

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



**EL EFECTO DE LA SEGREGACIÓN DE MASA EN LOS CÚMULOS
GLOBULARES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA

FERMÍN FRANCO MEDRANO

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA

DICIEMBRE DE 2006

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

EL EFECTO DE LA SEGREGACIÓN DE MASA EN LOS CÚMULOS
GLOBULARES

TESIS PROFESIONAL

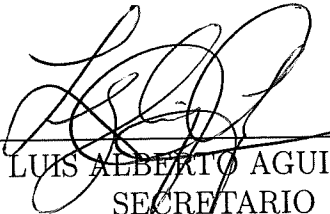
QUE PRESENTA

FERMÍN FRANCO MEDRANO

APROBADO POR



DR. FIDEL CRUZ PEREGRINO
PRESIDENTE DEL JURADO



DR. LUIS ALBERTO AGUILAR CHIU
SECRETARIO



DR. FERNANDO ROJAS ÍÑIGUEZ
1ER. VOCAL

Resumen de la tesis de Fermín Franco Medrano presentada como requisito parcial para la obtención del título de Físico. Ensenada, Baja California, México. Diciembre de 2006.

EL EFECTO DE LA SEGREGACIÓN DE MASA EN LOS CÚMULOS GLOBULARES

Resumen aprobado,


Dr. Fidel Cruz Peregrino

Resumen. En la presente tesis se analiza el proceso de equipartición de la energía cinética y segregación de masa en los cúmulos globulares. Para ello se presentan y discuten los resultados de cuatro simulaciones numéricas de N-cuerpos, realizadas con el integrador híbrido *EuroStar* (el cual combina un método de fuerza directa, NBODY6, con un método de campo promedio, SCF). Se utilizan modelos de dos componentes de masa: una componente *ligera* y otra *pesada*, consistentes de partículas de masa m_1 y m_2 , respectivamente. El parámetro de contraste de masas, $\mu \equiv m_2/m_1$, varía para cada experimento y la masa total de la componente pesada, M_2 , es fija en un 10 % de la masa total del sistema, M_{tot} (i.e. $q \equiv M_2/M_{tot} = 0,1$); sólo uno de los experimentos se realiza con un modelo de partículas de igual masa, m , como referencia para el análisis de los otros experimentos. Como criterio de calidad de la integración numérica en las simulaciones se emplea el monitoreo del error relativo de la energía total. Se hace un análisis separado de ocho distintos subsistemas de partículas que forman parte del sistema global y se derivan de él por sus características de masa (ligeras y pesadas) y la parte del integrador híbrido que los maneja (NBODY6 o SCF). Para cada uno de los subsistemas (donde aplican) —además del sistema global, por supuesto— se analizan la velocidad cuadrática media ($\overline{v^2}$), el parámetro de equipartición de la energía cinética entre los grupos de masa (ξ_m), el parámetro de equipartición de la energía entre los grupos de integrador (ξ_i), 19 radios lagrangianos (1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 80 y 90 % de la masa total), la densidad de masa central (ρ_0) y la densidad de masa cercana al radio medio de masa (ρ_h). El comportamiento general del sistema global es consistente con el proceso de colapso gravotérmico (para todos los experimentos, incluyendo el de partículas de igual masa), contrayendo sus radios lagrangianos internos y expandiendo sus radios lagrangianos externos a medida que avanza el tiempo; a una tasa logarítmica aproximadamente lineal que varía según el experimento. Una

vez alcanzado el estado de colapso de núcleo, se presenta una expansión abrupta de los radios lagrangianos internos y una consecuente disminución de ρ_0 . El comportamiento de las componentes de masa del sistema global es aproximadamente consistente con un proceso de equipartición de la energía cinética al principio de la simulación y una consecuente segregación de masa, en un tiempo inicial comparable con el tiempo de equipartición teórico, t_{eq} , calculado a partir de la ecuación de Spitzer (1969). Pasado $\sim t_{eq}$, el comportamiento general de las componentes de masa es aproximadamente consistente con un proceso de colapso gravotérmico en ambas componentes. Si bien la equipartición de la energía cinética no se alcanza *globalmente* para ninguno de los experimentos analizados, ésta sí parece alcanzarse en el núcleo (el subsistema de NBODY6) de —al menos— el experimento M2-1. Se observan notorias diferencias en la evolución temporal de los parámetros de las partículas pesadas y ligeras al dividir su análisis en subsistemas propios debidos a su respectivo integrador (subgrupos de NBODY6 o SCF) para cada una de las componentes de masa. La razón principal de lo anterior es que NBODY6 es un método colisional y, por tanto, toma en cuenta las interacciones de dos-cuerpos de manera efectiva —necesarias para el desarrollo de ciertos procesos evolutivos, particularmente la segregación de masa—, mientras que SCF no toma en cuenta estas interacciones. La separación de partículas en ambos subsistemas de integrador condujo a patrones evolutivos indeseables en el estudio de los fenómenos físicos de interés, producto de los respectivos modelos físicos subyacentes en cada integrador —bajo los parámetros, modelos y condiciones en que fue utilizado el integrador híbrido EuroStar en el presente trabajo—. Sin embargo, en general, los resultados son aproximadamente consistentes con la teoría y trabajos anteriores sobre la evolución dinámica de los cúmulos globulares, particularmente la de los modelos de dos componentes de masa con $q = 0,1$.

Abstract. In this work we analyze the process of kinetic energy equipartition and mass segregation within globular clusters. For this purpose, the results of four N-body numerical simulations, computed by the hybrid code EuroStar (which combines a direct force method, NBODY6, with a mean field method, SCF), are presented and discussed. We use two-mass components models: a *light* and a *heavy* component, consisting of particles of mass m_1 and m_2 , respectively. The mass contrast parameter, $\mu \equiv m_2/m_1$, varies for each experiment and the total mass of the heavy component, M_2 , is fixed at 10 % of the total mass of the system, M_{tot} (i.e. $q \equiv M_2/M_{tot} = 0.1$); only one of the experiments is made with a model of equal mass particles, as reference for the analysis of the other experiments. As a numerical integration quality criterium for the simulations, the relative error of the total energy is monitored. An analysis is made separating eight different particle subsystems from the global system and derived from it by their mass (light or heavy) and integrator characteristics (NBODY6 or SCF). For each of the eight subsystems (where applicable) —and for the global system of course— we analyze the mean quadratic velocity ($\overline{v^2}$), the kinetic energy equipartition parameter between the mass groups (ξ_m), the kinetic energy equipartition parameter between the integrator groups (ξ_i), 19 lagrangian radii (1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 80 and 90 % of the total mass), the central mass density (ρ_0) and the near half-mass radius mass density (ρ_h). The general behaviour of the global system is consistent with the process of gravothermal collapse (for all experiments, including the model of equal mass particles), contracting its internal lagrangian radii and expanding its external lagrangian radii, as a function of time, with a logarithmical nearly linear rate that varies for each experiment. Once the stage of core collapse is reached, there is an abrupt expansion of the inner lagrangian radii and a consequent reduction of ρ_0 . The behaviour of the mass components of the global system is approximately consistent with a kinetic energy equipartition process at the beginning of the simulation and a consequent mass segregation, at an initial time scale comparable with the theoretical Spitzer (1969) equipartition time, t_{eq} . Past $\sim t_{eq}$, the general behaviour of the mass components is approximately consistent with a process of gravothermal collapse in both components. Although the state of kinetic energy equipartition is not reached *globally* for any of the analyzed experiments, this state *does* seem to be reached in the core (NBODY6 subsystem) of —at least— the M2-1 experiment. There are considerable differences in the temporal evolution of the parameters of light and heavy particles when their analysis is divided into their own respective integrator groups (NBODY6 and SCF subgroups) for each mass component. The main reason for this is that NBODY6 is a collisional method and, therefore, it accounts for two-body interactions in an effective way —which are necessary for the development of certain evolutionary processes, particularly the mass segregation process—, while SCF does not take into account this interactions. The separation of particles in both integrator subsystems led to undesirable evolutionary patterns in the study of the physical phenomena of interest, product of the underlying physical models of the respective integrators —under the parameters, models and

conditions in which the hybrid integrator EuroStar was used in the present work—. Spite the latter, in general, the results are approximately consistent with the theory and previous work about the dynamical evolution of globular clusters, particularly that of the models of two-mass components with $q = 0,1$.

Agradecimientos

Creo estar consciente de que hay mucho y muchos a quienes agradecer por haber hecho posible no sólo la realización de este trabajo, sino todo lo conducente para llegar al estado que me permitió realizarlo. Hay, sin embargo, que encontrar un límite para la extensión —incluso cronológica— de tal agradecimiento; de lo contrario, podría terminar agradeciendo *aquella chispa sin luz, ese dolor sin secuencia, con el que se creó la primera idea que se acompañó por el universo de sí misma...*

Así pues, agradezco ampliamente el apoyo de mi familia —por supuesto—: de mi madre, Enriqueta Medrano, quien siempre me ha sabido dar los mejores consejos (y paciencia) en el más sincero deseo de mi bienestar; a mi padre, Fermín Franco, que me ha apoyado ampliamente para la realización de mi carrera profesional y me impulsó a seguir mis convicciones; y a mis hermanas, Lourdes y Laura, que me han apoyado a todo lo largo de mis estudios y aún más allá. También quiero agradecer a Gabriel Alejandro, mi sobrino, quien siempre fue insistente en preguntarme cuándo iba a acabar esa «grande y larga tarea» que yo le llamaba «mi tesis».

Para Mónica, esto es más que un agradecimiento: es una razón que me ha impulsado a seguir adelante, me ha enseñado mucho de este caudal de tiempo y cambios que llamamos *vida*, y me ha compartido los momentos más sinceros y bellos desde que *se dice* que existo; a ella: gracias por darme mi *llave del caos...*

Agradezco la compañía, apoyo y los innumerables ratos amenos que he compartido con mis compañeros de la carrera; particularmente la sincera amistad y apoyo de Burgos y Ramón, mis grandes amigos del *kiloTeam* —como fuimos nombrados en los momentos *menos* prósperos de nuestra vida académica—, que han sabido hacerme sentir que no soy nadie en el mundo, sólo para que «no se me vaya a subir» la *perniciosa felicidad*.

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la UABC, que me dio mis estudios; a todos mis maestros y maestras de quienes obtuve inspiración para ser —y hasta para *no* ser, lo agradezco igual—. Al Instituto de Astronomía de la UNAM, que me recibió gustoso e igualmente me ve salir; particularmente al proyecto de la DGAPA de la UNAM, No. IN113403, mediante el cual fui becado para la realización de mi tesis profesional en dicha institución.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Fidel Cruz, la formación académica y motivación en el maravilloso campo de la Astrofísica, así como la paciencia y apoyo que me brindó desde la realización de mi servicio social profesional hasta la conclusión de mi tesis. También agradezco al Dr. Luis Aguilar y al Dr. Fernando Rojas por sus invaluable comentarios y sugerencias que hicieron mejorar este trabajo.

Finalmente, agradezco al noble pueblo de México que (sin muchos saberlo) han pagado mi educación, la de mis compañeros y los que vendrán... todo sea por la *igualdad de oportunidades*: ¡que nadie quede fuera!

Fermín Franco Medrano
Ensenada, Baja California
Diciembre de 2006

Índice general

Índice de figuras	X
Índice de cuadros	XV
Capítulo 1. Introducción	1
Capítulo 2. Propiedades generales de los cúmulos globulares	4
2.1. Definición de un cúmulo globular	4
2.2. Propiedades generales de los cúmulos globulares	5
2.2.1. Número y distribución espacial	6
2.2.2. Abundancia química y cinemática	7
2.2.3. Edades	9
2.2.4. Tamaño, estructura y forma geométrica	10
2.2.5. Perfiles de brillo superficial	13
2.2.6. Funciones de luminosidad estelar	14
2.2.7. Masa y cocientes de masa-luminosidad	15
2.3. Implicaciones en la formación y evolución de la Galaxia	16
Capítulo 3. Teoría y modelos de los cúmulos globulares	18
3.1. Modelos analíticos de equilibrio cuasi-estático	20
3.1.1. Modelo simple	21
3.1.2. Esferas politrópicas	21
3.1.3. Esfera isotérmica	22
3.1.4. Modelos de King-Michie	23
3.2. Procesos de evolución dinámica	25
3.2.1. Relajación de dos cuerpos	26
3.2.1.1. Catástrofe gravotérmica y colapso del núcleo central	27
3.2.1.2. Equipartición de la energía y segregación de masa	29
3.2.1.3. Evaporación	30
3.2.2. Eyección	31
3.2.3. Efectos de la evolución estelar	31
3.2.4. Procesos de evolución externos	32
3.3. Escalas de tiempo evolutivas	33
3.3.1. Tiempo de cruce	33
3.3.2. Tiempo de relajación	33
3.3.3. Tiempo de colapso del núcleo	34
3.3.4. Tiempo de equipartición	35

3.3.5. . Tiempo de evaporación	36
3.4. . Teorías sobre la equipartición de la energía y segregación de masa	36
3.4.1. . Condiciones necesarias para la equipartición de la energía	38
3.4.2. . Otras teorías	39
Capítulo 4. El integrador EuroStar	42
4.1. . Un integrador híbrido NBODY6-SCF	43
4.2. . El integrador de fuerza directa NBODY6	43
4.2.1. . Pasos de tiempo individuales y por bloques	44
4.2.2. . El esquema de Hermite	45
4.2.3. . El esquema de Ahmad-Cohen	47
4.2.4. . Regularización KS	48
4.3. . El integrador de campo auto-consistente (SCF)	49
4.3.1. . Descripción del modelo	49
4.4. . Descomposición de la estructura de núcleo-halo	51
4.5. . Integración e interacción de SCF con NBODY6	52
4.5.1. . Integración	52
4.5.2. . Interacción	53
4.6. . Estrategia de integración de órbitas en EuroStar	53
4.7. . Algunos parámetros fundamentales del integrador EuroStar	55
Capítulo 5. Características de las simulaciones	56
5.1. . Modelos de dos componentes de masa para cúmulos globulares	56
5.2. . Unidades de N-cuerpos	57
5.3. . Condiciones iniciales	58
5.4. . Experimentos realizados y su nomenclatura	60
5.5. . Desarrollo de las simulaciones	61
Capítulo 6. Resultados y discusiones	63
6.1. . Parámetros y herramientas de análisis	63
6.2. . Resultados del modelo de igual masa única	66
6.2.1. . Redistribución de la energía cinética	67
6.2.2. . Evolución de la distribución de masa	69
6.3. . Resultados de los modelos de dos componentes de masa	72
6.3.1. . Resultados del modelo con $\mu = 1,75$	73
6.3.1.1. . Equipartición de la energía	73
6.3.1.2. . Segregación de masa	80
6.3.2. . Resultados del modelo con $\mu = 2,00$	89
6.3.2.1. . Equipartición de la energía	89
6.3.2.2. . Segregación de masa	93
6.3.3. . Resultados del modelo con $\mu = 2,50$	97
6.3.3.1. . Equipartición de la energía	99
6.3.3.2. . Segregación de masa	103
Capítulo 7. Conclusiones	110
Bibliografía	116

Índice de figuras

2.1.. El cúmulo globular galáctico M92.	5
2.2.. Distribución proyectada de 143 CGs galácticos en coordenadas galácticas (tomado de Djorgovski y Meylan 1994, Fig. 1). El tamaño del símbolo se escala con el logaritmo de la luminosidad.	6
2.3.. Distribución de los CGs de la Galaxia en función de su distancia galactocéntrica. Datos proporcionados por S. Djorgovski.	7
2.4.. Distribución de metalicidad de los CGs de la Vía Láctea.	8
2.5.. Histogramas de la distribución de los valores observados de (a) radio de núcleo r_c ; (b) radio medio de masa r_h y (c) concentración c . La columna sombreada dentro de la distribución mostrada en la figura 2.5c representa la subpoblación de los cúmulos globulares galácticos que han alcanzado el <i>colapso central</i> (ver subsección 3.2.1.1), los cuales representan el 17 % de la muestra en cuestión. Datos proporcionados por S. Djorgovski.	11
2.6.. Perfiles de brillo superficial de los cúmulos globulares galácticos (a) NGC 6388, el cual puede ser ajustado por un modelo de King (ver subsección 3.1.4, del capítulo 3); y (b) Terzian 2, el cual es un ejemplo de un cúmulo con colapso central.	13
2.7.. Funciones de luminosidad estelar en los filtros I_{814} (panel izquierdo) y V_{555} (panel derecho) para tres CGs galácticos pobres en metales y con colapso central. Tomado de Piotto et al. (1996b, Fig. 3).	14
2.8.. En (a) se muestra la distribución de masas de los CGs galácticos y en (b) la masa como función de su distancia galactocéntrica. Datos proporcionados por S. Djorgovski.	16
3.1.. Perfiles de densidad superficial como función del radio escalado al radio de núcleo r_c , para una familia de modelos de King. El número asociado con cada curva es el parámetro de concentración $c = \log(r_t/r_c)$ [King 1966].	24
3.2.. Procesos de evolución dinámica de los cúmulos globulares.	26
3.3.. Evolución de la masa promedio de las partículas dentro de los cascarones lagrangianos para un modelo de dos componentes de masa con $\mu = 1,25$ y $q = 0,1$. Las curvas representan un modelo promedio de 20 simulaciones con $N = 2500$ masas puntuales cada una. Reproducida de la tesis doctoral de Emil Khalisi (2002).	37

3.4.. Condiciones de equipartición en el espacio de parámetros $q - \mu$. Las líneas indican el criterio de equipartición de la energía cinética de: Spitzer (punteada; ecuación 3.36); Inagaki y Wiyanto (tres puntos y raya; ecuación 3.40); Watters <i>et. al.</i> (línea cortada; ecuación 3.42); y Lightman y Fall (punto y raya; ecuación 3.41).	41
4.1.. Pasos de tiempo individuales y por bloques. Basado en la figura 7.2 de Khalisi (2002).	45
4.2.. Representación del esquema de vecinos para una partícula. Los puntos negros dentro de la esfera de radio r_s pertenecen a la <i>lista de vecinos</i> de la partícula marcada con un asterisco. Tomado de Khalisi (2002), figura 7.2.	48
4.3.. Representación esquemática de la estrategia de integración de órbitas de EuroStar.	54
5.1.. Distribución espacial inicial para el experimento M2-1, (a) proyectada sobre el plano X-Z; (b) proyectada sobre el plano X-Y; (c) proyectada sobre el plano Z-Y; y (d) en el diagrama de Linblad (tanto el momento angular como la energía mostradas son cantidades por unidad de masa). Los puntos pequeños representan partículas de masa m_1 y los puntos grandes partículas de masa m_2 . El punto pequeño encerrado en un círculo concéntrico es sólo una partícula arbitraria (en este caso, aquella designada por el No. 1).	59
6.1.. Clasificación de las partículas en subsistemas basada en la componente de masa e integrador al que éstas pertenecen.	64
6.2.. Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-2. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de <i>EuroStar</i> , calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).	67
6.3.. Velocidad cuadrática media en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento MU-1. <i>Izquierda:</i> subsistema NB6; <i>centro:</i> sistema G; <i>derecha:</i> subsistema SCF.	68
6.4.. Parámetro de equipartición de la energía entre los grupos de integrador en función del tiempo para el sistema global del experimento MU-1.	68
6.5.. Radios lagrangianos en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF para el experimento MU-1. <i>Izquierda:</i> subsistema NB6; <i>centro:</i> sistema G; <i>derecha:</i> subsistema SCF.	70
6.6.. Densidad central promedio en función del tiempo para los sistemas G y NB6 para el experimento MU-1. <i>Izquierda:</i> subsistema NB6; <i>derecha:</i> sistema G. . .	71
6.7.. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas NB6, SCF y G del experimento MU-1. <i>Izquierda:</i> subsistema NB6; <i>centro:</i> sistema G; <i>derecha:</i> subsistema SCF.	72

6.8..	Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-1. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de <i>EuroStar</i> , calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).	73
6.9..	Velocidad cuadrática media en función del tiempo para los sistemas G, M1, M2, NB6 y SCF en función del tiempo para el experimento M2-1. <i>Superior izquierda</i> : subsistema de masa ligera; <i>superior derecha</i> : subsistema de masa pesada; <i>centro</i> : sistema global; <i>inferior izquierda</i> : subsistema de NBODY6; <i>inferior derecha</i> : subsistema de SCF.	75
6.10..	Evolución temporal de la velocidad cuadrática media de los subsistemas M1-NB6, M1-SCF, M2-NB6 y M2-SCF para el experimento M2-1. <i>Superior izquierda</i> : subsistema de masa ligera de NBODY6; <i>superior derecha</i> : subsistema de masa ligera de SCF; <i>inferior izquierda</i> : subsistema de masa pesada de NBODY6; <i>inferior derecha</i> : subsistema de masa pesada de SCF.	76
6.11..	Parámetro de equipartición entre los grupos de masa, ξ_m , en función del tiempo para el experimento M2-1. <i>Superior</i> : sistema global; <i>Inferior izquierda</i> : subsistema de NBODY6; <i>inferior derecha</i> : subsistema de SCF.	78
6.12..	Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para el experimento M2-1. <i>Superior</i> : sistema global; <i>inferior izquierda</i> : subsistema de masa ligera; <i>inferior derecha</i> : subsistema de masa pesada.	79
6.13..	Radios lagrangianos en función del tiempo para los sistemas G, M1, M2, NB6 y SCF en el experimento M2-1. Se muestran, de menor a mayor, los radios lagrangianos correspondientes al 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa del sistema respectivo. <i>Superior izquierda</i> : subsistema de masa ligera; <i>superior derecha</i> : subsistema de masa pesada; <i>centro</i> : sistema global; <i>inferior izquierda</i> : subsistema de NBODY6; <i>inferior derecha</i> : subsistema de SCF.	81
6.14..	Radios lagrangianos en función del tiempo para los subsistemas M1-NB6, M1-SCF, M2-NB6 y M2-SCF para el experimento M2-1. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. <i>Superior izquierda</i> : subsistema de masa ligera de NBODY6; <i>superior derecha</i> : subsistema de masa ligera de SCF; <i>inferior izquierda</i> : subsistema de masa pesada de NBODY6; <i>inferior derecha</i> : subsistema de masa pesada de SCF.	83
6.15..	Comparación de radios lagrangianos en el tiempo inicial y a $\sim t_{eq}$ de los subsistemas M1 y M2 para el experimento M2-1. <i>Izquierda</i> : subsistema de masa ligera; <i>derecha</i> : subsistema de masa pesada.	84
6.16..	Densidad central en función del tiempo para de los sistemas G, M1 y M1-NB6 para el experimento M2-1. <i>Izquierda</i> : sistema global; <i>centro</i> : sistema de masa ligera; <i>derecha</i> : sistema de masa ligera de NBODY6.	85

6.17..	Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6 y SCF para el experimento M2-1. <i>Superior izquierda:</i> subsistema de masa ligera; <i>superior derecha:</i> subsistema de masa pesada; <i>centro:</i> sistema global; <i>inferior izquierda:</i> subsistema de NBODY6; <i>inferior derecha:</i> subsistema de SCF.	87
6.18..	Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF para el experimento M2-1. <i>Superior izquierda:</i> subsistema de masa ligera de NBODY6; <i>superior derecha:</i> subsistema de masa ligera de SCF; <i>inferior:</i> subsistema de masa pesada de SCF.	88
6.19..	Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-2. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de <i>EuroStar</i> , calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).	90
6.20..	Velocidad cuadrática media en función del tiempo para todos los subsistemas del experimento M2-2. <i>Superior izquierda:</i> subsistema M1-NB6; <i>superior central:</i> subsistema M1; <i>superior derecha:</i> subsistema M1-SCF; <i>central izquierda:</i> subsistema NB6; <i>central:</i> sistema G; <i>central derecha:</i> subsistema SCF; <i>inferior izquierda:</i> subsistema M2-NB6; <i>inferior central:</i> subsistema M2; <i>inferior derecha:</i> subsistema M2-SCF.	91
6.21..	Parámetro de equipartición de la energía cinética entre las componentes de masa en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-2. <i>Izquierda:</i> subsistema NB6; <i>centro:</i> sistema G; <i>derecha:</i> subsistema SCF.	92
6.22..	Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-2. <i>Izquierda:</i> subsistema M1; <i>centro:</i> sistema G; <i>derecha:</i> subsistema M2.	93
6.23..	Radios lagrangianos en función del tiempo para todos los subsistemas para el experimento M2-2. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. <i>Superior izquierda:</i> subsistema M1-NB6; <i>superior central:</i> subsistema M1; <i>superior derecha:</i> subsistema M1-SCF; <i>central izquierda:</i> subsistema NB6; <i>central:</i> sistema G; <i>central derecha:</i> subsistema SCF; <i>inferior izquierda:</i> subsistema M2-NB6; <i>inferior central:</i> subsistema M2; <i>inferior derecha:</i> subsistema M2-SCF.	95
6.24..	Densidad central en función del tiempo para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-2. <i>Superior izquierda:</i> subsistema M1-NB6; <i>superior derecha:</i> subsistema M1; <i>inferior izquierda:</i> subsistema NB6; <i>inferior derecha:</i> sistema G.	96
6.25..	Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-2.	98

6.26..	Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-3. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de <i>EuroStar</i> , calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).	99
6.27..	Velocidad cuadrática media en función del tiempo para todos los subsistemas del experimento M2-3. <i>Superior izquierda</i> : subsistema M1-NB6; <i>superior central</i> : subsistema M1; <i>superior derecha</i> : subsistema M1-SCF; <i>central izquierda</i> : subsistema NB6; <i>central</i> : sistema G; <i>central derecha</i> : subsistema SCF; <i>inferior izquierda</i> : subsistema M2-NB6; <i>inferior central</i> : subsistema M2; <i>inferior derecha</i> : subsistema M2-SCF.	101
6.28..	Parámetro de equipartición de la energía cinética entre las componentes de masa en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-3. <i>Izquierda</i> : subsistema NB6; <i>centro</i> : sistema global; <i>derecha</i> : subsistema SCF.	101
6.29..	Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-3. <i>Izquierda</i> : subsistema M1; <i>centro</i> : sistema global; <i>derecha</i> : subsistema M2.	102
6.30..	Radios lagrangianos en función del tiempo para todos los subsistemas, excepto el subsistema M2-NB6, para el experimento M2-3. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. <i>Superior izquierda</i> : subsistema M1-NB6; <i>superior central</i> : subsistema M1; <i>superior derecha</i> : subsistema M1-SCF; <i>central izquierda</i> : subsistema NB6; <i>central</i> : sistema global; <i>central derecha</i> : subsistema SCF; <i>inferior central</i> : subsistema M2; <i>inferior derecha</i> : subsistema M2-SCF.	104
6.31..	Densidad central en función del tiempo para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-3. <i>Superior izquierda</i> : subsistema M1-NB6; <i>superior derecha</i> : subsistema M1; <i>central izquierda</i> : subsistema NB6; <i>central derecha</i> : sistema G; <i>inferior izquierda</i> : subsistema M2-NB6; <i>inferior derecha</i> : subsistema M2.	107
6.32..	Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-3. <i>Superior izquierda</i> : subsistema M1-NB6; <i>superior central</i> : subsistema M1; <i>superior derecha</i> : subsistema M1-SCF; <i>central izquierda</i> : subsistema NB6; <i>central</i> : sistema global; <i>central derecha</i> : subsistema SCF; <i>inferior central</i> : subsistema M2; <i>inferior derecha</i> : subsistema M2-SCF.	108

Índice de cuadros

5.1.. Experimentos realizados, nomenclatura y características principales.	61
6.1.. Escalas de tiempo para los experimentos de dos componentes de masa. Las cantidades se muestran en unidades de N-cuerpos (NBU).	73

Capítulo 1

Introducción

La «Vía Láctea» o, simplemente, «la Galaxia», es una agrupación de aproximadamente 10^{11} estrellas gravitacionalmente ligadas, las cuales no están uniformemente distribuidas en el espacio sino que muestran una gran variedad de «subestructuras» y «asociaciones» que difieren en tamaño, número, forma, edad, etc. Hay una clara concentración de estrellas hacia el *centro* de la Galaxia, y otra concentración hacia un *plano galáctico*. Las regiones más densas que presentan estas concentraciones dan lugar a lo que se llama el *bulbo* y el *disco* de la Galaxia, respectivamente; este último presentando una subconcentración en los que se llaman los brazos espirales. La gran mayoría del *resto* de las estrellas (alrededor del 99 % de aquellas que *no* forman parte ni del disco ni del bulbo galáctico) constituyen un *halo* relativamente menos denso y de forma más o menos esférica.

El principal mecanismo mediante el cual las galaxias evolucionan adoptando formas espaciales tan complejas está dado por la ley de la gravitación universal de Newton y las leyes de la mecánica clásica. Hasta ahora, no hay evidencia *concluyente* que sugiera que los efectos relativistas especiales o generales puedan tener un papel importante. Por tanto, podemos afirmar que la dinámica de la Galaxia está determinada casi en su totalidad por la atracción gravitacional de sus elementos constituyentes, en el régimen clásico, partiendo de las condiciones iniciales adecuadas.

Con un poco de abstracción, pensando en un modelo «sencillo» que tome en cuenta sólo la fuerza de gravedad entre las estrellas, parece haber una gran simplicidad en un conjunto de masas puntuales cuya evolución dinámica está determinada solamente por su mutua atracción gravitacional. Pero esta simplicidad resulta sólo aparente cuando se considera el gran número de partículas involucradas, y el hecho de que no existe una solución analítica general aun para el movimiento del mucho más simple «problema de los tres cuerpos» (el cual resulta ser caótico por naturaleza). Afortunadamente, es este mismo gran número de estrellas el cual permite que un tratamiento estadístico del problema sea apropiado y, mediante este tratamiento, se han encontrado patrones generales en la evolución dinámica de tales sistemas estelares [Spitzer 1987, por ejemplo]. Sin embargo, este último enfoque no deja de ser una aproximación y sólo podemos obtener resultados más detallados analizando el movimiento mismo de las estrellas por medio de la integración numérica de sus órbitas.

