



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

"DETERMINACIÓN DE LA DISPERSIÓN DE SEDIMENTO UTILIZANDO
TEORÍA DE RAYOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

O C E A N Ó L O G O

PRESENTA:

LUIS FERNANDO ZAMUDIO LÓPEZ

ENSENADA, B.C., OCTUBRE DE 1987.

RESUMEN

En este trabajo se investiga la posibilidad de utilizar teoría de rayos, para determinar la dirección de la dispersión de montículos de sedimento al ser afectados por oleaje.

Desarrollando experimentos en laboratorio se fotografió la dispersión del montículo en la parte inicial de su desintegración; en tiempos del orden de 50 períodos de las olas incidentes.

Los experimentos se llevaron a cabo en un recipiente rectangular de 1.8×1.3 m; la pendiente (de aproximadamente 15 %) se construyó deslizando un vidrio plano sobre arena húmeda antes de llenar con agua el recipiente. El material con el que se formaron los montículos fue preferencialmente residuos de café molido, aunque también se utilizó arena fina de color más claro que la del fondo. El generador de olas era ajustable, tanto en amplitud como en período de las olas y controlamos la dirección de incidencia de las olas cambiando su posición.

El trazado de rayos se llevó a cabo con un modelo (programa), que utiliza la velocidad de grupo para calcular las trayectorias de los rayos en cualquier topografía dada. La veracidad del modelo fue probada comparando sus resultados con la solución analítica de arcos de círculo, que corresponde a un fondo para el cual la magnitud de la velocidad varía linealmente en el plano horizontal.

Se presentan como resultados, la superposición de los contornos de montículos digitalizados a partir de fotografías del experimento con las trayectorias de los rayos calculadas para tal topografía y oleaje. Estos resultados indican, una dispersión asimétrica de los montículos, con una dirección de dispersión preferencial, siendo esta muy aproximada a la de los rayos en el caso en que los montículos fueron formados con sedimentos ligeros (café).

“DETERMINACIÓN DE LA DISPERSIÓN DE SEDIMENTO UTILIZANDO
TEORÍA DE RAYOS”


T E S I S
QUE PRESENTA:
LUIS FERNANDO ZAMUDIO LÓPEZ

Aprobada por:




Presidente del Jurado


Dr. José Luis Ochoa de la Torre



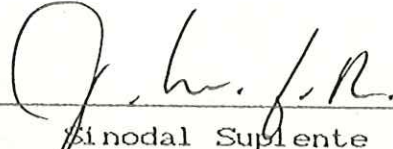
Sinodal Propietario
Oc. Oscar Delgado González



Sinodal Propietario
Ing. Marco Antonio Uribe Rojo



Sinodal Suplente
M.C. Cuautémoc Nava Button



Sinodal Suplente
M.C. Manuel Figueroa Rodríguez

A Juan Leonardo

AGRADECIMIENTOS

Muchas son las personas que han colaborado (directa o indirectamente) en el desarrollo de este trabajo; a todos gracias.

Quiero agradecer a Pepe por haberme invitado a realizar este trabajo y aún mas por aguantarme durante el desarrollo de este.

A Jorge Guerra y Lorenzo Gomez, quienes facilitaron de la mejor manera posible parte del material experimental y el acceso al laboratorio de Oceanografía Física de la FCM.

A todos los compañeros de area y del area de Geología que participaron en la elaboración de la cuba.

A Humberto (cholo), Sergio, Angelica, Toño, Rickys y Victor por el apoyo que siempre han estado dispuestos a otorgarme.

A mi Familia por supuesto, pues sin ellos, para mí, muchísimas cosas no hubiesen sido posibles.

TABLA DE CONTENIDO

	Página
Resumen.....	i
Página de aprobación del trabajo.....	ii
Agradecimientos.....	iii
Tabla de contenido.....	iv
Lista de figuras.....	v
I. - Introducción.....	1
II. - Trazado de rayos.....	6
2.1. - Ley de Snell.....	6
2.2. - Solución analítica de las ecuaciones de rayo para un caso simple.....	19
2.3. - Comprobación del modelo numérico con una solución analítica.....	23
III. - Descripción del experimento.....	25
3.1. - Experimentos de laboratorio.....	25
3.2. - Cálculos numéricos.....	30
IV. - Resultados y Discusiones.....	31
4.1. - Descripción de resultados.....	31
4.2. - Discusiones.....	42
V. - Conclusiones y Recomendaciones.....	47
5.1. - Conclusiones.....	47
5.2. - Recomendaciones.....	48
Literatura citada.....	49

LISTA DE FIGURAS

Página

Figura 2.1	Un tren de ondas en su viaje cruza una discontinuidad que divide dos medios de velocidad constante, pero diferentes entre si.....	7
Figura 2.2	Un rayo cruza varias discontinuidades de velocidad que separan medios de velocidad constante.....	10
Figura 2.3	Se muestra la ubicación de los frentes de onda con respecto a los rayos.....	12
Figura 2.4	La trayectoria del rayo (Arco de círculo) es calculada con el algoritmo numérico.....	24
Figura 3.1	Se muestra un vista lateral y una vista superior del recipiente donde se desarrollaron los experimentos.....	26
Figura 4.1	La trayectoria de rayos y la secuencia de dispersión de un montículo (formado con café) están sobrepuestas. $T = 0.61$ seg. $\theta_0 = 180^\circ$	33
Figura 4.2	Idéntico que en 4.1, sólo que $\theta_0 = 208^\circ$	34
Figura 4.3	Idéntico que en 4.1, sólo que $T = 0.75$ seg. y $\theta_0 = 208^\circ$	35
Figura 4.4	Idéntico que en 4.1, sólo que $T = 0.75$ seg. y $\theta_0 = 208^\circ$	36
Figura 4.5	Idéntico que en 4.1, sólo que $T = 0.86$ seg., $\theta_0 = 138^\circ$ y además se muestran rayos con origen en la esquina de la paleta (fuente radial).....	38
Figura 4.6	Idéntico a 4.1, sólo que $T = 0.86$ seg., $\theta_0 = 206^\circ$. En esta figura es en la que mejor se aprecia que la dirección de la dispersión del montículo es muy aproximada a la dirección de los rayos.....	39
Figura 4.7	Idéntico que en 4.1, sólo que $T = 0.61$ seg., $\theta_0 = 142^\circ$ y el montículo fue formado con arena fina.....	40
Figura 4.8	Se muestra una interpretación de como influyen las olas sobre los granos de café.....	44

I. - INTRODUCCION.

Es un hecho conocido que cuando un conjunto de olas siente la influencia de la topografía, tiende a modificar su dirección, acortar su longitud de onda y cambiar su altura (teoría lineal). Al mismo tiempo que el fondo esta forzando a las olas para que modifiquen su forma y dirección, estas últimas ejercen un esfuerzo sobre el sedimento. La densidad de energía de una ola es proporcional al cuadrado de su altura, así entre mayor altura alcancen las olas, mayor será la capacidad de éstas para poder mover sedimento. Inman y Bagnold (1963), proponen un modelo en el que expresan la razón de sedimento transportado como peso inmerso, en función de la potencia de la ola. Komar e Inman (1970), utilizando mediciones de campo ponen a prueba este modelo, encontrando que dicha razón de sedimento transportado es directamente proporcional al flujo de energía.

Una vez que las olas puedan mover sedimento, será importante el conocer cuál es la dirección que toma el transporte de éste. Komar (1971), describe un modo especial de transporte en el que la aproximación oblicua de las olas a la costa, trae consigo un transporte de sedimento en su dirección de propagación, y una vez alcanzada la costa, el retorno de sedimento por flujo gravitatorio es en dirección

perpendicular a la costa. Basándose en dichas características de transporte, obtiene la relación que utilizaron Inman y Bagnold (1963) en su modelo. Además, durante sus desarrollos encuentra una relación que indica la potencia disponible de una ola para transportar sedimento en su dirección de propagación.

Uno de los factores primordiales en la construcción de estructuras en playas arenosas, es la estimación del apilamiento o erosión de sedimento ocasionado por olas y corrientes semipermanentes. Este problema ha sido abordado en una forma directa y cara con la construcción de maquetas a escala (modelos hidráulicos reducidos) con oleaje controlado; tal es el caso de Einstein (1972), quien tratando de describir el transporte de sedimento inducido por olas, realiza mediciones en un tanque hidráulico. Y el de Kennedy y Locher (1972), quienes utilizaron un sofisticado equipo de fotografía para estimar la concentración de sedimento suspendido por olas, ellos consideran que este parámetro es un aspecto simple del transporte de sedimento que desarrolla el oleaje.

Este trabajo investiga la factibilidad de utilizar teoría de rayos como una herramienta indirecta, versátil y económica de abordar el mismo problema, ya que un rayo es una línea que indica la dirección del movimiento del agua

(en olas) y uno esperaría que el transporte de sedimento sea llevado a cabo en tal dirección, pues el sedimento se mueve como una respuesta a la energía que se le transfiere. Una manera de conocer la trayectoria de los rayos es valiéndose de un modelo numérico. Breeding, Matson y Riahi (1978), desarrollaron un modelo que calcula la trayectoria de rayos utilizando la velocidad de grupo. Así, la dirección de los rayos que se calcula no tiene que coincidir con la perpendicular a los frentes de onda cuando estas son dispersivas (Synge, 1962).

El transporte de sedimento puede ser tal que resulten más significativos sus aspectos de redistribución o diseminación en comparación al transporte integral neto. De aquí en adelante se denomina dispersión a estos efectos de carácter difusivo en los que los transportes "individuales" son importantes aunque el transporte total resulta de menor importancia. Fisher et'al (1979), muestran una definición que diferencia dispersión de transporte, considerando el movimiento del centro de masa del volumen en cuestión para definir transporte.

El presente trabajo tiene por objetivos: Analizar mediante un modelo experimental en escala pequeña (rectángulo con medidas de 1.8 X 1.3 m) cual es la dirección preferencial que toma la dispersión de montículos

de sedimento ligero al ser afectados por el oleaje. Determinar mediante un modelo numérico si esta dirección puede predecirse con teoría de rayos. Este segundo objetivo es un paso fundamental para avanzar con métodos numéricos en la estimación del apilamiento y erosión, asociados con las estructuras construidas sobre playas.

Los objetivos de este trabajo son de naturaleza cualitativa y representan avances iniciales para analizar la hipótesis de conexión entre la dispersión de sedimento y las trayectorias de rayos. Aquí no se pretende abordar el problema de un cambio a escalas naturales que implicaría el uso de cálculos de similaridad.

