciona un conjunto de servicios que permiten al software comunicarse con los diferentes elementos que lo conforman, incluso si se están ejecutando en diferentes máquinas. Estos servicios incluyen el paso de mensajes, las llamadas a procedimientos remotos y los servidores de parámetros. ROS también proporciona un conjunto de herramientas y bibliotecas que pueden utilizarse para crear aplicaciones, incluidas bibliotecas para visión por ordenador, procesamiento de sensores y planificación del movimiento.

La arquitectura de ROS se basa en una colección de nodos que se comunican entre sí mediante mensajes. Un nodo es un proceso que realiza una tarea específica, como leer los datos de un sensor o controlar un motor. Los nodos pueden estar escritos en C++, Python u otros lenguajes de programación. ROS también proporciona un conjunto de herramientas para construir, ejecutar y gestionar nodos. Estas herramientas incluyen *roscpp*, que es una implementación C++ de ROS, y *rospy*, que es una implementación Python de ROS.

ROS también proporciona un conjunto de tipos de mensajes estándar que pueden utilizarse para comunicarse entre nodos. Estos tipos de mensajes incluyen datos de sensores, comandos de control y mensajes de estado. ROS también incluye un servidor de parámetros, que es un almacén de clave-valor compartido que puede utilizarse para almacenar datos de configuración de los nodos.

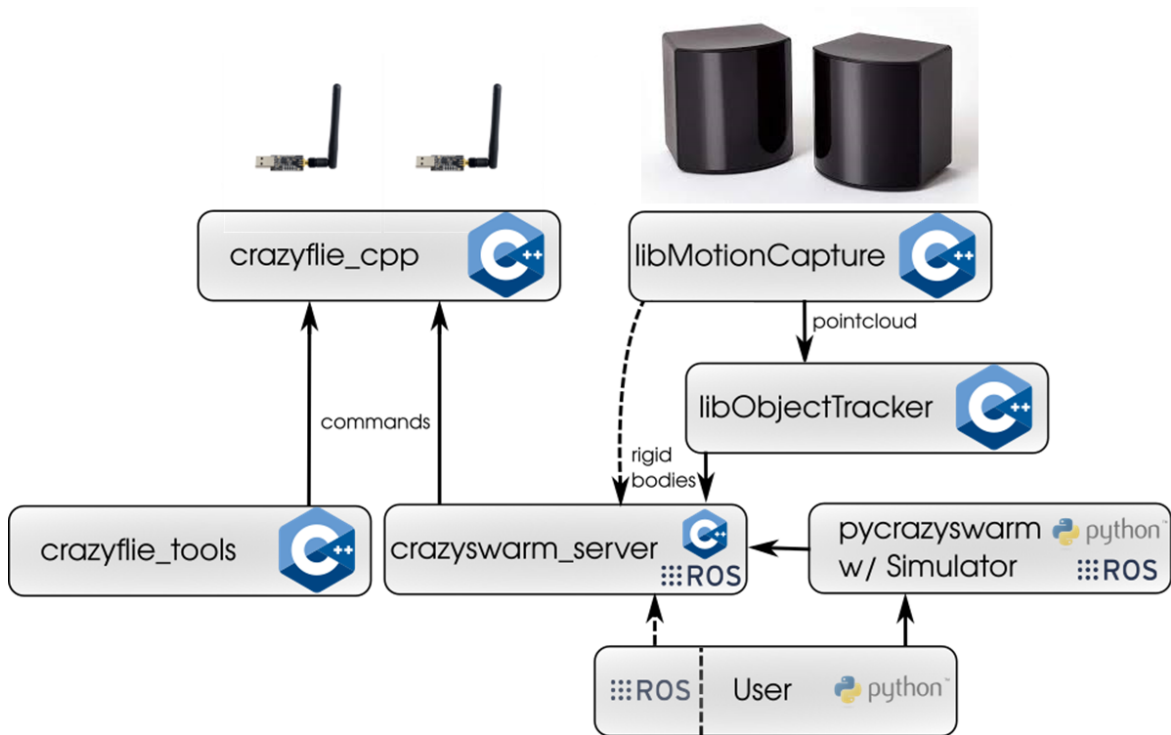


Figura 4.7 Arquitectura *CrazySwarm* [42].

La Figura 4.7 muestra la arquitectura de la plataforma *CrazySwarm* la cual proporciona una serie de funciones ya definidas en una capa del lenguaje de programación Python para el usuario, en el caso de este trabajo de tesis, se hace uso de la función `cmdVelocityWorld(vel, yawRate)` [58] donde el parámetro `vel` es el vector de velocidad en  $\frac{m}{s}$  y el parámetro `yawRate`, la velocidad angular de Yaw en  $\frac{grados}{s}$ .

Con el propósito de lograr la emergencia de arribo simultáneo en un enjambre compuesto por  $n$  VANTs se emplea la misma ganancia  $K_{cita_n}$  dada en la ecuación (4.2), con el fin de lograr el emparejamiento se propone una estrategia de topología de anillo entre los elementos del enjambre donde la ganancia  $K_{cita_1}$  está dada por las distancias  $\rho_1$  y  $\rho_n$ , la ganancia  $K_{cita_2}$  por las distancias  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , la ganancia  $K_{cita_3}$  por las distancias  $\rho_2$  y  $\rho_3$  y finalmente la ganancia  $K_{cita_n}$  por las distancias  $\rho_3$  y  $\rho_n$  (Figura 4.1), cada VANT se comporta según el algoritmo mostrado en la Figura 4.8