El entender mediante estos y otros diversos principios físicos cada una de las

subestructuras de la Galaxia, su composición y cómo llegaron a ser lo que vemos hoy en día, ha abierto muchas áreas activas de investigación astronómica, tanto observacionales como teóricas. Una de estas subestructuras, de gran importancia y repercusión en otras áreas de la astronomía, es la de los llamados *cúmulos globulares* (ver figura 2.1) y su estudio arroja conocimiento incluso sobre la formación y evolución de la Galaxia misma, pues se cree que se formaron casi al mismo tiempo que ésta o durante su evolución temprana. Los cúmulos globulares son agrupaciones de varios cientos de miles o millones de estrellas gravitacionalmente ligadas, distribuidas de manera aproximadamente esférica y concentradas hacia un centro, que orbitan dentro de la Galaxia con una compleja dinámica —tanto interna como externa— y se localizan tanto en el disco como en el halo de la misma.

Existen numerosos trabajos dedicados al estudio de los cúmulos globulares, realizados con muy diversas técnicas y enfoques: sobre su forma y estructura [King 1985, van den Bergh 1994], sobre su evolución dinámica mediante procesos internos y externos [Lightman y Shapiro 1978, Elson et al. 1987, Meylan y Heggie 1997], sobre sus propiedades globales y como sistema [Zinn 1988, Meylan y Heggie 1997], sobre su cinemática [Webbink 1988], sobre su abundancia química [Bell 1988], sobre su origen y formación [Larson 1990, van den Bergh 1994, Meylan y Heggie 1997], sobre su destrucción [Aguilar 1993], etc.

Las estrellas dentro de un cúmulo globular orbitan dentro del mismo a causa del potencial global del cúmulo, ocasionalmente teniendo encuentros cercanos entre dos o más estrellas, particularmente frecuentes e importantes en el núcleo del mismo. En este proceso, cada estrella intercambia energía con las estrellas que la rodean una y otra vez, produciendo cambios importantes en la estructura global del cúmulo con el paso del tiempo. De esta manera, las estrellas más masivas tienden a ceder su energía cinética a las estrellas más ligeras, tendiendo hacia un estado de *equipartición de la energía cinética*, en el cual todas las estrellas tienen una igual cantidad de energía cinética. Un efecto secundario de este proceso es que las estrellas más masivas, al ceder su energía cinética, tienden a caer hacia las regiones más internas del cúmulo al perder energía potencial (volverse más ligadas al cúmulo, incrementando la magnitud de su energía potencial negativa); mientras que las estrellas menos masivas tienden a redistribuirse hacia las regiones externas del cúmulo, al ganar energía. A este efecto secundario de la equipartición de la energía se le conoce como *segregación de masa*, y se caracteriza por una desigual distribución espacial de las estrellas dentro del cúmulo dependiendo de su masa.

En el presente estudio, se analiza el efecto del proceso de segregación de masa en cúmulos globulares aislados¹, desde el punto de vista dinámico, utilizando herramientas computacionales de simulación de N-cuerpos.

En el capítulo 2 se describen las propiedades generales de los cúmulos globulares que se obtienen a partir de las observaciones. En su momento se definen las

¹ Sin considerar el potencial de la Galaxia.

cantidades físicas y parámetros necesarios para la descripción apropiada de estas propiedades. En el capítulo 3 se describen los modelos analíticos que se emplean para ajustar las características observadas, así como la teoría sobre la dinámica de los cúmulos globulares y los procesos de evolución presentes, particularmente el de la *equipartición de la energía y segregación de masa*. En el capítulo 4 se presentan las características más importantes del código *EuroStar*; utilizado para integrar numéricamente la evolución temporal del sistema en los experimentos realizados. En el capítulo 5 se muestra la organización y características de las simulaciones que se llevaron a cabo durante el presente estudio, así como las razones de interés para la elección de los parámetros y modelos utilizados en cada una de ellas. En el capítulo 6 se detallan los resultados del análisis hecho a las simulaciones realizadas junto con su discusión correspondiente. Finalmente, en el capítulo 7 se exponen las conclusiones principales obtenidas a partir de los resultados del presente trabajo.

Capítulo 2

Propiedades generales de los cúmulos globulares

Dentro del disco y halo de la Galaxia —y aun dentro de la mayoría de las demás galaxias conocidas—, existe una clase de sistema estelar que agrupa estrellas que parecen tener una relativamente fuerte atracción gravitacional mutua —mayor que la de con el resto de las estrellas a su alrededor—; de manera que, hasta cierto punto, parecen estar aisladas de su medio circundante; aunque inmersas en él. Éstos son los llamados *cúmulos estelares*. Los cúmulos estelares pueden clasificarse en tres tipos: los *cúmulos abiertos* (o *cúmulos galácticos*) son agrupaciones de aproximadamente 50 – 100 estrellas, ligadas por su gravedad mutua¹. Sus estrellas se distribuyen de manera *irregular* sin ninguna concentración particular hacia su «centro» y se los encuentra únicamente en el disco galáctico. Las «*asociaciones*» son cúmulos abiertos *pequeños* de alrededor de 10–100 estrellas entre las cuales figuran estrellas tipo O y B, las cuales son las más brillantes y calientes de la secuencia principal. Se encuentran en los brazos espirales de la galaxia, donde se está llevando a cabo la formación estelar. Por último, los *cúmulos globulares* son los más masivos de los cúmulos estelares y consisten en una agrupación de 10^5 – 10^6 estrellas, en una distribución aproximadamente esférica muy concentrada hacia su centro [Lightman y Shapiro 1978].

2.1. Definición de un cúmulo globular

El primer punto que hay que resaltar acerca de los cúmulos globulares es que no hay una definición totalmente clara y sencilla de ellos que se aplique a cualquier cúmulo globular en cualquier galaxia y que sea totalmente discriminante entre éstos y las otras clases de cúmulos estelares [Meylan y Heggie 1997]. Si bien tienen características que los diferencian de las otras agrupaciones estelares, hay un considerable debate en torno a si ciertos objetos deberían o no ser considerados como cúmulos globulares [Meylan y Heggie 1997, Ashman y Zepf 1998]. Sin embargo, la definición clásica de un cúmulo globular, tomando como modelo el sistema de cúmulos globulares galáctico, los describe como un cúmulo estelar viejo, con una edad τ mayor a

¹ Aunque débilmente comparado con la energía de ligadura de los más masivos de los de cúmulos estelares.

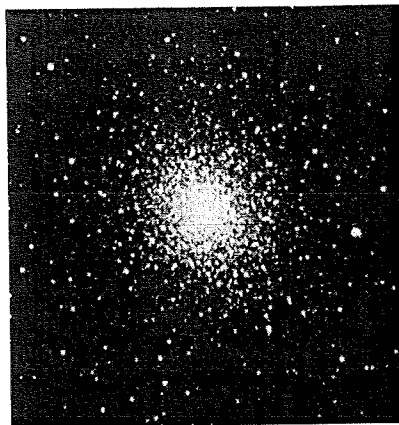


Figura 2.1. El cúmulo globular galáctico M92.

los 10 Ga² aproximadamente. Éstos se encuentran localizados en el disco y halo de la Galaxia. Aun en esta descripción hay considerable incertidumbre, dado que la precisión con la que se pueden determinar las edades absolutas de los cúmulos globulares es muy reducida y esta cuestión representa todavía un gran reto cosmológico (ver subsección 2.2.3). No obstante, para los fines de este trabajo, es suficiente adoptar la definición anterior.

2.2. Propiedades generales de los cúmulos globulares

Los cúmulos globulares (CGs) presentan una gran diversidad de propiedades y características, así como correlaciones entre ellas, ya sea que se estudien individualmente o como sistema³. Estas propiedades varían en gran medida de uno a otro CG y de uno a otro sistema de cúmulos globulares (SCG); sin embargo, hay algunas características que son compartidas por la mayoría. Existen inclusive correlaciones de los SCGs con la morfología y propiedades de la galaxia que los contiene (galaxia *huésped*).

Debido a la relativa proximidad de sus miembros, el SCG más estudiado —y, por tanto, el que se conoce con mayor detalle—, es el perteneciente a la Vía Láctea; de manera que la mayoría de las conclusiones acerca de las propiedades generales de los CGs individuales son derivadas de las observaciones y el estudio de estos objetos. Por este motivo, las propiedades que se describen en el presente capítulo se refieren a los CGs pertenecientes al SCG galáctico, a menos que explícitamente se indique lo contrario.

² Un año es la unidad temporal asociada al periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol y se abrevia 1 a (1 Ga = 10⁹a).

³ Al conjunto de todos los cúmulos globulares que orbitan alrededor de una misma galaxia se le llama *sistema de cúmulos globulares*.

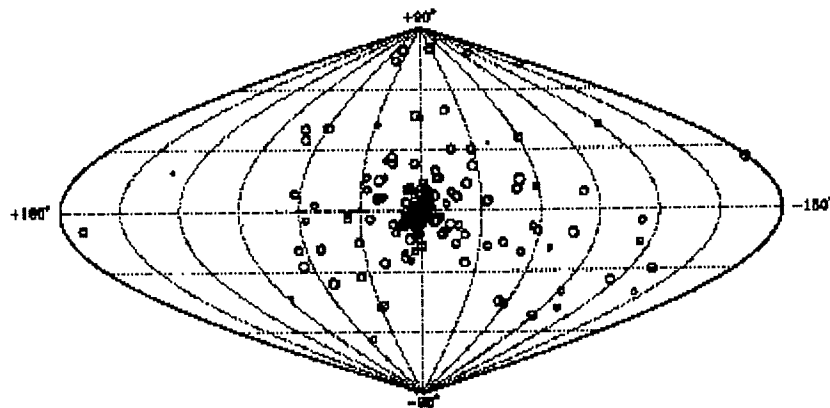


Figura 2.2. Distribución proyectada de 143 CGs galácticos en coordenadas galácticas (tomado de Djorgovski y Meylan 1994, Fig. 1). El tamaño del símbolo se escala con el logaritmo de la luminosidad.

2.2.1. Número y distribución espacial

Se conocen poco más de 150 CGs pertenecientes al SCG de la Galaxia, pero se estima que deben existir alrededor de 180 CGs [Ashman y Zepf 1998], muchos de los cuales no han sido detectados por distintos motivos. Hay varias razones para creer que existen más CGs de los que se conocen, entre las cuales destaca la extinción de la radiación estelar causada por el material interestelar, principalmente en las direcciones del bulbo y del disco galáctico, y la posibilidad de que simplemente no hayan sido identificados como tales [Djorgovski y Meylan 1994].

Muchas de las propiedades de los CGs —tales como su luminosidad o su radio—, están correlacionadas con la distancia al centro de la Galaxia en la que se ubican, si bien hay que considerar que su posición no es fija y lo que observamos es sólo una posición en sus órbitas alrededor de la Galaxia, la cual está cambiando continuamente, dependiendo de los parámetros de dichas órbitas.

La mayor parte de los CGs se encuentra a una distancia de entre 1 y 30 kpc del centro de la Galaxia⁴, con una notoria ausencia de ellos a menos de 1 kpc y una aparente disminución de su número alrededor de los 40–60 kpc. Sólo unos cuantos se encuentran más allá de los 70 kpc, siendo los más lejanos Pal 4 y AM 1 a distancias de 100 y 125 kpc respectivamente⁵. Típicamente se encuentran a una distancia del Sol de unos 10 kpc, aproximadamente la misma distancia que hay del Sol al centro de la Galaxia. En la figura 2.2 se muestra la distribución proyectada de los CGs del

⁴ Un parsec (abreviado 1 pc) es aproximadamente $3,26$ años-luz $= 3,09 \times 10^{16}$ m.

⁵ Lo cual es bastante notable, pues es más del doble de la distancia a la Gran Nube de Magallanes. Las Nubes Magallánicas, o *Nubes de Magallanes*, son dos galaxias enanas irregulares satélites de la Vía Láctea, ubicadas a una distancia galactocéntrica de unos 50 kpc. La Gran Nube de Magallanes es la más grande de las dos galaxias.

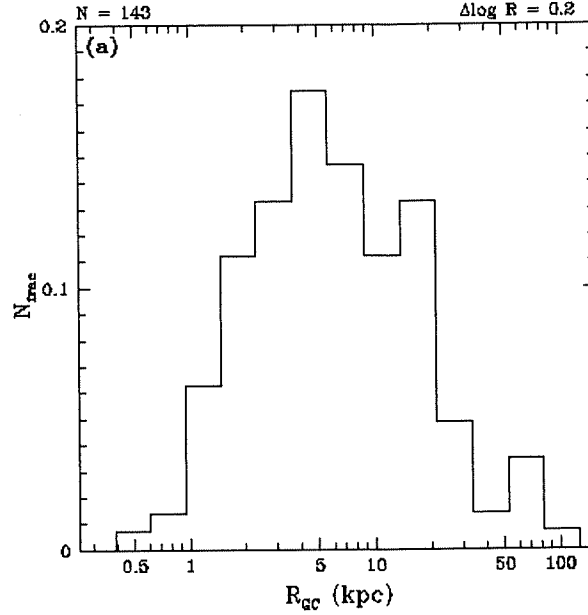


Figura 2.3. Distribución de los CGs de la Galaxia en función de su distancia galactocéntrica. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

sistema de la Vía Láctea en coordenadas galácticas y en la figura 2.3 su distribución como función de su distancia galactocéntrica⁶.

La determinación de la distancia a los cúmulos globulares se realiza típicamente midiendo la magnitud aparente m_V de las estrellas RR Lyrae que se encuentran dentro de los mismos. La magnitud absoluta M_V de estas estrellas está relacionada con la *metalicidad*, $[Fe/H]$ (ver subsección 2.2.2), del cúmulo mediante la expresión

$$M_V(RR) = c_0 [Fe/H] + c_1 \quad (2.1)$$

donde c_0 y c_1 son constantes. Las estimaciones actuales indican que el valor de c_0 está entre 0,1 y 0,3, y el valor de c_1 es aproximadamente 1,0, siendo las incertidumbres suficientes para impedir una determinación precisa de la distancia a los cúmulos.

2.2.2. Abundancia química y cinemática

Existe una conocida correlación entre las propiedades químicas y cinemáticas de los CGs. Por propiedades químicas se entiende el estudio de los índices fotométricos y anchos equivalentes en las líneas de absorción de los espectros de los CGs. Un parámetro para medir la abundancia química de un objeto, muy usado en la astro-

⁶ A la distancia radial de cualquier objeto con respecto al sistema de coordenadas montado en el centro de la Galaxia, se le llama *distancia galactocéntrica*, y se abrevia R_{GC} .

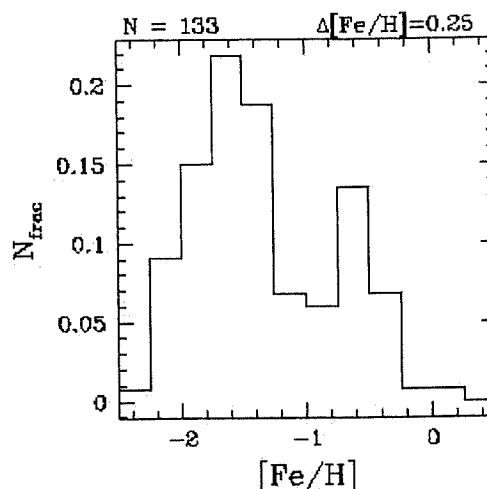


Figura 2.4. Distribución de metalicidad de los CGs de la Vía Láctea.

nomía, es la *metalicidad*, $[Fe/H]$, la cual es una medida relativa y logarítmica de la abundancia de elementos *metálicos*⁷ con respecto a la del Sol.

Se ha encontrado que, con base a estas propiedades, el SCG galáctico puede ser subdividido en dos o tres poblaciones distintas [Ashman y Zepf 1998]. En la figura 2.4 se muestra la distribución de metalicidad de los cúmulos del SCG de la Vía Láctea, donde podemos ver dos poblaciones evidenciadas por los picos de esta distribución bimodal. Una población es relativamente *pobre en metales*, centrada en $[Fe/H] = -1.59$; y otra es relativamente *rica en metales*, centrada en $[Fe/H] = -0.51$. Tienen dispersiones de 0.34 y 0.23, respectivamente. La población rica en metales presenta propiedades espaciales y cinemáticas de un «disco grueso», teniendo una distribución espacial aplanada y notoria rotación alrededor del centro galáctico, mientras que la población pobre en metales tiene una distribución aproximadamente esférica y con poca o nula rotación neta.

Una explicación alterna de los datos sugiere que la población rica en metales puede asociarse mejor con una población de bulbo, debido a que el bulbo galáctico también es rico en metales y presenta también una rotación neta considerable [van den Bergh 1993c]. Sin embargo, la distribución espacial de la población de CGs rica en metales se extiende a aproximadamente 8 kpc del centro galáctico, lo cual es considerablemente mayor al confinamiento que presenta el bulbo. Además, hay estudios que indican que la rotación neta de la población de CGs ricos en metales es mayor que la de las estrellas del bulbo galáctico, una vez más favoreciendo la asociación de la población con el disco y no con el bulbo [Rich 1996]. En última instancia,

⁷ Debido a que la materia del Universo está compuesta en su gran mayoría por Hidrógeno y Helio, en la astronomía es común agrupar al resto de los elementos químicos (menos del 1 % de la composición del Universo) simplemente como *metales* o *elementos metálicos*.

el problema podría resolverse estudiando los SCGs de otras galaxias espirales como la nuestra, debido al reducido número de cúmulos globulares ricos en metales en la Vía Láctea.

2.2.3. Edades

La determinación de la edad absoluta de los cúmulos globulares ha sido un problema que está íntimamente ligado a los modelos cosmológicos, pues determina un límite inferior para la edad del Universo. Históricamente, la determinación de tales edades ha sido tanto un apoyo como un gran problema para los modelos cosmológicos, pues con frecuencia han resultado edades de CGs más viejos que la edad inferida del Universo según ciertos modelos y, por otro lado, dentro de los rangos predichos por otros modelos.

Existen numerosos métodos para calcular las edades de los CGs, entre los cuales destacan aquellos relacionados con los modelos de evolución estelar. Un aspecto muy ligado a la determinación de la edad es la determinación de la distancia a la que se encuentran del observador, ya que este parámetro se utiliza para conocer la magnitud absoluta M_V de los CGs, ya que sólo la magnitud aparente m_V es medible directamente. Es importante considerar que existe apreciable incertidumbre en la determinación de estos parámetros, por lo que el rango que se encuentra para las edades absolutas de los cúmulos es bastante amplio (ver subsección 2.2.1). Sin embargo, diferentes estudios, tanto teóricos como observacionales, apuntan a una edad absoluta aproximada de 15 Gyr [Bolte y Hogan 1995, Renzini et al. 1996]. Estudios más detallados, que pretenden tomar en cuenta tanto las incertidumbres debidas a la medición de los valores como las incertidumbres presentes en los modelos empleados para el cálculo, arrojan un rango de edad absoluta de 11 – 21 Gyr [Chaboyer 1995], mientras que otros estudios aportan un límite inferior de edad de 10 Gyr [Schramm et al. 1995, Shi 1995].

Un parámetro más confiable es la edad relativa de los CGs, el cual se ve menos afectado por la incertidumbre en el cálculo de la distancia. Los estudios de la edad relativa de cúmulos cercanos y pobres en metales indican una dispersión en la edad menor a 0,8 Gyr. Sin embargo, existe fuerte evidencia de que hay diferencia de edad entre ciertos cúmulos, siendo los casos más notorios Ruprecht 106 y Pal 12, que parecen ser del orden de 3 Gyr más jóvenes que los cúmulos de metalicidad similar [Ashman y Zepf 1998].

En general, el estado actual de este campo, es consistente con un panorama en el que la mayoría de los cúmulos se formaron aproximadamente al mismo tiempo, con una dispersión de edades pequeña o despreciable, pero con algunos CGs significativamente más jóvenes. Lo anterior tiene implicaciones importantes para los modelos de formación galáctica (ver sección 2.3).

El panorama para otras galaxias es un tanto distinto del de la Vía Láctea, pues aun tan «cerca» como en las Nubes de Magallanes, que son las galaxias más cer-

canas a la nuestra, se encuentran cúmulos con edades absolutas aproximadas de $10^6 \lesssim \tau \lesssim 10^9$ yr, con lo cual inmediatamente surge la duda de si son o no cúmulos globulares «genuinos», como los de la Vía Láctea. Ciertamente, si nos basamos en la definición clásica (ver sección 2.1), no pueden serlo; sin embargo, presentan características que sugieren que pueden ser cúmulos globulares *jóvenes*, progenitores de cúmulos viejos como los de la Galaxia, si bien hay un gran debate al respecto [Meylan y Heggie 1997].

2.2.4. Tamaño, estructura y forma geométrica

Dado que la distribución interna de las estrellas de los cúmulos globulares es aproximadamente esférica, su tamaño y estructura suele reducirse a descripciones de parámetros radiales. Los parámetros más comunes son los llamados *radio de núcleo*, r_c ; *radio medio de masa*, r_h ; y *radio de marea*, r_t ⁸. El radio de núcleo es el radio en el cual el valor del brillo superficial local del cúmulo cae hasta la mitad de su valor central (en el centro del cúmulo, que es la parte más brillante); el radio medio de masa es el radio en el cual se encuentra la mitad de la masa total del cúmulo y también se lo identifica con el radio que contiene la mitad del brillo total integrado del cúmulo (proyectado en el cielo), pues estas cantidades están muy relacionadas (ver subsección 2.2.7); el radio de marea es el radio en el cual la densidad del cúmulo es cero, valor que se alcanza de manera asintótica para los modelos del cúmulo «aislado» y de manera truncada en los modelos inmersos en un potencial galáctico (ver sección 3.1). Un parámetro adicional que suele emplearse es la llamada *concentración* del cúmulo, dada por $c = \log(r_t/r_c)$, la cual nos da una medida básica de la distribución de la masa en el cúmulo. La distribución interna de un cúmulo globular cualquiera puede ser caracterizada completamente por tres parámetros independientes cualesquiera de los mencionados, según los modelos analíticos que se les ajustan (ver sección 3.1). Comúnmente, suelen emplearse el radio medio de masa y la concentración pues, observacionalmente, el segundo es el más fácil de medir; mientras que el primero puede ser calculado ajustando con un modelo analítico (e.g. un modelo de King). El radio de marea es particularmente difícil de medir puesto que su determinación suele necesitar de conteos de estrellas en las partes exteriores del cúmulo, para determinar la extensión del mismo, procedimiento en el cual puede fácilmente confundirse entre las estrellas de campo y las estrellas pertenecientes al cúmulo, sobre todo en cúmulos cercanos al disco y/o bulbo galáctico.

La distribución de los CGs galácticos para tres de los parámetros antes mencionados se muestra en la figura 2.5. Las distribuciones para r_c , r_h y c son aproximadamente unimodales centradas en 1,04 pc, 4,17 pc y 1,36 respectivamente, con dispersiones correspondientes de 4,1 pc, 4,2 pc y 0,43. La mayoría de los cúmulos tienen un valor de c entre 1 y 2, aproximadamente, por lo cual r_h es típicamente entre 10 y 100 veces más grande que r_c , lo cual simplemente manifiesta el núcleo

⁸ Para evitar confusión emplearemos las abreviaturas usadas en la literatura en idioma inglés.

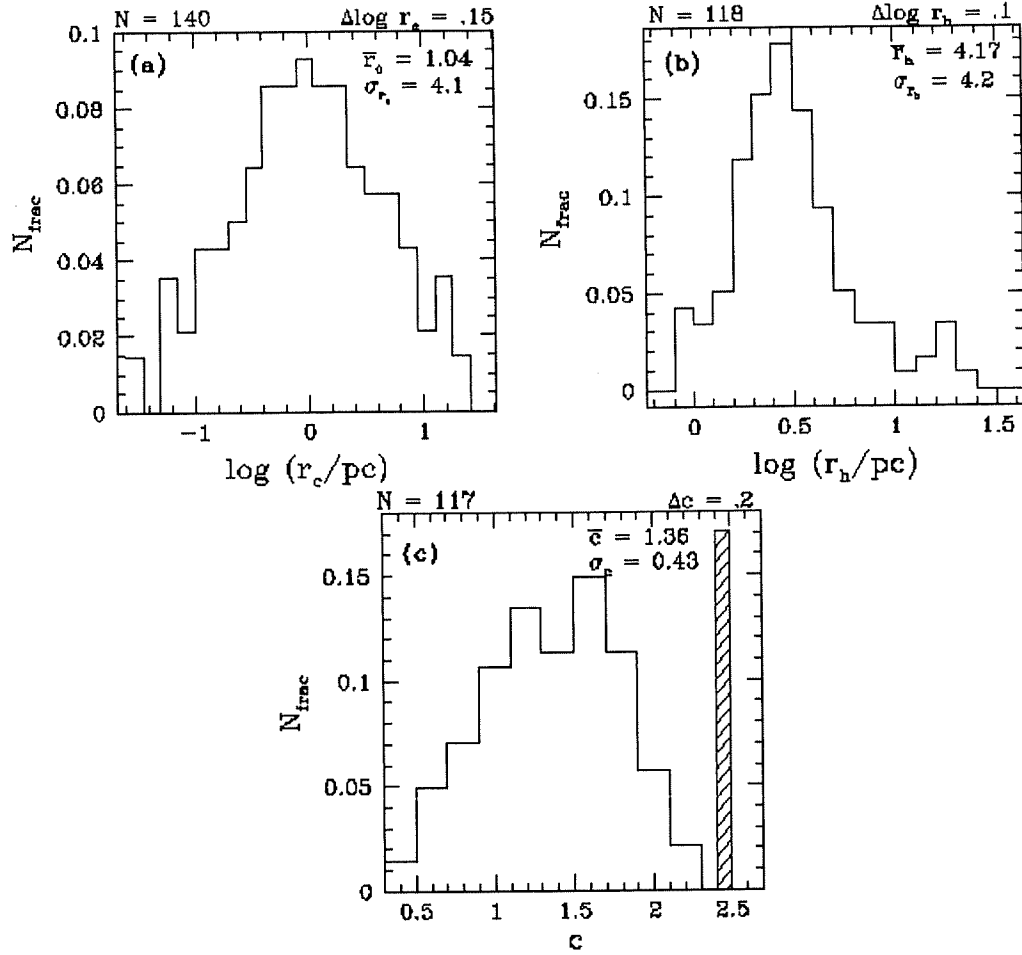


Figura 2.5. Histogramas de la distribución de los valores observados de (a) radio de núcleo r_c ; (b) radio medio de masa r_h y (c) concentración c . La columna sombreada dentro de la distribución mostrada en la figura 2.5c representa la subpoblación de los cúmulos globulares galácticos que han alcanzado el *colapso central* (ver subsección 3.2.1.1), los cuales representan el 17 % de la muestra en cuestión. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

concentrado y el halo extendido que aún cualitativamente se observa en las imágenes de CGs (figura 2.1).

Dentro de la distribución de los cúmulos mostrada en la figura 2.5c se ha representado una subpoblación importante de los cúmulos globulares que, por sus características, se dice que han alcanzado la etapa de *colapso central* (ver subsección 3.2.1.1), los cuales representan el 17 % de la muestra en cuestión. Éstos se representan en la columna sombreada. Observacionalmente, los CGs de esta subpoblación se identifican porque pueden ser ajustados con una ley de potencias en la parte central de su perfil de brillo superficial (ver subsección 2.2.5), en vez de tener un núcleo de

brillo aproximadamente constante. En estos cúmulos, el valor de r_c tiende a cero y generalmente no puede ser determinado con precisión.

Bajo la necesidad de adoptar una escala radial característica para el tamaño de un cúmulo, mediante la cual puedan ser referenciadas otras cantidades, se ha adoptado al radio medio de masa r_h como esta medida de la escala espacial, pues su valor cambia muy lentamente con el tiempo, permaneciendo aproximadamente constante a lo largo de la mayor parte de la vida del cúmulo, en contraste con las otras medidas consideradas.

Si bien podemos considerar que los CGs son aproximadamente esféricos, esto no es necesariamente cierto. Una forma de medir las desviaciones de esta forma espacial es midiendo el cociente b/a , donde a y b son los semiejes mayor y menor del cúmulo proyectado en el plano del cielo, respectivamente. El valor promedio de este cociente $\langle b/a \rangle$ es de $0,93 \pm 0,01$, según un estudio realizado por White y Shawl (1987), tomando una muestra de 95 CGs galácticos. Estos autores también reportan que el 58 % de su muestra tiene valores en el intervalo $0,9 \leq \langle b/a \rangle \leq 1,0$, el 36 % están en el intervalo $0,8 \leq \langle b/a \rangle \leq 0,9$ y sólo 6 % entre 0.7 y 0.8. En base a este estudio distinguen tres grupos distintos, debido a una dependencia entre la concentración c y la razón entre los ejes b/a : (1) $c < 1,05$ y $b/a = 0,85 \pm 0,02$; (2) $1,05 < c < 2,05$ y $b/a = 0,93 \pm 0,01$ y (3) $c > 2,05$ y $b/a = 0,97 \pm 0,01$; con 10, 76 y 9 miembros respectivamente, concluyendo que los cúmulos de mayor concentración presentan mayor simetría circular. No parece haber correlación entre este cociente y la distancia al centro galáctico, R_{GC} , o la metalicidad.

A manera de especulación, si consideramos que los CGs evolucionan en el potencial galáctico a lo largo del tiempo y a través de su órbita alrededor de la Galaxia formando *colas*⁹, es posible que la asimetría que observamos sea al menos en parte producto de estas últimas; de manera que aquellos cúmulos con mayor asimetría sean aquellos cuyas colas se presentan tangencialmente a la línea de visión —en el plano del cielo— contribuyendo al parámetro b ; mientras que aquellos cúmulos cuyas colas se encuentran cercanas a la línea de visión tengan un cociente b/a más cercano a la unidad. Si consideramos también que los estudios de dinámica estelar y simulaciones numéricas indican que las colas se prolongan o extienden a medida que avanza el tiempo, a la par que aumenta la concentración del cúmulo debido a efectos del colapso gravotérmico y la evaporación, entonces aquellos cúmulos de mayor concentración deben ser también los de colas más prominentes, únicamente producto de que son los más evolucionados. Lo anterior puede contribuir a la dependencia

⁹ En los modelos computacionales de CGs realizados mediante simulaciones de N-cuerpos, cuando dichos cúmulos se hacen orbitar dentro de un potencial galáctico, las partículas de los mismos tienden a formar estructuras alargadas que se desprenden del cúmulo aproximadamente en el sentido paralelo a su trayectoria, tanto delante como detrás del cúmulo —en el sentido de la órbita—. Éstas estructuras son causadas por las fuerzas de marea presentes sobre el cúmulo debidas al potencial de la Galaxia y han sido detectadas observacionalmente en varios CGs [Lee et al. 2004, por ejemplo]. Dichas estructuras se conocen como *colas*.