Para terminar esta introducción se esboza el orden y contenido de los otros capítulos. En el segundo capítulo se explican los principios y suposiciones con que las trayectorias de rayos se construyen, a la vez que se exhibe una forma de comprobar el algoritmo numérico a nuestra disposición (el programa de Breeding, Matson y Riahi, 1978). En el tercer capítulo se describe el experimento en la cuba de agua, así como la disposición del equipo de generación de oleaje y de fotografía. Un cuarto capítulo de resultados muestra figuras en las que se sobrepuso la información fotográfica y la del trazado de rayos. Por último en las conclusiones (capítulo cinco), se resume el

trabajo reenumerando los resultados y limitaciones.
También, no pudiendo vencer la tentación, se añaden
recomendaciones para profundizar en el motivo principal.

II. - TRAZADO DE RAYOS.

2.1. - Ley de Snell.

En este capítulo se exhibe el formalismo con el que el trazado de rayos se lleva a cabo, también se presentan unas deducciones y propiedades de tal formulación. El comportamiento adecuado de un algoritmo numérico es probado con resultados analíticos que se obtienen sencillamente de la teoría de rayos.

Se puede pensar en un conjunto de ondas acercándose a una discontinuidad en el medio en que se propagan, y que tal discontinuidad traera consigo un cambio repentino en la velocidad de propagación de dichas ondas. En la figura 2.1 se aprecian ondas que sólo han viajado en un medio (lado oeste de la discontinuidad) donde su velocidad de propagación es constante, una vez que estas ondas cruzan la discontinuidad, los frentes de onda cambiarán de dirección, tal como lo muestra la figura. Las olas marinas son un ejemplo en el que tal situación se presenta.

Utilizando la figura 2.1, se define a θ como el ángulo que forman los frentes de onda con la discontinuidad. Este ángulo coincide, por construcción, con el ángulo entre el rayo y la normal a la discontinuidad.

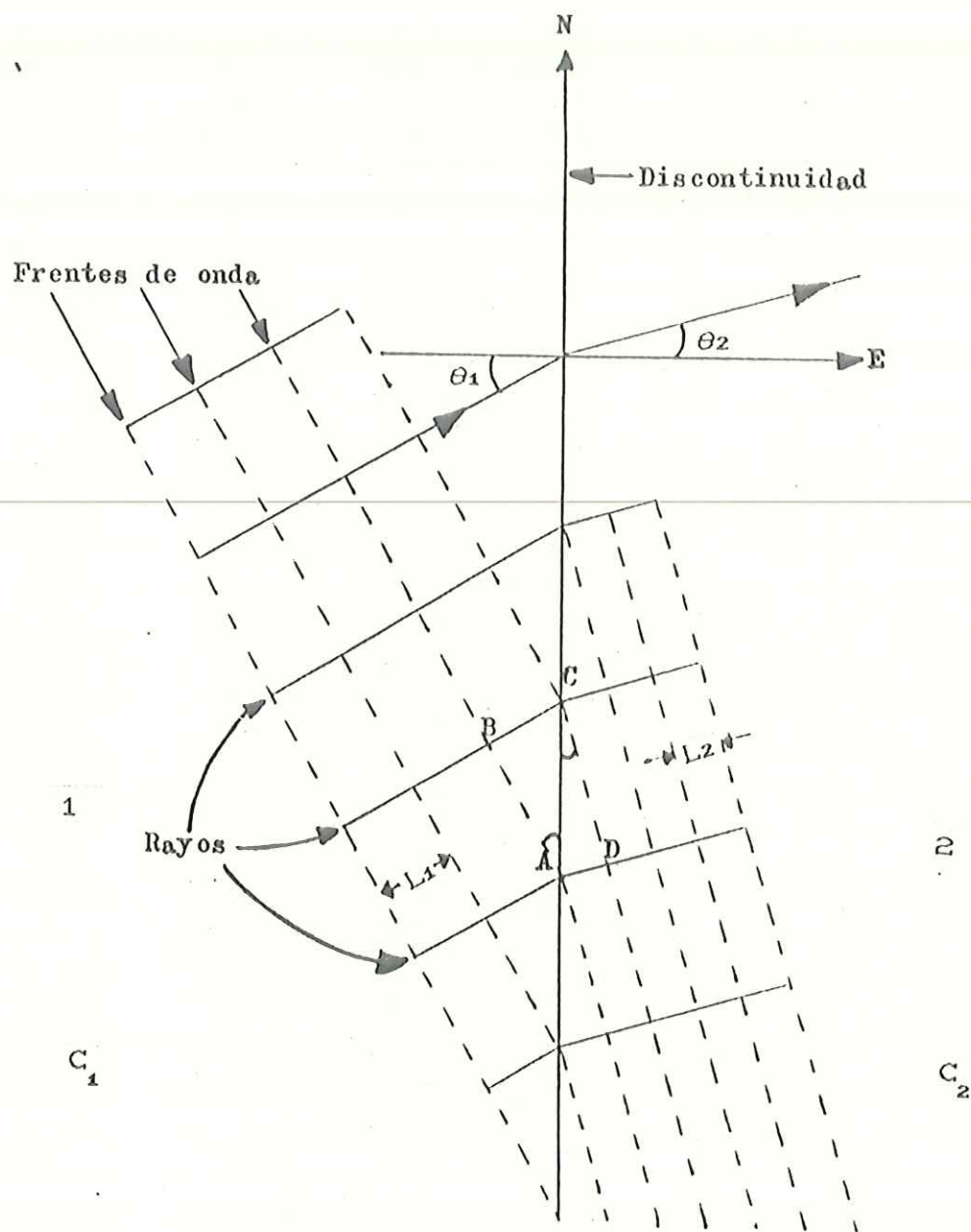


Figura 2.1 Un tren de ondas viajando en dirección Noreste cruza la discontinuidad que divide el lado Oeste (donde la celeridad es cte.) del lado Este (donde la celeridad también es cte. pero menor que la anterior). Los ángulos que forman respecto a la discontinuidad quedan relacionados por la ley de Snell (ver texto).

Sí se analizan los triángulos ABC y ADC formados en la figura 2.1, se puede ver que tienen la misma hipotenusa (AC) y que las distancias BC y AD son las longitudes de onda en los medios 1 (lado Oeste) y 2 (lado Este) respectivamente, por lo tanto:

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{L_1}{AC}$$

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{L_2}{AC}$$

de donde

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{L_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{L_2} \quad (1)$$

Ya que el período (T) de las ondas incidentes es el mismo que el de las ondas transmitidas (hecho primordial en que la ley de Snell se establece), se puede entonces expresar a la velocidad (C) en cada medio de la siguiente manera

$$C_i = \frac{L_i}{T}$$

y así la ecuación (1) puede ser reexpresada como

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{C_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{C_2} \quad (2)$$

que es la forma común de enunciar la ley de Snell, y en la que por convencionalismo θ_i es el ángulo entre los rayos y

la normal a la discontinuidad.

Si existiesen varias discontinuidades de velocidad paralelas (como se muestra en la figura 2.2), la utilización sucesiva de la ecuación (2) implicaría que

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{C_i} = \text{cte} \quad (3)$$

para cada uno de los medios con velocidad C_i . En un proceso de límite reduciendo los Δx_i (indicados en la figura 2.2) a cero, se deduce que

$$\frac{\text{sen } \theta(x)}{C(x)} = \text{cte} \quad (4)$$

que es la expresión local de la ley de Snell para un medio de variación continua.

La ley de Snell también indica cual es el mayor ángulo (ángulo crítico) con el que se puede aproximar un rayo a una zona de mayor velocidad sin que exista reflexión total, o sea cuando

$$\text{sen } \theta_{cr} = \frac{C_2}{C_1}$$

A continuación se formula la expresión diferencial de la ley de Snell en el caso más general ($C = C(x,y)$), para esto se pueden considerar rayos infinitesimalmente separados y "paralelos" alrededor de un punto (x,y) . Para

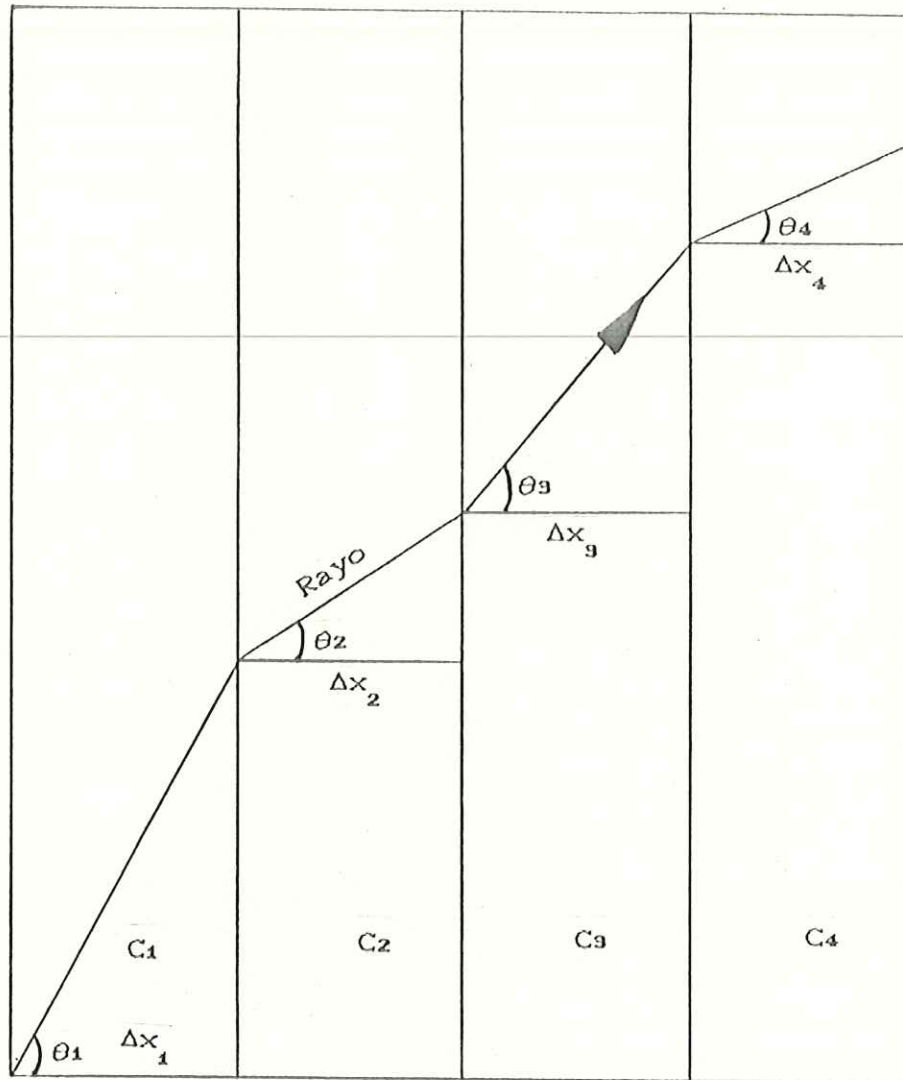


Figura 2.2 Un rayo cruza varias discontinuidades de velocidad que separan medios de velocidad cte.

una descripción más simple de la variación del ángulo, consideremos una rotación de las coordenadas (x,y) a (s,f) en forma tal, que la coordenada "s" quede en la dirección de propagación del rayo y la coordenada "f" quede a 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj respecto a la dirección "s", tal y como se muestra en la figura 2.3. Se tendrá entonces a

$$\hat{e}_s = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

$$\hat{e}_f = (-\text{sen } \theta, \cos \theta)$$

como vectores unitarios y perpendiculares en las direcciones de sus subíndices, siendo θ el ángulo de inclinación del rayo respecto a $\hat{i} = (1,0)$ o el eje positivo de la coordenada "x".

