

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería



TELEOPERACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS DE n GDL INCIERTOS BASADA EN SINCRONIZACIÓN

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de DOCTOR
EN CIENCIAS, presenta:

Ernesto Victor González Solís
Asesor: Dr. David Isaías Rosas Almeida

Mexicali, Baja California, México, Diciembre de 2017.

Resumen

RESUMEN de la Tesis de ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS. Mexicali, Baja California, México, Diciembre de 2017.

TELEOPERACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS DE nGDL INCIERTOS BASADA EN SINCRONIZACIÓN

Resumen aprobado por:

Dr. David Isaías Rosas Almeida
Director de Tesis

En esta tesis se resuelve el problema de teleoperación bilateral para sistemas donde el efecto de retardo en el medio de comunicación se considera despreciable. Se propone una estructura de control robusta basada en una técnica de sincronización por modos deslizantes, donde se abordan problemas como incertidumbres en los modelos del sistema, así como la acción de perturbaciones externas. Se emplea la técnica de sincronización para un arreglo de sistemas caóticos de Sprott bajo una configuración donde un sistema impone su dinámica al resto de los demás, como una introducción al problema de teleoperación de un sistema maestro esclavo. Se presentan resultados numéricos del desempeño de esta técnica para lograr el acoplamiento de los sistemas caóticos. Para abordar el problema de teleoperación, se consideran sistemas mecánicos de nGDL con el mismo tipo de articulaciones aunque posiblemente diferentes parámetros, en los cuales se encuentra disponible únicamente el vector de posiciones generalizadas. La estructura de control propuesta se divide en dos subestructuras de operación, las cuales entran en operación acorde a la interacción del operador humano. Se emplean observadores de estado para estimar el vector de velocidades, los términos de incertidumbre y los pares gravitacionales, para compensarlos a través de un control por retroalimentación de estados. Se presentan resultados numéricos de la teleoperación de dos sistemas mecánicos de 2GDL con incertidumbres.

Palabras clave:

Teleoperación bilateral robusta, sincronización, modos deslizantes.

Abstract

ABSTRACT of the Thesis presented by ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS, in order to obtain the DOCTOR OF SCIENCES degree. Mexicali, Baja California, México, December 2017.

TELEOPERACIÓN DE SISTEMAS MECÁNICOS DE nGDL INCIERTOS BASADA EN SINCRONIZACIÓN

Approved by:

Dr. David Isaías Rosas Almeida
Thesis Advisor

In this thesis, we solve the bilateral teleoperation problem for systems where delays introduced by the communication channel are not considered. We propose a robust control structure that is based in a sliding modes synchronization technique, where uncertainties and disturbances are considered. We applied this technique to an array of sprott circuits subject to a configuration where one of them impose its dynamic to the others, that is the same behavior in a teleoperated system. We present numerical results of performance of this technique to achieve the coupling of chaotic systems. For the teleoperation problem, we consider nGDL mechanical systems, with the same kind of articulations although possibly different parameters values, in which only is available the generalized position vector. The control structure proposed is divided in two substructures, which are put in operation according to human operator interaction. State observers are used to estimate the velocity vector, uncertainties terms and gravitational torques, to later be compensated through state feedback control. We present numerical results about bilateral teleoperation of two uncertain mechanical systems with 2GDL.

Keywords:

Robust bilateral teleoperation, synchronization, sliding modes.

Agradecimientos

Primeramente doy gracias a Dios por permitirme llegar con salud y bienestar a esta etapa de mi vida.

Gracias al Dr. David F. Rosas Almeida por su labor como director de esta tesis, así como por su apoyo y ejemplo en mis estudios de posgrado.

A mis sinodales, Dr. Marco A. Félix Lozano, Dr. Raúl Rascón Carmona, Dr. Luis O. Moreno Ahedo y Dra. Karla F. Velázquez Victorica, por su apoyo y valiosos comentarios.

A mi familia por su apoyo incondicional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Dedicatoria:

*Dedico esta tesis a ti, mi Amada Esposa Nayeli.
Agradezco tu apoyo incondicional, incluso en los
momentos más complicados. Gracias por levantarme el
ánimo cuando ha sido necesario a través de tu buen
humor y actitud siempre positiva.*

*Te admiro por ser una persona íntegra, a pesar de las
situaciones difíciles que has enfrentado. Que lejos de
vencerte, te han hecho fuerte para salir adelante.*

Este logro es de ambos. Un paso más junto a ti.

Te amo

Contenido

INTRODUCCIÓN	1
1 ANTECEDENTES	8
1.1 Definiciones básicas sobre sistemas dinámicos	8
1.2 Existencia y unicidad de soluciones	9
1.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	11
1.3.1 Estabilidad de equilibrios en el sentido de Lyapunov	11
1.3.2 Método indirecto de Lyapunov	12
1.3.3 Método directo de Lyapunov	15
1.4 Estabilidad de sistemas perturbados	17
1.4.1 Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanecientes	17
1.4.2 Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes	18
1.5 Modelo dinámico de sistemas Lagrangianos	19
1.5.1 Propiedades del modelo de Euler-Lagrange	20
1.5.1.1 Matriz de inercia	20
1.5.1.2 Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis	21
1.5.1.3 Vector de pares gravitacionales	22
1.5.1.4 Linealidad en parámetros	23
1.6 Observadores de estado	23

1.6.1	Observador de Luenberger	25
1.6.2	Diseño de observadores robustos	28
1.6.2.1	Identificación de perturbaciones	31
1.7	Sincronización de sistemas dinámicos	32
1.7.1	Sincronización natural	33
1.7.2	Sincronización controlada	35
1.8	Teleoperación de sistemas mecánicos	36
1.8.1	Teleoperación bilateral.....	37
1.8.2	Teleoperación unilateral	39
2	SINCRONIZACIÓN ROBUSTA DE UN ARREGLO DE SISTEMAS DE SPROTT	40
2.1	Solución del problema de sincronización	42
2.1.1	Diseño de las señales de acoplamiento	43
2.1.2	Observador de estado para estimación de perturbaciones.....	46
2.1.3	Implementación de la técnica de sincronización	48
3	TELEOPERACIÓN ROBUSTA DE SISTEMAS MECÁNICOS DE NGDL CON COMPENSACIÓN DE PERTURBACIONES	55
3.1	Solución conceptual del problema de teleoperación	56
3.1.1	Diseño del controlador ideal para la Estructura A	60
3.1.2	Diseño del controlador ideal para la Estructura B.....	61
3.2	Implementación de las estructuras de control	63

3.2.1	Identificación de incertidumbres y estimación de variables mediante observadores de estado robustos	64
3.2.2	Implementación de la Estructura A	67
3.2.3	Implementación de la Estructura B	68
3.3	Aplicación de la técnica de teleoperación a dos mecanismos de 2 GDL	68
3.3.1	Modelo dinámico	68
3.3.2	Resultados numéricos, operación de la Estructura A	71
3.3.3	Resultados numéricos, ambas estructuras en operación	72
CONCLUSIONES		79
REFERENCIAS		81

Lista de Figuras

Figura 1	Curva solución de un sistema dinámico.	9
Figura 2	Concepto de estabilidad de Lyapunov.	12
Figura 3	Concepto de estabilidad asintótica.	13
Figura 4	Concepto de estabilidad exponencial.	13
Figura 5	El observador como parte fundamental de un sistema de control.	24
Figura 6	Diagrama a bloques del Observador de Luenberger.	26
Figura 7	Esquema de teleoperación bilateral.	38
Figura 8	Esquema de teleoperación unilateral.	38
Figura 9	Esquema de interconexión maestro esclavo.	41
Figura 10	Estimación de las perturbaciones en cada nodo y del sistema de referencia.	51
Figura 11	Señales de acoplamiento para cada nodo.	52

Figura 12	Salidas de cada nodo y del sistema de referencia antes y después de aplicar las señales de acoplamiento.	53
Figura 13	Proyección en el plano (x_{1_i}, x_{2_i}) del retrato de fase de cada nodo del arreglo antes y después de aplicar las señales de acoplamiento.	54
Figura 14	Estructura A del sistema de teleoperación; no hay interacción del operador humano.	57
Figura 15	Estructura B del sistema de teleoperación; el humano tiene interacción con el mecanismo maestro.	58
Figura 16	Observador robusto para estimación de variables e incertidumbres.	64
Figura 17	Sistema mecánico de 2GDL.	69
Figura 18	Comportamiento del mecanismo maestro bajo la operación de la Estructura A.	73
Figura 19	Comportamiento del mecanismo esclavo bajo la operación de la Estructura A.	74
Figura 20	Errores en las posiciones del maestro y esclavo bajo la operación de la Estructura A.	75
Figura 21	Desempeño del eslabón 1 de ambos mecanismos bajo las dos estructuras de operación.	77
Figura 22	Desempeño del eslabón 2 de ambos mecanismos bajo las dos estructuras de operación.	78

Introducción

La sincronización se define como la coincidencia o correspondencia de hechos o fenómenos en el tiempo. En la actualidad, la investigación sobre la sincronización de sistemas dinámicos tiene gran relevancia debido a sus múltiples aplicaciones. Una de las principales líneas de investigación, consiste en el diseño de esquemas de interconexión y señales de acoplamiento para lograr que dos o más sistemas alcancen un estado de sincronización, cuyo objetivo sea mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado para realizar una tarea común [5].

Una aplicación importante es la sincronización de sistemas caóticos [11], [45], [58], que se puede utilizar en el desarrollo de sistemas de comunicaciones privadas, como se propone en [3], [23], [26], [31], [59].

Otra aplicación es la sincronización de sistemas mecánicos, ya que los desarrollos tecnológicos y los requerimientos en eficiencia y calidad en procesos de producción han resultado en el desarrollo de sistemas muy complejos, formados por arreglos de robots manipuladores y mecanismos en general. En la práctica, muchos de estos sistemas trabajan bajo un esquema cooperativo o coordinado; en ambos casos la sincronización debe estar presente [9], [19], [40], [44], [52], [57]. Por lo que se diseñan señales de acoplamiento que garanticen la sincronización de los sistemas, de esta forma la sincronización puede verse como un problema de control; a la sincronización así obtenida se le llama sincronización controlada [8].

El problema de sincronización está íntimamente relacionado con el problema de estabilidad, [14], [39], [48], [66]. Una cantidad importante de trabajos sobre sincronización de sistemas dinámicos, incluyendo la sincronización de mecanismos, asumen que los sistemas son idénticos y que no existen incertidumbres paramétricas ni perturbaciones externas.

Debido a que en la actualidad, múltiples procesos industriales de manufactura, pintura, soldadura y manipulación de sustancias tóxicas o radioactivas son de alto riesgo para la

integridad del operador humano es imprescindible recurrir al concepto de operación remota para evitar lesiones de consecuencia para el operador.

La operación remota o teleoperación se refiere a la capacidad del ser humano de extender sus capacidades y habilidades a lugares donde usualmente no puede llegar sin necesidad de estar presente físicamente.

La teleoperación tiene su origen a mediados de los 40's, cuando se construyó el primer sistema teleoperado. En los últimos 50 años un gran número de investigaciones han sido dirigidas a entender y solucionar problemas en la teleoperación bilateral.

Las investigaciones en el área de teleoperación se han incrementado en años recientes, con un creciente número de aplicaciones incluyendo telemedicina, telecirugías, telemantenimiento, teleasistencia para minusválidos, aplicaciones educativas, entretenimiento y muchas otras [43].

De acuerdo al tipo de interacción entre maestro y esclavo, la teleoperación se clasifica en unilateral si únicamente se transmite movimiento y fuerzas hacia el dispositivo esclavo; cuando se trata de un sistema teleoperado bilateralmente el sistema maestro transmite información al esclavo, mientras que el esclavo interactúa con el entorno remoto, y para que el humano sienta esa interacción, la información del esclavo debe ser transmitida de regreso al sitio donde está el operador humano, a modo de retroalimentación a través de una interfaz háptica, es decir, un dispositivo físico, mediante el cual, a través del tacto, el humano pueda percibir las posiciones, velocidades y aceleración resultantes de la interacción del dispositivo esclavo con el ambiente remoto [28], [63].

Dentro de la teleoperación bilateral, existen muchas estructuras para su implementación, dos de las principales son la arquitectura de dos canales y la arquitectura de cuatro canales.

La arquitectura de dos canales consiste en un método analítico que proporciona una caracterización de teleoperadores bilaterales. El método está basado en un modelo útil para la representación de redes complejas que intercambian energía con otras redes a través de dos

distintos pares de terminales o puertos [24]. Al igual que la arquitectura de cuatro canales, donde los sistemas intercambian señales de fuerza y velocidad, y la información de estos cuatro canales es necesaria para la transparencia y estabilidad del sistema teleoperado, con la problemática de que en este caso se necesita la medición de aceleración [33].

En [29] se muestra que es difícil realimentar la información de fuerzas y aceleraciones detectadas con los sensores. En otras palabras, el control de fuerza depende de la manera en como la fuerza es detectada o medida. Los sensores de fuerza detectan una deformación durante el contacto con el ambiente, la cual se interpreta como una fuerza externa. Es difícil detectar esta fuerza de reacción debida a esta deformación cuando el ambiente se distorsiona al mismo tiempo del contacto y además solo se detecta la fuerza en el lugar donde ha sido colocado el sensor. Este problema aumenta cuando se desea obtener el sensado de una fuerza de alta frecuencia.

Además, debido a que el sensor de fuerza detecta fuerzas externas debido a la amplificación de la deformación, la señales de ruido también se ven amplificadas. El ruido de alta frecuencia puede ser reducido usando un filtro pasabajos, sin embargo, el ancho de banda del sensor de fuerza se hace más estrecho.

Los principales problemas que se presentan en un sistema teleoperado, considerando los elementos que lo componen son:

- 1) Incertidumbres en los modelos de los sistemas mecánicos maestro y esclavo. Para el diseño de un controlador ideal es necesario disponer del modelo exacto de ambos sistemas, sin embargo, en la práctica esto no es posible debido a las incertidumbres en los modelos debido a variaciones paramétricas y efectos no lineales presentes en los mecanismos.

- 2) Estimación en el modelo del operador humano. Incluso aunque se contara con un controlador ideal, el comportamiento del operador humano no se puede modelar con exactitud. Cada persona en particular tiene distintos tiempos de reacción ante diferentes reflejos musculares, por lo que no es tan simple considerar este factor en el diseño del controlador de teleoperación.

3) Retardos de comunicación. Los diferentes medios de comunicación que se utilicen para implementar un sistema teleoperado, hablese de internet, fibra óptica, cableado eléctrico, incluso si se habla de una teleoperación in situ, introducen un tiempo de retardo en la comunicación del sistema maestro con el esclavo y viceversa afectando el desempeño del sistema teleoperado. Hay investigaciones que han hecho aportaciones en este sentido, sin embargo es un problema que aún sigue vigente.

4) Estimación del modelo del entorno o medio ambiente en el que interactúa el sistema esclavo. Cuando se manipula un sistema en una ubicación remota de difícil acceso para el operador humano, en general no se pueden modelar las condiciones ambientales sobre las que actuará el esclavo. De tal manera que existe incertidumbre en el desempeño que tendrá éste al momento de interactuar con el ambiente remoto.

5) Perturbaciones externas. Adicionalmente a las fuerzas generadas por los controladores diseñados, el sistema teleoperado está expuesto constantemente a la acción de fuerzas externas al esquema de control. En el caso del esclavo, son fuerzas resultantes de su interacción con un ambiente no modelado al que hace referencia el punto anterior; y en el caso del maestro, estas perturbaciones externas pueden venir incluso del mismo operador humano por un error o descuido [36].

Cualquier deficiencia debido a estos problemas mencionados limitará significativamente el desempeño del sistema teleoperado y puede poner en peligro su estabilidad. Por esta razón el control de sistemas teleoperados es un área de investigación actual.

En trabajos como [1], [20], [25] y [42] se abordan los problemas 3), 4) y 5), donde se propone un sistema de control adaptivo robusto ante perturbaciones externas y retardos introducidos por el medio de comunicación con compensación de gravedad, para mejorar la precisión en la estimación de los parámetros del modelo del ambiente. Se propone una función de Lyapunov general como primer paso para unificar la estabilidad de sistemas teleoperados bilateralmente con retardos en el tiempo. Emplean un modelo resorte-amortiguador para modelar la interacción con el ambiente remoto. Por otro lado los controles están limitados a sistemas de una dimensión; se considera que los sistemas tienen articulaciones única-

mente rotacionales; desprecian el efecto de fricción; se asume que los pares gravitacionales están precompensados; se considera que los retardos constantes son conocidos y acotados, y que los retardos variables en el tiempo no crecen, o que decrecen con el tiempo; y que el operador humano y el ambiente remoto son elementos pasivos, es decir, que el análisis del sistema teleoperado es independiente del modelo dinámico de estos elementos.

En [12] y [15] se afrontan los problemas 3), 4) y 2) donde se propone una técnica que ayuda al operador a compensar los tiempos de retardo en el orden de segundos en sistemas telemanipulados, lo cual le permite al operador anticipar el retardo en la respuesta del sistema a través de una retroalimentación predictiva de posición y fuerza, empleando los modelos del teleoperador y del ambiente remoto. Se realiza la sincronización de sistemas en topologías de interconexión arbitrarias para una clase de controles de acoplamiento para sistemas pasivos. Asumen que los sistemas son pasivos no lineales, se desprecian los efectos de fricción además las perturbaciones externas y consideran que las fuerzas del ambiente son acotadas. Se realizan pruebas a nivel de simulación numérica en sistemas de $1GDL$. Se aplica un control por retroalimentación de estado, y utilizan observadores para estimar el vector de velocidades. Se deja abierta la posibilidad de aplicarse a sistemas reales, ya que para que se pueda hacer una buena predicción, establece que es necesario hacer estudios de detección de colisión, modelado del impacto y análisis del efecto de fricción.

La investigación presentada en [51] aborda el problema 1), donde se propone la sincronización de dos o más sistemas robóticos de $nGDL$ con articulaciones rotacionales completamente actuadas, bajo un esquema de cooperación, se asume que se dispone únicamente de la medición de la posición. Considera la existencia de incertidumbres en el modelo de los sistemas maestro y esclavo. Se propone un controlador basado en medición de posiciones, que utiliza errores de acoplamiento para generar el régimen de sincronización.

En [65] se propone un nuevo esquema de teleoperación que provee un acoplamiento bajo un esquema de telepresencia, donde se aplica un control por retroalimentación de fuerzas y velocidades. Se asume que los modelos dinámicos del maestro y esclavo son precisos, pero que no requiere ningún parámetro del operador ni del ambiente. Considera que se dispone

de la medición de fuerzas y velocidades, que no hay retardos y que las escalas entre maestro y esclavo son iguales. Por otro lado en [13] se estudia la estabilidad de un sistema de teleoperación bilateral considerando un escalamiento entre maestro y esclavo en un ambiente remoto pasivo.

En estas investigaciones, en general se asume que los modelos de los sistemas son ideales, que tienen pares gravitacionales precompensados, además de incorporar el uso de sensores adicionales para medir las velocidades y las fuerzas del ambiente, sin embargo son costosos y se suma el hecho de que generan ruido, y el estrecho ancho de banda del sensor produce inestabilidad en el estado del sistema a lazo cerrado. Por esta razón, el control de sistemas teleoperados con incertidumbres es una área de investigación con relevancia en la actualidad.

El objetivo principal de esta tesis es aportar una estructura de teleoperación bilateral robusta para sistemas Lagrangianos de $nGDL$, abordando algunos de los problemas que aún se consideran vigentes en el tema de teleoperación, como son la falta de un modelo preciso tanto del sistema maestro como del esclavo, además de no poder modelar la conducta del operador humano, así como tampoco modelar el ambiente remoto. Esto bajo un esquema de control robusto que se basa en la estimación de perturbaciones y fuerzas del ambiente mediante observadores de estado y en una técnica de sincronización por modos deslizantes.

Se considera que los sistemas tratados en esta tesis poseen el mismo tipo de articulaciones, aunque posiblemente tengan distintos parámetros; que además los modelos contienen términos de incertidumbres debido a variaciones paramétricas; se considera también que están sometidos a la fuerza gravitacional; que únicamente se dispone del vector de posiciones, se emplean observadores para estimar el vector de velocidades; se asume que el medio de comunicación entre los sistemas no retrasa el intercambio de señales, lo cual ocurre cuando la distancia entre el maestro y el esclavo es lo suficientemente corta y los sistemas en donde se implementan los algoritmos de control son en tiempo real.

En el capítulo 1 se presenta las definiciones de conceptos y teorías en las que se fundamenta este documento de tesis. En el capítulo 2 se realiza la sincronización de un arreglo de sistemas caóticos de Sprott, robusta ante variaciones paramétricas, bajo una configuración maestro

esclavo. Se emplean observadores de estado y filtros pasabajas para estimar y compensar estas incertidumbres. Se implementa un controlador robusto por modos deslizantes, que se diseña en función de los errores entre las posiciones de los sistemas esclavos y el sistema maestro o de referencia.

