



Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias

**Simulación numérica del oscilador armónico en la
electrodinámica estocástica**

Tesis profesional
que para obtener el título de

Físico

presenta:

Victor Osvaldo Onofre Gonzalez

Director de Tesis:
Dr. Ramon Carrillo Bastos

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

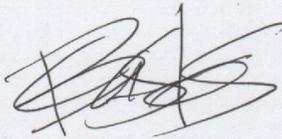
FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL OSCILADOR ARMÓNICO EN LA
ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

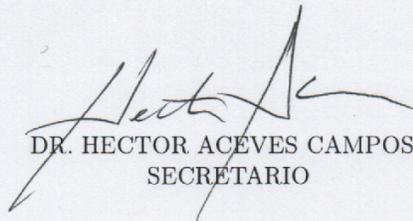
TESIS PROFESIONAL
QUE PRESENTA

VICTOR OSVALDO ONOFRE GONZALEZ

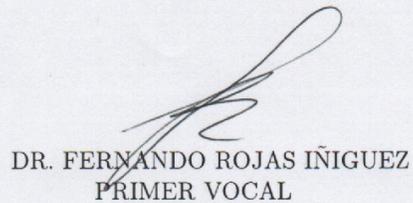
APROBADO POR:



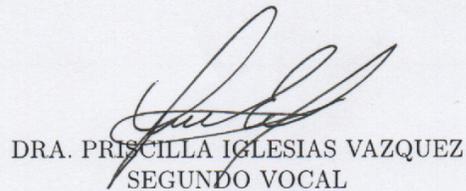
DR. RAMON CARRILLO BASTOS
PRESIDENTE DEL JURADO



DR. HECTOR ACEVES CAMPOS
SECRETARIO



DR. FERNANDO ROJAS INIGUEZ
PRIMER VOCAL

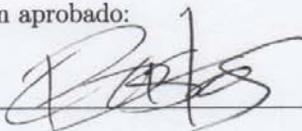


DRA. PRISCILLA IGLESIAS VAZQUEZ
SEGUNDO VOCAL

Resumen de la tesis de **Victor Osvaldo Onofre Gonzalez** presentada como requisito parcial para la obtención de la **Licenciatura en Física**. Ensenada, Baja California, México, Marzo del 2018.

Simulación numérica del oscilador armónico en la electrodinámica estocástica

Resumen aprobado:



Dr. Ramon Carrillo Bastos

Solucionamos la ecuación de Newton para una partícula cargada con un potencial del oscilador armónico interactuando con una radiación estocástica independiente de la temperatura. Se tomó esta radiación como una suma de ondas planas con amplitudes aleatorias, que según la electrodinámica estocástica al interactuar con la materia da origen a los fenómenos cuánticos.

Se calcularon treinta trayectorias con el método de Runge-Kutta de orden 4. Encontrando que los resultados promedio sobre el ensemble tienden al oscilador cuántico. Sentando las bases para un estudio numérico más profundo del oscilador y otros sistemas en la electrodinámica estocástica.

Palabras claves: **Electrodinámica Estocástica, Oscilador Armónico, Simulación Numérica**

Índice

1. Introducción	4
2. Marco teórico	6
2.1. Efecto casimir y la radiación del vacío	6
2.2. Descripción de la radiación del vacío en la EDE	8
2.3. Propiedades que debe de cumplir la radiación del vacío	11
2.3.1. Homogeneidad e isotropía	12
2.3.2. Invariante a la transformación de Lorentz	13
2.4. Fuerza de reacción por la radiación	19
2.5. Solución analítica del oscilador armónico en la mecánica clásica . . .	23
2.5.1. Oscilador simple	23
2.5.2. Oscilador cargado	24
2.5.3. Oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío (EDE)	26
2.6. Solución analítica del oscilador armónico cuántico	28
3. Metodología	31
4. Resultados y discusión	34
4.0.1. Oscilador simple	35
4.0.2. Oscilador cargado con fuerza de reacción por la radiación . . .	37
4.0.3. Oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío (EDE)	39
5. Conclusiones	43

Índice de figuras

1.	Desarrollo histórico de la definición del vacío. a) Remover materia visible (Siglo XVII), b) Enfriar a temperaturas cercanas a cero para eliminar la radiación térmica (Siglo XIX), c) Los experimentos del efecto Casimir llegaron a la conclusión de que aun en la ausencia de materia y temperatura en el cero absoluto existe una radiación.	6
2.	Dos placas conductoras separadas por una pequeña distancia sienten una fuerza atractiva entre ellas. El efecto casimir demuestra la existencia de campos electromagnéticos en el vacío independientes a la temperatura.	7
3.	Oscilador armónico interactuando con la radiación del vacío	12
4.	(Izquierda) Ejemplo de un observador estacionario, si suponemos que la radiación es percibida en el espectro electromagnético correspondiente a la luz verde. (Derecha) Cambio causado por el efecto Doppler al estar en movimiento el observador.	14
5.	Distribución de probabilidad del estado base del oscilador armónico cuántico en donde $P(x)$ es la probabilidad de encontrar la partícula en la posición x	30
6.	Puntos finales de los vectores de polarización del campo ($\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda_1}, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda_2}$) con 10^6 modos (n_x, n_y, n_z) , donde se puede observar la distribución isotrópica de ellos.	33
7.	(Arriba) Evolución en el tiempo del oscilador armónico simple. (Abajo) Acercamiento al oscilador.	35
8.	Histograma de posiciones del oscilador armónico simple con un numero de posiciones ($\#X$) igual a 5.7×10^6	36
9.	Comparación de la distribución de probabilidad del estado base del oscilador cuántico con el histograma de posiciones del oscilador armónico simple.	37
10.	(a) Evolución en el tiempo del oscilador armónico con fuerza de reacción por la radiación, (b) pérdida de energía del oscilador debido a la radiación de reacción.	38
11.	Evolución en el tiempo de dos simulaciones con los mismas condiciones iniciales. (a) 1era simulación , (b) 2da simulación.	39
12.	Histograma de posiciones y energías para dos simulaciones con las mismas condiciones iniciales.	40

13.	Comparación del histograma de posiciones del conjunto de 30 simulaciones a distintos tiempos con la distribución de probabilidad del oscilador cuántico.	41
14.	Histograma de energías del conjunto de 30 simulaciones a distintos tiempos.	42

1. Introducción

En la actualidad contamos con aplicaciones refinadas de las propiedades cuánticas de la materia para construir impresionantes y poderosos aparatos que se han convertido en emblemas para nuestra civilización; sin duda el éxito científico y tecnológico de la mecánica cuántica es incuestionable (De La Peña, 2014). Sin embargo, una revisión de la literatura dedicada a discutir los aspectos fundamentales de la cuántica tales como el indeterminismo, la no-localidad y el manejo de objetos con una naturaleza indeterminada entre otros; es suficiente para revelar la amplia difusión de interpretaciones del conocimiento cuántico actual. Debido a esto han surgido varias teorías con el fin de explicar distintos fenómenos cuya única explicación yace en la cuántica. Entre estas teorías está la llamada electrodinámica estocástica (EDE), de la cual trata este trabajo, la EDE se distingue de la mayoría de ellas en que no es una interpretación de la cuántica, es una teoría de fondo de ella.

La EDE es una variación de la electrodinámica clásica con un cambio en la solución homogénea de las ecuaciones de Maxwell para incluir la radiación clásica electromagnética del vacío. Los avances principales de la EDE empezaron independientemente por Trevor Marshall (Marshall, 1963, 1965b,a) y Timothy Boyer (Boyer, 1969b, 1975, 1969a) en 1960, basándose en trabajos e ideas propuestas por Planck, Nerst y Einstein (De la Peña et al., 2014) . Marshall y Boyer propusieron que los procesos físicos atómicos podrían describirse con exactitud dentro de la física clásica siempre y cuando se tengan en cuenta el campo electromagnético apropiado que actúa sobre las partículas. El campo propuesto proviene del vacío y se obtiene de manera natural de las ecuaciones de Maxwell, tomando como base experimental la existencia del efecto Casimir.

La EDE ha logrado reproducir ciertos resultados de la mecánica cuántica, como las fuerzas de Casimir, las fuerzas de Van der Waals, sistemas de osciladores armónicos, diamagnetismo, radiación de cuerpo negro y la ausencia del colapso atómico en el hidrogeno (Boyer, 2016; Chen et al., 2002; De La Peña and Cetto, 2013; Cole and Zou, 2003), dando una explicación determinista e intuitiva de ellos. A principios de 1980 su estudio disminuyó a solo un grupo pequeño de investigadores al concluir que la EDE no puede predecir los fenómenos de la mecánica cuántica en sistemas no lineales (Cole and Zou, 2003).

La mayoría de los trabajos en la EDE son analíticos, los estudios numéricos son raros. La ventaja de una simulación numérica es que se puede extender a otros sistemas físicos con una relativa facilidad y que es flexible para probar diferentes suposiciones y aproximaciones. En este trabajo se presentan los resultados de una simulación numérica del oscilador armónico en presencia de la radiación estocástica propuesta por la EDE. Los resultados se obtuvieron de evaluar numéricamente las ecuaciones de movimiento de Newton con el método de Runge-Kutta de orden 4 cuya implementación se realizó en fortran 90. La organización de este trabajo es la siguiente, primero en el marco teórico se revisa el efecto casimir y su interacción con la radiación del vacío, después se revisan las propiedades de la radiación y el planteamiento de la fuerza de reacción por la radiación, terminando el marco teórico con la solución analítica del oscilador armónico en la mecánica clásica y cuántica. En la sección de metodología se explica el modelo utilizado, después se analizan los resultados y se finaliza con las conclusiones.

2. Marco teórico

2.1. Efecto casimir y la radiación del vacío

Aristóteles y sus seguidores creían que no existía región en el espacio que podía estar completamente vacía. Esta idea fue rechazada en la revolución científica del siglo XVII en donde se definió el vacío como la región en el espacio que está libre de materia. En el siglo XIX esta definición volvió a cambiar, se encontró que aunque el espacio esté libre existe una radiación dependiente a la temperatura. Así que para crear una región de vacío absoluto es necesario eliminar toda materia y radiación térmica de dicha región, pudiendo eliminar esta última al enfriar la región al cero absoluto.

