

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES OCEANOLÓGICAS



**SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LAS ECUACIONES DE
AGUAS SOMERAS, SIN VISCOSIDAD Y SIN ROTACIÓN,
EN UN CANAL CON BATIMETRÍA REPRESENTADA POR
UN PERFIL DEFINIDO POR FUNCIONES A TRAMOS**

TESIS

QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS NECESARIOS PARA
OBTENER EL GRADO DE

DOCTORADO EN OCEANOGRAFÍA COSTERA

PRESENTA

CATALINA INÉS CORTÉS VÉLEZ

DIRECTOR: RAFAEL HERNÁNDEZ WALLS
CO-DIRECTORA: BEATRIZ MARTÍN ATIENZA

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MÉXICO

2022

Resumen

Se presentan las soluciones analíticas para la elevación y la velocidad de las ecuaciones de aguas someras linealizadas, sin rotación y sin viscosidad, en un canal rectangular con fondo curvo. La metodología se basa en modelar la batimetría mediante una función analítica y considera las soluciones como series de potencias generalizadas. Se examinan dos tipos de forma batimétrica, una de ellas se modela a partir de una función cuadrática y la segunda se modela a partir de una función continua a tramos, cada segmento está representado por una función cuadrática. Las condiciones de frontera tipo Robin son impuestas para hallar la solución en ambos escenarios. En la batimetría modelada por una función cuadrática se verifica que las soluciones de elevación y velocidad cumplan con la teoría de ondas y que sean convergentes alternantes. Se observa que batimetrías con formas de escalón o cambios muy bruscos en su pendiente no pueden ser modelados por una función cuadrática. En la batimetría modelada por una función continua a tramos se determinan las soluciones de la elevación y la velocidad como serie de potencias, además se consideran las condiciones necesarias para que dicha función sea continua para los tramos de funciones cuadráticas. Lo anterior permitió identificar que abordar el problema de una función continua a tramos, por un número finito de funciones cuadráticas acopladas, es posible y que puede ser abordado en estudios futuros.

Palabras clave: Ecuaciones de aguas someras, ecuaciones en derivadas parciales, series de potencia, modelo analítico, batimetría.

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES OCEANOLÓGICAS
POSGRADO EN OCEANOGRAFÍA COSTERA

**SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LAS ECUACIONES DE AGUAS
SOMERAS, SIN VISCOSIDAD Y SIN ROTACIÓN, EN UN CANAL CON
BATIMETRÍA REPRESENTADA POR UN PERFÍL DEFINIDO POR
FUNCIONES A TRAMOS**

TESIS
QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS NECESARIOS PARA
OBTENER EL GRADO DE

DOCTORA EN CIENCIAS EN OCEANOGRAFÍA COSTERA

PRESENTA

CATALINA INÉS CORTÉS VÉLEZ

APROBADA POR:



DR. RAFAEL HERNANDEZ WALLS

DIRECTOR DE TESIS



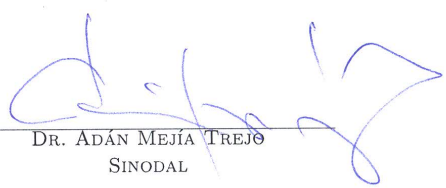
DRA. BEATRIZ MARTÍN ATIENZA
CODIRECTORA



DRA. ANA LAURA FLORES MORALES
SINODAL



DRA. SELENE SOLORZA CALDERÓN
SINODAL



DR. ADÁN MEJÍA TREJO
SINODAL

A
2016-2021
Ensenada, B. C.
México

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento es por mi vida aún vigente, gracias a ella pude estar en cuerpo, mente y alma en este lapso para concluir ese gran objetivo que me trajo a Ensenada. Agradezco los momentos felices, de sosiego y expectativa porque con ellos pude alimentar los momentos lúgubres que en algún instante me abrazaron, aunque sin esta obscuridad no hubiese llegado al final, aprendí de ella a hacerme más fuerte y a enfrentar aquellos miedos que me incitaban a la turbación.

Agradezco de todo corazón a mis padres, José y Oliva, hermana, Lindy, y sobrino, Miguelángel, por estar presentes en la distancia y la comprensión por mi ausencia en los mejores momentos de sus vidas y en aquellos donde la presencia era prioritaria.

Agradezco de todo corazón a la familia Arce Gómez, en especial a la Pachi, Minie y Poncho, por acogerme en su lecho familiar como una hija más y brindarme su amor desmesurado.

Agradezco a mis directores, Rafael y Beatriz, por la osadía de acompañarme en mi formación doctoral, me siento completamente identificada con su forma de trabajar y de los cuales aprendí que la calidez humana también hace parte de la academia, gracias por su paciencia. Gracias también a mi comité de tesis, Dr. Adán, Dra. Ana Laura y Dra. Selene.

Infinitas gracias doy a Angélica, Lorena, Enrique, Fernando, Esteban y Santa, por todo el tiempo estar acompañándome y pendientes de mí, por su infinita solidaridad en los momentos más duros de mi formación y por enseñarme que en la universidad también se puede hacer familia.

Agradezco a amistades, colegas, compañeros y vecinos por hacer parte de este cuento maravilloso y que espero seguir escribiendo cada día con mayor alegría.

Y no menos de agradecer a *El Vergel – Alimentos Orgánicos y Artesanales*, que nació de la necesidad, fue creciendo y ahora es un proyecto de vida, lugar de regocijo en el que reconocí mis pasiones y fortalecí aquellos puntos de debilidad, me ha enseñado a entender cómo se mueve el mundo y le da un matiz más colorido a mi día a día.

*Muy cerca de mi ocaso, yo te bendigo, vida,
porque nunca me diste ni esperanza fallida,
ni trabajos injustos, ni pena inmerecida;*

*porque veo al final de mi rudo camino
que yo fui el arquitecto de mi propio destino;*

*que si extraje las mieles o la hiel de las cosas,
fue porque en ellas puse hiel o mieles sabrosas:
cuando planté rosales, coseché siempre rosas.*

*...Cierto, a mis lozanías va a seguir el invierno:
¡mas tú no me dijiste que mayo fuese eterno!*

*Hallé sin duda largas las noches de mis penas;
mas no me prometiste tan sólo noches buenas;
y en cambio tuve algunas santamente serenas...*

*Amé, fui amado, el sol acarició mi faz.
¡Vida, nada me debes! ¡Vida, estamos en paz!*

En Paz
Elevación, 1916
Amado Nervo

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuaciones de aguas someras	5
3. Batimetría modelada por una función cuadrática	10
3.1. Elevación	13
3.2. Velocidad	22
3.3. Condiciones de frontera	30
4. Batimetría modelada por dos funciones cuadráticas acopladas	33
4.1. Curva 1	38
4.1.1. Elevación	39
4.1.2. Velocidad	47
4.2. Curva 2	55
4.2.1. Elevación	56
4.2.2. Velocidad	65
4.3. Condiciones de frontera	74
5. Análisis del modelo	83
6. Conclusiones	93
6.1. Trabajo a futuro	94
7. Primer artículo	95

8. Segundo artículo	105
----------------------------	------------

Bibliografía	122
---------------------	------------

Capítulo 1

Introducción

Es de suma importancia realizar estudios oceanográficos en las zonas costeras debido a que es allí donde se concentran las grandes áreas metropolitanas y los impactos en estas zonas pueden significar graves consecuencias en la población, la economía y las obras civiles, como lo afirma el programa de Física Oceanográfica financiado por la Fundación Nacional de Ciencias de Estados Unidos [Fringer et al., 2019]. En dicho programa se alude a la necesidad de reducir la subjetividad y mejorar la reproducibilidad en la modelación de los procesos físicos en el océano costero, haciendo énfasis en que la modelación de la batimetría de zonas costeras permite entender y determinar cambios debido a diferentes procesos físicos e hidrológicos, lo que se puede utilizar para estudios de conservación de sistemas naturales y de plataformas costeras. De igual forma Li et al., (2018) y Gao et al., (2019) afirman que la batimetría es uno de los factores físicos más importantes en la propagación de olas en aguas someras, debido a que, un cambio en este representa un cambio en la frecuencia y en la longitud de onda de los modos naturales de oscilación.

Es por ello que entender y modelar los flujos de aguas someras, delimitadas por fronteras topográficas, es de gran importancia para comprender la dinámica y los efectos de resonancia de algunos ecosistemas naturales como presas, lagos, lagunas y ambientes costeros [Hernandez-Walls et al., 2017].

Aunque diversos estudios han permitido encontrar soluciones numéricas a las ecuaciones de aguas poco profundas, indicando como puede ser la solución a problemas hidrológicos y ambientales, algunos de ellos aún

carecen de un modelo analítico para ser validados, puesto que el grado de dificultad que presentan hace difícil esta posibilidad [Delestre et al., 2013].

A la fecha, se han publicado varios modelos analíticos de flujos de aguas someras linealizados y sin rotación, con características específicas de la batimetría, permitiendo establecer los modos resonantes de la zona de estudio; entre las batimetrías que cuentan con un modelo analítico se encuentra el fondo plano y el inclinado [Hernandez-Walls et al., 2017], el fondo exponencial [Wang et al., 2015], el fondo parabólico [Shao et al., 2016] y el fondo coseno hiperbólico cuadrado [Wang et al., 2014].

Los modelos analíticos mencionados usan modelos de funciones matemáticas complejas [Olver et al., 1986], por ejemplo, para un puerto de forma rectangular, Wang et al. (2014) utilizan la ecuación diferencial de Legendre y consideran un fondo marino coseno hiperbólico cuadrado, y Wang et al. (2015) usan la ecuación de Bessel y consideran un fondo marino exponencial. Los modelos analíticos planteados por Hernandez-Walls et al. (2017) usan diferencias finitas para generar un sistema tridiagonal de ecuaciones que simplifica considerablemente la solución numérica usando una ecuación recursiva.

Los modelos analíticos constituyen una herramienta de gran valor en la ciencia de la modelación, ya que permiten obtener una sólida comprensión física de la dinámica de las ondas y llevar a cabo investigaciones paramétricas sobre la influencia de los principales parámetros del sistema en el ascenso máximo de las ondas [Renzi and Sammarco, 2016].

Encontrar una función sencilla que describa la batimetría del fondo marino es uno de los problemas más complejos en el área de modelación, ya que no hay funciones que se adapten exactamente a la forma encontrada en la naturaleza. A pesar de dicha dificultad, en esta tesis se explora la posibilidad de trabajar con una serie de funciones cuadráticas acopladas, de tal forma que nos permita definir una función continua a tramos, cuyos tramos sean un conjunto finito de funciones cuadráticas y puedan describir un fondo marino complejo.

El problema de encontrar una solución analítica, que se reduzca a una forma sencilla, para un sistema de ecuaciones de aguas someras, se abordó en dos partes. La primera parte corresponde al caso donde la batimetría es modelada por una sola función cuadrática. Para dicha función se han calculado las soluciones de las ecuaciones diferenciales para aguas someras,

a partir de las condiciones de frontera tipo Robin [Ragab and Fayed, 2018]. Las soluciones para la elevación y la velocidad son deducidas a partir de series de potencia cuya convergencia determina la batimetría que puede ser descrita por la solución encontrada. El segundo punto parte de los hallazgos y resultados obtenidos con una sola función cuadrática, se aborda partiendo de dos funciones cuadráticas acopladas, conservando las condiciones de frontera y adicionando a estas condiciones aquellas que permiten la continuidad entre los diferentes puntos de la función a tramos, es decir, fijar ciertas condiciones en el punto de intersección entre los dos tramos de batimetría, descritos por funciones cuadráticas, que permite que la función a tramos sea continua. De igual forma se plantean las soluciones para la elevación y la velocidad como serie de potencias.

La tesis está dividida en seis capítulos. El capítulo 1 corresponde a la introducción y presentación del problema a desarrollar; el capítulo 2 concierne al desacople de las ecuaciones diferenciales parciales de aguas someras linealizadas, sin rotación y sin viscosidad, de tal forma que se puedan determinar las soluciones para la velocidad y la elevación separadamente. Adicional a esto se consideran las condiciones de frontera que limitan el problema de estudio y que deben ser satisfechas por las soluciones.

El capítulo 3 muestra las soluciones de la elevación y la velocidad para el sistema de ecuaciones diferenciales de aguas someras, sin rotación y sin viscosidad, cuando la batimetría es descrita por una función cuadrática y por tres puntos que definen esta función, teniendo en cuenta una profundidad inicial H_0 para el canal rectangular y la elevación con la que viene la onda desde el mar abierto. La ecuación cuadrática se define a partir de tres puntos que están sobre el lecho marino. Las soluciones para la elevación y la velocidad son series de potencias alternantes infinitas. En este capítulo se presentan todos los cálculos matemáticos para llegar a las soluciones.

El capítulo 4 determina las soluciones de la elevación y la velocidad para el sistema de ecuaciones diferenciales de aguas someras cuando la batimetría es descrita por dos funciones cuadráticas acopladas; cada función cuadrática es definida por tres puntos en el fondo batimétrico y el tercer punto de la primera sección y el primer punto de la segunda sección coinciden en un punto común que debe cumplir ciertas condiciones para satisfacer la continuidad de la función que describe todo el fondo batimétrico. Las soluciones para la elevación y la velocidad son representadas como serie

de potencias alternantes infinitas. En este capítulo se presentan todos los cálculos matemáticos requeridos para llegar a las soluciones.

En el capítulo 5 se analiza la convergencia para las soluciones encontradas en el capítulo tres, a partir de la definición de aguas someras relacionada con la velocidad de las ondas a cualquier profundidad, que cumpla las proporciones para los valores considerados en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales iniciales. También se analiza la convergencia de las series de potencias alternantes infinitas que representan las soluciones para la elevación y la velocidad, para diferentes batimetrías del espacio de convergencia.

Por último, el capítulo 6 muestra las conclusiones a las que se llega en el presente trabajo, de acuerdo con su impacto y los futuros estudios que se derivan de este.

Capítulo 2

Ecuaciones de aguas someras

Las ecuaciones diferenciales estudiadas en este capítulo, parten de las ecuaciones de movimiento para un fluido compresible en una tierra en rotación, representado en coordenadas cartesianas con el eje z positivo hacia arriba [Neumann and Pierson, 1966] para lo cual se desprecia la rotación y la viscosidad, obteniendo las ecuaciones (2.1) y (2.2).

La teoría de aguas someras linealizadas, sin viscosidad y sin rotación, y con el movimiento del fluido invariante en la dirección y , se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas [Tinti, 1980]:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = -H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \hat{u} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Donde $\hat{u}(x, t)$ es el flujo de velocidad promedio que varía con la posición y el tiempo; $\hat{\eta}(x, t)$ es la elevación del nivel medio del mar que cambia con respecto a la posición y el tiempo; $H(x)$ representa la topografía del fondo y g es la aceleración de la gravedad (ver Fig. 2.1). Se define el sistema de coordenadas x, z como se muestra en la figura 2.1 en la cual se ejemplifica el movimiento, en dirección x , de una onda armónica simple.

Para poder resolver el sistema de ecuaciones (2.1) y (2.2) primeramente lo desacoplamos. El primer paso en el proceso de desacoplamiento es derivar

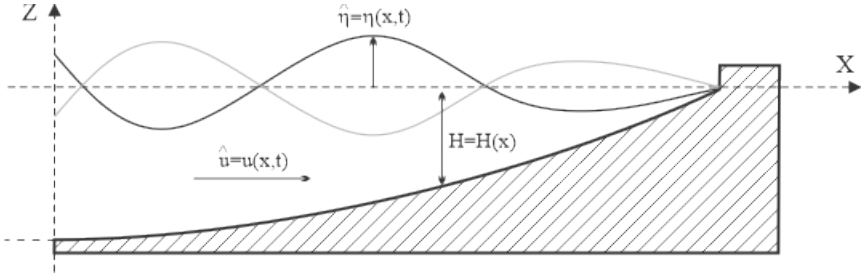


Figura 2.1: Modelo de un fluido, en un canal de aguas someras. Intersección al océano, por la izquierda del canal, línea de costa, por la derecha del canal.

la ecuación (2.1) con respecto al tiempo,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} \right). \quad (2.3)$$

Posteriormente la Ec. (2.2) se sustituye en la Ec.(2.3) para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left(-H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \hat{u} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= g \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{u} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= g \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + H \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right) + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

por lo que, la ecuacion diferencial para la velocidad es,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = g \left(H \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right). \quad (2.5)$$

Siguiendo los mismos pasos realizados anteriormente pero aplicados a la ecuación (2.2) y tomando en cuenta que $H(x)$ no depende del tiempo, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= -H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Posteriormente la Ec. (2.1) se sustituye en la Ec. (2.6), para obtener

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2} = -H \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) - \left(-g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right), \quad (2.7)$$

por lo que, la ecuación diferencial para la elevación es

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2} = g \left(H \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \quad (2.8)$$

Partiendo de las ecuaciones (2.5) y (2.8) teniendo en cuenta que la elevación y la velocidad pueden ser representados por una onda plana con frecuencia angular ω , y cuya amplitud solo depende de la posición tendremos que

$$\hat{u}(x, t) = u(x)e^{i\omega t}, \quad (2.9)$$

$$\hat{\eta}(x, t) = \eta(x)e^{i\omega t}. \quad (2.10)$$

Usando el método de separación de variables para las ecuaciones (2.9) en (2.5), y dado que hay un cambio de dominio, del temporal al de frecuencias, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (u(x)e^{i\omega t})}{\partial t^2} &= g \left(H \frac{\partial^2 (u(x)e^{i\omega t})}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial (u(x)e^{i\omega t})}{\partial x} + (u(x)e^{i\omega t}) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \\ u(i\omega)^2 e^{i\omega t} &= g e^{i\omega t} \left(H \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dH}{dx} \frac{du}{dx} + u \frac{d^2 H}{dx^2} \right) \\ -\frac{u\omega^2}{g} &= H \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dH}{dx} \frac{du}{dx} + u \frac{d^2 H}{dx^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Al igual que hicimos para obtener la ecuación para la velocidad $u(x)$, reemplazamos la función (2.10) en la ecuación (2.8) obteniendo

$$\frac{\partial^2 (\eta(x)e^{i\omega t})}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 (\eta(x)e^{i\omega t})}{\partial x^2} + g \frac{\partial (\eta(x)e^{i\omega t})}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \eta(i\omega)^2 e^{i\omega t} &= gH \frac{d^2 \eta}{dx^2} e^{i\omega t} + g \frac{d\eta}{dx} e^{i\omega t} \frac{dH}{dx} \\ -\frac{\eta\omega^2}{g} &= H \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{d\eta}{dx} \frac{dH}{dx}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así se tiene el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas para las ecuaciones de aguas someras

$$-\frac{\omega^2}{g}\eta(x) = H\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{dH}{dx}\frac{d\eta(x)}{dx} \quad (2.14)$$

$$-\frac{\omega^2}{g}u(x) = 2\frac{dH}{dx}\frac{du(x)}{dx} + H\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x)\frac{d^2H}{dx^2}. \quad (2.15)$$

Para las funciones $\eta(x)$ y $u(x)$ se establecen las condiciones de frontera Robin que deben ser satisfechas [Ragab and Fayed, 2018],

$$x = a : \quad \gamma_1 \frac{df}{dx} + \beta_1 f = \alpha_1, \quad (2.16)$$

$$x = b : \quad \gamma_2 \frac{df}{dx} + \beta_2 f = \alpha_2, \quad (2.17)$$

donde, para nuestro caso de estudio, a toma el valor de cero mientras que b toma el valor de 1. En la tabla 2.1 se pueden observar los valores para los demás parámetros.

Función	x	γ	β	α
Elevación	0	0	1	η_0
	1	1	0	0
Velocidad	0	0	1	$\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}$
	1	0	1	0

Tabla 2.1: Condiciones de frontera de Robin para el canal de aguas someras, sin rotación y sin viscosidad.

De acuerdo con las condiciones de frontera descritas para un canal de aguas someras, se interpreta que la elevación de la onda que viene de mar abierto incide con una amplitud determinada, $\eta(0) = \eta_0$, que luego se refleja completamente en la línea de costa pero permitiéndole el movimiento vertical en la pared del lado derecho, que en forma matemática se escribe como $\frac{d\eta}{dx}(1) = 0$; la velocidad de la columna de agua que viene de mar abierto la podemos representar en función de la elevación, la profundidad del canal en este punto, y la aceleración de la gravedad, por la ecuación

$u(0) = \eta_0 \sqrt{g/H_0}$ y una vez que llega a la línea de costa el flujo no puede continuar por lo que la condición de frontera para la velocidad debe ser $u(1) = 0$, permitiendo que la onda se refleje sin pérdida de energía.

Es así como se establecen las condiciones de frontera, para la elevación y la velocidad, en un canal de aguas someras, que permitirán la solución analítica del problema en el siguiente Capítulo 3.

Capítulo 3

Batimetría modelada por una función cuadrática

En el presente capítulo se consideran tres puntos de una batimetría con forma curva que puede ser modelada por una ecuación cuadrática, esta función es determinante en la obtención de las soluciones para la elevación y la velocidad de las ecuaciones de aguas someras.

Este capítulo se desarrolla en tres subsecciones que corresponden a todos los cálculos para obtener la solución de la elevación, sección 3.1, la solución de la velocidad, sección 3.2, y el uso de las condiciones de frontera, sección 3.3, que permiten determinar las soluciones en función de serie de potencias alternantes infinitas y sucesiones de una manera amplia y detallada. Una versión más simplificada de este desarrollo puede ser revisada en el Capítulo 7.

La curva de la figura 3.1 se puede describir por la ecuación general

$$H(x) = A + Bx + Cx^2, \quad (3.1)$$

cuya forma particular se puede determinar a partir de los tres puntos

$$\begin{aligned} P_0(0, H_0), \\ P_1(r, sH_0), \quad \forall r, s \in [0, 1], \\ P_2(1, 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Existen curvas cuya forma sera determinada por un valor de $s > 1$, para

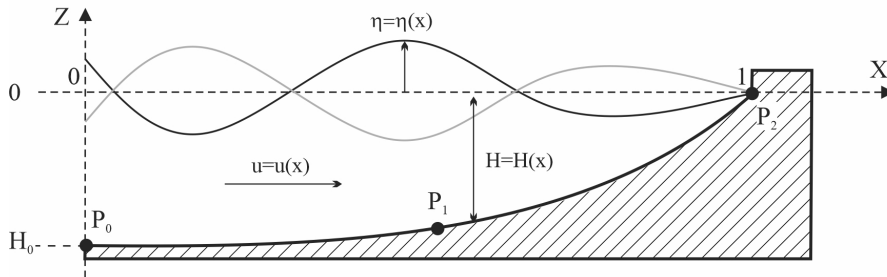


Figura 3.1: Modelo de aguas someras para un fondo batimétrico ajustado por una función cuadrática. La función cuadrática es definida por los puntos P_0 , P_1 y P_2 .

el interés particular de nuestro análisis estamos tomando solo los valores donde $s \in [0, 1]$.