En el capítulo 3 se resuelve el problema de teleoperación bilateral de dos sistemas mecánicos de $2GDL$, dividiendo la solución en dos estructuras de control, que entran en operación acorde a la interacción del operador humano con el sistema teleoperado. En la sección 3.1 se define una solución del problema de teleoperación de manera ideal, es decir, se proponen las estructuras de control considerando que se dispone de todas las variables necesarias para el diseño de los controladores. En la sección 3.2 se lleva a cabo el análisis de la implementación de los controladores de la sección anterior. Para lo cual se utilizan observadores de estado para estimar los vectores de velocidad y compensar los términos de incertidumbres y perturbaciones externas a través del control por retroalimentación de estados.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se presentan las definiciones de los principales conceptos empleados en el desarrollo de esta tesis. Se incluyen teorías y definiciones sobre sistemas dinámicos, puntos de equilibrio, existencia y unicidad de soluciones, estabilidad en el sentido de Lyapunov y el modelo matemático de un sistema mecánico utilizando la metodología de Lagrange, así como las propiedades que hacen este modelo útil en el diseño de algoritmos de control.

1.1 Definiciones básicas sobre sistemas dinámicos

En el contexto de sistemas de control, un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos, donde la evolución de sus variables internas se rige por funciones que dependen del tiempo t , donde $t \in T$. Si $T \in \mathbb{Z}$ se dice que el sistema es discreto, si $T \in \mathbb{R}$ se dice que el sistema es continuo.

Las variables internas de los sistemas, se representan generalmente en forma de variables de estado debido a las ventajas que esto conlleva.

Cuando el sistema depende explícitamente de la variable independiente se dice que es no autónomo, caso contrario si no depende explícitamente del tiempo se dice que es autónomo.

Un sistema dinámico puede ser modelado por la ecuación de estado

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, donde cada uno de sus componentes es en general una función no lineal del vector de estado x .

El conjunto de las variables de estado permite modelar la dinámica de un sistema, mientras que el estado es el valor de estas variables en un valor de t específico y a $\mathbb{R}^n$ se le llama espacio de estado.

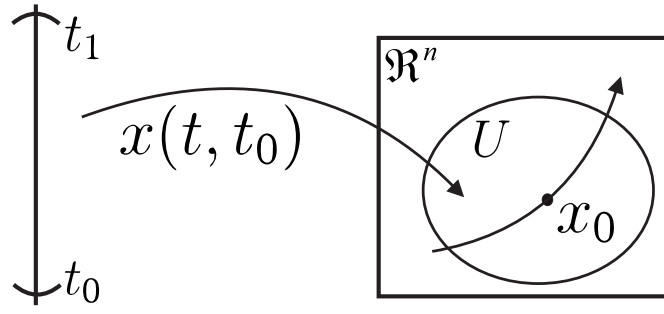


Figura 1. Curva solución de un sistema dinámico.

Una solución $x(t)$ de (1), puede ser constante o variante en el tiempo. Cuando es una solución constante se denomina punto fijo, punto de equilibrio o solución estacionaria.

Cuando es una solución variante en el tiempo, se dice que es una solución dinámica sobre un intervalo $[t_1, t_2]$, donde $x(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que satisface

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),$$

$$\forall t \in [t_1, t_2].$$

La imagen de $x(t)$ es una curva en $\mathbb{R}^n$ y $f(t, x(t))$ representa un vector tangente a la curva en un tiempo t .

Cuando se da un valor inicial $x(t_0) = x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, entonces se encuentra una solución $x(t_0, x_0)$, tal que $x(t_0, x_0) = x_0$. En este caso $x(t, x_0) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ define una curva solución, trayectoria u órbita de la ecuación (1) a través de x_0 , como se muestra en la figura 1.

1.2 Existencia y unicidad de soluciones

Para el análisis de sistemas físicos, es necesario que su dinámica pueda ser modelada a través de una ecuación matemática, cuya resolubilidad depende del hecho de que este modelo matemático tenga una solución y que esta sea única. Estos modelos se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales, que en ocasiones no pueden ser resueltas por métodos convencionales, por lo que es necesario poder determinar con anticipación que esta solución

única exista. En esta sección se presentan algunos teoremas que establecen las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de soluciones.

Definición 1. (Funciones de Clase C^1) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es de clase C^1 en U , y se escribe $f \in C^1(U)$, si existen todas las derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$ para todo $x \in U$, para todo $i = 1, \dots, n$, y las funciones $\partial f / \partial x_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas en U [50].

Teorema 1. (C^1 implica Lipschitz) Sea $f : [t_1, t_2] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, D un dominio en $\mathbb{R}^n$. Si $\partial f / \partial x_i$ existe y es continua en $[t_1, t_2] \times D$, entonces f es localmente Lipschitz en x en $[t_1, t_2] \times D$ [32].

Teorema 2. (De Lagrange) Sea $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[x, y]$ y derivable (C^1) en el intervalo abierto (x, y) . Entonces existe al menos un punto c en el intervalo abierto (x, y) tal que [50]

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Teorema 3. (Existencia y unicidad local) Sea $f(t, x)$ continua en x , pero continua en secciones en t y satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces, existe un $\delta > 0$, tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una solución única en $[t_0, t_0 + \delta]$ [32].

Teorema 4. (Existencia y unicidad global) Sea $f(t, x)$ continua en x , pero continua en secciones en t y satisface

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces, la ecuación de estado (1), con $x(t_0) = x_0$, tiene una solución única en el intervalo $[t_0, t_1]$ [32].

La condición de Lipschitz se utiliza para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias. La continuidad de la función, por sí sola garantiza la existencia de soluciones, pero para poder garantizar también la unicidad de la solución es necesaria la condición Lipschitz [32].

1.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Cuando se habla de estabilidad en sistemas dinámicos, se refiere a estudiar la respuesta del sistema ante pequeñas perturbaciones en el vector de estado. Se dice que un sistema es estable si el movimiento perturbado permanece en el espacio de estados.

Se debe hacer énfasis en que el concepto de estabilidad se aplica a un punto de equilibrio del sistema de la ecuación (1), y no al sistema en sí, ni a sus soluciones. Se asume que el punto de equilibrio es el origen del espacio de estados. Esto se consigue, de ser necesario, mediante una transformación de coordenadas.

Existen varios criterios para determinar la estabilidad de sistemas como el análisis de Bode, Nyquist, Routh, entre otros, sin embargo estos sólo se aplican a sistemas lineales.

En el área de control, el criterio de estabilidad en el sentido de Lyapunov es uno de los más utilizados, esto debido a las ventajas que proporciona en el análisis y diseño de esquemas de control, tanto en sistemas lineales como no lineales. Fue introducido por el matemático Aleksandr Mikhailovich Lyapunov en el siglo XIX. Hay dos métodos principales de análisis: el método indirecto o por linealización, que se utiliza para analizar la estabilidad de un punto de equilibrio empleando para ello una linealización del modelo no lineal; y el método directo que consiste en proponer funciones de Lyapunov y verificar si cumple los criterios de estabilidad, que aunque es una herramienta muy eficiente, sólo establece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad, lo que significa que el hecho de no encontrar una función de Lyapunov apropiada no implica la inestabilidad de un punto de equilibrio.

1.3.1 Estabilidad de equilibrios en el sentido de Lyapunov

El criterio de estabilidad de Lyapunov, define que un punto de equilibrio es estable, si para toda condición inicial que se encuentra en una vecindad atractora de dicho punto, sus respectivas soluciones permanecen en dicha vecindad.

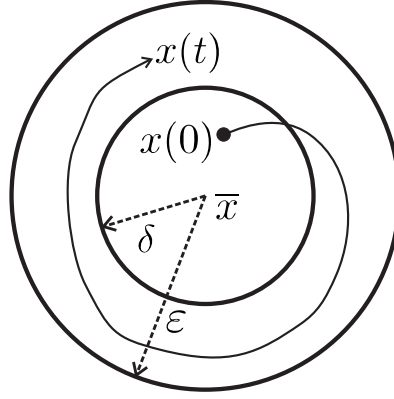


Figura 2. Concepto de estabilidad de Lyapunov.

Se presentan algunas definiciones de estabilidad considerando el sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (2)$$

con punto de equilibrio $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2. (Estabilidad de Lyapunov) El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema (2), se dice que es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $\|x(0)\| < \delta$ entonces $\|x(t)\| < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$; de otro modo el punto de equilibrio es inestable, este concepto se ilustra gráficamente en la figura 2 [32].

Definición 3. (Estabilidad asintótica) Un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema (2), se dice que es asintóticamente estable si éste es estable y si además existe alguna $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$, lo cual implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede ver en la figura 3 [32].

Definición 4. (Estabilidad exponencial) Un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema (2), se dice que es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos α y λ , tal que

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

en alguna región B_R alrededor del origen, este concepto se ilustra en la figura 4 [32], [35].

1.3.2 Método indirecto de Lyapunov

Este método permite obtener conclusiones sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio de un sistema no lineal, en base al análisis de estabilidad del sistema linealizado alrededor de dicho punto de equilibrio.

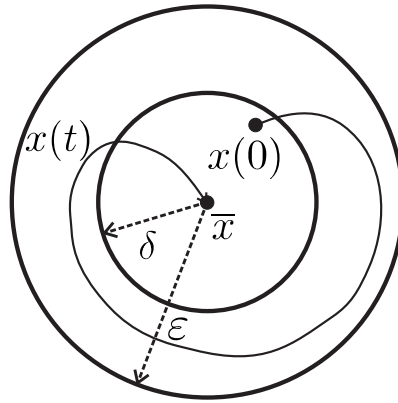


Figura 3. Concepto de estabilidad asintótica.

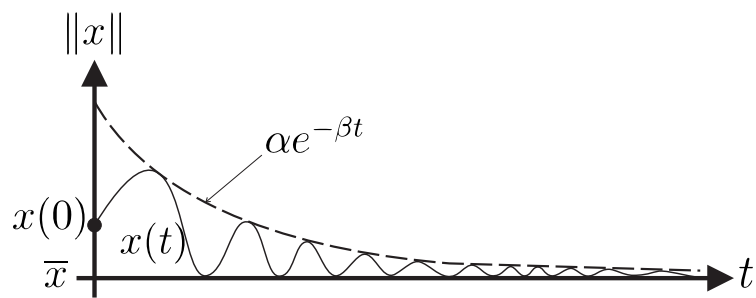


Figura 4. Concepto de estabilidad exponencial.

El siguiente teorema establece los criterios a considerar para caracterizar la estabilidad del sistema no lineal.

Teorema 5. (Método por linealización de Lyapunov) Sea el punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (3)$$

y que $f(x)$ es continuamente diferenciable en ambos argumentos. Entonces el sistema (3) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \right\} x + f_1(x, t), \\ &= A(t)x + f_1(x, t), \end{aligned}$$

donde

$$\dot{x} = A(t)x,$$

es una aproximación lineal del sistema no lineal en el punto de equilibrio.

Sean λ_i los valores propios de la matriz Jacobiana A , ($i = 1, \dots, n$).

- (1) Si el sistema linealizado es estrictamente estable, es decir, si $\text{Re} \{\lambda_i\} < 0$, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable en forma local.
- (2) Si el sistema linealizado es inestable, es decir, si $\text{Re} \{\lambda_i\} > 0$ para al menos un valor de i , entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es inestable.
- (3) Si el sistema linealizado es marginalmente estable, es decir, si $\text{Re} \{\lambda_i\} < 0$ para todo i , y $\text{Re} \{\lambda_i\} = 0$ al menos para un valor de i , entonces no se puede determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal, ni establecer la forma del retrato de fase en torno al origen [34].

Teorema 6. (Hartman-Grobman) Sea el punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (4)$$

con condición inicial $x(0) = x_0$ donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $D \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y D es una vecindad alrededor del origen. Sea la matriz Jacobiana

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

continua sobre D . Entonces, si A no tiene valores propios o imaginarios con parte real nula, existe un homeomorfismo h , es decir, una función que tiene inversa y ambas continuas definidas en una vecindad abierta U alrededor del origen, tal que para cada $x_0 \in U$, hay un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, de modo que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$ se tiene

$$h(\phi(t; t_0, x_0)) = e^{A(t-t_0)}h(x_0),$$

donde $\phi(t; t_0, x_0)$ representa la solución de la ecuación (4) dada a partir de la condición inicial a partir del instante inicial $t = t_0$.

Dicho en otras palabras, h transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

Con fundamento en estos dos teoremas, es posible determinar la estabilidad de un punto de equilibrio; y las características cualitativas del comportamiento de las trayectoria en una vecindad de este punto de equilibrio, para un sistema no lineal a través de su modelo linealizado [46].

1.3.3 Método directo de Lyapunov

Este método es la generalización de un fenómeno físico. El cual establece que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente con derivada negativa, es decir se disipa continuamente, entonces el sistema alcanza un estado de equilibrio. Así se puede concluir la estabilidad de un sistema examinando la variación de una función escalar.

De acuerdo a la teoría de Lyapunov, además de la función de energía, se pueden usar otras funciones para establecer la estabilidad del punto de equilibrio del sistema. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continuamente diferenciable con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen.

Definición 5. (Definida positiva) $V(x)$ es definida positiva si $V(0)=0$ y $V(x)>0$ en $D-\{0\}$.

Definición 6. (Semidefinida positiva) $V(x)$ es semidefinida positiva si $V(0)=0$ y $V(x) \geq 0$ en D .

Definición 7. (Definida negativa) $V(x)$ es definida negativa si $-V(x)$ es definida positiva.

Definición 8. (Semidefinida negativa) $V(x)$ es semidefinida negativa si $-V(x)$ es semidefinida positiva.

La derivada de V sobre las trayectorias del sistema dependen de la ecuación vectorial de estado del sistema, es decir,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\phi(t; t_0, x_0)).$$

Si $\dot{V}(x)$ es negativa, entonces $V(x)$ será decreciente sobre las trayectorias solución del sistema (2).

A la función $V(x)$ se le conoce como función de Lyapunov.

Teorema 7. (Método directo de Lyapunov) Sea $\bar{x} = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2) y sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, que contenga al origen, entonces:

- (1) Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, el origen es un punto de equilibrio estable.
- (2) Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es definida negativa, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable [32], [35], [38].

Teorema 8. (Principio de invarianza de LaSalle) Sea el sistema (2) con el origen como punto de equilibrio. Supongase un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto positivamente invariante y existe una función de Lyapunov $V(x)$ tal que $\dot{V}(x) \leq 0$, y $\dot{V}(x) = 0$ en Ω . Se define

$$\Omega_\epsilon = \left\{ x \in D : \dot{V}(x) = 0 \right\}.$$

Sea Ω_M el conjunto invariante mas grande contenido en Ω_ϵ ($\Omega_M \subset \Omega_\epsilon$) entonces cada solución que inicie en Ω_ϵ se aproxima a Ω_M , $x(t) \rightarrow \Omega_M$ conforme $t \rightarrow \infty$.

En este último teorema se debe establecer que el conjunto invariante mas grande Ω_M es el origen de estados.

El método de análisis de estabilidad de Lyapunov, aunado al principio de invarianza de LaSalle conforman una metodología importante para garantizar la estabilidad de un sistema de control en lazo cerrado [49].

1.4 Estabilidad de sistemas perturbados

Considere el sistema con perturbaciones denotadas por $\xi(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x) + \xi(t, x), \quad (5)$$

donde $f : [0, \infty] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\xi : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas por tramos en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Se considera al sistema (5) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (6)$$

En situaciones típicas no se conoce con exactitud el término $\xi(t, x)$, pero sí se conoce algo de él, como por ejemplo su cota superior $\|\xi(t, x)\|$.

Aquí se considerarán perturbaciones que se pueden escribir como un término aditivo; por ejemplo, las incertidumbres que no cambian el orden del sistema siempre pueden ser representadas en esta forma [32].

1.4.1 Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanecientes

Se dice que una perturbación es desvaneciente si $\xi(t, 0) = 0$. Suponga que $x_e = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6), y sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (8)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (9)$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty] \times \mathcal{D}$ y para algunas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 . Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface el acotamiento de crecimiento lineal

$$\|\xi(t, x)\| \leq \sigma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (10)$$

donde σ es una constante positiva que satisface

$$\sigma < \frac{c_3}{c_4}. \quad (11)$$

Teorema 9. Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov para el sistema nominal que satisface las condiciones (7), (8) y (9) en $[0, \infty) \times D$. Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface (10) y (11). Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema perturbado (5). Además, si todas las condiciones se satisfacen en forma global, entonces el origen es globalmente asintóticamente estable [32].

1.4.2 Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes

Ahora se aborda el caso más general cuando no se sabe si $\xi(t, 0) = 0$. Bajo estas condiciones es posible que el origen $x_e = 0$ ya no sea un equilibrio del sistema perturbado (5). Lo mejor que se puede esperar es que la solución $x(t)$ permanezca en una vecindad del origen, si la perturbación es pequeña en algún sentido.

Supóngase que el origen del sistema nominal (6) es exponencialmente estable. Entonces se tiene el siguiente teorema [32]

Teorema 10. Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (7), (8) y (9) en $[0, \infty) \times D$, donde $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$. Suponga que el término de perturbación satisface

$$\|\xi(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r \quad (12)$$

para toda $t \geq 0$, toda $x \in D$, y alguna constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda $\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2} r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado (5) satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)] \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

para algún tiempo finito T , donde

$$k = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}},$$

$$\gamma = \frac{(1 - \theta) c_3}{2c_2},$$

$$b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}.$$

1.5 Modelo dinámico de sistemas Lagrangianos.

Existen diversas metodologías para establecer las ecuaciones de movimientos de un sistema dinámico como las de Newton y la de Hamilton, sin embargo, la más utilizada es la metodología de Euler-Lagrange, debido a las propiedades matemáticas que implica, lo cual facilita notablemente el desarrollo algebraico al momento de diseñar algoritmos de control.

Se define el Lagrangiano de un sistema mecánico de n grados de libertad $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ como la diferencia entre la energía cinética $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathbf{U}(\mathbf{q})$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

A través del Lagrangiano se define la ecuación de movimiento de un sistema mecánico de n grados de libertad como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representan los vectores de posiciones y velocidades generalizadas, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de entrada, $t \in \mathbb{R}_+$, representa el tiempo y $n \in \mathbb{N}$ y representa el número de grados de libertad.

La energía cinética se puede representar en términos de la velocidad como

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz de inercia. Utilizando esta propiedad y escribiendo en forma compacta, la ecuación de movimiento Euler-Lagrange de un sistema de n grados

de libertad se expresa como

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}), \quad (13)$$

donde $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial.

1.5.1 Propiedades del modelo de Euler-Lagrange

Se enlistan una serie de propiedades matemáticas que hacen del modelo de Lagrange una herramienta útil, y proporcionan simplicidad en cuestiones algebraicas al momento del diseño de algoritmos de control.

1.5.1.1 Matriz de inercia

La matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ define los estados de reposo o movimiento de un sistema dinámico.

Propiedad 1. La matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^T$, definida positiva. Por esta razón existe su matriz inversa $\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}$ y también es una matriz simétrica $\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-T}$ definida positiva.

Propiedad 2. Satisface la desigualdad

$$\lambda_{\min}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) I \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) I,$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad y $\lambda_{\min}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))$ y $\lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q}))$ son los valores propios mínimo y máximo de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

Propiedad 3. El comportamiento inercial satisface que $\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 4. Sólo para los sistemas dinámicos que tienen articulaciones rotacionales, existe una $\beta > 0$, tal que

$$\lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \leq \beta \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,$$

además existe una constante k_M tal que

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{z} - \mathbf{M}(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|,$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

1.5.1.2 Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis

La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ involucra los términos relacionados con las fuerzas adicionales perpendiculares a sus trayectorias que experimentan los sistemas que están expuestos a un movimiento rotacional.

Propiedad 5. La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no es una matriz única, pero el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ sí lo es.

Propiedad 6. Cuando el vector de velocidades es cero, se satisface

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, 0) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ para todo } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad 7. Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se satisface $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x}$.

Propiedad 8. Las matrices $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ satisfacen

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0,$$

donde $[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ es antisimétrica.

Propiedad 9. Otra relación que satisfacen las matrices $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$

Propiedad 10. Sólo para sistemas dinámicos que tienen articulaciones rotacionales, existe una constante positiva k_{C_1} tal que

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|,$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 11. Sólo para sistemás dinámicos que tienen articulaciones rotacionales, existe una constante positiva k_{C_1} y k_{C_2} tal que

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - \mathbf{C}(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\|,$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

1.5.1.3 Vector de pares gravitacionales

El vector $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ incluye los términos relacionados con la fuerza gravitacional, se obtiene como el gradiente de la energía potencial

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Propiedad 12. Sólo para sistemás dinámicos que tienen articulaciones rotacionales, existe una constante positiva $k_g > 0$ tal que

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,$$

además

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Donde k_g se puede calcular como

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} \right| \right),$$

donde $g_i(\mathbf{q})$ es el i - ésimo elemento del vector $\mathbf{G}(\mathbf{q})$.

Propiedad 13. Sólo para sistemás dinámicos que tienen articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{q})\| \leq k' \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad 14. El vector de pares gravitacionales $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ satisfacen [49]

$$\int_0^t \mathbf{G}(\mathbf{q}(\sigma))^T \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \mathbf{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathbf{U}(0).$$

1.5.1.4 Linealidad en parámetros

Considerando el modelo dinámico (13), para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, se satisface

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{w})\mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

donde $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es un vector de $n \times 1$, $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es una matriz de $n \times m$ y el vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ depende únicamente de los parámetros dinámicos del sistema mecánico y de su carga.

Si $\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in L_\infty^{n \times m}$. Siempre es posible encontrar un vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{k}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Considerando esto y tomando $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$, la ecuación (13) puede escribirse como

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

donde $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \Phi(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times m$ y $\boldsymbol{\theta}$ es un vector $m \times 1$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos [30].