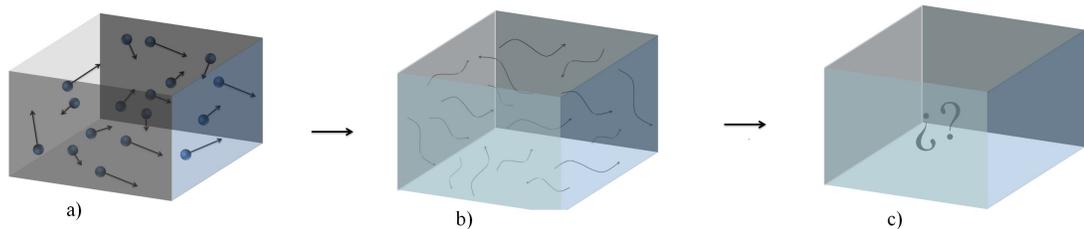


Figura 1: Desarrollo histórico de la definición del vacío. a) Remover materia visible (Siglo XVII), b) Enfriar a temperaturas cercanas a cero para eliminar la radiación térmica (Siglo XIX), c) Los experimentos del efecto Casimir llegaron a la conclusión de que aun en la ausencia de materia y temperatura en el cero absoluto existe una radiación.

La llegada de la mecánica cuántica y sus ideas revolucionarias llevo a Hendrik Casimir a estudiar con más detalle la interacción de la radiación térmica con la materia y su dependencia a la temperatura. La idea inicial de Casimir fue disponer dos espejos uno frente al otro en una región libre de materia y a temperatura T . Se

encontró que entre los dos espejos de área $A = L^2$ y separación d (con $d \ll L$) existe una fuerza atractiva proporcional al producto de la temperatura T y al área A e inversamente proporcional a la separación entre los espejos al cubo,

$$F = -\frac{\xi(3)k_B T A}{4\pi d^3}, \quad (1)$$

donde $\xi(3)$ es una constante numérica (Boyer, 2011). A partir de la Ec. 1 la fuerza se anula cuando la temperatura T se acerca a cero. Sin embargo, Casimir demostró teóricamente que la fuerza no desaparece, se vuelve independiente de T

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{240 d^4}, \quad (2)$$

este es el efecto Casimir. Los resultados experimentales definitivos fueron presentados por Steve K. Lamoreaux (Lamoreaux, 1997).

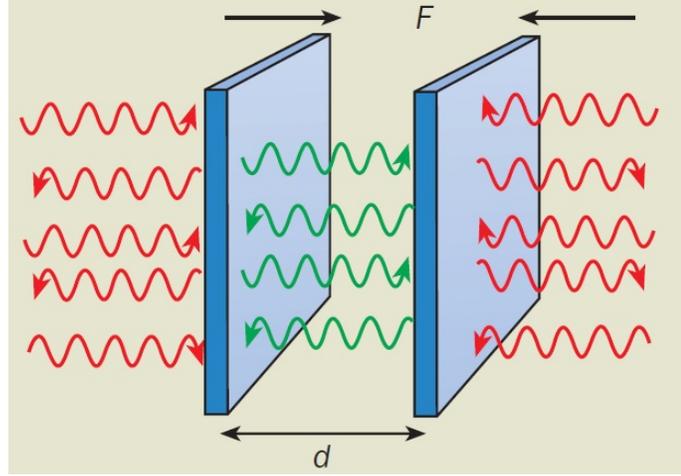


Figura 2: Dos placas conductoras separadas por una pequeña distancia sienten una fuerza atractiva entre ellas. El efecto casimir demuestra la existencia de campos electromagnéticos en el vacío independientes a la temperatura.

El efecto casimir solo puede ser explicado con las llamadas “fluctuaciones en el

vacío”, concepto desarrollado en la electrodinámica cuántica. La existencia de estas fluctuaciones como un ente real que puede ser interpretado como un campo electromagnético del vacío y no solo “virtual” es respaldado por una gran evidencia experimental en el efecto casimir (Lamoreaux, 1997; Mohideen and Roy, 1998; Surenik et al., 1993; Chen et al., 2002; Chan et al., 2001; Sparnaay, 1958)

Existe una teoría que parte de la existencia de la radiación del vacío y su interacción con la materia para explicar en términos clásicos los fenómenos cuánticos, esta teoría normalmente es llamada Electrodinámica Estocástica (EDE). Para entender las ideas que propone la EDE es necesario hacer un análisis de la electrodinámica clásica tradicional y su conexión con la radiación del vacío, lo cual se dará en la siguiente sección.

2.2. Descripción de la radiación del vacío en la EDE

Un análisis de las propiedades y consecuencias de la radiación del vacío en la electrodinámica clásica es pertinente, para lograrlo empezaremos analizando sus puntos esenciales. Normalmente se dice que todo el contenido teórico de la electrodinámica clásica esta resumido en las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

y la fuerza de Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right), \quad (5)$$

para una partícula de masa m y carga e en un campo eléctrico y magnético \mathbf{E} y \mathbf{B} . Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell homogéneas, sin fuentes, es decir donde ρ y \mathbf{J} se anulan se puede expresar en términos de ondas planas:

$$\mathbf{E} = ReE_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\theta)}, \quad \mathbf{B} = ReB_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\theta)}, \quad (6)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}$ es un vector unitario ortogonal al vector de onda \mathbf{k} , E_0 es la amplitud, ω es la frecuencia y θ es la fase.

Cuando discutimos las fuentes de radiación en electrodinámica clásica es conveniente calcular el potencial escalar y vectorial Φ y \mathbf{A} , que permite expresar los campos como:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7)$$

En términos de los potenciales escalar y vectorial la solución general de las ecuaciones de Maxwell toma la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^h(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \frac{\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (9)$$

donde $\Phi^h(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t)$ son soluciones de las ecuaciones homogéneas de Maxwell y las integrales provienen del campo debido a las fuentes. La solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales siempre se puede escribir en la forma de las Ec. 8 y 9; es decir separar en la solución homogénea y la particular. Usualmente la solución homogénea que involucra $\Phi^h(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t)$ es omitida.

Se puede suponer que $\Phi^h(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t)$ son omitidas por el prejuicio teórico

de que toda radiación proviene de cargas acelerándose en un tiempo finito. Muchos físicos no pueden imaginar una situación distinta. En tal situación se debe de considerar que el universo, al momento de ser formado solo contenía materia, y toda la radiación fue emitida después. Sin embargo, es posible, al menos matemáticamente, tomar soluciones homogéneas como en las ecuaciones 8 y 9. En esta otra situación, en la que se permite la solución homogénea, el universo al tiempo de su formación contenía radiación y materia.

Claramente la omisión de $\Phi^h(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t)$ en la electrodinámica clásica no ha llevado a ningún desacuerdo entre los experimentos y la teoría, para entender la razón de esto plantearemos un experimento mental (Boyer, 2016): imaginemos que tenemos en un laboratorio un oscilador armónico cargado, la soluciones homogéneas de Maxwell ($\Phi^h(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}^h(\mathbf{r}, t)$) es la radiación que existía en el laboratorio antes de encender el equipo que iniciara el movimiento del oscilador y está fuera del control del experimento. Si el laboratorio está localizado en un lugar libre de ondas electromagnéticas la solución homogénea de las ecuaciones de Maxwell seran cero. Sin embargo, si el experimento es llevado en un laboratorio que se encuentra al lado de una estación de radio que está emitiendo radiación y el laboratorio es mucho más pequeño comparado con la distancia hacia la estación de radio, el experimentador describirá los campos electromagnéticos emitidos por la estación como ondas planas que satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas, mientras la radiación emitida por el oscilador daría una radiación extra. El oscilador esta respondiendo a la solución homogénea que esta fuera del control del experimento. La necesidad de introducir la solución homogénea en el experimento dependerá de la magnitud de la radiación que proviene de la estación de radio. Si la energía dada por el arreglo experimental es mucho más grande que la dada por la solución homogénea, entonces esta se puede

ignorar. La EDE sigue el mismo principio, la radiación en el vacío se puede expresar como ondas planas que satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas con una escala del orden de \hbar . Por lo que solo es relevante en la escala atómica. Un análisis más detallado de la EDE se dará a continuación.

2.3. Propiedades que debe de cumplir la radiación del vacío

La EDE es la teoría donde se acepta que en la solución general de las ecuaciones de Maxwell el término \mathbf{A}^h es diferente de cero y por lo tanto se admite la existencia de un campo electromagnético en el vacío aun a temperaturas cercanas a cero.

Aceptando que cada electrón se comporta en forma impredecible en algún momento, podemos preguntarnos sobre la naturaleza o el origen de este comportamiento aleatorio. Por ejemplo, el problema del colapso atómico es un caso donde la teoría clásica de electrones, que asume la condición $\mathbf{A}^h = 0$, ha fallado. Una interpretación semiclásica del átomo involucra electrones fluctuando en posición y velocidad alrededor de un núcleo. Esta partícula no puede tener esas fluctuaciones sin una fuerza estocástica interactuando con ella. Una radiación estocástica podría proporcionar dicha fuerza y la elección de tomar a \mathbf{A}^h como esta radiación es apropiado (Boyer, 1975; De La Peña, 2014).

Al colocar una partícula cargada en un campo electromagnético estocástico, esta adquiere un movimiento aleatorio y complicado. Esto significa que la partícula absorbe energía del campo y a su vez la hace radiar, ya que toda carga acelerada radia, por lo que la partícula también pierde energía emitiéndola como radiación electromagnética. En condiciones dinámicas apropiadas puede suceder que la energía

irradiada igual a la absorbida, de tal manera que el sistema alcance una situación de equilibrio, esta sería la condición que determina el estado estable del sistema (De La Peña and Cetto, 2013; De La Peña, 2014; De la Peña et al., 2014). La solución específica de equilibrio depende naturalmente de las propiedades del campo y sistemas estudiados.

Para expresar de manera clásica la radiación estocástica del vacío es necesario que cumpla ciertas propiedades. Debe de ser homogénea ya que ninguna posición es preferida en el espacio, debe de ser isotrópica, ya que no hay dirección preferencial en el espacio y debe de ser invariante de Lorentz, ya que no existe sistema inercial predilecto (Boyer, 1975).