De acuerdo con la ecuación (3.1) y el conjunto de puntos (3.2), resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} H_0 &= A, \\ sH_0 &= A + Br + Cr^2, \\ 0 &= A + B + C. \end{aligned} \tag{3.3}$$

El anterior sistema de ecuaciones lo solucionamos usando el método de Cramer, tomando el sistema matricial $Mx = N$. Así, el sistema escrito en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ sH_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

tal que

$$M_A = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 \\ sH_0 & r & r^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & H_0 & 0 \\ 1 & sH_0 & r^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & H_0 \\ 1 & r & sH_0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

se calculan los determinantes para las matrices M , M_A , M_B y M_C para luego calcular los coeficientes A , B y C .

$$\begin{aligned} A &= \frac{\text{Det}(M_A)}{\text{Det}(M)} = \frac{H_0 r(1-r)}{r(1-r)} = H_0, \\ B &= \frac{\text{Det}(M_B)}{\text{Det}(M)} = \frac{sH_0 - H_0(1-r^2)}{r(1-r)} = \frac{H_0(s-1+r^2)}{r(1-r)}, \\ C &= \frac{\text{Det}(M_C)}{\text{Det}(M)} = \frac{H_0(1-r) - sH_0}{r(1-r)} = \frac{H_0(1-r-s)}{r(1-r)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

tal que

$$A = H_0, \quad B = H_0\nu, \quad C = H_0\tau, \quad (3.9)$$

donde

$$\nu = \frac{(s-1+r^2)}{r(1-r)}, \quad \tau = \frac{(1-r-s)}{r(1-r)}, \quad (3.10)$$

de esta forma obtenemos la ecuación particular, para la ecuación general (3.1)

$$H(x) = H_0(1 + \nu x + \tau x^2). \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras

$$-\frac{\omega^2}{g}\eta = H \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{dH}{dx} \frac{d\eta}{dx}, \quad (3.12)$$

$$-\frac{\omega^2}{g}u = 2 \frac{dH}{dx} \frac{du}{dx} + H \frac{d^2u}{dx^2} + u \frac{d^2H}{dx^2}, \quad (3.13)$$

y reemplazando en este sistema la batimetría descrita por la ecuación

(3.11), se tiene que

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g}\eta &= H_0(1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + H_0(\nu + 2\tau x)\frac{d\eta}{dx} \\ &= (1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu + 2\tau x)\frac{d\eta}{dx}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g}u &= H_0(1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2H_0(\nu + 2\tau x)\frac{du}{dx} + 2\tau H_0u \\ &= (1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu + 2\tau x)\frac{du}{dx} + 2\tau u, \end{aligned} \quad (3.15)$$

teniendo en cuenta que el número de onda, para la onda que viene de mar abierto, que cumple con las condiciones de frontera impuestas, corresponde a $k^2 = \omega^2/gH_0$, se obtiene el sistema reducido

$$-k^2\eta = (1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu + 2\tau x)\frac{d\eta}{dx}, \quad (3.16)$$

$$-k^2u = (1 + \nu x + \tau x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu + 2\tau x)\frac{du}{dx} + 2\tau u. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden que se utilizarán para encontrar las soluciones para la velocidad y la elevación, respectivamente, del problema descrito.

Para encontrar las soluciones de la elevación y la velocidad, se proponen serie de potencias para describir la elevación y la velocidad, ya que este tipo de funciones son continuas y derivables de cualquier orden, y corresponden a la serie de Taylor de cualquier función conocida.

3.1. Elevación

Una serie de potencias que represente a la elevación puede ser

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (3.18)$$

las respectivas derivadas de la elevación, con respecto a la variable x , son

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad (3.20)$$

que, dichas derivadas, al ser reemplazadas en la ecuación (3.16) se obtiene

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (1 + \nu x + \tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (\nu + 2\tau x) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0. \quad (3.21)$$

Luego, al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupar los términos semejantes en x , se obtiene que

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2\tau \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \\ \nu \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria,

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2\tau \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \\ \nu \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \nu \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \\ \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dado que, para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son

nulos, se tiene que

$$\begin{aligned}
 k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2\tau \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \\
 \nu \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \\
 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, teniendo lo siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n+1)\tau + k^2) a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1} + (n+2)(n+1) a_{n+2}] x^n = 0, \tag{3.25}$$

lo que corresponde a tener

$$(n(n+1)\tau + k^2) a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1} + (n+2)(n+1) a_{n+2} = 0.$$

De la anterior ecuación despejamos a_{n+2} y se obtiene la sucesión

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [(n(n+1)\tau + k^2) a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1}]. \tag{3.26}$$

Para determinar la solución para la elevación, es necesario contemplar dos casos donde a_0 y a_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas formarán la solución general para la elevación, esto es,

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x). \tag{3.27}$$

CASO 1: $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.26), dada por

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [(n(n+1)\tau + k^2) a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1}],$$

y la condición $a_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{(2)(1)} [(k^2) a_0] \\ &= -a_0 \left[\frac{k^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si sustituimos $n = 1$ y utilizamos la condición $a_1 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{(1+2)(1+1)} [(1+1)^2 \nu a_2], \\ &= \frac{-1}{(3)(2)} [(2)^2 \nu a_2], \\ &= \frac{-1}{6} [(2)^2 \nu \left[-\frac{a_0}{2} (k^2) \right]], \\ &= a_0 \left[\frac{\nu k^2}{3} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{k^2}{2}, \\ W_3 &= \nu \frac{k^2}{3}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 W_2, \\ a_3 &= a_0 W_3. \end{aligned}$$

Si consedarmos que $n = 2$,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{(2+2)(2+1)} [(2(2+1)\tau + k^2) a_2 + (2+1)^2 \nu a_3] \\ &= \frac{-1}{12} [(6\tau + k^2) [-a_0 W_2] + 9\nu [a_0 W_3]] \\ &= -a_0 \left[-\frac{(6\tau + k^2)}{12} W_2 + \frac{3}{4} \nu W_3 \right] \\ &= -a_0 W_4. \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{-1}{(3+2)(3+1)} [(3(3+1)\tau + k^2) a_3 + (3+1)^2 \nu a_4] \\
 &= \frac{-1}{20} [(12\tau + k^2) [a_0 W_3] + 16\nu [-a_0 W_4]] \\
 &= a_0 \left[-\frac{(12\tau + k^2)}{20} W_3 + \frac{4}{5} \nu W_4 \right] \\
 &= a_0 W_5.
 \end{aligned}$$

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 a_6 &= \frac{-1}{(4+2)(4+1)} [(4(4+1)\tau + k^2) a_4 + (4+1)^2 \nu a_5] \\
 &= \frac{-1}{30} [(20\tau + k^2) [-a_0 W_4] + 25\nu [a_0 W_5]] \\
 &= -a_0 \left[-\frac{(20\tau + k^2)}{30} W_4 + \frac{5}{6} \nu W_5 \right] \\
 &= -a_0 W_6.
 \end{aligned}$$

Para $n = 5$,

$$\begin{aligned}
 a_7 &= \frac{-1}{(5+2)(5+1)} [(5(5+1)\tau + k^2) a_5 + (5+1)^2 \nu a_6] \\
 &= \frac{-1}{42} [(30\tau + k^2) [a_0 W_5] + 36\nu [-a_0 W_6]] \\
 &= a_0 \left[-\frac{(30\tau + k^2)}{42} W_5 + \frac{6}{7} \nu W_6 \right] \\
 &= a_0 W_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar siguiente la

sucesión

$$\begin{aligned}
 W_0 &= -1, \\
 W_1 &= 0, \\
 W_2 &= \frac{k^2}{2}, \\
 W_3 &= \nu \frac{k^2}{3}, \\
 &\vdots \\
 W_n &= \frac{(n-1)}{n} \nu W_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau + k^2}{n(n-1)} W_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$$a_n = a_0(-1)^{n+1}W_n \quad \forall n \geq 1,$$

De tal forma que para la elevación, cuando $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
 &= a_0 x^0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
 &= a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_0(-1)^{n+1}W_n x^n \\
 &= a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}W_n x^n \right]. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

CASO 2: $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.26) dada por

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \left[(n(n+1)\tau + k^2) a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1} \right], \tag{3.29}$$

y la condición $a_0 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{(2)(1)} [(1)^2 \nu a_1] \\ &= -a_1 \left[\frac{\nu}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si sustituimos $n = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{(1+2)(1+1)} [((1)(1+1)\tau + k^2) a_1 + (1+1)^2 \nu a_2] \\ &= \frac{-1}{6} [(2\tau + k^2) a_1 + 4\nu [-a_1 \left(\frac{\nu}{2} \right)]] \\ &= a_1 \left[-\frac{(2\tau + k^2)}{6} + \frac{\nu^2}{3} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\nu}{2}, \\ V_3 &= -\frac{(2\tau + k^2)}{6} + \frac{\nu^2}{3}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 V_2, \\ a_3 &= a_1 V_3. \end{aligned}$$

Si consideramos que $n = 2$,

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-1}{(2+2)(2+1)} [(2(2+1)\tau + k^2) a_2 + (2+1)^2 \nu a_3] \\ &= \frac{-1}{12} [(6\tau + k^2) [-a_1 V_2] + 9\nu [a_1 V_3]] \\ &= -a_1 \left[-\frac{(6\tau + k^2)}{12} V_2 + \frac{3}{4} \nu V_3 \right] \\ &= -a_1 V_4. \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{-1}{(3+2)(3+1)} [(3(3+1)\tau + k^2) a_3 + (3+1)^2 \nu a_4] \\
 &= \frac{-1}{20} [(12\tau + k^2) [a_1 V_3] + 16\nu [-a_1 V_4]] \\
 &= a_1 \left[-\frac{(12\tau + k^2)}{20} V_3 + \frac{4}{5} \nu V_4 \right] \\
 &= a_1 V_5.
 \end{aligned}$$

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 a_6 &= \frac{-1}{(4+2)(4+1)} [(4(4+1)\tau + k^2) a_4 + (4+1)^2 \nu a_5] \\
 &= \frac{-1}{30} [(20\tau + k^2) [-a_1 V_4] + 25\nu [a_1 V_5]] \\
 &= -a_1 \left[\frac{(20\tau + k^2)}{30} V_4 + \frac{5}{6} \nu V_5 \right] \\
 &= -a_1 V_6.
 \end{aligned}$$

Para $n = 5$,

$$\begin{aligned}
 a_7 &= \frac{-1}{(5+2)(5+1)} [(5(5+1)\tau + k^2) a_5 + (5+1)^2 \nu a_6] \\
 &= \frac{-1}{42} [(30\tau + k^2) [a_1 V_5] + 36\nu [-a_1 V_6]] \\
 &= a_1 \left[-\frac{(30\tau + k^2)}{42} V_5 + \frac{6}{7} \nu V_6 \right] \\
 &= a_1 V_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente

sucesión,

$$V_0 = 0,$$

$$V_1 = 1,$$

$$V_2 = \frac{\nu}{2},$$

$$V_3 = -\frac{(2\tau + k^2)}{6} + \frac{\nu^2}{3},$$

$$\vdots$$

$$V_n = \frac{n-1}{n}\nu V_{n-1} - \left[\frac{(n-1)(n-2)\tau + k^2}{n(n-1)} \right] V_{n-2} \quad \forall n \geq 2,$$

y

$$a_n = (-1)^{n+1}a_1 V_n \quad \forall n \geq 1,$$

de tal forma que para la elevación, cuando $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 x^0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} a_1 V_n x^n \\ &= a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dado que la solución general de la elevación esta dada por la ecuación (3.27), al sustituir en ella las ecuaciones (3.28) y (3.30) se tiene

$$\eta(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]. \quad (3.31)$$

3.2. Velocidad

Una serie de potencias para la velocidad puede ser de la forma

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad (3.32)$$

las respectivas derivadas de la velocidad, con respecto a la variable x , son

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}, \quad (3.34)$$

Si se sustituyen las derivadas anteriores en la ecuación (3.17) se obtiene

$$\begin{aligned} & (1 + \nu x + \tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + \\ & 2(\nu + 2\tau x) \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + (2\tau + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Luego, al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupar los términos semejantes en x , se obtiene que

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + 4\tau \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n + (2\tau + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \\ & \nu \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio

de variable en el índice de la sumatoria,

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + 4\tau \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n + (2\tau + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \\ & \nu \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)b_{n+1} x^n + 2\nu \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)b_{n+1} x^n + \\ & \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2} x^n = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dado que para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos, se tiene que

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + 4\tau \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n + (2\tau + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \\ & \nu \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)b_{n+1} x^n + 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1} x^n + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2} x^n = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, teniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [((n+2)(n+1)\tau + k^2)b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1}] x^n + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)b_{n+2}] x^n = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

lo que corresponde a tener

$$((n+2)(n+1)\tau + k^2)b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1} + (n+2)(n+1)b_{n+2} = 0.$$

De la anterior ecuación despejamos b_{n+2} y se obtiene la sucesión

$$b_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [((n+2)(n+1)\tau + k^2)b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1}]. \quad (3.40)$$

Para determinar la solución de la velocidad es necesario contemplar dos casos donde b_0 y b_1 tendran valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la velocidad, esto es,

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x). \quad (3.41)$$

CASO 1: $b_0 \neq 0$ y $b_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.40), dada por

$$b_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [((n+2)(n+1)\tau + k^2)b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1}],$$

y la condición $b_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{-1}{(2)(1)} [((2)(1)\tau + k^2)b_0] \\ &= -b_0 \left[\frac{2\tau + k^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, con la condición $b_1 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{-1}{(1+2)(1+1)} [(1+2)(1+1)\nu b_2] \\ &= -\nu \left[-b_0 \left[\frac{2\tau + k^2}{2} \right] \right] \\ &= b_0 \left[\frac{(2\tau + k^2)}{2} \nu \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{2\tau + k^2}{2}, \\ F_3 &= \frac{(2\tau + k^2)}{2} \nu, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} b_2 &= -b_0 F_2, \\ b_3 &= b_0 F_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
 b_4 &= \frac{-1}{(2+2)(2+1)} [((2+2)(2+1)\tau + k^2)b_2 + (2+2)(2+1)\nu b_3] \\
 &= \frac{-1}{12} [(12\tau + k^2) [-b_0F_2] + 12\nu [b_0F_3]] \\
 &= -b_0 \left[-\frac{(12\tau + k^2)}{12} F_2 + \nu F_3 \right] \\
 &= -b_0F_4.
 \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 b_5 &= \frac{-1}{(3+2)(3+1)} [((3+2)(3+1)\tau + k^2)b_3 + (3+2)(3+1)\nu b_4] \\
 &= \frac{-1}{20} [(20\tau + k^2) [b_0F_3] + 20\nu [-b_0F_4]] \\
 &= b_0 \left[-\frac{(20\tau + k^2)}{20} F_3 + \nu F_4 \right] \\
 &= b_0F_5.
 \end{aligned}$$

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 b_6 &= \frac{-1}{(4+2)(4+1)} [((4+2)(4+1)\tau + k^2)b_4 + (4+2)(4+1)\nu b_5] \\
 &= \frac{-1}{30} [(30\tau + k^2) [-b_0F_4] + 30\nu [b_0F_5]] \\
 &= -b_0 \left[-\frac{(30\tau + k^2)}{30} F_4 + \nu F_5 \right] \\
 &= -b_0F_6.
 \end{aligned}$$

Para $n = 5$,

$$\begin{aligned}
 b_7 &= \frac{-1}{(5+2)(5+1)} [((5+2)(5+1)\tau + k^2)b_5 + (5+2)(5+1)\nu b_6], \\
 &= \frac{-1}{42} [(42\tau + k^2) [b_0F_5] + 42\nu [-b_0F_6]] \\
 &= b_0 \left[-\frac{(42\tau + k^2)}{42} F_5 + \nu F_6 \right] \\
 &= b_0F_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se determina la sucesión,

$$\begin{aligned}
 F_0 &= -1, \\
 F_1 &= 0, \\
 F_2 &= \frac{2\tau + k^2}{2}, \\
 F_3 &= \nu \frac{2\tau + k^2}{2}, \\
 &\vdots \\
 F_n &= \nu F_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau + k^2}{n(n-1)} F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2
 \end{aligned}$$

y

$$b_n = (-1)^{n+1} b_0 F_n, \quad \forall n \geq 2$$

de tal forma que, para el caso de la velocidad, cuando $b_0 \neq 0$ y $b_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
 &= b_0 x^0 + b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \\
 &= b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_0 F_n x^n \\
 &= b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right]. \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

CASO 2: $b_0 = 0$ y $b_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.40), dada por

$$b_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [((n+2)(n+1)\tau + k^2)b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1}],$$

y la condición $b_0 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{-1}{(2)(1)} [(2)(1)\nu b_1] \\ &= -b_1(\nu). \end{aligned}$$

Considerando $n = 1$,

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{-1}{(1+2)(1+1)} [((1+2)(1+1)\tau + k^2)b_1 + (1+2)(1+1)\nu b_2] \\ &= \frac{-1}{6} [(6\tau + k^2)b_1 + 6\nu b_2] \\ &= \frac{-1}{6} [(6\tau + k^2)b_1 + 6\nu [-b_1(\nu)]] \\ &= b_1 \left[-\frac{(6\tau + k^2)}{6} + \nu^2 \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} G_2 &= \nu, \\ G_3 &= -\frac{(6\tau + k^2)}{6} + \nu^2, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} b_2 &= -b_1 G_2, \\ b_3 &= b_1 G_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{-1}{(2+2)(2+1)} [((2+2)(2+1)\tau + k^2)b_2 + (2+2)(2+1)\nu b_3] \\ &= \frac{-1}{12} [(12\tau + k^2) [-b_1 G_2] + 12\nu [b_1 G_3]] \\ &= -b_1 \left[-\frac{(12\tau + k^2)}{12} G_2 + \nu G_3 \right] \\ &= -b_1 G_4. \end{aligned}$$

Para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 b_5 &= \frac{-1}{(3+2)(3+1)} [((3+2)(3+1)\tau + k^2)b_3 + (3+2)(3+1)\nu b_4] \\
 &= \frac{-1}{20} [(20\tau + k^2) [b_1 G_3] + 20\nu [-b_1 G_4]] \\
 &= b_1 \left[-\frac{(20\tau + k^2)}{20} G_3 + \nu G_4 \right] \\
 &= b_1 G_5.
 \end{aligned}$$

Para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 b_6 &= \frac{-1}{(4+2)(4+1)} [((4+2)(4+1)\tau + k^2)b_4 + (4+2)(4+1)\nu b_5] \\
 &= \frac{-1}{30} [(30\tau + k^2) [-b_1 G_4] + 30\nu [b_1 G_5]] \\
 &= -b_1 \left[-\frac{(30\tau + k^2)}{30} G_4 + \nu G_5 \right] \\
 &= -b_1 G_6.
 \end{aligned}$$

Para $n = 5$,

$$\begin{aligned}
 b_7 &= \frac{-1}{(5+2)(5+1)} [((5+2)(5+1)\tau + k^2)b_5 + (5+2)(5+1)\nu b_6] \\
 &= \frac{-1}{42} [(42\tau + k^2) [b_1 G_5] + 42\nu [-b_1 G_6]] \\
 &= b_1 \left[-\frac{(42\tau + k^2)}{42} G_5 + \nu G_6 \right] \\
 &= b_1 G_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se determina la sucesión,

$$\begin{aligned}
 G_0 &= 0, \\
 G_1 &= 1, \\
 G_2 &= \nu, \\
 G_3 &= \nu^2 - \frac{(6\tau + k^2)}{6}, \\
 &\vdots \\
 G_n &= \nu G_{n-1} - \left[\frac{n(n-1)\tau + k^2}{n(n-1)} \right] G_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$$b_n = (-1)^{n+1} b_1 G_n \quad \forall n \geq 2,$$

de tal forma que, para el caso de la velocidad, cuando $b_0 = 0$ y $b_1 \neq 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\
 &= b_0 x^0 + b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \\
 &= b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} b_1 G_n x^n \\
 &= b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Dado que la solución general de la velocidad esta dada por la ecuación (3.41), al sustituir en ella las ecuaciones (3.42) y (3.43) se tiene que

$$u(x) = b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]. \tag{3.44}$$

3.3. Condiciones de frontera

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera para la elevación (Tabla 2.1) y la ecuación (3.31) se tiene que

$$\begin{aligned}\eta(x) &= a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right], \\ \eta(0) &= a_0 [1 + 0] + a_1 [0 + 0] \\ &= a_0,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$a_0 = \eta_0. \quad (3.45)$$

Se calcula la derivada con respecto a la variable x de la solución de la elevación (ec. (3.31)), obteniendo

$$\frac{d\eta}{dx} = a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n x^{n-1} \right] + a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n x^{n-1} \right], \quad (3.46)$$

nuevamente, considerando las condiciones de frontera (Tabla 2.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dx} &= a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n x^{n-1} \right] + a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n x^{n-1} \right], \\ \frac{d\eta(1)}{dx} &= a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n \right] + a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n \right] \\ 0 &= a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n \right] + a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n \right],\end{aligned}$$

$$a_1 = - \frac{a_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n}. \quad (3.47)$$

Sustituyendo la ecuación (3.45) en la ecuación (3.47) se tiene que

$$a_1 = -\frac{\eta_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n}. \quad (3.48)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera para la velocidad (Tabla 2.1) y la ecuación (3.44), se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) &= b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right], \\ u(0) &= b_0 [1 + 0] + b_1 [0 + 0] \\ &= b_0, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$b_0 = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}, \quad (3.49)$$

y

$$\begin{aligned} u(1) &= b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right] + b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right], \\ 0 &= b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right] + b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right], \end{aligned}$$

tal que

$$b_1 = -\frac{b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right]}{\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right]}. \quad (3.50)$$

Sustituyendo la ecuación (3.49) en la ecuación (3.50) se tiene que

$$b_1 = \frac{\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right]}{\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right]}. \quad (3.51)$$

De acuerdo con las constantes a_0 , a_1 , b_0 y b_1 , obtenidas en las ecuaciones (3.45), (3.48) y (3.49), (3.51), se tiene que las soluciones para la elevación y la velocidad, respectivamente, son

$$\eta(x) = [\eta_0] \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + \left[-\frac{\eta_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n} \right] \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right], \quad (3.52)$$

$$u(x) = \left[\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \right] \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + \left[\frac{\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right]}{\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right]} \right] \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]. \quad (3.53)$$

Así, se ha obtenido la solución de las ecuaciones de aguas someras linealizadas, sin rotación y sin viscosidad, para un fondo batimétrico modelado por una función cuadrática. La función cuadrática $H(x)$ se define por tres puntos determinados de acuerdo a las necesidades del problema. Las soluciones de la elevación y la velocidad son descritas como serie de potencias y son obtenidas al final de este capítulo con sus respectivas operaciones algebraicas.

Capítulo 4

Batimetría modelada por dos funciones cuadráticas acopladas

En el presente capítulo se consideran dos curvas que acopladas forman el fondo batimétrico del canal. Estas curvas definidas por tres puntos cada una poseen una condición particular y es que el punto final de la primera curva es el punto inicial de la segunda curva, además este punto en común debe garantizar que las dos curvas consecutivas generan una función continua a tramos.

Este capítulo se desarrolla en tres subsecciones que corresponden a todos los cálculos para obtener la solución de la elevación y la velocidad en la curva 1, sección 4.1, la solución de la elevación y la velocidad de la curva 2, sección 4.2, y el uso de las condiciones de frontera y las condiciones en el punto medio que intercepta las dos curvas, sección 4.3, que permiten determinar las soluciones en función de serie de potencias alternantes infinitas y sucesiones de una manera amplia y detallada. Una versión más simplificada de este desarrollo puede ser revisada en el Capítulo 8.

La batimetría en la figura 4.1, está descrita por las dos curvas H_1 y H_2 , dadas por las ecuaciones generales

$$H_1 = A_1 + B_1x + C_1x^2, \tag{4.1}$$

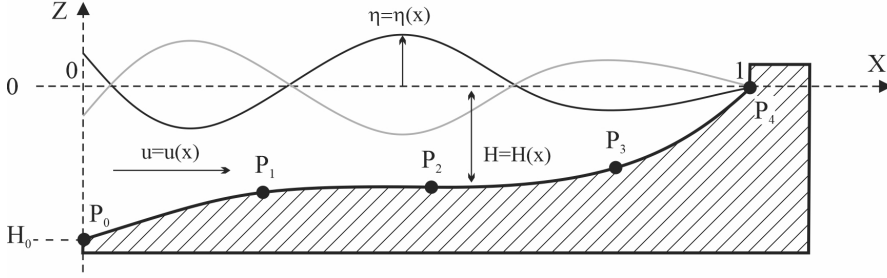


Figura 4.1: Modelo de un fluido en un canal de aguas someras. Batimetría descrita por dos curvas. Cada curva se define por tres puntos.

$$H_2 = A_2 + B_2x + C_2x^2, \quad (4.2)$$

cuya forma particular se puede determinar a partir de los cinco puntos

Curva 1	Curva 2
$P_0(0, H_0)$	$P_2(r_2, s_2H_0)$
$P_1(r_1, s_1H_0)$	$P_3(r_3, s_3H_0)$
$P_2(r_2, s_2H_0)$	$P_4(1, 0)$

donde $r_i, s_i \in [0, 1]$ para $i = 1, 2, 3$.