1.6 Observadores de estado

Un observador de estado, o simplemente observador, se puede definir como un sistema alternativo que utiliza la misma información de entrada y las variables disponibles del sistema observado, para predecir el comportamiento de sus variables internas, cuya medición no se encuentra disponible de manera directa. A este proceso se le conoce como observación. La información de estas variables internas es de vital importancia para modelar, detectar fallas o diseñar un algoritmo de control para el sistema. Esto hace de un observador el elemento central en el diseño de ciertos controladores, como se ilustra en la figura 5.

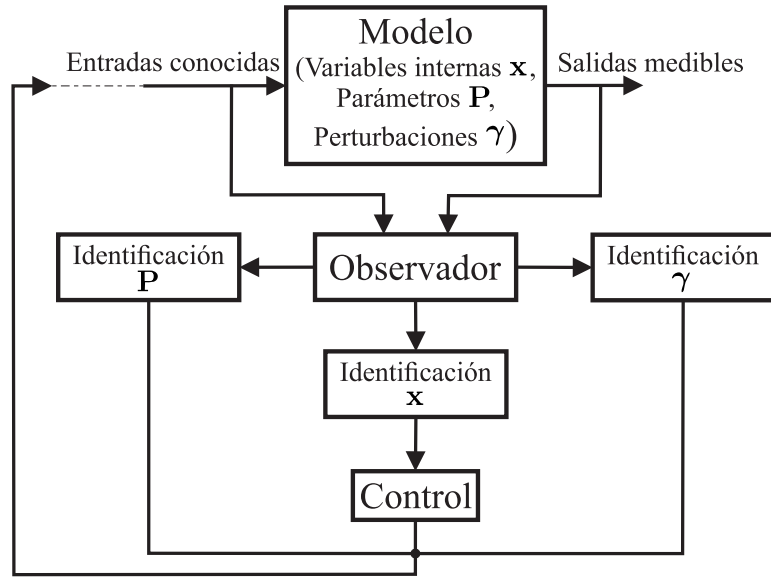


Figura 5. El observador como parte fundamental de un sistema de control.

Las propiedades que debe poseer un observador, son robustez a errores en los parámetros del modelo y en las medidas, inmunidad al ruido, rapidez de convergencia y baja carga de software. Algunas de estas propiedades entran en conflicto, como la rapidez de convergencia y la inmunidad al ruido, por lo que al momento del diseño se da prioridad a una de ellas, reduciendo en lo posible la otra. Primordialmente los observadores se diseñan para optimizar la velocidad de convergencia.

Se habla de una observación completa cuando se estiman todas las variables de un sistema; o de una observación de orden reducido cuando solo se estiman un subconjunto de éstas [7].

El diseño de observadores inició en la década de los 40's, el observador de Luenberger sentó precedentes en este tema, que ahora es un campo muy amplio de investigación, lleva el nombre en honor a su creador, quien lo propuso como parte de su trabajo doctoral.

Defínase un sistema dinámico descrito por las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), y(t), t), \quad (14)$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (15)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u(t)$ es la entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Siendo $u(\tau)$ y $y(\tau)$ conocidas para $0 \leq \tau \leq t$, se puede obtener una estimación $\hat{x}(t)$ de $x(t)$.

Definición 9. *El sistema auxiliar*

$$\dot{\hat{x}}(t) = H(x(t), u(t), y(t), t),$$

es un observador de estado si

$$\hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0, \quad (16)$$

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Cuando (17) se mantiene para todo $x(0)$, $\hat{x}(0)$, se dice que el observador es global. Ahora, cuando (17) se mantiene con una convergencia exponencial, se dice que el observador es exponencial, y si (17) se mantiene con una tasa de convergencia que pueda ser sintonizada, entonces se dice que el observador es sintonizable.

Se define el error del observador como

$$e = \hat{x}(t) - x(t). \quad (18)$$

El objetivo en el diseño de un observador será disminuir la diferencia (18) conforme se incrementa t . Este error se debe a las distintas condiciones iniciales del sistema [47].

1.6.1 Observador de Luenberger

La estructura de este observador es quizá la más reconocida, fue propuesto por David G. Luenberger en 1937. Es un observador de orden completo. Su representación en bloques se puede ver en la figura 6. En su diseño original fue desarrollado para sistemas lineales donde ha sido muy estudiado y demostrado mucha utilidad. No obstante, aunque también se ha adaptado para sistemas no lineales, la teoría no es lo suficientemente completa ni exitosa. Por lo que el diseño de observadores es todo un campo de estudio en la actualidad [17], [18], [37], [55].

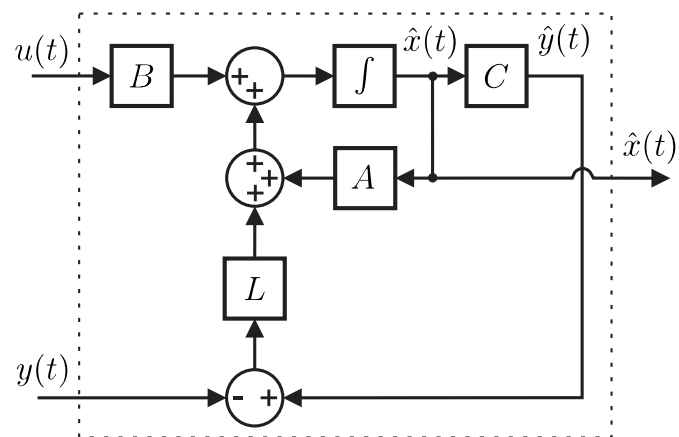


Figura 6. Diagrama a bloques del Observador de Luenberger.

Considerando el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (19)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad x(0) = x_o \neq 0, \quad (20)$$

en el que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ son escalares, y las matrices (A, B, C) son conocidas.

El observador de estado está compuesto por una reproducción del sistema más un término adicional de corrección. Se define $x(t)$ como el estado del sistema y $\hat{x}(t)$ como el estado estimado del sistema. Entonces la estructura del observador es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}. \end{aligned} \quad (21)$$

El observador (21) estima la salida del sistema, además de corregir la ecuación dinámica mediante la ganancia L con un término que es proporcional al error entre la salida del sistema real $y(t) = Cx(t)$ y la salida estimada $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$.

Para demostrar el funcionamiento del observador, se define el error entre los estados reales del sistema y los estimados

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

cuya dinámica es

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t),$$

sustituyendo 19 y 20, se tiene

$$\dot{e}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(y(t) - \hat{y}(t)) = (A - LC)e(t),$$

de este modo $\hat{x} \rightarrow x(t)$ si los valores propios de la matriz $A - LC$ son estables, es decir, que se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto debido a que la solución

de la ecuación $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$ es

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e_0 = e^{(A-LC)} (x(0) - \hat{x}(0)).$$

De tal manera que si los valores propios de $A - LC$ tienen todas partes reales negativas, el error $e(t)$ tiende a ser cero sin importar su condición inicial. Lo cual se traduce en que el observador de Luenberger, a medida que pasa el tiempo, mejora asintóticamente la estimación de los estados, esto bajo el supuesto conocimiento exacto del modelo del sistema y de sus parámetros.

De esto se concluye que el problema de diseño de un observador se reduce a la determinación de una ganancia del observador L tal que los valores propios de la matriz $A - LC$ estén todos en el semiplano izquierdo.

1.6.2 Diseño de observadores robustos

Considere un sistema lagrangiano de n grados de libertad definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}(t) &= \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz centrífuga y de Coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector de pares gravitacionales, $\boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\theta}$ contiene los términos producidos por variaciones en los parámetros $\boldsymbol{\theta}$; $\boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ es una matriz con dimensión $n \times m$ y $\boldsymbol{\theta}$ es un vector con dimensión $m \times 1$. $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de perturbaciones externas que se considera acotado, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas generalizadas de entrada y $\mathbf{q}$ es la salida del sistema.

Definiendo las variables de estado $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, la representación del sistema (22) en variables de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \dot{\mathbf{x}}_2 + \boldsymbol{\xi}(\cdot) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$y = x_1, \quad (24)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{G}(\mathbf{x}_1),$$

$$\boldsymbol{\xi}(\cdot) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) (\varphi(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}(t)).$$

Se asume que el vector de entarada $\boldsymbol{\tau}$ y de perturbación $\boldsymbol{\gamma}(t)$ son acotados tal que el comportamiento del sistema (23-24) es acotado.

En [53] se propone el observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}^{-1}(\cdot) \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{H}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}_1, \quad (26)$$

donde el vector $\mathbf{H}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ tiene la forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{C}_3 \text{sign}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ son matrices diagonales definidas positivas.

Para encontrar las condiciones sobre las matrices $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ tal que el sistema (25-26) sea un observador para el sistema (23-24) se definen las variables de error $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2$, la dinámica de estas variables está dada por el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{e}) + \boldsymbol{\xi}(\cdot) - \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{C}_3 \text{sign}(\mathbf{e}_1) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Debido a que la función $\mathbf{f}(\cdot)$ es Lipschitz, se tiene que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{e})\| \leq \rho_1 \|\mathbf{e}\|$$

donde ρ_1 es una constante positiva. De esta manera se puede definir un nuevo término de perturbación $\Psi(\cdot)$

$$\Psi(\cdot) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{e}) + \xi(\cdot)$$

que está acotado de la siguiente forma

$$\|\Psi(\cdot)\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \xi(\cdot)\| \leq \rho_0 + \rho_1 \|\mathbf{e}\|.$$

Proposición 1. *Para el sistema (27) es posible encontrar un conjunto de matrices $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ tal que el origen del espacio del error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. Entonces el sistema definido por (25) y (26) es un observador para el sistema definido por (23) y (24).*

Prueba. Se hace el cambio de variables

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{e}_1, \\ v_2 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1 \rightarrow \mathbf{e}_2 = v_2 + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

La dinámica del sistema (27) en el nuevo espacio de coordenadas está dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -\mathbf{C}_2 v_1 - \mathbf{C}_1 v_2 + \Psi(\cdot) - \mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1). \end{aligned} \tag{28}$$

Sea $\rho_1 < 1/(2\lambda_{\max}(P))$, donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov para cada subsistema. Aplicando el teorema 1 termina la prueba. ■

Las condiciones para el diseño de cada elemento de las matrices $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ son las siguientes:

Las constantes $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ y $\mathbf{C}_3$ deben elegirse tal que

$$\rho_1 < 1/(2\lambda_{\max}(P)), \tag{29}$$

$$\mathbf{C}_3 > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{\mathbf{C}_2 \rho_0}{\theta} \right), \quad (30)$$

donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -I$.

1.6.2.1 Identificación de perturbaciones

El sistema (28) tiene una superficie de discontinuidad en $v_1 = 0 \in \mathbb{R}^n$ y el término $\mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden [6]; es decir, el control (término discontinuo $\mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1)$) aparece hasta la segunda derivada de la superficie de discontinuidad

$$\ddot{v}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\xi}(\cdot) - \mathbf{C}_2 v_1 - \mathbf{C}_1 v_2 - u_{eq}.$$

Entonces, el control equivalente se presenta en $v_1 = v_2 = 0$, que es equivalente a $e_1 = e_2 = 0$ e implica $x = \hat{x}$; de esta manera el control equivalente está dado por

$$\begin{aligned} u_{eq} &= \boldsymbol{\xi}(\cdot), \\ &= -\mathbf{M}^{-1}(\cdot) (\boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}(t)), \end{aligned}$$

entonces

$$\Sigma(\cdot) \equiv -\mathbf{M}(\cdot) u_{eq} = \boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\gamma}(t).$$

Como se ve de la expresión anterior, el control equivalente está formado por los términos de perturbación, y como es bien conocido, el control equivalente es el promedio del término $\mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1)$ cuando las trayectorias llegan al origen. En este caso, la convergencia a la superficie de discontinuidad es en forma exponencial, de esta manera se pueden aproximar los términos de perturbación en forma asintótica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1(t))} = u_{eq},$$

donde $\overline{\mathbf{C}_3 \text{sign}(v_1(t))}$ indica el promedio.

Si el término $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ no depende de variaciones paramétricas,

$$\boldsymbol{\xi}(\cdot) = \boldsymbol{\gamma}(t),$$

el término de perturbaciones externas $\gamma(t)$ puede identificarse directamente a partir del control equivalente,

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(t) &= -\mathbf{M}(\cdot) u_{eq} \\ &= -\mathbf{M}(\cdot) \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{C}_3 \text{sign}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))}.\end{aligned}$$

1.7 Sincronización de sistemas dinámicos

La palabra sincronización proviene de la palabra griega syn- que significa simultáneamente y -khronos que significa tiempo, así pues, sincronización se puede definir como coincidencia de hechos o fenómenos en el tiempo, correlación o correspondencia en tiempo entre dos o más sistemas dinámicos [8].

La sincronización es un fenómeno que se presenta de manera natural en muchos sistemas de la naturaleza y que puede reproducirse en sistemas construidos por el hombre a través de entradas artificiales de interconexión.

De acuerdo al número de estados sincronizados se clasifica en sincronización completa y en sincronización parcial, si todas las variables de estado o sólo un subconjunto de ellas se sincroniza.

De acuerdo a la relación que existe entre los estados, la sincronización puede ser idéntica, de fase o aproximada, dependiendo de la función que relacione dichos estados.

Por otro lado de acuerdo al tipo de conexión entre los sistemas se puede clasificar en sincronización interna (bidireccional) o sincronización externa (unidireccional). En el primer caso la fuerza de interconexión entre los sistemas es igual, es decir, la dinámica de un sistema no tiene prioridad sobre la otra. En el segundo caso, se establece que un sistema tiene mas influencia que los otros y su movimiento es considerado independiente de los demás. El movimiento sincronizado es predeterminado por este sistema dominante, generando un esquema maestro esclavo [5], [11], [10], [8], [9], [52].

1.7.1 Sincronización natural

De acuerdo a [8], considérese k sistemas dinámicos

$$\Sigma_i = \{T, U_i, X_i, Y_i, \Phi_i, h_i\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

donde T es el conjunto de instantes de tiempo, U_i, X_i, Y_i son el conjunto de entradas, estados y salidas respectivamente; $\Phi_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow X_i$ es el conjunto de mapas de transición, $h_i : T \times X_i \times U_i \rightarrow Y_i$ es el conjunto de mapas de salida.

En muchos casos, los conjuntos U_i, X_i, Y_i son espacios vectoriales de dimensión finita, y los sistemas Σ_i pueden representarse por ecuaciones diferenciales ordinarias.

En un primer caso, considérese el conjunto de sistemas desacoplados sin entradas,

$$\Sigma_i : \frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (31)$$

es decir, el conjunto U_i no está presente, donde $x_i \in \mathbb{R}_i^n$ es el vector de estado de cada sistema. Para cada Σ_i se define un conjunto de salidas $y_i = h_i(x_i) \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, k$, donde $h_i : \mathbb{R}_i^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Cuando la sincronización ocurre en sistemas desconectados de la forma (31), se conoce como sincronización natural.

Resulta más interesante la sincronización natural de sistemas interconectados en donde los sistemas pueden ser representados como

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad i = 1, \dots, k, \quad (32)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad (33)$$

donde $\tilde{F}_i$ es la función que describe las interconexiones y F_0 describe la dinámica del sistema de interconexión.

Para establecer el caso de sincronización natural en sistemas interconectados de la forma (32), se debe incluir un sistema dinámico (33) que describa la interconexión entre los sistemas. La sincronización en sistemas de la forma (32) se denomina auto sincronización.

En la definición de sincronización natural, se supone que el conjunto de entradas de cada sistema $\Sigma_i, i = 1, \dots, k$ no están presentes. Para describir ahora las posibles interconexiones, se supondrá que las entradas de cada sistema $\Sigma_i, i = 1, \dots, k$ podrán depender de las salidas del sistema de interconexión $\Sigma_0 = \{T, U_0, X_0, Y_0, \Phi_0, h_0\}$ donde los mapas de transición y de salida están dados por $\Phi_0 : T \times X_0 \times U_0 \rightarrow X_0$ y $h_0 : T \times X_0 \times U_0 \rightarrow Y_0$ con $U_0 = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k$ y $Y_0 = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$.

Definanse l funcionales ε_g

$$\varepsilon_g(y_i(t), \dots, y_k(t)), \quad g = 1, \dots, l.$$

Definición 10. Se dice que las salidas $y_1(t), \dots, y_k(t)$ de los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están sincronizadas con respecto a las funcionales $\varepsilon_g(\cdot)$ si

$$\varepsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)) \equiv 0, \quad g = 1, \dots, l,$$

y se satisface para todo $t \in T$, donde T es el conjunto de tiempo, $T = \mathbb{R} \geq 0$ para tiempo continuo, o $T = \mathbb{Z} \geq 0$ para tiempo discreto.

Definición 11. Se dice que las salidas $y_1(t), \dots, y_k(t)$ de los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están aproximadamente sincronizadas con respecto a la funcional $\varepsilon_g(\cdot)$ si existe una constante $\zeta > 0$ tal que

$$|\varepsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot))| \leq \zeta,$$

para toda $t \in T$.

Definición 12. Finalmente, las salidas $y_1(t), \dots, y_k(t)$ de los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, con condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están asintóticamente sincronizadas con respecto a la funcional $\varepsilon_g(\cdot)$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)) = 0.$$

1.7.2 Sincronización controlada

Las definiciones anteriores hacen referencia al caso en que la sincronización se manifiesta de manera natural y no contemplan la posibilidad de controlar el sistema. Supongamos ahora que $\Sigma_i, i = 1, \dots, k$ son sistemas de dimensión finita, y se pueden describir por ecuaciones diferenciales con una entrada de control de dimensión finita

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_i, t) + \tilde{F}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t), \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{dx_0}{dt} &= F_0(x_0, x_1, \dots, x_k, u, t),\end{aligned}$$

donde $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$.

El problema de la sincronización controlada con respecto a la funcional ϵ_g es encontrar una entrada de control u , como una función de retroalimentación de los estados $x_0, x_1, \dots, x_n$, tal que las condiciones de sincronización dada por dicha funcional sean satisfechas.

La forma más simple es la retroalimentación estática de estado, donde la ecuación del controlador tiene la siguiente forma

$$u(t) = \ell(t, x_{1i}, \dots, x_{ki}),$$

para alguna función $\ell : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Una forma más general es la retroalimentación dinámica de estados

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= W(x_0, x_1, \dots, x_k, w, t), \\ u(t) &= \ell(x_0, x_1, \dots, x_k, w, t),\end{aligned}$$

con $w \in \mathbb{R}^v$, $W : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^v \times T \rightarrow \mathbb{R}^v$, $\ell : \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^v \times T \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ahora se pueden definir todos los casos de sincronización antes mencionados en su versión de sincronización controlada.

El término de sincronización controlada tiene efecto únicamente cuando no se presenta la sincronización de forma natural, y es necesario incluir una retroalimentación estática o dinámica del estado para lograr la sincronización a través de interconexiones artificiales [8].

1.8 Teleoperación de sistemas mecánicos

La palabra teleoperación proviene del griego tele- que significa a distancia o remoto, y del latín -operatio que significa operación o realización de una tarea. Entonces teleoperación se refiere a la manipulación de un dispositivo de forma remota a través de comandos emitidos por el hombre para realizar una tarea específica. Concepto que surge de la necesidad del ser humano por expandir sus habilidades y percepciones sensoriales en sitios remotos, microscópicos, de difícil acceso o cuyo ambiente es perjudicial para su salud.

Un sistema teleoperado está compuesto por cinco elementos interconectados: un operador humano que emite comandos a través de una interfaz háptica o dispositivo maestro, que controla un teleoperador remoto o dispositivo esclavo, que interactúa con el entorno circundante a través de un canal de comunicación mediante el cual se intercambia información entre el operador humano y el teleoperador remoto [4], [36], [36].

Despreciando la fricción, fuerzas gravitacionales y otras perturbaciones, un sistema teleoperado se puede definir matemáticamente utilizando las ecuaciones de Lagrange

$$\Sigma_m : \mathbf{M}_m(\mathbf{q}_m) \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \dot{\mathbf{q}}_m = \boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{t}) + \mathbf{F}_h(\mathbf{t}), \quad (34)$$

$$\Sigma_s : \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s = \boldsymbol{\tau}_s(\mathbf{t}) + \mathbf{F}_e(\mathbf{t}), \quad (35)$$

donde el mecanismo esclavo Σ_s , imita la dinámica del mecanismo maestro Σ_m , quien a su vez recibe información del esclavo a modo de retroalimentación, traducida como torques de entrada [27]. Los vectores $\mathbf{q}_j(\mathbf{t})$, $\dot{\mathbf{q}}_j(\mathbf{t})$ y $\ddot{\mathbf{q}}_j(\mathbf{t})$, $\in \mathbb{R}^n$, para $j = m, s$, son respectivamente, los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones, $\mathbf{M}_j(\mathbf{q}_j) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis y $\boldsymbol{\tau}_j(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de entrada.

En la ecuación (34), el término $\mathbf{F}_h(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de fuerzas aplicadas por el operador humano sobre el mecanismo maestro, también conocidas como fuerzas de acción, mientras que en la ecuación (35), el término $\mathbf{F}_e(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de fuerzas resultantes de la interacción del mecanismo esclavo con el ambiente remoto, también conocidas como fuerzas de reacción.