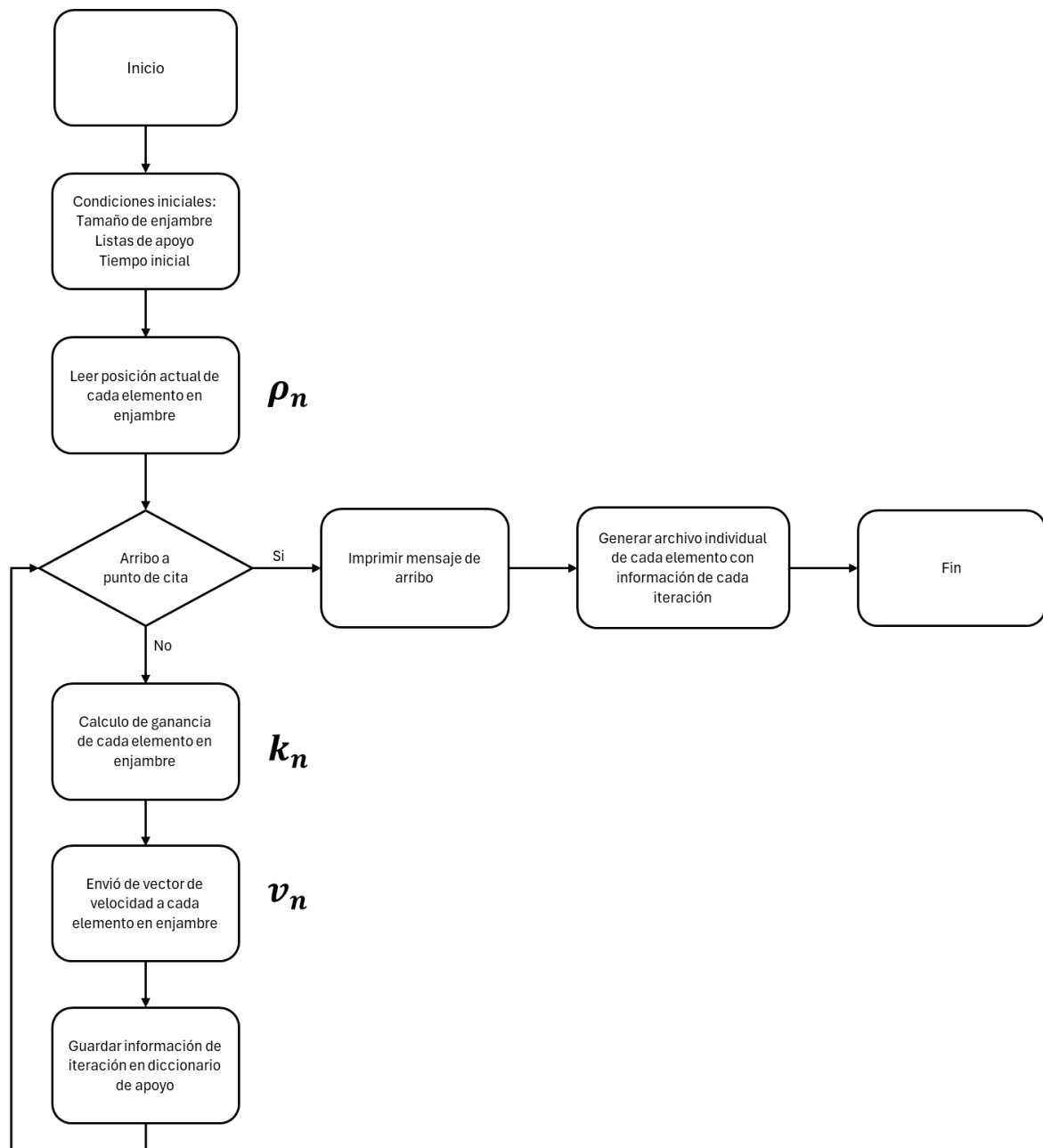


Figura 4.8 Algoritmo de arribo simultáneo para  $n$  VANTs [45].

Para el funcionamiento del algoritmo en la Figura 4.8 se creó una función en Python la cual fue denominada "arrival(timeHelper, cfs, desiredPos, sleepRate)" donde

- "timeHelper": Corresponde al reloj interno del procesador el cual indica el tiempo al cual se realiza el ciclo completo para arribo simultáneo.

- *"cfs"*: Corresponde a la estructura de VANTs del enjambre dada por *Crazyswarm*, la cual contiene la información de cada uno de los elementos, donde, para el desarrollo de este algoritmo, es de interés el nodo y posición actual de cada elemento.
- *"desiredPos"*: Corresponde al vector de posición deseado para arribo simultáneo de cada elemento del enjambre.
- *"sleepRate"*: Corresponde a la frecuencia de muestreo en Hz.

el algoritmo en Python es detallado a continuación:

```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
import codecs, json

from pycrazyswarm import *

def arrival(timeHelper, cfs, desiredPos, sleepRate):
    startTime = timeHelper.time()
    # tamaño de enjambre
    uavsParty = len(cfs)
    # Inicializacion de vectores
    rhoVector = []
    angleVector = []
    startPos = []
    ids = []
    directionVector = []
    emptyvector = []
    elapsedTime = []
    # inicializacion de Matrices
    dataRho = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    dataPosition = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    dataVelocity = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    dataKc = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    dataAngle = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    dataRotation = [emptyvector*0 for _ in range(uavsParty)]
    # condicional de arribo
```

```
rendezvous = False

# Condiciones iniciales
for cf in cfs:
    pos = cf.position()
    startPos.append(pos)
    ids.append(cf.id)

while True:
    # Tiempo transcurrido
    time = timeHelper.time() - startTime
    phi = cf.getParam('imu_sensors')
    print(phi)

    for i in range(uavsParty):
        # Calculo del error
        currentPosition = cfs[i].position()
        goalPosition = desiredPos[i]
        errorX = currentPosition[:2] - goalPosition[:2]

        # Funcion de velocidad en X, Y
        rho = norm(errorX)
        theta = np.arctan2(errorX[1], errorX[0])
        angle=(theta.tolist())

        rhoVector.append(rho)
        angleVector.append(angle)

    if rhoVector[0] <= .05 and rhoVector[1] <= .05:
        rendezvous = True
        rhoVector.clear()
        angleVector.clear()
        break

# prueba si el UAV llegue a la posicion de cita
```

```
if rendezvous:
    break

elapsedTime.append(time)

for i in range(uavsParty):
    if uavsParty == 1:
        kc = .1
    elif i < (uavsParty-1):
        kc = .20*(_rhoCalculation(rhoVector[i], rhoVector[i+1]))
    elif i == (uavsParty-1):
        kc = .20*(_rhoCalculation(rhoVector[i], rhoVector[0]))

    # Calculo rotacion
    velocityScalar = kc*(-rho)
    velocityVector = (velocityScalar*np.cos(angleVector[i]),
                     velocityScalar*np.sin(angleVector[i]),
                     .009)

    dataRho[i].append(rhoVector[i])
    dataPosition[i].append(currentPosition.tolist())
    dataVelocity[i].append(velocityVector)
    dataKc[i].append(kc)
    dataAngle[i].append(angleVector[i])

    # Comando de control por velocidad
    cfs[i].cmdVelocityWorld(np.array(velocityVector), yawRate=0)

rhoVector.clear()
angleVector.clear()

# Asignacion de la frecuencia de Muestreo Hz
timeHelper.sleepForRate(sleepRate)

print("position reached!")
```

```

# formateo de informacion de vuelo a un archivo json.
for i in range(uavsParty):
    uavData = {"date" : "", "uavId" : [], "initialPosition" : [],
              "data" : {"elapsedTime" : [], "rho" : [], "positionVector" : [],
                        "velocityVector" : [], "kc" : [], "angle" : [], "rotation" : [] }}

    uavData["uavId"].append(ids[i])
    uavData["initialPosition"].append(startPos[i].tolist())
    uavData["data"]["elapsedTime"] = elapsedTime
    uavData["data"]["rho"] = dataRho[i]
    uavData["data"]["positionVector"] = dataPosition[i]
    uavData["data"]["velocityVector"] = dataVelocity[i]
    uavData["data"]["kc"] = dataKc[i]
    uavData["data"]["angle"] = dataAngle[i]
    uavData["data"]["rotation"] = dataRotation[i]
    createFile(uavData, uavData["uavId"])
    uavData.clear()

def _rhoCalculation(rho1, rho2):
    rhofactor = (rho1-rho2)/(max(rho1,rho2))
    rho = 1 + rhofactor
    return rho

def createFile(data, id):
    """formatea los arreglos en numpy para guardar archivo en formato .json,
    el archivo se compone de un diccionario con la siguiente estructura
    data: {
        fecha
        uavId
        posicionInicial
        datos: {
            tiempoTranscurrido
            rho
            vectorPosicion
            vectorvelocidad
    """

```

```
        }  
    }"""  
    file = f'data/uav_data_{id}'  
    with codecs.open(file, 'w', encoding='utf-8') as f:  
        json.dump(data, f, indent = 4)
```

En conclusión, este capítulo detalla la simulación y creación del algoritmo para la emergencia de arribo simultáneo en la cual se basa este trabajo de tesis, se emplea la ley de control para regulación de velocidad. Así mismo se presenta una introducción de la plataforma donde se implementó el algoritmo y detalla el código que se utilizó para el experimento en ambiente controlado.