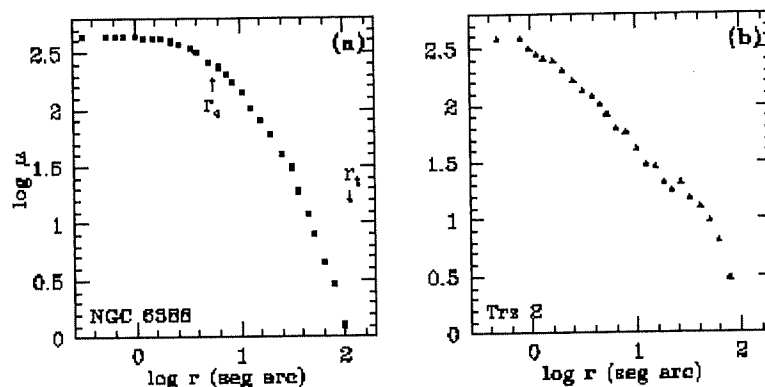


Figura 2.6. Perfiles de brillo superficial de los cúmulos globulares galácticos (a) NGC 6388, el cual puede ser ajustado por un modelo de King (ver subsección 3.1.4, del capítulo 3); y (b) Terzian 2, el cual es un ejemplo de un cúmulo con colapso central.

observada del cociente de ejes con la concentración, pues las colas más prominentes producirían mayor asimetría aparente.

2.2.5. Perfiles de brillo superficial

El *perfil de brillo superficial* de un CG es un diagrama que muestra en el eje de las abscisas la coordenada radial r de un sistema de coordenadas bidimensional con origen en el centro del cúmulo (proyectado en el plano del cielo) y en el eje de las ordenadas el brillo superficial integrado μ a lo largo de la coordenada angular ϕ (del mismo sistema de coordenadas). En la figura 2.6 se muestran dos perfiles de brillo superficial típicos.

Comúnmente se utilizan modelos analíticos que se ajustan a estos perfiles para describir sus características, e inclusive hay algunos parámetros que con frecuencia sólo pueden ser obtenidos de esta forma (ver sección 3.1 y subsección 2.2.4). Hay múltiples casos, como el que se muestra en la figura 2.6, en los cuales resulta evidente que los CGs bajo comparación son de distintas características, y es en base a estas diferencias que se puede realizar una clasificación de los CGs apoyada en las propiedades de su perfil de brillo superficial.

Probablemente el aspecto más importante de estos diagramas radica en que representan un paso crucial para la obtención de *perfil de densidad de masa* del cúmulo, debido a la relación existente entre masa y luminosidad, como se detalla en la subsección 2.2.7. La información contenida en estos diagramas nos dice cómo están distribuidas las estrellas en el interior del cúmulo, lo cual sirve como base para los modelos de evolución dinámica¹⁰, ya que el perfil de densidad va cambiando a lo largo de la vida del mismo tendiendo hacia una distribución más concentrada.

¹⁰ Además de las dispersiones de velocidades obtenidas mediante espectroscopía.

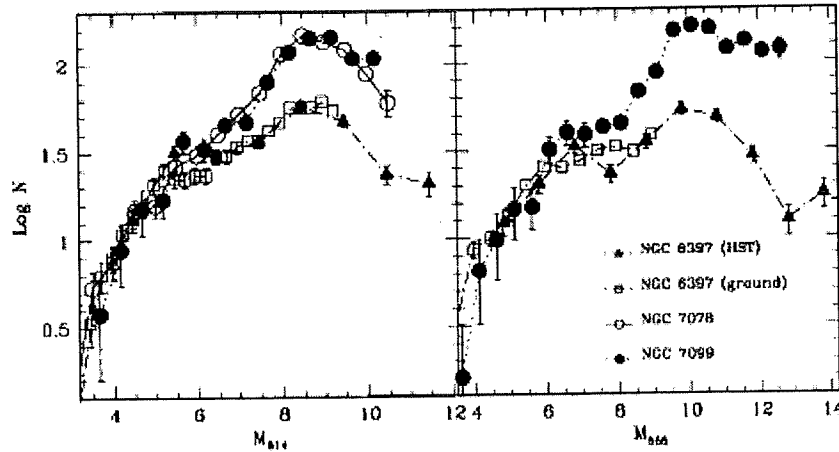


Figura 2.7. Funciones de luminosidad estelar en los filtros I_{814} (panel izquierdo) y V_{555} (panel derecho) para tres CGs galácticos pobres en metales y con colapso central. Tomado de Piotto et al. (1996b, Fig. 3).

2.2.6. Funciones de luminosidad estelar

A la distribución de las estrellas pertenecientes a un mismo CG como función de su magnitud absoluta se le llama *función de luminosidad estelar*. Debido a las grandes distancias a las que se encuentran los CGs con respecto a la Tierra, del orden de decenas de kpc, y la relativa proximidad entre sí de las estrellas que constituyen un mismo cúmulo, del orden de unos cuantos pc, podemos considerar como iguales a las funciones de luminosidad estelar con base a la magnitud relativa m_V y absoluta M_V , lo cual permite derivar la segunda de la primera, siempre y cuando se conozca la distancia al cúmulo, i.e. la función de luminosidad estelar cuantifica la cantidad relativa de estrellas que se encuentran en diferentes luminosidades y, a una magnitud fija, esta cantidad no se ve afectada por las diferencias en distancia de cada una de ellas, pues resultan insignificantes comparadas con la distancia a la que se encuentra el cúmulo entero. En la figura 2.7 se muestran las funciones de luminosidad de tres CGs galácticos obtenidas a partir de la magnitud absoluta derivada de mediciones en dos filtros distintos, uno centrado en el infrarrojo y otro en el visible (I_{814} y V_{555} , respectivamente¹¹) [Piotto et al. 1996].

A partir de la función de luminosidad se deriva la *función de masa estelar*, la cual se calcula por medio de los cocientes de masa-luminosidad, aplicados individualmente para cada punto de la función usando la relación masa-luminosidad de cada estrella (ver subsección 2.2.7), y nos da información de la cantidad relativa de estrellas de diferentes masas que contiene el cúmulo. Esta función evoluciona en el tiempo por medio de los procesos dinámicos presentes. Particularmente, la segregación de masa

¹¹ Los filtros I_{814} (F814W) y V_{555} (F555W) son muy similares a los filtros de Johnson estándar I y V , respectivamente.

hace tender a las estrellas masivas a colocarse hacia el centro del cúmulo y a las ligeras en las partes externas, lo cual hace que la función de masa dependa del radio (ver subsección 3.2.1.2). Un efecto secundario de esto es que las estrellas ligeras son las más vulnerables ante choques del cúmulo con el disco galáctico, lo cual las remueve preferentemente. Lo anterior obviamente modifica la forma de la función de masa estelar. La evaporación es otro efecto dinámico que contribuye a la evolución de la función de masa. Todos estos efectos se describen a detalle en el capítulo 3.

2.2.7. Masa y cocientes de masa-luminosidad

Bajo ciertas condiciones y suposiciones, se puede aproximar la masa de un cúmulo globular (y de algunas galaxias) por medio de su luminosidad con base a una relación lineal, empleando lo que se llama un *cociente de masa-luminosidad*, denotado por $\Upsilon = M/L$, donde M es la masa total y L es la luminosidad total integrada del objeto, ya sea una estrella, un cúmulo globular o cualquier otro astro.

Una manera más directa de determinar la masa, específicamente para un cúmulo globular que se se asume en *equilibrio virial* (ver sección 3.1), es a partir de su *dispersión de velocidades*, σ , la cual se obtiene por medio de medir el ensanchamiento de las líneas de absorción debido al efecto Doppler¹². Sin embargo, sólo se cuenta con una medición fiable de la dispersión de velocidades para un porcentaje minoritario de los CGs conocidos ($\sim 30\%$). A partir de estas mediciones se determina un cociente de masa-luminosidad, Υ , y frecuentemente es indispensable hacer uso de los cocientes de masa-luminosidad para el cálculo de la masa del resto de los CGs. Por lo anterior es muy importante caracterizar el cociente masa-luminosidad para los cúmulos galácticos. Pryor y Meylan (1993) determinaron la masa para 56 CGs utilizando modelos de King considerando un espectro de masas para las estrellas del cúmulo. El valor promedio que obtuvieron es de $\Upsilon = 2,3$ en unidades solares. En la figura 2.8 se muestra la distribución de masa del SCG galáctico así como su relación con la distancia galactocéntrica. Aproximadamente el 30 % de los valores se obtuvieron calculando la masa por medios dinámicos y el resto utilizando el valor *promedio* del cociente de masa-luminosidad $\Upsilon = 2,3$. El rango de la distribución es $2,5 \times 10^3 \leq M_{GC} \leq 2,4 \times 10^6$ en unidades de masa solar, siendo AM 4 y ω Centauri el menos y más masivo respectivamente. La mayoría de los CGs tienen masas entre 8×10^4 y 10^6 , con un valor medio de $3,9 \times 10^5$. La distribución muestra un pico secundario en $1,5 \times 10^6$ que decae abruptamente para valores mayores. No hay relación evidente de la masa con la distancia galactocéntrica, salvo una ligera tendencia de los cúmulos más ligeros a ubicarse a distancias grandes.

¹² Además de la suposición de equilibrio virial y de la dispersión de velocidades se debe conocer un parámetro radial de escala para el tamaño del cúmulo.

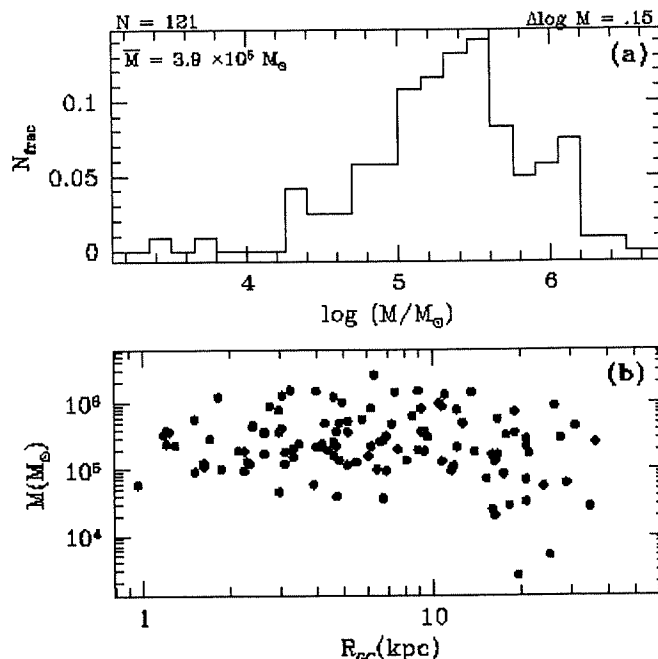


Figura 2.8. En (a) se muestra la distribución de masas de los CGs galácticos y en (b) la masa como función de su distancia galactocéntrica. Datos proporcionados por S. Djorgovski.

2.3. Implicaciones en la formación y evolución de la Galaxia

Desde el inicio de la astronomía moderna, el estudio de los cúmulos globulares ha sido motivado, al menos en parte, por la búsqueda de un entendimiento de la estructura, formación y evolución de la Galaxia. Desde 1830, John Herschel notó que había una extraña concentración de estos objetos en un área relativamente pequeña del cielo, en la dirección de Sagitario, y fue Karl Bohlin, en 1909, quien notó que la mayoría de los CGs se encuentran en una mitad de la bóveda celeste, asumió que debían estar distribuidos simétricamente alrededor del centro galáctico y concluyó, por tanto, que el Sistema Solar debía ubicarse lejos de este último, lo cual constituye una contribución muy importante. Sin embargo, fue hasta 1918 cuando gracias al trabajo de Harlow Shapley, se consolidó esta idea con base a su trabajo en el cual midió distancias a los CGs que sirvieron como trazadores de la forma y tamaño de la Galaxia, midiendo también el desplazamiento del Sistema Solar con respecto al centro de la Vía Láctea.

En la actualidad sabemos que la edad del SCG galáctico es comparable con la edad de la Galaxia misma y aún no queda totalmente claro cuál se formó primero. En cualquier caso, debido a lo anterior y a su relativo aislamiento con respecto al resto de las estrellas del disco y halo, pueden considerarse como «registros fósiles» de la historia de formación de la Galaxia. Sus características, distribución, número, correlaciones, etc. representan evidencias importantes que tienen que ser explicadas

por las teorías sobre la formación y evolución de la Vía Láctea. Asimismo, las características de los SCGs de otras galaxias imponen restricciones a los modelos de formación de las galaxias en general.

Capítulo 3

Teoría y modelos de los cúmulos globulares

La área de la física más cercana a la dinámica estelar es probablemente la mecánica estadística clásica, ya que el gran número de estrellas presentes en estos sistemas hace necesario un tratamiento estadístico al estudiar la evolución global del sistema. En estos sistemas, como en la termodinámica clásica, podemos entender su evolución como una sucesión de estados de equilibrio cuasi-estático cuyas transiciones ocurren de manera lenta. La manera más común y más general de analizar estos sistemas es definiendo una función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m, t)$ sobre el espacio fase, donde $\mathbf{r}$ es el radio-vector de posición con origen en el centro de masa del cúmulo, $\mathbf{v}$ es el vector de velocidad, m es la masa y t es el tiempo. El valor de f determina la densidad numérica de estrellas en un pequeño hipercubo 7-dimensional de volumen $d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} dm$ al tiempo t , de manera que $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} dm$ representa la cantidad de estrellas ubicadas en el elemento espacial $d^3\mathbf{r}$ centrado en $\mathbf{r}$, con velocidades en el elemento de volumen $d^3\mathbf{v}$ centrado en $\mathbf{v}$ y con masas en el intervalo de ancho dm centrado en m , al tiempo t . Esta descripción tiene sentido si podemos definir elementos de volumen suficientemente grandes como para que contengan un gran número de estrellas, pero suficientemente pequeños para que la densidad numérica de las mismas sea aproximadamente constante dentro de ellos. Afortunadamente, bajo cierto nivel de aproximación, los sistemas estelares cumplen con estas características dado el gran número de estrellas que contienen. Bajo tales condiciones, la forma de f es independiente de la forma y tamaño exacto de los elementos de volumen empleados. Aunado a lo anterior podemos suponer cierta simetría en la función f , dada la evidente simetría esférica que presentan los cúmulos globulares. En los CGs reales, lo anterior es cierto para la mayor parte del cúmulo, excepto en las regiones más externas, donde el efecto del potencial gravitacional de la Galaxia, en el que están inmersos, se hace evidente, tendiendo hacia una desviación de la forma esférica. La última y más básica suposición que debemos hacer es que la *granularidad* del potencial gravitacional del cúmulo puede ser ignorada, y que podemos considerar a éste como una función que varía suavemente con la posición¹.

¹ Por *granularidad* del potencial gravitacional del cúmulo se entiende la presencia de potenciales puntuales dentro del mismo. Es decir, se dice que un potencial gravitacional de un sistema de partículas es *granular* cuando está conformado por la superposición directa de los potenciales puntuales de las partículas; mientras que un potencial es *suavizado*, o *suave*, cuando se ignoran los potenciales puntuales y se considera sólo un potencial global promedio (por ejemplo, el utilizado

La ecuación que describe la evolución dinámica de un sistema como el descrito y por tanto la forma posible de f es la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{enc}} \quad (3.1)$$

donde Φ es el potencial gravitacional *suave* y el miembro derecho de la ecuación describe el efecto de las interacciones de dos cuerpos que, en el caso de un sistema *no-colisional*², es idénticamente cero.

Para el análisis de estos sistemas resulta oportuno definir unas cuantas cantidades que serán de utilidad. La *densidad de partículas* de masa en el intervalo de ancho dm centrado en m , ubicadas en el volumen espacial $d^3\mathbf{r}$ centrado en $\mathbf{r}$, al tiempo t está dada por

$$n(\mathbf{r}, m, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m, t) d^3\mathbf{v} \quad (3.2)$$

donde $d^3\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ y la integral es sobre todas las velocidades. Otra cantidad importante es la *velocidad cuadrática media* v_m^2 dada por

$$v_m^2(\mathbf{r}, m, t) = \frac{\int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, m, t) d^3\mathbf{v}}{n(\mathbf{r}, m, t)} \quad (3.3)$$

donde nuevamente la integral es sobre todas las velocidades.

Un sistema autogravitante genera su propio potencial a partir de su distribución de masa, pues está sujeto a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t) \quad (3.4)$$

donde G es la constante de gravitación universal y ρ es la densidad de materia. En el caso de una agregación de estrellas como el caso de un cúmulo globular, ρ está dada por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int n(\mathbf{r}, m, t) m dm \quad (3.5)$$

donde la integral es sobre todo el rango de masas que se presenten en el sistema. En el caso de un modelo con una cantidad finita de grupos de estrellas dentro de los cuales cada estrella tiene masa m_j para el j -ésimo grupo, las integrales sobre la masa m pueden ser directamente cambiadas por sumatorias sobre los índices respectivos.

por el integrador SCF, descrito en la sección 4.3). Un caso intermedio entre estos dos casos es la introducción de un *parámetro de suavizamiento* (comúnmente denotado por ϵ), el cual elimina la singularidad dentro del potencial puntual. A estos potenciales se les conoce como potenciales de *Plummer* (ver subsección 3.1.2).

² Un sistema *no-colisional* es precisamente aquél en el cual las interacciones de dos cuerpos son *ignoradas*; mientras que, si son tomadas en cuenta, se habla de un sistema *colisional*.

3.1. Modelos analíticos de equilibrio cuasi-estático

Cuando la cantidad de estrellas en un elemento de volumen es independiente del tiempo, i.e. cuando f no depende de t , tenemos una solución de equilibrio cuasi-estático. Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación 3.1, es fácil ver que éste es idéntico a Df/Dt , por lo que en el caso en que $(\frac{\partial f}{\partial t})_{\text{enc}} = 0$ tenemos un sistema independiente del tiempo y por tanto una solución de equilibrio. En la derivación anterior está implícito el hecho de que la aceleración de las estrellas, $\mathbf{a}$, proviene exclusivamente del potencial gravitacional suave, por lo que $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$. De lo precedente y las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.2 es inmediato que Φ no depende de t , así como ninguna otra propiedad del cúmulo. Además, suponiendo simetría esférica total, Φ depende sólo de $r = |\mathbf{r}|$, así como f depende sólo de r , $v_r = |\mathbf{v}_r|$ y $v_t = |\mathbf{v}_t|$, donde $\mathbf{v}_r$ es la componente de la velocidad en la dirección paralela a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}_t$ es la componente ortogonal al vector $\mathbf{r}$ ³. El hecho de que f no dependa de la dirección de $\mathbf{v}_t$ simplemente supone un sistema que no se encuentra en rotación lo cual simplifica y delimita aún más la forma de f . Si, además, f no depende de la dirección de $\mathbf{v}$ (i.e. sólo depende de la magnitud $v = \|\mathbf{v}\|$), entonces se tiene un modelo esférico e *isotrópico* [i.e. $f = f(r, v)$].

En general, en un sistema en equilibrio cuasi-estático, f debe depender de seis constantes de movimiento que son constantes a lo largo de cualquier trayectoria dinámica de una estrella y, de hecho, la definen, a saber: la energía E , el momento angular J , dos ángulos que definen la orientación de $\mathbf{J}$, un ángulo que define la orientación de la órbita en su plano, y la fase de la estrella en su órbita a un tiempo dado. Dado que buscamos una solución de equilibrio, la última constante es irrelevante, mientras que los tres ángulos mencionados deben serlo también al suponer isotropía en el campo de velocidades, i. e. f es independiente de estas cantidades. Por tanto, bajo estas condiciones, f debe ser función sólo de la energía, la masa y el momento angular de las estrellas. Si consideramos tanto la energía y el momento angular por unidad de masa, podemos eliminar aún otra dependencia, teniendo que $f = f(E, J)$, la cual denotamos igual si bien la forma funcional es distinta de la que guarda con las variables r y v . Evidentemente

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(r) \quad (3.6)$$

$$J = rv_t = rv \sin \theta \quad (3.7)$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$. Para cada valor de E , el valor de J no podrá exceder $J_c(E)$ el momento angular de una estrella con energía E en órbita circular. Es fácil ver que dada una $f(E, J)$ se puede obtener la función de distribución $f(r, v_r, v_t)$ a partir de las ecuaciones 3.6 y 3.7, suponiendo que $\Phi(r)$ es conocido.

³ A menos que el sistema esté en rotación, en cuyo caso f no depende de v_t , sino de ambas componentes v_θ y v_φ .

Una relación importante para los sistemas en equilibrio es la dada por el *teorema del Virial*, que expresa que

$$2K = -W \quad (3.8)$$

donde K es la energía cinética total del sistema $M \langle v_m^2 \rangle / 2$ y W es la energía potencial total. Los corchetes indican promedios sobre la masa total del cúmulo. Asimismo, la energía total es $E_T = K + W$ o simplemente $W/2$.

Los modelos más sencillos son aquellos en los cuales la función de distribución f sólo depende de la energía E , $f = f(E)$. En estos casos J es aleatorio entre cero y $J_c(E)$.

3.1.1. Modelo simple

El modelo más simple es aquel en el que todas las estrellas orbitan circularmente alrededor del centro con una distribución aleatoria de planos orbitales. En este caso

$$v_r = 0 \quad y \quad v_t^2 = -GM(r)/r$$

donde $M(r)$ es la masa interior al radio r . Las estrellas orbitan sólo compensando la fuerza centrífuga. La densidad radial puede ser arbitraria, pero en el caso en que ρ es constante, v_t aumenta proporcional a r y todas las estrellas tienen el mismo periodo de revolución T independiente del radio de revolución.

3.1.2. Esferas politrópicas

Si ahora asumimos una distribución de velocidades isotrópica en todo el espacio y una función de distribución dada por

$$f(E) = \begin{cases} \kappa_1 (-E)^p & \text{si } E < 0 \\ 0 & \text{si } E > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

donde κ_1 es una constante, podemos calcular $\rho(r)$ a partir de las ecs. 3.2 y 3.5, obteniendo

$$\rho(r) = \kappa_2 [-\Phi(r)]^{p+3/2} \quad (3.10)$$

para $p > -1$ y donde κ_2 es una constante que depende de p . La ecuación 3.10 es la ecuación básica de una *esfera politrópica*, donde el índice usual n está dado en este caso por $n = p + 3/2$. Las esferas politrópicas *estelares* deben su nombre a su relación con las esferas politrópicas *gaseosas autogravitantes*⁴, estudiadas principalmente como modelos del interior de las estrellas. Existen soluciones analíticas para $n = 0, 1, 5$. Para $n < 5$ la densidad decae a cero en un radio finito y por tanto la masa total es

⁴ Los gases politrópicos tienen la ecuación de estado $p = K\rho^\gamma$, donde p es la presión, K es una constante y γ es el *índice adiabático politrópico*, el cual es igual al cociente de los calores específicos c_p/c_v . Puede demostrarse que la distribución de densidad de un politropo estelar de índice n es igual a la de un politropo gaseoso autogravitante de índice $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$.

finita también. En el caso en que $n = 0$ se tiene una esfera homogénea, en el cual la ec. 3.9 es inaplicable debido a su divergencia. El caso $n = 5$ resulta particularmente interesante, pues este modelo es el más sencillo que reproduce cualitativamente las propiedades de un cúmulo estelar. En este caso la densidad nunca es cero para ningún radio finito, sin embargo la masa total sí es finita. El primero en apreciar estas propiedades fue Plummer (1911), al aplicarlo para ajustar las observaciones de distribuciones de luz de cúmulos globulares, por lo cual a este modelo se le conoce ampliamente como *modelo de Plummer*. Sus características físicas son

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{[1 + r^2/R^2]^{5/2}} \quad (3.11)$$

$$M(r) = M \cdot \frac{r^3/R^3}{[1 + r^2/R^2]^{3/2}} \quad (3.12)$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{R} \cdot \frac{1}{[1 + r^2/R^2]^{1/2}} = -2[v_m(r)]^2 \quad (3.13)$$

donde R es un factor de escala que se relaciona con $\rho(0)$ y $v_m(0)$ a través de las ecs. 3.11 y 3.13. Los modelos de Plummer han sido ampliamente usados en la generación de condiciones iniciales para las simulaciones numéricas de N-cuerpos.

Para $n > 5$ la densidad decae tan lentamente con el radio que la masa total es infinita.

3.1.3. Esfera isotérmica

Si consideramos una esfera politrópica con $n \rightarrow \infty$ se obtiene lo que se conoce como una *esfera isotérmica*. En este modelo, la distribución de velocidades se aproxima a su valor de equilibrio, como en los gases de equilibrio estadístico. Dado que en este caso evidentemente $n \gg 5$, la masa total es infinita como se mencionó en la sección 3.1.2, por lo cual tampoco puede servir como un modelo realista de un CG. Sin embargo, se cree que los núcleos de los CGs son aproximadamente isotérmicos, por lo cual las propiedades de este modelo se aplican a estos sistemas. La función de distribución correspondiente es

$$f(E) = Ke^{-BE} = Ke^{-Bv^2/2}e^{-B\Phi(r)} = f(r, v) \quad (3.14)$$

donde K es una constante y $B \equiv 3/v_m^2$. Aplicando nuevamente las ecuaciones 3.2, 3.4 y 3.5 podemos obtener una solución para $\rho(r)$ mediante una aproximación asintótica en la solución de Φ . Considerando un solo tipo de estrellas de igual masa m , por lo cual la dependencia de f con la masa es puntual, de manera que $f = f(E, m) = Ke^{-BE}\delta(m' - m)$, donde δ es la delta de Dirac, obtenemos

$$\rho(r) = \frac{v_m^2}{6\pi Gr^2}, \quad (3.15)$$

$$M(r) = \frac{2v_m^2}{3G}r. \quad (3.16)$$

A este modelo se le conoce como *esfera isotérmica singular*, pues su densidad central es infinita. Otras soluciones no singulares se obtienen solamente mediante integración numérica de las ecuaciones correspondientes con las condiciones de frontera adecuadas, e. g. $\tilde{\rho}(0) = d\tilde{\rho}/d\tilde{r}(0) = 0$, donde $\tilde{\rho}$ y $\tilde{r}$ son cantidades adimensionales de la densidad y el radio respectivamente.

Es interesante observar que a mayor v_m^2 , la densidad crece en todo el espacio, pues se puede mostrar que esta velocidad cuadrada media es independiente de la posición (véase, por ejemplo, Binney y Tremaine 1987, ec. 4-122). Haciendo una analogía con el tratamiento mecano-estadístico de los gases moleculares, recordemos que v_m^2 es proporcional a la temperatura del gas, por lo cual lo anterior implica precisamente que el gas es isotérmico. En todo punto del espacio, la distribución de velocidades sigue una distribución del tipo Maxwell-Boltzmann, de acuerdo a la ec. 3.14, por lo que siempre existen igual cantidad de estrellas que entran y salen de cualquier región del espacio a cualquier velocidad. Dado que la masa total del sistema es infinita, en este modelo no puede haber estrellas que escapen del sistema pues requerirían a su vez una velocidad de escape, v_{esc} , infinita.

Otro punto interesante que destacar es la distribución de momento angular implícita que resulta. Dada la ecuación 3.7 tenemos que $f_J(J) = \rho(r) \cdot f_{v_t}(v_t)$, donde f_J denota la función de distribución de J y f_{v_t} denota la función de distribución de v_t . Entonces, sustituyendo las ecuaciones 3.14 y 3.15 obtenemos que, para r constante,

$$f_J(J) \propto r^{-2} e^{-BJ^2/r^2}. \quad (3.17)$$

Cualitativamente, cuando $r \rightarrow 0$, $f_J(J)$ es muy ancha y alta (tendiendo a una constante «muy grande»), mientras que cuando $r \rightarrow \infty$, $f_J(J)$ es muy angosta y muy baja (tendiendo a una delta de Dirac de «alto nulo»). Lo anterior implica que, en este modelo, a radios pequeños las órbitas de las estrellas son casi igualmente probables circulares que radiales, tendiendo a ser cada vez más radiales a medida que nos alejamos del centro del cúmulo. Sin embargo, hay que diferenciar este hecho del provocado por una distribución de velocidades anisotrópica, como la discutida en la sección 3.1.4.