De acuerdo con la ecuación (4.1) y el conjunto de puntos para la curva 1, resulta el sistema de ecuaciones, tal que

$$\begin{aligned} H_0 &= A_1, \\ s_1H_0 &= A_1 + B_1r_1 + C_1r_1^2, \\ s_2H_0 &= A_1 + B_1r_2 + C_1r_2^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

El anterior sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Cramer, tomando el sistema matricial $M_1x = N_1$. Así, las matrices del sistema son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ s_1H_0 \\ s_2H_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

tal que

$$M_{A_1} = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 \\ s_1 H_0 & r_1 & r_1^2 \\ s_2 H_0 & r_2 & r_2^2 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & H_0 & 0 \\ 1 & s_1 H_0 & r_1^2 \\ 1 & s_2 H_0 & r_2^2 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$M_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & H_0 \\ 1 & r_1 & s_1 H_0 \\ 1 & r_2 & s_2 H_0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Se calculan los determinantes de las matrices M_1 , M_{A_1} , M_{B_1} y M_{C_1} para calcular los coeficientes A_1 , B_1 y C_1 .

$$A_1 = \frac{\text{Det}(M_{A_1})}{\text{Det}(M_1)} = \frac{r_1 r_2 H_0 (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} = H_0,$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\text{Det}(M_{B_1})}{\text{Det}(M_1)} = \frac{H_0(s_1 r_2^2 - s_2 r_1^2) - H_0(r_2^2 - r_1^2)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \\ &= H_0 \frac{(s_1 r_2^2 - s_2 r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\text{Det}(M_{C_1})}{\text{Det}(M_1)} = \frac{H_0(r_1 s_2 - r_2 s_1) + H_0(r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \\ &= H_0 \frac{(r_1 s_2 - r_2 s_1) + (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \end{aligned}$$

tal que

$$A_1 = H_0, \quad B_1 = H_0 \nu_1, \quad C_1 = H_0 \tau_1, \quad (4.8)$$

donde

$$\nu_1 = \frac{(s_1 r_2^2 - s_2 r_1^2) - (r_2^2 - r_1^2)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \quad \tau_1 = \frac{(r_1 s_2 - r_2 s_1) + (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \quad (4.9)$$

de esta forma se tiene la ecuación particular, para la ecuación general (4.1), dada por

$$H_1(x) = H_0 + H_0 \nu_1 x + H_0 \tau_1 x^2. \quad (4.10)$$

De acuerdo con la ecuación (4.2) y el conjunto de puntos para la curva 2, resulta el sistema de ecuaciones, tal que

$$\begin{aligned} s_2 H_0 &= A_2 + B_2 r_2 + C_2 r_2^2, \\ s_3 H_0 &= A_2 + B_2 r_3 + C_2 r_3^2, \\ 0 &= A_2 + B_2 + C_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Se utiliza el método de Cramer para resolver el anterior sistema de ecuaciones tomando el sistema matricial $M_2 x = N_2$. Así, las matrices del sistema son

$$\begin{bmatrix} 1 & r_2 & r_2^2 \\ 1 & r_3 & r_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 H_0 \\ s_3 H_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

tal que

$$M_{A_2} = \begin{bmatrix} s_2 H_0 & r_2 & r_2^2 \\ s_3 H_0 & r_3 & r_3^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

$$M_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & s_2 H_0 & r_2^2 \\ 1 & s_3 H_0 & r_3^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

$$M_{C_2} = \begin{bmatrix} 1 & r_2 & s_2 H_0 \\ 1 & r_3 & s_3 H_0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Se calculan los determinantes de las matrices M_2 , M_{A_2} , M_{B_2} , M_{C_2} para

calcular los coeficientes A_2 , B_2 y C_2 .

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\text{Det}(M_{A_2})}{\text{Det}(M_2)} = \frac{s_2 r_3 H_0 (1 - r_3) - s_3 r_2 H_0 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \\ &= H_0 \frac{s_2 r_3 (1 - r_3) - s_3 r_2 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\text{Det}(M_{B_2})}{\text{Det}(M_2)} = \frac{s_3 H_0 (1 - r_2^2) - s_2 H_0 (1 - r_3^2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \\ &= H_0 \frac{s_3 (1 - r_2^2) - s_2 (1 - r_3^2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\text{Det}(M_{C_2})}{\text{Det}(M_2)} = \frac{s_2 (1 - r_3) - s_3 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \\ &= H_0 \frac{s_2 (1 - r_3) - s_3 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \end{aligned}$$

tal que

$$A_2 = H_0 \zeta_2, \quad B_2 = H_0 \nu_2, \quad C_2 = H_0 \tau_2, \quad (4.16)$$

donde

$$\zeta_2 = \frac{s_2 r_3 (1 - r_3) - s_3 r_2 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \quad (4.17)$$

$$\nu_2 = \frac{s_3 (1 - r_2^2) - s_2 (1 - r_3^2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \quad (4.18)$$

$$\tau_2 = \frac{s_2 (1 - r_3) - s_3 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)}, \quad (4.19)$$

de esta forma se tiene la ecuación particular, para la ecuación general (4.2), dada por

$$H_2(x) = H_0 \zeta_2 + H_0 \nu_2 x + H_0 \tau_2 x^2. \quad (4.20)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones particulares para las dos curvas acopladas ec. (4.10) y (4.20) usadas en el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras ec. (2.14) y (2.15), se procede a determinar las soluciones de la elevación y la velocidad para cada una de las curvas.

4.1. Curva 1

Partiendo de la ecuación particular (4.10) vamos a calcular sus derivadas, hasta el orden dos, esto es

$$H_1(x) = H_0 + H_0\nu_1x + H_0\tau_1x^2, \quad (4.21)$$

$$\frac{dH_1(x)}{dx} = H_0\nu_1 + 2H_0\tau_1x, \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2H_1(x)}{dx^2} = 2H_0\tau_1. \quad (4.23)$$

Reemplazando estas derivadas en el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras, ec. (2.14) y (2.15), se tiene

$$-\frac{\omega^2}{gH_0}\eta = (1 + \nu_1x + \tau_1x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu_1 + 2\tau_1x)\frac{d\eta}{dx}, \quad (4.24)$$

$$-\frac{\omega^2}{gH_0}u = (1 + \nu_1x + \tau_1x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu_1 + 2\tau_1x)\frac{du}{dx} + (2\tau_1)u. \quad (4.25)$$

Teniendo en cuenta que el número de onda corresponde a $k^2 = \omega^2/H_0g$, se obtiene el sistema reducido

$$-k^2\eta = (1 + \nu_1x + \tau_1x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu_1 + 2\tau_1x)\frac{d\eta}{dx}, \quad (4.26)$$

$$-k^2u = (1 + \nu_1x + \tau_1x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu_1 + 2\tau_1x)\frac{du}{dx} + (2\tau_1)u. \quad (4.27)$$

Para la elevación y la velocidad, en la curva 1, que se denotará con el superíndice en el lado izquierdo de la variable, sus soluciones pueden darse como funciones en serie de potencias

$${}^1\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_nx^n, \quad (4.28)$$

$${}^1u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_nx^n. \quad (4.29)$$

Estas serán usadas en las ecuaciones (4.26) y (4.27) para determinar las soluciones mencionadas.

4.1.1. Elevación

La elevación está dada por la serie de potencias

$${}^1\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n, \quad (4.30)$$

las respectivas derivadas de la elevación, con respecto a la variable x , son

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1a_n x^{n-1}, \quad (4.31)$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^{n-2}. \quad (4.32)$$

Al reemplazar las anteriores derivadas y la función de la elevación en la ecuación (4.26) se tiene que

$$\begin{aligned} & (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^{n-2} + \\ & (\nu_1 + 2\tau_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1a_n x^{n-1} + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Luego al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupando términos semejantes en x , se obtiene que

$$\begin{aligned} & k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^n + 2\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1a_n x^n + \\ & \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^{n-1} + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1a_n x^{n-1} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^{n-2} = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria, este cambia el inicio del índice, de

tal forma que

$$\begin{aligned}
 & k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 a_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^n + 2\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^n + \\
 & \nu_1 \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1) {}^1 a_{n+1} x^n + \nu_1 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) {}^1 a_{n+1} x^n \\
 & \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} x^n = 0. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Dado que, para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 a_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^n + 2\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^n + \\
 & \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) {}^1 a_{n+1} x^n + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1 a_{n+1} x^n \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} x^n = 0. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, así se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} + (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} \right] x^n = 0, \quad (4.37)$$

lo que corresponde a tener

$$(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} + (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} = 0.$$

Despejamos ${}^1 a_{n+2}$ y se tiene la sucesión

$${}^1 a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} \right]. \quad (4.38)$$

Para determinar la solución de la elevación, para la curva 1, se contemplan dos casos donde 1a_0 y 1a_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la elevación, tal que

$${}^1\eta(x) = {}^1\eta_1(x) + {}^1\eta_2(x). \quad (4.39)$$

CASO 1: ${}^1a_0 \neq 0$ y ${}^1a_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.38) y la condición ${}^1a_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} {}^1a_2 &= -\frac{1}{(2)(1)} \left[(k^2) {}^1a_0 \right] \\ &= -{}^1a_0 \left[\frac{k^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ y teniendo en cuenta que ${}^1a_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} {}^1a_3 &= -\frac{1}{(1+2)(1+1)} \left[(1+1)^2 \nu_1 {}^1a_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[(2)^2 \nu_1 (-{}^1a_0) \left[\frac{k^2}{2} \right] \right] \\ &= {}^1a_0 \left[\frac{\nu_1 k^2}{3} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{k^2}{2}, \\ W_3 &= \frac{\nu_1 k^2}{3}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^1a_2 &= -{}^1a_0 W_2, \\ {}^1a_3 &= {}^1a_0 W_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_4 &= -\frac{1}{(2+2)(2+1)} \left[(2(2+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_2 + (2+1)^2\nu_1 {}^1a_3 \right] \\
 &= -\frac{1}{12} \left[(6\tau_1 + k^2) \left[-{}^1a_0W_2 \right] + 9\nu_1 \left[{}^1a_0W_3 \right] \right] \\
 &= -{}^1a_0 \left[-\frac{(6\tau_1 + k^2)}{12}W_2 + \frac{3}{4}\nu_1W_3 \right] \\
 &= -{}^1a_0W_4.
 \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_5 &= -\frac{1}{(3+2)(3+1)} \left[(3(3+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_3 + (3+1)^2\nu_1 {}^1a_4 \right] \\
 &= -\frac{1}{20} \left[(12\tau_1 + k^2) \left[{}^1a_0W_3 \right] + 16\nu_1 \left[-{}^1a_0W_4 \right] \right] \\
 &= {}^1a_0 \left[-\frac{(12\tau_1 + k^2)}{20}W_3 + \frac{4}{5}\nu_1W_4 \right] \\
 &= {}^1a_0W_5.
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_6 &= -\frac{1}{(4+2)(4+1)} \left[(4(4+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_4 + (4+1)^2\nu_1 {}^1a_5 \right] \\
 &= -\frac{1}{30} \left[(20\tau_1 + k^2) \left[-{}^1a_0W_4 \right] + 25\nu_1 \left[{}^1a_0W_5 \right] \right] \\
 &= -{}^1a_0 \left[-\frac{(20\tau_1 + k^2)}{30}W_4 + \frac{5}{6}\nu_1W_5 \right] \\
 &= -{}^1a_0W_6.
 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_7 &= -\frac{1}{(5+2)(5+1)} \left[(5(5+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_5 + (5+1)^2\nu_1 {}^1a_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[(30\tau_1 + k^2) \left[{}^1a_0W_5 \right] + 36\nu_1 \left[-{}^1a_0W_6 \right] \right] \\
 &= {}^1a_0 \left[-\frac{(30\tau_1 + k^2)}{42}W_5 + \frac{6}{7}\nu_1W_6 \right] \\
 &= {}^1a_0W_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente sucesión

$$\begin{aligned}
 W_0 &= 1, \\
 W_1 &= 0, \\
 W_2 &= -\frac{k^2}{2}, \\
 W_3 &= \frac{\nu_1 k^2}{3}, \\
 &\vdots \\
 W_n &= \frac{(n-1)}{n} \nu_1 W_{n-1} - \frac{(n-2)(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} W_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^1a_n = (-1)^{n+1} {}^1a_0 W_n \quad \forall n \geq 2.$$

de tal forma que para la elevación, cuando ${}^1a_0 \neq 0$ y ${}^1a_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^1\eta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n \\
 &= {}^1a_0 x^0 + {}^1a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} {}^1a_n x^n \\
 &= {}^1a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^1a_0 W_n x^n \\
 &= {}^1a_0 + {}^1a_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \\
 &= {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right]. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

CASO 2: ${}^1a_0 = 0$ y ${}^1a_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.38) y la condición ${}^1a_0 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} {}^1a_2 &= -\frac{1}{(2)(1)} \left[(1)^2 \nu_1 {}^1a_1 \right] \\ &= -{}^1a_1 \left[\frac{\nu_1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$

$$\begin{aligned} {}^1a_3 &= -\frac{1}{(1+2)(1+1)} \left[(1(1+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_1 + (1+1)^2 \nu_1 {}^1a_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[(2\tau_1 + k^2) {}^1a_1 + 4\nu_1 \left[-{}^1a_1 \left[\frac{\nu_1}{2} \right] \right] \right] \\ &= {}^1a_1 \left[-\frac{(2\tau_1 + k^2)}{6} + \frac{1}{3} \nu_1^2 \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\nu_1}{2}, \\ V_3 &= -\frac{(2\tau_1 + k^2)}{6} + \frac{1}{3} \nu_1^2, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^1a_2 &= -{}^1a_1 V_2, \\ {}^1a_3 &= {}^1a_1 V_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^1a_4 &= -\frac{1}{(2+2)(2+1)} \left[(2(2+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_2 + (2+1)^2 \nu_1 {}^1a_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[(6\tau_1 + k^2) \left[-{}^1a_1 V_2 \right] + 9\nu_1 \left[{}^1a_1 V_3 \right] \right] \\ &= -{}^1a_1 \left[-\frac{(6\tau_1 + k^2)}{12} V_2 + \frac{3}{4} \nu_1 V_3 \right] \\ &= -{}^1a_1 V_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_5 &= -\frac{1}{(3+2)(3+1)} \left[(3(3+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_3 + (3+1)^2\nu_1 {}^1a_4 \right] \\
 &= -\frac{1}{20} \left[(12\tau_1 + k^2) \left[{}^1a_1V_3 \right] + 16\nu_1 \left[-{}^1a_1V_4 \right] \right] \\
 &= {}^1a_1 \left[-\frac{(12\tau_1 + k^2)}{20}V_3 + \frac{4}{5}\nu_1V_4 \right] \\
 &= {}^1a_1V_5.
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_6 &= -\frac{1}{(4+2)(4+1)} \left[(4(4+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_4 + (4+1)^2\nu_1 {}^1a_5 \right] \\
 &= -\frac{1}{30} \left[(20\tau_1 + k^2) \left[-{}^1a_1V_4 \right] + 25\nu_1 \left[{}^1a_1V_5 \right] \right] \\
 &= -{}^1a_1 \left[-\frac{(20\tau_1 + k^2)}{30}V_4 + \frac{5}{6}\nu_1V_5 \right] \\
 &= -{}^1a_1V_6.
 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^1a_7 &= -\frac{1}{(5+2)(5+1)} \left[(5(5+1)\tau_1 + k^2) {}^1a_5 + (5+1)^2\nu_1 {}^1a_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[(30\tau_1 + k^2) \left[{}^1a_1V_5 \right] + 36\nu_1 \left[-{}^1a_1V_6 \right] \right] \\
 &= {}^1a_1 \left[-\frac{(30\tau_1 + k^2)}{42}V_5 + \frac{6}{7}\nu_1V_6 \right] \\
 &= {}^1a_1V_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente

sucesión

$$\begin{aligned}
 V_0 &= 0, \\
 V_1 &= 1, \\
 V_2 &= \frac{\nu_1}{2}, \\
 V_3 &= -\frac{(2\tau_1 + k^2)}{6} + \frac{1}{3}\nu_1^2, \\
 &\vdots \\
 V_n &= \frac{n-1}{n}\nu_1 V_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_1 + k^2}{n(n-1)}V_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^1a_n = (-1)^{n+1} {}^1a_1 V_n \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la elevación en la curva 1, cuando ${}^1a_0 \neq 0$ y ${}^1a_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^1\eta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n \\
 &= {}^1a_0 x^0 + {}^1a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} {}^1a_n x^n \\
 &= {}^1a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^1a_1 V_n x^n \\
 &= {}^1a_1 x + {}^1a_1 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \\
 &= {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Dado que la solución general de la elevación, en la curva 1, está dada por la ecuación (4.39), al sustituir en ella las ecuaciones (4.40) y (4.41) se

tiene

$${}^1\eta(x) = {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]. \quad (4.42)$$

4.1.2. Velocidad

La velocidad está dada por serie de potencias

$${}^1u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n, \quad (4.43)$$

y las respectivas derivadas de la velocidad, con respecto a la variable x , son

$$\frac{d}{{}^1u} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1b_n x^{n-1}, \quad (4.44)$$

$$\frac{d^2}{{}^1u} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1b_n x^{n-2}. \quad (4.45)$$

Al reemplazar las anteriores derivadas y la función de velocidad en la ecuación (4.27) se tiene que

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n + (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1b_n x^{n-2} + \\ 2(\nu_1 + 2\tau_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1b_n x^{n-1} + (2\tau_1) \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Luego, al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupando términos semejantes en x , se obtiene que

$$\begin{aligned} (2\tau_1 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1b_n x^n + 4\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1b_n x^n + \\ 2\nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1b_n x^{n-1} + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1b_n x^{n-1} + \\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1b_n x^{n-2} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria, este cambia el inicio del índice, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 (2\tau_1 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + 4\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n + \\
 2\nu_1 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n + \nu_1 \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1) b_{n+1} x^n + \\
 \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x^n = 0, \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

dado que, para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos, se tiene que

$$\begin{aligned}
 (2\tau_1 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + 4\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n + \\
 2\nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) b_{n+1} x^n + \\
 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) b_{n+2} x^n = 0. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, así se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[((n+2)(n+1)\tau_1 + k^2) b_n + (n+1)(n+2)\nu_1 b_{n+1} \right] x^n + \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) b_{n+2} \right] x^n = 0, \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

lo que corresponde a tener

$$((n+1)(n+2)\tau_1 + k^2) b_n + (n+1)(n+2)\nu_1 b_{n+1} + (n+2)(n+1) b_{n+2} = 0.$$

Despejamos ${}^1b_{n+2}$, y se tiene la sucesión

$${}^1b_{n+2} = -\frac{\left[((n+1)(n+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_n + (n+1)(n+2)\nu_1 {}^1b_{n+1} \right]}{(n+1)(n+2)}. \quad (4.51)$$

Para determinar la solución de la velocidad, en la curva 1, se contemplan dos casos donde 1b_0 y 1b_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la velocidad, tal que

$${}^1u(x) = {}^1u_1(x) + {}^1u_2(x). \quad (4.52)$$

CASO 1: ${}^1b_0 \neq 0$ y ${}^1b_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.51) y la condición ${}^1b_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} {}^1b_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[((1)(2)\tau_1 + k^2) {}^1b_0 \right], \\ &= -{}^1b_0 \left[\frac{2\tau_1 + k^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ y teniendo en cuenta que ${}^1b_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} {}^1b_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[(1+1)(1+2)\nu_1 {}^1b_2 \right] \\ &= -\frac{1}{(2)(3)} \left[(2)(3)\nu_1 {}^1b_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[6\nu_1 \left[-{}^1b_0 \left[\frac{2\tau_1 + k^2}{2} \right] \right] \right] \\ &= {}^1b_0 \left[\frac{(2\tau_1 + k^2)\nu_1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{2\tau_1 + k^2}{2}, \\ F_3 &= \frac{(2\tau_1 + k^2)\nu_1}{2}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^1b_2 &= -{}^1b_0F_2, \\ {}^1b_3 &= {}^1b_0F_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^1b_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[((2+1)(2+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_2 + (2+1)(2+2)\nu_1 {}^1b_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[(12\tau_1 + k^2) \left[-{}^1b_0F_2 \right] + 12\nu_1 \left[{}^1b_0F_3 \right] \right] \\ &= -{}^1b_0 \left[-\frac{(12\tau_1 + k^2)}{12} F_2 + \nu_1 F_3 \right] \\ &= -{}^1b_0F_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned} {}^1b_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[((3+1)(3+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_3 + (3+1)(3+2)\nu_1 {}^1b_4 \right] \\ &= -\frac{1}{20} \left[(20\tau_1 + k^2) \left[{}^1b_0F_3 \right] + 20\nu_1 \left[-{}^1b_0F_4 \right] \right] \\ &= {}^1b_0 \left[-\frac{(20\tau_1 + k^2)}{20} F_3 + \nu_1 F_4 \right] \\ &= {}^1b_0F_5. \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned} {}^1b_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[((4+1)(4+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_4 + (4+1)(4+2)\nu_1 {}^1b_5 \right] \\ &= -\frac{1}{30} \left[(30\tau_1 + k^2) \left[-{}^1b_0F_4 \right] + 30\nu_1 \left[{}^1b_0F_5 \right] \right] \\ &= -{}^1b_0 \left[-\frac{(30\tau_1 + k^2)}{30} F_4 + \nu_1 F_5 \right] \\ &= -{}^1b_0F_6. \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^1b_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[((5+1)(5+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_5 + (5+1)(5+2)\nu_1 {}^1b_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[(42\tau_1 + k^2) \left[{}^1b_0 F_5 \right] + 42\nu_1 \left[-{}^1b_0 F_6 \right] \right] \\
 &= {}^1b_0 \left[-\frac{(42\tau_1 + k^2)}{42} F_5 + \nu_1 F_6 \right] \\
 &= {}^1b_0 F_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente sucesión,

$$\begin{aligned}
 F_0 &= -1, \\
 F_1 &= 0, \\
 F_2 &= \frac{2\tau_1 + k^2}{2}, \\
 F_3 &= \frac{(2\tau_1 + k^2)\nu_1}{2}, \\
 &\vdots \\
 F_n &= \nu_1 F_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} F_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^1b_n = (-1)^{n+1} {}^1b_0 F_n, \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la velocidad en la curva 1, cuando ${}^1b_0 \neq 0$ y

${}^1b_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^1u_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n \\
 &= {}^1b_0 x^0 + {}^1b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} {}^1b_n x^n \\
 &= {}^1b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^1b_0 F_n x^n \\
 &= {}^1b_0 + {}^1b_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \\
 &= {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right]. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

CASO 2: ${}^1b_0 = 0$ y ${}^1b_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.51) y la condición ${}^1b_0 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
 {}^1b_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[(1)(2)\nu_1 {}^1b_1 \right] \\
 &= -{}^1b_1 \nu_1.
 \end{aligned}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
 {}^1b_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[((1+1)(1+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_1 + (1+1)(1+2)\nu_1 {}^1b_2 \right] \\
 &= -\frac{1}{6} \left[(6\tau_1 + k^2) {}^1b_1 + 6\nu_1 \left[-{}^1b_1 \nu_1 \right] \right] \\
 &= {}^1b_1 \left[-\frac{(6\tau_1 + k^2)}{6} + \nu_1^2 \right].
 \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned}
 G_2 &= \nu_1, \\
 G_3 &= -\frac{(6\tau_1 + k^2)}{6} + \nu_1^2,
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^1b_2 &= -{}^1b_1G_2, \\ {}^1b_3 &= {}^1b_1G_3. \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^1b_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[((2+1)(2+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_2 + (2+1)(2+2)\nu_1 {}^1b_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[(12\tau_1 + k^2) \left[-{}^1b_1G_2 \right] + 12\nu_1 \left[{}^1b_1G_3 \right] \right] \\ &= -{}^1b_1 \left[-\frac{(12\tau_1 + k^2)}{12}G_2 + \nu_1G_3 \right] \\ &= -{}^1b_1G_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned} {}^1b_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[((3+1)(3+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_3 + (3+1)(3+2)\nu_1 {}^1b_4 \right] \\ &= -\frac{1}{20} \left[(20\tau_1 + k^2) \left[{}^1b_1G_3 \right] + 20\nu_1 \left[-{}^1b_1G_4 \right] \right] \\ &= {}^1b_1 \left[-\frac{(20\tau_1 + k^2)}{20}G_3 + \nu_1G_4 \right] \\ &= {}^1b_1G_5. \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned} {}^1b_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[((4+1)(4+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_4 + (4+1)(4+2)\nu_1 {}^1b_5 \right] \\ &= -\frac{1}{30} \left[(30\tau_1 + k^2) \left[-{}^1b_1G_4 \right] + 30\nu_1 \left[{}^1b_1G_5 \right] \right] \\ &= -{}^1b_1 \left[-\frac{(30\tau_1 + k^2)}{30}G_4 + \nu_1G_5 \right] \\ &= -{}^1b_1G_6. \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^1b_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[((5+1)(5+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_5 + (5+1)(5+2)\nu_1 {}^1b_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[(42\tau_1 + k^2) \left[{}^1b_1 G_5 \right] + 42\nu_1 \left[-{}^1b_1 G_6 \right] \right] \\
 &= {}^1b_1 \left[-\frac{(42\tau_1 + k^2)}{42} G_5 + \nu_1 G_6 \right] \\
 &= {}^1b_1 G_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente sucesión

$$\begin{aligned}
 G_0 &= 0, \\
 G_1 &= 1, \\
 G_2 &= \nu_1, \\
 G_3 &= -\frac{(6\tau_1 + k^2)}{6} + \nu_1^2, \\
 &\vdots \\
 G_n &= \nu_1 G_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} G_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^1b_n = (-1)^{n+1} {}^1b_1 G_n, \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la velocidad en la curva 1, cuando ${}^1b_0 \neq 0$ y

${}^1b_1 = 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^1u_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n \\
 &= {}^1b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^1b_1 G_n x^n \\
 &= {}^1b_1 x + {}^1b_1 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \\
 &= {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]. \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

Dado que la solución general de la velocidad, en la curva 1, está dada por la ecuación (4.52), al sustituir en ella las ecuaciones (4.53) y (4.54) se tiene

$${}^1u(x) = {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]. \tag{4.55}$$

4.2. Curva 2

Partiendo de la ecuación particular para la curva 2 (ec. 4.20) vamos a calcular sus derivadas, hasta el orden dos, esto es

$$H_2(x) = H_0 \zeta_2 + H_0 \nu_2 x + H_0 \tau_2 x^2, \tag{4.56}$$

$$\frac{dH_2(x)}{dx} = H_0 \nu_2 + 2H_0 \tau_2 x, \tag{4.57}$$

$$\frac{d^2 H_2(x)}{dx^2} = 2H_0 \tau_2. \tag{4.58}$$

Reemplazando estas derivadas en el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras, ec. (2.14) y (2.15) del capítulo 2, se tiene

$$-\frac{\omega^2}{gH_0} \eta = (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (\nu_2 + 2\tau_2 x) \frac{d\eta}{dx}, \tag{4.59}$$

$$-\frac{\omega^2}{gH_0} u = (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2(\nu_2 + 2\tau_2 x) \frac{du}{dx} + (2\tau_2)u. \tag{4.60}$$

Teniendo en cuenta que el número de onda corresponde a $k^2 = \omega^2/H_0g$, se obtiene el sistema reducido

$$-k^2\eta = (\zeta_2 + \nu_2x + \tau_2x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu_2 + 2\tau_2x)\frac{d\eta}{dx}, \quad (4.61)$$

$$-k^2u = (\zeta_2 + \nu_2x + \tau_2x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu_2 + 2\tau_2x)\frac{du}{dx} + (2\tau_2)u. \quad (4.62)$$

Para la elevación y la velocidad, en la curva 2, que se denotará con el superíndice en el lado izquierdo de la variable, sus soluciones pueden darse como una serie de potencias

$${}^2\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n, \quad (4.63)$$

$${}^2u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n. \quad (4.64)$$

Estas serán usadas en las ecuaciones (4.61) y (4.62) para determinar las soluciones mencionadas.