# Capítulo 5

## Resultados experimentales.

La implementación del algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo, fue realizado en un grupo de dos VANT tipo *Crazyflie 5.1* del desarrollador *bitcraze* [12], la limitante en cantidad fue objeto del sistema de posicionamiento *VR Steam* que fue usado en la implementación desarrollada para este trabajo de tesis, ya que la plataforma *CrazySwarm* esta optimizada par el uso de cámaras *Vicon*. El comportamiento observado con el uso del sistema *VR Steam* al agregar un tercer componente *Crazyflie* en el enjambre robótico, fue la pérdida de uno de los componentes restantes, dando como resultado la limitante a dos componentes por experimento.



Figura 5.1 VANT *Crazyflie 2.0* [12].

Las características principales de los VANT se muestran en la Tabla 5.1

Características de los VANT <i>Crazyflie</i> [45].	
Descripción	Parámetro
Distancia entre rotores	97 mm
Peso total de dispositivo	29 g
Procesador	Cortex-M4, 168MHz, 192kb SRAM, 1Mb flash
IMU	MPU-9250
Especificaciones de radio	Radio de banda ISM de 2,4 GHz de 1 Km de alcance.

Tabla 5.1 Características de los VANT *Crazyflie*.

Para adquirir la posición de los VANT *Crazyflie* con respecto al marco de referencia, se empleó un sistema formado por 2 *Steam VR Basestation 2.0* 5.2, posicionados en los extremos del área designada para el experimento el cual fue realizado en la plataforma *CrazySwarm*.



Figura 5.2 Sistema *Steam VR Basestation 2.0* [12].

Es importante destacar que el algoritmo fue realizado en Python, esto debido a que la arquitectura de *ROS* [49] permite al usuario interactuar con los nodos en el sistema mediante métodos ya desarrollados previamente en la plataforma en una capa en Python. Un método es una pieza de software para una acción específica determinada por el desarrollador, la cual permite la interacción de los elementos del nodo en cuestión con el usuario. Los métodos de interés para el desarrollo del algoritmo objeto de esta tesis fueron los siguientes [57] :

- Clase *pycrazyswarm.crazyflie.Crazyflie(id, initialPosition, tf)*: contiene la información de los elementos en el enjambre, gestionándolos de manera individual mediante la asignación de id, de esta manera es posible identificar y controlar cada elemento del enjambre de manera individual.
- Método *takeoff(targetHeight, duration, groupMask=0)*: Ejecuta un despegue y luego flotar indefinidamente.

Parámetros:

- *targetHeight*: coordenada destino en el eje Z (Flotante).
- *duration*: tiempo de arribo a destino (flotante).
- *groupMask*: máscara de grupo (entero).

- Método *land(targetHeight, duration, groupMask=0)*: Ejecuta un aterrizaje.

Parámetros:

- *targetHeight*: coordenada destino en el eje Z (Flotante).
  - *duration*: tiempo de arribo a destino (flotante).
  - *groupMask*: máscara de grupo (entero).
- Método *position()*: Regresa el vector de posición actual del nodo solicitado.
  - Método *cmdVelocityWorld(vel, yawRate)*: Envía un comando de punto de ajuste de transmisión del controlador de velocidad. En este modo, el usuario especifica el vector de velocidad y la velocidad angular en Yaw. El controlador integrado intentará alcanzar esta velocidad. El envío de un punto de ajuste de transmisión de cualquier tipo forzarán un cambio del modo de comando de alto nivel al de bajo nivel.

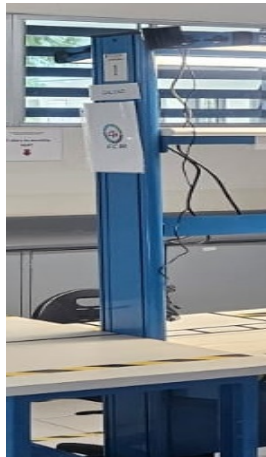
Parámetros:

- *vel*: vector de velocidad [*velX*, *velY*, *velZ*] (flotante), velocidad del  $\frac{m}{s}$ .
- *yawRate*: velocidad angular en Yaw (flotante), velocidad del  $\frac{grados}{s}$ .

La plataforma *CrazySwarm* ofrece grandes ventajas en la gestión de grupos de diversos VANTs, lo que facilita la implementación de algoritmos de comportamientos colectivos, sin embargo, ésta limitada en la información que se puede adquirir del *n*-VANT para uso del experimento, ya que los métodos proporcionados por el desarrollador solo regresan la posición absoluta del *n*-VANT respecto a su sistema de referencia, al momento de la redacción de esta tesis no existe un método el cual proporcione la información referente al subsistema de orientación [*Yaw*, *Pitch*, *Roll*], lo cual limitó el alcance de la implementación a la prueba del algoritmo de cita de emergencia de arribo simultáneo, la implementación de los controladores propuestos en el Capítulo 3 serán objeto de trabajo futuro.

## 5.1. Distribución del hardware.

El experimento fue realizado en el laboratorio de Facultad de Ciencias de la ingeniería, Administrativas y Sociales de la Universidad Autónoma de Baja California, debido a que se trata de un cuarto cerrado, en el cual es posible limitar perturbaciones como corrientes de aire, el sistema de posicionamiento *Steam VR Basestation 2.0* fue colocado uno frente a otro a una distancia de 4 metros entre ellos y una altura de 2 metros sobre el nivel del piso, esto para obtener una mejor área de muestreo para fines del experimento. Los VANT fueron colocados al centro geométrico del área de muestreo, colocados 1.20 metros uno frente a otro como se muestra en la Figura 5.3.



(a) Posición sensor izquierdo.



(b) Posición inicial de los VANT's.



(c) Posición sensor derecho.

Figura 5.3 Distribución del hardware para el experimento [45].

## 5.2. Asignación de marco de referencia.

Previo a realizar las pruebas del algoritmo, es necesario calibrar el sistema de posicionamiento *Steam VR Basestation 2.0* y asignar el marco de referencia a cada elemento, este procedimiento se realiza a través de la aplicación *Crazyflie Client*, la aplicación permite al usuario conectarse de manera individual con cada VANT, mediante la dirección asignada a cada uno de ellos y realizar distintas operaciones, como navegación de un VANT a través de un control comercial, ver el estado de la batería, revisar el estado de la IMU, cambiar dirección del VANT, actualizar firmware, o calibrar el sistema de posicionamiento *Steam VR Basestation 2.0* a través del cuadro de diálogo *Lighthouse Positioning* (figura 5.4), donde al presionar el botón *manage geometry* permite acceder al marco de referencia abordado del VANT en cuestión, calibrar y guardar a la posición física en la distribución con la cual se

trabajará. Este procedimiento se repite con cada VANT, una vez calibrado el marco de referencia de cada elemento, se continua a la plataforma *CrazySwarm*, es importante puntualizar que la aplicación *Crazyflie Client* debe cerrarse completamente previo al arranque de la plataforma *CrazySwarm*, de otra manera pudiera producirse un error de conexión en los VANT *Crazyflie*.