El problema consiste en diseñar las entradas $\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{t})$ y $\boldsymbol{\tau}_s(\mathbf{t})$, tal que si $\mathbf{F}_h = \mathbf{F}_e = 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_m(\mathbf{t}) - \mathbf{q}_s(\mathbf{t})\| = 0, \quad (36)$$

y que si $\ddot{\mathbf{q}}_m(\mathbf{t}), \ddot{\mathbf{q}}_s(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{q}}_m(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{q}}_s(\mathbf{t}) \rightarrow 0$, entonces

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{F}_e(\mathbf{t}). \quad (37)$$

En la medida en que se cumplan los objetivos de control (36) y (37) [21], se puede establecer el nivel de desempeño del sistema teleoperado en cuestión de robustez, eficacia en el desempeño de la tarea, telepresencia y transparencia, que de acuerdo a [43], son los cuatro factores básicos que caracteriza a un sistema de teleoperación, que son fundamentales para lograr una conexión cinestésica entre el operador humano y el entorno circuncidante, y así cumplir los objetivos mencionados, incluso a pesar de los errores mismos del operador [41].

La teleoperación se puede clasificar de acuerdo a la forma en que se suscita el intercambio de información entre el operador local con el teleoperador remoto.

1.8.1 Teleoperación bilateral

El caso más general se presenta cuando se diseñan las entradas de control $\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{t})$ y $\boldsymbol{\tau}_s(\mathbf{t})$, de tal manera que exista un intercambio recíproco de información háptica, como sensaciones de contacto, fuerzas, posiciones y velocidades entre el mecanismo maestro y el esclavo, se dice entonces que el sistema es teleoperado bilateralmente, como se puede ver en la figura 7. Esta forma de teleoperación tiene aplicaciones por ejemplo en telecirugías, manipulación de objetos explosivos o radiactivos, [16], [22], [62].

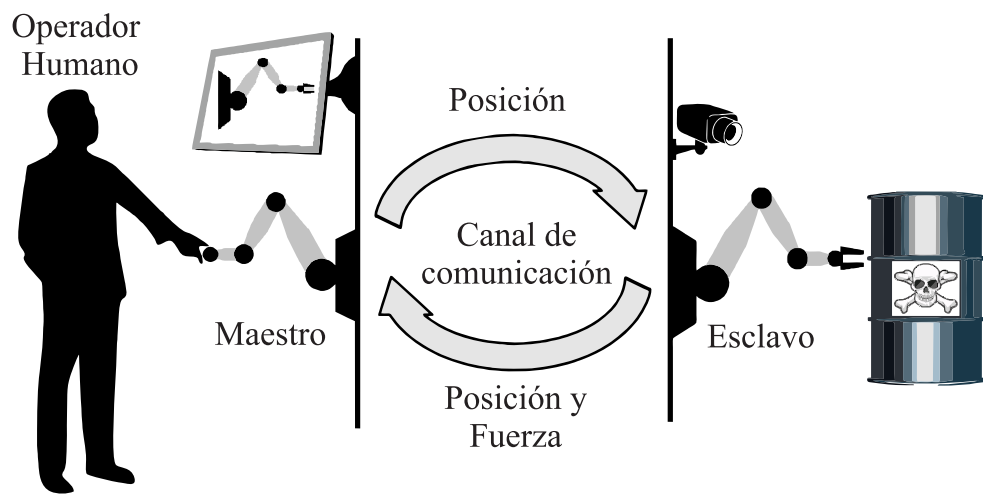


Figura 7. Esquema de teleoperación bilateral.

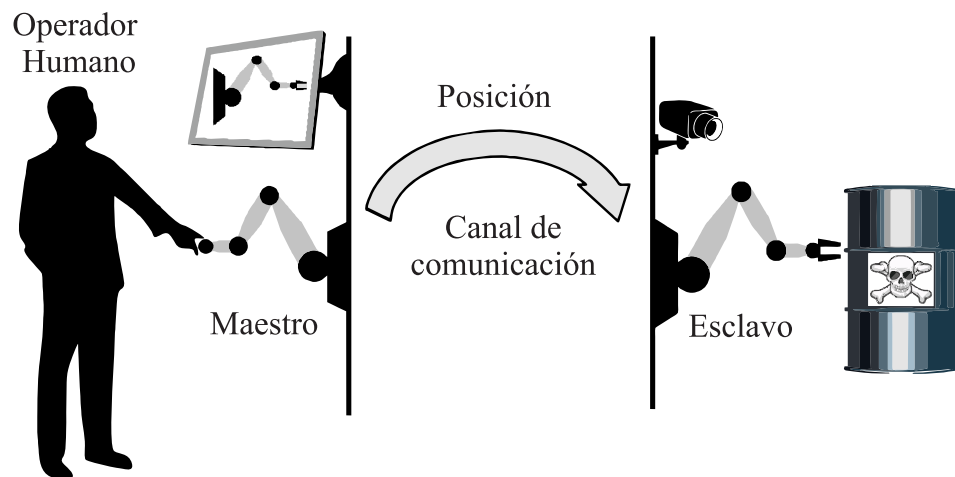


Figura 8. Esquema de teleoperación unilateral.

1.8.2 Teleoperación unilateral

Un caso particular es la teleoperación unilateral, la cual se presenta cuando en el modelo (34) la entrada $\tau_m(t) = 0$, es decir, cuando sólo fluye información del maestro al esclavo. En este caso, la información que llega al operador humano suele ser por medio de una interfaz visual únicamente, como se puede ver en la figura 8. Este tipo de teleoperación suele ser empleada cuando no es necesario recibir información resultante de la interacción del esclavo con el ambiente remoto [41], como puede ser por ejemplo la manipulación de vehículos no tripulados [64].

Capítulo 2

Sincronización robusta de un arreglo de sistemas de Sprott

Considérese k sistemas dinámicos no lineales, conocidos como circuitos de Sprott [56], cuyo modelo es

$$\Sigma_i : \frac{d^3 y_i}{dt^3} + (a_0 + \Delta_{a_i}) \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt} = G_{l_i}(y_i) + u_i, \quad (38)$$

para $i = 1, \dots, k$, donde $G_{l_i}(y_i)$ puede ser una de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} G_{a_i}(y_i) &= (b_0 + \Delta_{b_i}) |y_i| - (c_0 - \Delta_{c_i}), \\ G_{b_i}(y_i) &= -(b_0 + \Delta_{b_i}) \max(y_i, 0) + (c_0 - \Delta_{c_i}), \\ G_{c_i}(y_i) &= (b_0 + \Delta_{b_i}) y_i - (c_0 - \Delta_{c_i}) \operatorname{sign}(y_i), \\ G_{d_i}(y_i) &= -(b_0 + \Delta_{b_i}) y_i + (c_0 - \Delta_{c_i}) \operatorname{sign}(y_i), \end{aligned} \quad (39)$$

y_i representa la salida del sistema, a_0 , b_0 y c_0 son valores nominales propuestos en [56], para cada sistema (38) que presenta un comportamiento caótico; Δ_{a_i} , Δ_{b_i} y Δ_{c_i} representan una variación paramétrica debido a las tolerancias de los componentes electrónicos y u_i es una entrada de acoplamiento que debe ser diseñada para cada nodo.

Una representación en el espacio de estado del sistema (38), considerando $x_{1_i} = y_i$, $x_{2_i} = dy_i/dt$ y $x_{3_i} = d^2 y_i/dt^2$, es

$$\begin{aligned} \Sigma_i : \begin{bmatrix} \dot{x}_{1_i} \\ \dot{x}_{2_i} \\ \dot{x}_{3_i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{2_i} \\ x_{3_i} \\ -a_0 x_{3_i} - x_{2_i} + G_{l_i}(x_{1_i}) + \gamma_i(x_{1_i}) + u_i \end{bmatrix}, \\ y_i &= x_{1_i}. \end{aligned} \quad (40)$$

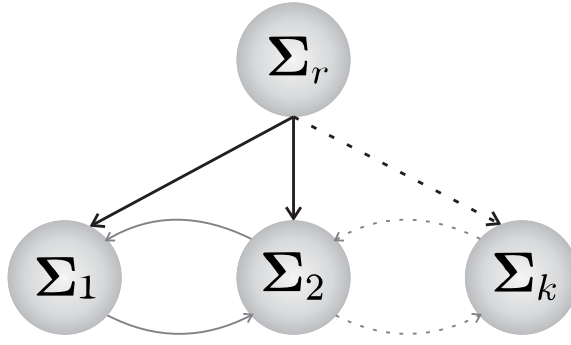


Figura 9. Esquema de interconexión maestro esclavo.

donde $\gamma_i(x_{1_i})$ es un término de perturbación debido a variaciones paramétricas, que es desconocido pero acotado. También se considera el sistema de referencia dado por

$$\begin{aligned} \Sigma_r : \begin{bmatrix} \dot{x}_{1_r} \\ \dot{x}_{2_r} \\ \dot{x}_{3_r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{2_r} \\ x_{3_r} \\ -a_0 x_{3_r} - x_{2_r} + G_{l_r}(x_{1_r}) + \gamma_r(x_{1_r}) \end{bmatrix} \\ y_r &= x_{1_r}. \end{aligned} \quad (41)$$

El sistema (41), está definido de la misma manera que el sistema (40), pero en este caso la entrada de acoplamiento no está presente.

En la figura 9 se muestra un ejemplo de una gráfica de conexión con tres nodos Σ_i y un sistema de referencia Σ_r que describe la ausencia o presencia de entradas de acoplamiento de un arreglo entre el sistema de referencia (41) y los nodos (40). Las líneas delgadas representan las conexiones entre los nodos y las líneas gruesas representan la conexión del sistema de referencia con los nodos.

Cada una de las esferas de la figura 9 representa al nodo Σ_i , las líneas representan una señal de acoplamiento y las flechas indican la dirección del flujo de información. Se considera que el nodo Σ_r es el nodo de referencia, es decir, el maestro.

El problema consiste en diseñar las entradas de acoplamiento u_i , tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, \quad (42)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_r(t) - y_i(t)\| = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad (43)$$

sea satisfecho para todo $\mathbf{y}_i(0), \mathbf{y}_j(0), \mathbf{y}_r(0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2.1 Solución del problema de sincronización

Para satisfacer el objetivo de control (42) se aplica una técnica de sincronización de sistemas dinámicos basada en [54]. Se resuelve el problema de sincronización bajo un esquema maestro esclavo, como un problema introductorio al contexto de la teleoperación. Donde el sistema maestro impone su dinámica a otros sistemas denominados esclavos.

Se establece el conjunto de k funcionales como la combinación lineal de los errores $e_{i,j}$ y $e_{i,r}$

$$\epsilon_i(\cdot) = \sum_{j=1, j \neq i}^k \beta_{i,j} e_{i,j} + \alpha_{i,r} e_{i,r}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (44)$$

donde

$$e_{i,r} = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_r,$$

se define como los errores entre los nodos y el sistema de referencia y

$$e_{i,j} = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j$$

representa el error entre los nodos y el sistema de referencia. $\beta_{i,j}$ y $\alpha_{i,r}$ son constantes. Si existe un acoplamiento entre el nodo $\mathbf{y}_i$ y el sistema de referencia $\mathbf{y}_r$, entonces $\alpha_{i,r} = 1$; en caso contrario $\alpha_{i,r} = 0$. De forma similar, las constantes $\beta_{i,j}$ indican la presencia o ausencia de comunicación entre el nodo $\mathbf{y}_j$ y el nodo $\mathbf{y}_i$.

Una representación del sistema (44) en forma matricial es

$$\epsilon = B\mathbf{y}_i - A\mathbf{y}_r, \quad (45)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon &= [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \cdots \ \epsilon_j \ \cdots \ \epsilon_k]^T, \\ \mathbf{y}_i &= [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_j \ \cdots \ \mathbf{y}_k]^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,r} + \sum_{i=1, i \neq 1}^k \beta_{1,i} & -\beta_{1,2} & \cdots & -\beta_{1,j} & \cdots & -\beta_{1,k} \\ -\beta_{2,1} & \alpha_{2,r} + \sum_{i=1, i \neq 2}^k \beta_{2,i} & \cdots & -\beta_{2,j} & \cdots & -\beta_{2,k} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ -\beta_{j,1} & -\beta_{j,2} & \cdots & \alpha_{j,r} + \sum_{i=1, i \neq j}^k \beta_{j,i} & \cdots & -\beta_{j,k} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -\beta_{k,1} & -\beta_{k,2} & \cdots & -\beta_{k,j} & \cdots & \alpha_{k,r} + \sum_{i=1, i \neq k}^k \beta_{k,i} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,r} & \alpha_{2,r} & \cdots & \alpha_{j,r} & \cdots & \alpha_{k,r} \end{bmatrix}^T,$$

se considera que $\mathbf{y}_r \in \Re$ y que las matrices y vectores tienen dimensiones adecuadas.

Teorema 11. Si el vector $\mathcal{A} \neq 0$, entonces la matriz $\mathcal{B}$ es no singular y las funcionales (44) son igual a cero, como consecuencia los nodos (40) y el sistema de referencia (41) se sincronizan de acuerdo a la Definición 8 [2].

Se debe notar que si las funcionales (44) no son cero, entonces se puede lograr el objetivo de sincronización establecido en la Definición 9, si las entradas u_i logran que las funcionales (44) converjan a cero. El diseño de estas señales se muestra en la siguiente sección. En la práctica, debido a las no linealidades de los sistemas, tiende a lograr una sincronización aproximada como se establece en la Definición 10.

2.1.1 Diseño de las señales de acoplamiento

Para diseñar las señales de acoplamiento $\mathbf{u}_i$ se definen las variables de estado

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathcal{B}\mathbf{x}_1 - \mathcal{A}\mathbf{x}_{1,r}, \\ z &= \mathcal{B}\mathbf{x}_2 - \mathcal{A}\mathbf{x}_{2,r}, \\ w &= \mathcal{B}\mathbf{x}_3 - \mathcal{A}\mathbf{x}_{3,r}, \end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= z, \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -A_0 w - z + \mathcal{B}G_l(\mathbf{x}_1) - \mathcal{A}G_{l_r}(\mathbf{x}_{1_r}) + \mathcal{B}\Gamma(\mathbf{x}_1) - \mathcal{A}\gamma_r(\mathbf{x}_{1_r}) + \mathcal{B}U,\end{aligned}\tag{47}$$

donde

$$\begin{aligned}A_0 &= \text{diag}\{a_0\}, \\ G_l(\mathbf{x}_1) &= \begin{bmatrix} G_{l_1}(\mathbf{x}_{1_i}) & G_{l_2}(\mathbf{x}_{1_2}) & \cdots & G_{l_k}(\mathbf{x}_{1_k}) \end{bmatrix}^T, \\ \Gamma(\mathbf{x}_1) &= \begin{bmatrix} \gamma_1(\mathbf{x}_{1_i}) & \gamma_2(\mathbf{x}_{1_2}) & \cdots & \gamma_k(\mathbf{x}_{1_k}) \end{bmatrix}^T, \\ U &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{1_1} & x_{1_2} & \cdots & x_{1_k} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} x_{2_1} & x_{2_2} & \cdots & x_{2_k} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_3 &= \begin{bmatrix} x_{3_1} & x_{3_2} & \cdots & x_{3_k} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Ahora el problema recae en diseñar un vector de control U para estabilizar el origen del sistema (47). Es importante considerar lo siguiente:

- (1) El sistema (47) tiene una parte lineal y una parte no lineal que depende solo de $\mathbf{x}_1$, $\mathcal{B}G_l(\mathbf{x}_1) - \mathcal{A}G_{l_r}(\mathbf{x}_{1_r})$, que es un término conocido.
- (2) La matriz $\mathcal{B}$ es invertible.
- (3) Los sistemas de Sprott son circuitos electrónicos, además todas las variables están disponibles, por lo tanto se puede emplear un observador de estado para estimar el término $\mathcal{B}\Gamma(\mathbf{x}_1) - \mathcal{A}\gamma_r(\mathbf{x}_{1_r})$ y compensarlo a través de U .

Se propone la entrada de control U como

$$U = \mathcal{B}^{-1} \left(-K\epsilon - \mathcal{B}G_l(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}G_{l_r}(\mathbf{x}_{1_r}) - \mathcal{B}\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}\tilde{\gamma}_r(\mathbf{x}_{1_r}) \right) \tag{48}$$

donde $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1)$ y $\tilde{\gamma}_r(\mathbf{x}_{1_r})$ son las estimaciones de $\Gamma(\mathbf{x}_1)$ y $\gamma(\mathbf{x}_{1_r})$, respectivamente. K es una matriz diagonal constante que puede ser diseñada.

Se sustituye (48) en (47)

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= z, \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -K\epsilon - z - A_0w + \mathcal{B} \left(\Gamma(\mathbf{x}_1) - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1) \right) + \mathcal{A}(\tilde{\gamma}_r(\mathbf{x}_{1_r}) - \gamma_r(\mathbf{x}_{1_r})).\end{aligned}\tag{49}$$

El sistema (49) es un sistema lineal con perturbaciones desvanecientes; la perturbación es

$$\mathcal{B} \left(\Gamma(\mathbf{x}_1) - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1) \right) + \mathcal{A}(\tilde{\gamma}_r(\mathbf{x}_{1_r}) - \gamma_r(\mathbf{x}_{1_r})),$$

y la parte lineal tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_k \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_k \\ \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & -a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -k_k & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_k \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}.\tag{50}$$

Teorema 12. *Considérese un arreglo de circuitos de Sprott definidos por las ecuaciones (38) y (39), cuyas interconexiones están establecidas por las funcionales (44) con las señales de acoplamiento establecidas en (48). Existe una matriz K que garantiza la sincronización asintótica del arreglo definida por (42) y (43).*

Prueba. La ecuación (50) define un sistema nominal formado por un conjunto de sistemas lineales desacoplados dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ \dot{z}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_i & -1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_i \\ z_i \\ w_i \end{bmatrix},\tag{51}$$

para $i = 1, \dots, k$, cuyo polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + \lambda + k_i,$$

aplicando el criterio Ruth-Hurwitz se obtiene la constante k_i que debe satisfacer

$$0 < k_i < a_0,$$

para garantizar la estabilidad exponencial asintótica del origen del sistema (51). ■

Considerando que el observador es diseñado tal que el término

$$\mathcal{B} \left(\Gamma(\mathbf{x}_1) - \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1) \right) + \mathcal{A}(\tilde{\gamma}_r(\mathbf{x}_{1r}) - \gamma_r(\mathbf{x}_{1r}))$$

satisface las condiciones de desvanecimiento establecidas en [32], entonces el sistema en lazo cerrado (49) debe tener al origen como un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable, por lo que se resuelve el problema de sincronización definido en (42) y (43).

2.1.2 Observador de estado para estimación de perturbaciones

Considérese un sistema escalar definido por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \gamma(x, t) + u, \\ y &= x, \end{aligned} \tag{52}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ es el estado del sistema; $f(x)$ es una función conocida que satisface la condición Lipschitz; $\gamma(x, t)$ es un término de perturbación desconocido pero acotado; $|\gamma(x, t)| < \delta$. u es una entrada conocida y la salida es y . Un observador para el sistema (52) es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(x) + u + c_1(y - \hat{y}) + c_2 \text{sign}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}. \end{aligned} \tag{53}$$

Para demostrar la convergencia del estado al observador (53) al estado de la planta (52) se define una variable de error $e = y - \hat{y}$; cuya dinámica está dada por

$$\dot{e} = \gamma(x, t) - c_1 e - c_2 \text{sign}(e). \tag{54}$$

El lado derecho de (54) es discontinuo, por lo que se analiza la existencia de un modo deslizante.

La convergencia a las trayectorias del sistema (54) a $s = 0$ se verifica a través de la derivada de la función

$$V = \frac{1}{2}s^2,$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e\gamma(x, t) - c_1 e^2 - c_2 |e|, \\ &\leq -c_1 e^2 - (c_2 - |\gamma(x, t)|) |e|,\end{aligned}$$

si

$$c_2 > \delta, \tag{55}$$

entonces

$$\dot{V} < 0,$$

por lo que las trayectorias convergen a $e = 0$ para cualquier condición inicial. Ahora se emplea un criterio establecido en [60] para asegurar la convergencia en tiempo finito a la superficie de discontinuidad.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \text{ and } \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0,$$

en este caso, porque $c_2 > \delta$, entonces se tiene

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} = \gamma(x, t) - c_2 < 0 \text{ and } \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} = \gamma(x, t) + c_2 > 0,$$

lo que implica que el estado del observador converge al estado de la planta en tiempo finito.

Ahora, basado en [60], se encuentra el control que aparece cuando las trayectorias permanecen en $s = 0$, llamado control equivalente u_{eq} .

Considere

$$\dot{s} = \gamma(x, t) - u_{eq} = 0,$$

por lo tanto

$$u_{eq} = \gamma(x, t),$$

el control equivalente u_{eq} es igual a las perturbaciones y puede ser recuperado a través de un filtro pasabajas como se muestra en [61]

$$\dot{x}_f = -\alpha x_f + \alpha (c_2 \text{sign}(e)). \quad (56)$$

Empleando el observador (53) y el filtro (56) para estimar las perturbaciones en los nodos y el sistema de referencia, las condiciones establecidas en [32] son satisfechas ya que el control equivalente es presentado en tiempo finito y, en teoría, puede ser recuperado en forma exacta utilizando un filtro pasa bajas [60].