3.1.4. Modelos de King-Michie

Una manera de resolver el problema de la masa infinita es modificar la función de distribución dada en la ecuación 3.14 de manera que sea cero a partir de una energía dada. Esto puede lograrse mediante los llamados modelos de una «Maxwelliana desplazada» dados por la función de distribución

$$f(E) = \begin{cases} K (e^{-BE} - e^{-BE_{esc}}), & \text{si } E < E_{esc} \\ 0, & \text{si } E > E_{esc} \end{cases} \quad (3.18)$$

donde E_{esc} es la energía requerida para escapar del cúmulo. Si $E_{esc} = 0$, obtenemos el caso de un cúmulo aislado; mientras que si $E_{esc} \rightarrow \infty$ recuperamos el modelo

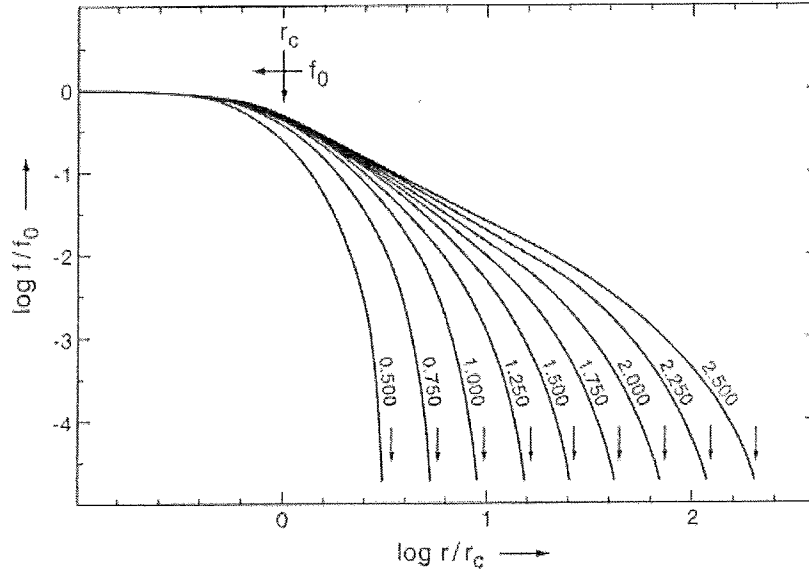


Figura 3.1. Perfiles de densidad superficial como función del radio escalado al radio de núcleo r_c , para una familia de modelos de King. El número asociado con cada curva es el parámetro de concentración $c = \log(r_t/r_c)$ [King 1966].

de la esfera isotérmica (ver subsección 3.1.3). Estos modelos fueron desarrollados y ampliamente usados por I. R. King para ajustar los datos observados de cúmulos reales [King 1966], por lo cual se los conoce generalmente como *modelos de King*, si bien el primero en utilizarlos en esta área fue R. W. Michie (1963). Una de las cualidades de estos modelos es que podemos interpretar esta distribución como un cúmulo estelar inmerso en un potencial galáctico, ya que la Galaxia impone un *radio de corte* al potencial del cúmulo, a partir del cual cualquier estrella que lo traspase deja de estar ligada a este último.

La mejor cualidad de los modelos de King es que ajustan muy bien los perfiles de brillo superficial de la mayoría de los cúmulos a la vez que tienen un fundamento dinámico, pues (i) reproducen la tendencia hacia una distribución Maxwelliana de velocidades —producto de los múltiples encuentros de dos cuerpos producidos entre las estrellas a lo largo del tiempo—; (ii) producen distribuciones de masa que presentan un núcleo concentrado y un halo extendido, tal como se observa en los perfiles de brillo superficial de CGs y (iii) representan un estado de equilibrio por lo que en cualquier momento podemos ajustar a los datos reales con un modelo de King particular y podemos estudiar la evolución en el tiempo mediante transiciones suaves de un modelo a otro, diferenciándose en sus parámetros.

Existe una extensión natural de los modelos de King para tomar en cuenta la anisotropía de la distribución de velocidades esperada en los cúmulos globulares. Lo anterior se puede lograr considerando una función de distribución $f = f(E, J)$ de la

forma

$$f(E, J) = \begin{cases} K e^{-\gamma J^2} (e^{-BE} - e^{-BE_{esc}}), & \text{si } E < E_{esc} \text{ y } J < J_c(E) \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde γ es una constante y $J_c(E)$ es el momento angular de una estrella con energía E en órbita circular, como se mencionó en la sección 3.1. Estos modelos fueron inicialmente propuestos por R. W. Michie por lo que se les conoce a su vez como *modelos de Michie* o *modelos de King-Michie* [Michie 1963].

3.2. Procesos de evolución dinámica

Los modelos descritos en la subsección 3.1 se basan en estados de equilibrio cuasi-estático en los cuales las propiedades del cúmulo, descritas por la función de distribución f , son contantes en el tiempo. Además, para obtener dichas soluciones, es necesario asumir un potencial gravitacional global suavizado Φ , ignorando los potenciales keplerianos⁵ de cada una de las estrellas. En un cúmulo globular descrito por alguno de estos modelos, las propiedades del mismo se asumen constantes localmente en cualquier punto del espacio fase, pues el flujo neto de estrellas en cualquier volumen diferencial del mismo es cero, i.e. la cantidad de estrellas que abandonan una región de ciertas propiedades se cancela con una igual cantidad de ellas que las adoptan. Estos modelos no pueden (ni fueron pensados para) conservar el equilibrio si dejamos evolucionar el sistema en el tiempo. Los problemas surgen al considerar el número *finito* de estrellas que contiene un cúmulo globular real, pues aquella compensación en el flujo local de estrellas mencionada es realizada sólo *estadísticamente* en el tiempo, de manera que, a menor número de partículas, mayor será el ruido estadístico temporal que haga desviar al cúmulo de las condiciones de equilibrio locales. Una manera resumida de decir lo mismo es afirmar que se viola localmente la ecuación de Boltzmann (Ec. 3.1) o simplemente podemos pensar que, dado el movimiento de las estrellas y el potencial estático Φ , ρ no corresponde localmente con el potencial, violando la ecuación de Poisson (Ec. 3.4).

La evolución dinámica de los CGs puede estudiarse a diferentes escalas espaciales y temporales (ver sección 3.3), en cada una de las cuales entran en juego diferentes procesos evolutivos. Lo que es claro es que el principal mecanismo de evolución está dado por la fuerza de gravedad que actúa sobre las estrellas y los múltiples encuentros de dos cuerpos que provoca, manifestando diversos efectos. Para estudiar con mayor facilidad estos efectos, los podemos agrupar en dos clases: (a) los *procesos de evolución internos* son aquellos que involucran solamente a las estrellas pertenecientes al CG y a su correspondiente potencial gravitacional generado, i.e. aquellas estrellas

⁵ Al potencial gravitacional producido por una masa puntual, que decae como r^{-1} , se le denomina también *potencial kepleriano*.

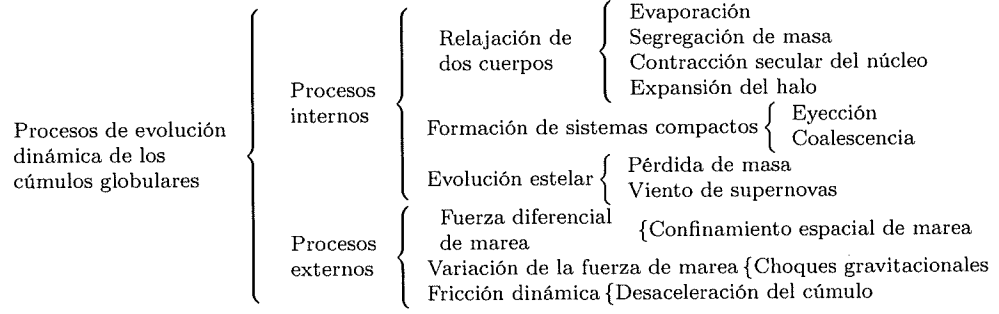


Figura 3.2. Procesos de evolución dinámica de los cúmulos globulares.

que están gravitacionalmente ligadas al cúmulo ($E < E_{esc}$); y (b) los *procesos de evolución externos* son aquellos causados por el potencial gravitacional externo en el que está inmerso el CG (el de la Galaxia), así como los efectos que las estrellas del halo galáctico producen. Dentro de los procesos evolutivos clasificados como internos podemos considerar a la relajación de dos cuerpos, evolución estelar y formación de sistemas compactos; mientras que dentro de los procesos externos podemos encontrar a la fuerza diferencial de marea y a la fricción dinámica. La clasificación detallada de estos procesos se muestra en la figura 3.2. La discusión exhaustiva de la mayoría de estos procesos está fuera de los objetivos de este trabajo, sin embargo, los procesos más relevantes y aquellos más cercanos a la orientación del presente estudio se describen en lo que resta de esta sección. En particular, se hará énfasis en los procesos de evolución internos.

3.2.1. Relajación de dos cuerpos

Al ignorar los potenciales keplerianos de las estrellas explícitamente, se ignora uno de los efectos más importantes que impulsan la evolución dinámica del cúmulo: la *relajación de dos cuerpos*. Las interacciones gravitacionales entre las estrellas les hacen intercambiar energía y momento angular entre ellas, cambiando gradualmente sus parámetros orbitales y desviando a cada estrella de la órbita original que seguía como consecuencia del potencial suavizado total Φ . Contrariamente a lo que pudiera pensarse, son los encuentros *distantes* y no los *cercanos*⁶ los que contribuyen mayormente a este cambio; pues, aunque los primeros más débiles, a cualquier tiempo sobrepasan en cantidad a los segundos, que son relativamente raros. Al cabo de un tiempo característico llamado *tiempo de relajación* (ver subsección 3.3.2), el sistema entero habrá perdido toda información respecto a sus condiciones iniciales específicas.

⁶ Debido a que la fuerza gravitacional es de largo alcance, cualquier par de estrellas está constantemente interactuando mediante sus potenciales keplerianos produciendo *encuentros* entre ellas. Si la distancia de máximo acercamiento entre ambas estrellas es menor o igual que el parámetro de impacto correspondiente a una deflexión de 90° de la órbita relativa, el encuentro se denomina *cercano* o, de lo contrario, se le llama *distante*.

Podemos pensar en este proceso como una *difusión* de energía en un sistema con un gran número de partículas, tal como ocurre con los gases moleculares.

De la subsección 3.2.1.1 a la 3.2.1.3, se describen los procesos que se derivan, en esencia, del proceso de relajación de dos cuerpos.

3.2.1.1. Catástrofe gravotérmica y colapso del núcleo central

En la sección 2.2.4, se menciona que los CGs tienden a distribuirse espacialmente presentando un núcleo concentrado y un halo extendido, tal como tratan de reproducir los modelos de la sección 3.1. Un modelo termodinámico que toma en cuenta esta condición asume que existe un gradiente de temperatura entre el núcleo y el halo del CG, específicamente una diferencia de temperatura promedio entre ellos, que se desarrolla en algún punto de su evolución. Esta diferencia de temperatura, bajo ciertas otras condiciones, da lugar a un proceso que se conoce con el nombre de *catástrofe gravotérmica*.

Retomando la analogía con un gas ideal, podemos definir la temperatura de un sistema estelar autogravitante mediante la ecuación

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{3}{2}k_B T \quad (3.20)$$

donde m es la masa de las estrellas y k_B es la constante de Boltzmann. Dado que v_m^2 , en general, depende de la posición por la relación dada en la ec. 3.3, igualmente lo hace T . Tomando el promedio sobre todo el espacio y multiplicando por N , el número total de estrellas, obtenemos la energía cinética total del cúmulo como

$$K = N \left(\frac{1}{2} m \overline{v_m^2} \right) = \frac{3}{2} N k_B \bar{T}. \quad (3.21)$$

Por otro lado, el teorema del virial (ec. 3.8) nos dice que en un cúmulo en equilibrio dinámico tenemos que $E = -K$, por lo que $E = -\frac{3}{2} N k_B \bar{T}$. Entonces la *capacidad calorífica* del sistema resulta ser

$$C \equiv \frac{dE}{d\bar{T}} = -\frac{3}{2} N k_B \quad (3.22)$$

la cual es *negativa*; esto es, a medida que el sistema se calienta, éste pierde energía, haciéndose la energía potencial más negativa al volverse más ligado. Recíprocamente, a medida que el sistema pierde energía, se calienta, ganando energía cinética y perdiendo energía potencial al volverse más ligado. Lo anterior sucede si en cada paso de este proceso mantenemos el requerimiento de equilibrio cuasi-estático, dando lugar a la vigencia del teorema del virial. Imaginemos que el sistema pierde súbitamente una pequeña cantidad de calor dQ , entonces la temperatura del mismo cambia a $\bar{T} - d\bar{T} = \bar{T} - dQ/C = \bar{T} + dQ/|C|$, *aumentando* ya que la capacidad calorífica es negativa; el teorema del virial nos dice entonces que para que el sistema esté en equilibrio $W = -2K$ y entonces debe haber un cambio en la energía potencial total

del sistema de $dW = -2dK = -2dQ$, de manera que la fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo sobre las partículas volviendo al sistema más ligado por una cantidad $-2dQ$ que se manifiesta por una contracción del mismo. El saldo final de energía es $dE = dW + dK = -2dQ + dQ = -dQ$, por lo cual el sistema pierde energía. Análogamente, si inyectamos al sistema calor, éste disminuye su temperatura, gana energía y se expande.

Imaginemos ahora que este sistema está rodeado por paredes diatérmicas e inmerso en un baño térmico inicialmente a la misma temperatura que el sistema estelar. Si, por alguna momentánea inestabilidad, una pequeña cantidad de calor se transmite del sistema al baño, el primero elevará su temperatura y perderá energía al contraerse; entonces se crea un gradiente de temperatura que propicia que el flujo de calor (de caliente a frío) hacia el baño térmico continúe, lo cual intensifica dicho gradiente aún más. Esto da lugar a un proceso en cadena que hace al sistema cada vez más denso y caliente, aparentemente sin límite. Si, por el contrario, una momentánea inestabilidad transmite una pequeña cantidad de calor del baño térmico al sistema estelar, este último se expande y se enfría, generando un gradiente de temperatura que hace fluir calor nuevamente del baño al sistema, incrementando la diferencia de temperatura. En este caso el sistema se expande y enfría sin límite. A la inestabilidad que surge de un sistema compuesto estas condiciones se le conoce como *inestabilidad gravotérmica*.

Se cree que el núcleo de los cúmulos globulares es aproximadamente isotérmico, dado que en él la difusión térmica es mucho más eficiente que en el halo (ver la discusión sobre los *coeficientes de difusión* en Spitzer 1987, por ejemplo). Dado que el núcleo se mantiene unido por su gravedad propia, presenta la capacidad calorífica negativa que caracteriza a los sistemas autogravitantes; a diferencia del halo, que se mantiene unido principalmente por su atracción gravitacional hacia el núcleo, por lo cual presenta una capacidad calorífica *positiva*. Al estar estos dos subsistemas en contacto diatérmico, existen dos posibilidades, dependiendo de la magnitud de las capacidades caloríficas del núcleo C_c y del halo C_h : si el núcleo cede momentáneamente una pequeña cantidad de calor al halo, la temperatura de *ambos* se eleva y si (i) $|C_h| < |C_c|$, entonces la temperatura del halo se eleva más que la del núcleo, revirtiendo el flujo de calor y restaurando el equilibrio; (ii) $|C_h| > |C_c|$, entonces la temperatura del núcleo se eleva más que la del halo, intensificando el flujo de calor del núcleo al halo y dando lugar al proceso sin fin descrito, culminando con un núcleo “infinitamente denso y caliente”. Evidentemente, antes de que lo anterior suceda entran en juego otros factores que impiden que esto se lleve a cabo.

Al proceso en el cual el núcleo de un CG se contrae, calienta y aumenta su densidad en forma indefinida se le conoce como *colapso del núcleo central*. Cuando este proceso ha llegado a su máximo, se dice que el núcleo *ha colapsado*.

La inestabilidad gravotérmica no es el único factor que da lugar al colapso del núcleo central. Cuando las estrellas escapan completamente del sistema (hacia el in-

finito), se llevan consigo su masa⁷, incrementando la energía de ligadura por unidad de masa de las estrellas que quedan; pues, la misma energía negativa debe repartirse entre menos estrellas. El consiguiente reordenamiento hacia el equilibrio virial nuevamente contrae y calienta el sistema. A este proceso se le conoce como evaporación, y es descrito a mayor detalle en la subsección 3.2.1.3.

3.2.1.2. Equipartición de la energía y segregación de masa

Para que exista el equilibrio termodinámico, la temperatura debe tender a homogeneizarse sobre todo el cúmulo en una escala de difusión de calor cuyo análogo dinámico es conocido como el tiempo de relajación. Cuando existen grupos de distintas masas entre las estrellas o, en general, un espectro continuo de masas, la energía cinética tiende a distribuirse igualmente entre ellas. Un modelo simple para este espectro de masas, muy utilizado como primera aproximación, es el caso en que el sistema cuenta con sólo dos tipos distintos de masas que, con fines comparativos, se llaman respectivamente *ligeras* y *pesadas*. Cada grupo de masa tiene una masa m_i , en cada una de sus estrellas, su número total es N_i y su masa total es M_i , $i = 1, 2$. Por definición, $m_2 \geq m_1$. En este caso la condición de equilibrio termodinámico, $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$, se denomina *equipartición de la energía* y es $K_1 = K_2$, que se traduce en

$$\mu \equiv \frac{m_2}{m_1} = \frac{\overline{v_{m1}^2}}{\overline{v_{m2}^2}}. \quad (3.23)$$

Evidentemente $\mu \in [1, \infty)$. Cuando el cociente se acerca a la unidad recuperamos el caso en que todas las masas son iguales, al igual que en el caso en que $\mu \rightarrow \infty$, pues entonces las estrellas de masa m_1 tienden a ser «partículas prueba» de masa cero. En todo valor intermedio, el cociente de las masas determina la proporción de las velocidades cuadráticas medias (dispersión de velocidades) de ambos grupos.

Si inicialmente ambos grupos de masas se encuentran homogéneamente distribuidos en todo el cúmulo y presentan la misma distribución de velocidades, habrá una diferencia de temperatura promedio, $\bar{T}_2 > \bar{T}_1$, entre ambos grupos, producto directo de sus diferentes masas. La difusión de energía cinética (térmica) en la escala del tiempo de relajación hará fluir el calor del grupo de estrellas pesadas a las ligeras tendiendo a la equipartición de la energía. Ahora, dependiendo de las características específicas de las densidades de ambos grupos, específicamente de su contraste, alguno de los grupos puede ser (dominantemente) autogravitante, en cuyo caso cobra importancia la inestabilidad gravotérmica descrita en la subsección 3.2.1.1. En cualquier caso, en este proceso de difusión térmica, las estrellas pesadas tienden a redistribuirse hacia las regiones internas del cúmulo como consecuencia de la pérdida de energía cinética; mientras que las estrellas ligeras tienden a redistribuirse hacia las regiones externas, al ganar esta misma energía. A este fenómeno, en el cual hay un reordenamiento espacial de los distintos grupos de masa, se le conoce como

⁷ También se llevan consigo una pequeña cantidad de energía cinética.

segregación de masa. Algunas teorías respecto a las condiciones específicas para su ocurrencia se presentan en la sección 3.4.

3.2.1.3. Evaporación

La relajación de dos cuerpos hace tender siempre la distribución de velocidades hacia una del tipo Maxwell-Boltzmann, representando una configuración de equilibrio. Esto hace que (en el extremo superior de esta distribución), a todo tiempo, haya estrellas que alcanzan una velocidad suficiente como para escapar del cúmulo. Para que una estrella escape, su energía cinética (positiva) debe exceder el valor absoluto de su energía potencial (negativa). Por unidad de masa, tenemos entonces que $\frac{1}{2}v_{esc}^2 = |\Phi(r)|$. Vemos pues que la velocidad necesaria para escapar del cúmulo, v_{esc} , es simplemente $\sqrt{2|\Phi(r)|}$. Si tomamos un promedio sobre todo el cúmulo, obtenemos que

$$\overline{v_{esc}^2} = \frac{\int \rho(r) v_{esc}^2(r) d^3\mathbf{r}}{\int \rho(r) d^3\mathbf{r}} = \frac{-2 \int \rho(r) \Phi(r) d^3\mathbf{r}}{\int \rho(r) d^3\mathbf{r}} = \frac{-4W}{M}, \quad (3.24)$$

en términos de la energía potencial total y la masa total del cúmulo, W y M , respectivamente. Si ahora recordamos que, en este estado de equilibrio, $W = -2K$, según el teorema del virial; y mediante la ecuación 3.21, con $Nm = M$, obtenemos que

$$\overline{v_{esc}^2} = 4\overline{v_m^2}, \quad (3.25)$$

por lo que vemos que la velocidad de escape *promedio* del cúmulo es simplemente el doble de la velocidad media (promedio) del mismo. Tras el escape de unas cuantas estrellas, la relajación de dos cuerpos induce permanentemente a restaurar el equilibrio, redistribuyendo la energía cinética y potencial de las estrellas restantes, de manera que una fracción constante de estrellas alcanza la velocidad de escape cada tiempo de relajación, que es el tiempo aproximado que le toma al sistema el volver a reconfigurarse. A este proceso en el cual las estrellas escapan del cúmulo a una tasa aproximadamente constante, por efectos de una tendencia hacia una distribución Maxwelliana de velocidades, se le conoce como *evaporación*.

La evaporación es un proceso lento pero ineludible en el cual el cúmulo poco a poco pierde estrellas. Este proceso también provoca el colapso del núcleo, dado que cada estrella que escapa se lleva consigo una pequeña cantidad de energía cinética que, retomando la analogía con el gas ideal, puede verse como una pequeña pérdida de calor (además de masa); de ahí que se le designe por el homónimo gaseoso. De hecho, estos dos procesos son complementarios pues, dado que la energía total del cúmulo debe permanecer constante —pues es un sistema conservativo—, algunas estrellas deben moverse a energías más altas para compensar la energía cedida por el núcleo que se contrae.

3.2.2. Eyección

En un sistema estelar que presenta gran densidad numérica de estrellas en las regiones centrales, como lo es un CG, debe considerarse la posibilidad de que un encuentro cercano entre tres (o más) estrellas resulte en que una de ellas adquiera velocidad suficiente como para escapar del cúmulo. A este proceso se le conoce como *eyección*. Conceptualmente opuesto al proceso de evaporación, en el cual las estrellas lentamente alcanzan la velocidad de escape mediante el efecto acumulado de una miríada de encuentros distantes; en el proceso de eyección las estrellas escapan como resultado de un único encuentro cercano fuerte, que produce un cambio en la velocidad de una de las estrellas comparable a la velocidad relativa inicial de ambas. Si bien este proceso es perfectamente posible, para los sistemas de interés en el presente estudio, el efecto de la eyección resultará despreciable respecto al de la evaporación⁸ (ver subsección 3.3.5).

3.2.3. Efectos de la evolución estelar

Dada la gran edad de los CGs, los efectos de la evolución estelar son en la actualidad relativamente reducidos y generalmente despreciados en la mayoría de los modelos analíticos y numéricos sobre su dinámica. El efecto neto más importante que produce la evolución estelar es una pérdida de masa total en el CG, como consecuencia acumulada de numerosas pérdidas «pequeñas» en la masa de las estrellas individuales. Una estrella puede expulsar material en distintas etapas a lo largo de su vida, ya sea por la generación de vientos estelares o por explosiones; en cualquier caso, tendiendo el material a escapar completamente del cúmulo. Las estrellas que pierden más masa son también las más (inicialmente) masivas y las que evolucionan con mayor rapidez, por lo cual este proceso debe haber sido considerable durante los primeros 10^6 años de vida del cúmulo, cuando estas estrellas masivas evolucionaron de forma violenta [Elson et al. 1987, Meylan y Heggie 1997]. Al cabo de este tiempo, de haber estado presentes estas estrellas masivas, quedan sólo como remanentes estelares (agujeros negros, estrellas de neutrones y enanas blancas), que tenderán a ocupar las regiones centrales donde pueden jugar un papel relevante en la dinámica del cúmulo.

La pérdida de masa por evolución estelar, contrariamente a la pérdida de masa por otros procesos como el de evaporación y eyección (exceptuando la eyección como consecuencia de la interacción con binarias), produce una expansión del cúmulo pues, el material eyectado, no produce una pérdida en la energía cinética de las estrellas por unidad de masa, K/M , pero sí un descenso en la magnitud de la energía gravitacional de ligadura por unidad de masa, $|W|/M$. Dicho de otro modo, al perder las estrellas masa, pierde profundidad el pozo de potencial del cúmulo, ganando energía potencial al volverse menos ligado; entonces (como se discutió en la sección 3.2.1.1), al ganar

⁸ Las densidades centrales de los sistemas estudiados no son suficientemente altas.

energía, el cúmulo disminuye su temperatura promedio y se expande. Por tanto, puede verse el efecto neto de la pérdida de masa por evolución estelar como el de una fuente de calor dentro del cúmulo.

3.2.4. Procesos de evolución externos

Cuando tomamos en cuenta que un CG no se encuentra aislado en el espacio, sino que se encuentra inmerso en la Galaxia, siendo afectado constantemente por un potencial galáctico que varía a lo largo de su órbita, atravesando continuamente el halo y episódicamente el disco de la Galaxia, nos encontramos con una gama de factores externos a la dinámica interna del cúmulo que afectan dramáticamente la evolución del mismo. Dado que en el presente trabajo no se estudian estos efectos, sólo describiremos brevemente los efectos más importantes, de manera cualitativa.

Fuerza diferencial de marea El tamaño finito del CG hace que distintas partes del mismo se vean afectadas de manera distinta por el potencial galáctico. Los efectos de este potencial se dividen en dos partes esenciales: (i) la *parte estática* y (ii) la *parte dinámica*. A saber, la parte estática consta de una fuerza diferencial que comprime al cúmulo en la dirección perpendicular al radiovector de distancia galactocéntrica, r_{GC} . Se le conoce como *fuerzas de marea* pues es esta misma clase de fuerzas diferenciales, provocadas por la Luna, las que causan las mareas en la Tierra. Asimismo, el potencial galáctico impone un *radio de corte* sobre el cúmulo, que depende de su posición en la Galaxia; a partir del cual, cualquier estrella que salga de este cascarón equipotencial deja de estar ligada al mismo; a este efecto se le llama *confinamiento espacial de marea*. Por otro lado, la parte dinámica hace referencia a los efectos de la *variación de la fuerza de marea*, pues a lo largo de su órbita el cúmulo atraviesa el disco galáctico, se encuentra con el bulbo, nubes moleculares gigantes, probablemente otros cúmulos globulares, etc. Todos estos eventos actúan como una perturbación externa que afecta las órbitas de las estrellas dentro del cúmulo.

Fricción dinámica Consiste en la disipación de energía cinética que sufre el cúmulo al atravesar el halo galáctico, al interactuar con las estrellas de este último. La atracción gravitacional del cúmulo sobre las estrellas de su alrededor hace que las trayectorias de estas últimas sean desviadas en dirección al mismo, resultando en un aumento de la densidad estelar en el espacio por donde el cúmulo ha pasado a través del halo; esta mayor densidad resulta en una desaceleración del cúmulo que provoca su decaimiento espiral hacia el centro de la Galaxia. Podemos hacer una analogía con el caso de un proyectil que se mueve inmerso en un líquido; aunque los principios físicos subyacentes son obviamente distintos. La fricción dinámica es función de la densidad del entorno y de la masa del cúmulo; razón por la que este es un efecto importante para cúmulos muy masivos. También hay una dependencia inversa con la velocidad de movimiento del cúmulo, haciendo este efecto más importante para valores pequeños de dicha velocidad.

3.3. Escalas de tiempo evolutivas

Los diferentes procesos evolutivos descritos en la sección 3.2 se pueden estudiar por separado para comprender con mayor claridad el efecto aislado de cada uno de estos procesos. Sin embargo, en un cúmulo real, todos estos procesos actúan simultáneamente, no solamente funcionando como una superposición lineal de sus respectivas contribuciones, sino más comúnmente retroalimentándose uno del otro, afectándose mutuamente, en un proceso *no-lineal*. Por tanto, es importante tomar en cuenta la escala temporal en la que cada uno de los procesos actúa, para saber si podemos considerarlos actuando independientemente o conjuntamente; saber si son importantes o despreciables para el rango temporal que nos interesa; y concentrar la atención en aquellos procesos que afectan nuestros resultados.

En esta sección se describen algunas de las escalas temporales más importantes asociadas a los procesos descritos en la sección 3.2, particularmente relevantes para el presente estudio.

3.3.1. Tiempo de cruce

El *tiempo de cruce*, t_{cr} , es una escala temporal que se asocia al movimiento de las estrellas alrededor del cúmulo. Es el tiempo promedio, aproximado, que le toma a una estrella el atravesar la mitad del cúmulo. Para su cálculo necesitamos una medida del tamaño espacial del cúmulo, R , además de una velocidad característica de las estrellas, v . Dicho esto, el tiempo de cruce se define por

$$t_{cr} = \frac{R}{v}. \quad (3.26)$$

Como vimos, resulta conveniente elegir r_h como el tamaño del cúmulo, pues permanece relativamente constante en el tiempo y generalmente se adopta v_m como la velocidad característica de las estrellas.

El tiempo de cruce es aproximadamente igual al *tiempo dinámico*, t_{dyn} , que representa un cuarto del periodo, T , de una estrella en un órbita circular en un potencial gravitacional producido por una distribución de masa de densidad constante ρ ; de manera que

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} \approx t_{cr}. \quad (3.27)$$

Lo importante de esta relación es que el tiempo dinámico, t_{dyn} , sólo depende de la densidad media, $\bar{\rho}$, por lo que $t_{cr} \approx t_{dyn} \propto 1/\sqrt{\bar{\rho}}$.

3.3.2. Tiempo de relajación

El tiempo de relajación, t_r , es la escala temporal sobre la que actúa el proceso evolutivo de relajación de dos cuerpos y, dado que este proceso es considerado el

más importante para la evolución dinámica del cúmulo, se trata también de la escala temporal más importante. En este tiempo característico, una estrella sufre una deflexión de $\pi/2$ radianes en su trayectoria original, como resultado acumulado de un sinnúmero de interacciones distantes, débiles, y no como resultado de un solo encuentro cercano con otra estrella⁹. Equivalentemente, durante este tiempo la estrella sufre un cambio en la magnitud de su velocidad, Δv , comparable con la misma v .

El tiempo de relajación depende de varios factores, entre ellos la densidad local $\rho(r)$, por lo cual es función también de la posición en el cúmulo, específicamente del radio al que se encuentra. Existen varias definiciones similares para el tiempo de relajación, si bien (probablemente) la más ampliamente aceptada y utilizada es la dada por Spitzer (1987):

$$t_r = \frac{0,065 v_m^3}{G^2 \langle m \rangle \rho \ln(\gamma N)}; \quad (3.28)$$

donde γ es una constante aproximadamente igual a 0,11 y $\langle m \rangle$ es la masa estelar promedio local. Este tiempo varía grandemente dependiendo de la región del cúmulo en la cual se lo calcule, usualmente por varios órdenes de magnitud. Las regiones internas (las más densas) presentan los tiempos más cortos, mientras que la misma cantidad en las regiones del halo puede sobrepasar la edad del Universo. Resulta conveniente entonces tener una medida del tiempo de relajación que caracterice a todo el cúmulo, para lo cual se adopta el *tiempo de relajación medio de masa*; el cual resulta de evaluar el tiempo de relajación reemplazando ρ por la densidad media dentro del radio medio de masa, y obtener v_m a partir del teorema del virial. El resultado es

$$t_{rh} = \frac{0,138 M^{1/2} r_h^{3/2}}{G^{1/2} \langle m \rangle \ln(\gamma N)} = \frac{0,138 N r_h^{3/2}}{(GM)^{1/2} \ln(\gamma N)}, \quad (3.29)$$

donde M es la masa total del cúmulo, r_h es el radio medio de masa, $\langle m \rangle$ es la masa promedio de las estrellas y N es su número total. Al igual que el radio medio de masa, el tiempo de relajación medio de masa tiene la ventaja de variar muy poco a lo largo de la vida del cúmulo.