4.2.1. Elevación

La elevación está dada por la serie de potencias

$${}^2\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

las respectivas derivadas de la elevación, con respecto a la variable x , son

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n {}^2a_n x^{n-1}, \quad (4.65)$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^2a_n x^{n-2}. \quad (4.66)$$

Al reemplazar las anteriores derivadas y la función de la elevación, de la segunda curva, en la ecuación (4.61) se tiene que

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^{n-2} + (\nu_2 + 2\tau_2 x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} = 0. \quad (4.67)$$

Luego al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupando términos semejantes en x , se obtiene que

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^n + 2\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^{n-1} + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \zeta_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^{n-2} = 0. \quad (4.68)$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria, este cambia el inicio del índice, de tal forma que

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^n + 2\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n + \nu_2 \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)^2 a_{n+1} x^n + \nu_2 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \zeta_2 \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)^2 a_{n+2} x^n = 0, \quad (4.69)$$

dado que, para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos,

se tiene que

$$\begin{aligned}
 k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 a_n x^n + 2\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n + \\
 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)^2 a_{n+1} x^n + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \\
 \zeta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)^2 a_{n+2} x^n = 0. \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, así se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n(n+1)\tau_2 + k^2)^2 a_n + (n+1)^2 \nu_2^2 a_{n+1} + \zeta_2 (n+2)(n+1)^2 a_{n+2} \right] x^n = 0, \quad (4.71)$$

lo que corresponde a tener

$$(n(n+1)\tau_2 + k^2)^2 a_n + (n+1)^2 \nu_2^2 a_{n+1} + \zeta_2 (n+2)(n+1)^2 a_{n+2} = 0,$$

despejamos a_{n+2} y se tiene la sucesión

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{(n(n+1)\tau_2 + k^2)^2}{\zeta_2} a_n + \frac{(n+1)^2 \nu_2^2}{\zeta_2} a_{n+1} \right]. \quad (4.72)$$

Para determinar la solución de la elevación, para la curva 2, se contemplan dos casos donde a_0 y a_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la elevación, tal que

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x). \quad (4.73)$$

CASO 1: ${}^2a_0 \neq 0$ y ${}^2a_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.72) y la condición ${}^2a_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} {}^2a_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[\frac{(k^2)}{\zeta_2} {}^2a_0 \right] \\ &= -{}^2a_0 \left[\frac{k^2}{2\zeta_2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ y teniendo en cuenta que ${}^2a_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} {}^2a_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[\frac{(1+1)^2 \nu_2}{\zeta_2} {}^2a_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[\frac{4\nu_2}{\zeta_2} \left[-{}^2a_0 \left[\frac{k^2}{2\zeta_2} \right] \right] \right] \\ &= {}^2a_0 \left[\frac{\nu_2}{3\zeta_2^2} k^2 \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} W'_2 &= \frac{k^2}{2\zeta_2}, \\ W'_3 &= \frac{\nu_2}{3\zeta_2^2} k^2, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^2a_2 &= -{}^2a_0 W'_2, \\ {}^2a_3 &= {}^2a_0 W'_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[\frac{(2(2+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_2 + \frac{(2+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_3 \right] \\
 &= -\frac{1}{12} \left[\frac{(6\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[-{}^2a_0W'_2 \right] + \frac{9\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2a_0W'_3 \right] \right] \\
 &= -{}^2a_0 \left[-\frac{(6\tau_2 + k^2)}{12\zeta_2} W'_2 + \frac{3}{4} \frac{\nu_2}{\zeta_2} W'_3 \right] \\
 &= -{}^2a_0W'_4.
 \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[\frac{(3(3+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_3 + \frac{(3+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_4 \right] \\
 &= -\frac{1}{20} \left[\frac{(12\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[{}^2a_0W'_3 \right] + \frac{16\nu_2}{\zeta_2} \left[-{}^2a_0W'_4 \right] \right] \\
 &= {}^2a_0 \left[-\frac{(12\tau_2 + k^2)}{20\zeta_2} W'_3 + \frac{4}{5} \frac{\nu_2}{\zeta_2} W'_4 \right] \\
 &= {}^2a_0W'_5.
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[\frac{(4(4+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_4 + \frac{(4+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_5 \right] \\
 &= -\frac{1}{30} \left[\frac{(20\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[-{}^2a_0W'_4 \right] + \frac{25\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2a_0W'_5 \right] \right] \\
 &= -{}^2a_0 \left[-\frac{(20\tau_2 + k^2)}{30\zeta_2} W'_4 + \frac{5}{6} \frac{\nu_2}{\zeta_2} W'_5 \right] \\
 &= -{}^2a_0W'_6.
 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[\frac{(5(5+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_5 + \frac{(5+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[\frac{(30\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} [{}^2a_0 W'_5] + \frac{36\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2a_0 W'_6] \right] \\
 &= {}^2a_0 \left[-\frac{(30\tau_2 + k^2)}{42\zeta_2} W'_5 + \frac{6\nu_2}{7\zeta_2} W'_6 \right] \\
 &= {}^2a_0 W'_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente sucesión

$$\begin{aligned}
 W'_0 &= -1, \\
 W'_1 &= 0, \\
 W'_2 &= \frac{k^2}{2\zeta_2}, \\
 W'_3 &= \frac{\nu_2}{3\zeta_2^2} k^2, \\
 &\vdots \\
 W'_n &= \frac{n}{(n-1)} \frac{\nu_2}{\zeta_2} W'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} W'_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^2a_n = (-1)^{n+1} {}^2a_0 W'_n \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la elevación, en la curva 2, cuando ${}^2a_0 \neq 0$ y

${}^2a_1 = 0$ la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^2\eta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n \\
 &= {}^2a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^2a_0 W'_n x^n \\
 &= {}^2a_0 + {}^2a_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \\
 &= {}^2a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \right]. \tag{4.74}
 \end{aligned}$$

CASO 2: ${}^2a_0 = 0$ y ${}^2a_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.72) y la condición ${}^2a_0 = 0$, si $n = 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
 {}^2a_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[\frac{(1)^2 \nu_2}{\zeta_2} {}^2a_1 \right] \\
 &= -{}^2a_1 \left[\frac{\nu_2}{2\zeta_2} \right].
 \end{aligned}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[\frac{(1(1+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_1 + \frac{(1+1)^2 \nu_2}{\zeta_2} {}^2a_2 \right] \\
 &= -\frac{1}{6} \left[\frac{(2\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_1 + \frac{4\nu_2}{\zeta_2} \left[-{}^2a_1 \left[\frac{\nu_2}{2\zeta_2} \right] \right] \right] \\
 &= {}^2a_1 \left[-\frac{(2\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{1}{3} \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2} \right].
 \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned}
 V'_2 &= \frac{\nu_2}{2\zeta_2}, \\
 V'_3 &= -\frac{(2\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{1}{3} \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2},
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^2a_2 &= - {}^2a_1 V'_2, \\ {}^2a_3 &= {}^2a_1 V'_3. \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^2a_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[\frac{(2(2+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_2 + \frac{(2+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[\frac{(6\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[- {}^2a_1 V'_2 \right] + \frac{9\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2a_1 V'_3 \right] \right] \\ &= - {}^2a_1 \left[-\frac{(6\tau_2 + k^2)}{12\zeta_2} V'_2 + \frac{3}{4} \frac{\nu_2}{\zeta_2} V'_3 \right] \\ &= - {}^2a_1 V'_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned} {}^2a_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[\frac{(3(3+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_3 + \frac{(3+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_4 \right] \\ &= -\frac{1}{20} \left[\frac{(12\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[{}^2a_1 V'_3 \right] + \frac{16\nu_2}{\zeta_2} \left[- {}^2a_1 V'_4 \right] \right] \\ &= {}^2a_1 \left[-\frac{(12\tau_2 + k^2)}{20\zeta_2} V'_3 + \frac{4}{5} \frac{\nu_2}{\zeta_2} V'_4 \right] \\ &= {}^2a_1 V'_5. \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned} {}^2a_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[\frac{(4(4+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_4 + \frac{(4+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_5 \right] \\ &= -\frac{1}{30} \left[\frac{(20\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[- {}^2a_1 V'_4 \right] + \frac{25\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2a_1 V'_5 \right] \right] \\ &= - {}^2a_1 \left[-\frac{(20\tau_2 + k^2)}{30\zeta_2} V'_4 + \frac{5}{6} \frac{\nu_2}{\zeta_2} V'_5 \right] \\ &= - {}^2a_1 V'_6. \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^2a_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[\frac{(5(5+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_5 + \frac{(5+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[\frac{(30\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} [{}^2a_1 V'_5] + \frac{36\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2a_1 V'_6] \right] \\
 &= -{}^2a_1 \left[-\frac{(30\tau_2 + k^2)}{42\zeta_2} V'_5 + \frac{6\nu_2}{7\zeta_2} V'_6 \right] \\
 &= -{}^2a_1 V'_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente sucesión,

$$\begin{aligned}
 V'_0 &= 0, \\
 V'_1 &= 1, \\
 V'_2 &= \frac{\nu_2}{2\zeta_2}, \\
 V'_3 &= -\frac{(2\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{1}{3} \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2}, \\
 &\vdots \\
 V'_n &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\nu_2}{\zeta_2} V'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} V'_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^2a_n = (-1)^{n+1} {}^2a_1 V'_n \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la elevación, en la curva 2, cuando ${}^2a_0 = 0$ y

${}^2a_1 \neq 0$, la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^2\eta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n \\
 &= {}^2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^2a_1 V'_n x^n \\
 &= {}^2a_1 x + {}^2a_1 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \\
 &= {}^2a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \right]. \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

Dado que la solución general de la elevación esta dada por la ecuación (4.73), al sustituir en ella las ecuaciones (4.74) y (4.75) se tiene

$${}^2\eta(x) = {}^2a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \right] + {}^2a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \right]. \tag{4.76}$$

4.2.2. Velocidad

La velocidad está dada por la serie de pontencias

$${}^2u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n, \tag{4.77}$$

las respectivas derivadas de la velocidad, con respecto a la variable x , son

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}, \tag{4.78}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}. \tag{4.79}$$

Al reemplazar las anteriores derivadas y la función de la velocidad en la ecuación (4.62) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 b_n x^{n-2} + \\
 & 2(\nu_2 + 2\tau_2 x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} + \\
 & (2\tau_2 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0. \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

Luego al realizar las operaciones algebraicas correspondientes y agrupando términos semejantes en x , se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & (2\tau_2 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 4\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 b_n x^n + \\
 & \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 b_n x^{n-1} + 2\nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1} + \\
 & \zeta_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 b_n x^{n-2} = 0. \tag{4.81}
 \end{aligned}$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria, este cambia el inicio del índice, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 & (2\tau_2 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 4\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)^2 b_n x^n + \\
 & \nu_2 \sum_{n=-1}^{\infty} n(n+1)^2 b_{n+1} x^n + 2\nu_2 \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1)^2 b_{n+1} x^n + \\
 & \zeta_2 \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)^2 b_{n+2} x^n = 0, \tag{4.82}
 \end{aligned}$$

dado que, para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos,

se tiene que

$$\begin{aligned}
 (2\tau_2 + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n + 4\tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^2b_n x^n + \tau_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^2b_n x^n + \\
 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) {}^2b_{n+1} x^n + 2\nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^2b_{n+1} x^n + \\
 \zeta_2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) {}^2b_{n+2} x^n = 0. \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

Como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria, así se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[((n+2)(n+1)\tau_2 + k^2) {}^2b_n + (n+1)(n+2)\nu_2 {}^2b_{n+1} \right] x^n + \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)\zeta_2 {}^2b_{n+2} \right] x^n = 0, \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

lo que corresponde a tener

$$((n+2)(n+1)\tau_2 + k^2) {}^2b_n + (n+1)(n+2)\nu_2 {}^2b_{n+1} + (n+1)(n+2)\zeta_2 {}^2b_{n+2} = 0,$$

despejamos ${}^2b_{n+2}$, y se tiene la sucesión

$${}^2b_{n+2} = - \frac{\left[\frac{((n+2)(n+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_n + (n+1)(n+2)\frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_{n+1} \right]}{(n+1)(n+2)}. \quad (4.85)$$

Para determinar la solución de la velocidad, en la curva 2, se contemplan dos casos donde 2b_0 y 2b_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la velocidad, tal que

$${}^2u(x) = {}^2u_1(x) + {}^2u_2(x). \quad (4.86)$$

CASO 1: ${}^2b_0 \neq 0$ y ${}^2b_1 = 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.85) y la condición ${}^2b_1 = 0$, si $n = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} {}^2b_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[\frac{((2)(1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_0 \right] \\ &= -{}^2b_0 \left[\frac{(2\tau_2 + k^2)}{2\zeta_2} \right]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ y teniendo en cuenta que ${}^2b_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} {}^2b_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[(1+1)(1+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[6 \frac{\nu_2}{\zeta_2} \left[-{}^2b_0 \left[\frac{(2\tau_2 + k^2)}{2\zeta_2} \right] \right] \right] \\ &= {}^2b_0 \left[\frac{(2\tau_2 + k^2)\nu_2}{2\zeta_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} F'_2 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)}{2\zeta_2}, \\ F'_3 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)\nu_2}{2\zeta_2^2}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^2b_2 &= -{}^2b_0 F'_2, \\ {}^2b_3 &= {}^2b_0 F'_3. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^2b_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[\frac{((2+2)(2+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_2 + (2+1)(2+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[\frac{(12\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} \left[-{}^2b_0 F'_2 \right] + 12 \frac{\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2b_0 F'_3 \right] \right] \\ &= -{}^2b_0 \left[-\frac{(12\tau_2 + k^2)}{12\zeta_2} F'_2 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_3 \right] \\ &= -{}^2b_0 F'_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[\frac{((3+2)(3+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_3 + (3+1)(3+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_4 \right] \\
 &= -\frac{1}{20} \left[\frac{(20\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} [{}^2b_0 F'_3] + 20 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2b_0 F'_4] \right] \\
 &= {}^2b_0 \left[-\frac{(20\tau_2 + k^2)}{20\zeta_2} F'_3 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_4 \right] \\
 &= {}^2b_0 F'_5.
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[\frac{((4+2)(4+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_4 + (4+1)(4+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_5 \right] \\
 &= -\frac{1}{30} \left[\frac{(30\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} [-{}^2b_0 F'_4] + 30 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [{}^2b_0 F'_5] \right] \\
 &= -{}^2b_0 \left[-\frac{(30\tau_2 + k^2)}{30\zeta_2} F'_4 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_5 \right] \\
 &= -{}^2b_0 F'_6.
 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[\frac{((5+2)(5+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_5 + (5+1)(5+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[\frac{(42\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} [{}^2b_0 F'_5] + 42 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2b_0 F'_6] \right] \\
 &= {}^2b_0 \left[-\frac{(42\tau_2 + k^2)}{42\zeta_2} F'_5 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_6 \right] \\
 &= {}^2b_0 F'_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente

sucesión

$$\begin{aligned}
 F'_0 &= -1, \\
 F'_1 &= 0, \\
 F'_2 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)}{2\zeta_2}, \\
 F'_3 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)\nu_2}{2\zeta_2^2}, \\
 &\vdots \\
 F'_n &= \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} F'_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^2b_n = (-1)^{n+1} {}^2b_0 F'_n \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la velocidad, para la curva 2, cuando ${}^2b_0 \neq 0$ y ${}^2b_1 = 0$ la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^2u_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n \\
 &= {}^2b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^2b_0 F'_n x^n \\
 &= {}^2b_0 + {}^2b_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \\
 &= {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right]. \tag{4.87}
 \end{aligned}$$

CASO 2: ${}^2b_0 = 0$ y ${}^2b_1 \neq 0$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.85) y la condición ${}^2b_0 = 0$, si $n=0$ se tiene que,

$$\begin{aligned} {}^2b_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} \left[(1)(2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_1 \right] \\ &= -{}^2b_1 \left[\frac{\nu_2}{\zeta_2} \right]. \end{aligned}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} {}^2b_3 &= -\frac{1}{(1+1)(1+2)} \left[\frac{(1+1)(1+2)\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_1 + (1+1)(1+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_2 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \left[\frac{6\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_1 + 6 \frac{\nu_2}{\zeta_2} \left[-{}^2b_1 \left[\frac{\nu_2}{\zeta_2} \right] \right] \right] \\ &= {}^2b_1 \left[-\frac{(6\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Se nombran los términos

$$\begin{aligned} G'_2 &= \frac{\nu_2}{\zeta_2}, \\ G'_3 &= -\frac{(6\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} {}^2b_2 &= -{}^2b_1 G'_2, \\ {}^2b_3 &= {}^2b_1 G'_3. \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} {}^2b_4 &= -\frac{1}{(2+1)(2+2)} \left[\frac{(2+1)(2+2)\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_2 + (2+1)(2+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_3 \right] \\ &= -\frac{1}{12} \left[\frac{12\tau_2 + k^2}{\zeta_2} \left[-{}^2b_1 G'_2 \right] + 12 \frac{\nu_2}{\zeta_2} \left[{}^2b_1 G'_3 \right] \right] \\ &= -{}^2b_1 \left[-\frac{12\tau_2 + k^2}{12\zeta_2} G'_2 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_3 \right] \\ &= -{}^2b_1 G'_4. \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_5 &= -\frac{1}{(3+1)(3+2)} \left[\frac{(3+1)(3+2)\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_3 + (3+1)(3+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_4 \right] \\
 &= -\frac{1}{20} \left[\frac{20\tau_2 + k^2}{\zeta_2} [{}^2b_1 G'_3] + 20 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2b_1 G'_4] \right] \\
 &= {}^2b_1 \left[-\frac{20\tau_2 + k^2}{20\zeta_2} G'_3 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_4 \right] \\
 &= {}^2b_1 G'_5.
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_6 &= -\frac{1}{(4+1)(4+2)} \left[\frac{(4+1)(4+2)\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_4 + (4+1)(4+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_5 \right] \\
 &= -\frac{1}{30} \left[\frac{30\tau_2 + k^2}{\zeta_2} [-{}^2b_1 G'_4] + 30 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [{}^2b_1 G'_5] \right] \\
 &= -{}^2b_1 \left[-\frac{30\tau_2 + k^2}{30\zeta_2} G'_4 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_5 \right] \\
 &= -{}^2b_1 G'_6.
 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned}
 {}^2b_7 &= -\frac{1}{(5+1)(5+2)} \left[\frac{(5+1)(5+2)\tau_2 + k^2}{\zeta_2} {}^2b_5 + (5+1)(5+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2} {}^2b_6 \right] \\
 &= -\frac{1}{42} \left[\frac{42\tau_2 + k^2}{\zeta_2} [{}^2b_1 G'_5] + 42 \frac{\nu_2}{\zeta_2} [-{}^2b_1 G'_6] \right] \\
 &= {}^2b_1 \left[-\frac{42\tau_2 + k^2}{42\zeta_2} G'_5 + \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_6 \right] \\
 &= {}^2b_1 G'_7.
 \end{aligned}$$

Para los primeros valores que toma n se puede determinar la siguiente

sucesión

$$\begin{aligned}
 G'_0 &= 0, \\
 G'_1 &= 1, \\
 G'_2 &= \frac{\nu_2}{\zeta_2}, \\
 G'_3 &= -\frac{6\tau_2 + k^2}{6\zeta_2} + \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2}, \\
 &\vdots \\
 G'_n &= \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_2 + k^2}{n(n-1)} G'_{n-2} \quad \forall n \geq 2,
 \end{aligned}$$

y

$${}^2b_n = (-1)^{n+1} {}^2b_1 G'_n \quad \forall n \geq 2.$$

De tal forma que para la velocidad, en la curva 2, cuando ${}^2b_0 = 0$ y ${}^2b_1 \neq 0$ la solución estará dada por

$$\begin{aligned}
 {}^2u_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n \\
 &= {}^2b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} {}^2b_1 G'_n x^n \\
 &= {}^2b_1 x + {}^2b_1 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \\
 &= {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right]. \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

Dado que la solución general de la velocidad, en la curva 2, está dada por la ecuación (4.86), al sustituir en ella las ecuaciones (4.87) y (4.88) se tiene que

$${}^2u(x) = {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right] + {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right]. \tag{4.89}$$

4.3. Condiciones de frontera

Para determinar las constantes relacionadas en las soluciones de la elevación y la velocidad para la curva 1, (4.42), (4.55), y la curva 2, (4.76) y (4.89), se partirá de las condiciones de frontera de Robin impuestas para la elevación y la velocidad (tabla 2.1) y del punto que intersecta a las dos curvas, en este caso será el punto P_2 que se muestra en la figura 4.1.