2.1.3 Implementación de la técnica de sincronización

En esta sección se muestra el desempeño de la técnica de sincronización a través de una simulación en tiempo real de un arreglo formado por cuatro nodos y un sistema de referencia. Los parámetros para cada sistema se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros de los nodos y el sistema de referencia.

Sistema	G_l	a_0	Δ_a	b_0	Δ_b	c_0	Δ_c
Σ_1	G_a	0,6	0,006	1	0	2	0,02
Σ_2	G_b	0,6	0,006	6	0	0,5	0
Σ_3	G_c	0,6	0	1,2	0,012	4,5	0
Σ_4	G_d	0,6	0,006	-1,2	-0,012	2	0
Σ_r	G_d	0,6	0	-1,2	0	2	0

El arreglo tiene el esquema de interconexión que se muestra en la figura 9, por lo tanto $\beta_{i,j} = \alpha_i = 1$, para $i, j = 1, 2, 3, 4$. De este modo las funcionales toman la forma

$$\epsilon_1 = e_{1,r} + e_{1,2} + e_{1,3} + e_{1,4},$$

$$\epsilon_2 = e_{2,r} + e_{2,1} + e_{2,3} + e_{2,4},$$

$$\epsilon_3 = e_{3,r} + e_{3,1} + e_{3,2} + e_{3,4},$$

$$\epsilon_4 = e_{4,r} + e_{4,1} + e_{4,2} + e_{4,3},$$

y las matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, K , $G_l(x_1)$, $G_{l_r}(x_{1_r})$ son

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$K = \text{diag}\{0,3\},$$

$$G_l(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} G_{a_1} & G_{b_2} & G_{c_3} & G_{d_4} \end{bmatrix}^T$$

$$G_{l_r}(x_{1_r}) = G_{d_r}.$$

Los términos de perturbación son estimados por un observador y un filtro en cada nodo y el sistema de referencia. Para el nodo Σ_1 el observador y el filtro son

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{3_1} &= -0,6x_{3_1} - x_{2_1} + |x_{1_1}| - 2 + u_1 + (x_{3_1} - \hat{x}_{3_1}) \\ &\quad + 2\text{sign}(x_{3_1} - \hat{x}_{3_1}), \\ \dot{x}_{f_1} &= -5x_{f_1} + 5(2\text{sign}(x_{3_1} - \hat{x}_{3_1})), \end{aligned}$$

para el nodo Σ_2

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{3_2} &= -0,6x_{3_2} - x_{2_2} - 6\text{máx}(x_{1_2}, 0) + 0,5 + u_2 + (x_{3_2} - \hat{x}_{3_2}) \\ &\quad + 2\text{sign}(x_{3_2} - \hat{x}_{3_2}), \\ \dot{x}_{f_2} &= -5x_{f_2} + 5(2\text{sign}(x_{3_2} - \hat{x}_{3_2})), \end{aligned}$$

para el nodo Σ_3

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{3_3} &= -0,6x_{3_2} - x_{2_2} + 1,2x_{1_3} - 4,5\text{sign}(x_{1_3}) + u_3 + (x_{3_3} - \hat{x}_{3_3}) \\ &\quad + 2\text{sign}(x_{3_3} - \hat{x}_{3_3}), \\ \dot{x}_{f_3} &= -5x_{f_3} + 5(2\text{sign}(x_{3_3} - \hat{x}_{3_3})), \end{aligned}$$

para el nodo Σ_4

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{3_4} &= -0,6x_{3_4} - x_{2_4} - 1,2x_{1_4} + 2\text{sign}(x_{1_4}) + u_4 + (x_{3_4} - \hat{x}_{3_4}) \\ &\quad + 2\text{sign}(x_{3_4} - \hat{x}_{3_4}), \\ \dot{x}_{f_4} &= -5x_{f_4} + 5(2\text{sign}(x_{3_4} - \hat{x}_{3_4})),\end{aligned}$$

y finalmente, para el sistema de referencia Σ_r

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{3_r} &= -0,6x_{3_r} - x_{2_r} - 1,2x_{1_r} + 2\text{sign}(x_{1_r}) + (x_{3_r} - \hat{x}_{3_r}) \\ &\quad + 2\text{sign}(x_{3_r} - \hat{x}_{3_r}), \\ \dot{x}_{f_r} &= -5x_{f_r} + 5(2\text{sign}(x_{3_r} - \hat{x}_{3_r})).\end{aligned}$$

De este modo, los vectores que contienen los términos de perturbación se definen como

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{f_1} & \mathbf{x}_{f_2} & \mathbf{x}_{f_3} & \mathbf{x}_{f_4} \end{bmatrix}^T,$$

$$\gamma_r(\mathbf{x}_{1_r}) = x_{f_r}.$$

Con estos elementos se construye el vector de señales de acoplamiento (48).

El arreglo fue implementado en una plataforma de control dSPACE[®] 1103 real-time a través de Simulink[®] de Matlab[®]. El experimento se llevo a cabo con un algoritmo de control ode1 (Euler) de paso fijo, con un tiempo de muestreo de 0.0001 segundos.

En la figura 10 se muestra la identificación de las perturbaciones para cada nodo y el sistema de referencia. Las gráficas a), b), c), y d), corresponden a las perturbaciones de los sistemas Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , y Σ_4 respectivamente, y la gráfica e) corresponde a las del sistema de referencia Σ_r , que no tiene variaciones paramétricas. Debido a que las variaciones paramétricas son mostradas en la Tabla 1, es posible hacer una comparación de la perturbación real y las estimadas por los observadores y los filtros. Como se puede observar en dicha figura, ambas gráficas están sobrepuestas. Por lo que la identificación de las perturbaciones es eficiente.

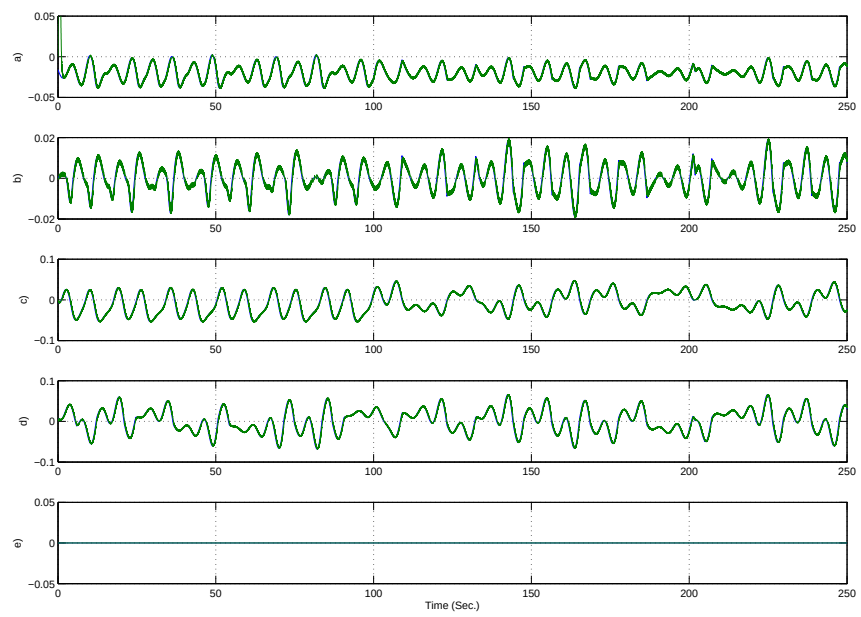


Figura 10. Estimación de las perturbaciones en cada nodo y del sistema de referencia.

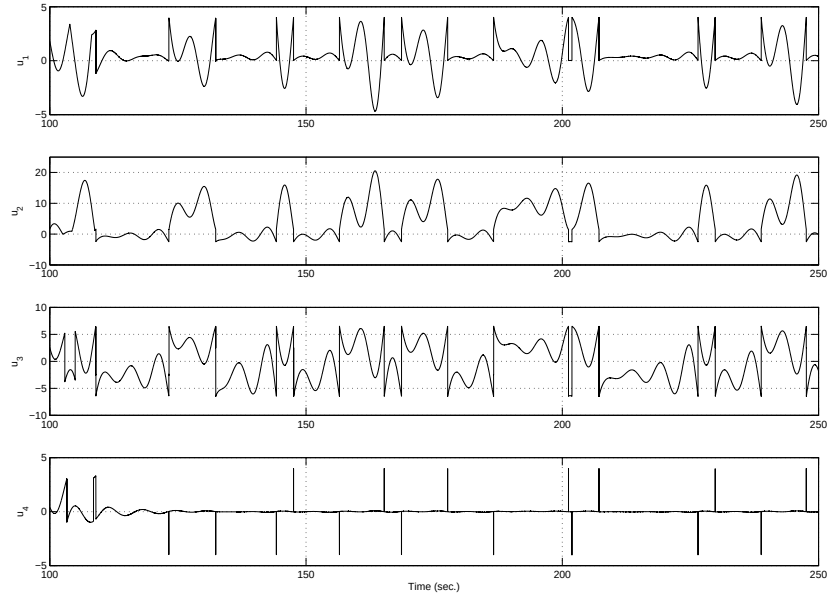


Figura 11. Señales de acoplamiento para cada nodo.

En la figura 11 se muestran las señales de acoplamiento. Aquí el tiempo inicia en $t = 100\text{seg}$ ya que es el instante en que las señales son aplicadas. Como se puede observar, tales gráficas no contienen componentes de alta frecuencia como cuando se emplea cualquier técnica por modos deslizantes.

En la figura 12 se muestran las salidas para cada nodo y el sistema de referencia. Las señales de acoplamiento no son aplicadas en los primeros 100 segundos y los sistemas evolucionan libremente. Como se puede observar el comportamiento de los sistemas es muy distinto. En $t = 100\text{seg}$, como lo indica la línea punteada, se aplican las señales de acoplamiento y la salida de cada nodo converge asintóticamente a la salida del sistema de referencia. Finalmente en la figura 13, se muestra el atractor de cada nodo antes de aplicar las señales de acoplamiento (izquierda) y después de aplicar las señales de acoplamiento (derecha). Se puede ver claramente que el atractor para cada nodo se transforma en el atractor del sistema de referencia.

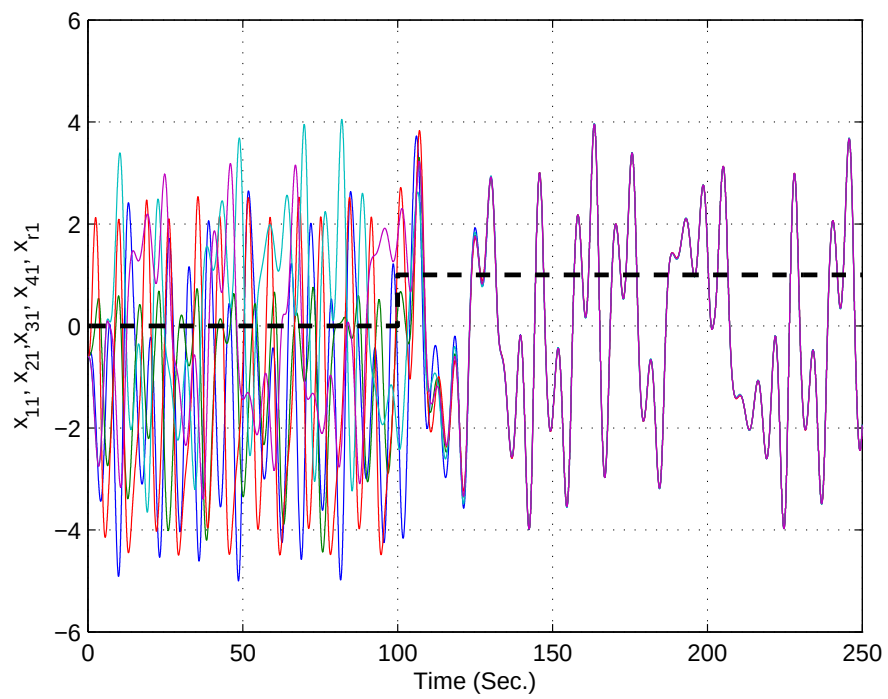


Figura 12. Salidas de cada nodo y del sistema de referencia antes y después de aplicar las señales de acoplamiento.

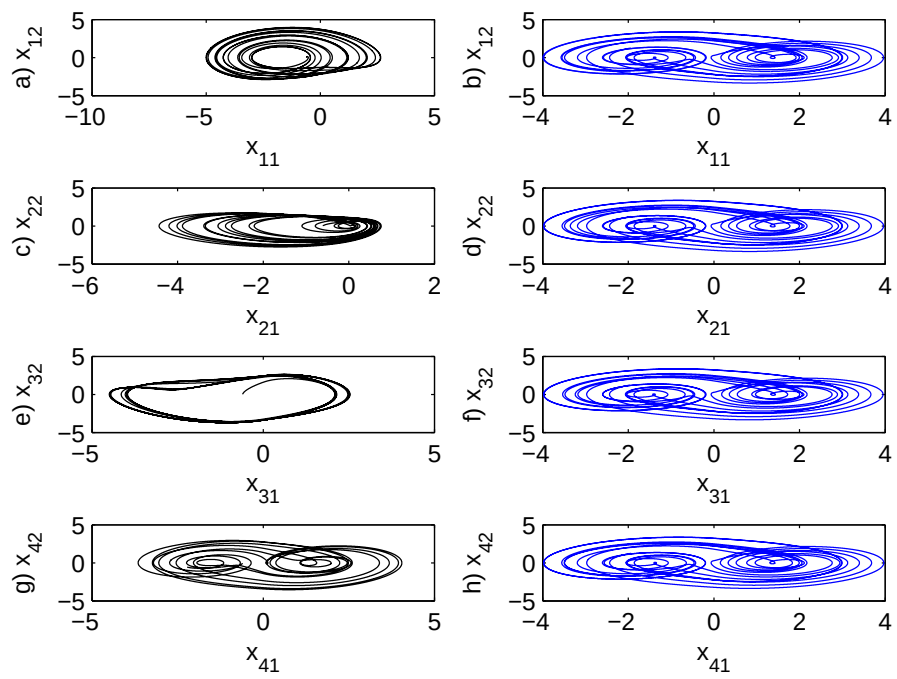


Figura 13. Proyección en el plano (x_{1_i}, x_{2_i}) del retrato de fase de cada nodo del arreglo antes y después de aplicar las señales de acoplamiento.

Capítulo 3

Teleoperación robusta de sistemas mecánicos de $nGDL$ con compensación de perturbaciones

Anteriormente se ha definido el modelo general de un sistema teleoperado mediante las ecuaciones (34) y (35). Ahora, considerando el sistema de teleoperación mostrado en la figura 7, se define un modelo más completo considerando términos no lineales y términos de perturbación.

El modelo del mecanismo maestro es

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{q}_m) \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{G}_m(\mathbf{q}_m) + \mathbf{F}_{fm}(\dot{\mathbf{q}}_m) + \boldsymbol{\gamma}_m(\cdot) = \boldsymbol{\tau}_m(t) + \mathbf{F}_h(t), \quad (57)$$

y el modelo del mecanismo esclavo es

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{G}_s(\mathbf{q}_s) + \mathbf{F}_{fs}(\dot{\mathbf{q}}_s) + \boldsymbol{\gamma}_s(t) = \boldsymbol{\tau}_s(t) + \mathbf{F}_e(t), \quad (58)$$

donde $\mathbf{G}_j(\mathbf{q}_j) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales, $\mathbf{F}_{fj}(\dot{\mathbf{q}}_j) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas de fricción, $\boldsymbol{\gamma}_j(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es un vector que contiene términos de perturbación ocasionados por variaciones paramétricas y perturbaciones externas, para $j = m, s$ [30].

Se asume que se dispone únicamente del vector de posiciones $\mathbf{q}_j(t)$ y que si $\mathbf{q}_j(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_j(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_j(t)$ son acotadas, entonces $\|\boldsymbol{\gamma}_m(\cdot)\| < \delta_m$, $\|\boldsymbol{\gamma}_s(\cdot)\| < \delta_s$, $\|\mathbf{F}_e(t)\| < \delta_e$ y $\|\mathbf{F}_h(t)\| < \delta_h$, para todo $t \geq t_0$, donde δ_m , δ_s , δ_e , y δ_h son constantes conocidas.

Una representación en variables de estado de los sistemas (57) y (58) considerando $\mathbf{x}_{1j} = \mathbf{q}_j$, $\mathbf{x}_{2j} = \dot{\mathbf{q}}_j$, es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{1m} &= \mathbf{x}_{2m}, \\ \dot{\mathbf{x}}_{2m} &= \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1m}) \left[-\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1m}, \mathbf{x}_{2m}) \mathbf{x}_{2m} - \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1m}) - \mathbf{F}_{fm}(\mathbf{x}_{2m}) - \boldsymbol{\gamma}_m(\cdot) \right] + \boldsymbol{\tau}_m(t) + \mathbf{F}_h(t), \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{x}_{1m}. \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_{1_s} &= \mathbf{x}_{2_s}, \\
\dot{\mathbf{x}}_{2_s} &= \mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{x}_{1_s}) \left[-\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{x}_{2_s}) \mathbf{x}_{2_s} - \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) - \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{x}_{2_s}) - \boldsymbol{\gamma}_s(\cdot) \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\tau}_s(t) + \mathbf{F}_e(t) \right], \\
\mathbf{y}_s &= \mathbf{x}_{1_s}.
\end{aligned} \tag{60}$$

donde $\mathbf{x}_{1_j} = [x_{11_j} \ x_{12_j} \ \cdots \ x_{1n_j}]^T$ y $\mathbf{x}_{2_j} = [x_{21_j} \ x_{22_j} \ \cdots \ x_{2n_j}]^T$, para $j = m, s$.

El problema consiste en diseñar las entradas $\boldsymbol{\tau}_m(t)$ y $\boldsymbol{\tau}_s(t)$, de tal manera que se logre el objetivo de control

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{K}\mathbf{x}_{1_m} - \mathbf{x}_{1_s}\| = 0, \tag{61}$$

incorporando un factor de escalamiento $\mathbf{K} \in \Re$ que es necesario en una clase de telemanipuladores bilaterales en los que el maestro y el esclavo operan en condiciones muy distintas de longitud, fuerza y potencia [13].

Como se mencionó con anterioridad, se asume que se dispone únicamente del vector de posiciones, por lo que se recurre al empleo de observadores de estado para estimar velocidades y compensar los términos de perturbación e incertidumbres.

3.1 Solución conceptual del problema de teleoperación

Esta sección presenta una solución ideal al problema de teleoperación, es decir, se asume que se dispone de los vectores $\mathbf{x}_{2_m}$, $\mathbf{x}_{2_s}$, $\boldsymbol{\gamma}_m(\cdot)$, $\boldsymbol{\gamma}_s(\cdot)$ y $\mathbf{F}_e(t)$.

Para lograr el objetivo de control establecido en (61), se propone dividir el problema en dos estructuras de control que operan de manera excluyente; la Estructura A, mostrada en la figura 14, que se define cuando el operador humano no interactúa con el mecanismo maestro, en caso contrario entra en operación la Estructura B, mostrada en la Figura 15.

En la práctica estas estructuras se van a activar por medio de un sensor táctil, el cual se activa cuando el operador humano manipula el mecanismo maestro y se desactiva cuando el operador no está en contacto con el maestro.

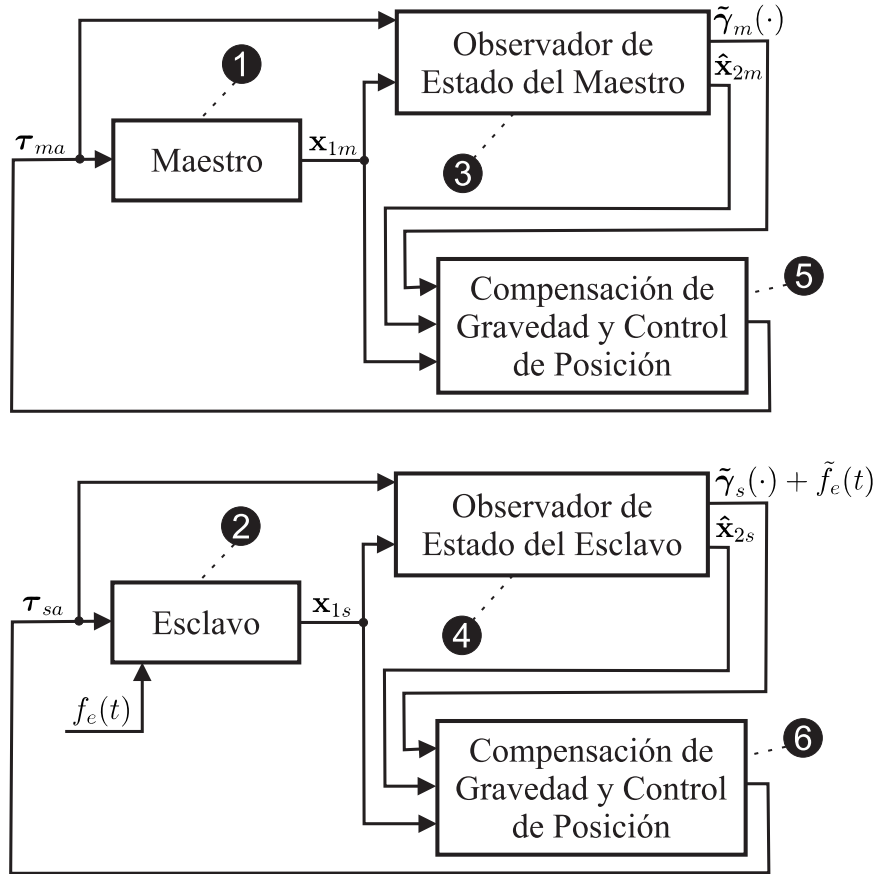


Figura 14. Estructura A del sistema de teleoperación; no hay interacción del operador humano.