Si comparamos el tiempo de relajación dado por la ecuación 3.29 con el tiempo de cruce dado en la ecuación 3.27, obtenemos una relación de proporcionalidad muy útil al analizar la dinámica interna del CG, dada por

$$\frac{t_{rh}}{t_{cr}} \propto \frac{N}{\ln(\gamma N)}. \quad (3.30)$$

3.3.3. Tiempo de colapso del núcleo

El tiempo de colapso de núcleo es el tiempo característico en el cual el cúmulo alcanza el estado de colapso central. Evidentemente este tiempo depende de las carac-

⁹ Dependiendo del número total de estrellas en el sistema, N , el proceso de relajación estará dominado por unos pocos encuentros violentos (si N es pequeño) o por una gran cantidad de encuentros lejanos (si N es grande).

terísticas del cúmulo, particularmente de las iniciales, como lo son la densidad inicial, el grado de anisotropía en la distribución de velocidades, y la función de masa estelar inicial (ver sección 2.2.6), entre otras. Como se mencionó en la subsección 3.2.1.1, no hay un único mecanismo que provoca el colapso del núcleo central, sino que varios de ellos actuando simultáneamente provocan lentamente que el núcleo alcance este estado. Por ello, es muy difícil determinar analíticamente el tiempo preciso en el cual el cúmulo llegará a esta condición. Sin embargo, múltiples estudios numéricos empleando diferentes técnicas han encontrado que el tiempo de colapso se encuentra en el rango de 12 – 19 veces el tiempo de relajación medio de masa, t_{rh} . Un valor promedio en uso común [Khalisi 2002] es

$$t_{cc} \approx 17,5 t_{rh}, \quad (3.31)$$

aunque este valor depende críticamente de la concentración inicial del cúmulo. Debido a la gran incertidumbre estadística que existe, estos valores numéricos se obtienen sólo mediante promedios de un gran número de simulaciones, sobre todo debido al reducido número de estrellas que participan en el colapso, particularmente cuando el número total de estrellas en el modelo numérico, N , es pequeño.

Se ha encontrado que, cuando hay dos componentes de masa presentes en el sistema con un contraste de masas μ , el tiempo de colapso se ve reducido aproximadamente por este mismo factor, respecto al sistema análogo donde todas las partículas tienen la misma masa; de manera que

$$t_{cc\mu} \propto \mu^{-1} t_{cc1}, \quad (3.32)$$

donde $t_{cc\mu}$ es el tiempo de colapso para el sistema con el contraste de masas μ y t_{cc1} es el tiempo de colapso para el sistema de igual masa única [Khalisi 2002, Fregeau et al. 2002]. Existen trabajos teóricos que llegan a una conclusión similar respecto al tiempo de equipartición (ver sección 3.3.4), asociado también con la escala de tiempo de la segregación de masa [Spitzer 1940, Spitzer 1969, Fregeau et al. 2002].

3.3.4. Tiempo de equipartición

La base para la equipartición de la energía entre distintos grupos de masa reside en la relajación de dos cuerpos, pues es sólo mediante este proceso que hay una difusión de la energía cinética que tiene como efecto secundario la equipartición de la energía. Esta condición de igualdad en las temperaturas promedio de los grupos es un estado que no necesariamente alcanza todo cúmulo, sino solamente cuando no entran en juego otros factores que lo imposibilitan¹⁰ (ver sección 3.4). Dado que el proceso que lleva a esta condición es la relajación de dos cuerpos, el tiempo necesario para la

¹⁰ Lo que ocurre en la mayoría de los casos es que el proceso de relajación es *ineficente* y tarda más que la vida del sistema. Por ejemplo, este es el caso de las partes más externas de los CGs.

misma debe ser del orden del tiempo de relajación. Spitzer (1940, 1969) introdujo el concepto del *tiempo de equipartición* como

$$t_{eq} = \frac{(v_{1m}^2 + v_{2m}^2)^{3/2}}{8(6\pi)^{1/2} G^2 m_2 \rho_{01} \ln(\gamma N_1)}, \quad (3.33)$$

donde m_2 es la masa de las estrellas pesadas, ρ_{01} es la densidad central del grupo de estrellas ligeras y N_1 es su número total. Cuando el cociente de las velocidades cuadráticas medias de ambos grupos es igual a la unidad, se tiene que,

$$\frac{t_{eq}}{t_r} \approx 0,94 \frac{m_1}{m_2} \propto \mu^{-1}, \quad (3.34)$$

donde $\mu = m_2/m_1$ (ver sección 5.1).

3.3.5. Tiempo de evaporación

Recordemos que la velocidad promedio necesaria para que una estrella escape del cúmulo es simplemente $2|v_m|$; pero ¿qué fracción de las estrellas se encuentran más allá de $2|v_m|$? Un cálculo rápido, suponiendo la distribución Maxwell-Boltzmann, $f(v) = N \exp[-\frac{1}{2}v^2/\sigma^2]$, nos indica que $v_m^2 = 3\sigma^2$, por lo que aquella fracción corresponde a $\gamma = 7,38 \times 10^{-3}$. Esta misma fracción del total de las estrellas N , escapa del cúmulo cada tiempo de relajación pues, una vez que escapan, este es el tiempo que le toma al sistema recuperar la distribución Maxwelliana. Por tanto la tasa de pérdida de las estrellas es $dN/dt = -\gamma N/t_{rh} \equiv N/t_{evap}$ [Binney y Tremaine 1987], de modo que

$$t_{evap} = 136 t_{rh}. \quad (3.35)$$

3.4. Teorías sobre la equipartición de la energía y segregación de masa

La segregación de masa es un efecto secundario de la equipartición de la energía, siempre que existe un espectro de masas presente en un sistema estelar. A la vez, cuando el contraste entre las distintas masas¹¹, μ , es muy grande, la segregación de masa *inhibe* el proceso normal de equipartición de la energía; puesto que, al caer las estrellas masivas hacia las regiones internas del cúmulo y desplazar a las estrellas ligeras hacia el halo, las primeras pueden volverse fuertemente auto-gravitantes, sobreviniendo un colapso gravotérmico que incrementa el gradiente de temperaturas entre los grupos de masas y, por ende, inhibiendo la equipartición [Spitzer 1969, Binney y Tremaine 1987]. Las condiciones que entran en juego para que se de el equilibrio entre ambos procesos fueron por primera vez analizadas

¹¹ Ver sección 5.1 en la página 56.

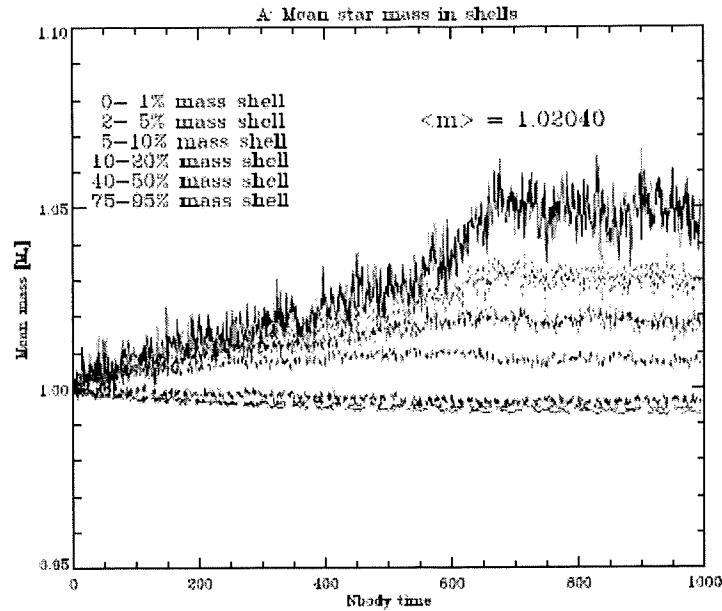


Figura 3.3. Evolución de la masa promedio de las partículas dentro de los cascarones lagrangianos para un modelo de dos componentes de masa con $\mu = 1,25$ y $q = 0,1$. Las curvas representan un modelo promedio de 20 simulaciones con $N = 2500$ masas puntuales cada una. Reproducida de la tesis doctoral de Emil Khalisi (2002).

por Spitzer (1969); posteriormente, se desarrollaron teorías alternativas acerca de la equipartición de la energía y la segregación de masa. En la figura 3.3 se muestra la evolución de la masa promedio de las estrellas dentro de los *cascarones lagrangianos*¹² para una simulación numérica realizada con el integrador de fuerza directa *NBODY6* (ver sección 4.2).

En esta figura se observa que, inicialmente, todos los cascarones tienen aproximadamente la misma masa promedio, pues se parte de una distribución homogénea; sin embargo, a medida que avanza el tiempo¹³ la masa promedio dentro de los cascarones más internos se incrementa notablemente respecto al nivel original, alcanzando un valor máximo que permanece constante después de un cierto tiempo; asimismo, la masa promedio dentro de los cascarones más externos disminuye, aunque en mucha menor magnitud [Khalisi 2002]. Esta figura es un claro ejemplo de segregación de masa, donde las estrellas pesadas se redistribuyen «hundiéndose» hacia el centro del

¹² Un cascaron lagrangiano es el volumen delimitado por dos *radios lagrangianos*. Estos últimos, representan el radio de las esferas que contienen una determinada proporción de la totalidad de la masa del cúmulo M_{tot} , e. g., el radio lagrangiano del 10 % de masa denota el radio de la esfera (centrada en el centro de masa del cúmulo) que contiene el 10 % de la masa total del cúmulo.

¹³ Por lo general, todo el sistema de unidades físicas se escala a un sistema de unidades convenientes para su utilización estandarizada en las simulaciones numéricas, conocido como *unidades de N-cuerpos* (ver sección 5.1 en la página 56).

cúmulo, mientras que las estrellas ligeras «se alzan» hacia órbitas más externas, en promedio.

Siendo la segregación de masa un efecto del proceso de equipartición, su escala de tiempo asociada debe coincidir con el tiempo de equipartición, t_{eq} , como lo confirman numéricamente Fregeau *et al.* (2002). Ellos encuentran también que este tiempo varía en función del contraste de masas μ como $\tau \propto \mu^{-1}$, donde τ es la escala de tiempo que utilizan para la segregación de masa; lo cual concuerda con las predicciones teóricas [Spitzer 1940, Spitzer 1969]. Khalisi (2002) obtiene resultados similares mediante experimentos numéricos.

3.4.1. Condiciones necesarias para la equipartición de la energía

Existen varias teorías sobre las condiciones necesarias para que se de la equipartición en la energía. La primera de ellas y, de alguna manera, base pionera para las demás, es la propuesta por Lyman Spitzer (1969). En su artículo, Spitzer considera dos casos: (a) aquél en el que las partículas pesadas no contribuyen al potencial global del cúmulo, pues su densidad es en todos lados despreciable con respecto al de las masas ligeras; y (b) aquél en el que las masas ligeras no contribuyen al potencial global del cúmulo, pues su densidad es en todos lados despreciable con respecto al de las masas pesadas. El caso (a) es el de mayor interés para el presente trabajo. En su análisis, partiendo de la anterior suposición y de la condición para la equipartición de la energía dada por la ecuación 3.23 (mediante una manipulación de estas ecuaciones, sustituyendo por la expresión de v_m^2 para cada componente de masa según el teorema del virial), llega a la condición

$$S \equiv \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} = \frac{(\rho_{h1}/\rho_{h2})^{1/2}}{(1 + \alpha \rho_{h1}/\rho_{h2})^{3/2}}, \quad (3.36)$$

donde

$$\alpha = \frac{5\rho_1(0)}{4\rho_{h1}} \left(\frac{r_{m2}}{r_{h2}} \right)^2 = 5,6, \quad (3.37)$$

asumiendo un cociente $\rho_1(0)/\rho_{h1} = 3,5$. Los valores de ρ_{hi} , representan la densidad promedio dentro de la esfera de radio r_{hi} , $i = 1, 2$, mientras que r_{m2} es el valor cuadrático medio de la magnitud del radio-vector de las estrellas pesadas; $\rho_1(0)$ es la densidad central de las estrellas ligeras. S representa la *frontera* entre las regiones del espacio de parámetros que pueden y no conducir a la condición de la equipartición de la energía (ver figura 3.4 en la página 41).

Dado que el lado derecho de la ecuación 3.36 presenta un máximo de $0,38 \alpha^{-1/2} \equiv \beta$, en $\rho_{h1}/\rho_{h2} = 1/(2\alpha)$, se concluye que la equipartición de la energía sólo es posible cuando

$$S < \beta, \quad (3.38)$$

con $\beta = 0,16$ para un valor de $\alpha = 5,6$. Spitzer sugiere que la desigualdad 3.38 permanece válida cuando el cociente m_2/m_1 se aproxima a la unidad, sólo que, en este caso, $\beta \rightarrow 1$ también.

Con fines comparativos, conviene reescribir la ecuación 3.36 en términos de los parámetros utilizados en los modelos de dos componentes de masa para cúmulos globulares, q y μ , donde $q = \frac{M_2}{M_{tot}}$ y $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ (sección 5.1 en la página 56). Sustituyendo por estos parámetros obtenemos¹⁴

$$S = \left(\frac{q}{1-q} \right) \mu^{3/2} \quad (3.39)$$

Inagaki y Wiyanto (1984) produjeron una teoría muy similar a la de Spitzer, sólo que consideraron la situación en el núcleo en vez de todo el cúmulo para el cálculo de las dispersiones de velocidades. El argumento presentado es que, en los cúmulos globulares reales, es poco probable que se alcance un estado de equipartición de la energía *global*, debido a que el tiempo de relajación en el halo puede ser, en algunos casos, inclusive mayor a la edad del universo; en cambio, se sugiere que en la mayoría de los casos puede alcanzarse un estado de equipartición en el *núcleo*, motivado por los modelos de equipartición de la energía de Merrit (1981). La condición a la que llegan es

$$\left(\frac{M_{c,2}}{M_{c,1}} \right) \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} \leq 0,4^{3/2} \approx 0,25 \quad (3.40)$$

donde $M_{c,1}$ es la masa total dentro del radio de núcleo, $r_{c,1}$, del subsistema de estrellas ligeras y $M_{c,2}$ es la masa total dentro del radio de núcleo, $r_{c,2}$, del subsistema de estrellas pesadas. Esta condición difiere de la de Spitzer sólo en el valor numérico de S ¹⁵.

3.4.2. Otras teorías

Lightman y Fall (1978) utilizan *esferas homogéneas* en vez de polítopos para representar los subsistemas de estrellas pesadas y ligeras dentro de un cúmulo globular. En su modelo, definen dos esferas homogéneas concéntricas de radios R_1 y R_2 , donde $R_1 > R_2$, que representan a los subsistemas de estrellas ligeras y pesadas, respectivamente. Asocian a cada región una densidad específica de estrellas ligeras y pesadas. Partiendo de estas condiciones y las relaciones viriales adecuadas, encuentran la condición de equipartición

$$\frac{M_2}{M_1} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{3 m_1 M_2}{2 m_2 M_1} \right) \left(1 + \frac{5 M_2}{2 M_1} \right)^{-3} \right]^{1/2} \leq \left(\frac{4}{27} \right)^{5/2}. \quad (3.41)$$

¹⁴ Sustituyendo por el valor $q = 0,1$ utilizado en el presente estudio (ver sección 5.4), la condición de Spitzer para la equipartición de la energía se traduce en $\mu \lesssim 1,275$.

¹⁵ Al menos inicialmente, la proporción $M_{c,2}/M_{c,1}$ debe ser idéntica a la proporción M_2/M_1 puesto que las distribuciones de partículas ligeras y pesadas son iguales. Con este argumento, la condición de Inagaki y Wiyanto para $q = 0,1$ se traduce en $\mu \lesssim 1,73$.

Sin embargo, más allá de la forma funcional de este criterio para la equipartición de la energía, Lighman y Fall señalan que, de acuerdo a sus resultados, existen dos configuraciones de equilibrio posibles para cada sistema, que difieren en el cociente de los radios de las esferas que contienen a los subsistemas de estrellas, R_2/R_1 . Lo anterior es posible físicamente ya que las estrellas pesadas pueden alcanzar un equilibrio hidrostático en el sistema entero, como dado por el teorema del virial; o un equilibrio térmico con las estrellas ligeras en el núcleo.

Watters *et al.* (2000) realizaron una serie de simulaciones numéricas por métodos de Monte Carlo, tratando de poner a prueba las condiciones de equipartición sugeridas por las teorías analíticas. Como resultado, produjeron una condición empírica, basada en los resultados de sus simulaciones, en función de los parámetros q y μ descritos; esto es,

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2,4} \leq 0,32. \quad (3.42)$$

Esta condición es válida para $1,75 < \mu < 7,0$ y para valores más pequeños de μ la equipartición de la energía siempre fue alcanzada en sus simulaciones¹⁶.

¹⁶ Nuevamente para $q = 0,1$ esta condición dicta que $\mu \lesssim 1,55$, lo cual es menor al rango de validez pero, dados sus resultados, podemos asumir entonces la condición como $\mu \lesssim 1,75$.

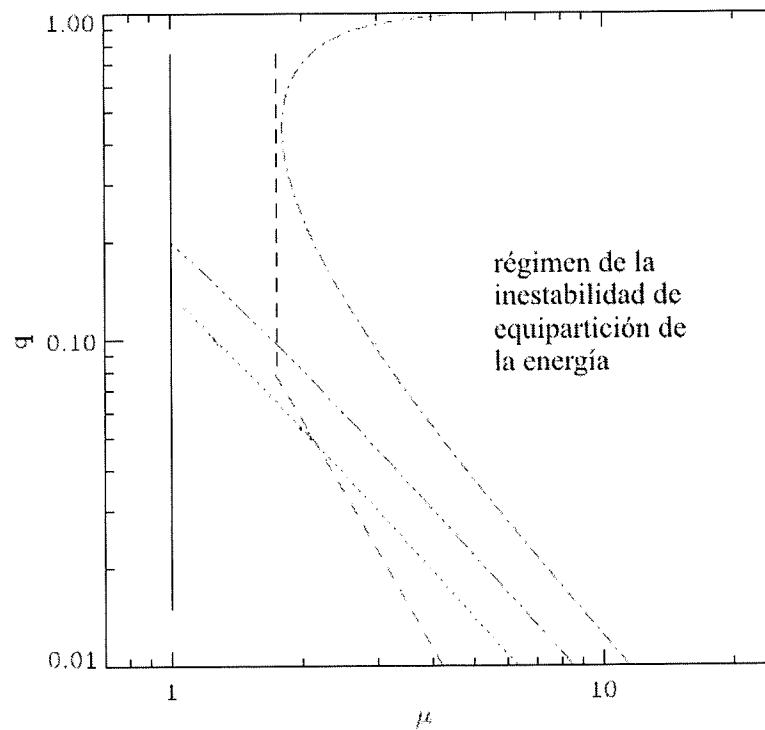


Figura 3.4. Condiciones de equipartición en el espacio de parámetros $q - \mu$. Las líneas indican el criterio de equipartición de la energía cinética de: Spitzer (punteada; ecuación 3.36); Inagaki y Wiyanto (tres puntos y raya; ecuación 3.40); Watters *et. al.* (línea cortada; ecuación 3.42); y Lightman y Fall (punto y raya; ecuación 3.41).

Capítulo 4

El integrador EuroStar

Actualmente, los altos requerimientos computacionales de la integración numérica de trayectorias de partículas en sistemas estelares (solución numérica del problema de N-cuerpos), utilizando métodos de integración *directa*¹, impiden que los experimentos de este tipo sobrepasen un número relativamente pequeño de partículas del orden de 10^5 (para simulaciones con duración de varios tiempos de relajación realizadas en las mejores computadoras modernas). Por otro lado, los métodos de *campo promedio* —que consideran una aproximación analítica (o numérica) del potencial gravitacional global para encontrar la aceleración que experimenta cada partícula— pueden manejar apropiadamente números de partículas mucho mayores —del orden de 10^9 — en las computadoras actuales; sin embargo, no toman en cuenta el proceso de relajación de dos cuerpos que ocurre en los sistemas *colisionales*, por lo que solamente son apropiados para sistemas predominantemente *no-colisionales* como las galaxias.

En esta disyuntiva, la necesidad de aumentar el número de partículas que puede integrar un código de N-cuerpos hacia cantidades consistentes con los valores de los sistemas reales, sin dejar de lado efectos importantes producidos por la relajación de dos cuerpos en sistemas como los cúmulos globulares, ha motivado la creación de códigos «híbridos» que combinen y aprovechen ambas ventajas de los tipos de códigos ya existentes.

Para el presente estudio se utilizó el código híbrido «EuroStar» [Hemsendorf 1999] con la finalidad de aplicarlo al estudio de la dinámica de cúmulos globulares y maximizar así el alcance de los muy limitados recursos computacionales. EuroStar es la herramienta más importante utilizada en la realización de este estudio; es un complejo código realizado por Marc Hemsendorf en el lenguaje de programación FORTRAN77 y que se basa en dos programas anteriores, ampliamente difundidos, realizados por distintos autores. La idea detrás de EuroStar es hacer más eficiente la integración de las trayectorias de las partículas para un sistema estelar *aproximadamente esférico*, sin perder la precisión en los resultados.

Si bien las características de EuroStar lo hacen atractivo por sí mismo para realizar estudios de la dinámica de cúmulos globulares, una motivación adicional,

¹ Los métodos de integración *directa* calculan «directamente» la fuerza entre los pares de partículas.

importante para su utilización en este trabajo, fue que su aplicación al área del presente estudio no ha sido realizada con anterioridad; por tanto, los resultados aquí obtenidos representan un precedente para futuras aplicaciones del mismo en ésta y otras áreas relacionadas; particularmente, entre los dinamicistas del Instituto de Astronomía de la UNAM, para quienes el análisis del alcance de esta importante herramienta puede resultar de considerable interés.

4.1. Un integrador híbrido NBODY6-SCF

EuroStar se divide para su funcionamiento en dos partes básicas: «NBODY6» y «SCF». Ambos métodos son códigos independientes totalmente funcionales que fueron «fusionados» para funcionar juntos en EuroStar. La razón de esto es que el primero es un código directo, mientras que el segundo es un código de campo promedio; de manera que el método directo funciona preferentemente en la parte colisional del cúmulo —el «núcleo»—, y el método de aproximación de campo funciona en la parte no-colisional —el «halo»—. Un mecanismo de selección adecuado (ver sección 4.4) separa las partículas que serán asignadas a cada uno de los integradores, mediante un criterio que trata de efectivamente tomar en cuenta la estructura de núcleo-halo del cúmulo.

4.2. El integrador de fuerza directa NBODY6

NBODY6 es el último de una serie de programas para resolver el problema de N-cuerpos desarrollados por Sverre J. Aarseth, quien fue pionero en el área. Al cabo de los años, los códigos de Aarseth han probado ser muy precisos y eficientes, con constantes mejoras por parte del autor y sus colaboradores², por lo cual han llegado a ser ampliamente difundidos entre la comunidad científica del área³. NBODY6 es un método de «fuerza directa» (o simplemente «directo») que calcula la fuerza entre todos los pares de partículas a partir de la ley de Newton (sin suavizamiento de los potenciales) y se le considera como el mejor —o al menos uno de los mejores— métodos en cuanto a su precisión y fiabilidad de los resultados; pues se basa en (relativamente) pocas aproximaciones.

En esta sección se describen brevemente las principales características del integrador NBODY6. En la subsección 4.2.1 se describe la manera en como se agrupan los pasos de tiempos individuales de las partículas en «bloques», para una mayor eficiencia en los cálculos que, además, posibilita su paralelización; la manera como

² Hasta recientemente, Aarseth ha seguido publicando mejoras al código NBODY6 en su sitio de internet; de donde pueden ser obtenidas de manera gratuita por cualquier visitante.

³ Aunado a su promoción y libre distribución por parte del autor; actividad en la que también fue pionero en el área.

NBODY6 integra las trayectorias de las partículas mediante un esquema de interpolación con polinomios de Taylor se detalla en la subsección 4.2.2; el esquema de «vecinos», que simplifica el cálculo de la fuerza, se detalla en la subsección 4.2.3; y, por último, en la subsección 4.2.4 se describe brevemente el mecanismo de «regularización KS» que calcula las órbitas de las partículas durante encuentros cercanos y cuando forman sistemas ligados, eliminando la carga del integrador principal.

4.2.1. Pasos de tiempo individuales y por bloques

En el integrador NBODY6, cada partícula es individualmente asignada un paso de tiempo discretizado que es revaluado cada vez que se realiza el cálculo de la fuerza para esa partícula. El propósito de este método de *pasos de tiempo individuales* es que las partículas que presentan aceleraciones mayores usen pasos de tiempo menores, minimizando así el error numérico. Para medir tales variaciones efectivamente, Aarseth (1985) definió heurísticamente una fórmula (implementada en NBODY6) para determinar la magnitud del paso de tiempo a partir de la magnitud de la aceleración de la partícula y sus derivadas hasta tercer orden, dada por

$$\Delta t = \sqrt{\eta \frac{a a^{(2)} + \dot{a}^2}{\dot{a} a^{(3)} + (a^{(2)})^2}}, \quad (4.1)$$

donde η es una constante adimensional de precisión que controla el error; generalmente se lo toma entre $\eta \approx 0,02$ y $0,04$. La notación $a^{(i)}$, $i = 2, 3$, representa la i -ésima derivada temporal de la magnitud de la aceleración, a . Esta expresión toma en cuenta todas las derivadas de la aceleración calculadas en el código para cada partícula y está bien definida para casos especiales (e.g. partiendo del reposo, $a = 0$, etc.).

Sin embargo, para facilitar los cálculos, los pasos de tiempo individuales, Δt , se redondean a ciertos valores fijos, Δt_i , llamados *pasos de tiempo por bloques* dados por

$$\Delta t_i = \frac{1}{2^n} \quad (4.2)$$

donde $n \in \mathbb{N}$. De esta manera los pasos de tiempo de todas las partículas son conmensurables y se garantiza que podemos agruparlas en «bloques» para el cálculo de la fuerza en un mismo tiempo común.

En la figura 4.1 podemos observar un ejemplo de los pasos de tiempo por bloques para cuatro partículas. Inicialmente la partícula i es la que tiene el paso de tiempo más pequeño; la partícula k tiene un paso de tiempo el doble de largo; la partícula l cuatro veces más largo; y la partícula m ocho veces más largo. En cada paso de tiempo individual la aceleración de la partícula es recalculada y por ende el paso de tiempo revaluado también. De acuerdo al cambio de la aceleración, la longitud del paso de tiempo puede variar o no de uno al siguiente. En esta figura, después del octavo paso de tiempo de la partícula i , la partícula k dobla la longitud de su paso de

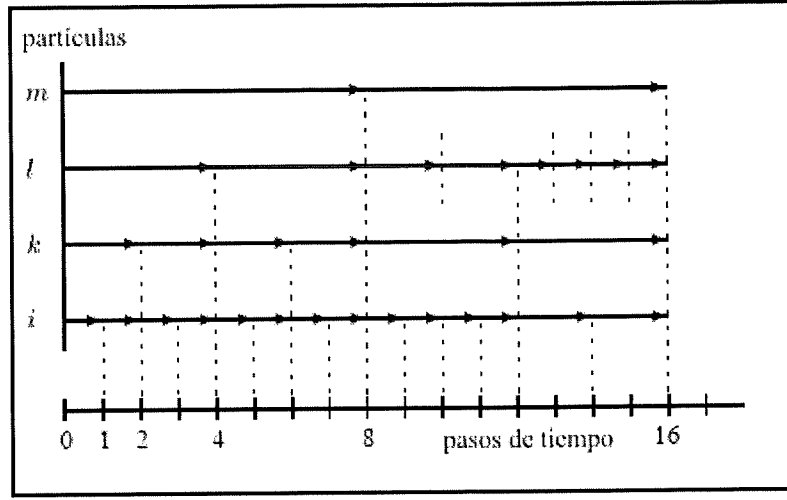


Figura 4.1. Pasos de tiempo individuales y por bloques. Basado en la figura 7.2 de Khalisi (2002).

tiempo; la partícula l lo reduce a la mitad; y la partícula m lo mantiene igual. Dado que todos los pasos de tiempo son conmensurables, en cada uno hay un conjunto de partículas para las que se realiza el cálculo de la aceleración. Por ejemplo, en la figura 4.1, en el segundo paso de tiempo se calcula la aceleración de las partículas i y k ; en el cuarto paso de tiempo se calcula la aceleración de las partículas i , k y l ; y en el octavo paso de tiempo se calcula la de las cuatro partículas mostradas.