2.3.1. Homogeneidad e isotropía

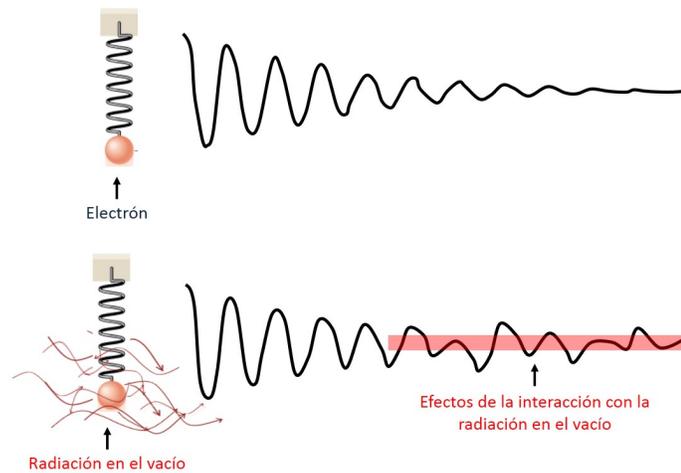


Figura 3: Oscilador armónico interactuando con la radiación del vacío

Si suponemos que la radiación del vacío no es isotrópica, uno espera fuerzas debido a la presión de la radiación en una dirección particular asociada con el fallo

de la isotropía. Específicamente, supongamos \mathbf{A}^h consiste de radiación fluctuante que puede expresarse como una superposición de ondas planas moviéndose en la dirección x y polarizadas en el eje y . Entonces un oscilador en las coordenadas del origen, orientado en el eje y , experimentaría una fuerza promedio empujando el oscilador en la dirección x positiva. En contraste a esta situación, si asumimos que el espectro de radiación es isotrópico, entonces no abra una fuerza promedio interactuando en una región específica del oscilador, es decir el oscilador interactuando con una radiación estocástica isotrópica no redistribuiría la radiación a una dirección preferida, incluso si el oscilador tiene una dirección preferida. Una situación análoga se presenta si la radiación del vacío no es homogénea.

2.3.2. Invariante a la transformación de Lorentz

Es posible que el espectro de radiación sea isotrópico en un marco de referencia K , pero puede no serlo en un marco de referencia K' moviéndose relativamente al primero. Por ejemplo, asumiremos que la radiación en el vacío es isotrópica en un marco de coordenadas K y si suponemos, para facilitar el planteamiento, que la radiación es percibida por dicho observador en el espectro electromagnético correspondiente a la luz verde. No importa donde este o en qué dirección observe, el vacío estará lleno de radiación uniforme verde. Dicho espectro satisface los requerimientos de homogeneidad e isotropía para este observador, pero si suponemos que hay un observador moviéndose a velocidad constante hacia el primer observador, por el efecto Doppler, el observador en movimiento vería la radiación enfrente de él moviéndose desde el azul hasta el rojo, además de que la intensidad también cambiaría, sería más brillante enfrente y menos atrás. Por lo que la radiación no se mira igual para ambos

observadores, así tal radiación es isotrópica para uno, pero no para el otro. Para evitar esto, se necesita que el espectro de la radiación del vacío sea igual para todos los observadores en movimiento a velocidad constante, es decir, que sea invariante a la transformación de Lorentz.

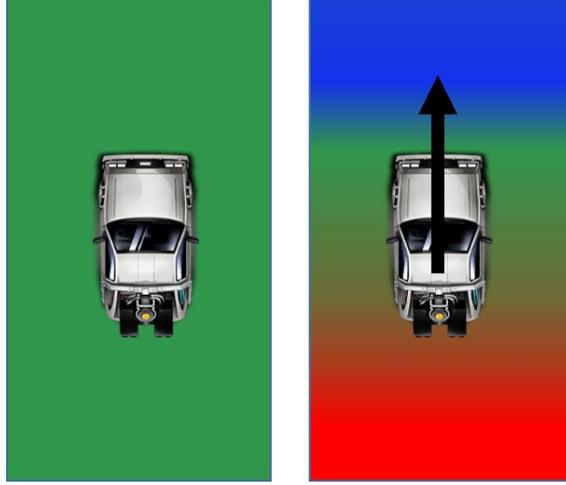


Figura 4: (Izquierda) Ejemplo de un observador estacionario, si suponemos que la radiación es percibida en el espectro electromagnético correspondiente a la luz verde. (Derecha) Cambio causado por el efecto Doppler al estar en movimiento el observador.

A continuación se explicará de manera general el procedimiento de Boyer (1969b) para realizar la transformación de Lorentz en el campo electromagnético del vacío. Expresaremos a la radiación del vacío en forma de ondas planas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \eta(\mathbf{k}, \lambda) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \Theta(\mathbf{k}, \lambda)]}, \quad (10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda}}{k} \eta(\mathbf{k}, \lambda) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \Theta(\mathbf{k}, \lambda)]}, \quad (11)$$

con:

$$\mathbf{k}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda} = 0, \quad \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_n, \lambda'} = 0, \quad (12)$$

donde $\Theta(\mathbf{k}, \lambda)$ es una fase aleatoria y $\eta(\mathbf{k}, \lambda)$ solo depende de $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ por la isotropía asumida de la radiación. Para conectar la función $\eta(\mathbf{k}, \lambda)$ con la función de densidad espectral $\rho(\omega_k)$ calculamos la energía total del campo (u):

$$u = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \rangle = \frac{2}{8\pi} \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3k_1 \int d^3k_2 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_1, \lambda_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_2, \lambda_2} \eta(\omega_1) \eta(\omega_2) \cdot \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{2}, \quad (13)$$

donde el factor dos inicial viene de las contribuciones equitativas de \mathbf{E} y \mathbf{B} el $\frac{1}{2}$ viene de la correlación entre las fases:

$$\langle \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \Theta(\mathbf{k}_1, \lambda_1)) \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \Theta(\mathbf{k}_2, \lambda_2)) \rangle = \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Por lo que la Ec. 13 se reduce a:

$$u = \frac{2}{8\pi} \sum_{\lambda_1=1}^2 \int d^3k \eta(\omega_k)^2 = \int_{k=0}^{\infty} dk k^2 \eta(\omega_k)^2 = \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \frac{\omega^2}{c^3} \eta(\omega_k)^2, \quad (15)$$

Identificamos la función espectral $\rho(\omega_k)$ como:

$$\rho(\omega_k) = \frac{\omega^2}{c^3} \eta(\omega_k)^2 \quad (16)$$

Ahora aplicamos la transformación de Lorentz a \mathbf{E} y \mathbf{B} ($E'_x = E_x$, $B'_x = B_x$,

$$E'_y = \frac{E_x - vB_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad B'_x = \frac{B_x - vE_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z - vB_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = & Re \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left[\hat{\mathbf{i}}\varepsilon_x + \hat{\mathbf{j}}\gamma\left(\varepsilon_y - \frac{v}{c}\right)\frac{(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon})_z}{k} \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{k}}\gamma\left(\varepsilon_x + \frac{v}{c}\right)\frac{(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon})_y}{k} \right] \eta(\omega_k) e^{i[\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t' - \Theta(\mathbf{k}, \lambda)]}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') = & Re \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left[\hat{\mathbf{i}}\varepsilon_x + \hat{\mathbf{j}}\gamma\left(\frac{(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon})_y}{k} + \frac{v}{c}\right)\varepsilon_z \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{k}}\gamma\left(\frac{(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon})_z}{k} + \frac{v}{c}\right)\varepsilon_y \right] \eta(\omega_k) e^{i[\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t' - \Theta(\mathbf{k}, \lambda)]}, \end{aligned} \quad (18)$$

con $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda)$ y las conexiones entre los vectores de onda transformados y no transformados como:

$$\begin{aligned} k'_x &= \gamma(k_x - (v/c^2)\omega_k), \\ \omega'_k &= \gamma(\omega_k - vk_x), \\ k'_x &= k_y \quad k'_z = k_z, \end{aligned} \quad (19)$$

con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Ahora se puede calcular la densidad de energía en el marco transformado utilizando:

$$d^3k = d^3k' \gamma \left(1 + \frac{vk_{x'}}{\omega}\right), \quad (20)$$

y sustituyendo en la los campos transformados, para asociar la variable de integración con las frecuencias de las ondas planas. Por lo que tenemos al momento de calcular

la energía en el marco transformado:

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{2}{8\pi} \sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \int d^3 k'_2 [\gamma^2 (1 + \frac{vk'_x}{\omega'})^2] \\
&\quad \times [\gamma^2 (1 - \frac{vk_1}{\omega'})^2] \eta(\omega_k) \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{2} \\
&= \int d^3 k' \eta^2(\omega_k) \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k}),
\end{aligned} \tag{21}$$

donde el primer factor en los paréntesis cuadrados se obtiene de la transformación de $d^3 k_1 d^3 k_2$, el segundo factor viene de la suma sobre todos los vectores de polarización. Entonces al hablar de la invariancia del espectro de energía de la radiación, nos referimos a que si un observador mide la densidad de energía original de la radiación con un instrumento con un filtro de frecuencia seleccionado, entonces encontrara exactamente la misma densidad de energía al inspeccionar la distribución transformada con el mismo filtro. Por lo tanto la densidad de energía contenida en el intervalo de frecuencia $\omega_k = a$, $\omega_k = b$ de la distribución sin transformar debe ser idéntica a la densidad de energía contenida en el intervalo de frecuencia $\omega'_{k'} = a$, $\omega'_{k'} = b$ de la distribución transformada. Los números a y b pueden ser escogidos arbitrariamente, pero son los mismos para los dos sistemas. Por lo tanto de la Ec. 15 y 21 requerimos para cualquier velocidad v y cualquier a y b se cumpla:

$$\int_{\omega_k=a}^{\omega_k=b} d^3 k \eta^2(\omega_k) = \int_{\omega'_{k'}=a}^{\omega'_{k'}=b} d^3 k' \eta^2(\omega_k) \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k}), \tag{22}$$

esto es lo mismo que escribir:

$$\eta^2(\omega'_{k'}) = \eta^2(\omega_k) \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k}). \tag{23}$$

Sustituyendo el término $\omega'_{k'} = \omega_k \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k})$,

$$\eta^2 [\omega_k \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k})] = \eta^2 (\omega_k) \gamma (1 - \frac{vk'_x}{\omega'_k}), \quad (24)$$

encontramos que la condición para que la radiación en el vacío sea invariante de Lorentz implica que el término $\eta^2(\omega_k)$ debe ser una función lineal de ω_k :

$$\eta^2 = \text{constante} * \omega_k, \quad (25)$$

El término η da la intensidad de la radiación, el cual depende de una constante. El valor de esta constante no puede ser calculada teóricamente, por lo que regresaremos a la evidencia experimental del efecto casimir donde la fuerza entre dos placas en el vacío está dada por la ecuación:

$$F = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\pi^2 A c}{120 d^4} \right), \quad (26)$$

donde se toma a el término $\frac{\hbar}{2}$ como la constante que determinara la intensidad de la radiacion del vacio. Sustituyendo en la Ec 25:

$$\eta^2 = \frac{\hbar \omega_k}{2} \quad (27)$$

En otras palabras, ajustando las constantes de normalización en el campo electromagnético original, debemos tener exactamente una energía de $\frac{\hbar \omega_k}{2}$ por modo en el campo electromagnético si el espectro será invariante de Lorentz. Introduciendo coordenadas polares en el Ec. 15 y relacionando al número de modos a la variable

de integración d^3k , vemos que se requiere:

$$\pi^2 \eta^2 = \frac{\hbar \omega}{2} \quad (28)$$

Y por lo tanto la densidad espectral de la radiación del vacío es:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^2} \quad (29)$$

2.4. Fuerza de reacción por la radiación

La fuerza de reacción por la radiación es de suma importancia para la EDE, el equilibrio entre esta fuerza y la ejercida por la interacción con la radiación del vacío es lo que podría llevar al origen de los fenómenos cuánticos, su estudio es complicado y extenso ya que lleva a cuestionamientos sobre las partículas elementales. En esta sección daremos un breve planteamiento de esta fuerza basados en trabajos realizados por Jackson (1999), Griffiths (1999) y Erber (1961). Un planteamiento más detallado se puede encontrar en dicha literatura.