Utilizando las nuevas coordenadas podemos expresar las siguientes relaciones diferenciales

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \hat{e}_s = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \text{sen } \theta \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \nabla u \cdot \hat{e}_f = -\frac{\partial u}{\partial x} \text{sen } \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta \quad (6)$$

para cualquier función $u = u(x,y) = u(s,f)$.

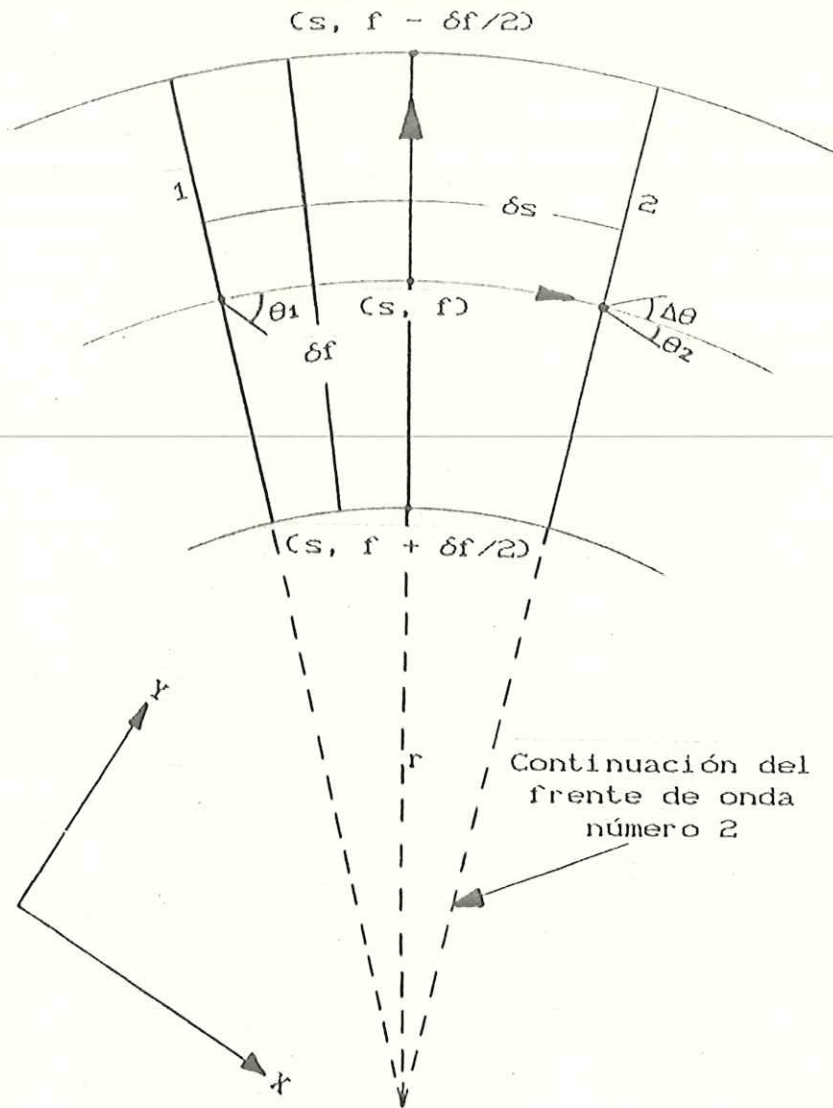


Figura 2.3 Las líneas discontinuas representan la continuación de los frentes de onda. Nótese, que ángulo es $\Delta\theta$, y cual es la posición de las coordenadas "s" y "f".

De la figura 2.3 se puede apreciar que

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \theta(s + \delta s/2, f) - \theta(s - \delta s/2, f) \approx \frac{\partial\theta}{\partial s} \delta s$$

coincide con el ángulo que forman las continuaciones de los frentes de onda 1 y 2, y que tales continuaciones se intersectan a una distancia r del punto (s, f) tal que

$$r |\Delta\theta| = \delta s$$

note que $\Delta\theta$ en la figura 2.3 es negativo, así

$$\frac{\Delta\theta}{\delta s} = -\frac{1}{r} \quad (7)$$

donde la velocidad cumple con

$$\delta s = C(x, y) \Delta t = C(s, f) \Delta t \quad (8)$$

Combinando las relaciones (7) y (8) podemos obtener

$$C(s, f) \Delta t = -r \Delta\theta$$

y que

$$C(s, f - \delta f/2) \Delta t = - (r - \delta f/2) \Delta\theta$$

$$C(s, f + \delta f/2) \Delta t = - (r + \delta f/2) \Delta\theta$$

Restando estas dos últimas relaciones tendremos:

$$\left[C(s, f + \delta f / 2) - C(s, f - \delta f / 2) \right] \Delta t = \left[-(r + \delta f / 2) + (r - \delta f / 2) \Delta \theta \right]$$

Así, en el límite cuando $\delta f \rightarrow 0$, resulta

$$\frac{\partial C}{\partial f} \delta f \Delta t = - \delta f \Delta \theta$$

si se elimina δf y se utiliza (8), la ecuación anterior puede ser expresada como

$$\frac{\partial C}{\partial f} \frac{1}{C} = - \frac{\Delta \theta}{\delta s}$$

y en el límite cuando $\delta s \rightarrow 0$ ($\Delta t \rightarrow 0$) se obtiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = - \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial f} \quad (9)$$

Esta expresión (9) indica que la curvatura $\left| \frac{\partial \theta}{\partial s} \right| = \frac{1}{r}$ es nula ($r = \infty$) si no hay variaciones de la celeridad en la dirección perpendicular del rayo (dirección \hat{e}_f).

Si se emplea a 5 y 6 la expresión (9) en términos de "y" y "x" sera

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta = - \frac{1}{C} \left[- \frac{\partial C}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial C}{\partial y} \cos \theta \right]$$

que a la vez podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin \theta}{C} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos \theta}{C} \right) \quad (10)$$

esta expresión (10) (equivalente a 9) es la forma diferencial de la ley de Snell.

En caso de tener rayos "paralelos" ($\theta = \theta_0 = \text{cte}$ en algun $x = x_0$ para un sin número de rayos cubriendo todas las y 's) y $C = C(x)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin \theta}{C} \right) = 0$$

que implica la ecuación 4, que también es la ley de Snell en el caso de una discontinuidad (ver ecuaciones 3 y 4). Así, podremos decir que si el cambio en velocidad no es abrupto (sino continuo), entonces el cambio en dirección del rayo estará dado por la expresión diferencial (local) de la ley de Snell (ecuaciones 9 ó 10).

Una forma común de utilizar la ley de Snell es integrando desde la frontera a lo largo de trayectorias. Para un punto en la frontera (x_0, y_0) se tiene un ángulo inicial (θ_0) y el trazado del rayo (o trayectoria) se lleva a cabo integrando las ecuaciones que a continuación se describen. De la figura 2.3 se aprecia que

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (11)$$

$$\frac{dy}{ds} = \text{sen } \theta \quad (12)$$

En estas expresiones y en las siguientes se aclara que las derivadas totales son para un rayo en particular, y ya que ds ($ds = c dt$) por definición esta en la dirección del rayo, se pueden reescribir las ecuaciones (11) y (12) de la siguiente manera

$$\frac{dx}{dt} = C \cos \theta \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = C \text{ sen } \theta \quad (14)$$

y de la ecuación (9) se puede ver que

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{C} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial f}$$

por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial C}{\partial f}$$

o sea

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{sen } \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial C}{\partial y} \quad (15)$$

Los algoritmos generalmente usados para modelar la refracción, se basan en la resolución de las ecuaciones de rayo (13, 14 y 15), estas ecuaciones indican como cambia la

posición y dirección del rayo en función del tiempo.

Se requieren otras ecuaciones para el cálculo de la variación de la altura de la ola. Se finaliza esta sección exhibiendo tales ecuaciones en un caso sencillo (sin reflexión, fricción ni cruce de rayos).

Si se considera que la potencia transmitida entre dos rayos adyacentes se conserva y que no existe reflexión ni dispersión por fricción, entonces según Kinsman, 1965

$$\frac{H}{H_0} = \left[\frac{C_{g_0} \delta f_0}{C_g \delta f} \right]^{1/2} = K_s K_R$$

donde H es la altura de la ola, C_g es velocidad de grupo, δf es la separación entre rayos, y las mismas variables con subíndice (0) son las de referencia (las del punto inicial o de partida en la frontera) y

$$K_s = \left[\frac{C_{g_0}}{C_g} \right]^{1/2} \quad \text{es el coeficiente de fondo} \quad \text{y}$$

$$K_R = \left[\frac{\delta f_0}{\delta f} \right]^{1/2} \quad \text{es el coeficiente de refracción.}$$

Así, si no se considera reflexión, ni fricción y los rayos no se cruzan ($\delta f \neq 0$), entonces se puede calcular la altura de la ola en cualquier punto del rayo siempre y cuando se conozca la altura en otro punto del rayo. El modelo de

Breeding, Matson y Riahi (1978) utilizado tiene la posibilidad de calcular alturas, inclusive, tomando en cuenta fricción.

2.2.- Solución analítica de las ecuaciones de rayo para un caso simple.

Aquí se muestra cual es el tipo de trayectoria que posee el rayo cuando la celeridad tiene un gradiente constante.

Utilizando que $\delta s = C \Delta t$ se puede expresar la ecuación (15) en función de "s", así

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{C} \left[\text{sen } \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \text{cos } \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (16)$$

al primer miembro de esta ecuación se le conoce como curvatura, y si

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \text{cte}_1 \quad ; \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \text{cte}_2$$

entonces la celeridad tendrá un comportamiento lineal.