La condición de frontera izquierda se tratará con la ecuación (4.42) para la solución de la elevación ${}^1\eta(0)$ y con la ecuación (4.55) para la solución de la velocidad ${}^1u(0)$ de la curva 1. Estas condiciones estan dadas por

$${}^1\eta(0) = \eta_0, \quad (4.90)$$

$${}^1u(0) = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}. \quad (4.91)$$

Así, se tiene que

$${}^1\eta(x) = {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right],$$

$$\begin{aligned} {}^1\eta(0) &= {}^1a_0 [1 + 0] + {}^1a_1 [0 + 0] \\ &= {}^1a_0, \end{aligned}$$

$${}^1a_0 = \eta_0, \quad (4.92)$$

y

$${}^1u(x) = {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right],$$

$$\begin{aligned} {}^1u(0) &= {}^1b_0 [1 + 0] + {}^1b_1 [0 + 0] \\ &= {}^1b_0, \end{aligned}$$

$${}^1b_0 = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}. \quad (4.93)$$

La condición de frontera derecha se tratará con la ecuación (4.76) para la solución de la elevación ${}^2\eta(1)$ y con la ecuación (4.89) para la solución de la velocidad ${}^2u(1)$ de la curva 2. Estas condiciones están dadas por

$$\frac{d}{dx}[{}^2\eta(1)] = 0, \quad (4.94)$$

$${}^2u(1) = 0. \quad (4.95)$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[{}^2\eta(x)] &= {}^2a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n n x^{n-1} \right] + {}^2a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n n x^{n-1} \right], \\ \frac{d}{dx}[{}^2\eta(1)] &= {}^2a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W'_n \right] + {}^2a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V'_n \right] \\ 0 &= {}^2a_0 \delta_0 + {}^2a_1 \delta_1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$${}^2a_0 = -\frac{{}^2a_1 \delta_1}{\delta_0}, \quad (4.96)$$

y

$$\begin{aligned} {}^2u(x) &= {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right] + {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right], \\ {}^2u(1) &= {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n \right] + {}^2b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n \right] \\ 0 &= {}^2b_0 \epsilon_0 + {}^2b_1 \epsilon_1, \end{aligned}$$

obtenemos,

$${}^2b_0 = -\frac{{}^2b_1 \epsilon_1}{\epsilon_0}. \quad (4.97)$$

Ahora, vamos a determinar las constantes de la elevación y la velocidad en el punto P_2 que es dónde coinciden las dos curvas. El valor de x en este punto es r_2 y este valor es el que será usado para los cálculos.

Las ecuaciones consideradas para este caso son

$${}^1\eta(r_2) = {}^2\eta(r_2), \quad (4.98)$$

$$\frac{d}{dx}[{}^1\eta(r_2)] = \frac{d}{dx}[{}^2\eta(r_2)], \quad (4.99)$$

$${}^1u(r_2) = {}^2u(r_2), \quad (4.100)$$

$$\frac{d}{dx}[{}^1u(r_2)] = \frac{d}{dx}[{}^2u(r_2)], \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} {}^1\eta(x) &= {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right], \\ {}^1\eta(r_2) &= {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n r_2^n \right] + {}^1a_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n r_2^n \right] \\ &= \eta_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n r_2^n \right] + {}^1a_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n r_2^n \right], \end{aligned}$$

de donde,

$${}^1\eta(r_2) = \theta_0 + {}^1a_1\theta_1, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} {}^2\eta(x) &= {}^2a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \right] + {}^2a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \right], \\ {}^2\eta(r_2) &= {}^2a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n r_2^n \right] + {}^2a_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n r_2^n \right], \end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$${}^2\eta(r_2) = {}^2a_0\mu_0 + {}^2a_1\mu_1, \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[^1\eta(x)] &= {}^1a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n x^{n-1} \right] + {}^1a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n x^{n-1} \right], \\
\frac{d}{dx}[^1\eta(r_2)] &= {}^1a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n r_2^{n-1} \right] + {}^1a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n r_2^{n-1} \right] \\
&= \eta_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n r_2^{n-1} \right] + {}^1a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n r_2^{n-1} \right],
\end{aligned}$$

simplificando,

$$\frac{d}{dx}[^1\eta(r_2)] = \chi_0 + {}^1a_1 \chi_1, \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[^2\eta(x)] &= {}^2a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W'_n x^{n-1} \right] + {}^2a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V'_n x^{n-1} \right], \\
\frac{d}{dx}[^2\eta(r_2)] &= {}^2a_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W'_n r_2^{n-1} \right] + {}^2a_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V'_n r_2^{n-1} \right],
\end{aligned}$$

obtenemos,

$$\frac{d}{dx}[^2\eta(r_2)] = {}^2a_0 \xi_0 + {}^2a_1 \xi_1, \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned}
{}^1u(x) &= {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right], \\
{}^1u(r_2) &= {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n r_2^n \right] + {}^1b_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n r_2^n \right] \\
&= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n r_2^n \right] + {}^1b_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n r_2^n \right],
\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones en corchetes, obtenemos

$${}^1u(r_2) = \psi_0 + {}^1b_1 \psi_1, \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}
{}^2u(x) &= {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right] + {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right], \\
{}^2u(r_2) &= {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n r_2^n \right] + {}^2b_1 \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n r_2^n \right],
\end{aligned}$$

de donde,

$${}^2u(r_2) = {}^2b_0 \rho_0 + {}^2b_1 \rho_1, \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [{}^1u(x)] &= {}^1b_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F_n x^{n-1} \right] + {}^1b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G_n x^{n-1} \right], \\
\frac{d}{dx} [{}^1u(r_2)] &= {}^1b_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F_n r_2^{n-1} \right] + {}^1b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G_n r_2^{n-1} \right] \\
&= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F_n r_2^{n-1} \right] + {}^1b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G_n r_2^{n-1} \right],
\end{aligned}$$

simplificando la expresión anterior, sustituyendo las series dentro de los corchetes por sigma

$$\frac{d}{dx} [{}^1u(r_2)] = \sigma_0 + {}^1b_1 \sigma_1, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [{}^2u(x)] &= {}^2b_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F'_n x^{n-1} \right] + {}^2b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G'_n x^{n-1} \right], \\
\frac{d}{dx} [{}^2u(r_2)] &= {}^2b_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F'_n r_2^{n-1} \right] + {}^2b_1 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G'_n r_2^{n-1} \right],
\end{aligned}$$

obtenemos,

$$\frac{d}{dx} [{}^2u(r_2)] = {}^2b_0 \phi_0 + {}^2b_1 \phi_1. \quad (4.109)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.102) y (4.103) en (4.98) se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta_0 + {}^1a_1 \theta_1 &= {}^2a_0 \mu_0 + {}^2a_1 \mu_1 \\
{}^1a_1 &= \frac{{}^2a_0 \mu_0 + {}^2a_1 \mu_1 - \theta_0}{\theta_1}.
\end{aligned} \quad (4.110)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.104) y (4.105) en (4.99) se tiene que

$$\begin{aligned}\chi_0 + {}^1a_1\chi_1 &= {}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1 \\ {}^1a_1 &= \frac{{}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1 - \chi_0}{\chi_1}.\end{aligned}\quad (4.111)$$

Igualando las ecuaciones (4.110) y (4.111) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{{}^2a_0\mu_0 + {}^2a_1\mu_1 - \theta_0}{\theta_1} &= \frac{{}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1 - \chi_0}{\chi_1}, \\ \left({}^2a_0\mu_0 + {}^2a_1\mu_1 - \theta_0\right)\chi_1 &= \left({}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1 - \chi_0\right)\theta_1, \\ {}^2a_0\mu_0\chi_1 + {}^2a_1\mu_1\chi_1 - \theta_0\chi_1 &= {}^2a_0\xi_0\theta_1 + {}^2a_1\xi_1\theta_1 - \chi_0\theta_1, \\ {}^2a_0\mu_0\chi_1 - {}^2a_0\xi_0\theta_1 &= {}^2a_1\xi_1\theta_1 - \chi_0\theta_1 - {}^2a_1\mu_1\chi_1 + \theta_0\chi_1, \\ {}^2a_0(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1) &= {}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1) - \chi_0\theta_1 + \theta_0\chi_1, \\ {}^2a_0 &= \frac{{}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1) - \chi_0\theta_1 + \theta_0\chi_1}{\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1}.\end{aligned}\quad (4.112)$$

Igualando las ecuaciones (4.96) y (4.112) se tiene

$$\begin{aligned}-\frac{{}^2a_1\delta_1}{\delta_0} &= \frac{{}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1) - \chi_0\theta_1 + \theta_0\chi_1}{\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1}, \\ -{}^2a_1\delta_1(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1) &= \left({}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1) - \chi_0\theta_1 + \theta_0\chi_1\right)\delta_0, \\ -{}^2a_1\delta_1(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1) &= {}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0 - \chi_0\theta_1\delta_0 + \theta_0\chi_1\delta_0, \\ {}^2a_1\delta_1(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1) + {}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0 &= \chi_0\theta_1\delta_0 - \theta_0\chi_1\delta_0, \\ {}^2a_1[(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0] &= \chi_0\theta_1\delta_0 - \theta_0\chi_1\delta_0, \\ {}^2a_1 &= \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}.\end{aligned}\quad (4.113)$$

Sustituyendo la ecuación (4.113) en la ecuación (4.96) se tiene

$$\begin{aligned}{}^2a_0 &= -\left[\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}\right]\frac{\delta_1}{\delta_0} \\ &= -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}.\end{aligned}\quad (4.114)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.113) y (4.114) en (4.110) se tiene

$$\begin{aligned}
\theta_0 + {}^1a_1\theta_1 &= -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}\mu_0 + \\
&\quad \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}\mu_1, \\
\theta_0 + {}^1a_1\theta_1 &= -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1\mu_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0} + \\
&\quad \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0\mu_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}, \\
{}^1a_1\theta_1 &= -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1\mu_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0} + \\
&\quad \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0\mu_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0} - \theta_0, \\
{}^1a_1 &= -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1\mu_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1\theta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0\theta_1} + \\
&\quad \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0\mu_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1\theta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0\theta_1} - \frac{\theta_0}{\theta_1}. \tag{4.115}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.106) y (4.107) en (4.100) se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_0 + {}^1b_1\psi_1 &= {}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1, \\
{}^1b_1 &= \frac{{}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1 - \psi_0}{\psi_1}. \tag{4.116}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.108) y (4.109) en (4.101) se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_0 + {}^1b_1\sigma_1 &= {}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1, \\
{}^1b_1 &= \frac{{}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1 - \sigma_0}{\sigma_1}. \tag{4.117}
\end{aligned}$$

Iguando las ecuaciones (4.116) y (4.117) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{{}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1 - \psi_0}{\psi_1} &= \frac{{}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1 - \sigma_0}{\sigma_1}, \\
\left({}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1 - \psi_0\right)\sigma_1 &= \left({}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1 - \sigma_0\right)\psi_1, \\
{}^2b_0\rho_0\sigma_1 + {}^2b_1\rho_1\sigma_1 - \psi_0\sigma_1 &= {}^2b_0\phi_0\psi_1 + {}^2b_1\phi_1\psi_1 - \sigma_0\psi_1, \\
{}^2b_0\rho_0\sigma_1 - {}^2b_0\phi_0\psi_1 &= {}^2b_1\phi_1\psi_1 - \sigma_0\psi_1 - {}^2b_1\rho_1\sigma_1 + \psi_0\sigma_1 \\
{}^2b_0(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1) &= {}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1) + \psi_0\sigma_1 - \sigma_0\psi_1, \\
{}^2b_0 &= \frac{{}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1) - \sigma_0\psi_1 + \psi_0\sigma_1}{\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1}. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Iguando las ecuaciones (4.97) y (4.118) se tiene

$$\begin{aligned}
-\frac{{}^2b_1\epsilon_1}{\epsilon_0} &= \frac{{}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1) - \sigma_0\psi_1 + \psi_0\sigma_1}{\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1}, \\
-{}^2b_1\epsilon_1(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1) &= \left({}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1) - \sigma_0\psi_1 + \psi_0\sigma_1\right)\epsilon_0, \\
-{}^2b_1(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 &= {}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0 - \sigma_0\psi_1\epsilon_0 + \psi_0\sigma_1\epsilon_0, \\
{}^2b_1(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + {}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0 &= \sigma_0\psi_1\epsilon_0 - \psi_0\sigma_1\epsilon_0, \\
{}^2b_1[(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0] &= \sigma_0\psi_1\epsilon_0 - \psi_0\sigma_1\epsilon_0,
\end{aligned}$$

$${}^2b_1 = \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}. \quad (4.119)$$

Sustituyendo la ecuación (4.119) en la ecuación (4.97) se tiene

$$\begin{aligned}
{}^2b_0 &= -\left[\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}\right]\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \\
&= -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}. \quad (4.120)
\end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.119) y (4.120) en la ecuación (4.116) se

tiene

$$\begin{aligned}
\psi_0 + {}^1b_1\psi_1 &= -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}\rho_0 + \\
&\quad \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}\rho_1, \\
\psi_0 + {}^1b_1\psi_1 &= -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1\rho_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0} + \\
&\quad \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0\rho_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}, \\
{}^1b_1\psi_1 &= -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1\rho_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0} + \\
&\quad \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0\rho_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0} - \psi_0, \\
{}^1b_1 &= -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1\rho_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1\psi_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0\psi_1} + \\
&\quad \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0\rho_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1\psi_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0\psi_1} - \frac{\psi_0}{\psi_1}. \tag{4.121}
\end{aligned}$$

De esta manera, se ha obtenido la solución para la elevación ${}^1\eta(x)$ y ${}^2\eta(x)$ y para la velocidad ${}^1u(x)$ y ${}^2u(x)$ de las ecuaciones de aguas someras linealizadas, sin rotación y sin viscosidad como serie de potencias, para un fondo batimétrico ajustado por dos funciones cuadráticas acopladas $H_1(x)$ y $H_2(x)$, definidas por cinco puntos. Además, se establecen las condiciones bajo las cuales estas dos funciones forman una función continua.

Capítulo 5

Análisis del modelo

En el presente capítulo se realizará un análisis de las soluciones de la elevación y la velocidad obtenidos en el capítulo 3 para una batimetría modelada por una función cuadrática de un sistema de ecuaciones de aguas someras linealizadas sin rotación y sin viscosidad.

Tomaremos en cuenta las aproximaciones necesarias para determinar la velocidad de la onda en cada uno de los tipos de aguas, que nos permita llegar a la definición de velocidad de onda para aguas someras. A partir de esta definición se verificará que el modelo analítico cumpla con la teoría de aguas someras. Luego, dado que las soluciones para la elevación y la velocidad están dadas en serie de potencias alternadas infinitas, se analizarán los lugares en el canal donde el modelo analítico es convergente y el comportamiento de dichas soluciones en diferentes batimetrías.

La velocidad de la onda se define como una relación matemática que vincula la función tangente hiperbólica con la longitud de onda, el periodo de las ondas y la altura de las ondas, que de acuerdo con las diferentes aproximaciones que se consideren para la función trigonométrica, determinará el tipo de agua en el que se mueve la onda, ya sea aguas profundas, transicionales o someras. De igual forma, la profundidad del canal tiene un gran efecto en la velocidad de la onda debido a la interacción con el fondo marino, lo que hace que dicho parámetro sea fundamental a la hora de expresar la velocidad de la onda.

La velocidad de la onda a cualquier profundidad está dada por la ecua-

ción

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H_0}{\lambda}\right)}. \quad (5.1)$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de la función $\tanh x$ (fig. 5.1) cuyo dominio es todos los reales, se presentan dos casos de aproximación, cuando el argumento representa un valor casi nulo $0 < x < 0.05$ cuya aproximación es usada para definir las aguas someras, y cuando el argumento representa valores mayores a π , aproximación utilizada para las aguas profundas. Para el primer caso, se tiene que $|\tanh x - x| < 4 \times 10^{-5}$ lo que hace que la función sea aproximadamente su argumento, $\tanh x \approx x$, este valor de x se muestra con una línea vertical azul en la fig. 5.1. Para el segundo caso para todos los valores de x tal que $x > \pi$, se tiene que $\tanh x - 1 = 0$, lo que hace que la función sea aproximadamente la unidad, $\tanh x \approx 1$, el valor de x a partir del cual se cumple esta aproximación se muestra con una línea vertical roja en la fig. 5.1. Las anteriores aproximaciones se tienen en cuenta para la relación existente entre la profundidad del canal y la longitud de onda [Wright et al., 1999].

En aguas más profundas que la mitad de la longitud de onda, $H_0 > \lambda/2$, llamadas aguas profundas, la velocidad de la onda depende de la longitud de onda, y se utiliza la aproximación $\tanh x \approx 1$ para determinarla. Aplicando dicha aproximación a la función tangente hiperbólica de la velocidad de la onda se tiene

$$\tanh\left(\frac{2\pi H_0}{\lambda}\right) \approx 1, \quad (5.2)$$

de donde la velocidad de la onda viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (5.3)$$

En aguas mucho menos profundas que la vigésima parte de la longitud de onda, $H_0 < \lambda/20$, conocidas como aguas someras, la velocidad de la onda se determina por la profundidad del agua y se utiliza la aproximación $\tanh x \approx x$. Al aplicar dicha aproximación a la función tangente hiperbólica de la velocidad de la onda se obtiene

$$\tanh \frac{2\pi H_0}{\lambda} \approx \frac{2\pi H_0}{\lambda}, \quad (5.4)$$

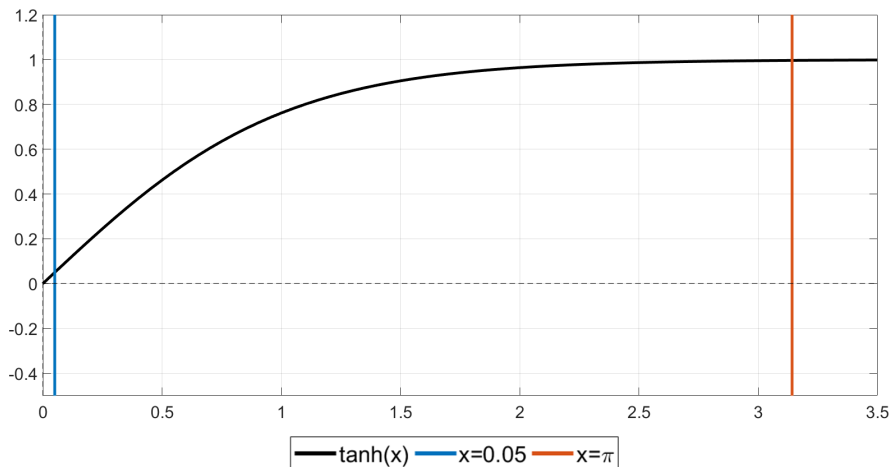


Figura 5.1: Gráfica de la función $\tanh x$. Las líneas verticales indican los valores del dominio de la función que determinan la clasificación en aguas someras ($x = 0.05$ en color azul) y aguas profundas ($x = \pi$ en color rojo).

lo que genera una velocidad de la onda dada por,

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right) \frac{2\pi H_0}{\lambda}}, \quad (5.5)$$

que se reduce a

$$c = \sqrt{gH_0}. \quad (5.6)$$

Para aquellas aguas someras donde la profundidad se encuentra determinada por la longitud de onda entre los valores $\lambda/20 < H_0 < \lambda/2$, llamadas aguas transicionales, se utiliza la ec. (5.1).

A continuación y con la finalidad de trabajar con datos adimensionales y poder comparar entre los resultados, se normalizan las medidas de la profundidad y el ancho del canal respecto a sus valores iniciales indicados en las condiciones de frontera (Tabla 2.1).

Para saber si el modelo analítico se comporta de acuerdo con la teoría de aguas someras, como dos ondas desfasadas un ángulo de $\pi/2$, es necesario analizar el comportamiento de las soluciones de la elevación y la velocidad

de acuerdo con la teoría de ondas superficiales de gravedad. Para dicho análisis tomaremos valores particulares de la profundidad H_0 , la elevación η_0 y longitud de onda λ que nos permita observar el comportamiento de los nodos en ambas soluciones.

Para determinar si las soluciones al sistema de ecuaciones de aguas someras son convergentes, ec. 3.52 de la elevación y ec. 3.53 de la velocidad obtenidas en el capítulo 3, se ha observado si después de un número finito de sumas parciales la diferencia entre dos términos consecutivos de las sumas parciales es menor a un valor permitido, este valor lo llamamos tolerancia ($tol = 0.001$), es decir, que si la diferencia entre las sumas parciales es mayor a esta tolerancia decimos que la serie es divergente.

Para determinar el número de sumas parciales suficientes para que las soluciones convergentes cumplan con la teoría de ondas superficiales de gravedad fue necesario observar como se comportaba la convergencia para 8, 16, 32, 64, 128 sumas parciales, la cantidad de sumas parciales fue determinado a partir de un formato binario para no generar errores mayores y coincidir con la forma de trabajar del software utilizado.

Para las constantes r y s (ec. 3.2) que son los puntos que definen la forma de la batimetría (Fig. 3.1) y su ecuación cuadrática (ec. 3.3), se les asignan valores desde cero hasta uno, en incrementos de 0.005, para determinar los puntos del canal (r, s) que corresponden a las batimetrías convergentes.

Se puede observar que, aunque para pocas sumas parciales ($n = 8, 16$) las soluciones pueden ser graficadas, estas no corresponden a un comportamiento de teoría ondas superficiales de gravedad (figuras 5.2(a) y 5.2(b)), esta situación puede atribuirse a los pocos términos de la sucesión de sumas parciales de tal forma que el límite del término n -ésimo de la sucesión no es aún alcanzable numéricamente.

En el caso de las sumas parciales para $n = 32, 64$ (figuras 5.2(c) y 5.2(d)) ya comienza a verse un desfase de $\pi/2$ entre la elevación y la velocidad hacia la parte del canal que conecta con aguas profundas, aunque para la zona cercana a la línea de costa presenta un comportamiento que no cumple con esta condición. Lo anterior advierte que en un número mayor de sumas parciales el límite del término n -ésimo de la sucesión puede ser obtenido numéricamente.

Para el caso de $n = 128$ términos de sumas parciales ya se puede ob-

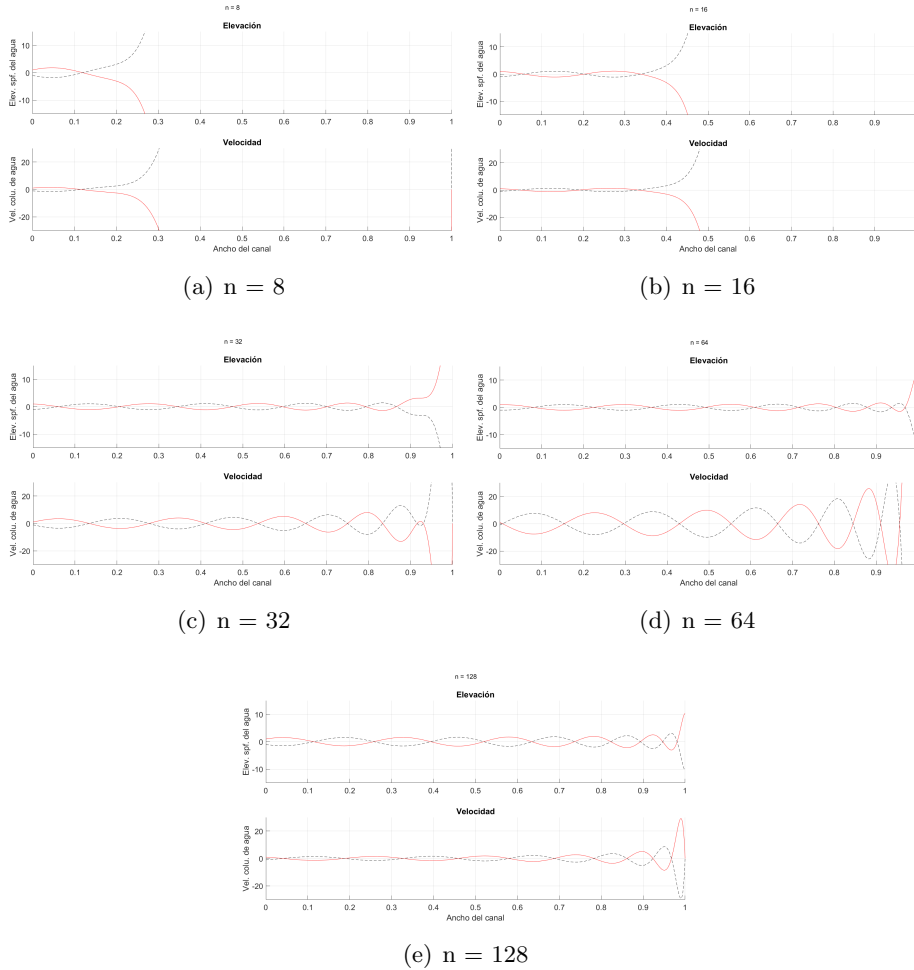


Figura 5.2: Soluciones de la elevación y la velocidad, para un caso particular y diferente número de sumas parciales, normalizadas con η_0 y u_0 respectivamente.

servar un comportamiento ideal para las soluciones de la elevación y la velocidad (figura 5.2(e)) y que pueden corresponder con el desfase de $\pi/2$ buscado. Lo anterior indica que este número de sumas parciales es suficiente para determinar la convergencia de las series de potencias alternadas

infinitas y realizar las verificaciones correspondientes al análisis del modelo.