Los primeros estudios de la fuerza de reacción por la radiación se remontan hasta 1871 cuando Balfour Stewart (Stewart, 1871) llegó a la conclusión, con argumentos termodinámicos, de que un objeto en movimiento debe de estar sujeto a un retardo debido a su propia radiación. El planteamiento actual de esta fuerza fue iniciado por Planck (Planck, 1954), Abraham (Abraham and Föppl, 1908) y Lorentz (Lorentz, 1952).

Los efectos de la fuerza de reacción por la radiación son normalmente muy pequeños, razón por la que muchos problemas pueden resolverse sin tomarla en cuenta.

Para encontrar el rango de parámetros donde esta fuerza es relevante, empezaremos analizando la energía asociada a ella.

Si una campo de fuerza externo, causa que una partícula con carga e , tenga una aceleración de magnitud a , por un periodo de tiempo T . La energía irradiada, según la fórmula de Larmor es del orden de:

$$E_{reac} \sim \frac{2e^2 a^2 T}{3c^3}, \quad (30)$$

si ésta pérdida de energía en radiación (E_{reac}) es despreciable comparada con la energía relevante del problema E_0 , los efectos de la fuerza de reacción no serán importantes. Pero si $E_{reac} > E_0$, los efectos de la radiación serán apreciables. Por lo que el criterio para el régimen donde los efectos de radiación no son importantes se puede expresar como:

$$E_{reac} \ll E_0, \quad (31)$$

La especificación de la energía relevante, E_0 , demanda un poco más de cuidado. Distinguiremos una situación en la que una partícula está en reposo y se le aplica una fuerza por un intervalo de tiempo finito T . Su energía cinética después de la aceleración será:

$$E_0 \sim m(aT)^2. \quad (32)$$

Entonces el criterio para el régimen donde los efectos radiactivos no son importantes es:

$$\frac{2e^2 a^2 T}{3c^3} \ll (aT)^2, \quad (33)$$

o

$$T \gg \frac{2e^2}{3mc^3}, \quad (34)$$

definimos el tiempo característico como:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}. \quad (35)$$

Entonces la conclusión es que para tiempos T suficientemente grandes en comparación a τ , los efectos de radiación no son relevantes. Solo cuando la fuerza es aplicada en un periodo de tiempo suficiente tal que $T \sim \tau$ los efectos de radiación modificaran el movimiento.

Una partícula de masa m y carga e que interactúa con una fuerza externa \mathbf{F}_{ext} , se mueve de acuerdo a las ecuaciones de movimiento de Newton:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (36)$$

Si la partícula acelera, emite radiación dada por la formula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\mathbf{v}})^2, \quad (37)$$

para tomar en cuenta la perdida de energía por el efecto del movimiento en la partícula modificamos la ecuación de Newton (Ec. 36) añadiendo la fuerza de reacción por la radiación \mathbf{F}_{reac} ,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{reac}. \quad (38)$$

Ya que \mathbf{F}_{reac} no este determinada en la Ec. 38 solo podemos deducir ciertas condiciones que debe de cumplir:

- (I) \mathbf{F}_{reac} debe desaparecer si $\dot{\mathbf{v}} = 0$, ya que en ese momento no hay radiación
- (II) \mathbf{F}_{reac} debe de ser proporcional a e^2 ya que, (a) la potencia de radiación es

proporcional a e^2 y (b) el signo de la carga no puede entrar en los efectos de radiación.

- (III) \mathbf{F}_{reac} debe involucrar el tiempo característico τ , ya que hasta el momento ese es el único parámetro de relevancia disponible

Determinamos la forma de \mathbf{F}_{reac} , demandando que el trabajo realizado por esta fuerza en el intervalo de tiempo $t_1 < t < t_2$, sea igual a el negativo de la energía radiada en ese tiempo. La energía sera conservada, al menos en ese intervalo (t_1, t_2) . Con el resultado de Larmor Ec. 37 esta condición es:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{reac} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 e^2}{3 c^3} \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt. \quad (39)$$

La segunda integral puede se integrada por partes para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{reac} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{2 e^2}{3 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt - \frac{2 e^2}{3 c^3} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (40)$$

Si este movimiento es periodico, tal que $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) = 0$ a $t = t_1$ y $t = t_2$, podemos escribir:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{reac} - \frac{2 e^2}{3 c^3} \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} dt = 0. \quad (41)$$

Entonces es posible identificar a la Fuerza de reacción por la radiación como:

$$\mathbf{F}_{reac} = \frac{2 e^2}{3 c^3} \ddot{\mathbf{v}} = m\tau \ddot{\mathbf{v}}. \quad (42)$$

Por lo que la ecuación de movimiento modificada se vuelve:

$$m(\dot{v} - \tau\ddot{v}) = \mathbf{F}_{ext}. \quad (43)$$

La Ec. 43 es llamada la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz. Se puede considerar como una ecuación que incluye en algún aproximado y en un tiempo promedio, los efectos de la radiación emitida por las partículas.

2.5. Solución analítica del oscilador armónico en la mecánica clásica

En este trabajo nos enfocaremos en el oscilador armónico y su interacción con la radiación del vacío propuesta por la EDE, en esta sección se presenta su solución analítica. Así como la solución del oscilador simple y cargado.

2.5.1. Oscilador simple

El oscilador armónico simple se puede imaginar como una partícula unida al final de un resorte con constante elástica k , su ecuación de movimiento puede obtenerse al sustituir la ley de Hook ($F = -kx$) en la ecuación de Newton:

$$F_{osc} = -kx = m\ddot{x} \quad (44)$$

Reacomodando términos,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (45)$$

con

$$\omega_0^2 = k/m, \quad (46)$$

$$T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad (47)$$

donde definimos la frecuencia y periodo natural ω_0 y T_0 , solucionando la Ec. 45 obtenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t), \quad \dot{x}(t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (48)$$

con una energía igual a

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2, \quad (49)$$

donde la energía se conserva ya que consideramos un sistema sin fuerzas de fricción o externas.

2.5.2. Oscilador cargado

Este sistema es usado y discutido en varios libros de electromagnetismo (Griffiths, 1999; Jackson, 1999). La ecuación de movimiento para un oscilador armónico cargado localizado en el eje x con una posición de equilibrio en el origen de coordenadas es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\tau \ddot{x} + eE_0 \cos(\omega t), \quad (50)$$

donde $-m\omega_0^2 x$, es la fuerza de oscilación que experimenta la partícula cargada con una frecuencia natural ω_0 (Ec. 47), $m\tau \ddot{x}$ es la fuerza de reacción por la radiación y $eE_0 \cos(\omega t)$ representa la fuerza aplicada al oscilador por el campo eléctrico que existe en la región, en este caso tomaremos la solución homogénea de las ecuaciones

de Maxwell Ec. (6). Utilizando la aproximación (Ford and O'Connell, 1991):

$$m\dot{v} = F_{ext} + \tau \frac{dF_{ext}}{dt}, \quad (51)$$

para la fuerza de reacción por la radiación, la Ec. 50 se convierte en:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\tau\omega_0 \dot{x} + eE_0 \cos(\omega t), \quad (52)$$

la solución de esta ecuación es :

$$x(t) = \frac{e\epsilon_x E_0 \cos[(-\omega t + \theta)]}{m(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\tau)}. \quad (53)$$

Notamos que el oscilador tiene una posición cuyo promedio en el tiempo es cero ($\langle x \rangle = 0$) pero que su desviación estándar está dada por:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{e^2 \epsilon_x^2 E_0^2}{2m^2 [(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\omega\tau)^2]}. \quad (54)$$

Si tomamos la derivada respecto al tiempo de la Ec. 53 encontramos que la velocidad está oscilando con un promedio $\langle \dot{x} \rangle = 0$ y una desviación estándar de:

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{e^2 \epsilon_x^2 \omega^2 E_0^2}{2m^2 [(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\omega\tau)^2]}, \quad (55)$$

y una energía promedio igual a:

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle = \frac{(\omega^2 + \omega_0^2) e^2 \epsilon_x E_0^2}{4m [(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (\omega\tau)^2]}. \quad (56)$$

2.5.3. Oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío (EDE)

La ecuación de movimiento del oscilador armónico cargado interactuando con la radiación del vacío es:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - m\tau\omega^2 \dot{x} + eE_x(t) \quad (57)$$

donde el término $m\tau\omega^2 \dot{x}$ representa la fuerza de reacción por la radiación y $eE_x(t)$ describe la fuerza estocástica que el campo del vacío ejerce sobre el electrón. Para simplificar la solución, hemos supuesto que el sistema por estudiar tiene dimensiones pequeñas respecto a las longitudes de onda de mayor interés (aproximación dipolar). Por lo que se puede considerar que el campo eléctrico E es independiente de la posición, además, se han despreciado los efectos magnéticos del campo. En la ecuación 57 no podemos conocer cuál de las infinitas diferentes funciones de $E(t)$ se habrá de realizar en un caso particular, esta ecuación solo nos permite hacer predicciones estadísticas sobre las trayectorias a partir de las propiedades del campo externo E . La Ec. 57 se resolverá siguiendo de manera general el procedimiento de De La Peña (2014); De la Peña et al. (2014), para un revisión de los detalles en el planteamiento se recomienda consultar dicha literatura.