Derivando la ecuación (16) con respecto a "s", se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{1}{C} & \left[\text{cos } \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial C}{\partial x} + \text{sen } \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) + \text{sen } \theta \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial C}{\partial y} \right. \\ & \left. - \text{cos } \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] - \frac{1}{C^2} \left[\text{sen } \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \text{cos } \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right] \frac{\partial C}{\partial s} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{C} \left[\cos \theta \frac{\partial C}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right] \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{C} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) - \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] - \frac{1}{C} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial C}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial C}{\partial y} \right] \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial s}$$

Sustituyendo la ecuación (16) y utilizando la ecuación (5) esta última relación se reduce a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{C} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) - \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial s}$$

Por lo que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{1}{C} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) - \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right]$$

y este resultado demuestra que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = 0 \quad (17)$$

cuando $\frac{\partial C}{\partial x}$ y $\frac{\partial C}{\partial y}$ son constantes. Si se representa a la curvatura como γ , entonces

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \gamma$$

donde γ es una constante. Si se integra con respecto a "s" en ambos lados de la expresión anterior, tendremos

$$\theta = \theta_1 + \gamma s$$

Sustituyendo esta igualdad en las ecuaciones 11 y 12 se obtiene

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\theta_1 + \gamma s) \quad (18)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin(\theta_1 + \gamma s) \quad (19)$$

Y si integramos 18 y 19 con respecto a "s", resulta

$$x = x_1 + \frac{1}{\gamma} \sin(\theta_1 + \gamma s) \quad (20)$$

$$y = y_1 - \frac{1}{\gamma} \cos(\theta_1 + \gamma s) \quad (21)$$

Si estas dos últimas ecuaciones se elevan al cuadrado y se suman, se obtiene

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left[\sin^2(\theta_1 + \gamma s) + \cos^2(\theta_1 + \gamma s) \right]$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 \quad (22)$$

De la ecuación 17 se puede decir que si la celeridad tiene un comportamiento lineal entonces la curvatura del rayo ($|\gamma| = \frac{1}{r}$) es constante y si un rayo posee curvatura

constante (diferente de cero) debe de formar arcos de círculo (la ecuación 22 respalda esta afirmación). El punto (x_1, y_1) , aunque no se demuestre aquí, queda sobre la línea en que la celeridad es nula.

2.3.- Comprobación del modelo numérico con una solución analítica.

El algoritmo numérico utilizado es el publicado por Breeding, Matson y Riahi (1978). Este algoritmo se implemento a un computador PRIME 750 del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, B.C. (CICESE).

Con el fin de probar el funcionamiento del algoritmo numérico, se hizo una comparación entre los resultados numéricos y la solución analítica de arcos de círculo obtenida anteriormente. Ya que dicha solución corresponde a una celeridad que varía linealmente, entonces para alimentar el programa se generó una topografía en la que una frecuencia de interés tuviese una celeridad con las características mencionadas.

El resultado del algoritmo numérico se muestra en la figura 2.4, sobre tal figura se construye un círculo exacto que cruza todos los puntos del rayo arrojado por el algoritmo. La diferencia entre la trayectoria que el algoritmo ofrece y el círculo construido geoméricamente es visualmente inapreciable. Esta verificación geométrico-visual del algoritmo es suficiente para los propósitos de este trabajo.

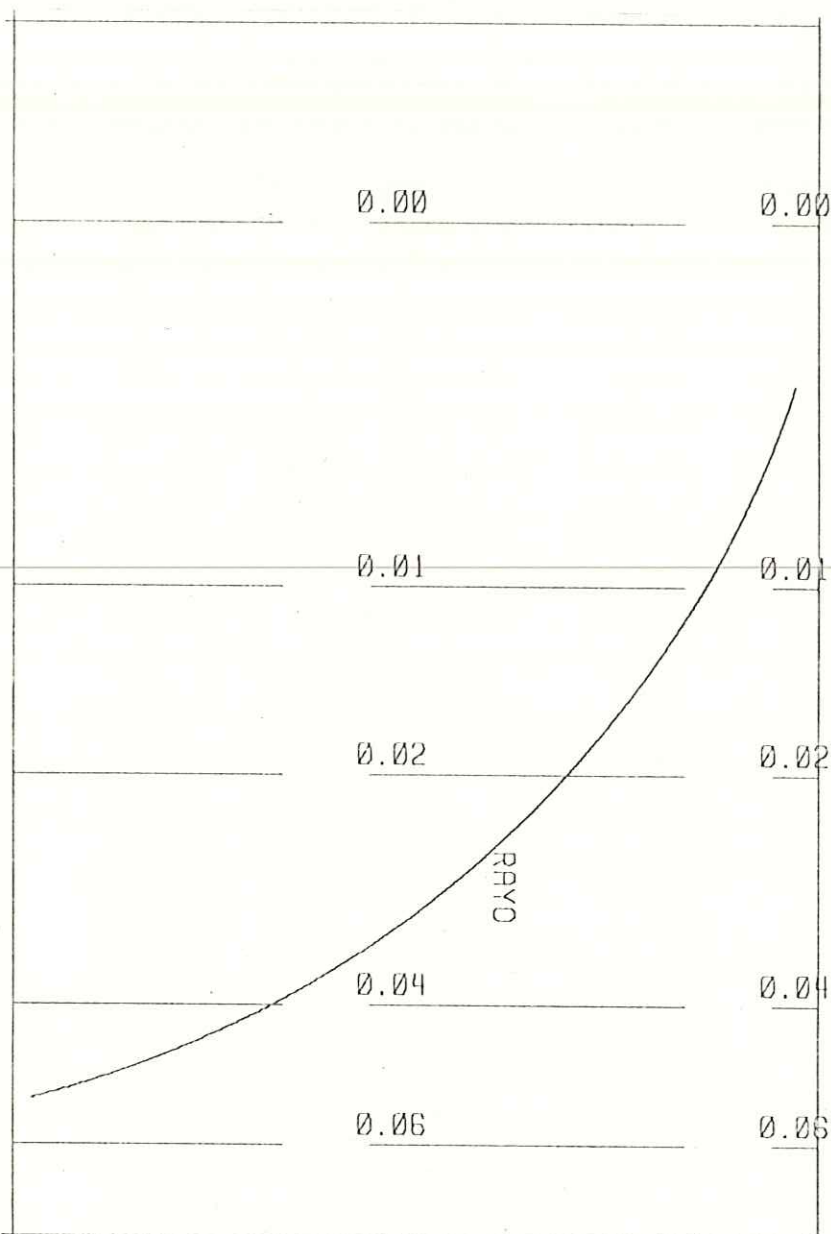


Figura 2.4 Se muestra la trayectoria del rayo (arco de círculo) construida con el algoritmo numérico. El período de este oleaje es 0.75 seg. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto.

III.- DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO.

3.1.- Experimentos de laboratorio.

Los experimentos se llevaron a cabo en un recipiente de 1.8×1.3 m de fondo por 30 cm de altura. En dicho recipiente se depositó arena, y la playa fue formada con una batimetría que poseía una pendiente constante desde el fondo horizontal del recipiente donde empezaba la arena hasta el borde final en un extremo del recipiente (figura 3.1). Antes de llenar con agua el recipiente se construyó la pendiente, deslizando un vidrio plano sobre la arena húmeda y compacta. Junto a las paredes de la maqueta se acomodaron rocas porosas con el fin de disipar la energía del oleaje que incidiese en los lados. Al ras del fondo arenoso (aguas someras) se colocó un cuadro metálico graduado que sirviera como marco de referencia, ya que en el centro de este cuadro era donde se formaban los montículos a ser dispersados. Una vez que el recipiente fue llenado, se midió la profundidad en diferentes puntos para así poder determinar el valor de la pendiente y la topografía en general. Una cámara fotográfica fue montada aproximadamente a 2.0 metros por encima del nivel del agua, en el punto F señalado en la figura 3.1. En la figura antes mencionada se muestran la posición de los diferentes objetos que formaban la maqueta y algunas de sus

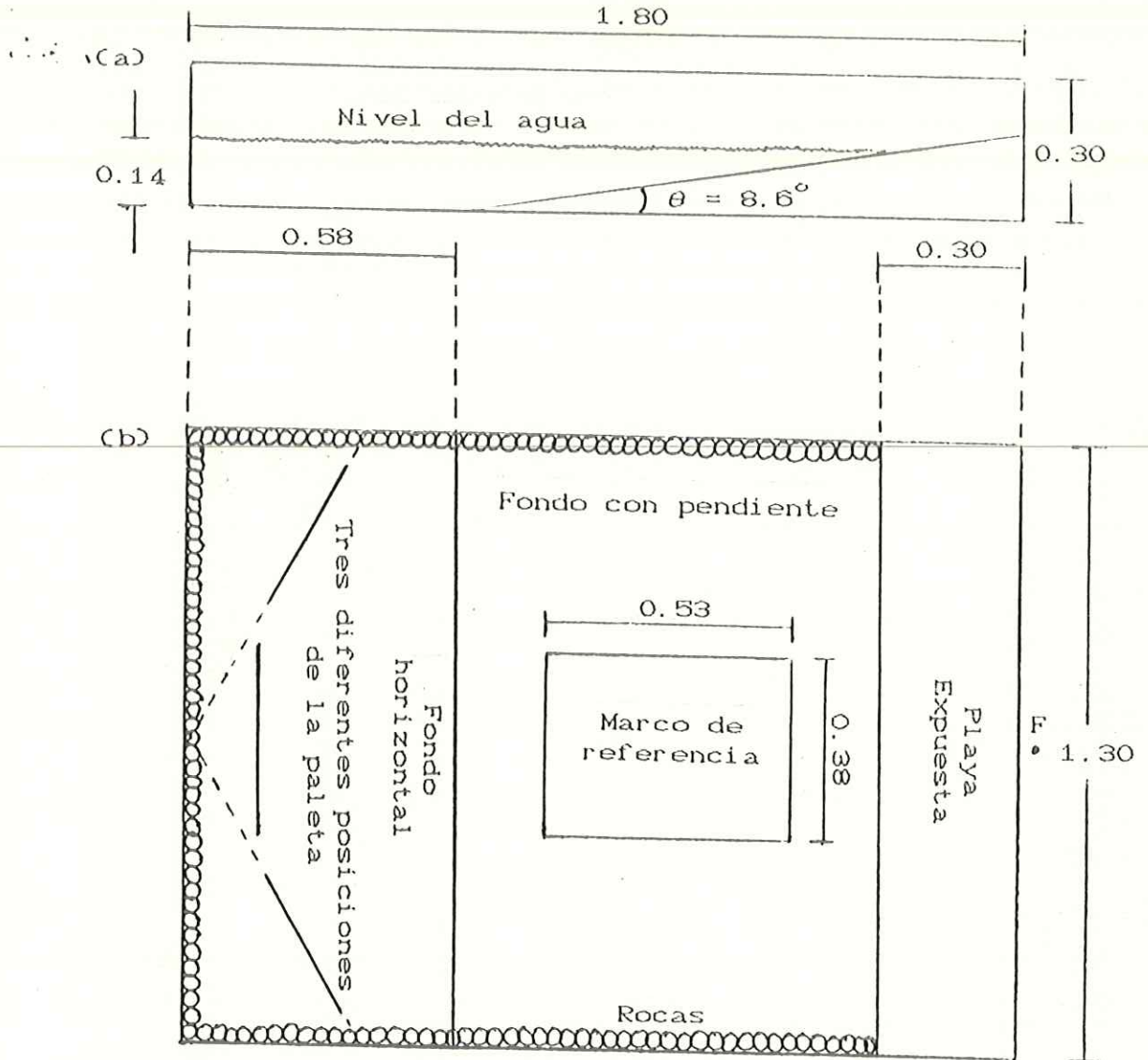


Figura 3.1 a).- Vista lateral del recipiente. b).- Vista superior del recipiente. Las unidades de las longitudes que se muestran son metros. El significado de los triángulos y del punto F esta en el texto.

características.