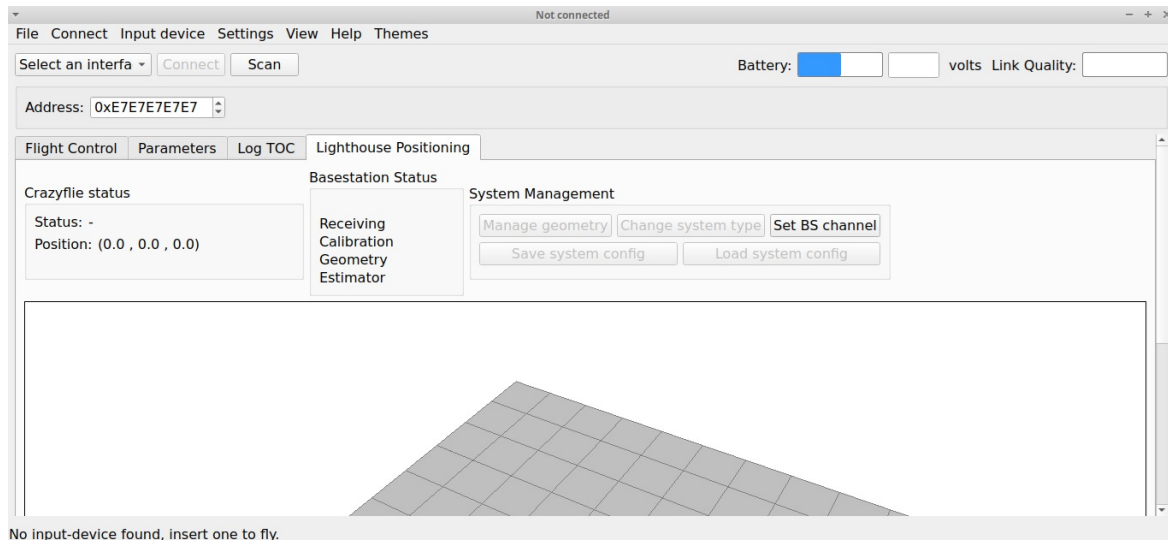


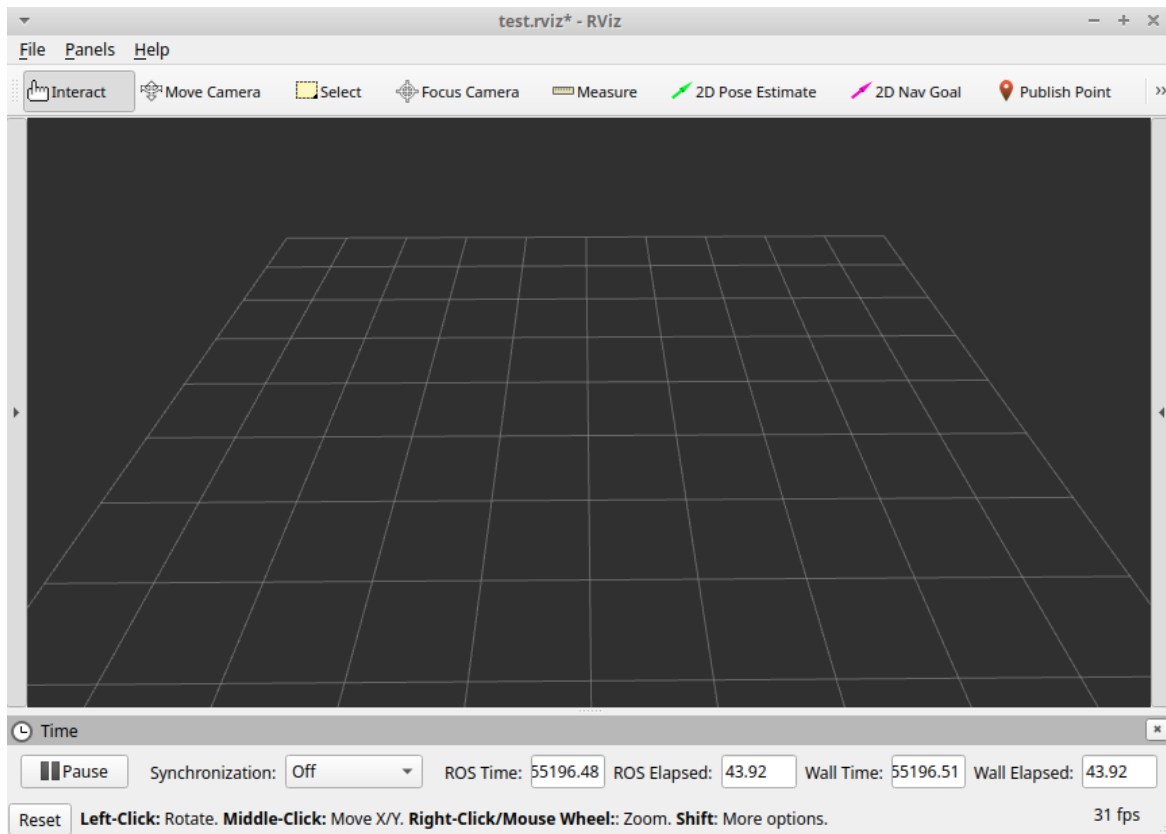
Figura 5.4 Aplicación *Crazyflie Client* calibración de *Steam VR Basestation 2.0* [12].

### 5.3. Arranque de plataforma *Crazyswarm*.

La arquitectura de *CrazySwarm* (Figura 4.7) se basa en el principio de servidor, esto permite habilitar los servicios necesarios para la gestión de grupos de diversos VANTs, para arrancar el servidor *CrazySwarm* es necesario abrir una ventana de la terminal del equipo en el cual se instaló, en la terminal se redactan los siguientes comandos

```
cd /home/bitcraze/crazyswarm/
source ros_ws/devel/setup.bash
roslaunch crazyswarm hover_swarm.launch
```

la terminal abrirá la plataforma *CrazySwarm* como se muestra en la figura 5.5

Figura 5.5 Interfase *CrazySwarm* [56].

una vez arrancado el servidor de la plataforma *CrazySwarm*, en una nueva terminal y sin cerrar la anterior, se redactan los siguientes comandos

```
export CSW_PYTHON=python3
source /opt/ros/noetic/setup.bash
cd /home/bitcraze/crazyswarm/ros_ws/src/crazyswarm/scripts
source /home/bitcraze/crazyswarm/ros_ws/devel/setup.bash
```

esta terminal (Figura 5.6) permite al usuario mandar llamar los programas para probar los comportamientos, esto se hace mediante el siguiente comando

```
CSW_PYTHON <ProgramFile.py>
```

donde *< ProgramFile.py >* corresponde al programa a llamar para la prueba.