Las amplitudes $E(\omega)$ del campo del vacío tienen una distribución gaussiana y el promedio sobre todas sus posibles realizaciones debe ser nulo:

$$\langle E(t) \rangle = 0 \quad \langle E(t) \rangle = 0 \quad (58)$$

y su densidad espectral está dada por:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} \quad (59)$$

Con esto podemos obtener:

$$\langle E(\omega)E(\omega') \rangle = \frac{4\pi^2}{3}\rho\delta(\omega - \omega') \quad (60)$$

La solución estacionaria de la ecuación 57 se obtiene tomando su transformada de Fourier de $x(t)$, calculando la transformada inversa y despreciando la parte transitoria de la solución. El resultado puede escribirse en la siguiente forma aproximada:

$$x(t) = \frac{e}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega)e^{i\omega t}}{(1 - i\tau\omega)[\omega_0^2 + (\frac{1}{2}\tau\omega_0^2 + i\omega)^2]} d\omega \quad (61)$$

Al promediar la Ec. 61 y tomando en cuenta la Ec. 60, las partículas permanecen en promedio centradas en el origen ($\langle x(t) \rangle = 0$).

A partir de la Ec. 61 se puede obtener la autocorrelación de las posiciones para calcular los momentos superiores $\langle x^n(t) \rangle$ y demostrar que corresponden a una distribución de x gaussiana con valor medio nulo y varianza σ_x^2 . Obteniendo una densidad espacial normalizada:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}} e^{-m\omega_0 x^2/\hbar} \quad (62)$$

resultado que coincide con el cuántico.

Para obtener la energía del sistema se define el momento de la partícula mediante la relación usual de la mecánica de Newton $\dot{p} = f$ y tomando en cuenta la

aproximación de onda larga se obtienen las propiedades estadísticas de los momentos $p(t)$:

$$\langle p(t) \rangle = 0 \quad (63)$$

$$\sigma_p^2 = \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle (p(t))^2 \rangle - \langle p(t) \rangle^2 = \frac{1}{2} m \hbar \omega_0 \quad (64)$$

Con una densidad de partículas en el espacio de los momentos gaussiana con media cero y varianza σ_p^2 . Ahora podemos calcular la energía media del estado base

$$E = \langle H \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle = \frac{\sigma_p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \sigma_p^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (65)$$

precisamente el resultado de la mecánica cuántica.

2.6. Solución analítica del oscilador armónico cuántico

La ecuación estacionaria de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Psi = E \Psi, \quad (66)$$

en donde Ψ es la función de onda. Para reescribir la ecuación en términos de variables adimensionales, usaremos el cambio de variables:

$$x = \alpha_0 \xi, \quad \alpha_0^2 = \frac{\hbar}{m \omega}, \quad (67)$$

en donde ξ es adimensional, como variable de la energía tomamos

$$\epsilon = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha_0^2 E = \frac{2E}{\hbar \omega}. \quad (68)$$

Sustituyendo en la Ec. (66), obtenemos

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - \epsilon)\Psi, \quad (69)$$

donde la unidad de longitud y energía natural es $\sqrt{\hbar/m\omega}$ y $\hbar\omega/2$. Solucionando la Ec. 69 obtenemos las eigenfunciones del oscilador armónico,

$$\Psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (70)$$

en donde H_n es el polinomio de Hermite de orden n y C_n es la constante de normalización,

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}, \quad (71)$$

Los eigenvalores de la energía son:

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (72)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \\ H_1 &= 2x, \\ H_2 &= 4x^2 - 2, \\ H_3 &= 8x^3 - 12x, \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5 &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

Tabla 1: Los primeros polinomios de Hermite, H_n

Utilizando la tabla 1, obtenemos que la función de onda del estado base del oscilador cuántico es:

$$\Psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}\right) \quad (73)$$

Con una energía igual a $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

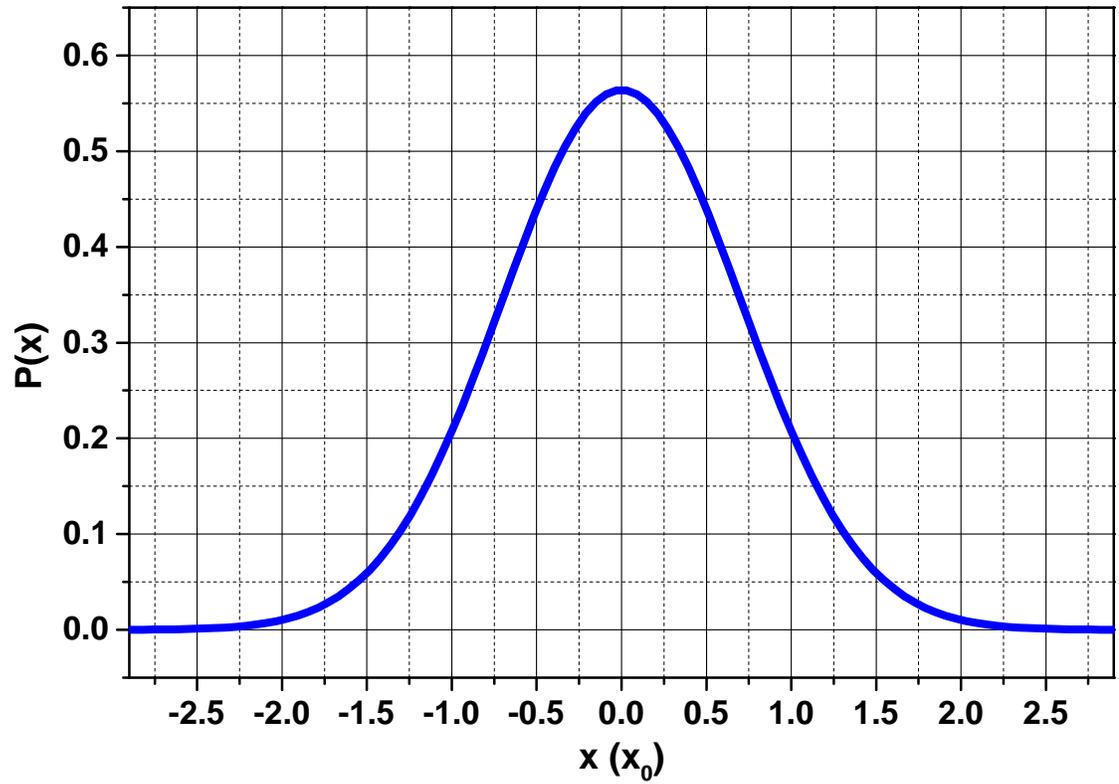


Figura 5: Distribución de probabilidad del estado base del oscilador armónico cuántico en donde $P(x)$ es la probabilidad de encontrar la partícula en la posición x .

3. Metodología

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m_e} F(t, x, v), \quad (74)$$

con:

$$F(t, x, v) = -m_e\omega^2x - m_e\tau\omega^2\dot{x} + eE_x(x, t), \quad (75)$$

en donde el término $-m_e\omega^2x$ representa la fuerza del oscilador, $m_e\tau\omega^2\dot{x}$ la fuerza de radiación de reacción y $eE_x(x, t)$ la fuerza causada por la radiación del vacío. Esta ecuación tiene solución analítica al realizar la aproximación dipolar, presentada en el marco teórico (sec. 2.5.3), por lo que una solución numérica sin dicha aproximación es apropiada.

La Ec. 74 se resolvió con el método de Runge-Kutta de 4to orden (Hildebrand, 1987), tomando Δt como la discretización en el tiempo; expresando la posición x_n y velocidad v_n como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t v_n + \frac{1}{6}(m_0 + m_1 + m_2) + O(\Delta t^5), \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) + O(\Delta t^5), \end{aligned} \quad (76)$$

donde t_n es el tiempo al paso n , con las m dadas por:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \frac{\Delta t}{m_e} F(t_n, x_n, v_n), \\
m_1 &= \frac{\Delta t}{m_e} F\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, x_n + \frac{1}{2}\Delta t v_n, v_n + \frac{1}{2}m_0\right), \\
m_2 &= \frac{\Delta t}{m_e} F\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, x_n + \frac{1}{2}\Delta t v_n + \frac{1}{4}\Delta t m_0, v_n + \frac{1}{2}m_1\right), \\
m_3 &= \frac{\Delta t}{m_e} F\left(t_n + \Delta t, x_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2}\Delta t m_1, v_n + m_2\right),
\end{aligned} \tag{77}$$

en donde F es la fuerza (Ec. 75). Para evaluar las ecuaciones (76) es necesario obtener el campo electrico ($E_x(x, t)$). Escribimos el campo electrico como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, t) &= \frac{1}{(L_x L_y L_z)} \sum_{n_x, n_y, n_z = -\infty}^{\infty} \sum_{\lambda=1,2} \hat{\epsilon}_{k_n, \lambda} [A_{k_n, \lambda} \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t) \\
&\quad + B_{k_n, \lambda} \sin(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t)],
\end{aligned} \tag{78}$$

en donde \mathbf{x} es el vector de posición del electrón, t el tiempo y ω_n la frecuencia ($\omega_n = c|\mathbf{k}_n|$). El vector de onda está dado por $\mathbf{k}_n = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{n_y}{L_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{n_z}{L_z} \hat{\mathbf{z}} \right)$, que corresponde físicamente a un campo encerrado en un contenedor de dimensión L_x, L_y y L_z . En la simulación realizada en este trabajo se utilizó un numero de modos (n_x, n_y, n_z) del orden de $N = 10^6$ y un tamaño del contenedor, $L_x = L_y = L_z = 700 \text{ Angstrom}$.

Dado que el campo debe ser isotropico, las ondas no tienen una polarización preferencial, por lo que cada onda tiene dos componentes de polarización ortogonales a la dirección de propagación. El símbolo λ representa cada una de estas polarizaciones, por lo tanto, $\mathbf{k}_n \cdot \hat{\epsilon}_{k_n, \lambda} = 0$, $\hat{\epsilon}_{k_n, \lambda} \cdot \hat{\epsilon}_{k_n, \lambda'} = 0$, para $\lambda \neq \lambda'$. Los coeficientes $A_{k_n, \lambda}$ y $B_{k_n, \lambda}$ son números reales generados aleatoriamente al inicio de cada simulación. El algoritmo para generarlos está diseñado para obtener una distribución gaussiana

centrada en cero y con una varianza igual a: $\langle 2\pi\hbar \rangle$.