Hacemos una ampliación a la figura 5.2(e) en la figura 5.3 y podemos observar de manera más clara las soluciones de la elevación (panel superior) y de la velocidad (panel inferior) junto con sus respectivas envolventes, marcadas con líneas punteadas, de tal forma que se puede identificar la onda estacionaria y visualizar los nodos y las antinodos de cada solución.

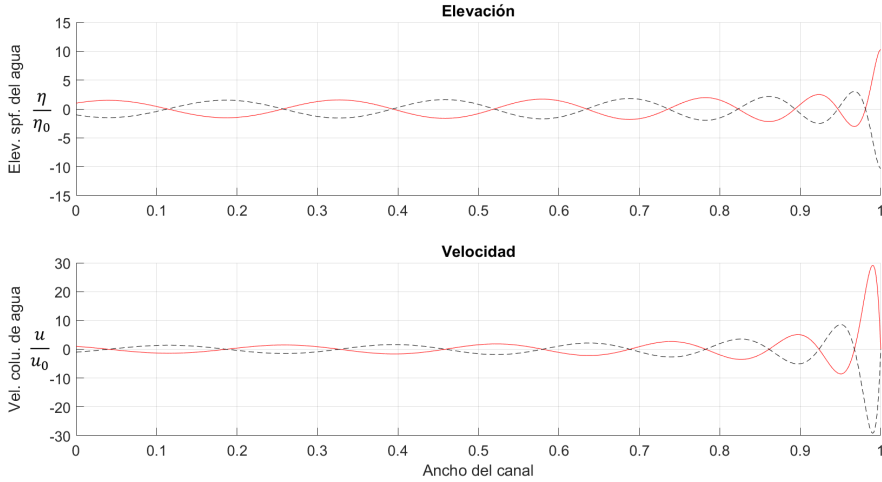


Figura 5.3: Soluciones de la elevación y la velocidad, para un caso particular con 128 sumas parciales. Variables normalizadas con η_0 y u_0 respectivamente.

Para determinar de una manera clara el desfase de $\pi/2$ o cuadratura entre la solución de la velocidad y la elevación es necesario considerar una gráfica de fase, una figura similar a las conocidas figuras de Lissajous [Cortés Osorio et al., 2008, Flemming and Hornes, 2013], ya que permite observar la trayectoria de un punto móvil cuyas coordenadas rectangulares se describen por movimientos armónicos simples.

De acuerdo con la figura 5.4, se observa que, efectivamente, hay un desfase de $\pi/2$ entre la velocidad y la elevación y que, justo cuando la onda se acerca a la costa, cambia la relación entre las frecuencias angulares del movimiento, tanto de la elevación como de la velocidad. Se puede observar que, mientras mantenían una relación de frecuencia angular 1:1 como se

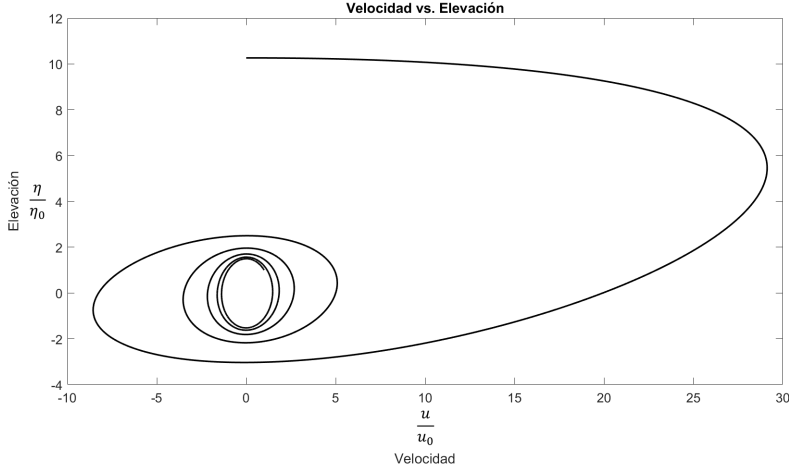


Figura 5.4: Gráfica de fase para las soluciones de la velocidad y la elevación.

observa en las elipses concéntricas, parece cambiar a una relación 3:4 o 3:5 para el mismo desfase, lo que se identifica en la figura como un bumerán.

Para $n = 128$, como un número adecuado de sumas parciales para el análisis del modelo, se determina la zona de convergencia en el canal tal que las batimetrías que se encuentren dentro de esta zona tanto la elevación y la velocidad son convergentes, bajo el criterio que se definió anteriormente, esto se puede observar en la figura 5.5 la zona pintada con negro.

Se toman algunas batimetrías representativas dentro de la zona de convergencia que cumplen con la condición de aguas someras (ec. 5.6), de tal forma que se pueda determinar si hay un patrón de comportamiento en las soluciones de elevación y velocidad. Como batimetría de referencia consideramos aquella que es descrita por la ecuación $H(x) = x$ que corresponde a un plano inclinado 45 grados. De esta batimetría de referencia nos movemos en forma vertical y horizontal de tal forma que se determinen diferentes batimetrías contenidas en la zona de convergencia y que faciliten la interpretación (Fig. 5.5). Se dibujan sus respectivas envolventes, líneas punteadas en la gráfica, con el fin de observar la onda estacionaria.

De acuerdo con las figuras 5.6 se puede observar que a medida que la batimetría se hace más profunda, batimetrías en el orden B, A y D de

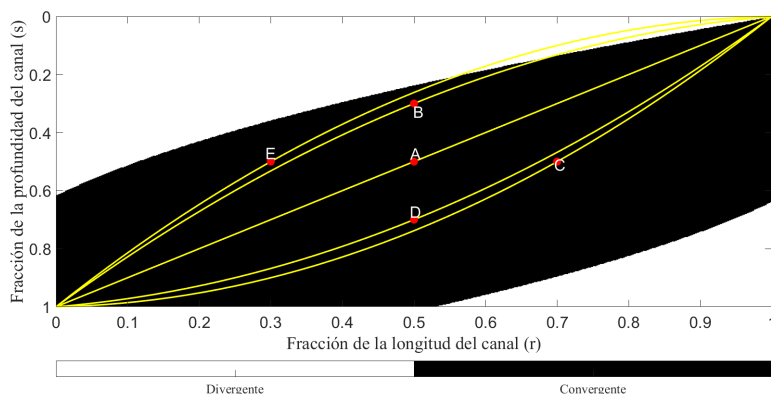


Figura 5.5: Zona de convergencia para la solución de la elevación y la velocidad en un canal de aguas someras. Cinco diferentes batimetrías en la zona de convergencia para la elevación y la velocidad. Puntos B, A y D representan el cambio vertical. Puntos E, A y C representan el cambio horizontal.

la figura 5.5, que pasa de tener una forma cóncava a una forma convexa, la batimetría cóncava que está por encima de la batimetría de referencia, presenta valores mayores para la elevación y la velocidad y disminuye para la batimetría de referencia siendo aún menor para la batimetría convexa.

De igual forma, observando la figura 5.7 se puede afirmar que al pasar de la batimetría E, por la batimetría A hasta la batimetría C, como se indican en la figura 5.5, se observa el mismo cambio de concavidad que en el cambio vertical, la batimetría cóncava que está por encima de la batimetría de referencia, presenta valores mayores para la elevación y la velocidad y disminuye para la batimetría de referencia siendo aún menor para la batimetría convexa.

De acuerdo con las figuras 5.6 y 5.7 se puede afirmar que para batimetrías con formas cóncavas, aquellas que al ser dibujadas en el plano del canal de aguas someras estarán por encima de la batimetría de referencia, tendrán mayores valores para la elevación y la velocidad en comparación a las batimetrías convexas que estarán por debajo de la batimetría de referencia, estas se pueden observar como las líneas azules en cada gráfico. Mientras que las batimetrías que se encuentran por debajo de esta bati-

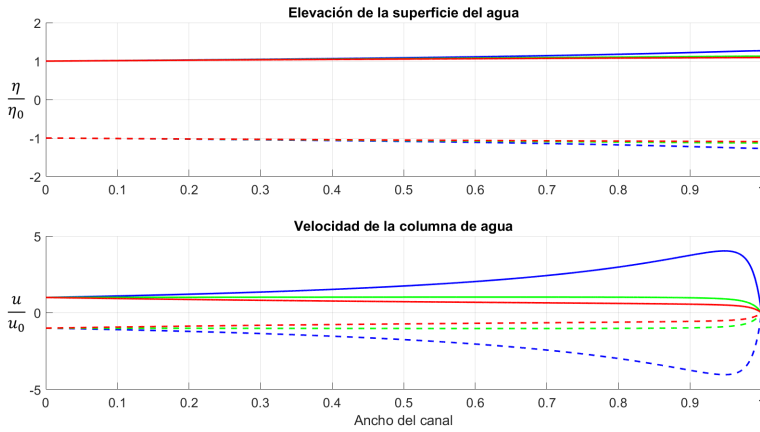


Figura 5.6: Cambio vertical. Línea azul batimetría B, línea verde batimetría A (de referencia), línea roja batimetría D, de acuerdo con las distinciones en la figura 5.5.

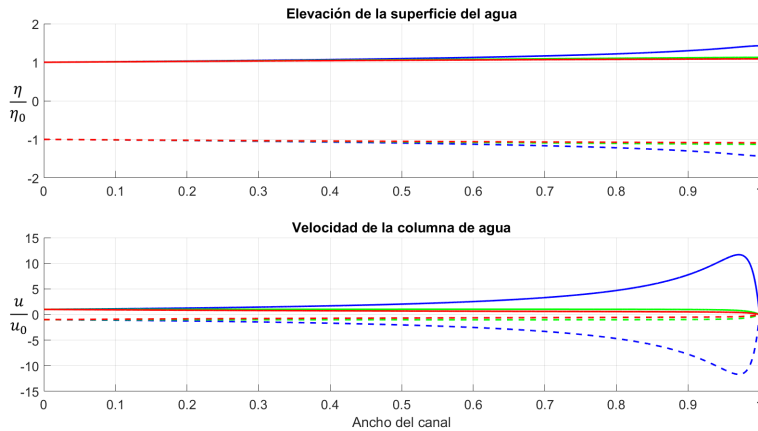


Figura 5.7: Cambio horizontal. Línea azul batimetría E, línea verde batimetría A (de referencia), línea roja batimetría C, de acuerdo con las distinciones en la figura 5.5.

metría de referencia presentan los valores más bajos para la velocidad y elevación.

De todo lo anterior se observa que la solución analítica en serie de potencias para la elevación y la velocidad de las ecuaciones linealizadas de aguas someras, sin viscosidad y sin rotación, son una forma fácil y rigurosa de abordar la complejidad del problema planteado y que cumple con la teoría de onda en aguas someras.

Capítulo 6

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta tesis parten de las ecuaciones de movimiento para un fluido compresible que desprecia la rotación y la viscosidad, y se reduce a resolver analíticamente un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas. La elevación y la velocidad son representadas por medio de ondas planas que al usar el método de variables separables permite llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales totales.

Se desarrollaron dos modelos matemáticos analíticos para la solución a la ecuación de aguas someras linealizadas, sin viscosidad y sin rotación, a partir de soluciones por serie de potencias alternadas infinitas, para batimetrías descritas por ecuaciones cuadráticas que se definen a partir de tres puntos. En cada uno de los modelos desarrollados se establecen las condiciones de frontera de Robin que limita la solución del problema.

El primer modelo está descrito por una ecuación cuadrática que se define por tres puntos del fondo batimétrico en el canal de aguas someras. Las soluciones del sistema corresponden a serie de potencias alternantes infinitas a las cuales se les analiza su convergencia para determinar cómo es su comportamiento dependiendo de la forma de la batimetría que se tenga. Se ha podido observar que este modelo se puede aplicar a zonas que presentan batimetrías suaves y que no presenten cambios bruscos. Para este primer modelo se observó que las soluciones de la elevación y la velocidad se encuentran en cuadratura lo que significa que cumple con la teoría de ondas superficiales de gravedad. Se determinó aquella zona en el canal de aguas someras donde las soluciones del modelo son convergentes y se encontró

que batimetrías someras tienen valores más altos de velocidad y elevación comparados con las batimetrías más profundas.

El segundo modelo obtenido está descrito por una función continua de dos tramos donde cada uno viene representado por una función cuadrática que es definida por tres puntos. Se requirió que las funciones que representan a la elevación y la velocidad, junto con sus derivadas, fueran iguales en el punto de intersección entre los dos tramos de la función, para que la función resultante fuese suave y con igual pendiente en este punto. Se hallan las soluciones en serie de potencias alternantes infinitas para la elevación y la velocidad para cada curva de la función a tramos. Este modelo al ser una función compuesta por dos funciones cuadráticas hace que sea más flexible en el momento de aplicarse en escenarios donde la batimetría es poco suave o que presenta forma irregular. Este modelo es de utilidad en aquellas aplicaciones de oceanografía que implican las ecuaciones de aguas someras ya que permite emplear los resultados en aquellos escenarios donde solo era posible utilizar funciones matemáticas complejas y modelos numéricos.

6.1. Trabajo a futuro

Describir fondos batimétricos irregulares menos suaves y formas complejas que puedan ser descompuestos a partir de funciones cuadráticas, cuyos resultados serán obtenidos por medio de software especializados y usando métodos matemáticos y computaciones avanzados que permitan la manipulación de un número grande de variables.

Determinar de una manera analítica la convergencia de las soluciones en serie de potencias alternantes infinitas para la elevación y la velocidad del sistema de aguas someras.

Capítulo 7

Primer artículo

A continuación, se encuentra el primer artículo open Access producto de capítulo 3 llamado *1-D shallow water equation, with no viscosity and no rotation, for a topography represented by a quadratic function*, publicado en la revista Journal of Physics Communications de la editorial IOPscience el pasado 7 de agosto de 2020, con lo que se cubre uno de los requisitos para obtener el título de PhD en Ciencias – Oceanografía Costera.

PAPER • OPEN ACCESS

1-D shallow water equation, with no viscosity and no rotation, for a topography represented by a quadratic function

To cite this article: Catalina Cortés-Vélez *et al* 2020 *J. Phys. Commun.* **4** 085005

View the [article online](#) for updates and enhancements.



PAPER

OPEN ACCESS

RECEIVED
11 May 2020REVISED
24 July 2020ACCEPTED FOR PUBLICATION
29 July 2020PUBLISHED
7 August 2020

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 licence](#).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.



1-D shallow water equation, with no viscosity and no rotation, for a topography represented by a quadratic function

Catalina Cortés-Vélez , Beatriz Martín-Atienza and Rafael Hernandez-Walls

Faculty of Marine Sciences, Autonomous University of Baja California, Transpeninsular Highway Ensenada—Tijuana, 22860, Ensenada, Baja California, Mexico

E-mail: atienza@uabc.edu.mx**Keywords:** partial derivative equations, shallow water equations, modeling bathymetry, power series

Abstract

Based on the linearized shallow water equations with no rotation and no viscosity, in a rectangular channel with topography, the analytical solution for elevation and velocity was obtained. The bathymetry of the rectangular channel is described by a quadratic function. The analytical solution was determined from generalized power series, resulting in numerically convergent power series. This methodology is a useful and easy tool, which can be used by teachers in the teaching of differential equations and modeling.

1. Introduction

Modeling bathymetry in coastal areas allows us to understand and determine changes due to different physical and hydrological processes, which can be used for conservation studies of natural systems and coastal platforms [1].

The most important physical factor in wave propagation in shallow waters is the bathymetry. A change in the seabed represents a change in the frequency and wavelength of the natural modes of oscillation. Its effects can result in human, economic, and material losses [2, 3].

To date, several analytical models of linearized shallow water flow without rotation have been published, with specific characteristics of bathymetry, allowing to establish the resonant modes of the study area. Among the specified bathymetries are flat bottom [4], parabolic [5], exponential [6] and hyperbolic square cosine [7].

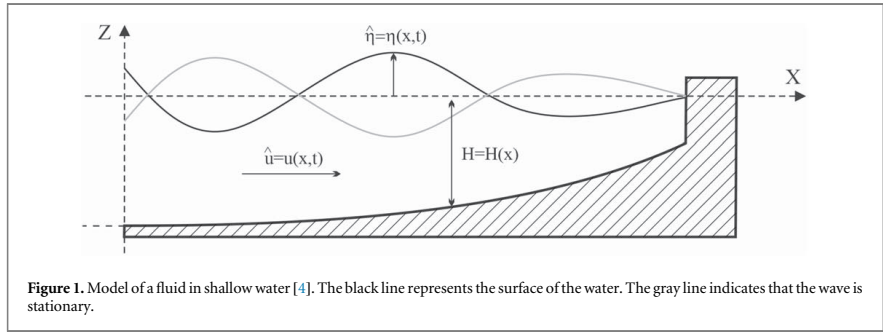
The analytical models mentioned use mathematical functions such as Legendre's differential equation and Bessel's equation [8]. For example, for a port of rectangular shape, Wang *et al* (2014) use Legendre's differential equation and consider a hyperbolic square cosine seabed, and Wang *et al* (2015) use the Bessel equation considering an exponential seabed. The analytical model proposed by Hernandez-Walls *et al* (2017), for a flat bottomed channel, uses finite differences and generates a tridiagonal system of equations that is then solved using a recursive form.

Although several studies about numerical solutions have found a way out of hydrological and environmental problems, some of them still lack an analytical model to be validated [9]. In the present work, an analytical method to solve the system of linearized shallow water equations with no rotation or viscosity is presented. We considered a bathymetry that does not depend on the modeling by a specific mathematical function, but it is described by the equation of a curve defined by three points. The solution for elevation and velocity is given in power series, which makes the solution easier to obtain.

The method for the solution of elevation and velocity is based on a system of two partial differential equations for shallow water that depends on velocity flow, elevation around mean sea level, and seafloor topography. This system of equations is decoupled and simplified by considering elevation and velocity as plane waves. In addition, a set of boundary conditions is imposed on the equations system.

1.1. Shallow water

The coordinate system x, z is defined as shown in figure 1. The theory of linearized shallow water, without rotation and viscosity, is reduced to solving the system of partial differential equations [10]:



$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = -H \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \hat{u} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2)$$

where $\hat{u}(x, t)$ is the average velocity flow that varies with position and time; $\hat{\eta}(x, t)$ is the elevation around mean sea level that changes with position and time; $H(x)$ is the topography of the seafloor, and g is the acceleration of gravity (see figure 1). The topography is assumed to be invariant in the y direction, allowing the problem to be simplified to one dimension and visualized as a cross-section on the y axis.

In order to achieve the solution of the system of equations (1) and (2), independently for elevation and velocity, we decouple the system. This decoupling is achieved by deriving with respect to the time in both equations. The higher order cross derivatives of elevation and velocity are continuous at each point on the bottom of the channel, and this allows the partial derivatives to be permuted [11]. Then the equations (1) and (2) can be replaced. The new system of partial differential equations is expressed by the same function in each equation ($\hat{u}$ and $\hat{\eta}$), which corresponds to,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = g \left(H \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial t^2} = g H \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + g \left(\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Elevation and velocity are considered a flat wave with an angular frequency of ω , so:

$$\hat{\eta}(x, t) = \eta(x) e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\hat{u}(x, t) = u(x) e^{i\omega t}. \quad (6)$$

The system of equations (3) and (4), when replaced by the equations (5) and (6) becomes the new system of differential equations with total derivatives,

$$-\frac{\omega^2}{g} \eta = H \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{dH}{dx} \frac{d\eta}{dx} \quad (7)$$

$$-\frac{\omega^2}{g} u = 2 \frac{dH}{dx} \frac{du}{dx} + H \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{d^2 H}{dx^2}. \quad (8)$$

For the elevation $\eta(x)$ and the velocity $u(x)$ the boundary conditions Robin type and Dirichlet type are imposed, respectively, both in the domain of each function Ω [12],

$$x \in \Omega: \quad \gamma \frac{df}{dx} + \beta f = \alpha.$$

The constants for Robin type and Dirichlet type boundary conditions, which correspond to our case study, are expressed in the following table.

According to the boundary conditions described for a shallow-water channel (table 1 and figure 1), the elevation is interpreted as an incident wave with a given height ($\eta(0) = \eta_0$) that is then fully reflected on the shoreline ($x = 1$, $\frac{d\eta}{dx}(1) = 0$); the velocity of the water column coming from the open sea is determined by the elevation, the depth of the channel at this point, and the acceleration of gravity $u(0) = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}$ and once it reaches the shoreline, the velocity is equal to 0.

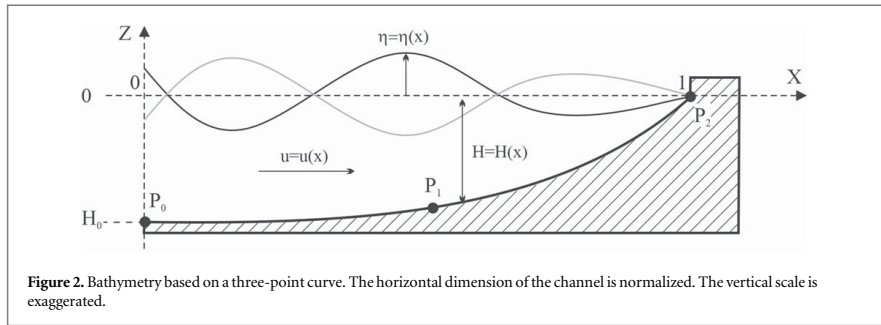


Table 1. Boundary conditions, Robin type for elevation and Dirichlet type for velocity, for flow in a channel with bathymetry represented by a continuous function.

Function	x	γ	β	α
Elevation	0	0	1	η_0
	1	1	0	0
Velocity	0	0	1	$\eta_0 \sqrt{\frac{\delta}{H_0}}$
	1	0	1	0

2. Methods

The methodology for finding the solution of the differential equation system for shallow water without rotation and viscosity will be shown below. The seabed is determined by bathymetry. Bathymetry is modeled using a quadratic function determined by three points.

2.1. Bathymetry modeled by a quadratic function

It is considered a unit channel ($0 \leq x \leq 1$) with a bathymetry given by the function,

$$H(x) = A + Bx + Cx^2, \quad (9)$$

its particular shape is defined by three points on the bathymetric curve (figure 2), determined by the constants r and s taken freely. The three points are defined below,

$$\begin{aligned} P_0(0, H_0) \\ P_1(r, sH_0), \quad \forall r, s \in [0, 1] \\ P_2(1, 0). \end{aligned}$$

To determine the values of the constants A , B and C in the equation (9), the equations system is solved,

$$\begin{aligned} H_0 &= A \\ sH_0 &= A + Br + Cr^2 \\ 0 &= A + B + C. \end{aligned} \quad (10)$$

The particular function $H(x) = H_0 + H_0\nu x + H_0\tau x^2$ is obtained, where:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{r^2 + s - 1}{r(1 - r)} \\ \tau &= \frac{1 - r - s}{r(1 - r)}. \end{aligned}$$

This particular function is replaced (7) and (8), such that

$$(1 + \nu x + \tau x^2) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (\nu + 2\tau x) \frac{d\eta}{dx} + k^2 \eta = 0 \quad (11)$$

$$(1 + \nu x + \tau x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2(\nu + 2\tau x) \frac{du}{dx} + (2\tau + k^2)u = 0. \quad (12)$$

To determine the elevation and velocity, each is posed as a general power series,

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (13)$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad (14)$$

which are subsequently replaced in (11) and (12).

3. Results

For the results, it is necessary to consider the differential equation system (11) and (12), which is replaced by the power series (13) and (14). Boundary conditions for elevation and velocity are considered.