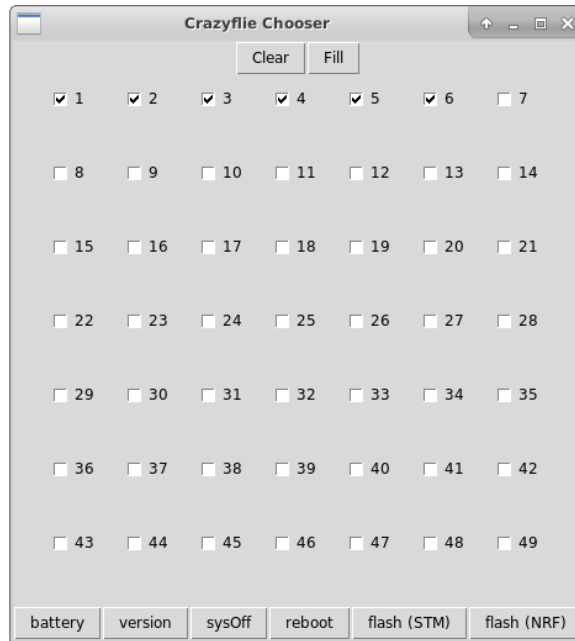


Figura 5.8 Ventana de diálogo *chooser.py* [56].

#### 5.4.1. Programa de secuencia para la prueba del algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo.

Para la prueba del algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo fue necesario crear una secuencia de prueba definida por el programa *secuenciaCita.py*, el cual gestiona el despegue de los elementos a 0.6 metros de altura, una vez realizado el despegue con éxito, se define el punto de encuentro siendo  $(.35, .75, .6)$  para el VANT 1 y  $(-.75, 1.5, .6)$  para el VANT 2, con una distancia al área de cita de  $\rho_1 = 0.8276$  y  $\rho_2 = 1.6770$  metros, al arribo al área de cita, la secuencia envía un mensaje al usuario indicando el arribo, para finalmente realizar una secuencia de aterrizaje, generar gráficas de los datos obtenidos en tiempo real del experimento y mostrarlas para el análisis del comportamiento del experimento.

La secuencia está definida por el siguiente programa:

```
#!/usr/bin/env python

import numpy as np
from numpy.linalg import norm
import codecs, json
import matplotlib.pyplot as plt
import warnings
```

```
import matplotlib.cbook

from pycrazyswarm import *
from rendezvous_XY import arrival, readFile

Z = [0.6, 0.6]
sleepRate = 120

if __name__ == "__main__":
    swarm = CrazySwarm()
    timeHelper = swarm.timeHelper
    allcfs = swarm.allcfs

    for cf in allcfs.crazyflies:
        print(cf.id)
        cf.takeoff(targetHeight=Z[cf.id-1], duration=2)
    timeHelper.sleep(2)

    pos = [(0.35, .75, .6), (-.75, 1.5, .6)]
    arrival(timeHelper, allcfs.crazyflies, pos, sleepRate)

    for cf in allcfs.crazyflies:
        cf.notifySetpointsStop()
        print(f"UAV-{cf.id} is landing")
        cf.land(.005, 3)
    timeHelper.sleep(3)

    # Lee información generada de la prueba anterior y genera gráfica
    warnings.filterwarnings("ignore", category=matplotlib.cbook.mplDeprecation)
    uavdata = readFile(1)
    rho1 = uavdata["data"]["rho"]
    position = uavdata["data"]["positionVector"]
    axisX1, axisY1, axisZ1 = [], [], []
    for pos in position:
        axisX = pos[0]
```

```
axisY = pos[1]
axisZ = pos[2]
axisX1.append(axisX)
axisY1.append(axisY)
axisZ1.append(axisZ)

elapsedTime = uavdata["data"]["elapsedTime"]

uavdata = readFile(2)
rho2 = uavdata["data"]["rho"]
position = uavdata["data"]["positionVector"]
axisX2, axisY2, axisZ2 = [], [], []
#print (position)
for pos in position:
    axisX = pos[0]
    axisY = pos[1]
    axisZ = pos[2]
    axisX2.append(axisX)
    axisY2.append(axisY)
    axisZ2.append(axisZ)

plt.style.use('seaborn')
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(elapsedTime, rho1, c='red')
ax.plot(elapsedTime, rho2, c='blue')

# formato de ploteo
ax.set_title("prueba de algoritmo de cita", fontsize = 24)
ax.set_xlabel("Tiempo transcurrido", fontsize = 16 )
ax.set_ylabel("Rho", fontsize = 16 )
ax.tick_params(axis = 'both', which = 'major', labelsize = 16)

plt.show()

plt.style.use('seaborn')
```

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(axisX1, axisY1, c='red')
ax.plot(axisX2, axisY2, c='blue')

# formato de ploteo
ax.set_title("plano X-Y", fontsize = 24)
ax.set_xlabel("X", fontsize = 16 )
ax.set_ylabel("Y", fontsize = 16 )
ax.tick_params(axis = 'both', which = 'major', labelsize = 16)

plt.show()

plt.style.use('seaborn')
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(axisX1, axisZ1, c='red')
ax.plot(axisX2, axisZ2, c='blue')

# formato de ploteo
ax.set_title("plano X-Z", fontsize = 24)
ax.set_xlabel("X", fontsize = 16 )
ax.set_ylabel("Z", fontsize = 16 )
ax.tick_params(axis = 'both', which = 'major', labelsize = 16)

plt.show()
```

El programa *secuenciaCita.py* manda llamar la función *arrival* la cual es la encargada de llevar a cabo la regulación de la velocidad de cita para la emergencia de arribo simultaneo.

Para iniciar el programa *secuenciaCita.py*, en la terminal de comandos se manda llamar mediante la instrucción