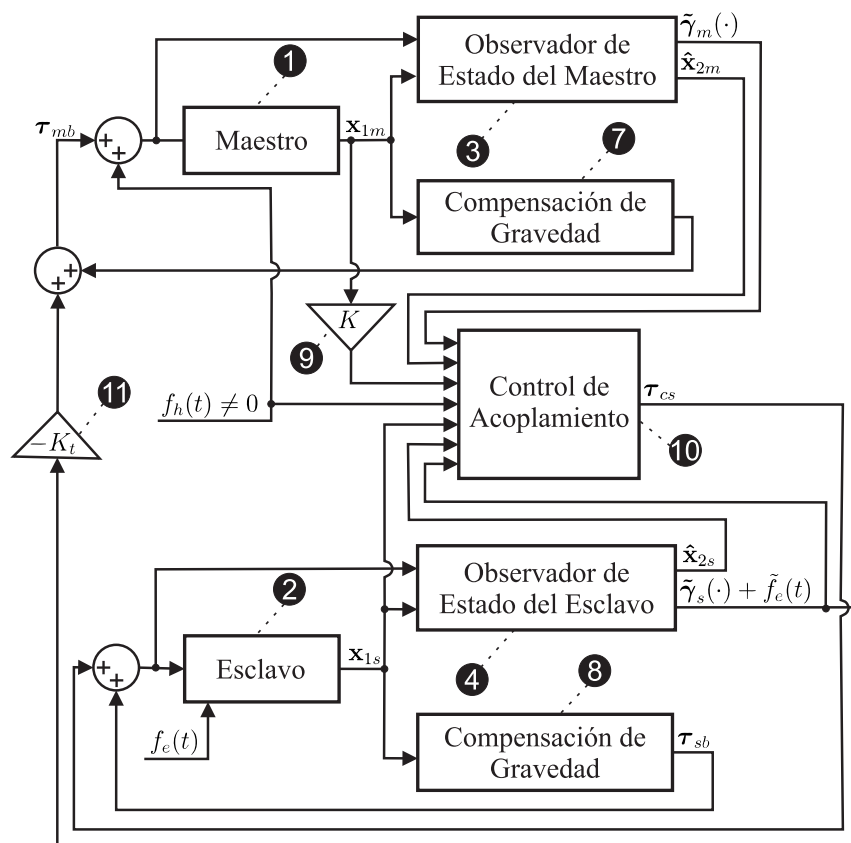


Figura 15. Estructura B del sistema de teleoperación; el humano tiene interacción con el mecanismo maestro.

En la Estructura A, el objetivo de control es que los mecanismos permanezcan en la última posición registrada mientras hubo manipulación por parte del operador humano. Para ello se propone un control para compensar el vector de pares gravitacionales y los términos de perturbación, además de un control de regulación, cuya referencia es la última posición establecida por el operador. De tal manera que si se presenta alguna fuerza externa sobre los mecanismos, el control tenga la robustez para compensarla y así mantener su posición.

En la estructura A los bloques 1 y 2 representan los mecanismos maestro y esclavo respectivamente. Los bloques 3 y 4 corresponden a observadores de estado, los cuales tienen dos funciones; la estimación de los vectores de velocidad y la estimación de los términos de perturbación generados por variaciones paramétricas y perturbaciones externas en cada mecanismo. Por su parte, los bloques 5 y 6 representan la etapa de control de regulación y compensación de los pares gravitacionales, para anular el efecto de la fuerza de gravedad sobre los eslabones que presentan un movimiento vertical.

En la Estructura B, el objetivo de control consiste en hacer converger, de manera escalada, la posición del esclavo con la posición del maestro bajo un esquema de telepresencia. De tal manera que el operador humano perciba de manera escalada las fuerzas de reacción del esclavo en su interacción con el entorno remoto.

Para tal fin se propone un control de acoplamiento a través de la técnica de sincronización mencionada con anterioridad, para lograr la convergencia asintótica del estado del esclavo al estado del maestro.

En esta estructura, los bloques 7 y 8 se encargan de compensar únicamente los vectores de pares gravitacionales. El bloque 9 es una ganancia para escalar las posiciones de los mecanismos. El bloque 10 es un control que permite el acoplamiento de los estados de los mecanismos. Y finalmente, la retroalimentación a través del bloque 11 permite establecer el esquema de telepresencia, ya que permite regular la sensibilidad con la que el humano percibe las fuerzas provenientes de la interacción del esclavo con el entorno remoto.

3.1.1 Diseño del controlador ideal para la Estructura A

En esta estructura se asume que $\mathbf{F}_h(t) = \mathbf{0}$ y que se dispone de la última posición establecida por el operador, definida por las constantes $\mathbf{x}_{1_{jr}} \in \mathbb{R}^n$, que actúan como referencia del sistema de control, donde $\mathbf{x}_{1_{jr}} = [x_{11_{jr}} \ x_{12_{jr}} \ \cdots \ x_{1n_{jr}}]^T$, para $j = m, s$.

El objetivo de control consiste en compensar los pares gravitacionales y compensar los términos de perturbación, además de regular la posición de los mecanismos, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_{1_m} - \mathbf{x}_{1_{mr}}| = 0, \quad (62)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_{1_s} - \mathbf{x}_{1_{sr}}| = 0. \quad (63)$$

Para cada mecanismo se plantea la ecuación de error para el objetivo de regulación

$$\mathbf{e}_{1_m} = \mathbf{x}_{1_m} - \mathbf{x}_{1_{mr}}, \quad (64)$$

$$\mathbf{e}_{1_s} = \mathbf{x}_{1_s} - \mathbf{x}_{1_{sr}}. \quad (65)$$

En el caso del mecanismo maestro, se obtiene la dinámica del error que está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{1_m} &= \mathbf{e}_{2_m}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{2_m} &= \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1_m}, \mathbf{e}_{2_m}) \mathbf{e}_{2_m} - \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) - \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{e}_{2_m}) \\ -\gamma_m(\cdot) + \boldsymbol{\tau}_m(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (66)$$

De forma similar, se obtiene la dinámica del error del esclavo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{1_s} &= \mathbf{e}_{2_s}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{2_s} &= \mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{x}_{1_s}) \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{e}_{2_s}) \mathbf{e}_{2_s} - \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) - \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{e}_{2_s}) \\ -\gamma_s(\cdot) + \boldsymbol{\tau}_s(t) + \mathbf{F}_e(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (67)$$

Para lograr el objetivo de control establecido en las ecuaciones (62) y (63), se proponen los controladores

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ma} + \boldsymbol{\tau}_{mr}, \quad (68)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\tau}_{sa} + \boldsymbol{\tau}_{sr}, \quad (69)$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_{ma} &= \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) + \gamma_m(\cdot), \\ \tau_{sa} &= \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) + \gamma_s(\cdot) - \mathbf{F}_e(t),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_{mr} &= \mathbf{C}_m(\mathbf{e}_{1_m}, \mathbf{e}_{2_m}) \mathbf{e}_{2_m} + \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{e}_{2_m}) + \mathbf{M}_m(\mathbf{e}_{1_m}) (-\alpha_{1_m} \mathbf{e}_{1_m} - \alpha_{2_m} \mathbf{e}_{2_m}), \\ \tau_{sr} &= \mathbf{C}_s(\mathbf{e}_{1_s}, \mathbf{e}_{2_s}) \mathbf{e}_{2_s} + \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{e}_{2_s}) + \mathbf{M}_s(\mathbf{e}_{1_s}) (-\alpha_{1_s} \mathbf{e}_{1_s} - \alpha_{2_s} \mathbf{e}_{2_s}),\end{aligned}$$

donde $\alpha_{1_j}, \alpha_{2_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $j = m, s$, son matrices diagonales, τ_{ja} son los controladores que compensan los pares gravitacionales y τ_{jr} son los controladores que regulan la posición de los mecanismos.

Sustituyendo (68) y (69) en (66) y (67) se tiene

$$\dot{\mathbf{e}}_{1_m} = \mathbf{e}_{2_m}, \quad (70)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{2_m} = -\alpha_{1_m} \mathbf{e}_{1_m} - \alpha_{2_m} \mathbf{e}_{2_m},$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{1_s} = \mathbf{e}_{2_s}, \quad (71)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{2_s} = -\alpha_{1_s} \mathbf{e}_{1_s} - \alpha_{2_s} \mathbf{e}_{2_s}.$$

Seleccinando valores apropiados de las matrices α_{1_j} y α_{2_j} , se logra estabilizar los sistemas de las ecuaciones (70) y (71) cuyo punto de equilibrio es el origen, logrando los objetivos de control definidos en (62) y (63), consiguiendo así, que los mecanismos maestro y esclavo se mantengan en su última posición una vez que el operador humano suspende su interacción con el sistema teleoperado.

3.1.2 Diseño del controlador ideal para la Estructura B

En esta estructura se considera que $\mathbf{F}_h(t) \neq \mathbf{0}$. El objetivo de control consiste en compensar los pares gravitacionales, incorporar un esquema de telepresencia a través de retroalimentar las fuerzas del ambiente recibidas por el esclavo hacia el maestro, e introducir en el esclavo

una entrada de acoplamiento para lograr la convergencia asintótica entre los estados de los mecanismos para satisfacer el objetivo establecido en (61).

Se define la ecuación de error para el acoplamiento entre las posiciones escaladas de los mecanismos

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{K}\mathbf{x}_{1_m} - \mathbf{x}_{1_s},$$

y se obtiene su dinámica

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \left\{ \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1_m}, \mathbf{x}_{2_m})\mathbf{x}_{2_m} - \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) - \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{x}_{2_m}) \\ -\gamma_m(\cdot) + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_h(t) \end{bmatrix} \right\} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{x}_{1_s}) \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{x}_{2_s})\mathbf{x}_{2_s} - \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) - \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{x}_{2_s}) - \gamma_s(\cdot) \\ +\boldsymbol{\tau}_s + \mathbf{F}_e(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Para lograr el objetivo de control establecido en esta estructura, se proponen los controladores

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{mb}, \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \boldsymbol{\tau}_{sb} + \boldsymbol{\tau}_{cs}, \quad (74)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau}_{mb} = \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) + \mathbf{K}_t [\gamma_s(\cdot) - \mathbf{F}_e(t)],$$

$$\boldsymbol{\tau}_{sb} = \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) + \gamma_s(\cdot) - \mathbf{F}_e(t),$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{cs} = & \mathbf{K}\mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{1_s})\mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1_m}, \mathbf{x}_{2_m})\mathbf{x}_{2_m} - \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{x}_{2_m}) \\ -\gamma_m(\cdot) + K_t(\gamma_s(\cdot) - \mathbf{F}_e(t)) + \mathbf{F}_h(t) \end{bmatrix} \\ & - [-\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{x}_{2_s})\mathbf{x}_{2_s} - \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{x}_{2_s})] + \mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{1_s})[\mathbf{K}_p\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_v\mathbf{e}_2]. \end{aligned} \quad (75)$$

$\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}$ es un escalar que regular la sensibilidad con la que el humano percibe las fuerzas provenientes de la interacción del esclavo con el entorno remoto. $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales. $\boldsymbol{\tau}_{jb}$ son los controladores que compensan los pares gravitacionales, para

$j = m, s$, y τ_{cs} es la entrada de control cuyo objetivo es el acoplamiento de los vectores de posición de los mecanismos.

Sustituyendo los controles (73) y (74) en (72) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_v \mathbf{e}_2 \end{bmatrix},$$

que resulta en un sistema con estabilidad asintótica respecto al origen eligiendo valores adecuados para $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_v$ logrando así el objetivo de control definido en (61).

En la práctica, los controladores propuestos en esta sección no pueden implementarse de manera directa, pues como se menciona, fueron diseñados despreciando el efecto de las incertidumbres en los modelos y fuerzas externas resultantes de la interacción del mecanismo esclavo con el ambiente, además de que no se dispone del vector de velocidades, por lo que en la siguiente sección se aborda el problema de su implementación.

3.2 Implementación de las estructuras de control

En el diseño de algoritmos de control, es necesario disponer de la medición de algunas variables del sistema a controlar. Sin embargo, no siempre es posible obtener estas mediciones, debido al alto costo que implica involucrar sensores adicionales o a la imposibilidad del empleo de estos mismos sensores bajo condiciones ambientales extremas, por ejemplo. Además de que la incorporación de éstos, repercute negativamente a la eficiencia del sistema de control a lazo cerrado, como ya se mencionó anteriormente.

De tal manera que los controladores propuestos en (68), (69), (73) y (74) no se pueden implementar en una primer instancia, debido a que no se dispone de los vectores de velocidad $\mathbf{x}_{2m}$, $\mathbf{x}_{2s}$, ni de los términos de incertidumbre y fuerzas externas $\gamma_m(\cdot)$, $\gamma_s(\cdot)$ y $\mathbf{F}_e(\mathbf{t})$.

3.2.1 Identificación de incertidumbres y estimación de variables mediante observadores de estado robustos

Se utiliza un observador de estado robusto propuesto en [53], cuyo esquema de operación se muestra en la figura 16, que está basado en la estructura del Observador de Luenberger para estimar los vectores de velocidad y los términos desconocidos a través del control equivalente; el cual se obtiene al filtrar el término discontinuo en el observador empleando un filtro pasabajas.

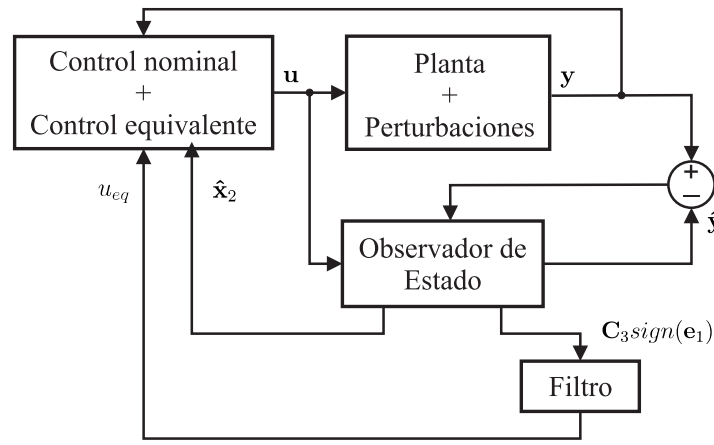


Figura 16. Observador robusto para estimación de variables e incertidumbres.

La intención es compensar estos términos desconocidos a través de las entradas de control para robustecer el sistema en lazo cerrado.

Considerando los sistemas (59) y (60), se propone el observador de estado para el maestro

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{1_m} &= \hat{x}_{2_m} + c_{1_m}(\mathbf{x}_{1_m} - \hat{x}_{1_m}), \\ \dot{\hat{x}}_{2_m} &= \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) \left[-\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1_m}, \mathbf{x}_{2_m})\mathbf{x}_{2_m} - \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) - \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{x}_{2_m}) + \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{F}_h(t) \right] \\ &\quad + c_{2_m}(\mathbf{x}_{1_m} - \hat{x}_{1_m}) + c_{3_m} \text{sign}(\mathbf{x}_{1_m} - \hat{x}_{1_m}),\end{aligned}\tag{76}$$

y el observador para el esclavo

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{1_s} &= \hat{\mathbf{x}}_{2_s} + \mathbf{c}_{1_s}(\mathbf{x}_{1_s} - \hat{\mathbf{x}}_{1_s}), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{2_s} &= \mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{x}_{1_s}) \left[-\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{x}_{2_s})\mathbf{x}_{2_s} - \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) - \mathbf{F}_{fs}(\mathbf{x}_{2_s}) + \boldsymbol{\tau}_s + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{c}_{2_s}(\mathbf{x}_{1_s} - \hat{\mathbf{x}}_{1_s}) + \mathbf{c}_{3_s} \text{sign}(\mathbf{x}_{1_s} - \hat{\mathbf{x}}_{1_s}), \right]\end{aligned}\tag{77}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_{1_j}, \hat{\mathbf{x}}_{2_j} \in \mathbb{R}^n$, para $j = m, s$, son respectivamente, los vectores de posiciones y velocidades observadas, $\mathbf{c}_{1_j}, \mathbf{c}_{2_j}, \mathbf{c}_{3_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales.

Se establece la variable de error del observador del maestro

$$\mathbf{e}_{1_m} = \mathbf{x}_{1_m} - \hat{\mathbf{x}}_{1_m},\tag{78}$$

y la variable de error para el observador del esclavo

$$\mathbf{e}_{1_s} = \mathbf{x}_{1_s} - \hat{\mathbf{x}}_{1_s}.\tag{79}$$

Analizando la ecuación de error del observador del maestro (78), se define su dinámica

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_{1_m} &= \mathbf{e}_{2_m} - \mathbf{c}_{1_m}(\mathbf{e}_{1_m}), \\ \dot{\mathbf{e}}_{2_m} &= \dot{\mathbf{x}}_{2_m} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{2_m} = \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) [-\gamma_m(\cdot)] - \mathbf{c}_{2_m}(\mathbf{x}_{1_m} - \hat{\mathbf{x}}_{1_m}) - \mathbf{c}_{3_m} \text{sign}(\mathbf{x}_{1_m} - \hat{\mathbf{x}}_{1_m}).\end{aligned}$$

Se realiza un cambio de variable $\mathbf{z}_{1_m} = \mathbf{e}_{1_m}$, $\mathbf{z}_{2_m} = \mathbf{e}_{2_m} - \mathbf{c}_{1_m}(\mathbf{e}_{1_m})$, entonces la dinámica del nuevo sistema es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_{1_m} &= \mathbf{z}_{2_m}, \\ \dot{\mathbf{z}}_{2_m} &= -\mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m})\gamma_m(\cdot) - \mathbf{c}_{1_m}\mathbf{z}_{2_m} - \mathbf{c}_{2_m}\mathbf{z}_{1_m} - \mathbf{c}_{3_m} \text{sign}(\mathbf{z}_{1_m}).\end{aligned}\tag{80}$$

Este sistema presenta una superficie de discontinuidad $S = \mathbf{z}_{1_m} = 0$. El observador genera un modo deslizante de segundo orden, lo cual implica que el control equivalente u_{eq_m} aparece

hasta la segunda derivada de la superficie de deslizamiento S , es decir,

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \mathbf{z}_{2_m} = 0, \\ \ddot{S} &= \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) [-\gamma_m(\cdot)] - u_{eq_m} = 0, \\ u_{eq_m} &= \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) [-\gamma_m(\cdot)], \\ \tilde{\gamma}_m(\cdot) &= -\mathbf{M}_m(\mathbf{x}_{1_m}) [u_{eq_m}],\end{aligned}$$

donde

$$u_{eq_m} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{c}_{3_m} \text{sign}(\mathbf{z}_{1_m})}.$$

Se puede establecer mediante un teorema establecido en [53], que es posible encontrar un conjunto de matrices $\mathbf{c}_{1_m}$, $\mathbf{c}_{2_m}$ y $\mathbf{c}_{3_m}$, tal que el origen del espacio de estado del sistema (80) sea un punto de equilibrio exponencialmente estable en forma global. Además si se satisface que $\mathbf{c}_{3_m} > \delta_m \mathbf{c}_{2_m}$, entonces

$$\mathbf{z}_{1_m} = \mathbf{z}_{2_m} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{1_m} = \mathbf{e}_{2_m} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_{1_m} - \hat{\mathbf{x}}_{1_m}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\mathbf{x}}_{2_m} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{2_m}) = 0.$$

Lo que garantiza la estimación del vector de velocidades.

Analizando de manera similar la ecuación de error del esclavo (79), se puede obtener

$$\tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t) = -\mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{1_s}) [u_{eq_s}],$$

donde

$$u_{eq_s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{c}_{3_s} \text{sign}(\mathbf{z}_{1_s})}.$$

Disponiendo ahora de los términos es posible implementar los controladores propuestos en (68), (69), (73) y (74).

3.2.2 Implementación de la Estructura A

Una vez que se encuentran disponibles los términos estimados $\hat{\mathbf{x}}_{2m}, \hat{\mathbf{x}}_{2s}, \tilde{\gamma}_m(\cdot), \tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t)$, es posible implementar los controladores definidos en (68) y (69) para la Estructura A como

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1m}) + \tilde{\gamma}_m(\cdot) + \mathbf{C}_m(\mathbf{e}_{1m}, \mathbf{e}_{2m}) \mathbf{e}_{2m} + \mathbf{F}_{fm}(\mathbf{e}_{2m}) \quad (81)$$

$$+ \mathbf{M}_m(\mathbf{e}_{1m}) (-\alpha_{1m} \mathbf{e}_{1m} - \alpha_{2m} \mathbf{e}_{2m} - \mathbf{K}_{ma} \text{sign}(\mathbf{e}_{1m})), \quad (82)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1s}) + \tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t) + \mathbf{C}_s(\mathbf{e}_{1s}, \mathbf{e}_{2s}) \mathbf{e}_{2s} + \mathbf{F}_{fs}(\mathbf{e}_{2s}) \quad (83)$$

$$+ \mathbf{M}_s(\mathbf{e}_{1s}) (-\alpha_{1s} \mathbf{e}_{1s} - \alpha_{2s} \mathbf{e}_{2s} - \mathbf{K}_{sa} \text{sign}(\mathbf{e}_{1s})),$$

donde se puede notar que se han reemplazado los términos desconocidos por sus estimaciones obtenidas mediante los observadores, además se incluyen los términos discontinuos para robustecer el sistema en lazo cerrado, donde $\mathbf{K}_{ma}$ y $\mathbf{K}_{sa} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales.