Para generar los vectores de polarización se utilizó un vector aleatorio $\mathbf{A} = A_x + A_y + A_z$, donde A_i son valores aleatorios entre $(-1, 1)$ para crear dos vectores perpendiculares a \mathbf{k}_n ($\mathbf{k}_n \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_n, \lambda_1}$, $\mathbf{k}_n \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_n, \lambda_1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}_n, \lambda_2}$)

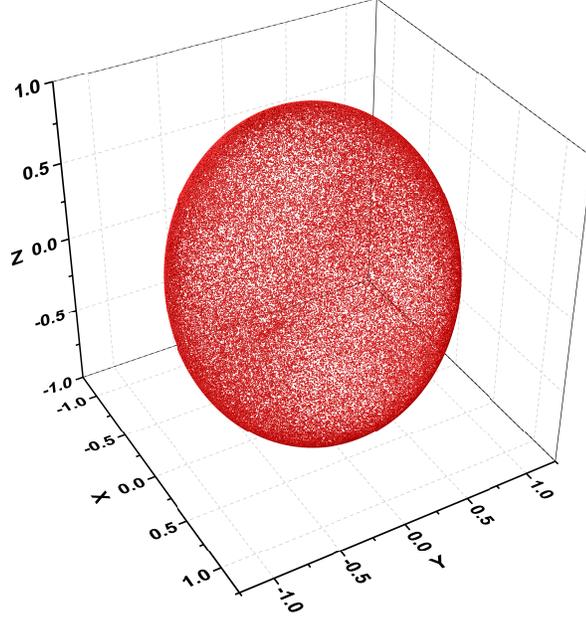


Figura 6: Puntos finales de los vectores de polarización del campo ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}_n, \lambda_1}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{k}_n, \lambda_2}$) con 10^6 modos (n_x, n_y, n_z) , donde se puede observar la distribución isotrópica de ellos.

Como ya se mencionó, para los coeficientes $A_{k_n, \lambda}$ y $B_{k_n, \lambda}$ del campo es necesario generar números aleatorios con una distribución gaussiana con un segundo momento igual a: $\langle A_{k_n, \lambda}^2 \rangle = \langle B_{k_n, \lambda}^2 \rangle = 2\pi\hbar\omega_n$. Se utilizó la transformación de Box-Muller (Box et al., 1958) para crear la distribución deseada. En donde se transforma una distribución particular de números aleatorios a una distribución gaussiana, con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sigma(-2 \ln U_1)^{1/2} \sin(2\pi U_2) \\
X_2 &= \sigma(-2 \ln U_1)^{1/2} \cos(2\pi U_2)
\end{aligned}
\tag{79}$$

Donde U_1 y U_2 son dos números aleatorios, σ la varianza y X_1, X_2 el resultado de la transformación.

En la simulación se rastreó las trayectorias individuales del electrón por largos periodos de tiempo. Histogramas de su posición y energía fueron obtenidas para ser comparadas con los resultados de la mecánica cuántica.

4. Resultados y discusión

Antes de resolver el oscilador en la EDE, se resolvió el oscilador armónico simple y el oscilador armónico con la fuerza de reacción por la radiación. En todos los casos se utilizó el método de Runge-Kutta de 4to orden con un tamaño de paso del orden de $(1/875)(2\pi/\omega_0)$, se utilizaron a los Amstrongs ($1 \times 10^{-10}m$) como unidad de la posición y a los Attosegundos ($1 \times 10^{-18}s$) como unidad del tiempo. Sin embargo los resultados se muestran en términos de las unidades naturales del oscilador armónico simple $x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2}}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ y la energía del estado base del oscilador cuántico $E_0 = \hbar\omega_0/2$

Para comparar los resultados de la simulación con los de la mecánica cuántica se utilizó una frecuencia normalizada (\mathcal{P}) en todos los histogramas , a continuación se muestra su definición.

Sea $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_i\}$ el conjunto de medibles (q_i) en las simulaciones y $I_j = \{q \in$

$Q|q_{j-1} < q < q_j\}$ un subconjunto de Q con $q_j = j\delta q$ podemos definir a la frecuencia normalizada \mathcal{P} como:

$$\mathcal{P}\delta q = \frac{\#I_j}{\#Q}, \quad (80)$$

en donde $\#I_j$ y $\#Q$ es la cardinalidad de I_j y Q .

4.0.1. Oscilador simple

Elijiendo una energía inicial igual a la del estado base del oscilador cuántico (E_0) se resolvió el oscilador armónico simple (Ec. 45) numéricamente.

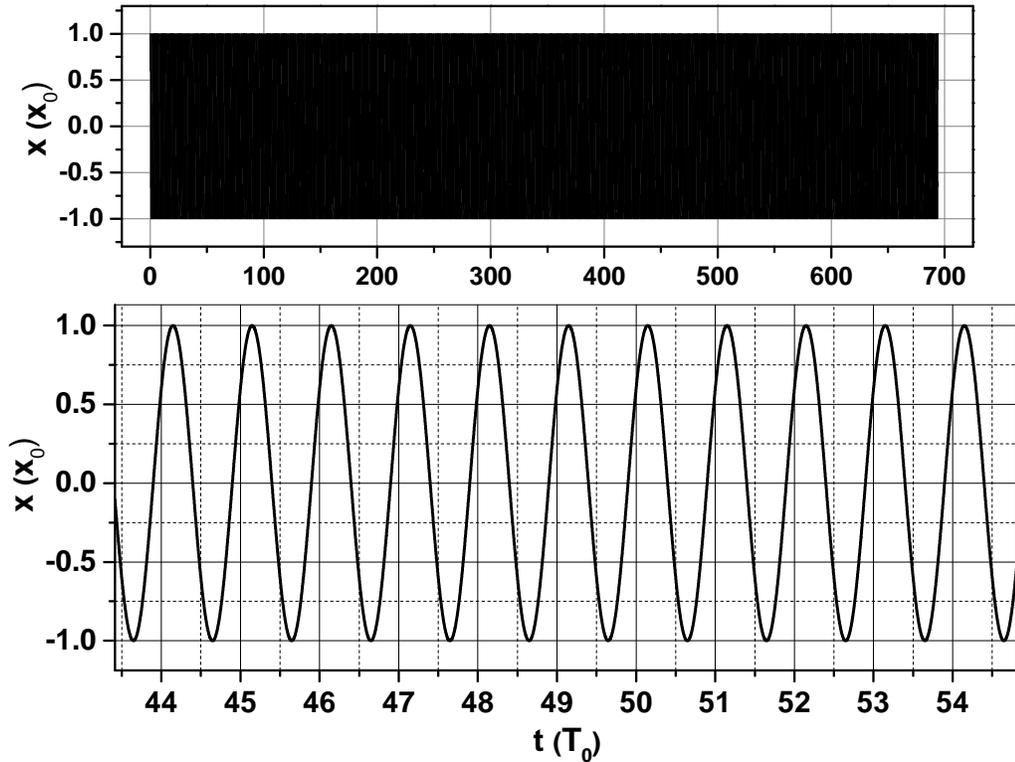


Figura 7: (Arriba) Evolución en el tiempo del oscilador armónico simple. (Abajo) Acercamiento al oscilador.

En la figura 7 vemos la evolución del oscilador simple en unidades de T_0 y x_0 hasta su periodo 677, siendo $0.5x_0$ su fase inicial. Durante la simulación se obtuvo un cambio de energía normalizado global ($\Delta E/E_0$) del orden de 10^{-6} . Una pérdida de energía lo suficientemente pequeña para utilizar las mismas condiciones de integración en las demás simulaciones.

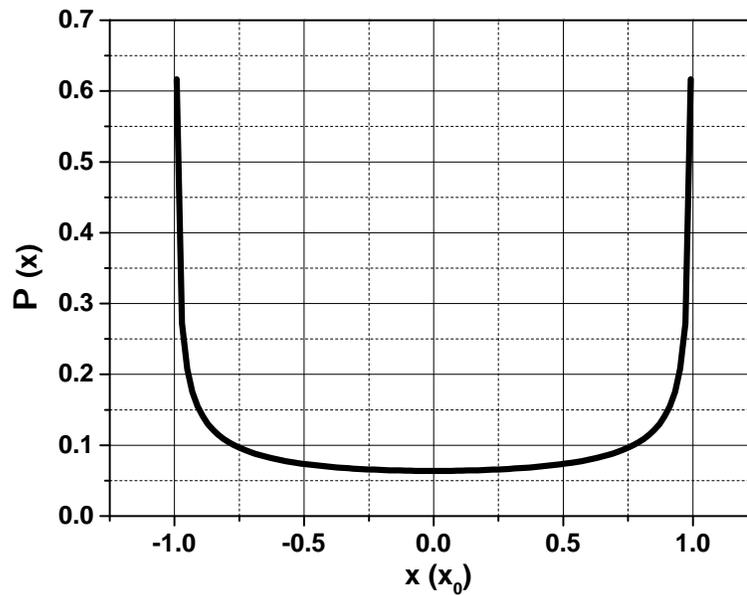


Figura 8: Histograma de posiciones del oscilador armónico simple con un numero de posiciones ($\#X$) igual a 5.7×10^6 .

En la mecánica clásica, al tomar un tiempo de oscilación podemos asignar la probabilidad de que la partícula se encuentre en cierta posición x como la fracción del tiempo que se encuentra en dicha posición. En las fronteras la partícula invierte su posición, por lo que se encuentra por más tiempo en donde el resorte está completamente comprimido o extendido ($x = \pm x_0$). Se encuentra menos tiempo donde su velocidad es mayor, i.e, donde el resorte está en su longitud de equilibrio ($x = 0$). Hay

cero probabilidad de que la partícula tenga una energía potencial mayor a su energía total por lo que su movimiento se encuentra confinado en el rango $-x_0 < x < x_0$. En contraste, en la mecánica cuántica la partícula puede encontrarse fuera del rango $x_0 < x < x_0$. En la figura 9 se muestra estas diferencias entre el oscilador clásico y cuántico.