3.1. Elevation

Equation (13) is replaced in (11),

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + (1 + \nu x + \tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (\nu + 2\tau x) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0. \quad (15)$$

Similar terms are grouped together with respect to the variable x . A change of the variable is made for the summation indexes, such as the powers of the variable x coincide,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n+1)\tau + k^2)a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}] x^n = 0. \quad (16)$$

From the above, the succession is obtained,

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [(n(n+1)\tau + k^2)a_n + (n+1)^2 \nu a_{n+1}]. \quad (17)$$

To determine the solution of the elevation, two cases are contemplated where a_0 and a_1 will have null or non-null values. Each case determines a term of the general solution,

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x). \quad (18)$$

For the first case $a_0 \neq 0$ and $a_1 = 0$ you get the following solution,

$$\eta_1 = a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right], \quad (19)$$

here, succession $W_n \forall n \geq 2$ is given by,

$$\begin{aligned} W_0 &= -1 \\ W_1 &= 0 \\ W_2 &= \frac{k^2}{2} \\ W_3 &= \nu \frac{k^2}{3} \\ &\vdots \\ W_n &= \frac{(n-1)}{n} \nu W_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau + k^2}{n(n-1)} W_{n-2}. \end{aligned}$$

For the second case $a_0 = 0$ and $a_1 \neq 0$ you get the following solution,

$$\eta_2(x) = a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right], \quad (20)$$

here, succession $V_n \forall n \geq 2$ is given by,

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_1 &= 1 \\ V_2 &= \frac{1}{2} \nu \\ V_3 &= -\frac{2\tau + k^2}{6} + \frac{1}{3} \nu^2 \\ &\vdots \\ V_n &= \frac{n-1}{n} \nu V_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau + k^2}{n(n-1)} V_{n-2}. \end{aligned}$$

Using equation (18) we have,

$$\eta(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right], \quad (21)$$

here, we start from equation (21) and consider the Robin-type boundary conditions for the elevation, from which we obtain the coefficients a_0 and a_1 ,

$$\begin{aligned} a_0 &= \eta_0 \\ a_1 &= -\frac{\eta_0 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n}. \end{aligned}$$

By finding a_0 and a_1 , the analytical solution of the elevation for the shallow water equations, without rotation and viscosity, is obtained in a channel with bathymetry modeled by a quadratic equation determined by three points.

3.2. Velocity

Equation (14) is replaced in (12),

$$(1 + \nu x + \tau x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + 2(\nu + 2\tau x) \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} + (2\tau + k^2) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0. \quad (22)$$

Similar terms are grouped together with respect to the variable x . A change of the variable is made for the summation indexes, such as the powers of the variable x coincide,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)\tau + k^2] b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1} + (n+2)(n+1)b_{n+2} x^n = 0. \quad (23)$$

From the above, the succession is obtained,

$$b_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} [(n+2)(n+1)\tau + k^2] b_n + (n+2)(n+1)\nu b_{n+1}. \quad (24)$$

To determine the solution of the velocity, two cases are contemplated where b_0 and b_1 will have null or non-null values. Each case determines a term of the general solution,

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x). \quad (25)$$

For the first case $b_0 \neq 0$ and $b_1 = 0$ you get the following solution,

$$u_1(x) = b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} E_n x^n \right], \quad (26)$$

here, succession $F_n \forall n \geq 2$ is given by,

$$\begin{aligned} F_0 &= -1 \\ F_1 &= 0 \\ F_2 &= \frac{2\tau + k^2}{2} \\ F_3 &= \nu \frac{2\tau + k^2}{2} \\ &\vdots \\ F_n &= \nu F_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau + k^2}{n(n-1)} F_{n-2}. \end{aligned}$$

For the second case $b_0 = 0$ and $b_1 \neq 0$ you get the following solution,

$$u_2(x) = b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right], \quad (27)$$

here, succession $G_n \forall n \geq 2$ is given by,

$$\begin{aligned} G_0 &= 0 \\ G_1 &= 1 \\ G_2 &= \nu \\ G_3 &= \nu^2 - \frac{6\tau + k^2}{6} \\ &\vdots \\ G_n &= \nu G_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau + k^2}{n(n-1)} G_{n-2}. \end{aligned}$$

Using equation (25) we have,

$$u(x) = b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right], \quad (28)$$

here, we start from equation (28) and consider the Dirichlet-type boundary conditions for the velocity, from which we obtain the coefficients b_0 and b_1 ,

$$\begin{aligned} b_0 &= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \\ b_1 &= -\frac{\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n \right]}{\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n \right]}. \end{aligned}$$

By finding b_0 and b_1 , the analytical solution of the velocity for the equations of shallow water, without rotation and viscosity, is obtained in a channel with bathymetry modeled by a quadratic equation determined by three points.

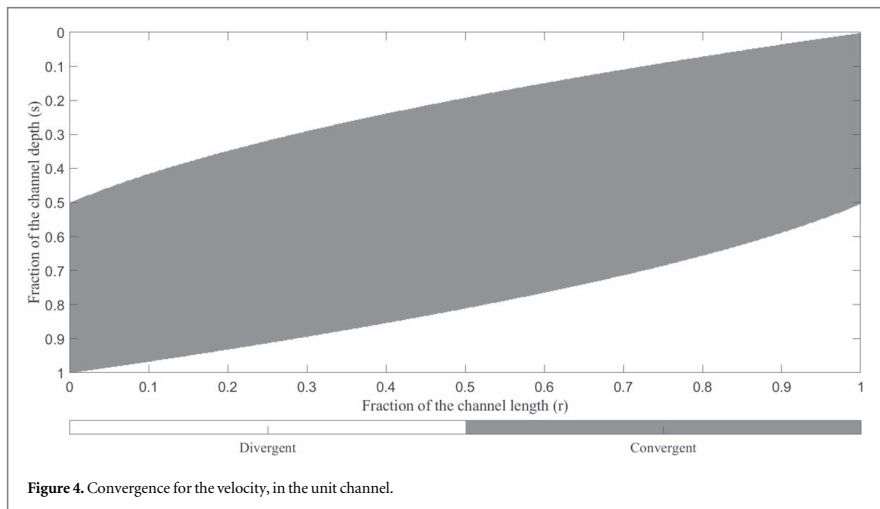
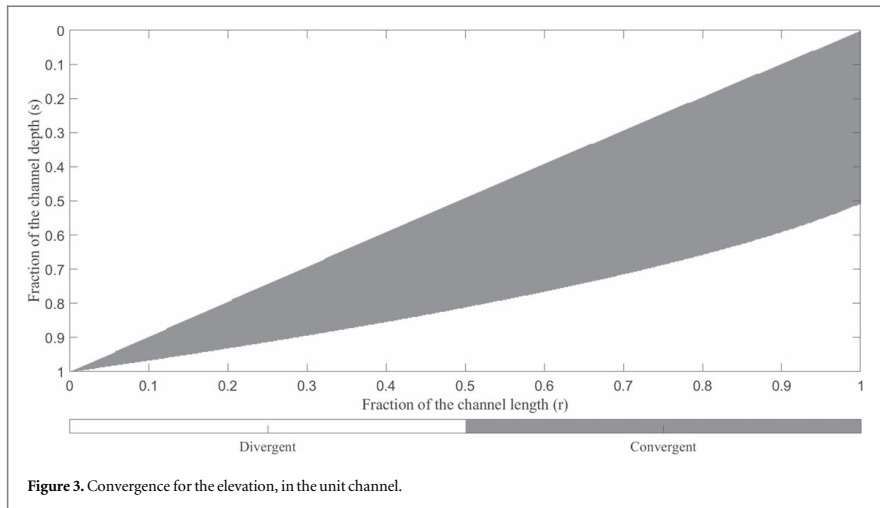
3.3. Graphic analysis of convergence

To determine the regions in the unitary channel where the methodological proposal is convergent, equations (21) and (28) have been evaluated. For the constants r and s , which are the points that define the form of bathymetry (figure 2) and its quadratic equation (10), they are assigned values from zero to one. To determine the points in the channel (r, s) where the solutions for elevation and velocity are converging, the first 1000 terms of the series were taken. The last two terms of these finite series are compared, in a difference under absolute value.

In figures 3 and 4, the area where the elevation and velocity are converging, respectively, is shown in the unit channel. For the system of differential equations (11) and (12) to have a solution it is necessary to determine the zone where both, elevation and velocity, are converging (figure 5).

4. Conclusions

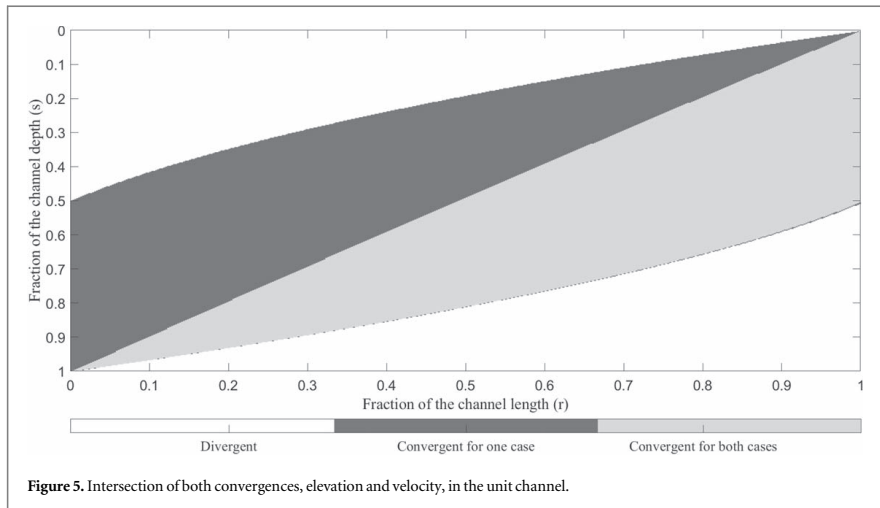
In this work, the analytical solution for the system of differential equations of linearized shallow water, without rotation and viscosity, has been deduced for a channel with bathymetry modeled by a quadratic function defined by three points. Due to the simplicity of the model, and the consideration of the elevation and velocity as plane



waves, this allowed the solution for the elevation and velocity to be given in power series, and this, in the future, will allow the generalization of the model to a finite number of curves that describe the bathymetry.

The solution described in this article can be used for elongated structures such as rivers, well-differentiated watercourses, elongated ports or ports with a narrow and long mouth. For shapes such as bays, structures with a square or rectangular floor plan, it is necessary to consider a box-type model, which considers the width of a channel as a function of its length, ($y = w(x)$). This last consideration results in a more complicated form for the analytical solution, so power series may not be suitable for modeling velocity and elevation.

It was found that the solutions converge numerically from a $N > 1000$, which opens a field of research to derive the analytical convergence of the solutions. The implemented methodology makes its use as an excellent teaching exercise for students of the basic professional training courses and easy to implement in the programming courses. The use of complex mathematical functions is not necessary.



ORCID iDs

Catalina Cortés-Vélez <https://orcid.org/0000-0001-9785-7075>

Beatriz Martín-Atienza <https://orcid.org/0000-0002-4874-3917>

Rafael Hernandez-Walls <https://orcid.org/0000-0001-5075-7579>

References

- [1] Fringer O B, Dawson C N, He R, Ralston D K and Zhang Y J 2019 The future of coastal and estuarine modeling: findings from a workshop *Ocean Modell.* **143** 1–23
- [2] Li L, Yuan Z and Gao Y 2018 Wash wave effects on ships moored in ports *Appl. Ocean Res.* **77** 89–105
- [3] Gao J, He Z, Zang J, Chen Q, Ding H and Wang G 2019 Topographic effects on wave resonance in the narrow gap between fixed box and vertical wall *Ocean Eng.* **180** 97–107
- [4] Hernandez-Walls R, Martín-Atienza B, Salinas-Matus M and Castillo J 2017 Solving the linear inviscid shallow water equations in one dimension, with variable depth, using a recursion formula *Eur. J. Phys.* **38** 65802
- [5] Shao D, Feng X and Feng W 2016 Numerical investigation of oscillations within a harbor of parabolic bottom induced by water surface disturbances *Appl. Ocean Res.* **59** 153–64
- [6] Wang G, Zheng J H, Liang Q H, Zhang W and Huang C 2015 Theoretical analysis of harbor resonance in harbor with an exponential bottom profile *China Ocean Eng.* **29** 821–34
- [7] Wang G, Zheng J, Liang Q and Zheng Y 2014 Analytical solutions for oscillations in a harbor with a hyperbolic-cosine squared bottom *Ocean Eng.* **83** 16–23
- [8] Olver F W J, Lozier D W, Boisvert R F and Clark C W 1986 *NIST Handbook of Mathematical Functions* vol 5 (Cambridge: Cambridge University Press)
- [9] Delestre O, Lucas C, Ksinant P A, Darboux F, Laguerre C, Tuoi Vo T N, James F and Cordier S 2013 SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies *Int. J. Numer. Methods Fluids* **72** 269–300
- [10] Tinti S 1980 Response of a harbour opened to a sea of variable depth *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH* **118** 783–95
- [11] Pozniak E and Ilin V 1991 *Fundamentos del Análisis Matemático, II* (Editorial Mir)
- [12] Ragab S A and Fayed H E 2018 *Introduction to Finite Element Analysis for Engineers* (Taylor & Francis Group)

Capítulo 8

Segundo artículo

A continuación, se encuentra el borrador del segundo artículo que corresponde al desarrollo del capítulo 4, que será sometido en una revista científica.

SHALLOW WATER EQUATIONS WITH BATHYMETRY MODELED BY TWO COUPLED QUADRATIC FUNCTIONS

C.I. CORTÉS-VÉLEZ, R. HERNANDEZ-WALLS, AND B. MARTÍN-ATIENZA

ABSTRACT. An analytical solution to the shallow water equations is presented, without rotation and without viscosity, in a channel with bathymetry modeled by two coupled quadratic functions. The analytical solution was calculated from generalized power series for both elevation and velocity. The use of two coupled quadratic functions allows greater flexibility in defining the shape of the bathymetry, as it facilitates the determination of the coefficients of both functions through the position of five points located along the channel. This allows the solution to be found more easily than using a bathymetric profile described by a single higher order polynomial. The results in this paper prepare the way for future work in the search for an analytical solution for the water analytical solution to the shallow water equations for a bottom profile described by a finite number of coupled quadratic functions.

1. INTRODUCTION

Resolver el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras en 1-D, que en su forma de una onda plana propagandose esta dado por [1],

$$(1) \quad -\frac{\omega^2}{g}\eta = H \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{dH}{dx} \frac{d\eta}{dx}$$

$$(2) \quad -\frac{\omega^2}{g}u = 2 \frac{dH}{dx} \frac{du}{dx} + H \frac{d^2u}{dx^2} + u \frac{d^2H}{dx^2},$$

involucra tomar en cuenta el perfil batimetrico dado por la variable H , el cual puede tener formas desde muy sencillas hasta muy complejas. Los autores de [1] trabajaron con una sola función cuadrática para representar el fondo marino (H), encontrando buenos resultados analíticos. En el presente trabajo se mostrará como obtener las soluciones analíticas para el caso donde el perfil batimétrico pueda ser representado como la combinacion de dos perfiles representados por funciones cuadráticas acopladas y con ello intentar manejar formas mas complejas.

La batimetría en la figura 1, está descrita por dos curvas H_1 y H_2 acopladas, dada por la siguiente ecuación,

$$(3) \quad H(x) = \begin{cases} H_1(x) = A_1 + B_1x + C_1x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq r_2 \\ H_2(x) = A_2 + B_2x + C_2x^2 & \text{si } r_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Date: November 22, 2021.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18.

Key words and phrases. Shallow water equations.

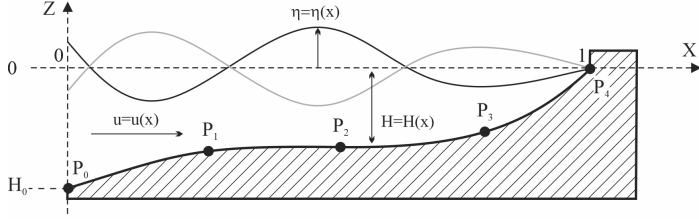


FIGURE 1. Modelo de un fluido en aguas someras con dos curvas cuadráticas acopladas como batimetría, los puntos P_i definen los perfiles de las dos ecuaciones cuadráticas.

cuya forma particular se puede determinar a partir de cinco puntos espaciales dados por $(P_i(x, y))$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{array}{cc} \frac{H_1}{P_0(0, H_0)} & \frac{H_2}{P_2(r_2, s_2 H_0)} \\ \frac{P_1(r_1, s_1 H_0)}{P_2(r_2, s_2 H_0)} & \frac{P_3(r_3, s_3 H_0)}{P_4(1, 0)} \end{array}$$

donde $r_i, s_i \in [0, 1]$ (para $i = 1, 2, 3$).

De acuerdo con la ecuación (3) para $H_1(x)$, se pueden encontrar los valores de los coeficientes A_1 , B_1 y C_1 , encontrando que,

$$A_1 = H_0, \quad B_1 = H_0 \nu_1, \quad C_1 = H_0 \tau_1$$

donde

$$\nu_1 = \frac{(s_1 r_2^2 - s_2 r_1^2) - (r_2^2 - t_1^2)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}, \quad \tau_1 = \frac{(r_1 s_2 - r_2 s_1) + (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$$

Si se realiza lo mismo para la ecuación (3) pero para $H_2(x)$, tendremos que los coeficientes A_2 , B_2 y C_2 , son dados por,

$$A_2 = H_0 \zeta_2, \quad B_2 = H_0 \nu_2, \quad C_2 = H_0 \tau_2$$

donde

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{s_2 r_3 (1 - r_3) - s_3 r_2 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \\ \nu_2 &= \frac{s_3 (1 - r_2^2) - s_2 (1 - r_3^2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \\ \tau_2 &= \frac{s_2 (1 - r_3) - s_3 (1 - r_2)}{(1 - r_3)(1 - r_2)(r_3 - r_2)} \end{aligned}$$

observen que los valores de r_3 y r_2 no pueden ser igual a 1, y que $r_2 \neq r_3$.

Así que el perfil batimétrico puede ser expresado de la siguiente manera:

$$(4) \quad H(x) = \begin{cases} H_1(x) = H_0(1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq r_2 \\ H_2(x) = H_0(\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) & \text{si } r_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En los capítulos posteriores se procederá a resolver las ecuaciones (1) y (2) utilizando series de potencia y la batimetría dada por la ecuación (4). Pero se resolverán primero por separado y después, utilizando las condiciones de frontera, se acoplarán las soluciones.

2. SOLUCIÓN PARA LA PRIMERA SECCIÓN DE LA BATIMETRÍA $H_1(x)$

Partiendo de la primera sección del perfil batimétrico dado por la ecuación (4) vamos a calcular sus derivadas, hasta el orden dos, esto es

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H_0(1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2) \\ \frac{dH_1(x)}{dx} &= H_0(\nu_1 + 2\tau_1 x) \\ \frac{d^2 H_1(x)}{dx^2} &= 2H_0\tau_1 \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en el sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras, que corresponde a las ecuaciones (1) y (2), se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{gH_0}\eta &= (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu_1 + 2\tau_1 x)\frac{d\eta}{dx} \\ -\frac{\omega^2}{gH_0}u &= (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu_1 + 2\tau_1 x)\frac{du}{dx} + 2\tau_1 u \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el número de onda corresponde a $k^2 = \omega^2/gH_0$, se obtiene el sistema reducido

$$(5) \quad -k^2\eta = (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\nu_1 + 2\tau_1 x)\frac{d\eta}{dx}$$

$$(6) \quad -k^2u = (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2(\nu_1 + 2\tau_1 x)\frac{du}{dx} + (2\tau_1)u$$

Para la elevación y la velocidad, en la curva 1, que se denotará con el superíndice en el costado izquierdo de cada notación, sus soluciones pueden darse como una función de series de potencias

$$\begin{aligned} {}^1\eta(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1a_n x^n \\ {}^1u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^1b_n x^n \end{aligned}$$

Estas serán usadas en las ecuaciones (5) y (6) para determinar las soluciones mencionadas.

2.1. Elevación. Las respectivas derivadas de la elevación, con respecto a la variable x , son

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1a_n x^{n-1} \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

Al reemplazar las anteriores derivadas y la función de la elevación en la ecuación (5) se tiene que

$$(7) \quad k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 a_n x^n + (1 + \nu_1 x + \tau_1 x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^{n-2} + (\nu_1 + 2\tau_1 x) \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^{n-1} = 0$$

Se procede a agrupar terminos semejantes en x , y se obtiene que

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 a_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^n + 2\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^n + \\ \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^{n-1} + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Para obtener el mismo exponente de la variable x se realiza un cambio de variable en el índice de la sumatoria, y si además se considera que para los índices $n = \{-2, -1\}$ los valores de la serie son nulos, se tiene que,

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=0}^{\infty} {}^1 a_n x^n + \tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) {}^1 a_n x^n + 2\tau_1 \sum_{n=0}^{\infty} n {}^1 a_n x^n + \\ \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) {}^1 a_{n+1} x^n + \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) {}^1 a_{n+1} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} x^n = 0 \end{aligned}$$

Ahora, como coincide el índice de la sumatoria y las potencias de la variable x , la anterior ecuación puede ser agrupada en una sola sumatoria dada por,

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} + (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} \right] x^n = 0$$

lo que implica tener la siguiente igualdad,

$$(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} + (n+2)(n+1) {}^1 a_{n+2} = 0$$

al despejar ${}^1 a_{n+2}$ se tiene una sucesión en términos de los valores de ${}^1 a_{n+1}$ y ${}^1 a_n$,

$$(9) \quad {}^1 a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(n(n+1)\tau_1 + k^2) {}^1 a_n + (n+1)^2 \nu_1 {}^1 a_{n+1} \right]$$

Para determinar la solución de la elevación, para la curva 1, se contemplan dos casos donde a_0 y a_1 tendran valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicaran la solución general para la elevación, tal que

$$(10) \quad {}^1 \eta(x) = {}^1 \eta_1(x) + {}^1 \eta_2(x)$$

2.1.1. *CASO 1:* ${}^1a_0 \neq 0$ y ${}^1a_1 = 0$.

Teniendo en cuenta la ecuación (9), para los diferentes valores que puede tomar $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ se tiene que, si $n = 0$ y teniendo en cuenta que ${}^1a_1 = 0$, entonces

$${}^1a_2 = -{}^1a_0 \left[\frac{k^2}{2} \right]$$

Si $n = 1$ y teniendo en cuenta que $a_1 = 0$, entonces

$${}^1a_3 = {}^1a_0 \left[\frac{\nu_1 k^2}{3} \right]$$

Nombrando los términos

$$W_2 = \frac{k^2}{2}$$

$$W_3 = \frac{\nu_1 k^2}{3}$$

tal que

$${}^1a_2 = -{}^1a_0 W_2$$

$${}^1a_3 = {}^1a_0 W_3$$

Ahora, si $n = 2$

$${}^1a_4 = -{}^1a_0 \left[-\frac{(6\tau_1 + k^2)}{12} W_2 + \frac{3}{4} \nu_1 W_3 \right]$$

$${}^1a_4 = -{}^1a_0 W_4$$

para el caso de $n = 3$ tenemos,

$${}^1a_5 = {}^1a_0 \left[-\frac{(12\tau_1 + k^2)}{20} W_3 + \frac{4}{5} \nu_1 W_4 \right]$$

$${}^1a_5 = {}^1a_0 W_5$$

mientras que para $n = 4$ tenemos,

$${}^1a_6 = -{}^1a_0 \left[-\frac{(20\tau_1 + k^2)}{30} W_4 + \frac{5}{6} \nu_1 W_5 \right]$$

$${}^1a_6 = -{}^1a_0 W_6$$

ahora si $n = 5$

$${}^1a_7 = {}^1a_0 \left[-\frac{(30\tau_1 + k^2)}{42} W_5 + \frac{6}{7} \nu_1 W_6 \right]$$

$${}^1a_7 = {}^1a_0 W_7$$

De esta forma, podemos construir la siguiente sucesión,

$$\begin{aligned}
W_0 &= 1 \\
W_1 &= 0 \\
W_2 &= -\frac{k^2}{2} \\
W_3 &= \frac{\nu_1 k^2}{3} \\
&\vdots \\
W_n &= \frac{(n-1)}{n} \nu_1 W_{n-1} - \frac{(n-2)(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} W_{n-2}, \quad \forall n \geq 2
\end{aligned}$$

y

$${}^1a_n = (-1)^{n+1} {}^1a_0 W_n \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la elevación, en la curva 1, la solución estará dada por,

$$(11) \quad {}^1\eta_1 = {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right]$$

2.1.2. CASO 2: ${}^1a_0 = 0$ y ${}^1a_1 \neq 0$.

Haciendo lo mismo que el caso 1, podemos construir las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned}
V_0 &= 0 \\
V_1 &= 1 \\
V_2 &= \frac{\nu_1}{2} \\
V_3 &= -\frac{(2\tau_1 + k^2)}{6} + \frac{1}{3} \nu_1^2 \\
&\vdots \\
V_n &= \frac{n-1}{n} \nu_1 V_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} V_{n-2}, \quad \forall n \geq 2
\end{aligned}$$

y

$${}^1a_n = (-1)^{n+1} {}^1a_1 V_n \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la elevación, en la curva 1, la solución estará dada por

$$(12) \quad {}^1\eta_2 = {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]$$

Entonces la solución general para la elevación, en la curva 1, esta dada por la ecuación (10), entonces las ecuaciones (11) y (12) quedan como,

$$(13) \quad {}^1\eta(x) = {}^1a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n x^n \right] + {}^1a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n x^n \right]$$

2.2. Velocidad. Si hacemos el mismo procedimiento para la velocidad que el realizado para la elevación, se tiene la siguiente sucesión,

$$(14) \quad {}^1b_{n+2} = - \frac{\left[((n+1)(n+2)\tau_1 + k^2) {}^1b_n + (n+1)(n+2)\nu_1 {}^1b_{n+1} \right]}{(n+1)(n+2)}$$

Para determinar la solución de la velocidad, en la curva 1, se contemplan dos casos donde b_0 y b_1 tendran valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la velocidad, tal que

$$(15) \quad {}^1u(x) = {}^1u_1(x) + {}^1u_2(x)$$

2.2.1. *CASO 1:* ${}^1b_0 \neq 0$ y ${}^1b_1 = 0$. .