4.2.2. El esquema de Hermite

En cada paso de tiempo, tanto la aceleración como su primera derivada para cada partícula están enteramente determinadas por la distribución espacial del sistema y la ley de la gravitación universal; de manera que en todo tiempo se tiene que

$$\mathbf{a}_i = - \sum_{i \neq j} G m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{R^3}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_i = - \sum_{i \neq j} G m_j \left[\frac{\mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{3\mathbf{r}_{ij} (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right], \quad (4.4)$$

donde G es la constante gravitacional; $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, la posición relativa de la i -ésima partícula respecto de la j -ésima; $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$, la distancia entre las partículas; y $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, la velocidad relativa entre la i -ésima y la j -ésima partícula. Entonces, a un tiempo inicial t_0 podemos conocer las cantidades $\mathbf{a}_i(t_0)$ y $\dot{\mathbf{a}}_i(t_0)$ mediante las ecuaciones 4.3 y 4.4. El paso de tiempo, Δt , se asume conocido, puesto que se calcula en el paso de tiempo anterior o se da inicialmente, como se detalla en la subsección 4.2.1. Por tanto, podemos *predecir* la posición y velocidad de las partículas

al tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ aproximándolas mediante un polinomio de Taylor de tercer y segundo grado respectivamente. Entonces,

$$\tilde{\mathbf{r}}_i(t_1) = \mathbf{r}_i(t_0) + \mathbf{v}_i(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dot{\mathbf{a}}_i(t_0)\Delta t^3, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_i(t_1) = \mathbf{v}_i(t_0) + \mathbf{a}_i(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}_i(t_0)\Delta t^2. \quad (4.6)$$

Una vez predichas las nuevas posiciones de las partículas se puede realizar en base a ellas un cálculo de las aceleraciones de las partículas al tiempo t_1 mediante las ecuaciones 4.3 y 4.4 evaluadas en estas nuevas coordenadas. Además, podemos aproximar estas mismas cantidades mediante polinomios de Taylor centrados en t_0 como

$$\mathbf{a}_i(t_1) \approx \mathbf{a}_i(t_0) + \dot{\mathbf{a}}_i(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i^{(2)}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0)\Delta t^3, \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_i(t_1) \approx \dot{\mathbf{a}}_i(t_0) + \mathbf{a}_i^{(2)}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0)\Delta t^2. \quad (4.8)$$

Esta doble información respecto de la aceleración y su primera derivada al tiempo t_1 convierte a las ecuaciones 4.7 y 4.8 en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\mathbf{a}_i^{(2)}(t_0)$ y $\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0)$. Resolviendo el sistema se obtiene

$$\mathbf{a}_i^{(2)}(t_0) = 2 \left(-3 \frac{\mathbf{a}_i(t_0) - \mathbf{a}_i(t_1)}{\Delta t^2} - \frac{2\dot{\mathbf{a}}_i(t_0) + \dot{\mathbf{a}}_i(t_1)}{\Delta t} \right), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0) = 6 \left(2 \frac{\mathbf{a}_i(t_0) - \mathbf{a}_i(t_1)}{\Delta t^3} - \frac{\dot{\mathbf{a}}_i(t_0) + \dot{\mathbf{a}}_i(t_1)}{\Delta t^2} \right); \quad (4.10)$$

donde las cantidades en t_1 son evaluadas en las coordenadas predichas por las ecuaciones 4.5 y 4.6. Con las derivadas de la aceleración de orden superior al tiempo t_0 podemos *corregir* las posiciones y velocidades al tiempo t_1 (ecuaciones 4.5 y 4.6) incrementando el orden del polinomio de Taylor centrado en t_0 a quinto y cuarto orden, respectivamente. De modo que las nuevas posiciones corregidas están dadas por

$$\mathbf{r}_i(t_1) = \tilde{\mathbf{r}}_i(t_1) + \frac{1}{24}\mathbf{a}_i^{(2)}(t_0)\Delta t^4 + \frac{1}{120}\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0)\Delta t^5, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}_i(t_1) = \tilde{\mathbf{v}}_i(t_1) + \frac{1}{6}\mathbf{a}_i^{(2)}(t_0)\Delta t^3 + \frac{1}{24}\mathbf{a}_i^{(3)}(t_0)\Delta t^4. \quad (4.12)$$

Una vez hecho esto, se puede comenzar un nuevo ciclo de integración al correspondiente paso de tiempo siguiente, prediciendo nuevamente las posiciones y velocidades de las partículas.

4.2.3. El esquema de Ahmad-Cohen

El esquema de Ahmad-Cohen mejora la eficiencia del cálculo de la fuerza para cada partícula, eliminando cálculos «innecesarios»⁴. La idea general es que cada partícula, a cada tiempo, tiene un cierto número de partículas cercanas o «vecinos» que influyen en el potencial local de manera «granular»; mientras que el resto de las partículas representan una contribución relativamente más constante o «suave». En este esquema, implementado en NBODY6, se define una esfera de radio, R_s , alrededor de cada partícula, conteniendo un cierto número de partículas que se denominan *vecinos* de la partícula en cuestión (ver figura 4.2). Este radio se recalcula en cada paso de tiempo de acuerdo a condiciones determinadas (que dependen del número total de partículas, N ; el radio medio de masa del sistema, r_h ; el número de vecinos inmediato anterior, n_{nb} ; etc.). Aunado a lo anterior, las partículas, j , que se aproximan rápidamente a cada partícula, i , son consideradas también como vecinos de esta última; i.e. $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} < 0$. De este modo, la aceleración que siente cada partícula debida a sus vecinos se denomina «irregular», $\mathbf{a}_{irr}$, y la debida al resto de las partículas lejanas se denomina «regular», $\mathbf{a}_{reg}$. Ambas partes de la fuerza, irregular y regular, se recalculan sobre diferentes escalas de tiempo, con pasos de tiempo independientes (aunque conmensurables), Δt_{irr} y Δt_{reg} , respectivamente; siendo la fuerza irregular la que se calcula con mayor frecuencia, precisamente debido a su mayor fluctuación en escalas de tiempo relativamente pequeñas. La parte regular de la fuerza se extrapola para los pasos de tiempo *irregulares* de acuerdo al *predictor* del esquema de Hermite (en estos casos no hay *corrector* puesto que no se realiza un nuevo cálculo de la fuerza⁵), descrito en la subsección 4.2.2. Al mismo tiempo se calcula también la primera derivada temporal de la aceleración de acuerdo a la ecuación 4.4.

Este esquema conduce a una significativa ganancia en eficiencia, siempre y cuando se cumplan dos condiciones: (i) que $n_{nb} \ll N$, lo cual se controla mediante el tamaño de la esfera de vecinos, R_s , que, como se mencionó, se recalcula en cada paso de tiempo *regular*; y (ii) que la escala de tiempo en que se realizan los cálculos de fuerza irregular, Δt_{irr} , sea suficientemente menor que la de la regular, Δt_{reg} . Este último aspecto se controla mediante *parámetros de precisión* distintos, $\eta_{irr} \approx 0,02$ y $\eta_{reg} \approx 0,04$ (ver subsección 4.2.1). Las dos condiciones mencionadas tienen como finalidad reducir el número de cálculos de la fuerza *irregular*, pues éstos son mucho más demandantes en tiempo de cómputo que los cálculos de la fuerza regular.

⁴ Que aportan relativamente poco a la fuerza neta resultante en un lapso de tiempo determinado.

⁵ Precisamente en este aspecto radica el ahorro de cálculos y ganancia en la eficiencia de este esquema.

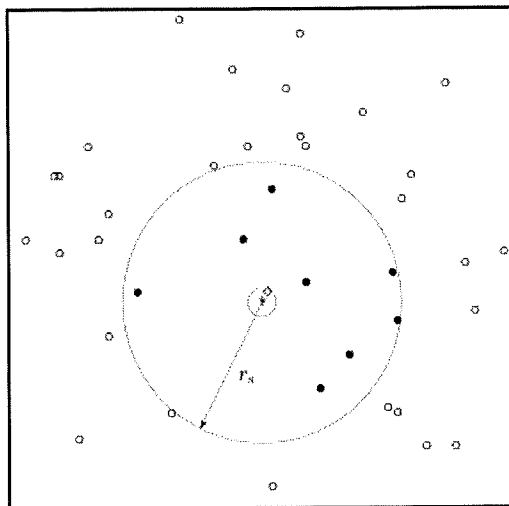


Figura 4.2. Representación del esquema de vecinos para una partícula. Los puntos negros dentro de la esfera de radio r_s pertenecen a la *lista de vecinos* de la partícula marcada con un asterisco. Tomado de Khalisi (2002), figura 7.2.

4.2.4. Regularización KS

En los encuentros cercanos de dos partículas, los esquemas tradicionales de integración directa consumen gran parte de sus recursos para llevar a cabo los cálculos correspondientes —puesto que en tales casos hay grandes variaciones temporales de la aceleración y sus derivadas y, como se describe en la subsección 4.2.1, el paso de tiempo de cada partícula, Δt , depende de estos valores—. Esto condujo a la necesidad de hacer el tratamiento de estos casos especiales de una manera diferente que aprovechara las características de los mismos. Kustaanheimo y Stiefel (1965) desarrollaron un método matemático para este propósito, implementado en NBODY6, en el cual se reemplaza a ambas partículas por una partícula «compuesta» con localización en su centro de masa y la masa total de ambas partículas, e integrada como una partícula más del sistema en relación con las demás partículas. La órbita del par de partículas se determina mediante un cambio de variables. La transformación involucra cuatro coordenadas espaciales y un tiempo «ficticio». Una matriz de 4×4 transforma el espacio y el tiempo a una forma que se asemeja a la de un oscilador armónico. El paso de tiempo del par «KS-regularizado» es independiente de la excentricidad de la órbita y se controla mediante el parámetro de precisión η_u . El criterio para que este mecanismo comience a funcionar es que ambas partículas se encuentren a una cierta distancia mínima, R_{min} (ver círculo interno en la figura 4.2), y que su paso de tiempo sea menor que un cierto valor, Δt_{min} .

El proceso de regularización KS fue ampliado para incluir el caso del encuentro cercano de 3, 4 ó más cuerpos, en un mecanismo que se denominó *regularización en cadena*. El método matemático para estos casos fue desarrollado por Aarseth

(1993) y Mikkola (1997). La regularización en cadena también está implementada en NBODY6.

4.3. El integrador de campo auto-consistente (SCF)

Una manera no directa de calcular la aceleración de cada partícula en un sistema de muchos cuerpos es aproximar el potencial gravitacional global del sistema por medio de un conjunto de funciones base armónicas y analíticas, cuyos primeros términos se adapten lo mejor posible a la forma inicial de la distribución del sistema. De esta manera podemos calcular la aceleración de una partícula (y su primera derivada temporal) evaluando el gradiente negativo del potencial gravitacional en la posición de la misma.

Con la idea anterior, Hernquist y Ostriker (1992) desarrollaron el *método de campo auto-consistente* (SCF⁶). Este método está diseñado para la simulación de sistemas no colisionales y cuasi-estacionarios, tales como galaxias elípticas o galaxias de disco. No obstante, SCF también ha podido aplicarse exitosamente en el estudio de procesos de colapso central [Hozumi y Hernquist 1998].

Dado que el método básicamente es similar a resolver N problemas de *un cuerpo*⁷, el costo computacional se escala linealmente con el número total de partículas como $O(N)$, con un coeficiente relativamente pequeño [Hernquist y Ostriker 1992]. En contraste, los métodos de fuerza directa escalan sus cálculos como $O(N^2)$. Este hecho hace a SCF significativamente más eficiente que NBODY6 —en cuanto al tiempo de cómputo necesario para integrar las órbitas de las partículas—, lo cual motiva su utilización en un código híbrido que aproveche las características del sistema bajo estudio.

Si bien los cúmulos globulares son distribuciones aproximadamente esféricas de estrellas que evolucionan «colisionalmente» mediante interacciones de *dos cuerpos* —particularmente en sus núcleos—, el halo de tales sistemas estelares es apropiado para la aplicación de este método, debido a que es un subsistema aproximadamente *no colisional*. Como se ha mencionado anteriormente, el código híbrido *EuroStar* integra una parte colisional con una no colisional; de tal modo que el método SCF funciona (preferentemente) en la región no colisional del cúmulo, orientado a tratar a las partículas del halo del sistema. El criterio mediante el cual son seleccionadas estas últimas es descrito en la sección 4.4.

4.3.1. Descripción del modelo

La ecuación de Poisson relaciona el potencial global del sistema con la distribución de masa del mismo a un tiempo dado; por lo que, para conocer el potencial

⁶ Por sus siglas en inglés (*Self Consistent Field*).

⁷ Calcular la órbita de cada una de las N partículas del sistema que se mueven en un potencial gravitacional dado.

gravitacional a un tiempo dado, basta con resolver la ecuación de Poisson y generar el par potencial-densidad a partir de la distribución de las partículas. El método SCF se basa precisamente en la expansión del par potencial-densidad sobre un conjunto de funciones base biortogonales (predeterminadas) que resuelven la ecuación de Poisson (armónicas); de manera que

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm} \rho_{nlm}(\mathbf{r}), \quad (4.13)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{nlm} A_{nlm} \Phi_{nlm}(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

$$\nabla^2 \Phi_{nlm} = 4\pi \rho_{nlm}; \quad (4.15)$$

donde las funciones base ρ_{nlm} y Φ_{nlm} son biortogonales⁸ y los coeficientes A_{nlm} son idénticos en ambas las expansiones para $\rho(\mathbf{r})$ y $\Phi(\mathbf{r})$; n , l y m son enteros.

La elección de las funciones base para la expansión —particularmente las de orden cero— restringen el tamaño y forma del sistema⁹, por lo cual deben ser seleccionadas de acuerdo con la distribución inicial de las partículas. Las funciones base de Zhao (1996) asumen un sistema esférico con una parámetro de longitud igual a la unidad (e.g. correspondiente al parámetro R en un modelo de Plummer o a r_h en un modelo de King), por lo que resultan adecuadas para sistemas como los cúmulos globulares. Las funciones de Zhao de orden cero son

$$\rho_{000} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{4(\alpha + \frac{1}{2})^2 - 1}{\alpha^2 r^{(2-\frac{1}{\alpha})} (1 + r^{\frac{1}{\alpha}})^{(2+\alpha)}}, \quad (4.16)$$

$$\Phi_{000} = - \frac{1}{(1 + r^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}; \quad (4.17)$$

donde α es un parámetro adimensional. En su expresión general, las funciones base en coordenadas esféricas están dadas por

$$\rho_{nlm}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{4\pi} K_{nl} r^l C_n^{(\omega)}(\xi)}{r^{(2-\frac{1}{\alpha})} (1 + r^{\frac{1}{\alpha}})^{2+\alpha(2l+1)}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (4.18)$$

$$\Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{4\pi} r^l C_n^{(\omega)}(\xi)}{(1 + r^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha(2l+1)}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad (4.19)$$

⁸ Existe un producto interno definido entre ellas de manera que $\langle \rho_{nlm} | \Phi_{ijk} \rangle = I_{nl} \delta_{ni} \delta_{lj} \delta_{mk}$; donde I_{nl} es una constante y δ_{ij} es la delta de Kronecker [Hernquist y Ostriker 1992].

⁹ En principio, cualquier conjunto completo de funciones base armónicas puede reproducir cualquier par potencial-densidad mediante una expansión analítica infinita. Sin embargo, para la aplicación computacional actual, la expansión debe ser truncada a unos pocos términos; por lo cual se requiere que los primeros de éstos aproximen en gran medida la forma y tamaño del sistema en cuestión, a fin de minimizar el error.

donde

$$\xi = \frac{r^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{r^{\frac{1}{\alpha}} + 1}, \quad (4.20)$$

$$\omega = (2l + 1)\alpha + \frac{1}{2}, \quad (4.21)$$

$$K_{nl} = \frac{4(n + \omega)^2 - 1}{16\pi\alpha^2}. \quad (4.22)$$

$C_n^{(\omega)}$ son los polinomios de Gegenbauer o ultrasféricos, equivalentes a polinomios de Jacobi del tipo $P_n^{(\beta, \beta)}$ [Abramowitz y Stegun 1972] y Y_{lm} son armónicos esféricos. Una vez que se conocen los coeficientes A_{nlm} para una cierta distribución de partículas, se puede encontrar una expresión analítica para el par potencial-densidad¹⁰. Dado el necesario truncamiento de la expansión sobre las funciones base hasta un cierto orden, las expresiones calculadas en el código representan el campo gravitacional y densidad *promedio*.

Una vez calculado el par potencial gravitacional global, la aceleración de cada partícula i , localizada en la posición $\mathbf{r}_i$, se calcula como

$$\mathbf{a}_i = - \sum_{nlm} A_{nlm} \nabla \Phi_{nlm}(\mathbf{r}_i). \quad (4.23)$$

4.4. Descomposición de la estructura de núcleo-halo

Más allá de las definiciones basadas en las cualidades observables de los cúmulos globulares reales, es difícil hacer una definición formal de «qué es el núcleo» y «qué es el halo» de un cúmulo globular, desde un punto de vista dinámico. La «frontera» —si es que tiene algún sentido hablar de tal cosa espacialmente— entre ambas partes del sistema es un tanto ambigua y la descripción de las mismas en la literatura [Ashman y Zepf 1998, Binney y Tremaine 1987, Spitzer 1987, Lightman y Shapiro 1978, por ejemplo] generalmente se reduce a descripciones cualitativas respecto de ambos (e.g. «la casi uniforme densidad y cercana isoterminia del núcleo» o «la baja densidad del halo y su mucha mayor extensión espacial»). Más complejo aún resulta establecer con objetividad si una estrella en particular, en un momento dado, pertenece al núcleo o al halo. Esta distinción es, pues, un tanto artificial.

Sin embargo, este problema parece ser resuelto con cercana satisfacción mediante el criterio de momento angular utilizado por EuroStar. En el código se implementan dos posibles formas de hacer la separación de las partículas en base a dos parámetros

¹⁰ Los coeficientes A_{nlm} son calculados mediante el producto interno de la función de densidad $\rho(\mathbf{r})$, dada por la distribución de las partículas a un tiempo dado, con las funciones base dadas por la ec. 4.18.

intrínsecos de las mismas: su energía y su momento angular. Dado que las características del código, en cuanto a la comunicación de sus partes (ver subsección 4.5.2), exigen que el subconjunto que pasa a cada integrador sea lo más «estable» posible en el tiempo —en el sentido de que sus miembros cambien muy lentamente, y esto último sólo dado que es imposible que no cambien dada la evolución dinámica del cúmulo—, Hemsendorf (1999) reporta que el criterio de momento angular es óptimo para generar los subconjuntos (disjuntos) deseados.

El criterio de momento angular simplemente selecciona todas las partículas cuyo momento angular es más bajo que un cierto valor crítico, L_{crit} , para que pasen a formar parte del subsistema de NBODY6; mientras que el resto, aquellas con un momento angular mayor a L_{crit} , pasan a ser parte del subsistema SCF. El criterio de energía igualmente se basa en un valor crítico, E_{crit} , por debajo del cual las partículas son capturadas por NBODY6. Todo subconjunto seleccionado por un criterio de energía crítica tiene un superconjunto seleccionado por el criterio de momento angular que lo contiene [Hemsendorf 1999].

4.5. Integración e interacción de SCF con NBODY6

Como se ha venido mencionando, EuroStar, como código híbrido, incluye ambos métodos SCF y NBODY6 trabajando juntos. Por tanto, no pueden funcionar independientemente sino que existe una integración e interacción entre ambos. La *integración* es necesaria para que ambos sean compatibles en cuanto a las variables que manejan, los tiempos en que realizan los cálculos, su sincronización, etc. y la *interacción* existente se realiza por medio del intercambio de partículas entre ambos integradores.

4.5.1. Integración

Normalmente, SCF utiliza un esquema de integración de las ecuaciones de movimiento de tipo «leap frog», el cual es muy eficiente en el uso de la memoria y ayuda a realizar simulaciones con un gran número de partículas. Sin embargo, al combinar este método con NBODY6 (dentro del integrador EuroStar), el cálculo de la fuerza en SCF debe ser extendido para calcular también la primera derivada temporal de la aceleración, $\dot{\mathbf{a}}_i$, además de la aceleración de cada partícula, $\mathbf{a}_i$, en cada paso de tiempo; de manera que el esquema de integración de SCF se pueda adaptar al esquema de Hermite, utilizado por NBODY6. Los detalles de las modificaciones hechas a SCF para integrar los cálculos de las aceleraciones y sus derivadas temporales con NBODY6 pueden ser encontrados en Hemsendorf (1999).

4.5.2. Interacción

Cada cierto número de pasos de tiempo (ver sección 4.7), el mecanismo descrito en la sección 4.4 —empleado para distinguir y separar a los grupos de partículas que se designarán para su integración de trayectorias a SCF o NBODY— es puesto nuevamente en marcha para detectar cualquier cambio en las características de los grupos así formados inicialmente. Es decir, cada partícula es revaluada periódicamente según el criterio de momento angular (o de energía, según dispuesto) y se vuelve a asignar según corresponda al resultado del criterio a NBODY6 o SCF. Cada cambio en la conformación de los grupos de partículas, de SCF y NBODY6, introduce errores sistemáticos; debido a que al ser comunicada una partícula de, por ejemplo, SCF a NBODY6, su contribución al potencial del núcleo cambia; pues antes presentaba solamente una contribución al potencial global y después representa un potencial puntual capaz de interactuar individualmente con otras partículas. En el caso inverso ocurre algo similar produciendo igualmente errores sistemáticos. Este aspecto, como se mencionó en la sección 4.4, conduce a la necesidad de que el criterio de selección de las partículas determine grupos de partículas cuyas características, según el criterio dado, cambien lentamente a través del tiempo, a fin de minimizar la transferencia de partículas entre ambos grupos de integrador.

Otro aspecto de la interacción entre ambos integradores se da en el proceso de integración de las órbitas de las partículas, mediante la estrategia utilizada por EuroStar para el intercambio de las fuerzas entre ambos subsistemas. Esta estrategia se detalla en la siguiente sección.

4.6. Estrategia de integración de órbitas en EuroStar

La estrategia de integración de órbitas en EuroStar debe armonizar la acción de ambos integradores, NBODY6 y SCF, en un mismo ciclo de integración. En la figura 4.3 se muestra de manera esquemática el proceso que se sigue en la integración de las órbitas para un ciclo dado. En la figura, el conjunto A representa el conjunto de todas las partículas del sistema a un tiempo dado, t_0 ; el subconjunto B (de A) está definido por el criterio de momento angular (o de energía) según descrito en la sección 4.4. La posición de las mismas partículas después del ciclo de integración, al tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t_{SCF}$, definen los conjuntos A* y B*. Para llegar a estos últimos subconjuntos se siguen los siguientes pasos:

1. La rutina «SCF completo» calcula el potencial analítico promedio de todo el sistema (todas las partículas) y calcula las nuevas posiciones de acuerdo al mo-

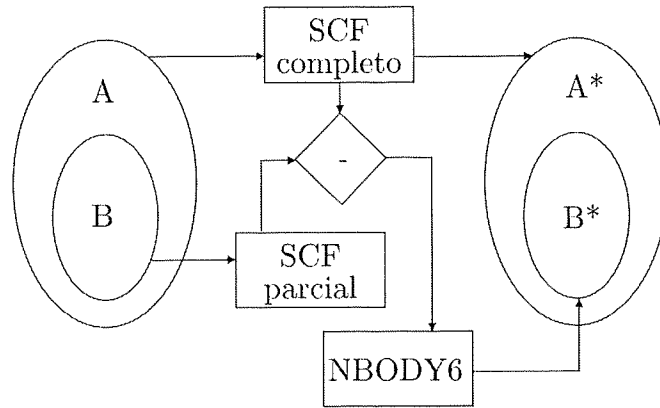


Figura 4.3. Representación esquemática de la estrategia de integración de órbitas de EuroStar.

- delo descrito en la sección 4.3.1¹¹. Con estas nuevas posiciones y velocidades se conforma el conjunto A^* .
2. La rutina «SCF parcial» realiza el mismo trabajo que en el paso anterior pero *solamente* sobre el subconjunto B, de tal modo que calcula la contribución al potencial total proveniente del «núcleo» o, específicamente, del subconjunto de partículas de NBODY6. Se aplica el mismo paso de tiempo que en el cálculo completo.
 3. La diferencia entre los potenciales analíticos encontrados por el cálculo de SCF completo y parcial sirve para calcular el potencial del «halo» o, específicamente, del subconjunto de partículas de SCF. NBODY6 calcula las nuevas posiciones de las partículas del subconjunto B, i.e. B^* , tomando en cuenta el potencial de «halo» como un potencial externo.
 4. El subconjunto B^* producido por NBODY6 en el paso anterior es nuevamente suministrado a SCF, junto con las demás partículas de A^* , para comenzar un nuevo ciclo de integración.

Con estos pasos se asegura el intercambio de fuerzas entre ambos integradores, i.e. la interacción de todas las partículas. El subsistema de SCF recibe la información del cambio del potencial en el núcleo mediante las nuevas posiciones suministradas por NBODY6; y este último recibe las fuerzas del halo como un potencial externo generado por la subrutina «SCF parcial».

¹¹ En SCF no existen pasos de tiempo individuales. En su lugar, se toma el paso de tiempo más pequeño del de todas las partículas según el determinado por el criterio aplicado en el esquema de Hermite descrito en la sección 4.2.1, y se lo aplica a todas las partículas por igual.

4.7. Algunos parámetros fundamentales del integrador EuroStar

Sverre Aarseth provee un manual detallado muy completo para quien quiera utilizar el código NBODY6, el cual puede ser libremente obtenido desde su página de internet¹². Sin embargo, la documentación exhaustiva de los códigos de N-cuerpos no es práctica común, sino más comúnmente es dada por medio de comentarios dentro del código mismo. Por este motivo, esta sección está dedicada a describir brevemente algunos de los parámetros fundamentales utilizados por el integrador EuroStar que no son parte de NBODY6 y cuya función no está clara en la documentación existente a la fecha. Los parámetros que se describen son parte del archivo de entrada `scfpar` necesario para correr EuroStar.

- noutbod** Número de pasos de tiempo de SCF, Δt_{SCF} , tras los cuales se escribe a disco la información actual del estado del sistema (i.e. posiciones, velocidades, energía cinética, potencial, etc.). El resultado de esta operación es un archivo binario `snapXXX`; donde XXX es un número consecutivo.
- noutlog** Número de pasos de tiempo de SCF, Δt_{SCF} , tras los cuales se escribe a disco un registro con la información más básica del sistema; tal como el tiempo, la energía total, etc. Esta información se va escribiendo en el archivo con formato `scflog`.
- dtime** Valor numérico del paso de tiempo inicial para SCF, Δt_{SCF} .
- fixacc** Opción (valor lógico) para forzar la conservación del momento lineal restando a las partículas la aceleración del centro de masa del sistema.
- uselcrit** Opción (valor lógico) para utilizar el criterio de momento angular.
- lcrit** Valor numérico del criterio de momento angular. Para las distribuciones de King utilizadas en este trabajo con una escala espacial $r_h \sim 1$, un valor $L_{crit} = 0,2$ selecciona aproximadamente al 26 % de las partículas centrales para destinarlas al integrador NBODY6; mientras que un valor de $L_{crit} = 0,32$ selecciona un 44 % aproximadamente.
- ecrit** Valor numérico del criterio de energía.
- regrid** Opción (valor lógico) para activar el mecanismo de intercambio de partículas entre SCF y NBODY6; i.e. revaluación por medio del criterio de momento angular (ver sección 4.5.2).
- ngrid** Número de pasos de tiempo de SCF, Δt_{SCF} , tras el cual se realiza la reevaluación del criterio de selección de partículas.

¹² <http://www.ast.cam.ac.uk/~sverre/>

Capítulo 5

Características de las simulaciones

Para llevar a cabo una simulación de la evolución dinámica de un CG se necesita un *modelo numérico* del mismo, consistente con las propiedades generales observadas de estos sistemas estelares y con la teoría analítica básica respecto a sus estados de equilibrio dinámico (sección 3.1). Se parte, entonces, de condiciones iniciales para las posiciones, masas y velocidades de un conjunto de N partículas —masas puntuales— que pretenden emular, dentro de los límites de las incertidumbres numéricas y debidas al modelo mismo, un estado de equilibrio dinámico cuasi-estático de un cúmulo globular real. Posteriormente, se emplea un código que integra numéricamente las ecuaciones de movimiento para el sistema de partículas y (usualmente) hace numerosas otras consideraciones para simplificar estos cálculos.

En este trabajo en particular utilizamos una realización numérica de un modelo de King (subsección 3.1.4) como condición inicial para cada uno de los experimentos, partiendo del mismo grado de concentración inicial y, posteriormente, la evolución dinámica del sistema se integra mediante el código híbrido EuroStar (capítulo 4). Debido a que el enfoque es en el estudio del efecto de la segregación de masa, ignoramos otros procesos evolutivos como la evolución estelar, binarias primigenias, rotación del cúmulo, fuerzas de marea en interacción de dos cuerpos y fuerzas de marea en interacción con un potencial galáctico.

5.1. Modelos de dos componentes de masa para cúmulos globulares

Como se mencionó en la subsección 3.2.1.2, el modelo más sencillo de un espectro de masas de un cúmulo globular, utilizado como primera aproximación, es el *modelo de dos componentes de masa*. En este modelo, sólo están presentes en el sistema dos tipos de estrellas que difieren entre sí por su masa: m_1 y m_2 , con $m_2 > m_1$. Con el fin de hacer la identificación simple, se las llama *estrellas ligeras* y *estrellas pesadas*; y al conjunto de todas las estrellas de la misma masa se lo llama *subsistema de masas ligeras* y *subsistema de masas pesadas*, respectivamente. El sistema compuesto de N_1 estrellas ligeras y N_2 estrellas pesadas se integra de $N = N_1 + N_2$ estrellas en total. En lo que respecta a la masa total del sistema, M_{tot} , ésta se distribuye en $N_1 m_1 \equiv M_1$ y $N_2 m_2 \equiv M_2$, correspondientes a los subsistemas de estrellas ligeras y

pesadas, respectivamente; es decir que $M_{tot} = M_1 + M_2$. A partir de estas propiedades básicas, Spurzem y Takahashi (1995) definen dos parámetros para caracterizar al sistema: $\mu \equiv m_1/m_2$ y $q \equiv M_2/M_{tot}$. Alternativamente, otros autores utilizan el parámetro $\hat{q} \equiv M_2/M_1$ [Inagaki y Wiyanto 1984, por ejemplo]. Cualquier tripleta de parámetros (N, μ, q) o $(N, \mu, \hat{q})$ caracterizan completamente la función de masa de un sistema de este tipo, aunado a una normalización adecuada (ver sección 5.2). Una relación útil que se deriva de estos parámetros fundamentales y sus relaciones básicas es

$$N_1 = \frac{(1 - q)\mu N}{q - \mu q + \mu} \quad (5.1)$$

En el presente estudio se ha elegido utilizar esta clase de modelos debido a que presentan gran sencillez, a la vez que los efectos más básicos debidos a la presencia de un espectro de masas se ponen de manifiesto en la evolución dinámica del cúmulo¹. Además, relativamente a otros tipos de modelos², existe una mayor cantidad de trabajos que involucran modelos de dos componentes de masa, tanto totalmente teóricos como teórico-computacionales, por lo que se cuenta con un marco más amplio con el cual comparar los resultados.