Considerando los controladores a implementar (81) y (83), los sistemas de error (66) y (67) toman la forma

$$\dot{\mathbf{e}}_{1m} = \mathbf{e}_{2m}, \quad (84)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{2m} = -\alpha_{1m} \mathbf{e}_{1m} - \alpha_{2m} \mathbf{e}_{2m} - \mathbf{K}_{ma} \text{sign}(\mathbf{e}_{1m}),$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{1s} = \mathbf{e}_{2s}, \quad (85)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{2s} = -\alpha_{1s} \mathbf{e}_{1s} - \alpha_{2s} \mathbf{e}_{2s} - \mathbf{K}_{sa} \text{sign}(\mathbf{e}_{1s}),$$

donde para valores apropiados de α_{1m} , α_{2m} y $\mathbf{K}_{ma}$ se garantiza satisfacer los objetivos definidos en (62) y (63).

3.2.3 Implementación de la Estructura B

En el caso de la Estructura B, de manera similar, los controles propuestos en (73) y (74), se implementan como

$$\tau_m = \mathbf{G}_m(\mathbf{x}_{1_m}) + \mathbf{K}_t \left(\tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t) \right), \quad (86)$$

$$\tau_s = \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_{1_s}) + \tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t) + \mathbf{K}\mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{1_s}) \mathbf{M}_m^{-1}(\mathbf{x}_{1_m}) [\psi] - \eta, \quad (87)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi &= -\mathbf{C}_m(\mathbf{x}_{1_m}, \mathbf{x}_{2_m}) \mathbf{x}_{2_m} - \mathbf{F}_{f_m}(\mathbf{x}_{2_m}) - \tilde{\gamma}_m(\cdot) + \mathbf{K}_t \left(\tilde{\gamma}_s(\cdot) - \tilde{\mathbf{F}}_e(t) \right) + \mathbf{F}_h(\mathbf{t}), \\ \eta &= \left[-\mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{1_s}, \mathbf{x}_{2_s}) \mathbf{x}_{2_s} - \mathbf{F}_{f_s}(\mathbf{x}_{2_s}) \right] + \mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{1_s}) [\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_v \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}_{sb} \text{sign}(\mathbf{e}_{1_s})]. \end{aligned}$$

Donde se incorpora también en el control los términos discontinuos, donde $\mathbf{K}_{mb}$ y $\mathbf{K}_{sb} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Sustituyendo los controladores (86) y (87) en el sistema de error (72), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{K}_{sb} \text{sign}(\mathbf{e}_1) \end{bmatrix},$$

y con valores apropiados de $\mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}_v$ y $\mathbf{K}_{sb}$ se logra cumplir el objetivo definido en (61).

3.3 Aplicación de la técnica de teleoperación a dos mecanismos de 2 GDL

Se realiza la simulación numérica de la teleoperación de dos mecanismos idénticos tipo doble péndulo, como el que se muestra en la figura 17. Se considera que ambos mecanismos tienen incertidumbres paramétricas y que el esclavo esta expuesto a perturbaciones externas.

3.3.1 Modelo dinámico

Tomando como referencia los modelos (59) y (60) se definen como

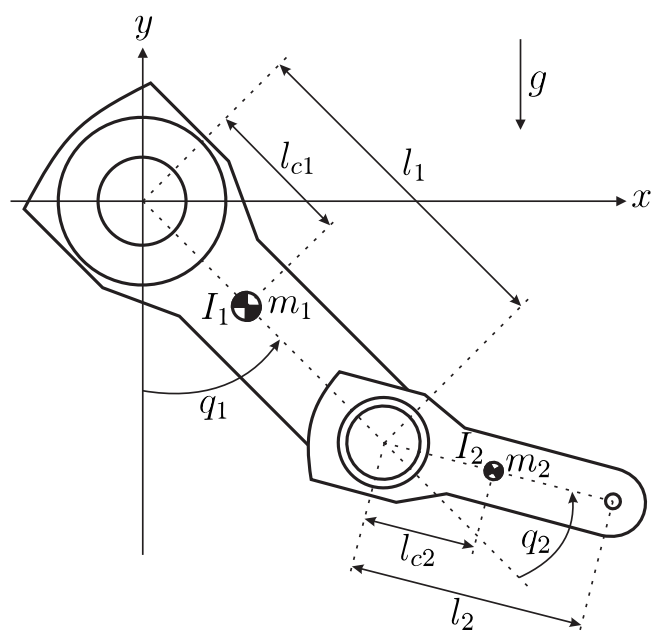


Figura 17. Sistema mecánico de 2GDL.

$$\mathbf{x}_{1j} = \begin{bmatrix} x_{11j} & x_{12j} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{x}_{2j} = \begin{bmatrix} x_{21j} & x_{22j} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{M}_j(\mathbf{x}_{1j}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{x}_{1j}) & M_{12}(\mathbf{x}_{1j}) \\ M_{21}(\mathbf{x}_{1j}) & M_{22}(\mathbf{x}_{1j}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_j(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) & C_{12}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) \\ C_{21}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) & C_{22}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_j(\mathbf{x}_{1j}) = \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{x}_{1j}) & G_2(\mathbf{x}_{1j}) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{F}_e(t) = \begin{bmatrix} f_{1e}(t) & f_{2e}(t) \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\tau}_j = \begin{bmatrix} \tau_{1j} & \tau_{2j} \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \begin{bmatrix} \gamma_{1j} & \gamma_{2j} \end{bmatrix}^T,$$

para $j = m, s$. Aplicando el análisis del Lagrangiano, se tiene

$$M_{11}(\mathbf{x}_{1j}) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(x_{12j}) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12}(\mathbf{x}_{1j}) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(x_{12j}) + I_2,$$

$$M_{21}(\mathbf{x}_{1j}) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(x_{12j}) + I_2,$$

$$M_{22}(\mathbf{x}_{1j}) = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$C_{11}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(x_{12j}) x_{22},$$

$$C_{12}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(x_{12j}) (x_{21j} + x_{22j}),$$

$$C_{21}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) = m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(x_{12j}) x_{21j},$$

$$C_{22}(\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}) = 0,$$

$$G_1(\mathbf{x}_{1j}) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \text{sen}(x_{11j}) + m_2 g l_{c2} \text{sen}(x_{11j} + x_{12j}),$$

$$G_2(\mathbf{x}_{1j}) = m_2 g l_{c2} \text{sen}(x_{11j} + x_{12j}).$$

Los valores de los parámetros propuestos son $m_1 = 23,902$, $l_1 = 0,45$, $l_{c1} = 0,091$, $I_1 = 1,266$, $m_2 = 3,88$, $l_2 = 0,45$, $l_{c2} = 0,048$, $I_2 = 0,093$ y $g = 9,80665$.

Se proponen los términos de incertidumbre como

$$\gamma_m(\cdot) = \begin{bmatrix} 0,3 \text{sen}(t) \\ 0,2 \text{sen}(2t) \end{bmatrix}, \quad 20 \leq t \leq 40 \text{ seg}, \quad (88)$$

$$\gamma_s(\cdot) = \begin{bmatrix} 0,3 \text{sen}(t) \\ -0,4 \text{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad 50 \leq t \leq 90 \text{ seg}, \quad (89)$$

para otro valor de t , se tiene $\gamma_m(\cdot) = \gamma_s(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Se propone el vector de perturbaciones externas como

$$\mathbf{F}_e(t) = \begin{bmatrix} 0,4 \text{sen}(t), \quad 70 \leq t \leq 120 \text{ seg} \\ -0,3 \text{sen}(2t), \quad 70 \leq t \leq 120 \text{ seg} \end{bmatrix}, \quad (90)$$

para otro valor de t , se tiene $\mathbf{F}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y se simula la interacción del humano mediante el vector

$$\mathbf{F}_h(t) = \begin{bmatrix} 0,2 \text{sen}(t), \quad 30 \leq t \leq 80 \text{ seg} \\ -0,5 \text{sen}(2t), \quad 30 \leq t \leq 80 \text{ seg} \end{bmatrix}, \quad (91)$$

para cualquier otro valor de t , se tiene $\mathbf{F}_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

3.3.2 Resultados numéricos, operación de la Estructura A

En las figuras 18 y 19 se muestra el desempeño de los mecanismos maestro y esclavo, respectivamente, bajo la operación de la Estructura A, donde se asume que no hay interacción

del operador humano. Por lo tanto los eslabones deberían permanecer en la última posición establecida por el humano que en este caso se define como una posición de referencia

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1_{mr}} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^T rad, \\ \mathbf{x}_{1_{sr}} &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}^T rad. \end{aligned} \quad (92)$$

En la primer gráfica de cada figura se muestra la posición del primer eslabón, en la segunda gráfica se muestra la posición del segundo eslabón, mientras que en la tercera gráfica se muestra la señal de control para el primer eslabón y en la última gráfica se presenta el control para el segundo eslabón. En ambos casos se puede ver que tienden a permanecer en su posición de referencia en ausencia de interacción del operador humano.

En la figura 20 se muestran los errores existentes entre las posiciones de los eslabones de los mecanismos maestro y esclavo con respecto a la posición de referencia establecida en (92). En el caso de las dos primeras gráficas que corresponden a las posiciones del primer y segundo eslabón del maestro, respectivamente, se puede notar un ligero aumento en el error en $20 \leq t \leq 40 \text{ seg}$, debido a que es el intervalo de tiempo en que se introduce el vector de incertidumbres definido en (88), simulando variaciones paramétricas y perturbaciones externas. En el caso de las dos últimas gráficas de esta figura que corresponden a las posiciones del primero y segundo eslabón del esclavo, respectivamente, se puede ver un incremento en el error en $50 \leq t \leq 120 \text{ seg}$, debido a que es el intervalo de tiempo en que se introducen los vectores de incertidumbre, que simulan variaciones paramétricas y fuerzas externas resultantes de la interacción con el ambiente. En ambos casos se puede establecer que a pesar de los términos de incertidumbres y perturbaciones externas introducidos, los controladores propuestos son lo suficientemente robustos para mantener el sistema estable.

3.3.3 Resultados numéricos, ambas estructuras en operación

En la figura 21, se puede ver en la primera y segunda gráfica las posiciones del eslabón 1 del maestro y del eslabón 1 del esclavo, respectivamente. La tercera gráfica muestra el error entre dichas posiciones. La cuarta gráfica ilustra la fuerza aplicada por el operador humano

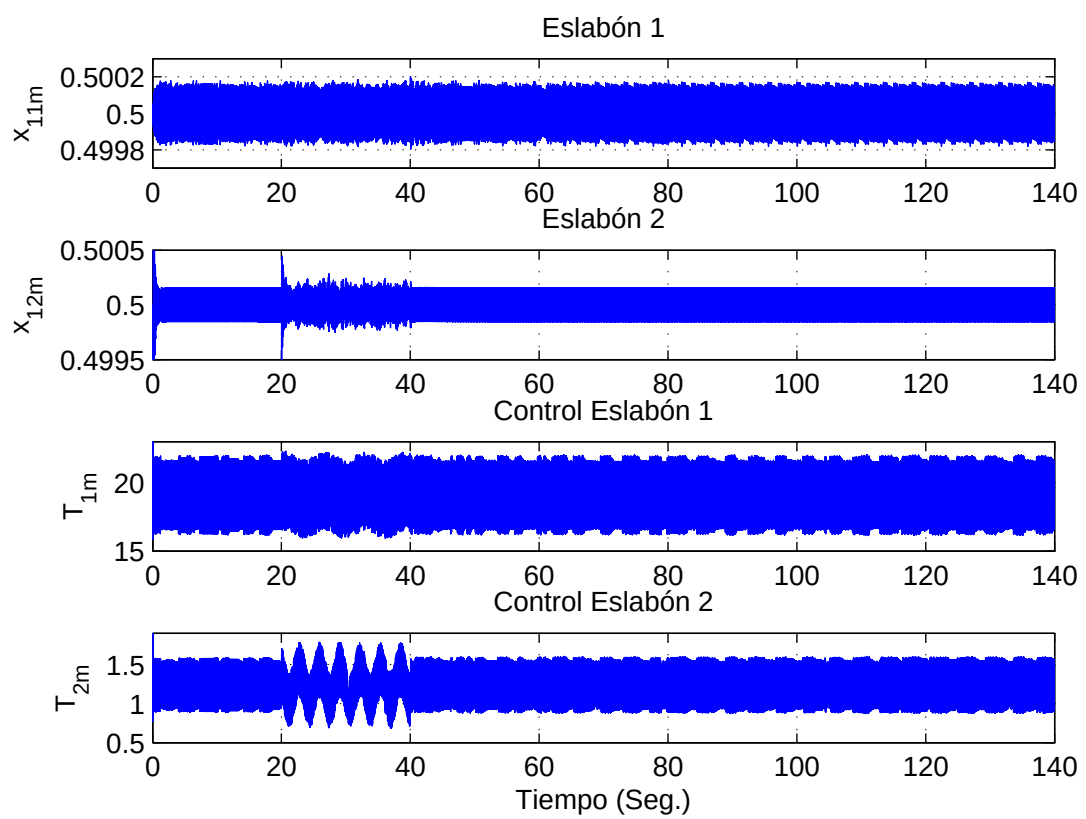


Figura 18. Comportamiento del mecanismo maestro bajo la operación de la Estructura A.

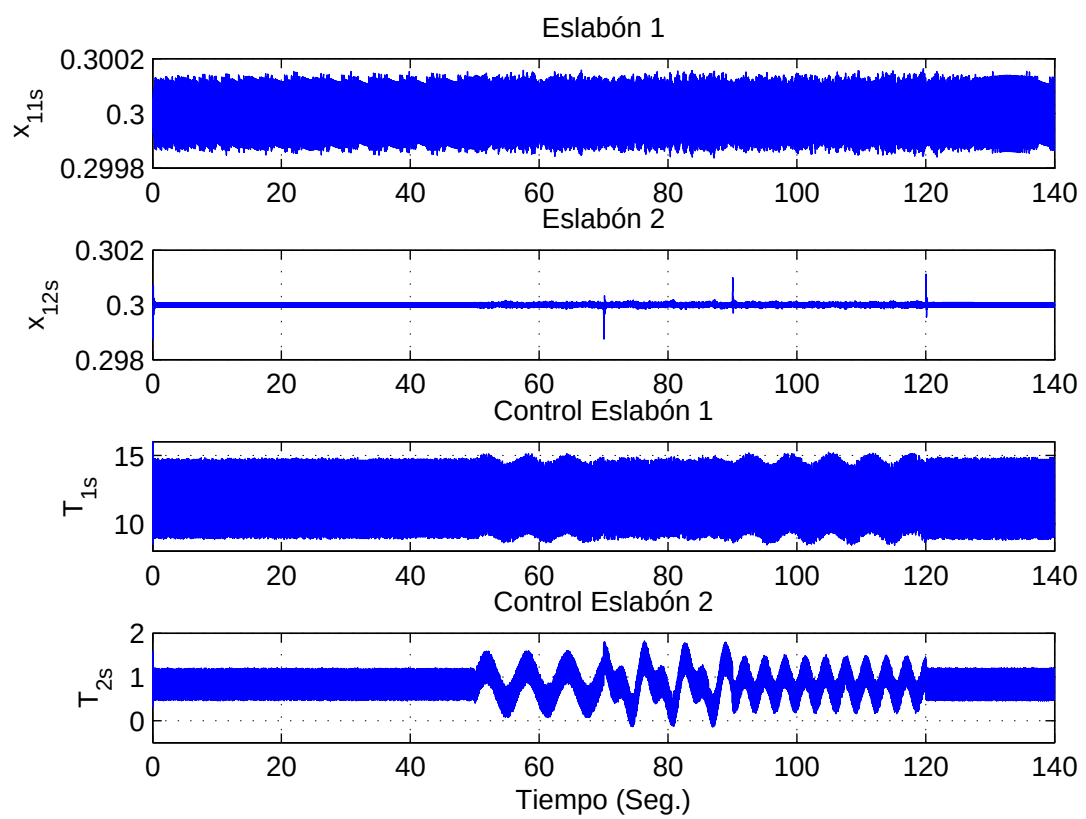


Figura 19. Comportamiento del mecanismo esclavo bajo la operación de la Estructura A.

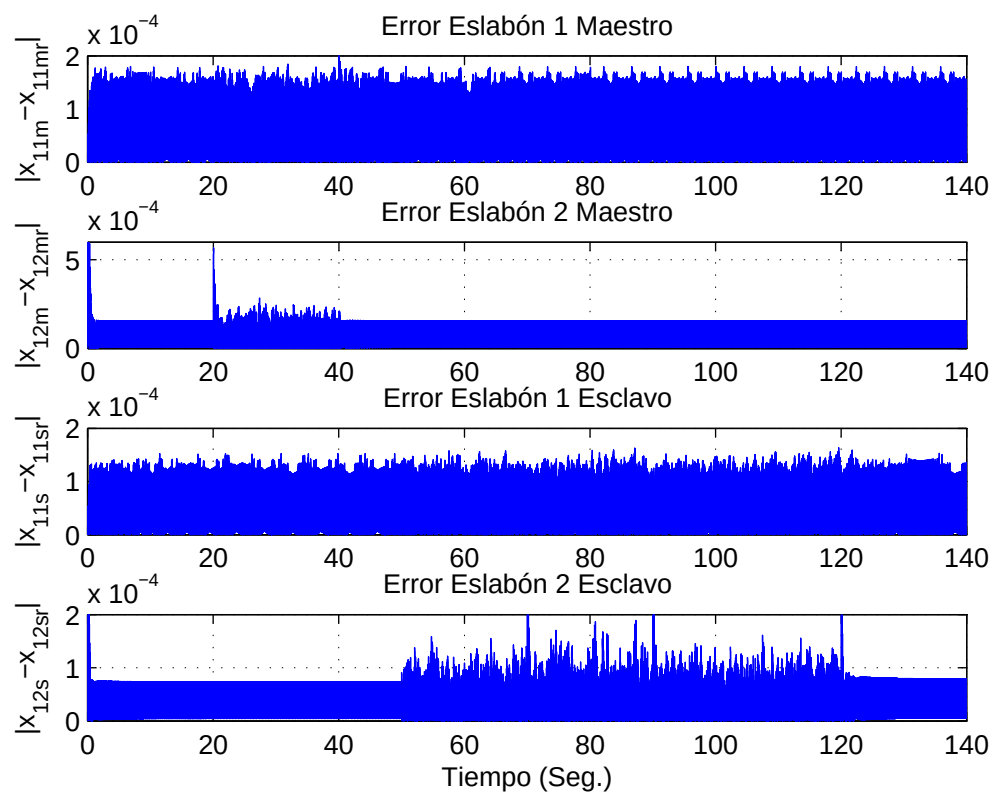


Figura 20. Errores en las posiciones del maestro y esclavo bajo la operación de la Estructura A.

sobre el eslabón 1 del maestro. Finalmente, la quinta y sexta gráfica muestran la señal de control aplicada al eslabón 1 del maestro y al eslabón 1 del esclavo.

En la figura 22 el contenido de las gráficas se distribuye de la misma manera, pero en este caso la información que se ilustra corresponde al eslabón 2 del maestro y al eslabón 2 del esclavo.

En ambas figuras se puede ver que en $t < 30 \text{ seg.}$ está en operación la Estructura A, debido a que los mecanismos poseen condiciones iniciales distintas y tienden a permanecer en su misma posición hasta $t = 30 \text{ seg.}$, que es el instante en que el operador humano interactúa con el mecanismo maestro, y es entonces cuando entra en operación la Estructura B, aplicando señales de control para lograr el acoplamiento entre las posiciones de los mecanismos. En $30 \leq t \leq 80 \text{ seg.}$, que es cuando se aplica la fuerza del humano sobre el mecanismo maestro, se puede ver en la tercer gráfica de ambas figuras que el error entre las posiciones se reduce logrando el acoplamiento en los mecanismos. En $t > 80 \text{ seg.}$, instante cuando el operador humano deja de interactuar con el mecanismo maestro, reactivándose la Estructura A, se puede ver que los mecanismos tienden a permanecer en la última posición establecida por el humano.

Es notorio el aumento que se presenta en la gráfica del error de la figura 22 en $50 \leq t \leq 80 \text{ seg.}$, esto se debe al efecto de las incertidumbres introducidas en el esclavo definidas en (89), y se puede ver que el error aumenta en $70 \leq t \leq 80 \text{ seg.}$, lo cual se debe a las fuerzas resultantes de la interacción del esclavo con el ambiente remoto definidas en (90).

Los resultado observados durante la operación de la Estructura A se discutieron en la subsección anterior. En este caso analizando el desempeño del sistema teleoperado en $30 \leq t \leq 80 \text{ seg.}$, se puede establecer que los controladores propuestos logran el acoplamiento entre los mecanismos durante la interacción con el operador humano a pesar de la existencia de terminos de incertidumbre en ambos mecanismos y a las fuerzas externas provenientes del ambiente remoto.