```
$CSW_PYTHON secuenciaCita.py
```

#### **5.4.2. Comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo.**

Se realizaron dos tipos de experimento con el conjunto de VANTs para evaluar el comportamiento del algoritmo, en ambos casos, comparten el área de cita.

El primer tipo de experimento consiste en deshabilitar la ganancia que produce el efecto de amplificación y atenuación de la velocidad, esto con la finalidad de evaluar el comportamiento de cita sin arribo simultáneo, el experimento tuvo una duración de 20 segundos con una frecuencia de muestreo de 120 Hz.

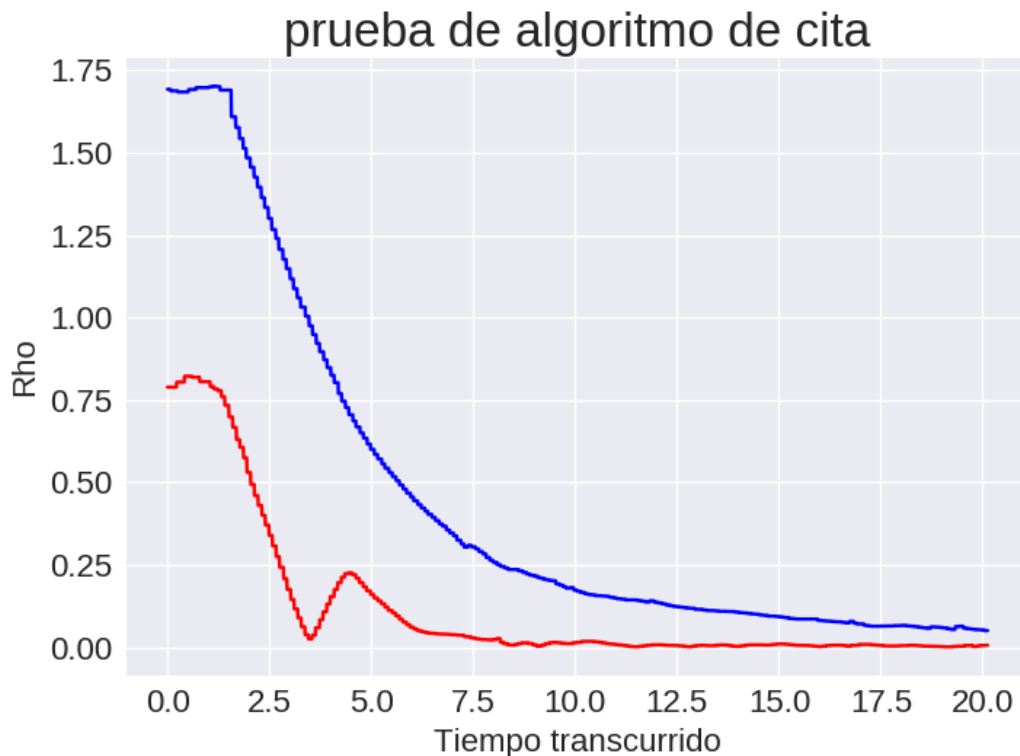


Figura 5.9 Resultado del experimento sin regulación para la implementación de comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo, donde se muestra el comportamiento de la distancia de cada elemento al área de cita. En rojo el VANT 1 y Azul el VANT 2 [45].

En la Figura 5.9 se puede apreciar que el VANT 1 (representado en color rojo), arriba al área de cita en 3 segundos y oscila en esta área durante el resto del experimento a la espera del VANT 2 (representado en azul), una vez el grupo de VANT se encuentra en el área de cita a los 20 segundos, finalmente el algoritmo envía al usuario el aviso de arribo.

El segundo tipo de experimento consiste en habilitar la ganancia que produce el efecto de amplificación y atenuación de la velocidad, esto con la finalidad de evaluar el comportamiento de cita sin arribo simultáneo, el experimento tuvo una duración de 13 segundos con una frecuencia de muestreo de 120 Hz.

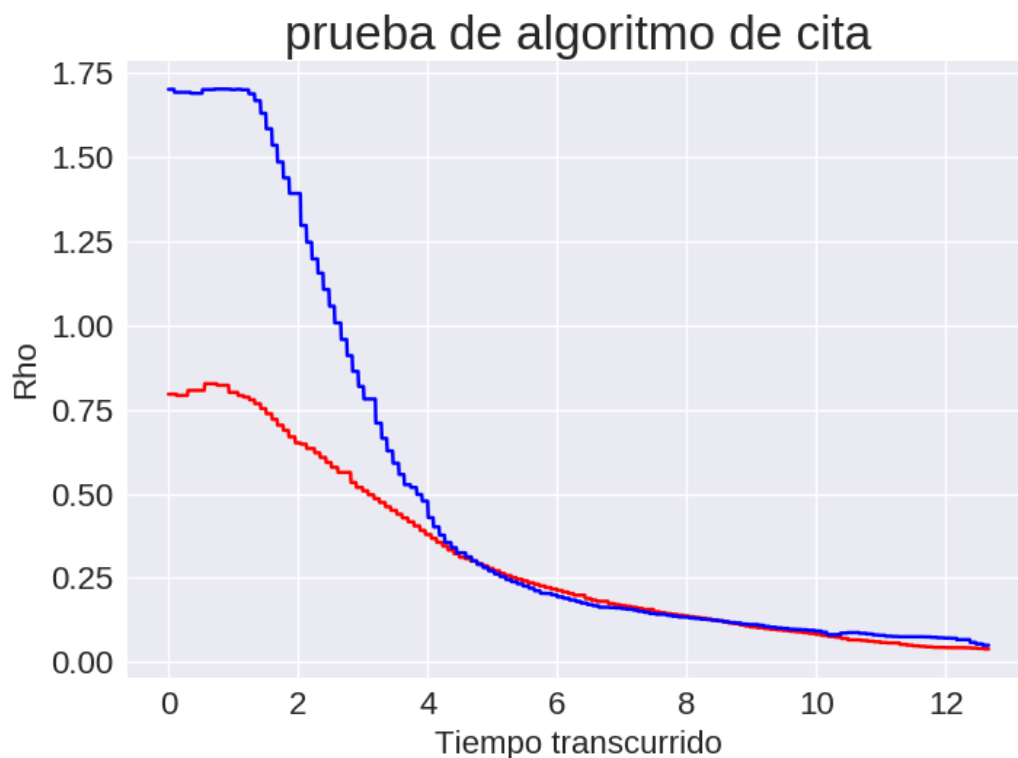


Figura 5.10 Resultado del experimento con regulación para la implementación de comportamiento de cita para la emergencia de arribo simultáneo, donde se muestra el comportamiento de la distancia de cada elemento al área de cita. En rojo el VANT 1 y Azul el VANT 2 [45].

Es posible apreciar en la Figura 5.10 el efecto de amplificación de la velocidad en el VANT 2 (color azul), y como la velocidad del VANT 1 (color rojo) es levemente más tenue que en el experimento anterior, ambos VANT llegan a un consenso en distancia al objetivo a los 4.5 segundos de haber comenzado el experimento y llegando al área de cita de manera simultánea alrededor de los 13 segundos, para finalmente mandar al usuario el aviso de arribo.

En este capítulo se presentaron los resultados obtenidos de la implementación en un cuarto de ambiente controlado del algoritmo de cita para la emergencia de arribo simultáneo en un grupo de 2 VANTs fue satisfactorio. Es importante puntualizar que los resultados de simulación en *ROS* permiten la interacción en un grupo más grande de VANTs, sin embargo la limitación del hardware no permitió al trabajo de esta tesis hacer la prueba en un grupo más grande.

# Capítulo 6

## Conclusiones.

Como resultado de esta tesis de maestría, es posible en listar las siguientes conclusiones:

- **Complejidad del Modelado de VANTs:** El modelado de un Vehículo Aéreo No Tripulado (VANT) de tipo cuadricóptero presenta un elevado grado de complejidad, dado que se deben considerar múltiples fuerzas y perturbaciones que afectan su comportamiento dinámico. Esta complejidad requiere un enfoque meticuloso en la modelación matemática y en la simulación del sistema.
- **Eficiencia del Controlador Backstepping:** Los resultados obtenidos a través de simulaciones demuestran que el controlador basado en la técnica de backstepping proporciona una robustez superior ante perturbaciones en comparación con un controlador por retroalimentación de estados. Esto sugiere que el enfoque de backstepping es más adecuado para entornos de operación variables y desafiantes.
- **Utilización de *Crazyflie*:** Los drones *Crazyflie* se presentan como una herramienta valiosa para la observación didáctica del comportamiento de un VANT. No obstante, la implementación de nuevos controladores requiere un profundo conocimiento de la arquitectura de hardware y de la programación en *Visual Basic* para el firmware. Debido a las restricciones temporales de esta investigación, no fue factible desarrollar y probar el firmware necesario para integrar el controlador basado en backstepping.
- **Limitaciones de *CrazySwarm*:** La plataforma *CrazySwarm* resulta efectiva para el estudio del comportamiento colectivo de VANTs. Sin embargo, su funcionalidad está limitada al control del subsistema de traslación, lo que restringe la capacidad de evaluación del subsistema de orientación y, por ende, limita la validación del controlador basado en backstepping en escenarios más complejos.

- **Regulación de Velocidad y Comportamiento de Cita:** A través de la implementación de una ley de control destinada a la regulación de velocidad, se logró obtener un comportamiento coordinado en situaciones de emergencia, permitiendo el arribo simultáneo de dos VANTs. Este enfoque ha demostrado ser eficaz para sincronizar la llegada de los vehículos a un área de cita designada.
- **Eficacia del Algoritmo Propuesto:** El algoritmo propuesto para gestionar el comportamiento de cita en situaciones de arribo simultáneo ha demostrado reducir significativamente la diferencia temporal entre la llegada de los VANTs al área de cita. Esta validación se ha llevado a cabo en un conjunto de dos VANTs, confirmando la efectividad del algoritmo en la optimización del proceso de arribo.

Estas conclusiones subrayan la importancia de una comprensión integral de los sistemas de control y modelado en la ingeniería de VANTs, así como la necesidad de seguir investigando en áreas que faciliten la integración y mejora de estos sistemas en aplicaciones prácticas.

## 6.1. Trabajo futuro.

A pesar de los avances logrados en este trabajo, persisten varias interrogantes que pueden ser exploradas en futuras investigaciones. Por lo tanto, se proponen las siguientes líneas de trabajo:

- **Cambio de Sistema de Posicionamiento:** Se sugiere la transición del sistema de posicionamiento *VR Steam* hacia el sistema *Vicon*, el cual está optimizado para su integración con la plataforma *CrazySwarm*. Este cambio tiene como objetivo facilitar la implementación en un mayor número de VANTs, mejorando así la precisión y la eficiencia en las operaciones de vuelo.
- **Unificación de la Plataforma:** Existe una discrepancia significativa entre los comandos accesibles a través del cliente *CFClient*, que permite el control de un único VANT, y la plataforma *CrazySwarm*, que gestiona múltiples VANTs. En particular, la falta de acceso a parámetros cruciales relacionados con el subsistema de orientación ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) en *CrazySwarm* limita la capacidad de probar los algoritmos de control desarrollados en el capítulo 3 de esta tesis. Se propone la unificación de los componentes de la plataforma en un único lenguaje de programación, lo que permitirá al usuario alcanzar

un mayor nivel de competencia y facilitará el desarrollo de algoritmos y la adquisición de parámetros necesarios para pruebas experimentales.

- **Desarrollo de VANTs para Pruebas en Exterior:** Con el objetivo de avanzar en la unificación de la plataforma, se plantea el diseño de nuevos VANTs equipados con instrumentación a bordo que posibiliten la realización de pruebas en entornos exteriores. Además, se propone la actualización del firmware de control a bordo utilizando el mismo lenguaje de programación de la plataforma unificada. Actualmente, la telemetría se desarrolla en *C*, el firmware en *Visual Basic*, y la interfaz de usuario en *Python*, entre otros lenguajes. La creación de esta plataforma unificada permitirá al usuario realizar modificaciones más extensas y adaptativas, favoreciendo la investigación y el desarrollo de nuevas aplicaciones.

# Bibliografía

- [1] El mito de Ícaro y dÉdalo, 2023. <https://mitologiaclasicaromana.blogspot.com/2012/11/el-mito-de-icaro-y-dedalo.html>.
- [2] H. Celikkanat Bayindir Levent y E. Sahin A. M. Turgut, F. Gokce. Kobot: A mobile robot designed specifically for swarm robotics research. *Middle East Technical University Department of Computer Engineering, Ankara, Turkey*, 2007.
- [3] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, and A. Balestrino. Closed loop steering of unicycle like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(1):27–35, mar 1995.
- [4] Luitpold Babel. Coordinated target assignment and uav path planning with timing constraints. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 94(3-4):857–869, 2019.
- [5] Erkin Bahceci and Erol Sahin. Evolving aggregation behaviors for swarm robotic systems: A systematic case study. In *Swarm Intelligence Symposium, SIS 2005*, pages 333–340, 2005.
- [6] J. Baker. Opensource.com.
- [7] Levent Bayındır. A review of swarm robotics tasks. *Neurocomputing*, 172:292–321, 2016.
- [8] BBC. Las escobas voladoras y otros misterios de las brujas.
- [9] R. W. Beard, T. W. McLain, D. B. Nelson, D. Kingston, and D. Johanson. Decentralized cooperative aerial surveillance using fixed-wing miniature uavs. *Proceedings of the IEEE*, 94(7):1306–1324, July 2006.
- [10] Beni. The concept of cellular robotic system. *IEEE Computer Society*, pages 57–58, 1988.
- [11] G. Beni. From swarm intelligence to swarm robotics. *Berlin: Springer*, page 9, 2004.
- [12] bitcraze. bitcraze, 2023. <https://www.bitcraze.io/>.
- [13] Samir Bouabdallah and Roland Siegwart. Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems*, pages 153–158. Ieee, 2007.
- [14] Samir Bouabdallah and Roland Siegwart. Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems*, pages 153–158. Ieee, 2007.

- [15] P. P. Bramwell, A. R. S. ; Friedmann. Helicopter dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 45(4):966, 1978.
- [16] F. Nex M. Gerke y J. Zevenbergen C. Stöcker, R. Bennett. Review of the current state of uav regulations. *Remote Sensing*, 5(459):9(5), 2017.
- [17] Zhongtao Cheng, Bo Wang, Lei Liu, and Yongji Wang. A composite impact-time-control guidance law and simultaneous arrival. *Aerospace Science and Technology*, 80:403 – 412, 2018.
- [18] A. S. S. G. K. Cheraghi. Past, present, and future of swarm robotics. *Intelligent Systems and Applications*, 296, 2021.
- [19] RIGOBERTO MARTINEZ CLARK. Control de enjambres robóticos, 2019.
- [20] H. Coanda. The history and the evolution of uavs. *Journal of Defense Resources Management*, 8(1):9, 2017.
- [21] Alessandro De Luca, Giuseppe Oriolo, and Marilena Vendittelli. Control of Wheeled Mobile Robots: An Experimental Overview. In Salvatore Nicosia, Bruno Siciliano, Antonio Bicchi, and Paolo Valigi, editors, *Articulated and Mobile Robotics for Services and Technologies*, pages 181–226. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [22] D. V. Dimarogonas and K. J. Kyriakopoulos. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):916–922, May 2007.
- [23] Marco Dorigo, Vito Trianni, Erol Sahin, Roderich Groß, Thomas H. Labella, Gianluca Baldassarre, Stefano Nolfi, Jean-Louis Deneubourg, Francesco Mondada, Dario Floreano, and Luca M. Gambardella. Evolving Self-Organizing Behaviors for a Swarm-Bot. *Autonomous Robots*, 17(2/3):223–245, sep 2004.
- [24] Hai-bin Duan, Xiang-yin Zhang, Jiang Wu, and Guan-jun Ma. Max-min adaptive ant colony optimization approach to multi-uavs coordinated trajectory replanning in dynamic and uncertain environments. *Journal of Bionic Engineering*, 6(2):161–173, 2009.
- [25] Future and Emerging Technologies. Swarmanoid.
- [26] Shweta Gupte, Paul Infant Teenu Mohandas, and James M. Conrad. A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles. In *2012 Proceedings of IEEE Southeastcon*, pages 1–6, 2012.
- [27] Wolfgang Hönig and Nora Ayanian. Flying multiple uavs using ros. *Robot Operating System (ROS) The Complete Reference (Volume 2)*, pages 83–118, 2017.