5.2. Unidades de N-cuerpos

En la actualidad, la mayoría de las simulaciones de N-cuerpos se realizan en un sistema de unidades «estándar», motivado principalmente por la conveniencia en su manejo sobre unidades del sistema internacional. Además, estas unidades estandarizadas son fácilmente escalables a unidades físicas multiplicando por factores de conversión adecuados, haciéndolas más generales. Otras dos razones, más vigentes hace un par de décadas que hoy, pero que ciertamente pudieron haber influido en incitar al colectivo de investigadores a optar por estos sistemas de unidades estandarizados en un principio son: (i) el sistema de datos discreto y finito de las computadoras no permite representar un número arbitrariamente grande o pequeño mediante el mismo; asimismo, no se pueden diferenciar dos números arbitrariamente cercanos (i.e. la precisión es finita también). (ii) las constantes físicas y rangos de la magnitud de las cantidades físicas involucradas en los cálculos de la dinámica de

¹ Como, precisamente, la segregación de masa, basada en el intercambio de energía entre estrellas de *diferentes masas* (ver subsección 3.2.1.2).

² Existen modelos para representar un espectro de masas que tienen 3, 4, 5, ..., k componentes de masa y, en general, se los llama *modelos multimasa*. A manera que aumentan las componentes de masa, requiere más trabajo analizar el espacio de parámetros entero; en su lugar, se utiliza una distribución de masa que siga alguna ley de potencia que se asemeje a las funciones de luminosidad estelar observadas en cúmulos reales (ver subsección 2.2.6). Otros modelos *no* utilizan componentes de masa y simplemente presentan un «continuo» de masas siguiendo una función de distribución que intenta reproducir las observadas o las supuestas como función de masa inicial. Presuntamente, esta última clase de modelos son más «realistas».

los sistemas estelares de N -cuerpos, expresadas en el sistema internacional, exhiben órdenes de magnitud comparables con los límites de representación del sistema numérico de una computadora convencional. Por tanto, el objetivo de un *sistema de unidades de N -cuerpos* es el de realizar los cálculos numéricos de la dinámica de un sistema estelar de N -cuerpos facilitando el análisis y comprensión inmediata de los resultados, minimizando a la vez los efectos adversos que pudieran surgir al emplear el sistema numérico (discreto y finito) mediante el cual se los realiza. El nuevo sistema de unidades definido busca que tanto los rangos de magnitud de las cantidades físicas involucradas (longitud, tiempo, masa, energía, etc.) como la mínima variación de las mismas tengan valores comparables con la unidad³.

En este trabajo, empleamos el sistema de unidades más ámpliamente utilizado en la literatura afín, que se origina de definir a las cantidades del sistema $G = 1$, $M_{tot} = 1$ y $E_{tot} = -1/4$ [Heggie y Mathieu 1986, Aarseth et al. 1974].

5.3. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales (ver figura 5.1), a partir de las cuales se inician las simulaciones realizadas en este trabajo, pretenden representar, en la medida de lo posible y dentro de las limitaciones numéricas, computacionales y del modelo, a un cúmulo globular realista en un estado de equilibrio cuasi-estático, con un grado de concentración intermedio. La razón de elegir este estado como punto de partida es que, independientemente del origen y formación de los cúmulos globulares, sobre el cual existe aún considerable debate [Meylan y Heggie 1997, Ashman y Zepf 1998], está relativamente claro que después de un periodo inicial, conocido como *fase de relajación violenta* [Binney y Tremaine 1987], en el cual ocurre la mayor parte de la evolución estelar interna, el cúmulo globular alcanza este estado de equilibrio cuasi-estático [Binney y Tremaine 1987, Meylan y Heggie 1997].

El procedimiento mediante el cual se generaron las condiciones iniciales para cada uno de los experimentos se resume en el siguiente algoritmo:

1. A partir de un modelo numérico de King [ver, por ejemplo, apéndice A de Cruz (1999)], con potencial adimensional central $W_0 = 7$ (correspondiente a una concentración $c = 1,528$), se generaron aleatoriamente las posiciones y velocidades para un conjunto de N partículas de igual masa m en equilibrio cuasi-estático.
2. A partir de los parámetros q y μ para los modelos de dos componentes de masa, construimos una distribución de probabilidad discreta sobre el espacio muestral $m_1 \equiv m$ y $m_2 \equiv \mu m$, con probabilidades N_1/N y N_2/N , respectivamente. Mediante esta distribución de probabilidad, determinamos la masa que se asigna a cada partícula aleatoria y homogéneamente. El valor de la proporción resultan-

³ A las unidades que resultan de este sistema se las identifica mediante la abreviatura «NBU» (*N-Body Units*, por sus siglas en inglés).

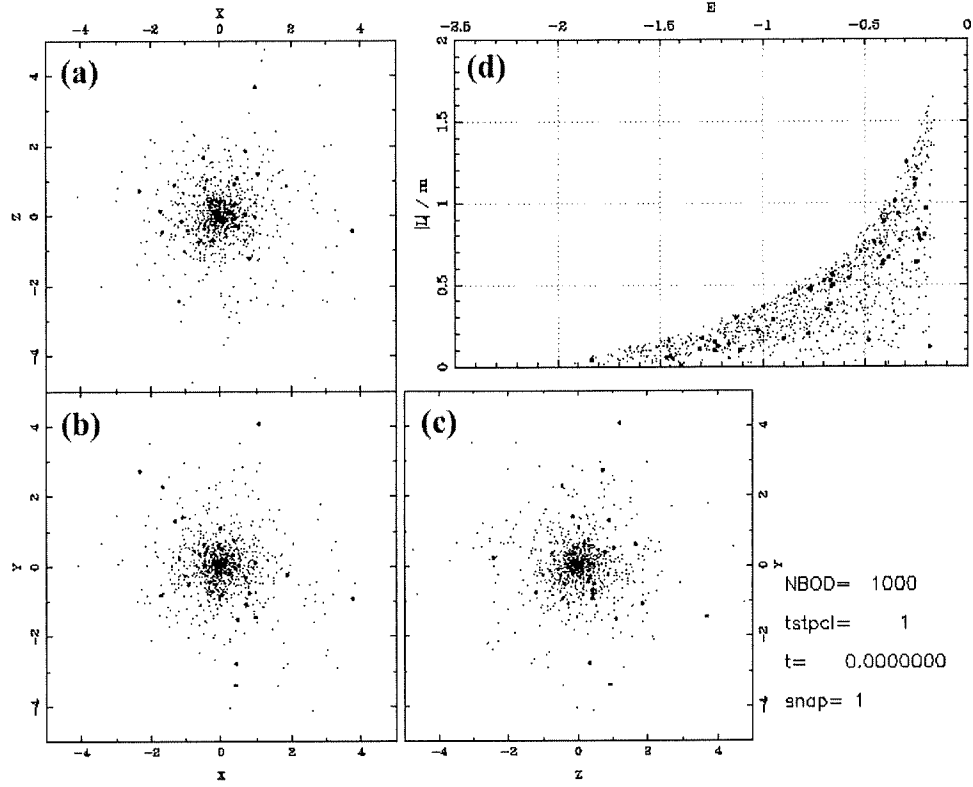


Figura 5.1. Distribución espacial inicial para el experimento M2-1, (a) proyectada sobre el plano X-Z; (b) proyectada sobre el plano X-Y; (c) proyectada sobre el plano Z-Y; y (d) en el diagrama de Linblad (tanto el momento angular como la energía mostradas son cantidades por unidad de masa). Los puntos pequeños representan partículas de masa m_1 y los puntos grandes partículas de masa m_2 . El punto pequeño encerrado en un círculo concéntrico es sólo una partícula arbitraria (en este caso, aquella designada por el No. 1).

te de esta asignación aleatoria, q^* , es estadísticamente indistinguible del valor planeado en el modelo, q .

3. Una vez asignadas las posiciones, velocidades y masas, se procede a «virializar»⁴ al cúmulo multiplicando las velocidades de todas las partículas por un factor numérico común.
4. El último paso es estandarizar el sistema de unidades a aquél comúnmente utilizado en simulaciones de N-cuerpos (ver sección 5.2), donde $G = 1$, $M_{tot} = 1$ y $E_{tot} = -1/4$. Para esto multiplicamos las magnitudes de los radio-vectores de las partículas y las magnitudes de las velocidades de las partículas por un factor de escala apropiado.

Una vez terminados los pasos anteriores, el sistema está listo para comenzar a ser evolucionado en el tiempo por el integrador EuroStar.

5.4. Experimentos realizados y su nomenclatura

Los reducidos recursos computacionales (potencia y cantidad de procesadores disponibles) y tiempo de cómputo necesario eliminaron desde un principio la idea de poder muestrear ampliamente el espacio de parámetros de los modelos de dos componentes de masa. A lo largo de la realización del presente estudio, se efectuaron un total de 38 experimentos, con diversas condiciones iniciales y características de sus espectros de masas (7 de igual masa única, 20 con dos componentes de masa y 11 con otras características en su espectro de masas). De este total, se escogieron sólo cuatro experimentos, por ser aquellos con las mejores cualidades. Las consideraciones hechas para escoger un experimento para este trabajo fueron que presentase (i) una buena conservación de la energía, con un error relativo inferior a aproximadamente 10^{-3} (0,1 %); (ii) un tiempo de integración prolongado, suficiente para poder analizar la evolución dinámica del sistema; y (iii) una configuración de parámetros adecuada y relevante para su comparación con la teoría y trabajos anteriores.

En el cuadro 5.1 se enlistan los cuatro experimentos numéricos realizados que forman parte del análisis del presente estudio. Para una fácil y rápida referencia en la consiguiente discusión, cada uno de ellos se denota por las siglas MU o M2 denotando «igual masa única» y «dos componentes de masa», respectivamente, seguidas de un número consecutivo. Las características básicas de su espectro de masas se muestran también en el cuadro 5.1. Los valores denotados con un superíndice «estrella» ($\star$) denotan los valores obtenidos a partir de los datos específicos de cada experimento, para diferenciarlos de los valores planeados. El valor planeado de q para todos los experimentos que presentan dos componentes de masa fue 0,1; mientras que el valor planeado para μ coincidió en todos los experimentos (más allá de la precisión mostrada en el cuadro) con su correspondiente valor experimental $\mu^\star$.

⁴ Hacer que se cumpla la condición de equilibrio virial, ajustando la energía cinética total del sistema, K , respecto de su energía potencial total, W .

Cuadro 5.1. Experimentos realizados, nomenclatura y características principales.

ID.	N^*	$N_{1,NB6}^*$	$N_{1,SCF}^*$	$N_{2,NB6}^*$	$N_{2,SCF}^*$	q^*	μ^*	m_1^*
MU-1	1000	448	552	-	-	-	-	$1,00 \times 10^{-3}$
M2-1	1000	253	696	17	34	0,086	1,75	$9,63 \times 10^{-4}$
M2-2	1000	256	703	14	27	0,079	2,00	$9,61 \times 10^{-4}$
M2-3	1000	262	706	9	23	0,076	2,50	$9,54 \times 10^{-4}$

En el cuadro 5.1, las cantidades $N_{1,NB6}$, $N_{1,SCF}$, $N_{2,NB6}$ y $N_{2,SCF}$ denotan el número de partículas de, respectivamente, masa m_1 integradas por NBODY6, masa m_1 integradas por SCF, masa m_2 integradas por NBODY6 y masa m_2 integradas por SCF; de manera que $N_1 = N_{1,NB6} + N_{1,SCF}$ y $N_2 = N_{2,NB6} + N_{2,SCF}$. Asimismo, podemos denotar por N_{NB6} al total de partículas de un experimento integradas por NBODY6 (independientemente de su masa), y por N_{SCF} al total de partículas integradas por el método de campo auto-consistente; de modo que, análogamente, $N_{NB6} = N_{1,NB6} + N_{2,NB6}$ y $N_{SCF} = N_{1,SCF} + N_{2,SCF}$.

5.5. Desarrollo de las simulaciones

Se hizo un esfuerzo por llevar a cabo todos los experimentos bajo las mismas condiciones dentro de las variaciones permisibles⁵. Todos los experimentos fueron realizados con aproximadamente un 26 % ($L_{crit} = 0,20$) de las partículas integradas por NBODY6, seleccionadas por el criterio de momento angular, excepto el experimento MU-1, en el cual este porcentaje fue de 44 % ($L_{crit} = 0,32$) (ver secciones 4.4 y 4.7). Tras una serie de pruebas preliminares, esta proporción resultó adecuada en el balance de eficiencia-precisión, al mostrar un buen desempeño en la conservación de la energía a la vez que agilizaba el desarrollo de los cálculos. La estabilidad de las soluciones a las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de cada experimento se supervisó mediante el cálculo del error relativo de la energía total del sistema con respecto a la energía inicial del mismo que, como vimos, en el sistema de unidades de N-cuerpos es $E_{tot} = -1/4$ (ver sección 5.2). Los porcentajes señalados fueron constantes a lo largo de la duración de las simulaciones y *no hubo* intercambio de partículas entre ambos integradores una vez iniciada la simulación, i.e. el mecanismo descrito en la sección 4.5, fue desactivado en todos los experimentos. La razón de lo anterior radica en que, cuando fue puesto a prueba en las condiciones descritas para los experimentos, dicho mecanismo produjo un considerable efecto adverso en la conservación de la energía, induciendo inestabilidad de las soluciones a las ecuaciones de movimiento⁶.

⁵ Variaciones intrínsecas del modelo y producto de la disposición aleatoria de las partículas en el espacio fase para su configuración inicial.

⁶ Cabe hacer notar que el autor del código (EuroStar) no señala ningún efecto adverso debido al uso del mecanismo de interacción entre ambos integradores, probablemente debido a que

El resto de los parámetros importantes para la integración de las ecuaciones de movimiento⁷ fueron siempre iguales para todos los experimentos. La integración mediante NBODY6 se realizó con los mecanismos de regularización de dos, tres y cuatro cuerpos y regularización en cadena activados (ver subsección 4.2.4) y sin suavizamiento alguno de los potenciales puntuales.

En lo que respecta a las herramientas computacionales utilizadas, se emplearon exclusivamente estaciones de trabajo Linux y, aunque el código EuroStar está hecho para poder funcionar mediante computación en paralelo, no se hizo uso de esta característica debido a que, siendo este trabajo pionero en la evaluación del desempeño del código en un problema físico como el que se plantea, la consecuente complicación en la extracción y análisis de los datos hubiera sumado posibles errores sistemáticos innecesarios para esta primera evaluación.

las condiciones de uso del mismo son notablemente distintas a las planteadas en sus estudios [Hemsendorf 1999].

⁷ Se excluyen de esta consideración parámetros referentes al formato de salida, frecuencia de la salida del programa a disco, etc.

Capítulo 6

Resultados y discusiones

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos del análisis de cada uno de los experimentos realizados en el presente trabajo; así como su discusión correspondiente y comparación con la teoría presentada en el capítulo 3 y trabajos anteriores.

Para facilitar el análisis y considerar tanto efectos de los grupos de masas como efectos de los integradores que conforman el código híbrido EuroStar (NBODY6 y SCF), en cada experimento se ha realizado una clasificación de las partículas de acuerdo a estas características que las diferencian, agrupándolas en nueve subsistemas distintos (el sistema global¹ y ocho que se derivan de él). Los detalles y la abreviatura empleada para distinguir a cada subsistema se muestran en la figura 6.1.

En la presentación de los resultados nos referiremos a estos subsistemas por su abreviatura o su descripción concisa, según sea conveniente. El análisis de los resultados se realiza en base a comparaciones entre la evolución de estos subsistemas en términos de los parámetros que se detallan en la siguiente sección.

6.1. Parámetros y herramientas de análisis

Los principales parámetros y herramientas de análisis utilizadas para la presentación de los resultados de los experimentos realizados son:

Energía total Es la energía total del sistema, E_{tot} , como la suma de las energías cinética y potencial de cada una de las partículas (estrellas) que lo componen. La energía potencial de cada partícula es calculada de manera directa mediante la suma de la energía potencial respecto a cada una de las demás estrellas, debida a su potencial puntual.

Error relativo de la energía Se refiere al error relativo en la energía *total* del sistema respecto a la energía *inicial* del mismo. Si la energía total inicial del

¹ El sistema global incluye a todas las partículas del experimento, indistintamente de su masa e integrador al que pertenece.

Clasificación por componentes de masa:

$$\text{Sistema global (G)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Masas ligeras (M1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{En NBODY6 (M1 - NB6)} \\ \text{En SCF (M1 - SCF)} \end{array} \right. \\ \text{Masas pesadas (M2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{En NBODY6 (M2 - NB6)} \\ \text{En SCF (M2 - SCF)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Clasificación por integrador:

$$\text{Sistema global (G)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Integrador NBODY6 (NB6)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Masas ligeras (M1 - NB6)} \\ \text{Masas pesadas (M2 - NB6)} \end{array} \right. \\ \text{Integrador SCF (SCF)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Masas ligeras (M1 - SCF)} \\ \text{Masas pesadas (M2 - SCF)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Figura 6.1. Clasificación de las partículas en subsistemas basada en la componente de masa e integrador al que éstas pertenecen.

sistema es $E_{tot}(0)$ y la energía total del sistema al tiempo t es $E_{tot}(t)$, entonces dicho error relativo al tiempo t , $dE(t)$, está dado por

$$\Delta E(t) = \frac{|E_{tot}(t) - E_{tot}(0)|}{|E_{tot}(0)|}. \quad (6.1)$$

Generalmente se considera que este error no debe exceder como *máximo* 10^{-2} para que los resultados puedan ser tomados en cuenta, aunque es muy preferible que se conserve por debajo de $\sim 10^{-3}$ para ser más significativos.

Dispersión de velocidades Es la velocidad cuadrática media de las partículas al tiempo t , $v_m^2(t)$, calculada mediante

$$v_m^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{v}_i(t)\|^2, \quad (6.2)$$

donde N es el número total de partículas del sistema y $\mathbf{v}_i(t)$ es la velocidad de la i -ésima partícula al tiempo t .

Perfil de densidad de masa Es la densidad de masa como función del radio, aproximada mediante la densidad media dentro de cascarones concéntricos de igual ancho logarítmico (base 10). Para calcular la densidad media dentro del k -ésimo cascarón concéntrico al tiempo t , $\bar{\rho}_k(t)$, se suma la masa de todas las partículas que contiene y se divide entre el volumen del mismo, que varía para cada cascarón. Para los experimentos de 1000 partículas se consideraron 9 cascarones concéntricos. Los límites de los cascarones considerados están igualmente espaciados en escala logarítmica (en unidades de N-cuerpos) siendo el límite más bajo $-1,0$ y el

más alto 1,0, en todos los experimentos. Se ignoran aquellas partículas más allá de las 10 unidades de radio.

Radios lagrangianos Son los radios de las esferas concéntricas, con origen en el centro de masa del sistema, que contienen una determinada fracción de la masa total del mismo, M_{tot} (ver nota al pie en la página 37). A medida que evoluciona el cúmulo, la magnitud de estos radios van cambiando de acuerdo a la distribución de masa del mismo. Se denotarán por r_f , donde f es la fracción (en porcentaje) de la masa que contiene la esfera de dicho radio (i.e. 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90 ó 100). Debido al bajo número de partículas empleadas en los experimentos, aquellos radios lagrangianos de menor fracción de masa presentan un considerable “ruido estadístico”².

Parámetro de equipartición Da una medida del grado de equipartición de la energía *cinética* entre los grupos de *masas* del sistema. Se denota por ξ_m y es el cociente de las energías cinéticas totales de los dos grupos de masa presentes; de manera que

$$\xi_m = \frac{m_2 \overline{v_{m2}^2}}{m_1 \overline{v_{m1}^2}}. \quad (6.3)$$

En términos de este parámetro la condición de equipartición de la ecuación 3.23 se traduce en $\xi_m = 1$.

De manera análoga al parámetro anterior, para este estudio hemos definido el parámetro de equipartición de la energía cinética entre los grupos de *integrador*, ξ_i , dado por

$$\xi_i = \frac{\overline{v_{mNB6}^2}}{\overline{v_{mSCF}^2}}, \quad (6.4)$$

donde $\overline{v_{mNB6}^2}$ y $\overline{v_{mSCF}^2}$ son las velocidades cuadráticas medias de los subsistemas NB6 y SCF, respectivamente. Este parámetro pretende ser una medida de la diferencia de la energía cinética promedio entre estos subsistemas que se distinguen por el método de integración de las trayectorias de las partículas que los conforman.

En las siguientes secciones se presentan y discuten los resultados encontrados para los experimentos que se mencionan en el capítulo 5. En la sección 6.2, como referencia para los demás resultados de experimentos con modelos de dos componentes de masa, se discuten los resultados para el experimento realizado con un modelo de igual masa única para todas las partículas; en la sección 6.3 se discuten los resultados para los

² Los modelos analíticos como los considerados en el capítulo 3 consideran una distribución continua de masa que, en el caso de los experimentos numéricos (y de la realidad misma de los CGs) resulta no más que una idealización pues, en estos últimos, el movimiento de las partículas produce variaciones en los parámetros locales (y aun globales) del sistema durante periodos comparables con el tiempo de cruce (ver subsección 3.3.1).

tres experimentos con diferentes modelos de dos componentes de masa realizados para el presente trabajo.

6.2. Resultados del modelo de igual masa única

Si bien en un modelo donde todas las partículas tienen la misma masa es imposible hablar de un proceso de «equipartición de la energía», o un efecto de «segregación de masa», resulta útil como referencia investigar un experimento numérico de tales condiciones. En la evolución de un modelo de igual masa única podemos observar de manera más «pura» el efecto que tiene la división del sistema global en una parte de NBODY6 y otra de SCF (aspecto fundamental del mecanismo subyacente de *EuroStar*), eliminando así el efecto de las componentes de masa sobre la evolución del sistema. De esta manera, al comparar con los resultados de los modelos de dos componentes de masa, podemos identificar mejor cuáles efectos son debidos a cada una de las características del modelo.

Para este trabajo consideramos un solo modelo donde todas las partículas fueron de igual masa³, designado como MU-1 (ver cuadro 5.1), y con un total de 1000 partículas. La simulación alcanzó un total de 200 NBU correspondientes a aproximadamente $6,6 t_{rh}$, de acuerdo con las ecuaciones de la subsección 3.3.2 y los datos particulares de este experimento en su condición inicial.

Para analizar la validez de los resultados en cuanto a la estabilidad de la simulación, en la figura 6.2 se muestra el error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento MU-1. El valor de dE para este experimento se sitúa inicialmente inferior a 10^{-3} y, a pesar de que aumenta consistentemente durante toda la simulación, en todo tiempo se sitúa por debajo de 5×10^{-3} . En la misma figura se muestra, el valor de dE calculado de dos maneras distintas: la línea cortada muestra el cálculo a partir de la energía potencial proveniente de EuroStar que, a su vez, es calculada por medio de la aproximación del potencial suavizado global (método de SCF); por otra parte, la línea continua muestra la misma cantidad a partir de cálculos directos de los potenciales de cada partícula respecto a las demás, considerando sus potenciales puntuales. Es evidente que hay una diferencia considerable entre ambos métodos y, dado que el último método (directo) es el más exacto, lo hemos tomado como más significativo y, por tanto, adecuado para la evaluación de la estabilidad de la simulación. La diferencia fundamental entre ambos cálculos radica en que el método basado en el potencial suavizado no toma en cuenta la energía potencial producto de la interacción de dos cuerpos, e.g. la formación de sistemas binarios de partículas.

³ La masa de cada partícula es $m = 1/N$, de acuerdo con el sistema de unidades de N-cuerpos empleado (ver sección 5.2). Si bien en los modelos de dos componentes de masa ninguna partícula tiene masa de N^{-1} , la masa promedio en dichos sistemas, $\langle m \rangle$, sí presenta este valor.

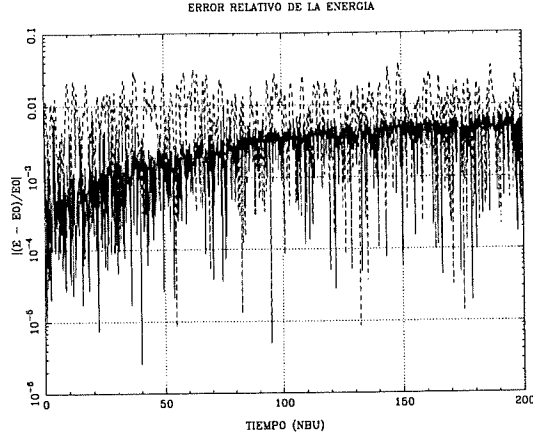


Figura 6.2. Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-2. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de *EuroStar*, calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).

6.2.1. Redistribución de la energía cinética

A pesar de que en este modelo no existen distintos tipos de masas en las partículas, podemos analizar cómo es la redistribución de la energía cinética entre las componentes de NB6 y SCF del sistema global; así como la evolución temporal de la misma en el sistema entero. En la figura 6.3 se muestra la velocidad cuadrática media de los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento MU-1. La velocidad cuadrática media global, $\overline{v_{m,G}^2}$, se mantiene constante en el valor 0,5 durante toda la simulación; en concordancia con la condición de equilibrio virial. Al igual que lo observado para los modelos de dos componentes de masa, $\overline{v_{m,NB6}^2}$ presenta un valor inicial un poco debajo del promedio global $\overline{v_{m,G}^2} \approx 0,5$, aunque en este caso es un poco menos claro que en los otros experimentos (ver sección 6.3). Posteriormente, el subsistema NB6 presenta un lento aumento en $\overline{v_{m,NB6}^2}$ durante toda la simulación, hasta alcanzar un valor final de cerca de 0,05 unidades por encima de su valor inicial⁴ (i.e. un aumento de casi un 10 % de su valor inicial). En contrapunto, el subsistema SCF comienza con un valor de $\overline{v_{m,SCF}^2}$ justo por encima del promedio global, y disminuye muy lentamente durante toda la simulación hasta alcanzar un valor mínimo cerca de 0,03 unidades por debajo de su valor inicial al término de la simulación (i.e. una disminución de casi 6 % de su valor inicial). En términos absolutos⁵, tomando en cuenta el número de partículas en cada subsistema, la ganancia de energía cinética

⁴ Unidades de velocidad cuadrática en el sistema natural de unidades de N-cuerpos.

⁵ Tomando en cuenta la energía cinética *total* de cada uno de los subsistemas.

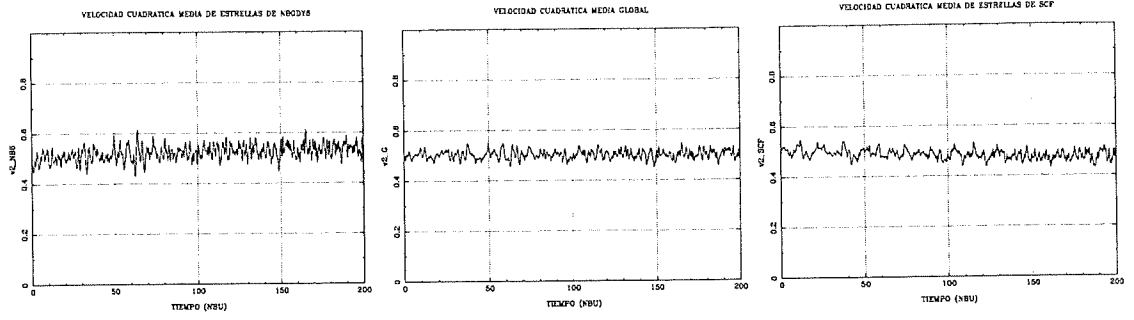


Figura 6.3. Velocidad cuadrática media en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento MU-1. *Izquierda:* subsistema NB6; *centro:* sistema G; *derecha:* subsistema SCF.

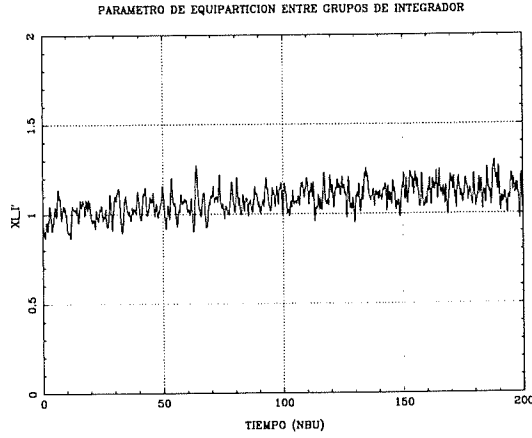


Figura 6.4. Parámetro de equipartición de la energía entre los grupos de integrador en función del tiempo para el sistema global del experimento MU-1.

por parte del subsistema NB6 corresponde aproximadamente a la pérdida de energía cinética del subsistema SCF.

En este caso no hay parámetro de equipartición entre las componentes de masa para analizar; sin embargo, se calculó el parámetro de equipartición de la energía entre los grupos de integrador para el sistema global del experimento MU-1, el cual podemos observar en la figura 6.4.

A partir de la gráfica podemos ver que, inicialmente, la energía cinética promedio de las partículas en el subsistema SCF es ligeramente superior a la de las partículas en el subsistema NB6, en casi un 5% aproximadamente respecto de esta última. Sin embargo, la relación cualitativa rápidamente se invierte, de modo que para $t_{NBU} \approx 20$ la velocidad cuadrática media de ambos subsistemas es la misma y, a partir de este tiempo, las partículas del subsistema NB6 superan en energía cinética promedio a las de SCF; aumentando progresivamente hasta el final de la simulación. Para $t_{NBU} \approx 200$, ξ_i se ubica alrededor de ~ 1.1 .

Lo observado en estos resultados es consistente con un núcleo que se calienta progresivamente mientras, inversamente, el halo se enfría; ambos a tasas relativamente constantes. La menor velocidad cuadrática inicial del subsistema NB6 —el cual contiene al «núcleo» y una parte del «halo» del cúmulo— respecto al subsistema SCF —identificado principalmente con el «halo»— es producto del método de selección de partículas empleado por EuroStar al inicio de la simulación y rápidamente se pone de manifiesto que la inestabilidad gravotérmica favorece el calentamiento del núcleo.