Se hizo llegar oleaje a la playa utilizando un motor eléctrico, para ello, a la rueda que el motor hace girar se le conectó un brazo palanca, a éste a la vez se le conectó una paleta (perturbador) inmersa verticalmente en el agua, de tal manera que al moverse (inclinarse a ambos lados) impulsa el agua produciendo trenes de olas cuyo período y altura son controlables con el voltaje que alimenta el motor y con la longitud del brazo palanca respectivamente. La dirección inicial de los frentes de onda podía ser variada cambiando la posición del motor, y esta dirección fue estimada midiendo los catetos del triángulo rectángulo formado por la dirección de la paleta y los bordes del recipiente (ver triángulos en lado izquierdo de la figura 3.1).

El material con el que se formaron los montículos fue preferencialmente residuos de café molido (simulando sedimento), se escogió este material por dos de sus características; una es su poca densidad, esta permite que el tiempo requerido para que el oleaje disperse los montículos sea mucho menor que si se utilizara un material más denso. La otra es su color oscuro, pues éste, facilita la delimitación visual del montículo (contorno) después de que estos han sido sometidos a la acción del oleaje. El

otro material que se utilizó fue arena fina de color más claro que la del fondo.

Los experimentos se desarrollaron con el siguiente orden y procedimiento: 1).- Medir profundidad en diferentes puntos de la maqueta. 2).- Elegir posición de la paleta. 3).- Escoger y medir período y dirección inicial de los frentes de onda. Para medir período se cronometraba el tiempo de 100 períodos, con lo cual los errores de tal medición eran insignificantes para los propósitos de este trabajo. 4).- Escoger altura de la ola (sin medirla). 5).- Formar en el centro del marco de referencia un montículo a ser dispersado. 6).- Tomar una primera fotografía a la configuración inicial. 7).- Poner a oscilar el perturbador durante 10 seg. si el montículo había sido formado por café ó 6 minutos si había sido formado por arena. 8).- Detener el motor y tomar una segunda fotografía a la nueva configuración. 9).- Poner a oscilar nuevamente la paleta durante 20 seg. si el montículo había sido formado por café ó 6 minutos si había sido formado por arena. 10).- Parar el motor y tomar una tercera fotografía a la maqueta. 11).- Poner a oscilar el perturbador durante 40 seg. si el montículo había sido formado por café. Para el caso de montículos formados con arena, nunca se prosiguió el experimento más allá del paso once. 12).- Parar el motor y tomar una cuarta y última fotografía a la maqueta.

Cabe señalar que no todas las secuencias fueron llevadas a cabo hasta la cuarta fotografía, algunas se truncaron en la segunda o tercera fotografía. Esto último porque el café era rápidamente transportado a la playa expuesta.

Con el fin de digitalizar los resultados (fotografías) se proyectaron las diapositivas sobre papel, y en forma visual se delimitaron los contornos de sedimento (café o arena) y la escala del marco de referencia, esto último para poder caracterizar los contornos con las coordenadas x-y del cuadro referencial y no incurrir en errores por distorsión óptica de la fotografía. Posteriormente se transformaron los puntos digitalizados de los contornos a las coordenadas x-y de la maqueta.

3.2. - Cálculos numéricos.

Utilizando la información de cada experimento de laboratorio se hicieron cálculos de las trayectorias de rayos con el programa (modelo) anteriormente verificado (sección 2.3). La información que cada experimento proveía era: período de las olas, posición y dirección inicial de los rayos (determinados por la posición de la paleta), batimetría (sin incluir perturbación por el montículo de sedimentos a dispersarse) y la altura de las olas (pequeña, mediana o grande). Los resultados del programa (trayectoria de rayos) se grafican sobre la secuencia de dispersión de los montículos. Tales resultados se muestran en el siguiente capítulo.

Se cree conveniente señalar que con tal de que la posición del punto de inicio del rayo a calcular, sea en el fondo plano; esta posición es irrelevante pues los rayos son rectas en tal fondo plano. Por lo tanto solo el ángulo inicial (de la paleta) y no su posición exacta es importante.

IV. - RESULTADOS y DISCUSIONES.

4.1. - Descripción de resultados.

En las figuras 4.1 a 4.7, se muestran los resultados tanto del algoritmo numérico (rayos) como del experimento de laboratorio (contornos de montículos digitalizados a partir de fotografías). El objetivo de dichas figuras es hacer una comparación entre la dirección preferencial que toma la dispersión de montículos de sedimento y la trayectoria de rayos. Es importante que se tome en cuenta que cada una de las figuras de esta sección representa un experimento independiente.

La dirección original o inicial de los rayos se muestra en todas las figuras y se denota con θ_0 . En lo sucesivo al referirnos (texto y figuras) a la altura de las olas, hablaremos de altura pequeña mediana o grande (recuerdese que este es un trabajo puramente cualitativo). En los resultados que se muestran en las diferentes figuras de esta sección, el material que se utilizó para formar los montículos fue residuos de café molido, excepto en los resultados mostrados en la figura 4.7, ahí, los montículos fueron formados con arena fina. Los rayos que se presentan en las figuras tienen origen en la parte plana de la paleta y además de estos en la figura 4.5 se presentan rayos con origen en la esquina de la paleta.

La figura 4.1, muestra los resultados del experimento más sencillo, se utiliza el término sencillo porque el oleaje que ocasiono la dispersión del montículo fue lanzado en dirección perpendicular a la costa y con un período (en lo sucesivo T) de 0.61 seg. De esta figura es claro que la dirección de la dispersión del montículo y la dirección de los rayos (que nunca cambia) es la misma.

En la figura 4.2 se puede apreciar que el oleaje que causó la desintegración del montículo, se aproxima en forma oblicua a la playa ($\theta = 208^\circ$) y que la dispersión del montículo es en forma asimétrica con una dirección preferencial (aproximada a la de los rayos).

El experimento representado en la figura 4.3, se desarrollo con las mismas condiciones iniciales que el experimento representado en la figura 4.2, excepto que T fue aumentado ($T = 0.75$ seg.). De la figura 4.3 se puede ver que la dispersión del montículo no posee muchas direcciones y una preferencial (como en la figura 4.2) sino que solo una dirección (muy aproximada a la de los rayos).

El experimento de la figura 4.4 es una variación (se disminuyo la altura del oleaje) del experimento mostrado en la figura 4.3.

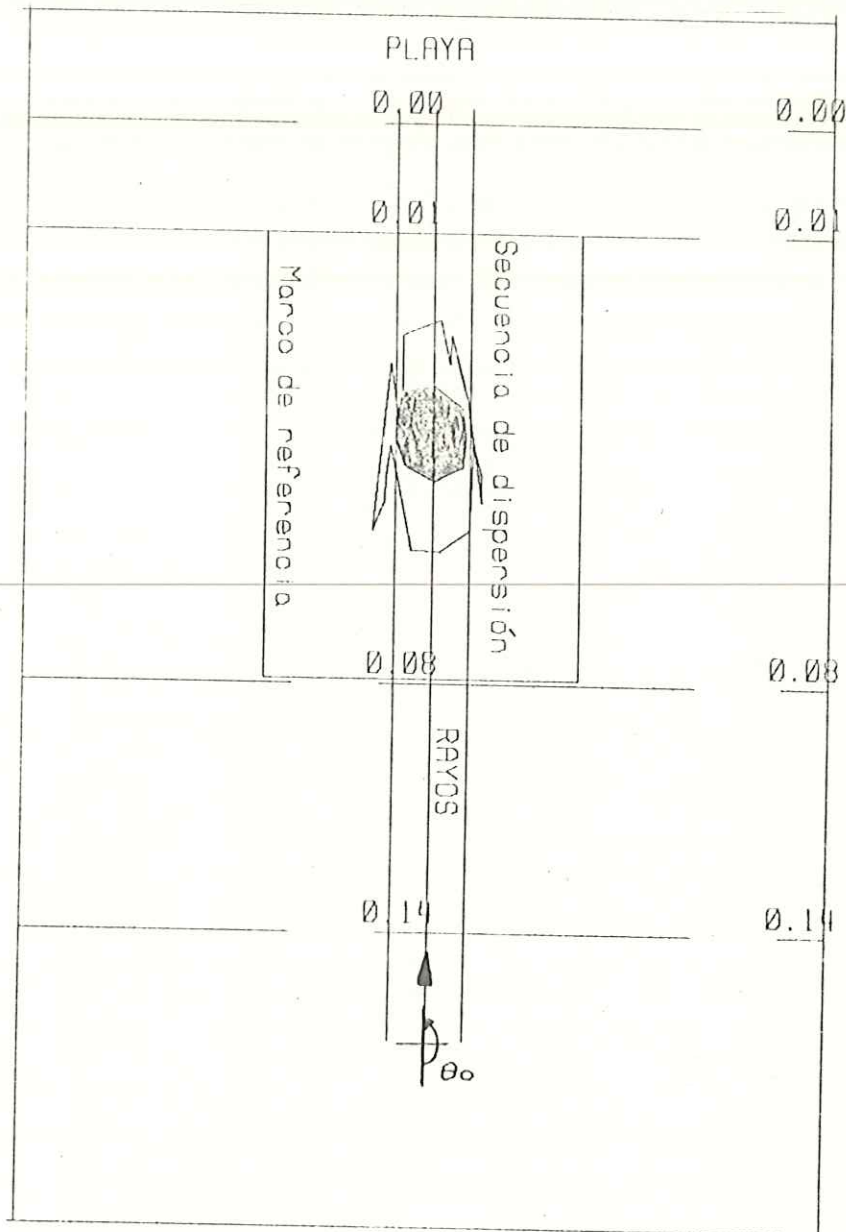


Figura 4.1 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$ y el área clara después de 20 olas. $T = 0.61$ seg. $\theta_0 = 180^\circ$. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