- [28] C. k. Kang. Marsbee - swarm of flapping wing flyers for enhanced mars exploration.
- [29] Hassan K Khalil. Nonlinear control. 2015.
- [30] Derek B Kingston, Wei Ren, and Randal W Beard. Consensus algorithms are input-to-state stable. In *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, pages 1686–1690. IEEE, 2005.

- [31] Evangelos Kranakis, Danny Krizanc, and Sergio Rajsbaum. Mobile agent rendezvous: A survey. In *Structural Information and Communication Complexity: 13th International Colloquium, SIROCCO 2006, Chester, UK, July 2-5, 2006. Proceedings 13*, pages 1–9. Springer, 2006.
- [32] Guofei Li, Yunjie Wu, and Pengya Xu. Adaptive fault-tolerant cooperative guidance law for simultaneous arrival. *Aerospace Science and Technology*, 82-83:243 – 251, 2018.
- [33] Z. Li and Z. Ding. Robust cooperative guidance law for simultaneous arrival. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 27(3):1360–1367, May 2019.
- [34] J Lin, A S Morse, and B D O Anderson. The Multi-Agent Rendezvous Problem. Part 1: The Synchronous Case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(6):2096–2119, jan 2007.
- [35] I. A. I. LTD. Codis eu reserch results.
- [36] R Martínez-Clark, C Cruz-Hernández, J Pliego-Jimenez, and A Arellano-Delgado. Control algorithms for the emergence of self-organized behaviours in swarms of differential-traction wheeled mobile robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 15(6), 2018.
- [37] Philippe Müllhaupt. Analyse and control of underactuated mechanical nonminimum-phase systems. 1999.
- [38] Romeo Ortega, Antonio Loria, Per Johan Nicklasson, Hebertt Sira-Ramirez, Romeo Ortega, Antonio Loría, Per Johan Nicklasson, and Hebertt Sira-Ramírez. *Euler-Lagrange systems*. Springer, 1998.
- [39] F. I. T. Petrescu. History of aviation—a short review. *Journal of Aircraft and Spacecraft Technology*, page 20, 2017.
- [40] Tomasz Piatkowski. Dahl and lugre dynamic friction models—the analysis of selected properties. *Mechanism and Machine Theory*, 73:91–100, 2014.
- [41] M. A. G. Pico. Seguridad en robótica de enjambre mediante blockchain. *universidad de Alicante*, 2022.
- [42] James A. Preiss\*, Wolfgang Hönig\*, Gaurav S. Sukhatme, and Nora Ayanian. Crazy-swarm: A large nano-quadcopter swarm. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3299–3304. IEEE, 2017. Software available at <https://github.com/USC-ACTLab/crazyswarm>.
- [43] O. E. Holland J. L. Deneubourg R. Beckers. Stigmergy, self-organization, and sorting in collective robotics. *Artificial life*, 5(2):173–202, 1999.
- [44] O. E. Holland J. L. Deneubourg R. Beckers. From local actions to global tasks: Stigmergy and collective robotics. *Prerational Intelligence: Adaptive Behavior and Intelligent Systems Without Symbols and Logic*, 1(21):1008–1022, 2000.

- [45] R. Anaya. "diseño e implementación de algoritmo de arribo simultáneo para vehículos aéreos no tripulados.", 2024. UABC, FICAS.
- [46] Wei Ren, Randal W Beard, and Ella M Atkins. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, pages 1859–1864. IEEE, 2005.
- [47] Wei Ren, Randal W Beard, and Ella M Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control systems magazine*, 27(2):71–82, 2007.
- [48] F Reyes and J Cid. Drones. cinemática, dinámica y control de cuadricópteros, 2019.
- [49] Open Robotics. Ros, 2023. <https://www.ros.org/>.
- [50] A. Rodríguez. iberfdrone.
- [51] Roland Siegwart and Illah R Nourbakhsh. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, volume 23. MIT press, 2004.
- [52] Ola Skeik, Junyan Hu, Farshad Arvin, and Alexander Lanzon. Cooperative control of integrator negative imaginary systems with application to rendezvous multiple mobile robots. In *2019 12th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo)*, pages 15–20. IEEE, 2019.
- [53] B. Bhushan y T. Laxmi T. Bhushan. Oderiving best practices from development methodology base (part 2). *International Journal of Engineering Research Technology*, 1(6), 2012.
- [54] Ying Tan and Zhong-yang Zheng. Research Advance in Swarm Robotics. *Defence Technology*, 9(1):18–39, mar 2013.
- [55] Harvard university. Self-organizing systems research group.
- [56] James A. Preiss Wolfgang Hoenig and contributors. CrazySwarm, 2018-2021. <https://crazyswarm.readthedocs.io/en/latest/>.
- [57] James A. Preiss Wolfgang Hoenig and contributors. CrazySwarm, 2018-2021. <https://crazyswarm.readthedocs.io/en/latest/api.html#pycrazyswarm.crazyflie.Crazyflie.position>.
- [58] James A. Preiss Wolfgang Hoenig and contributors. Python api reference, 2018-2021. <https://crazyswarm.readthedocs.io/en/latest/api.html>.
- [59] H. H. Lee y J. S. Aurora. Object-oriented programming for engineering applications. *Engineering with Computers*, 7:225–235, 1991.
- [60] G. Beni y J. Wang. Swarm intelligence. *Proceedings Seventh Annual Meeting of the Robotics Society of Japan*, 1989.
- [61] G. Beni y J. Wang. Collective task achieving group behaviour by multiple robots. 1992.
- [62] R. Ramsin y R. F. Paige. Process-centered review of object oriented software development methodologies. *ACM computing surveys*, 40(1):1–89, 2008.

- 
- [63] T. Fukuda y S. Nakagawa. Approach to the dynamically reconfigurable robotic system. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 1(1):55–72, 1988.
- [64] Peng Yao and ShengBo Qi. Obstacle-avoiding path planning for multiple autonomous underwater vehicles with simultaneous arrival. *Science China Technological Sciences*, 62(1):121–132, 2019.
- [65] Z. Zeng, K. Sammut, L. Lian, A. Lammas, F. He, and Y. Tang. Rendezvous path planning for multiple autonomous marine vehicles. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 43(3):640–664, July 2018.
- [66] Yudong Zhang. Swarm intelligence and its applications. *The Scientific World Journal*, 2013(528069):3, 2013.
- [67] E. Şahin. Swarm robotics: From sources of inspiration to domains of application. *Lecture Notes in Computer Science*, 3342, 2005.