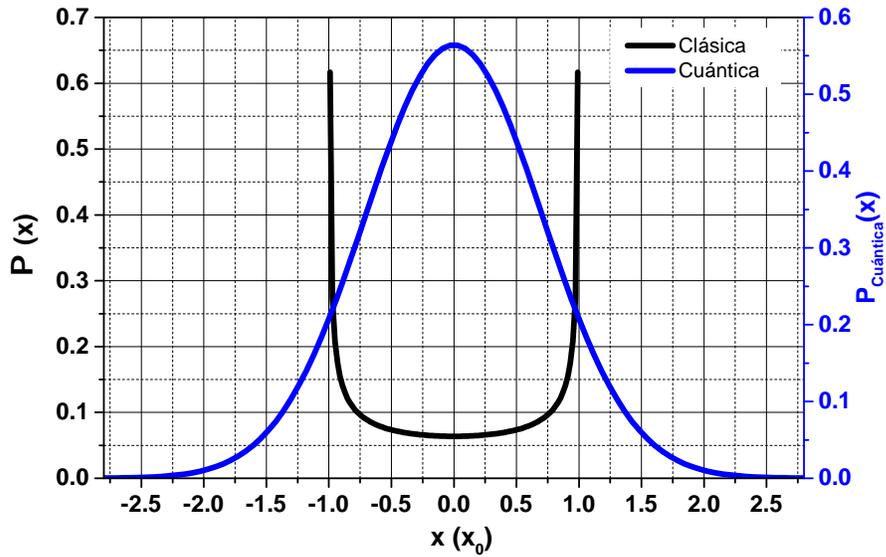


Figura 9: Comparación de la distribución de probabilidad del estado base del oscilador cuántico con el histograma de posiciones del oscilador armónico simple.

4.0.2. Oscilador cargado con fuerza de reacción por la radiación

Se resolvió numéricamente la Ec. 81 con las mismas condiciones iniciales que el oscilador simple, en donde hemos introducido la fuerza de reacción por la radiación.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2x - m\tau\omega_0^2\dot{x}. \quad (81)$$

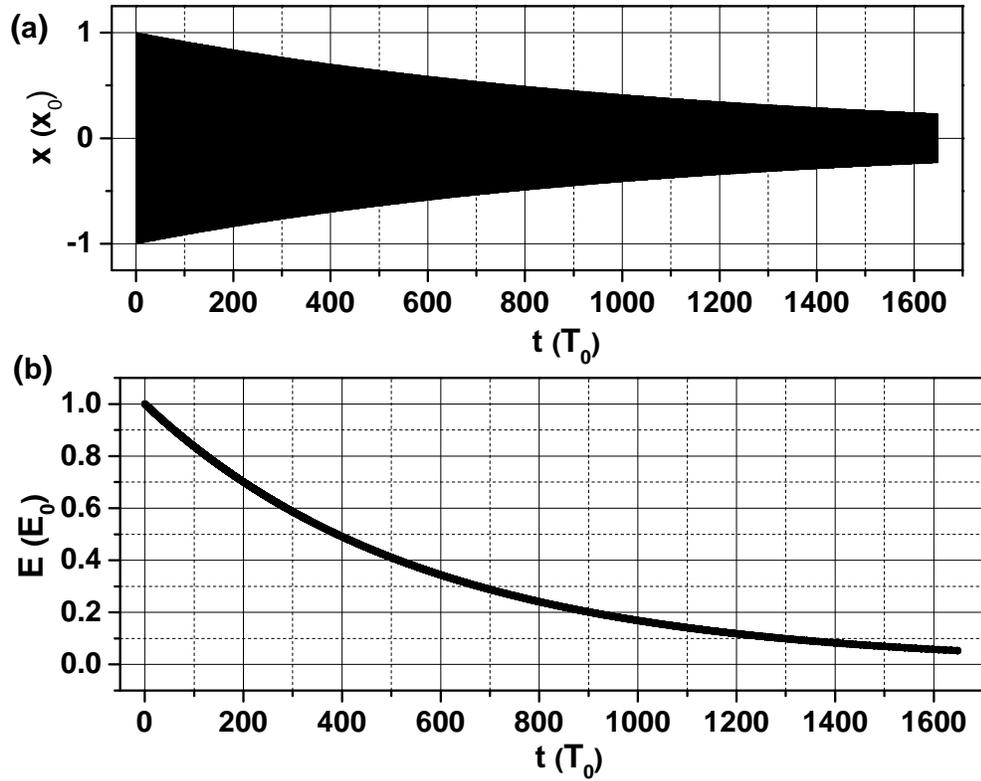


Figura 10: (a) Evolución en el tiempo del oscilador armónico con fuerza de reacción por la radiación, (b) pérdida de energía del oscilador debido a la radiación de reacción.

En la figura 10 se muestra la evolución del oscilador cargado con fuerza de reacción por la radiación en unidades naturales del oscilador simple (T_0 y x_0) hasta el periodo 1648. El efecto de la fuerza de reacción por la radiación se puede observar por la disminución de la amplitud y energía, sin otra fuerza involucrada en el sistema el oscilador se detendrá por completo eventualmente.

4.0.3. Oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío (EDE)

La ecuación de movimiento a resolver es:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2x - m\tau\omega^2\dot{x} + eE_x(x, t), \quad (82)$$

en donde el término $-m\omega^2x$ representa la fuerza del oscilador, $m\tau\omega^2\dot{x}$ la fuerza de reacción por la radiación y $eE_x(x, t)$ la fuerza causada por la radiación del vacío en donde $E_x(x, t)$ está dado por la Ec. 78. Con una energía inicial igual a $0.86E_0$ se resolvió numericamente la Ec. 82

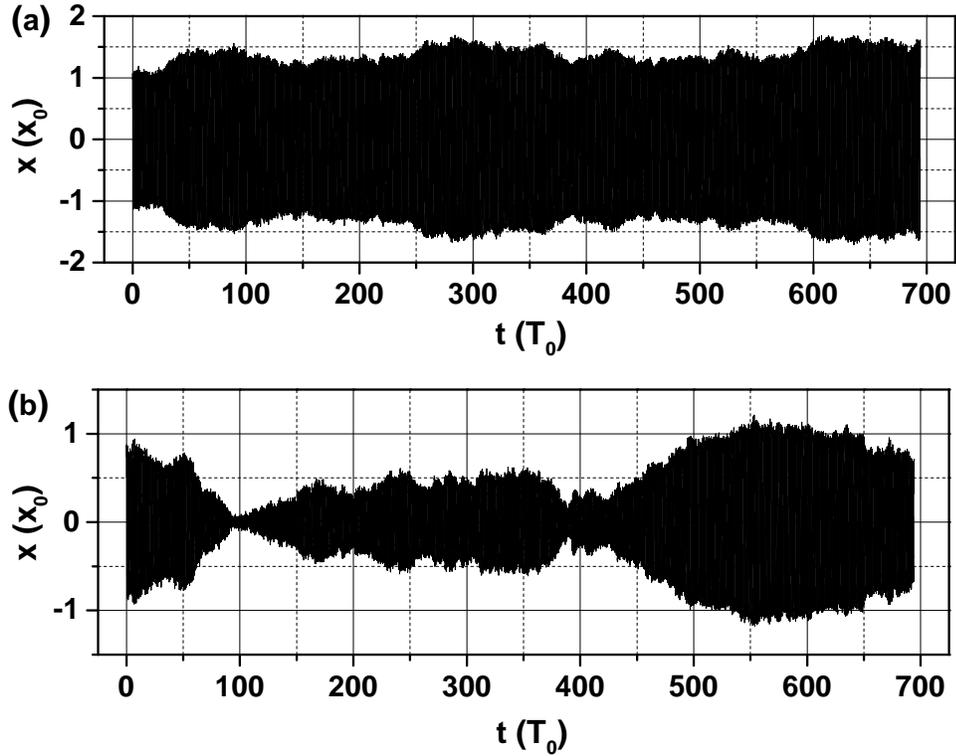


Figura 11: Evolución en el tiempo de dos simulaciones con los mismas condiciones iniciales. (a) 1era simulación , (b) 2da simulación.

En la figura 11 se muestra la evolución de dos simulaciones del oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío en unidades naturales del oscilador simple (T_0 y x_0) hasta el periodo 677. Utilizando los mismas condiciones iniciales en ambas simulaciones. Nótese, que en cada simulación se generan amplitudes aleatorias del campo $E_x(x, t)$, esta es la causa de la gran diferencia entre ambas simulaciones.

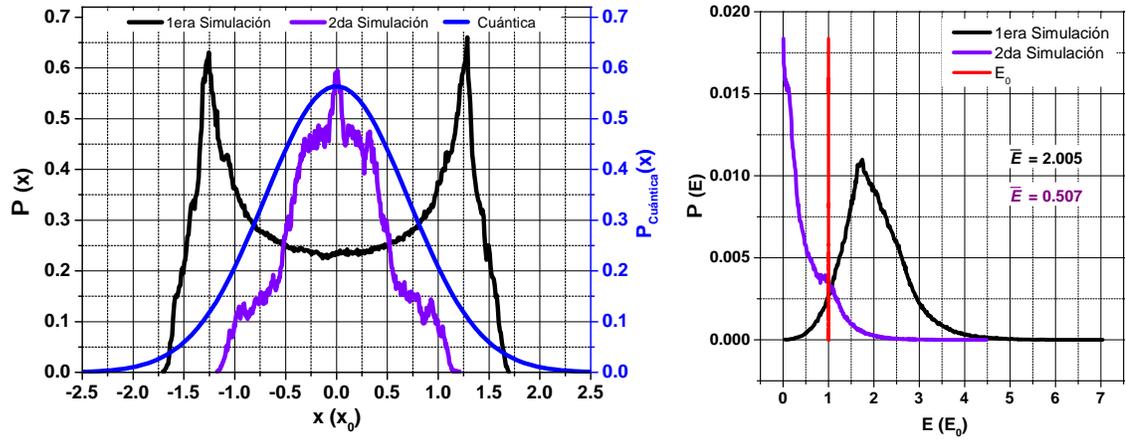


Figura 12: Histograma de posiciones y energías para dos simulaciones con las mismas condiciones iniciales.

En la figura 12 se muestra el histograma de posiciones y energías de las dos simulaciones realizadas en unidades naturales del oscilador simple (x_0) y del oscilador cuántico (E_0). Ambos histogramas muestran resultados muy diferentes debido a las amplitudes aleatorias del campo.

Para poder comparar los resultados de las simulaciones con los de la mecánica cuántica se realizó un ensemble con 30 simulaciones. Con una energía inicial igual a $0.86E_0$.