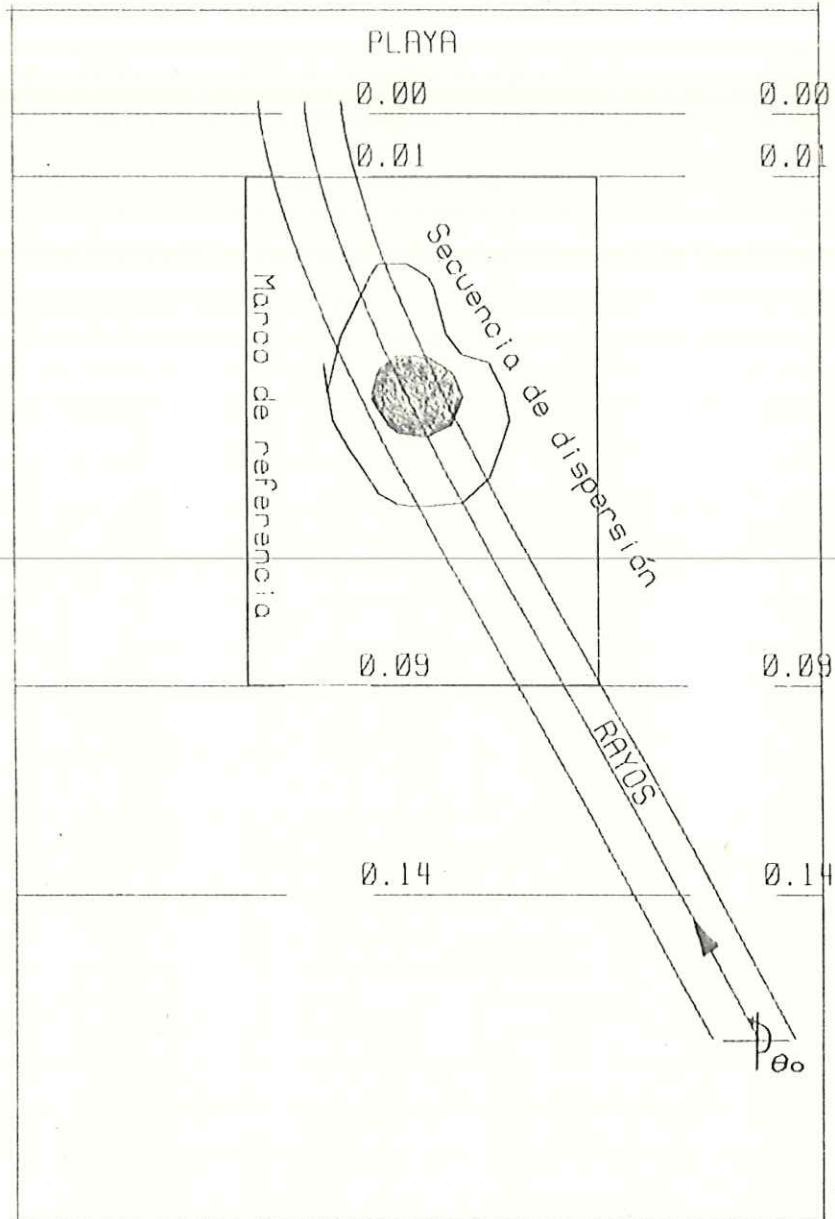


Figura. 4.2 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$ y el área clara después de 24 olas. $T = 0.61$ seg. $\theta_0 = 208^\circ$. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

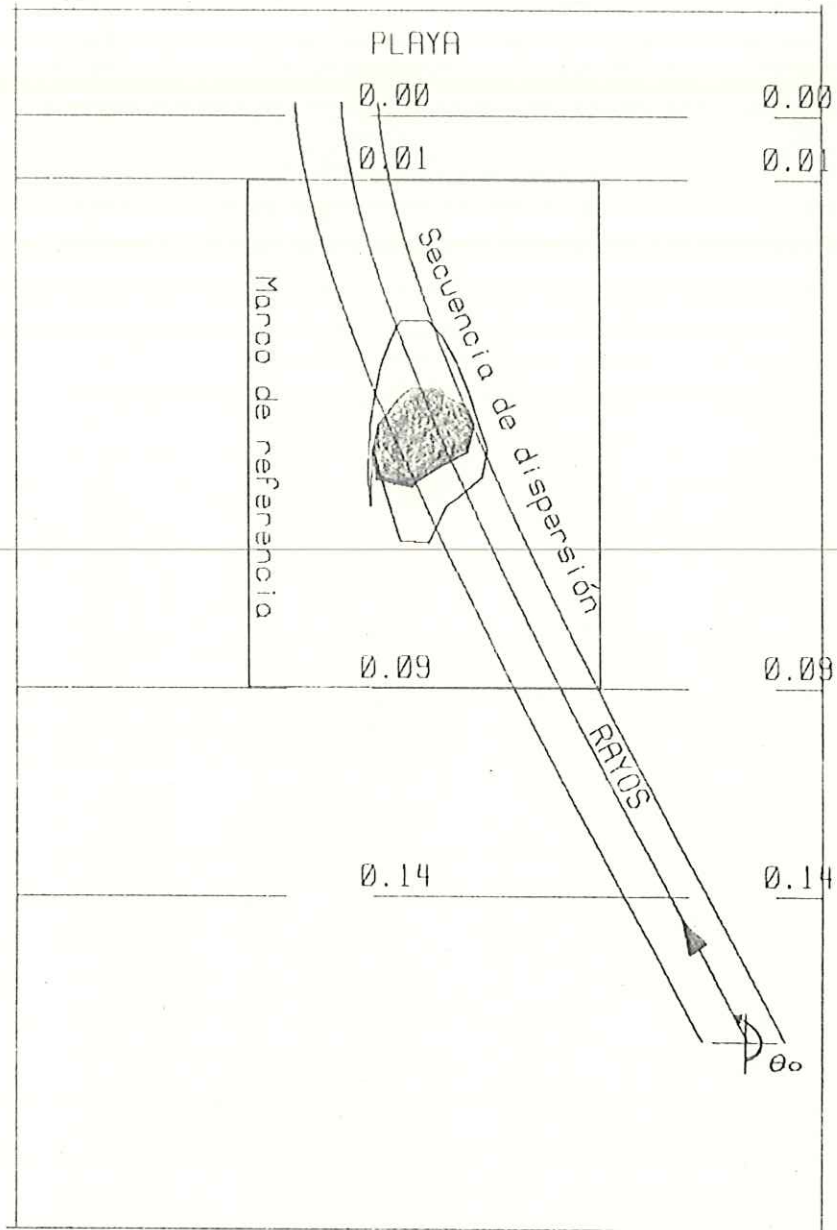


Figura 4.3 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$ y el área clara después de 40 olas. $T = 0.75$ seg. $\theta_0 = 208^\circ$. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

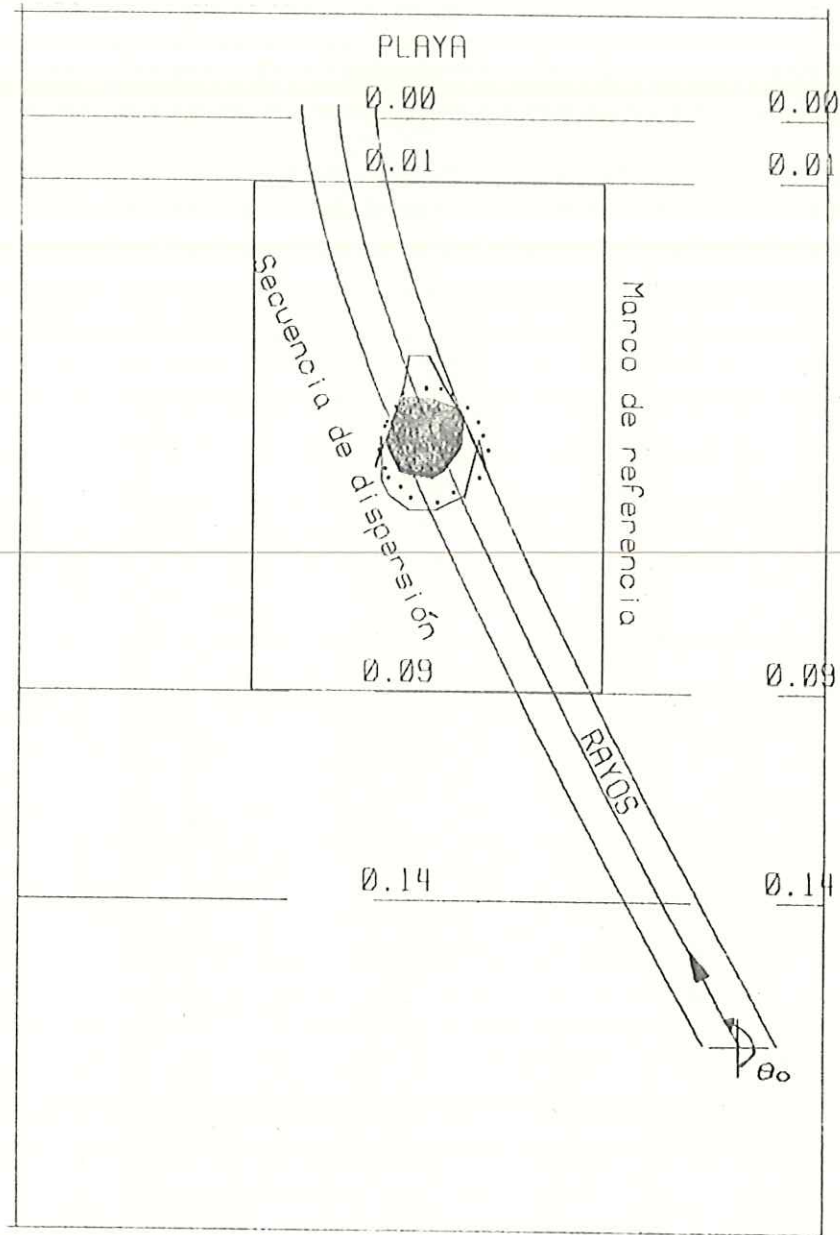


Figura 4.4 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$, el contorno punteado lo representa después de 13 olas y el área clara después de 53 olas. $T = 0.75$ seg. $\theta_0 = 208^\circ$. La altura de las olas es pequeña. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

En la figura 4.5 se muestran rayos que son generados en la esquina de la paleta (rayos gruesos), esto porque el ángulo de la paleta fue excesivo para que los rayos arribando al centro del montículo provinieran de una parte intermedia de la paleta. $T = 0.86$ seg.

La figura 4.6, muestra claramente que la dirección de la dispersión del montículo es muy aproximada a la trayectoria de los rayos. $T = 0.86$ seg.

En la figura 4.7 el contorno punteado representa al montículo después de 590 olas, teniendo estas un período (T) de 0.61 seg. Aunque en la figura no se muestre por la dificultad al digitalizar, en el montículo al ser disipado se formaban ondulitas, siguiendo estas la misma dirección preferencial de la dispersión del montículo (casi perpendicular a la dirección de los rayos).

Aunque aquí no se presenten como resultados, algunos de los montículos fueron sometidos a la acción del oleaje durante tiempos de un orden mayor a los 50 períodos, encontrándose que para estos tiempos la dirección de la dispersión del montículo no se aproxima a la dirección de los rayos.