Haciendo lo mismo que el caso 1 para la elevación, podemos construir las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} F_0 &= -1 \\ F_1 &= 0 \\ F_2 &= \frac{2\tau_1 + k^2}{2} \\ F_3 &= \frac{(2\tau_1 + k^2)\nu_1}{2} \\ &\vdots \\ F_n &= \nu_1 F_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^1b_n = (-1)^{n+1} {}^1b_0 F_n, \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la velocidad, en la curva 1, la solución estará dada por

$$(16) \quad {}^1u_1(x) = {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right]$$

2.2.2. *CASO 2:* ${}^1b_0 = 0$ y ${}^1b_1 \neq 0$. .

Haciendo lo mismo que el caso 2 para la elevación, podemos construir las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} G_0 &= 0 \\ G_1 &= 1 \\ G_2 &= \nu_1 \\ G_3 &= -\frac{(6\tau_1 + k^2)}{6} + \nu_1^2 \\ &\vdots \\ G_n &= \nu_1 G_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_1 + k^2}{n(n-1)} G_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^1b_n = (-1)^{n+1} {}^1b_1 G_n, \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso de la velocidad, en la curva 1, la solución estará dada por

$$(17) \quad {}^1u_2(x) = {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]$$

juntando lo anterior en la solución general de la velocidad, en la curva 1, dada por la ecuación (15), y al sustituir en estas en las ecuaciones (16) y (17) se tiene que,

$$(18) \quad {}^1u(x) = {}^1b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n x^n \right] + {}^1b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n x^n \right]$$

3. SOLUCIÓN PARA LA SEGUNDA SECCIÓN DE LA BATIMETRÍA $H_2(x)$

Partiendo de la ecuación particular para la curva 2 (ec. ??) y las ecuaciones del sistema de ecuaciones desacoplado para aguas someras, que corresponde a las ecuaciones (1) y (2), y teniendo en cuenta que el número de onda corresponde a $k^2 = \omega^2/H_0g$, se obtiene el sistema reducido

$$(19) \quad -k^2 \eta = (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (\nu_2 + 2\tau_2 x) \frac{d\eta}{dx}$$

$$(20) \quad -k^2 u = (\zeta_2 + \nu_2 x + \tau_2 x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + 2(\nu_2 + 2\tau_2 x) \frac{du}{dx} + (2\tau_2)u$$

Para la elevación y la velocidad, en la curva 2, que se denotará con el superíndice en el costado izquierdo de cada notación, sus soluciones pueden darse como una función de series de potencias

$${}^2\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^2a_n x^n$$

$${}^2u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^2b_n x^n$$

Estas serán usadas en las ecuaciones (19) y (20) para determinar las soluciones mencionadas.

3.1. Elevación. Siguiendo el mismo procedimiento que la sección anterior, encontramos que se tiene la sucesión

$$(21) \quad {}^2a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{(n(n+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2a_n + \frac{(n+1)^2\nu_2}{\zeta_2} {}^2a_{n+1} \right]$$

Para determinar la solución de la elevación, para la curva 2, se contemplan dos casos donde a_0 y a_1 tendrán valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicaran la solución general para la elevación, tal que

$$(22) \quad {}^2\eta(x) = {}^2\eta_1(x) + {}^2\eta_2(x)$$

3.1.1. *CASO 1:* ${}^2a_0 \neq 0$ y ${}^2a_1 = 0$.

Manteniendo el mismo procedimiento podemos obtener las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} W'_0 &= -1 \\ W'_1 &= 0 \\ W'_2 &= \frac{k^2}{2\zeta_2} \\ W'_3 &= \frac{\nu_2}{3\zeta_2^2} k^2 \\ &\vdots \\ W'_n &= \frac{n}{(n-1)} \frac{\nu_2}{\zeta_2} W'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} W'_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^2a_n = (-1)^{n+1} {}^2a_0 W'_n, \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la elevación, en la curva 2, la solución estará dada por

$$(23) \quad {}^2\eta_1 = a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \right]$$

3.1.2. *CASO 2:* ${}^2a_0 = 0$ y ${}^2a_1 \neq 0$.

Manteniendo el mismo procedimiento podemos obtener las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} V'_0 &= 0 \\ V'_1 &= 1 \\ V'_2 &= \frac{\nu_2}{2\zeta_2} \\ V'_3 &= -\frac{(2\tau_2 + k^2)}{6\zeta_2} + \frac{1}{3} \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2} \\ &\vdots \\ V'_n &= \frac{(n-1)}{n} \frac{\nu_2}{\zeta_2} V'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} V'_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^2a_n = (-1)^{n+1} {}^2a_1 V'_n \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la elevación, en la curva 2, la solución estará dada por

$$(24) \quad {}^2\eta_2 = {}^2a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \right]$$

Dado que la solución general de la elevación esta dada por la ecuación (22), al sustituir en ella las ecuaciones (23) y (24) se tiene

$$(25) \quad {}^2\eta(x) = {}^2a_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n x^n \right] + {}^2a_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n x^n \right]$$

3.2. Velocidad. Si hacemos el mismo procedimiento para la velocidad que el realizado para la elevación, se tiene la siguiente sucesión,

$$(26) \quad {}^2b_{n+2} = - \frac{\left[\frac{((n+2)(n+1)\tau_2 + k^2)}{\zeta_2} {}^2b_n + (n+1)(n+2) \frac{\nu_2}{\zeta_2^2} {}^2b_{n+1} \right]}{(n+1)(n+2)}$$

Para determinar la solución de la velocidad, en la curva 2, se contemplan dos casos donde 2b_0 y 2b_1 tendran valores nulos o no nulos. Cada caso determinará una solución que sumadas indicarán la solución general para la velocidad, tal que

$$(27) \quad {}^2u(x) = {}^2u_1(x) + {}^2u_2(x)$$

3.2.1. *CASO 1:* ${}^2b_0 \neq 0$ y ${}^2b_1 = 0$. .

Siguiendo el mismo procedimiento que el realizado en el caso de la elevación tenemos que podemos formar las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} F'_0 &= -1 \\ F'_1 &= 0 \\ F'_2 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)}{2\zeta_2} \\ F'_3 &= \frac{(2\tau_2 + k^2)\nu_2}{2\zeta_2^2} \\ &\vdots \\ F'_n &= \frac{\nu_2}{\zeta_2} F'_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_2 + k^2}{n(n-1)\zeta_2} F'_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^2b_n = (-1)^{n+1} {}^2b_0 F'_n, \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la velocidad, para la curva 2, la solución estará dada por

$$(28) \quad {}^2u_1(x) = {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right]$$

3.2.2. *CASO 2:* $b_0 = 0$ y $b_1 \neq 0$. .

También podemos realizar el mismo procedimiento, y podemos proponer las siguientes sucesiones,

$$\begin{aligned} G'_0 &= 0 \\ G'_1 &= 1 \\ G'_2 &= \frac{\nu_2}{\zeta_2} \\ G'_3 &= -\frac{6\tau_2 + k^2}{6\zeta_2} + \frac{\nu_2^2}{\zeta_2^2} \\ &\vdots \\ G'_n &= \frac{\nu_2}{\zeta_2} G'_{n-1} - \frac{n(n-1)\tau_2 + k^2}{n(n-1)} G'_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

y

$${}^2b_n = (-1)^{n+1} {}^2b_1 G'_n, \quad \forall n \geq 2$$

De tal forma que, para el caso considerado de la velocidad, en la curva 2, la solución estará dada por

$$(29) \quad {}^2u_2(x) = {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right]$$

Dado que la solución general de la velocidad, en la curva 2, esta dada por la ecuación (27), al sustituir en ella las ecuaciones (28) y (29) se tiene que

$$(30) \quad {}^2u(x) = {}^2b_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n x^n \right] + {}^2b_1 \left[x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n x^n \right]$$

4. CONDICIONES DE FRONTERA

Las ecuaciones (13), (18), (25) y (30) tienen 8 constantes que hay que encontrar (${}^1a_0, {}^1b_0, {}^2a_0, {}^2b_0, {}^1a_1, {}^1b_1, {}^2a_1, {}^2b_1$), para ello usaremos las condiciones de frontera, estas deberan incluir las fronteras del lado izquierdo y del lado derecho del dominio, y ademas las soluciones deberan cumplir con tener el mismo valor de la solucion y su derivada en el punto P_2 . A continuación aplicaremos primero las condicones del lado izquierdo y derecho del dominio, para posteriormente aplicar la continuidad en la parte intermedia. Con ello estaremos logrando encontrar los valores de las 8 constantes.

Partiendo de las condiciones de frontera de tipo Robin (ya que este tipo de condición incluye tanto las condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet), que de forma generalizada estan dadas por,

$$\begin{aligned} x = x_{izq} : \quad & \gamma_1 \frac{df}{dx} + \beta_1 f = \alpha_1 \\ x = x_{der} : \quad & \gamma_2 \frac{df}{dx} + \beta_2 f = \alpha_2 \end{aligned}$$

que para nuestro caso, estas condiciones de frontera se pueden resumir en la siguiente tabla tanto para la elevación y la velocidad, dando los valores utilizados para los parámetros γ, β y α , para sus respectivos valores de x ,

TABLE 1. Valores para las dos condiciones de frontera

Función	x	γ	β	α
Elevación	0	0	1	η_0
	1	1	0	0
Velocidad	0	0	1	$\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}$
	1	0	1	0

Al aplicar las condiciones para el lado izquierdo ($x = 0$) tanto para la elevación y la velocidad de la curva 1 (ecuaciones (13) y (18)),

$$\begin{aligned} {}^1\eta(0) &= \eta_0 \\ {}^1u(0) &= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \end{aligned}$$

Se tiene que

$$(31) \quad {}^1a_0 = \eta_0$$

y

$$(32) \quad {}^1b_0 = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}}$$

Las condiciones de frontera derecha ($x = 1$) se tratarán con las ecuaciones de la elevación y la velocidad de la curva 2. Estas condiciones están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [{}^2\eta(1)] &= 0 \\ {}^2u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo que,

$$(33) \quad {}^2a_0 = -\frac{{}^2a_1\delta_1}{\delta_0}$$

y

$$(34) \quad {}^2b_0 = -\frac{{}^2b_1\epsilon_1}{\epsilon_0}$$

Observen que estas dos últimas constantes quedan en función de otras dos constantes por definir.

Ahora, vamos a aplicar las condiciones de frontera intermedia para la elevación y la velocidad en el punto P_2 que es donde coinciden las dos curvas ($x = r_2$), así que se debe cumplir que (para mantener continuidad entre el perfil),

$$(35) \quad {}^1\eta(r_2) = {}^2\eta(r_2)$$

$$(36) \quad \frac{d}{dx} [{}^1\eta(r_2)] = \frac{d}{dx} [{}^2\eta(r_2)]$$

$$(37) \quad {}^1u(r_2) = {}^2u(r_2)$$

$$(38) \quad \frac{d}{dx}[{}^1u(r_2)] = \frac{d}{dx}[{}^2u(r_2)]$$

Si las ecuaciones (36-38) las simplificamos (para facilitar el manejo algebraico) de la siguiente manera (ver Apéndice I para declaración de variables),

$$(39) \quad \theta_0 + {}^1a_1\theta_1 = {}^2a_0\mu_0 + {}^2a_1\mu_1$$

$$(40) \quad \chi_0 + {}^1a_1\chi_1 = {}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1$$

$$(41) \quad \psi_0 + {}^1b_1\psi_1 = {}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1$$

$$(42) \quad \sigma_0 + {}^1b_1\sigma_1 = {}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1$$

Utilizando estas ecuaciones podemos encontrar que 1a_1 puede ser representada por las siguientes dos ecuaciones,

$$(43) \quad {}^1a_1 = \frac{{}^2a_0\mu_0 + {}^2a_1\mu_1 - \theta_0}{\theta_1}$$

$$(44) \quad {}^1a_1 = \frac{{}^2a_0\xi_0 + {}^2a_1\xi_1 - \chi_0}{\chi_1}$$

Igualando las ecuaciones (43) y (44) se tiene que 2a_0 es dado por,

$$(45) \quad {}^2a_0 = \frac{{}^2a_1(\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1) - \chi_0\theta_1 + \theta_0\chi_1}{\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1}$$

Igualando las ecuaciones (33) y (45) se tiene que 2a_1 es dado por,

$$(46) \quad {}^2a_1 = \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}$$

Sustituyendo la ecuación (46) en la ecuación (33) se puede definir 2a_0 como,

$$(47) \quad {}^2a_0 = -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0}$$

Sustituyendo las ecuaciones (46) y (47) en (43) encontramos que 1a_1 es dado por,

$$(48) \quad {}^1a_1 = -\frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_1\mu_0}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1\theta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0\theta_1} + \frac{(\chi_0\theta_1 - \theta_0\chi_1)\delta_0\mu_1}{(\mu_0\chi_1 - \xi_0\theta_1)\delta_1\theta_1 + (\xi_1\theta_1 - \mu_1\chi_1)\delta_0\theta_1} - \frac{\theta_0}{\theta_1}$$

Usando la igualdad de las ecuaciones podemos encontrar dos ecuaciones para 1b_1 dadas por,

$$(49) \quad {}^1b_1 = \frac{{}^2b_0\rho_0 + {}^2b_1\rho_1 - \psi_0}{\psi_1}$$

$$(50) \quad {}^1b_1 = \frac{{}^2b_0\phi_0 + {}^2b_1\phi_1 - \sigma_0}{\sigma_1}$$

Igualando las ecuaciones (49) y (50) se tiene que

$$(51) \quad {}^2b_0 = \frac{{}^2b_1(\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1) - \sigma_0\psi_1 + \psi_0\sigma_1}{\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1}$$

Igualando las ecuaciones (34) y (51) se tiene

$$(52) \quad {}^2b_1 = \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}$$

Sustituyendo la ecuación (52) en la ecuación (34) se tiene

$$(53) \quad {}^2b_0 = -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0}$$

Sustituyendo las ecuaciones (52) y (53) en la ecuación (49) se tiene

$$(54) \quad {}^1b_1 = -\frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_1\rho_0}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1\psi_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0\psi_1} + \frac{(\sigma_0\psi_1 - \psi_0\sigma_1)\epsilon_0\rho_1}{(\rho_0\sigma_1 - \phi_0\psi_1)\epsilon_1\psi_1 + (\phi_1\psi_1 - \rho_1\sigma_1)\epsilon_0\psi_1} - \frac{\psi_0}{\psi_1}$$

Las ecuaciones anteriores dan los valores de las 8 constantes que se requieren para la solución analítica de las ecuaciones (13), (18), (25) y (30), estas están dadas por las ecuaciones (31), (32), (46), (47), (48), (52), (53) y (54).

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la UABC por apoyar esta investigación por los programas PRE-DEPA y PRODEP-SEP.

APÉNDICE I

En esta sección se definen algunas variables que han sido incorporadas en el escrito para un mejor manejo algebraico de las ecuaciones (ver ecuaciones (35-38) y (39-42)).

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \eta_0 \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W_n r_2^n \right] \\
\theta_1 &= \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V_n r_2^n \right] \\
\mu_0 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} W'_n r_2^n \right] \\
\mu_1 &= \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} V'_n r_2^n \right] \\
\chi_0 &= \eta_0 \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W_n r_2^{n-1} \right] \\
\chi_1 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V_n r_2^{n-1} \right] \\
\xi_0 &= \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n W'_n r_2^{n-1} \right] \\
\xi_1 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n V'_n r_2^{n-1} \right] \\
\psi_0 &= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n r_2^n \right] \\
\psi_1 &= \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n r_2^n \right] \\
\rho_0 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} F'_n r_2^n \right] \\
\rho_1 &= \left[r_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} G'_n r_2^n \right] \\
\sigma_0 &= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F_n r_2^{n-1} \right] \\
\sigma_1 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G_n r_2^{n-1} \right] \\
\phi_0 &= \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n F'_n r_2^{n-1} \right] \\
\phi_1 &= \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n G'_n r_2^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] Cortes-Velez, C., R. Hernandez-Walls and B. Martin-Atienza. 2021. 1-D shallow water equation, with no viscosity and no rotation, for a topography represented by a quadratic function. *Journal of Physics Communications*, 4(8):085005, DOI: 10.1088/2399-6528/abaa8c

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA (UABC)

Email address, R. Hernandez-Walls: `rwalls@uabc.edu.mx`

Bibliografía

- [Castro-Orgaz and Hager, 2019] Castro-Orgaz, O. and Hager, W. H. (2019). *Shallow Water Hydraulics*. Springer.
- [Chan and Liu, 2012] Chan, I.-C. and Liu, P. L.-F. (2012). On the runup of long waves on a plane beach. *Journal of Geophysical Research*, 117:1–17.
- [Constantin, 2011] Constantin, A. (2011). *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis*. SIAM.
- [Cortés Osorio et al., 2008] Cortés Osorio, J. A., Montoya, N. F., and Osorio, J. A. (2008). Pedagogical tool applied in the lissajous figures teaching. *Scientia Et Technica*, 40:216–221.
- [Delestre et al., 2013] Delestre, O., Lucas, C., Ksinant, P. A., Darboux, F., Laguerre, C., Vo, T. N., James, F., and Cordier, S. (2013). SWASHES: A compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(3):269–300.
- [Dijkstra, 2008] Dijkstra, H. A. (2008). *Dynamical Oceanography*. Springer.
- [Dong, 2020] Dong, J. (2020). A robust central scheme for the shallow water flows with an abrupt topography based on modified hydrostatic reconstructions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, pages 1–22.

- [Elder and Williams, 1996] Elder, S. A. and Williams, J. (1996). *Fluid Physics for Oceanographers and Physicists. An Introduction to Incompressible Flow*. Butherworth Heinemann.
- [Escher et al., 2014] Escher, J., Henry, D., Kolev, B., and Lyons, T. (2014). Tow-component equations modelling water waves with constant vorticity. *Annali di Matematica*, pages 1–23.
- [Flemming and Hornes, 2013] Flemming, J. and Hornes, A. (2013). Lissajous-like figures with triangular and square waves. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(3):3702.
- [Fringer et al., 2019] Fringer, O. B., Dawson, C. N., He, R., Ralston, D. K., and Zhang, Y. J. (2019). The future of coastal and estuarine modeling: Findings from a workshop. *Ocean Modelling*, 143:101458.
- [Gao et al., 2019] Gao, J., He, Z., Zang, J., Chen, Q., Ding, H., and Wang, G. (2019). Topographic effects on wave resonance in the narrow gap between fixed box and vertical wall. *Ocean Engineering*, 180(November 2018):97–107.
- [González González et al., 2012] González González, R., Ortiz Figueroa, M., and Montoya Rodriguez, J. M. (2012). Tsunami. un problema matemáticamente interesante. *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones*, 19(1):107–119.
- [Hernandez-Walls et al., 2017] Hernandez-Walls, R., Martín-Atienza, B., Salinas-Matus, M., and Castillo, J. (2017). Solving the linear inviscid shallow water equations in one dimension, with variable depth, using a recursion formula. *European Journal of Physics*, 38(6):65802.
- [Johnson, 1997] Johnson, R. (1997). *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge University Press.
- [Kamenkovich, 1977] Kamenkovich, V. M. (1977). *Fundamentals of ocean dynamics*. Elsevier Oceanography Series.
- [Katopodes, 2019] Katopodes, N. D. (2019). *Free-Surface Flow. Shallow water dynamics*. Butterworth-Heinemann.

- [Kim, 2010] Kim, Y. C., editor (2010). *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*. World Scientific.
- [Kirby et al., 2006] Kirby, J. T., Özkan Haller, H. T., and Haller, M. C. (2006). Seiche in a large wave flume. *Coastal Engineering*, pages 1159–1171.
- [Kleine-Rueschkamp et al., 2020] Kleine-Rueschkamp, L., Veneri, P., and Ahrend, R. (2020). Ciudades del mundo. una nueva perspectiva sobre la urbanización. Report P-15, OCDE/UE.
- [LeBlond and Mysak, 1978] LeBlond, P. H. and Mysak, L. A. (1978). *Shallow Water Hydrodynamics*. Elsevier Oceanography Series.
- [Li et al., 2018] Li, L., Yuan, Z., and Gao, Y. (2018). Wash wave effects on ships moored in ports. *Applied Ocean Research*, 77(June):89–105.
- [Neumann and Pierson, 1966] Neumann, G. and Pierson, W. J. J. (1966). *Principles of Physical Oceanography*. Prentice-Hall.
- [Olbers et al., 2012] Olbers, D., Willebrand, J., and Eden, C. (2012). *Ocean Dynamics*. Springer.
- [Olver et al., 1986] Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, Ronald, F., and W., C. C. (1986). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press.
- [Pedlosky, 2003] Pedlosky, J. (2003). *Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics*. Springer.
- [Ragab and Fayed, 2018] Ragab, S. A. and Fayed, H. E. (2018). *Introduction to Finite Element Analysis for Engineers*. Taylor & Francis Group.
- [Renzi and Sammarco, 2016] Renzi, E. and Sammarco, P. (2016). The hydrodynamics of landslide tsunamis: current analytical models and future research directions. *Landslides*, 13:1369–1377.
- [Shao et al., 2016] Shao, D., Feng, X., and Feng, W. (2016). Numerical investigation of oscillations within a harbor of parabolic bottom induced by water surface disturbances. *Applied Ocean Research*, 59:153–164.

- [Shiach et al., 2004] Shiach, J., Mingham, C., Ingram, D., and Bruce, T. (2004). The applicability of the shallow water equations for modelling violent wave overtopping. *Coastal Engineering*.
- [Tinti, 1980] Tinti, S. (1980). Response of a harbour opened to a sea of variable depth. *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*, 118(2):783–795.
- [Vreugdenhil, 1994] Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for shallow-water flow*. Kluwer Academic Publishers.
- [Wang et al., 2015] Wang, G., Hai Zheng, J., Hua Liang, Q., Zhang, W., and Huang, C. (2015). Theoretical analysis of harbor resonance in harbor with an exponential bottom profile. *China Ocean Engineering*, 29(6):821–834.
- [Wang et al., 2014] Wang, G., Zheng, J., Liang, Q., and Zheng, Y. (2014). Analytical solutions for oscillations in a harbor with a hyperbolic-cosine squared bottom. *Ocean Engineering*, 83:16–23.
- [Weiyan, 1992] Weiyan, T. (1992). *Shallow Water Hydrodynamics*. Elsevier Oceanography Series.
- [Wright et al., 1999] Wright, J., Colling, A., and Park, D., editors (1999). *Waves, Tides and Shallow-Water Processes*. Open University Oceanography. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [Yuferev and Ida, 2010] Yuferev, S. V. and Ida, N. (2010). *Surface Impedance Boundary Conditions. A Comprehensive Approach*. CRC Press.