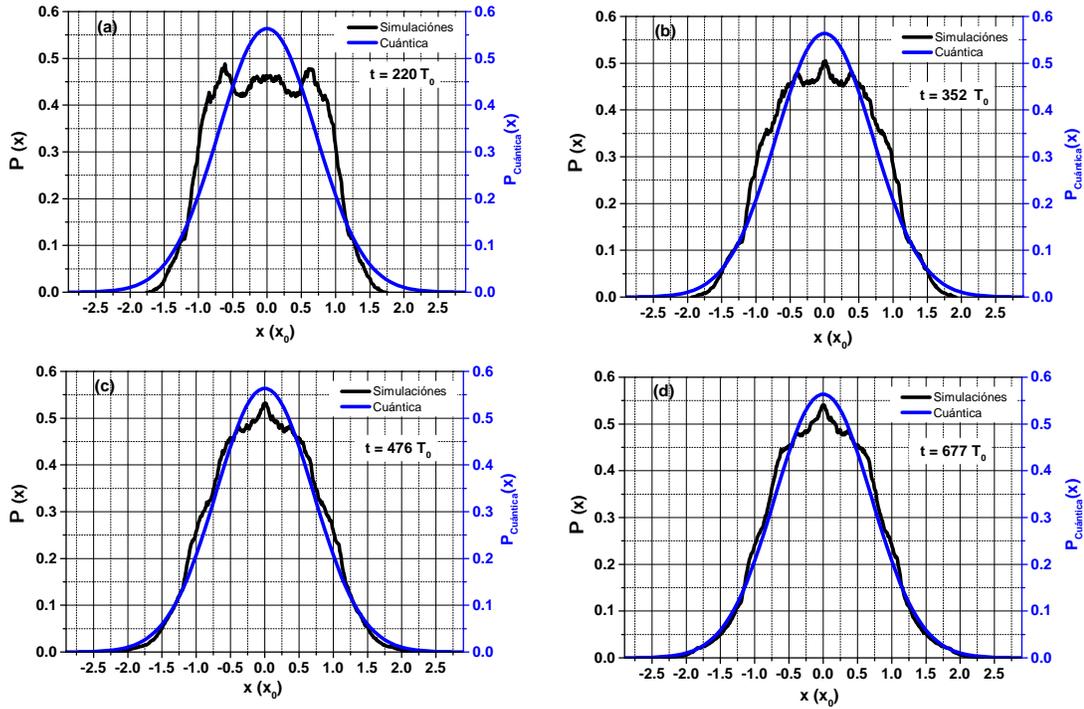


Figura 13: Comparación del histograma de posiciones del conjunto de 30 simulaciones a distintos tiempos con la distribución de probabilidad del oscilador cuántico.

En la figura 13 se muestra el histograma de posiciones de las 30 simulaciones del oscilador cargado interactuando con la radiación del vacío en unidades naturales del oscilador simple (x_0). El efecto de la radiación del vacío se puede observar al aumentar el tiempo de integración, ocasionado que el histograma de posiciones converja a la gaussiana que predice la mecánica cuántica en el estado base del oscilador.

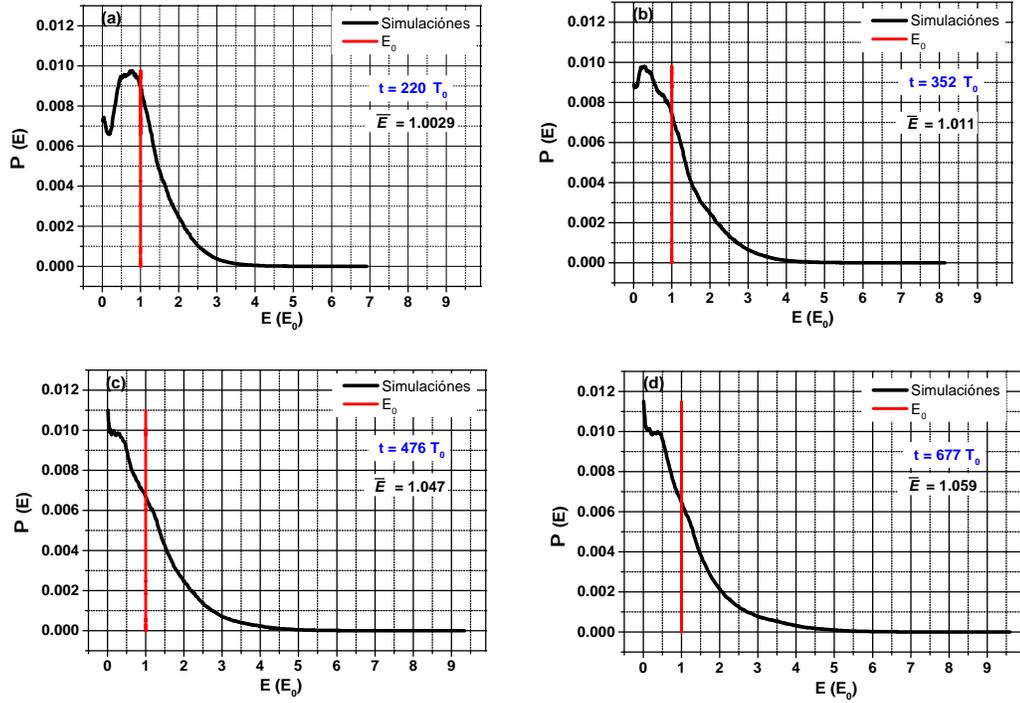


Figura 14: Histograma de energías del conjunto de 30 simulaciones a distintos tiempos.

En la figura 14 se muestra el histograma de energías del ensemble en unidades del oscilador cuántico (E_0). En este caso el efecto de la radiación del vacío se puede observar en la fluctuación de la energía del ensemble, dando un valor esperado muy cercano a las energías del estado base del oscilador cuántico. Aunque al aumentar el tiempo el valor esperado parece alejarse de E_0 , por lo que es necesario realizar más simulaciones con un mayor tiempo de integración para verificar la convergencia a E_0 .

El tiempo de cómputo para la evolución temporal del ensemble es muy grande, tardando 5 días para el de mayor tiempo de integración, esto se debe a la sumatoria realizada en el momento de calcular el campo eléctrico donde el número de modos

es del orden de 10^6 . Aunque la tendencia del sistema simulado es al del oscilador armónico cuántico, es necesario realizar más simulaciones con distintos ensembles para confirmar dicha tendencia.

Una paralización al momento de realizar la sumatoria de los modos en el campo estocástico disminuiría el tiempo de cómputo permitiendo trabajar con más ensembles de mayor tiempo. Es en este caso en donde se puede realizar suficientes simulaciones para comprobar la convergencia obtenida en este trabajo, una vez logrado esto se podría simular otros fenómenos cuánticos.

5. Conclusiones

En este trabajo se realizó una simulación numérica del oscilador armónico interactuando con un campo eléctrico estocástico propuesto por la EDE. Se realizaron histogramas de la posición y energía de un ensemble con 30 simulaciones. En el histograma de posiciones se encontró una convergencia a la distribución de probabilidad del oscilador cuántico. Mientras que en el histogramas de energías el valor esperado se mantiene cercano a la energía del estado base del oscilador cuántico. Es necesario realizar un estudio con más ensembles de mayor tamaño para confirmar la tendencia encontrada.

Los métodos de nuestra simulación numérica se pueden aplicar al estudio de otros sistemas. Sentando las bases para realizar un estudio numérico más profundo de los efectos de la interacción de la radiación del vacío con la materia.

Referencias

- Abraham, M. and Föppl, A. (1908). *Theorie der Elektrizität: Bd. Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, volume 2. BG Teubner.
- Box, G. E., Muller, M. E., et al. (1958). A note on the generation of random normal deviates. *The annals of mathematical statistics*, 29(2):610–611.
- Boyer, T. H. (1969a). Classical statistical thermodynamics and electromagnetic zero-point radiation. *Phys. Rev.*, 186:1304–1318.
- Boyer, T. H. (1969b). Derivation of the blackbody radiation spectrum without quantum assumptions. *Phys. Rev.*, 182:1374–1383.
- Boyer, T. H. (1975). Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Phys. Rev. D*, 11:790–808.
- Boyer, T. H. (2011). Any classical description of nature requires classical electromagnetic zero-point radiation. *American Journal of Physics*, 79(11):1163–1167.
- Boyer, T. H. (2016). Understanding zero-point energy in the context of classical electromagnetism. *European Journal of Physics*, 37(5):055206.
- Chan, H. B., Aksyuk, V. A., Kleiman, R. N., Bishop, D. J., and Capasso, F. (2001). Nonlinear micromechanical casimir oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 87:211801.
- Chen, F., Mohideen, U., Klimchitskaya, G. L., and Mostepanenko, V. M. (2002). Demonstration of the lateral casimir force. *Phys. Rev. Lett.*, 88:101801.
- Cole, D. C. and Zou, Y. (2003). Quantum mechanical ground state of hydrogen obtained from classical electrodynamics. *Physics Letters A*, 317(1):14 – 20.

- De La Peña, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura económica.
- De la Peña, L., Cetto, A. M., and Hernández, A. V. (2014). *The Emerging Quantum: The physics behind quantum mechanics*. Springer.
- De La Peña, L. and Cetto, A. M. (2013). *The quantum dice: an introduction to stochastic electrodynamics*, volume 75. Springer Science & Business Media.
- Erber, T. (1961). The classical theories of radiation reaction. *Fortschritte der Physik*, 9(7):343–392.
- Ford, G. and O’Connell, R. (1991). Radiation reaction in electrodynamics and the elimination of runaway solutions. *Physics Letters A*, 157(4):217 – 220.
- Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Upper Saddle River : Prentice Hall, New Jersey.
- Hildebrand, F. B. (1987). *Introduction to numerical analysis*. Courier Corporation.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Wiley, New Jersey.
- Lamoreaux, S. K. (1997). Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8.
- Lorentz, H. A. (1952). *The Theory of Electrons*. Dover, New York.
- Marshall, T. W. (1963). Random electrodynamics. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 276(1367):475–491.
- Marshall, T. W. (1965a). A classical treatment of blackbody radiation. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 38(1):206–215.

- Marshall, T. W. (1965b). Statistical electrodynamics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 61(2):537–546.
- Mohideen, U. and Roy, A. (1998). Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm . *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552.
- Planck, M. (1954). *he theory of heat radiation*. Dover, New York.
- Sparnaay, M. (1958). Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24(6):751 – 764.
- Stewart, B. (1871). Temperature equilibrium of an enclosure in which there is a body in visible motion. *Reports of the British Association for the Advancement of Science, Edinburgh 187, 45–47 (1871)*, 69.
- Sukenik, C. I., Boshier, M. G., Cho, D., Sandoghdar, V., and Hinds, E. A. (1993). Measurement of the casimir-polder force. *Phys. Rev. Lett.*, 70:560–563.