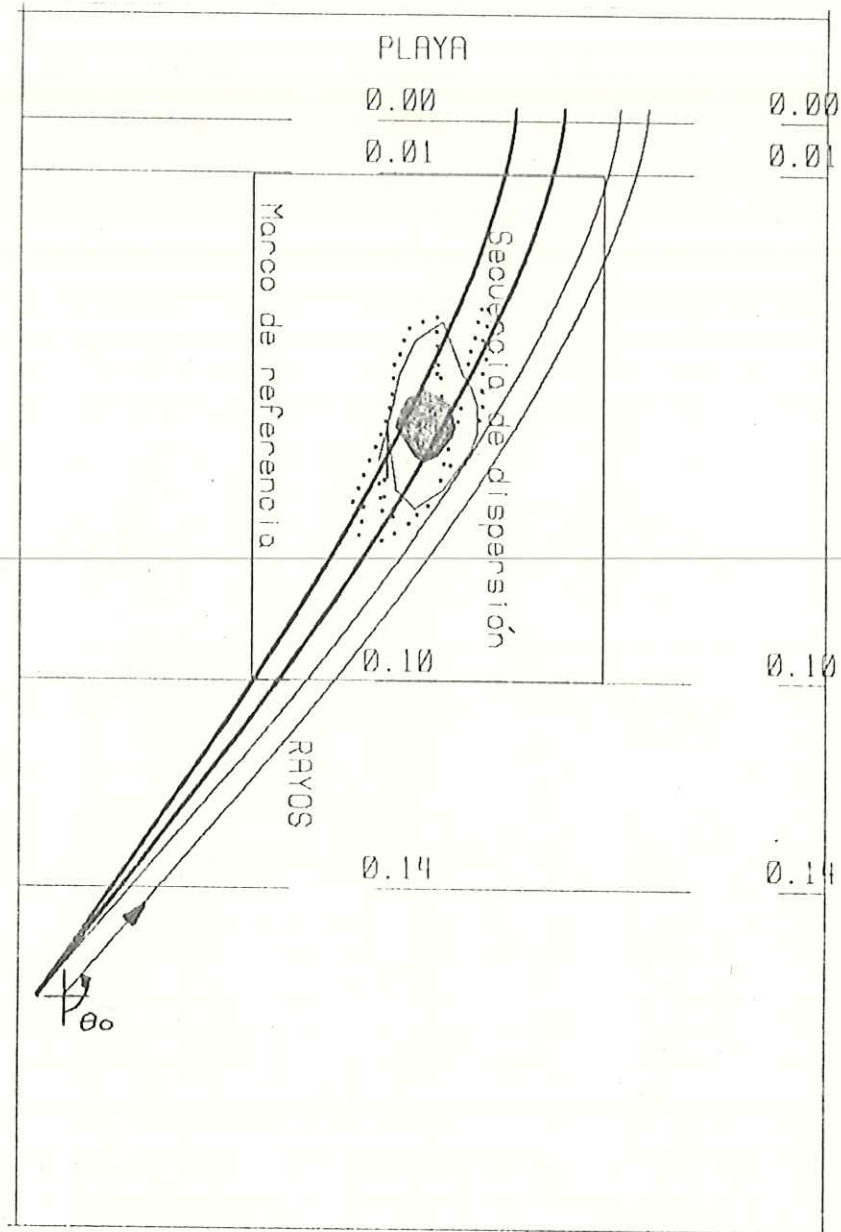


Figura 4.5 Los rayos gruesos tiene origen en la esquina de la paleta (fuente radial). Para el rayo grueso que esta más a la izquierda $\theta_0 = 144^\circ$, para el otro rayo grueso $\theta_0 = 142^\circ$ y para los rayos delgados $\theta_0 = 138^\circ$. $T = 0.86$ seg. En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$, el área clara lo representa después de 17 olas y el contorno punteado después de 46 olas. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

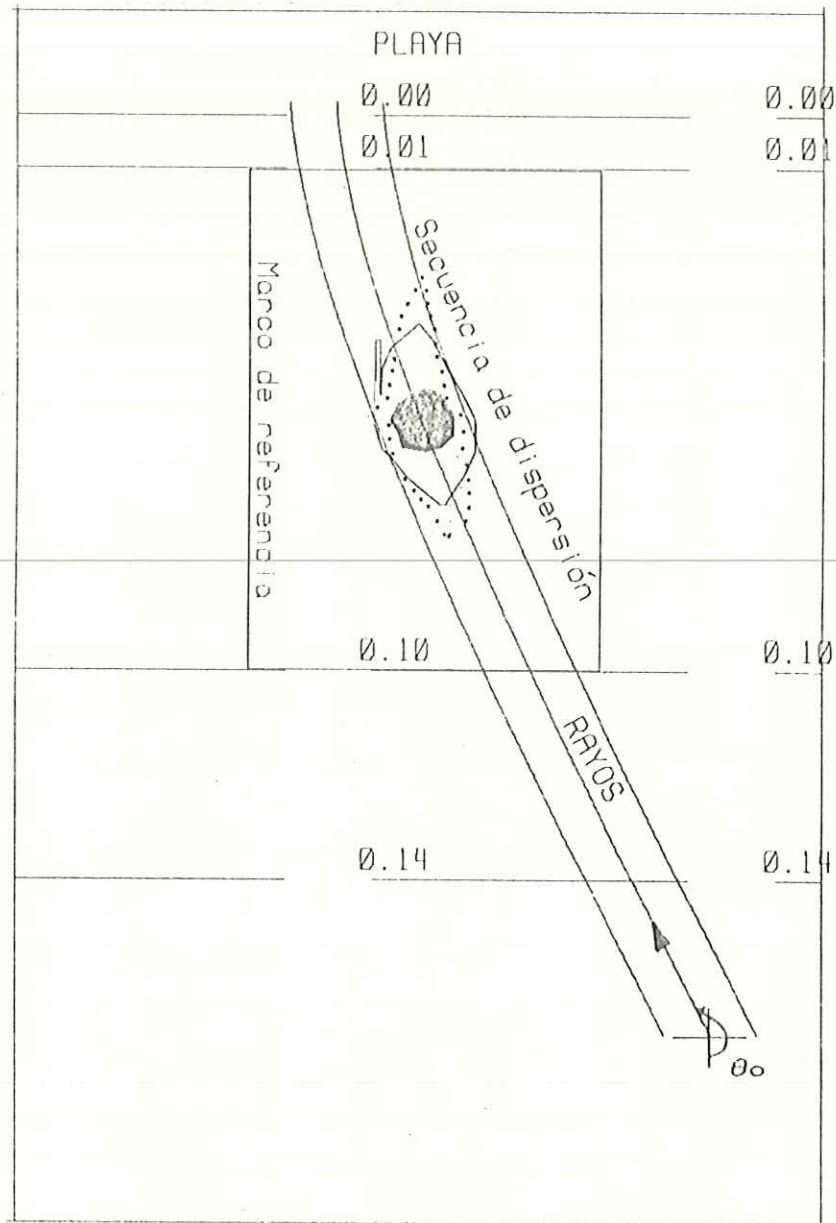


Figura 4.6 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$, el área clara lo representa después de 24 olas y el contorno punteado después de 40 olas. $T = 0.86$ seg. $\theta_0 = 208^\circ$. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue café.

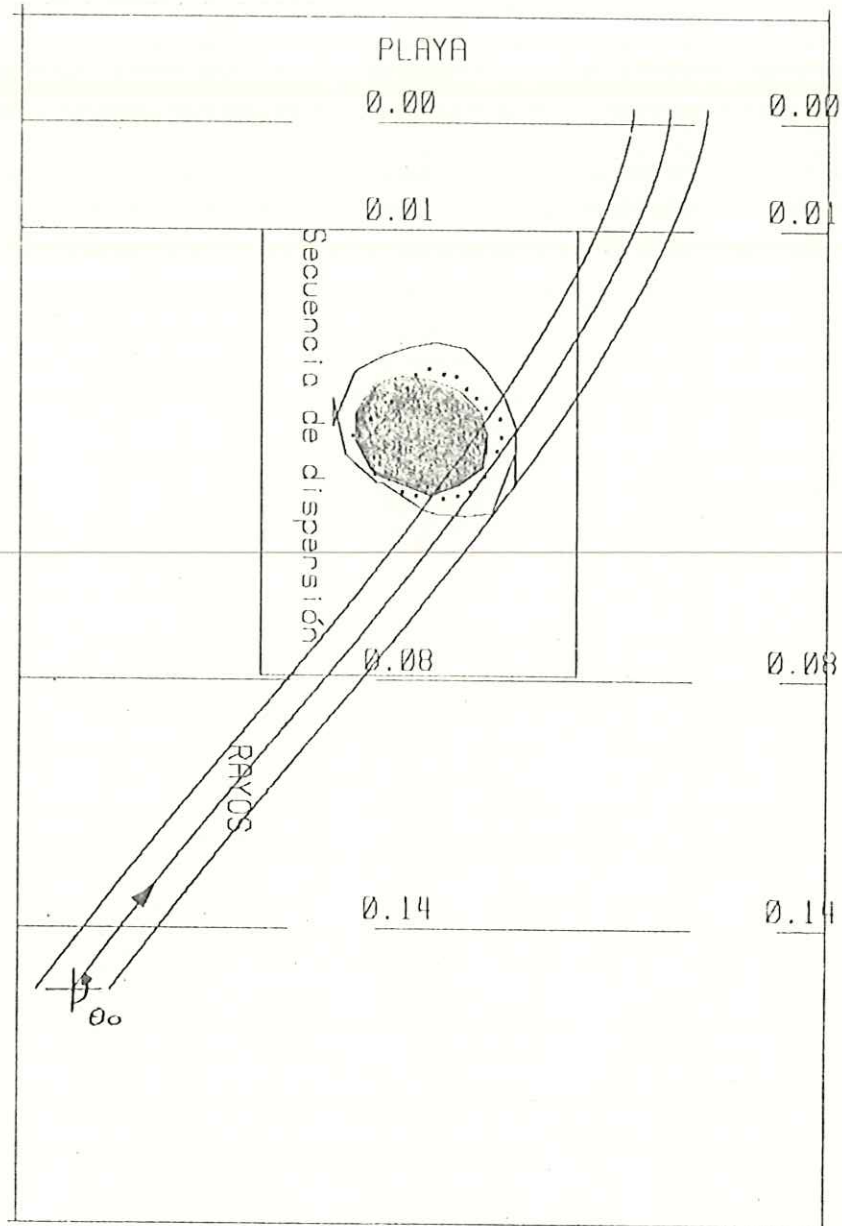


Figura 4.7 En la secuencia de dispersión el área sombreada representa al montículo en $t = 0$, el contorno punteado lo representa después de 590 olas y el área clara después de 1180 olas. $T = 0.61$ seg. $\theta_0 = 142^\circ$. La altura de las olas es mediana. Las líneas discontinuas son de batimetría, y sus valores (con unidades en metros) se encuentran adjunto. El material que se utilizó para formar el montículo fue arena fina de color más claro que la del fondo.