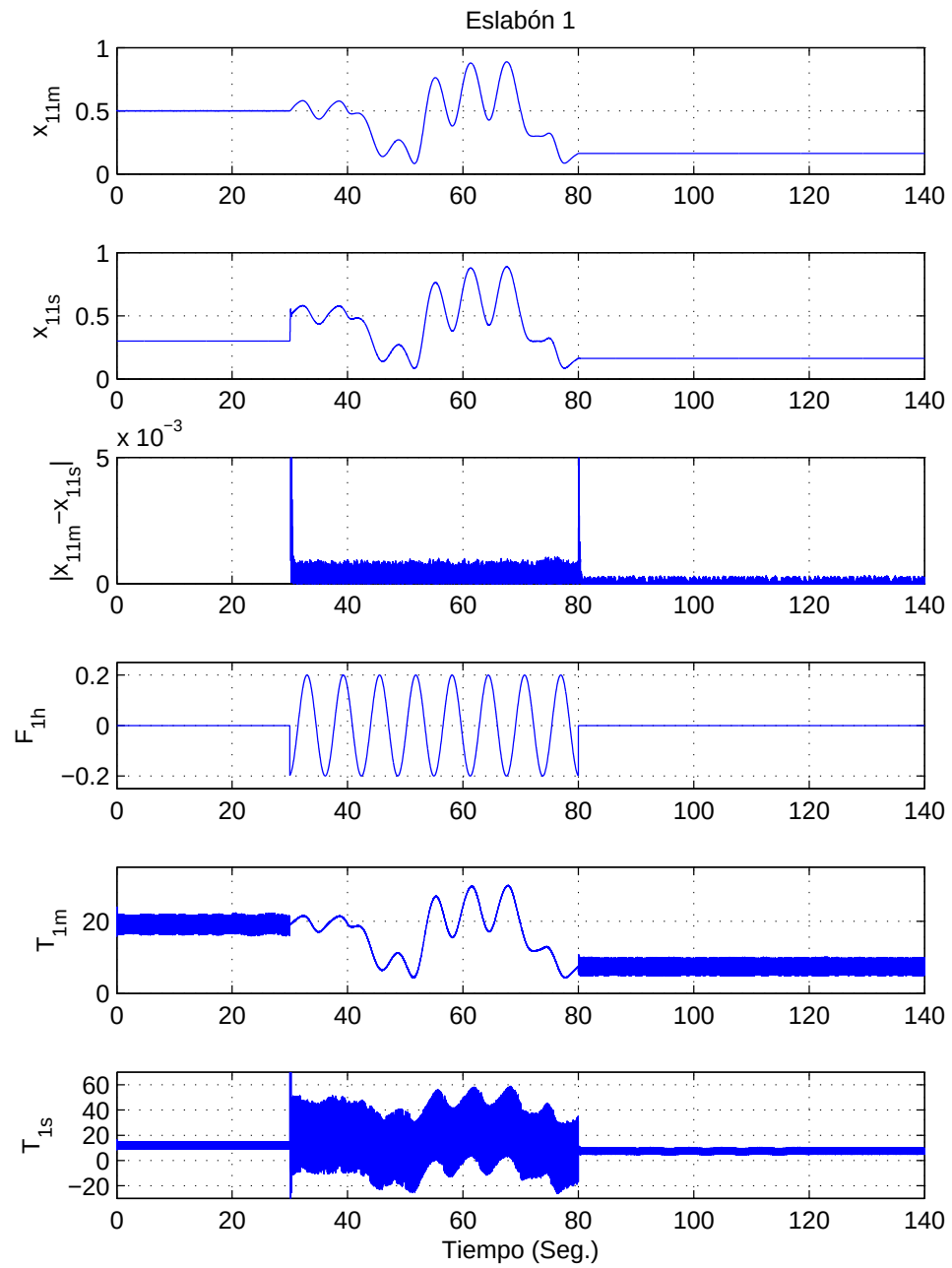


Figura 21. Desempeño del eslabón 1 de ambos mecanismos bajo las dos estructuras de operación.

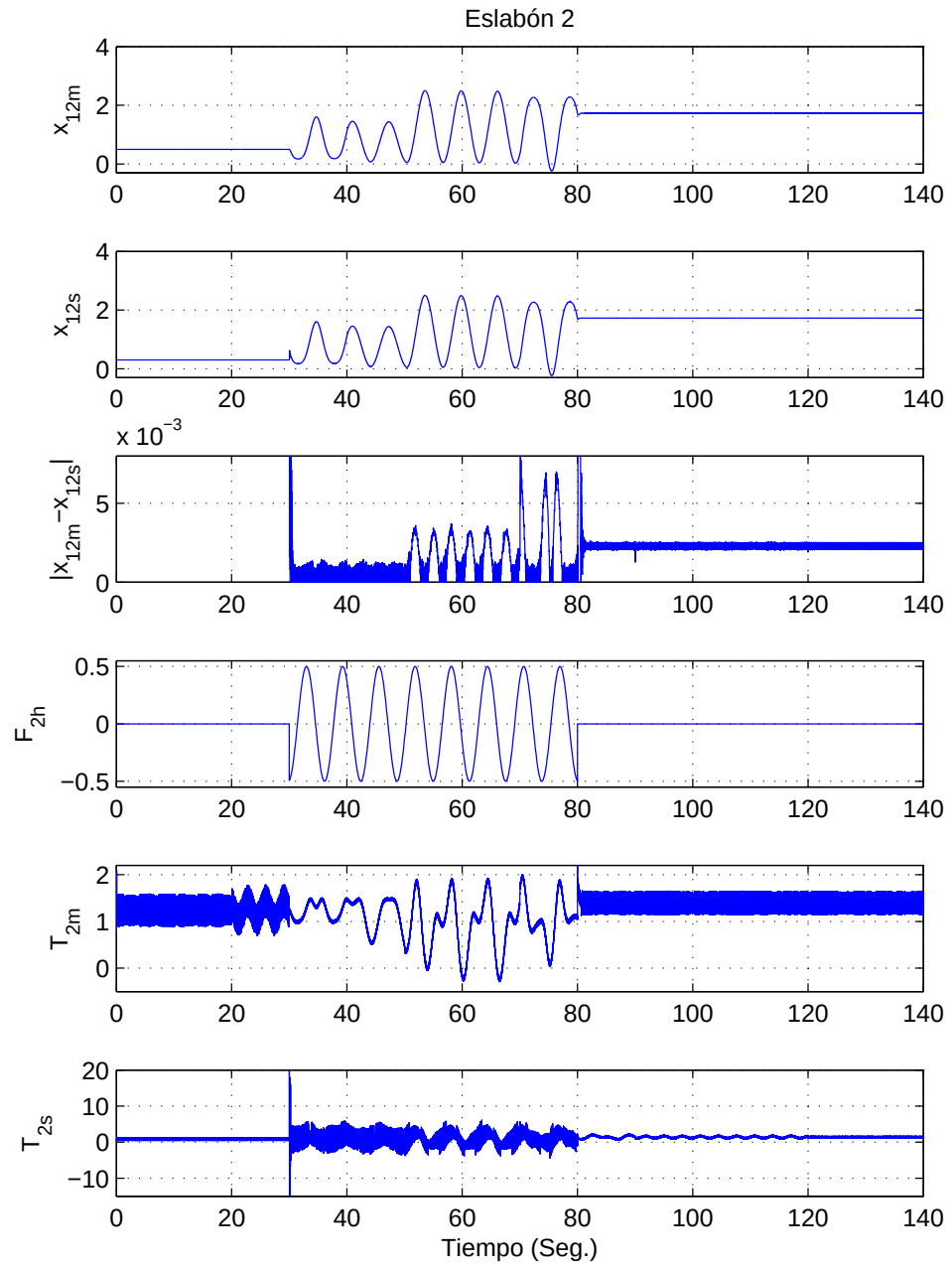


Figura 22. Desempeño del eslabón 2 de ambos mecanismos bajo las dos estructuras de operación.

Conclusiones

En esta tesis se abordó el problema de no disponer de un modelo preciso de los mecanismos a teleoperar, además de no poder modelar las fuerzas de interacción del mecanismo esclavo con el ambiente remoto. Se asume que se dispone únicamente del vector de posiciones generalizadas. Por lo cual fue necesario el empleo de observadores de estado robustos para estimar el vector de velocidades y términos desconocidos. Sin embargo, los resultados y las estructuras de control propuestas se limitan a sistemas con el mismo número de grados de libertad y con articulaciones del mismo tipo. Además se despreció el efecto de retardo introducido por el canal de comunicación, considerando que se trata de mecanismos que están separados por distancias no muy largas.

Como una primera etapa, se realizó la sincronización de sistemas caóticos de Sprott bajo una configuración maestro esclavo como una introducción al problema de teleoperación, donde un sistema impone su dinámica al resto de los demás. En este experimento se tuvo disponible el vector de estado completo.

Posteriormente se llevó a cabo la teleoperación bilateral de forma numérica de dos sistemas mecánicos. Se obtuvo el modelo de los mecanismos aplicando el análisis Lagrangiano, y a estos modelos se incorporaron términos adicionales acotados para simular las incertidumbres debido a variaciones paramétricas y perturbaciones externas. Estos términos de incertidumbre y perturbaciones externas se estimaron a través del empleo de observadores de estado para posteriormente ser compensados a través de un control por retroalimentación de estados. En base a los resultados obtenidos, se puede establecer que se aporta una estructura de control para la teleoperación bilateral con un esquema de telepresencia de sistemas mecánicos de $nGDL$, que es robusta ante incertidumbres en los modelos de los mecanismos y ante perturbaciones externas.

En base al trabajo realizado se puede establecer que la estructura de control propuesta resuelve el problema de teleoperación bilateral en sistemas mecánicos inciertos con las características específicas ya mencionadas, no obstante aún hay áreas de oportunidad para resolver problemáticas que comprometen la estabilidad de un sistema teleoperado, como son por ejemplo el estudio de los retardos en el canal de comunicación, el empleo de sensores adicionales, el modelo del operador humano o el modelo del ambiente remoto.

Como parte del trabajo futuro se encuentra la implementación de esta estructura de teleoperación a mecanismos reales, para determinar el grado de robustez y telepresencia que se puede lograr con los controladores propuestos.

En este trabajo las perturbaciones externas hacen referencia a las fuerzas del ambiente resultado de la interacción del mecanismo remoto con su entorno. Sería interesante considerar también fuerzas externas en el mecanismo esclavo, interpretadas como errores del operador humano mismo, y hacer las adecuaciones necesarias para mantener la robustez del sistema en lazo cerrado.

Otra posible actividad que resulta interesante, es aplicar esta estructura de teleoperación a sistemas afectados por retardos en el canal de comunicación para analizar el desempeño del sistema.

También resulta atractiva la idea de aplicar la estructura de control a mecanismos con distintos tipos de articulaciones y determinar si el desempeño se ve afectado por estos factores.

Referencias

- [1] M. Alireza, T. Mahdi and J. M. Horacio, "Control of Nonlinear Teleoperation Systems Subject to Disturbances and Variable Time Delays", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 3017-3022, 2012.
- [2] J. Alvarez, D. Rosas, D. Hernandez & E. Alvarez, "Robust synchronization of arrays of Lagrangian systems", *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 8(5), pp. 1039-1047, 2010.
- [3] B. R. Andrievsky & A. L. Fradkov, "Adaptive synchronization in presence of noise with applications to telecommunications", *Proc. of the European Control Conference*, pp. 2953-2957, 2001.
- [4] R. Aracil, "Teleoperation", *III Jornadas de Trabajo Enseñanza vía Internet/Web de la Ingeniería de Sistemas y Automática*, Alicante, Abril 2002.
- [5] P. Arkady, R. Michael & J. Kurths, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge, Cambridge Press.
- [6] W. Perruquetti & J. P. Barbot, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, Inc. New York, p. 409, 2002.
- [7] G. Besancon, *Nonlinear Observers and Applications*, Vol. 363. Springer, p 224
- [8] I. I. Blekhman, A. L. Fradkov, H. Nijmeijer & A. Pogromsky, "On self-synchronization and controlled synchronization", *Systems & control Letters*, vol. 31, pp. 299-305, 1997.
- [9] I. I. Blekhman, P. Landa, M. G. Rosenblum, M. G. "Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems", *Applied Mechanical Review*, vol. 48, pp 733-752, 1995.
- [10] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares & C. S. Zhou, "The synchronization of chaotic systems", *Physics Reports*, vol. 366, pp. 1-101, 2002.
- [11] S. Boccaletti, L. M. Pecora & A. Pelaez, "Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems", *Physical Review E*, 63:066219, 2001.
- [12] F. T. Buzan & T. B. Sheridan, "A model-based predictive operator aid for telemanipulators with time delay", *In Proceedings of the IEEE international conference on systems, man and*

cybernetics, vol. 1, pp. 138-143, 1989.

- [13] J. E. Colgate, "Power and impedance scaling in bilateral manipulation", *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, August 1991.
- [14] W. W. Chai & L. O. Chua, "A unified framework for synchronization and control of dynamical systems", *International Journal Of Bifurcation and Chaos*, vol. 4, pp. 979-998, 1994.
- [15] N. Chopra & M. W. Spong, "On synchronization of networked passive systems with time delays and application to bilateral teleoperation. Proc. SICE annual conference, 2005.
- [16] G. Clement, J. Vertut, R. Fournier, B. Espiau & G. Andre, "An overview of CAT control in nuclear services", *In Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, vol. 2, pp. 713-718, 1995.
- [17] W. Da & W. P. Fu, "A robust state observer scheme", *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 46(12), pp. 1958-1963, 2001.
- [18] D. Erdogmus, A. Umut, & J. C. Principe, "A neural network perspective to extended luenberger observers", *Institute of Measurement and Control*, vol. 35(2), pp. 10-16, 2002.
- [19] S. Dong & J. K. Mills, "Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18(4), pp. 498-510, 2002.
- [20] D. Erickson, M. Weber & I. Sharf, "Contact stiffness and damping estimation for robotic systems", *int. J. Robot. Res.*, vol. 22, no. 1, pp. 41-57, 2003.
- [21] A. Forouzanbar, H. A. Talebi & A. K. Sedigh, "Bilateral control of master-slave manipulators with constant time delay", *ISA Transactions*, vol. 51, pp. 74-80, 2011.
- [22] J. Funda, R. Taylor, B. Eldridge, S. Gomory & K. G. Gruben, "Constrained Cartesian motion control for teleoperated surgical robots", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12(3), pp. 453-465, 1996.
- [23] D. V. Gregory, & R. Bajarshi, "Chaotic communication using time-delay optical systems", *International Journal on Bifurcations and Chaos*, vol. 9(11), pp. 2129-2156, 1999.
- [24] B. Hannaford, "A design framework for teleoperators with kinesthetic feedback", *IEEE Trans Robot Autom*, vol. 5(4), pp. 426-34, 1989.
- [25] F. Hashemzadeh, I. Hassanzadeh & M. Tavakoli Mahdi, "Teleoperation in the presence of

- varying time delays and sandwich linearity in actuators", *Automatica*, vol. 49, pp. 2813-2821, 2013.
- [26] D. Hervé, M. P. Kennedy & M. Hasler, "Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40(10), pp. 634-642, 1993.
 - [27] P. Hokayem, & M. W. Spong, "Bilateral teleoperation: a historical survey", *Automática*, vol. 42, pp. 2035-2057, 2006.
 - [28] I. G. Polushin, S. N. Dashkovskiy, A. Takhmar & R. Patel, "A small gain framework for networked cooperative force-reflecting teleoperation", *Automatica* , vol. 49, Issue 2, pp. 338-348, February 2012.
 - [29] S. Katsura, Y. Matsumoto, "Modeling of Force Sensing and Validation of Disturbance Observer for Force Control" *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, Issue 1, pp. 530-538, 2007.
 - [30] R. Kelly, & V. Santibañez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson Education, Madrid, 2003.
 - [31] M. C. Kevin, A. V. Oppenheim, & S. H. Strogatz, "Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40(10): pp. 626-632, 1993.
 - [32] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall. Upper Sadler River, NJ, 3rd edition, 2002.
 - [33] D. A. Lawrence, "Stability and transparency in bilateral teleoperation", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9(5), pp. 625-637, 1992.
 - [34] W. S. Levine, *The control handbook*. CRC-Press IEEE-Press, 1995.
 - [35] F. L. Lewis, C. T. Agdallah & D. M. Dawson, *Control of robots manipulators*, Macmillan Publishing Company. N. Y., 1993.
 - [36] C. Linping, N. Fazel & D. Stirling. "A pplication of Adaptive Controllers in Teleoperation Systems: A Survey", *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, vol. 4, Issue: 3, pp. 337-352, February 2014.
 - [37] D. Luenberger, "An introduction to observers", *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-16: pp. 596-602,1971.

- [38] A. M. Lyapunov, "Problème général de la stabilité du mouvement", *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, vol. 9, pp. 203-474, 1907:original paper published in 1893 in *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 1893: reprinted as vol. 17 in *Annals of Math studies*, Princeton University Press, Princeton N. J..
- [39] Makoto, I y Chua, L. O. 2002. Reconstruction and synchronization of hyperchaotic circuits via one state variable. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 12(10): 2069-2085 p.
- [40] K. Makoto, et al., "Controlled synchronization of two 1-DOF coupled oscillators", *Proc. of 15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [41] E. Nuño, L. Basañez, "Teleoperación: Técnicas, aplicaciones, entorno sensorial y teleoperación inteligente", Reporte de trabajo de investigación. Universidad Politécnica de Catalunya, 2004.
- [42] E. Nuño, L. Basañez, & R. Ortega, "Passivity-based control for bilateral teleoperation: a tutorial", *Automatica*, vol 47, pp. 485-495, 2011.
- [43] C. Passenberg, A. Peer & M. Buss, "A survey of environment-operator- and task-adapted controllers for teleoperation systems", *Mechatronics, Special Issue on Design Control Methodologies in Telerobotics*, vol. 20, no. 7, pp. 1-25.
- [44] A. Pogromsky, "Synchronization and adaptive synchronization in semipassive systems", *Proc. of Control and Decision Conference, St Petersburg, Russia*. pp. 64-68, 2010, 1997.
- [45] L. M. Pecora, & T. H. Carroll, "Synchronization in chaotic systems", *Physical Review Letters*, vol. 64(8), pp. 821-824, 1990.
- [46] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer. New York, 1991.
- [47] J. Primbs, *Survey of Nonlinear Observer Design Techniques*. Prof. Sluis, Spring, 1996.
- [48] B. Reggie & N. Rulkov, "Designing a coupling that guarantees synchronization between identical chaotic systems", *Physical Review Letters*, vol. 78(22), pp. 4189-4192, 1997.
- [49] F. Reyes, *Robótica, Control de Robots Manipuladores*, Editorial Alfaomega, 2011.
- [50] Lewis F. L., Dawson D. M., Abdallah C. T.. (2004). *Robot manipulator control*. University of Texas.
- [51] A. Rodriguez & H. Nijmeijer, "Mutual Synchronization of robots via estimated state feedback: A cooperative approach", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.

12(4), pp. 542-554, 2004.

- [52] A. Rodríguez, "Sincronization of mechanical systems", Tesis doctoral, Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands, 2002.
- [53] D. Rosas, "Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores discontinuos", Tesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 2006.
- [54] D. Rosas, J. Álvarez & E. Alvarez, "Robust synchronization of arrays of uncertain nonlinear second-order dynamical systems", *Journal of Nonlinear Dynamic*, 2011.
- [55] I. Soichi, S. Shashikanth, & T. Masayoshi, "H-infinity optimization of Luenberger state observers and its application to fault detection filter design", *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL. pp. 1011-1016, 2001.
- [56] J. C. Sprott, "Simple chaotic systems and circuits", *American Journal of Physics*, vol. 68, no. 8, pp. 758-763, 2000.
- [57] R. Sunghwan, W. Myung, U. Dong, J. Young & M. Chil, "Reconsideration of intermittent synchronization in coupled chaotic pendula", *Physical Review E*. 64: 060101, 2001.
- [58] Y. Tang, I. Alistair & L. Chua, "Synchronization and chaos" , *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-30(9), pp. 620-626, 1993.
- [59] T. L. Carroll, "Communicating with use of filtered, synchronized, chaotic signals", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental, Theory and Applications*, vol. 42(3) pp. 105-110, 1995.
- [60] V. I. Utkin, *Sliding modes and their application in variable structure systems*, Mir Publishers, 1998.
- [61] V. Utkin, J. Guldner & J. Shi, *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, Taylor and Francis Publishers, CRC press, 2009.
- [62] W. Wang & K. Yuan, "Teleoperated manipulator for leak detection of sealed radioactive sources", *In Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, vol. 2, pp. 1682-1687, 2004.
- [63] Y. Xian, H. Changchun, Y. Jing & G. Xinping, "New Stability criteria for networked teleoperation system", *Elsevier Information Sciencies* 233, pp. 244-254, 2012.

- [64] D. Yoerger & J. Slotine, "Supervisory control architecture for underwater teleoperation", *In Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, vol. 4, pp. 2068-2073, 1987.
- [65] Y. Yokokohji & T. Yoshikawa, "Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling-formulation and experiment", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10(5), pp. 605-620, 1994.
- [66] C. Yonghong, R. Govindan & D. Mingzhou, "General stability analysis of synchronized dynamics in coupled systems", *Physical Review E*. 67: 026209, 2003.