En la tabla I se hace un resumen de todos los resultados con el fin de facilitar la comparación entre los diferentes experimentos. Aquí las longitudes de onda son calculadas a la profundidad del montículo.

Tabla I Se muestran los resultados de los diferentes experimentos. Las longitudes de onda son calculadas a la profundidad del montículo (aprox. 0.06 m).

Figura	Sedimento	No. máximo de olas que pasaron sobre el montículo y la dispersión fue aprox. a la dirección de los rayos.	T (seg.)	L (m)	θ_0
4.1	café	20	0.61	0.71	180°
4.2	café	24	0.61	0.71	208°
4.3	café	40	0.75	0.88	208°
4.4	café	53	0.75	0.88	208°
4.5	café	46	0.86	1.00	138°
4.6	café	40	0.86	1.00	206°
4.7	arena	1180	0.61	0.71	142°

4.2. - Discusiones.

Las primeras discusiones tratan de asuntos globales del trabajo, posteriormente se discuten detalles particulares de los experimentos.

En las figuras de resultados (4.1-4.7), se aprecia que los montículos no fueron tomados en cuenta como parte de la topografía; podría pensarse que este es un error en el que se esta incurriendo, pues los montículos producen cambios en la topografía y estos traen consigo cambios en la dirección del oleaje. La cuestión es que los montículos modifican sensiblemente los rayos en los instantes estrictamente iniciales del experimento (menores de 10 períodos de las olas incidentes), pues al dispersarse, la perturbación en la topografía es mucho menor y la modificación de los rayos en términos del patron general de direcciones que presentan, es despreciable.

Como el apilamiento de rocas porosas junto a las paredes de la maqueta no disipaba en forma total la energía del oleaje que incidía en los lados, podríamos entonces afirmar que ésto traería consigo la formación de otras ondas, que también influirían en la dispersión de los montículos, sin embargo, la influencia de estas nuevas ondas no es muy marcada, ya que cuando aparecen (tiempo

después de que el generador fue encendido), el motor es apagado para tomar una fotografía. Aquí no se está diciendo que cuando aparecen las ondas reflejadas entonces se apaga el motor, sino que el orden del experimento evita que tales ondas generadas (no deseados) influyan mucho. También se puede tomar en cuenta que las olas al llegar a la playa rompían disipando su energía y que visualmente eran estas olas generadas en la paleta las únicas prominentes. En consecuencia, los movimientos debidos a las ondas estacionarias por reflexión en las paredes tenían una influencia secundaria en los resultados mostrados.

Si observamos las figuras en las que los montículos fueron formados con café (figuras 4.1-4.6), podemos ver que la dispersión se aproxima a la dirección de los rayos, pero además el arrastre del café (transporte de sedimento) se da tanto pendiente arriba (hacia la playa) como pendiente abajo, esto se puede explicar si revisamos los diferentes esquemas de la figura 4.8, en los cuales se muestra la interpretación de como influyen las olas sobre los granos de café. El oleaje y el movimiento de agua consecuente tiene asociado cierta transmisión de energía y momento. La dispersión del montículo ocurre como consecuencia de la transferencia de momento y energía de volúmenes de agua a granos de café. Es importante señalar que los montículos están formados por muchos granos de café, y que la

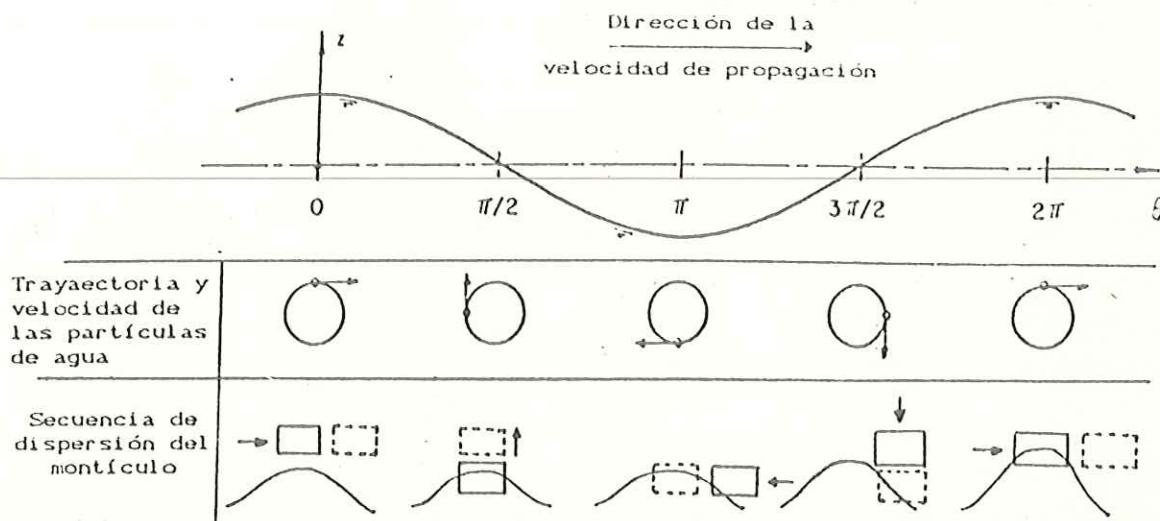


Figura 4.8 En los esquemas se muestra como las olas mueven los granos del montículo. Los rectángulos de líneas continuas al paso de las olas toman la posición de los rectángulos de líneas discontinuas.

dispersión asimétrica se lleva a cabo gracias a que unos granos del montículo limitan el movimiento de otros granos del mismo montículo.

A continuación se discuten asuntos particulares de los experimentos: En la figura 4.5 se pueden ver rayos delgados y gruesos, originándose los primeros en la parte plana de la paleta y los segundos en la esquina de esta, de tal manera que dicho sitio (esquina) funciona como una fuente puntual, lanzando rayos en todas direcciones (algunos influyen en la dispersión del montículo), de hecho todos los puntos de la paleta lanzan rayos en todas las direcciones, pero en las diferentes figuras solo se grafican los rayos que alcanzan primero al montículo.

De teoría lineal, uno esperaría que incrementos en la altura de la ola traigan consigo aumentos en la dispersión de los montículos. De las ecuaciones de rayo (13, 14 y 15 del capítulo II) se puede ver que la altura del oleaje no influye en la trayectoria de los rayos. Por otro lado, si se comparan las figuras 4.3 y 4.4 se puede uno dar cuenta que los resultados de este trabajo concuerdan con lo estipulado por los dos puntos anteriores. La trayectoria de los rayos es exactamente la misma en las dos secuencias, la diferencia es que en la secuencia de la figura 4.3 el oleaje tiene una altura entre un 30 y un 50 % mayor que en

4.4 y en consecuencia un alcance mayor de la dispersión.

Si se comparan las figuras 4.2 y 4.3, se aprecia que los rayos de la figura 4.3 tienen una mayor curvatura (como consecuencia de su mayor período) que los de la figura 4.2 y que aun así, la dirección de la dispersión del montículo es muy aproximada a la dirección de los rayos.

Comparando las figuras 4.1-4.6, se da uno cuenta que en los experimentos, además de variaciones de altura y período, existieron variaciones en la batimetría y en la posición de la paleta y que con todo y ello, la dirección de la dispersión de los montículos era muy aproximada a la de los rayos, existiendo solo la limitante en el tiempo, esto es, la dirección mencionada prevalece siempre que el montículo halla sido afectado por el oleaje durante tiempos de hasta el orden de 50 períodos de las olas incidentes.

La figura 4.7, muestra que la dispersión del montículo (formado con arena fina) sigue una dirección casi perpendicular a la de los rayos, de esta dirección de la dispersión no se puede decir mucho, ya que solo existió este experimento con dicho material y las comparaciones que se hicieran con las otras figuras (4.1-4.6) no tendrían suficiente en que basarse.

V. - CONCLUSIONES y RECOMENDACIONES.

5.1.- Conclusiones.

La dirección preferencial del arrastre ocasionado por oleaje sobre montículos de sedimentos ligeros (café) es muy aproximada a la dirección de los rayos.

La dirección preferencial prevelece solamente durante la parte inicial de la desintegración del montículo; en tiempos de hasta el orden de 50 períodos de las olas incidentes.

La desintegración de los montículos formados con sedimentos ligeros es tanto pendiente arriba como pendiente abajo.

5.2. - Recomendaciones.

Si en futuros trabajos se quiere tomar en cuenta las experiencias (resultados) de éste, sería entonces conveniente que se investigara como se puede determinar la trayectoria total que sigue el transporte de sedimento ocasionado por olas, ya que con teoría de rayos sólo se determina la trayectoria mencionada en su parte inicial.

Los resultados del presente trabajo aunque fructíferos son desalentadores, dan evidencia de que un estudio de la dispersión de sedimentos ligeros puede ser abordado con mayor detalle profundizando en la interacción que se desarrolla entre las velocidades del agua (calculables como una modificación paulatina con teoría de rayos y teoría lineal del oleaje) y los sedimentos. Los experimentos indican que desafortunadamente este propósito de mayor detalle sería aceptable solo para intervalos de tiempo muy cortos. Un propósito sobre la dispersión a largo plazo, calculado como extrapolación de los resultados de corto plazo resultaría totalmente erróneo.

LITERARURA CITADA

- Breeding J. E., K. C. Matson and N. Riahi, 1978. A method for calculating wave packet trajectories and wave heights. Technical Report, Department of Oceanography Florida State University. No. JEB-1. 99 págs.
- Einstein H. A., 1972. Sediment transport by wave action. Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., Vancouver, B. C. Canada. Vol. II: 933-952 pp.
- Fisher H.B., E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger and N. H. Brooks., 1979. Mixing in Inland and Coastal Waters. Academic Press. New York. 483 págs.
- Inman D. L. and R. A. Bagnold, 1963. Littoral Processes. In: M. N. Hill (ed). The Sea. Interscience, New York. 3: 529-33 pp.
- Kennedy J. F. and F. A. Locher, 1972. Sediment suspension by water waves. In: Meyer R. E. (ed). Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport. Academic Press. New York; 249-295 pp.
- Kinsman B., 1965. Wind Waves; Their Generation and Propagation on the Ocean Surface. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J. 676 págs.
- Komar P. D., 1971. The mechanics of sand transport on beaches. J. Geophys. Res., 76(3): 713-721.
- Komar P. D., D. L. Inman, 1970. Longshore sand transport on beaches. J. Geophys. Res., 75(30): 5914-5927
- Synge J. L., 1962. Water waves and hydrons. Science, 138: 13-15.