6.2.2. Evolución de la distribución de masa

En el análisis de los resultados de este modelo de masa única es imposible hablar de segregación de masa; sin embargo, la distribución global de masa sí tiene cambios a lo largo de la evolución dinámica del cúmulo como resultado de algunos de los efectos descritos en la sección 3.2, del capítulo 3; como la inestabilidad gravotérmica, la evaporación y la eyección. En la figura 6.5 se muestran los radios lagrangianos de los subsistemas G, NB6 y SCF para el experimento MU-1. Se muestran, de menor a mayor, los radios lagrangianos correspondientes al 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa del sistema respectivo, comenzando por la curva color negro (1%); las curvas de igual color se diferencian entre sí un orden de magnitud en la masa que contienen las esferas correspondientes. La tendencia observada en el sistema global es básicamente la misma que se observa en los experimentos con modelos de dos componentes de masa: los cascarones internos se contraen mientras que los externos se expanden. El punto de inflexión de este comportamiento de los radios lagrangianos es $r_{40,G} \approx 0,6$, permaneciendo casi constante en este valor a lo largo de toda la duración del experimento. La contracción o expansión de cada uno de los radios lagrangianos del sistema global sigue una pendiente (logarítmica) casi constante; el único cambio importante en este comportamiento ocurre entre $t_{NBU} \approx 170$ y $t_{NBU} \approx 180$, cuando ocurre una súbita expansión y contracción considerable de las capas internas del sistema durante estas 10 NBU. El periodo de la oscilación y la consistencia del comportamiento en todos los radios lagrangianos por debajo de cuando menos $r_{10,G}$ sugiere que se trata de un efecto *real*, más allá de las oscilaciones debidas al ruido estadístico. El hecho de que pasado este evento el sistema parezca proseguir su contracción, y la comparación del tiempo alcanzado de evolución con el tiempo esperado de colapso del núcleo central⁶ coinciden en afirmar que la causa de la citada expansión-contracción súbita no es de las características del colapso del núcleo central. Por otro lado, dado que sólo afecta a las capas muy internas del cúmulo por debajo de $r_{10,G}$, —lo cual representa una influencia real por sobre menos de 100 partículas—, podemos *conjeturar* que se trata más bien de un fenómeno de

⁶ Dado que en este modelo hay un solo tipo de masa para todas las partículas, el tiempo esperado de colapso del núcleo central (basado en las ecuaciones presentadas en la sección 3.3.3 del capítulo 3) se estima por 514,5 NBU; lo cual es más del doble del tiempo alcanzado en el experimento analizado presente.

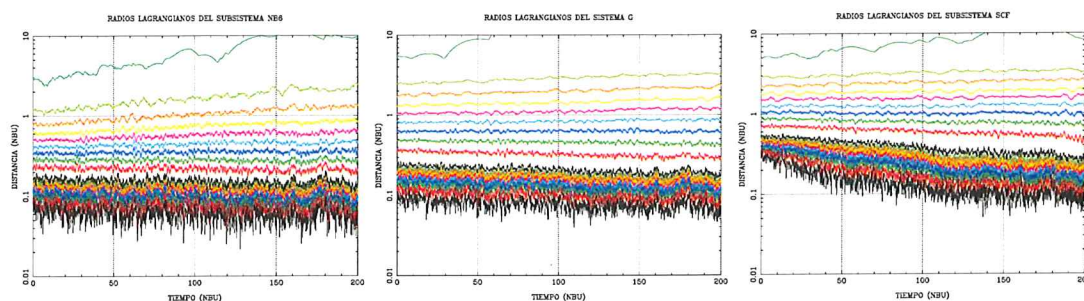


Figura 6.5. Radios lagrangianos en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF para el experimento MU-1. *Izquierda:* subsistema NB6; *centro:* sistema G; *derecha:* subsistema SCF.

eyección (como el descrito en la subsección 3.2.2) tras, por ejemplo, la formación sólo momentánea de una o varias *binarias duras*⁷.

Al desglosar el análisis del sistema global para analizar sus subsistemas, se observa que el subsistema NB6 contrae sus capas internas hasta aproximadamente $r_{30,NB6}$, radio lagrangiano que permanece constante alrededor de 0,3. Se puede notar también que la contracción de los cascarones internos de NB6 es sólo ligeramente mayor que la de los del sistema global; a pesar de que el mayor ruido estadístico de los primeros hace un tanto difícil la distinción. Lo que ciertamente es más notable es que los cascarones *externos* de NB6 se expanden en mayor medida que los del sistema G (y, por supuesto, que los de SCF); al grado que $r_{h,NB6}$ se ha expandido casi un 25 % al terminar la simulación, al pasar de $\sim 0,4$ inicialmente a $\sim 0,5$ al fin de la misma; Asimismo, $r_{90,NB6}$ prácticamente duplica su valor.

Opuestamente, y pesar de que todo el subsistema SCF es relativamente «externo» —en el sentido de que todos sus radios lagrangianos se ubican en valores por encima de sus correspondientes del sistema G y NB6—, sus cascarones externos se expanden ligeramente menos que los del sistema global. El radio lagrangiano que permanece constante en este experimento es $r_{40,SCF} \approx 1,0$. Las capas internas de SCF presentan el mismo fenómeno que se observa en los experimentos con modelos de dos componentes de masa: presentan una rápida contracción al inicio de la simulación, en este caso durante las primeras ~ 40 NBU, para luego proseguir con una contracción más lenta durante el resto de la simulación (hasta alcanzar el estado de colapso del núcleo central, en su caso). En la subsección 6.3.1.2 se proponen dos posibles causas para tal comportamiento; sin embargo, en este caso, el sistema NB6 no presenta ninguna evolución considerable de sus capas internas durante las primeras ~ 40 NBU, como es el caso de los experimentos con modelos de dos componentes de masa

⁷ Para resolver esta cuestión a detalle es necesario revisar las trayectorias específicas de las partículas en el centro del sistema, en búsqueda de la formación de tales sistemas. A pesar de que NBODY6 cuenta con un sistema automático para la detección de la formación de sistemas binarios, tal análisis no fue seguido en el presente estudio.

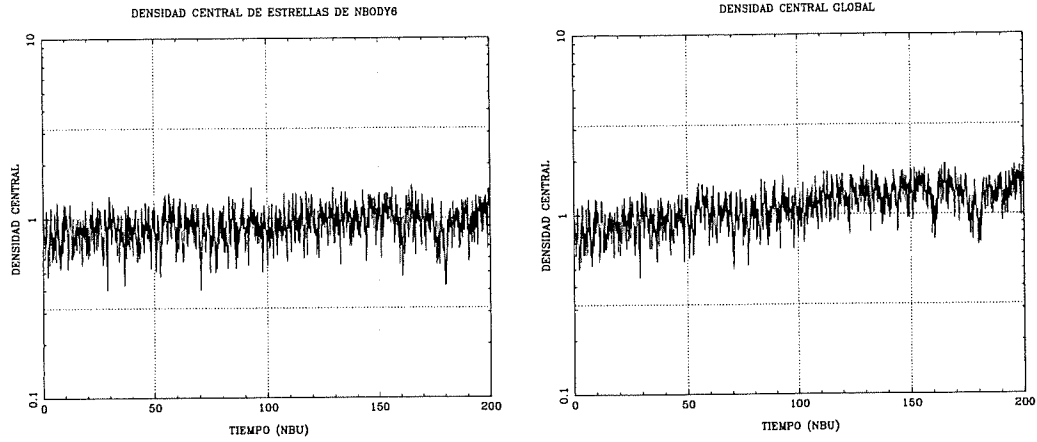


Figura 6.6. Densidad central promedio en función del tiempo para los sistemas G y NB6 para el experimento MU-1. *Izquierda:* subsistema NB6; *derecha:* sistema G.

a causa de la segregación de las masas ligeras hacia órbitas más externas. Esto nos conduce a la única otra posibilidad considerada: la redistribución de las partículas de SCF simplemente como consecuencia de sus órbitas; aunque esto deje ciertas dudas respecto al periodo en que esto ocurre.

La manera más clara de notar la influencia de las partículas SCF sobre el potencial central es, tal vez, mediante el estudio de la densidad central global y en el subsistema NB6, las cuales podemos observar en la figura 6.6 para este experimento. El primer aspecto que se hace notorio es que la densidad central global aumenta en mayor medida que la densidad del subsistema NB6 durante toda la simulación: mientras que $\rho_{0,NB6}$ aumenta cuando mucho un 25 % para el final del experimento, $\rho_{0,G}$ prácticamente se duplica en este mismo periodo. Lo anterior es debido a las partículas de SCF que caen hacia el núcleo contribuyendo a la densidad central.

Tal vez más que cuestionarnos por qué las partículas de SCF caen al núcleo en tal cantidad y en tan poco tiempo, debemos considerar por qué difícilmente salen del mismo una vez que entran. Mientras que en la parte de NBODY6 las partículas intercambian energía cinética mediante encuentros lejanos (y a veces cercanos) de dos cuerpos —produciendo inestabilidad gravotérmica, evaporación y eyección—, las partículas de SCF sólo tienen como opción seguir de cerca los cambios globales del potencial gravitacional; el cual no es sensible a los cambios locales de la distribución de masa, como la presencia de partículas pesadas o sistemas de estrellas ligadas. Si suponemos que lo anterior es realmente lo que sucede, debemos inferir que las partículas de NB6 también caen constantemente y en cantidad hacia las regiones centrales; pero éstas cuentan con mecanismos que les permiten salir de las mismas e, inclusive, lo propician antes de que lo hagan.

Basta ver que la densidad global en la franja cercana a $r_{h,G}$ se mantiene aproximadamente constante en su valor inicial para darnos cuenta de que el flujo de partículas de NB6 hacia esta zona es aproximadamente equivalente al flujo de partículas de SCF

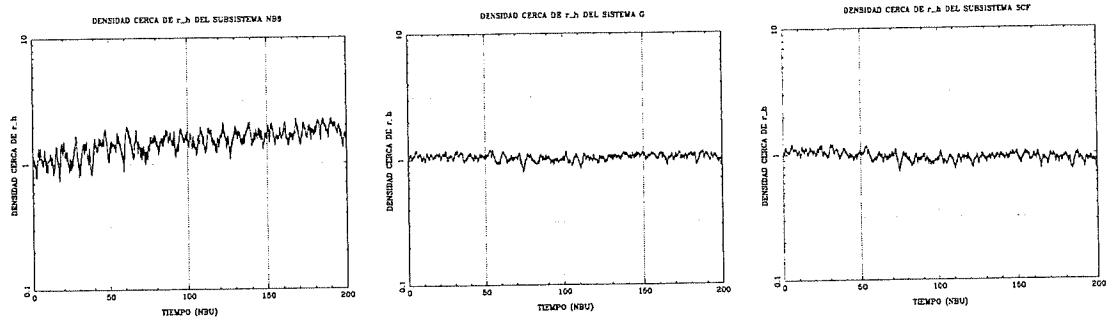


Figura 6.7. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas NB6, SCF y G del experimento MU-1. *Izquierda:* subsistema NB6; *centro:* sistema G; *derecha:* subsistema SCF.

que la abandonan para adentrarse en el núcleo del sistema. En la figura 6.7 podemos observar la densidad promedio en un cascarón cercano a $r_{h,G}$ de los sistemas G, NB6 y SCF. $\rho_{h,NB6}$ aumenta notablemente de manera progresiva durante toda la simulación, para alcanzar cerca de dos veces su valor inicial al finalizar la simulación. Como hemos visto, esto es producto de las partículas de las capas externas de NB6 que abandonan las regiones centrales para ingresar a órbitas más externas. Por su parte, $\rho_{h,SCF}$ sólo disminuye un poco más de 10% durante el periodo total del experimento.

En resumen, las evolución de la distribución de masa de este modelo de masa única se observa consistente con un escenario de colapso gravotérmico, evaporación y eyección; sin mayores contradicciones que las que puedan surgir de las dudas respecto a, principalmente, la diferencia entre ambos sistemas de integración de las trayectorias de las partículas.

6.3. Resultados de los modelos de dos componentes de masa

Se han dividido los resultados de los experimentos numéricos con modelos de dos componentes de masa en base al parámetro μ de cada uno de ellos, por considerar que, en el tipo de modelos utilizados en este estudio, es el parámetro más importante que distingue a cada experimento, además del número total de partículas, N , y de la proporción q que es fija para todos los experimentos (con un valor $q = 0,1$).

En el cuadro 6.1 se muestran como referencia las escalas de tiempo evolutivas de los experimentos numéricos con modelos de dos componentes de masa; calculadas según las fórmulas de la sección 3.3, del capítulo 3, utilizando datos específicos de cada experimento en su condición *inicial*.

En las siguientes subsecciones se presentan entonces los resultados para cada uno de los experimentos con modelos de dos componentes de masa realizados para este trabajo, en cada uno de los cuales la característica principal del modelo es su parámetro μ .

ID.	t_{cr}	t_{eq}	t_{rh}	t_{cc}
M2-1	1,4	16,8	29,4	276,4
M2-2	1,4	14,6	29,4	241,8
M2-3	1,4	8,6	29,4	193,5

Cuadro 6.1. Escalas de tiempo para los experimentos de dos componentes de masa. Las cantidades se muestran en unidades de N-cuerpos (NBU).

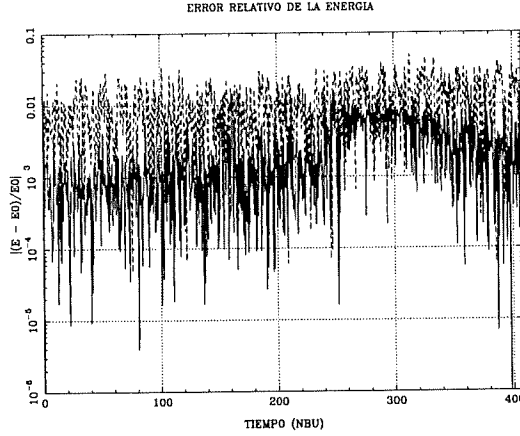


Figura 6.8. Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-1. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de *EuroStar*, calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).

6.3.1. Resultados del modelo con $\mu = 1,75$

El único experimento con un modelo de dos componentes de masa con $\mu = 1,75$ realizado en el presente estudio fue M2-1 (ver sección 5.4, del capítulo 5), con un total de $N = 1000$ partículas. El tiempo total de evolución del sistema alcanzó $t_{NBU} \approx 408$, que, según la ecuación 3.29, corresponde a aproximadamente $13,9 t_{rh}$, considerando que (al menos inicialmente) $r_h \approx 1$. El error relativo de la energía, dE , permaneció aproximadamente alrededor de 10^{-3} en los primeros dos tercios de la simulación y por debajo de 10^{-2} en el último tercio. En la figura 6.8 se muestra la evolución de dE a través del tiempo.

6.3.1.1. Equipartición de la energía

La dispersión de velocidades del sistema global (G) permaneció aproximadamente constante con un valor de $\sim 0,5$ a lo largo de toda la simulación (ver figura 6.9), lo cual concuerda con la condición de equilibrio virial (en unidades de N-cuerpos). Sin embargo, si analizamos esta cantidad en referencia a cada uno de los subsistemas

que se describieron anteriormente, vemos que existen diferencias considerables entre ellos. El subsistema de masa ligera, M1, presenta una velocidad cuadrática media casi constante, pero con una muy ligera tendencia a aumentar previo a $t_{NBU} \approx 100$ y a disminuir pasado este tiempo. El subsistema de masa pesada, M2, tiene una tendencia a perder energía cinética durante las primeras ~ 80 unidades de t_{NBU} y a incrementarla pasado este tiempo. Lo anterior concuerda marginal y cualitativamente con el efecto esperado debido a la equipartición de la energía entre ambos grupos de masa y, posteriormente, con el colapso gravotérmico del cúmulo entero; sin embargo, hasta este punto, ninguno de los dos efectos es claro. Un aspecto importante que resaltar es que, si bien el aumento de la energía cinética *promedio* del grupo de estrellas ligeras es apenas perceptible, hay que considerar que este grupo es, comparativamente, mucho más numeroso que el grupo de estrellas pesadas (949 y 51 miembros, respectivamente) por lo cual, aún si toda la energía cinética de las estrellas pesadas fuera «transferida» íntegra e instantáneamente al grupo de estrellas ligeras, la velocidad cuadrática *media* de estas últimas apenas se incrementaría un 10 % aproximadamente.

Por otra parte, existe una interesante diferencia entre las velocidades cuadráticas medias de los grupos de estrellas diferenciadas por sus integradores: NBODY6 (subsistema NB6) y SCF (subsistema SCF). En principio, esta sola distinción no genera diferencia alguna entre las energías cinéticas promedio de ambos grupos; sin embargo, hay que considerar que el método de selección de las partículas para su posterior asignación al integrador correspondiente se realiza mediante un criterio de magnitud de momento angular (por unidad de masa), en cuyo cálculo se involucra la velocidad de las partículas (además de su posición, por supuesto), lo cual puede traer como consecuencia alguna tendencia en la designación de las mismas en ambos grupos. Al ver la parte inferior de la figura 6.9, vemos que esto último parece ser el caso pues, inicialmente, la velocidad cuadrática media del subsistema NB6 es claramente inferior al promedio global; mientras que la misma cantidad en el subsistema SCF es ligeramente superior al promedio global, al inicio. Previo a $t_{NBU} \approx 100$, el subsistema NB6 aumenta considerablemente su energía cinética promedio mientras que el subsistema SCF la disminuye, aunque en menor cantidad. Después de este periodo, $\overline{v_{m,NB6}^2}$ permanece relativamente constante alrededor de $\sim 0,55$ mientras que $\overline{v_{m,SCF}^2}$ se estabiliza tendiendo a $\sim 0,45$.

Ahora, para observar lo que está pasando dentro de los subsistemas diferenciados por su integrador, descomponemos a cada uno de estos subsistemas en sus dos componentes de masa presentes (ver figura 6.10). Para el subsistema NB6, vemos que la velocidad cuadrática media de las estrellas ligeras aumenta notablemente durante las primeras ~ 100 NBU, de $\sim 0,45$ a $\sim 0,55$; mientras que la misma cantidad en las estrellas pesadas disminuye de $\sim 0,5$ a $\sim 0,35$ en las primeras ~ 20 NBU. Esto concuerda con la esperada equipartición de la energía entre ambos grupos de masa y contrasta notablemente con lo observado en los subsistemas M1 y M2 globalmente. Lo anterior es comprensible pues, dentro del subsistema NB6, se da el proceso de

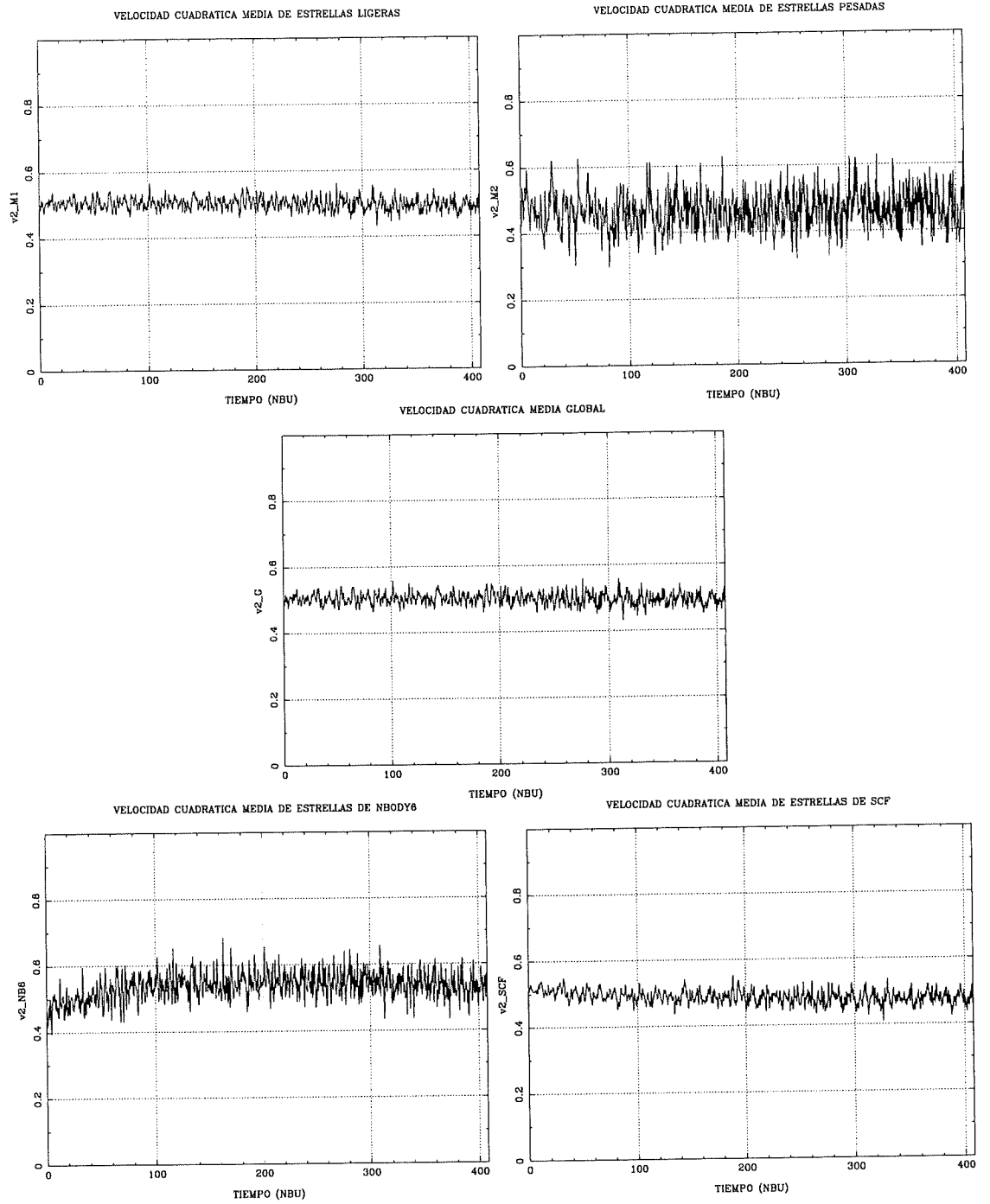


Figura 6.9. Velocidad cuadrática media en función del tiempo para los sistemas G, M1, M2, NB6 y SCF en función del tiempo para el experimento M2-1. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera; *superior derecha:* subsistema de masa pesada; *centro:* sistema global; *inferior izquierda:* subsistema de NBODY6; *inferior derecha:* subsistema de SCF.

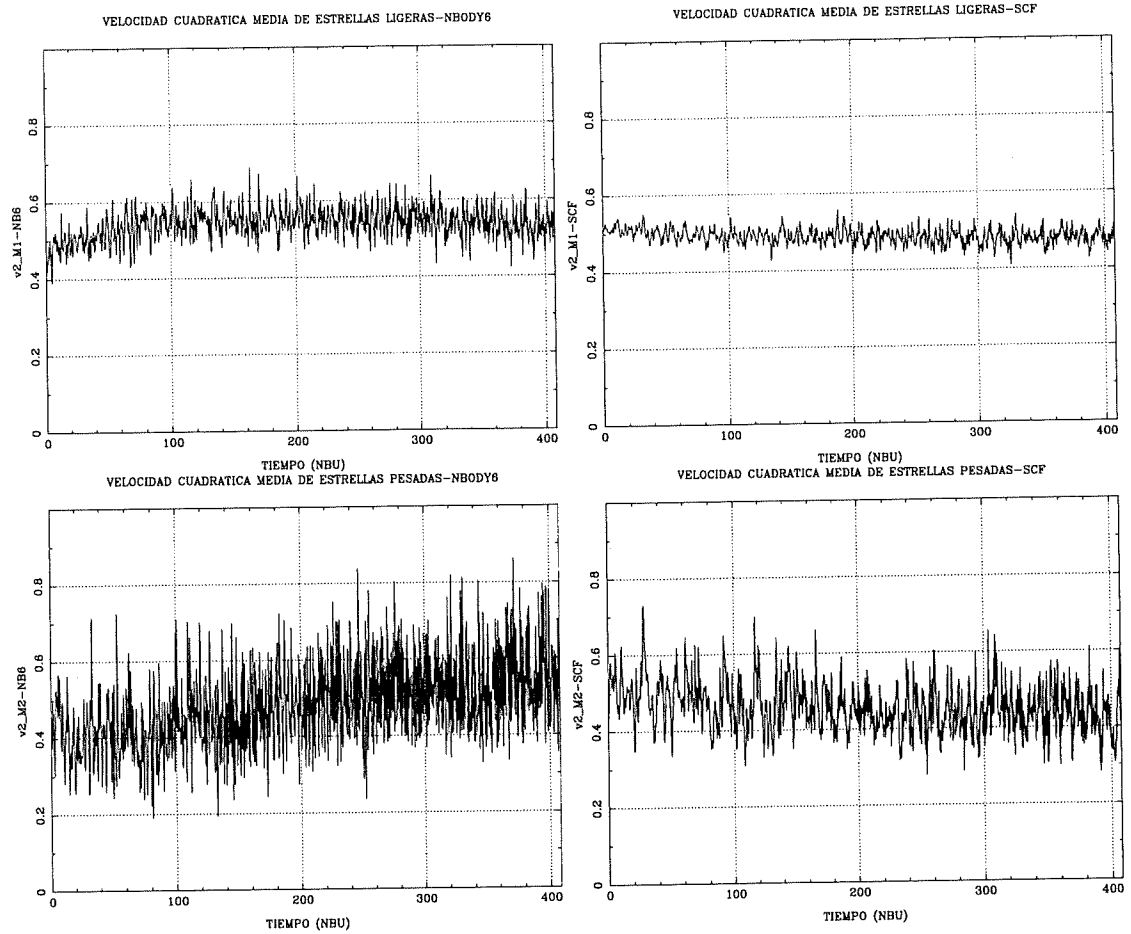


Figura 6.10. Evolución temporal de la velocidad cuadrática media de los subsistemas M1-NB6, M1-SCF, M2-NB6 y M2-SCF para el experimento M2-1. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera de NBODY6; *superior derecha:* subsistema de masa ligera de SCF; *inferior izquierda:* subsistema de masa pesada de NBODY6; *inferior derecha:* subsistema de masa pesada de SCF.

relajación de dos cuerpos debido a las interacciones gravitacionales entre las estrellas (ver sección 3.2.1), mientras que en el subsistema SCF no ocurre esto, como lo podemos verificar en el lado derecho de la figura 6.10 donde ambas componentes de masa muestran una disminución similar de su energía cinética promedio a lo largo de toda la simulación (aunque a una tasa progresivamente menor).

Hay que recordar que, en el subsistema SCF, la evolución dinámica es producida por cambios en el potencial global del cúmulo, que a su vez está ligado a la distribución de masa; por tanto, la única forma que tienen los subsistemas NB6 y SCF de «interaccionar» es mediante una redistribución de masa del primero, que afecta al potencial del «núcleo» y entonces afecta la distribución de masa del segundo, lo cual afecta al potencial del «halo» y entonces afecta al primero, modificando su distribu-

ción de masa y así sucesivamente. Este razonamiento toma en cuenta la estrategia de integración de órbitas de EuroStar (ver sección 4.6).

Es bastante notable que, por una parte, las estrellas pesadas de NB6 son frenadas por el proceso de equipartición de la energía durante (principalmente) las primeras ~ 20 unidades de t_{NBU} y, luego de un periodo aproximadamente el doble de largo que el primero, comienza a cobrar fuerza el proceso de colapso gravotérmico, incrementando su energía cinética; por otra parte, las estrellas pesadas de SCF exhiben un comportamiento totalmente diferente, pues su energía cinética promedio disminuye durante toda la simulación. El contraste entre lo observado entre los grupos NB6 y SCF para las masas ligeras es similar. Cabe señalar que no se observa una evolución diferenciada de los distintos grupos de masa dentro del subsistema SCF, lo cual da cuenta de la inexistencia del proceso de equipartición de la energía en este subsistema⁸.

Con un enfoque específico en la medición del grado de equipartición de la energía cinética entre ambas componentes de masa, se ha graficado el parámetro ξ_m , definido en la sección 6.1, para los sistemas G, NB6 y SCF (figura 6.11). El sistema global *no* parece alcanzar la condición de equipartición ($\xi_m = 1$, ec. 3.23) más que muy marginalmente en $t_{NBU} \approx 50$ y claramente debido a una fluctuación estadística⁹ y no a un efecto real (físico). Sin embargo, el sistema NB6 *sí* parece alcanzar la equipartición de la energía cinética entre sus dos componentes de masa, tan pronto como en $t_{NBU} \approx 20$, pero empieza a gradualmente alejarse de este estado a partir de $t_{NBU} \approx 80$, presumiblemente debido al colapso gravotérmico del cúmulo. Por su parte, el sistema SCF muestra nuevamente un comportamiento contrastante al sistema NB6, permaneciendo lejos de la condición de equipartición de la energía a lo largo de toda la simulación (aunque con una ligera tendencia progresiva hacia ella), siendo entonces evidente que este subsistema es el causante de que globalmente no se alcance la equipartición.

Parece notable que el tiempo característico en el cual el sistema NB6 (que contiene al núcleo del cúmulo) se aproxima a la condición de equipartición es del orden de 20 NBU, lo cual se aproxima a su vez al valor teórico de 16,8 NBU (ver cuadro 6.1 en la página 73). Este tiempo característico se hace evidente también en el análisis por medio de los radios lagrangianos del sistema, como se verá en la siguiente subsección. El sólo hecho de que el núcleo del cúmulo alcance un estado aproximado de

⁸ Esto podría en parte justificarse, desde el punto de vista del método de selección de las partículas, aún cuando ambos subsistemas (NB6 y SCF) fueran manejados por el código de integración directa (colisional) NBODY6. Esto es, dado que el método de selección está diseñado para asignar las partículas del “halo” del cúmulo (alto momento angular) hacia el integrador SCF, es esta región menos densa del cúmulo la que pasa a formar parte de este subsistema; por lo tanto, simplemente considerando este factor de baja densidad, el proceso de equipartición de la energía es menos eficiente, pues el coeficiente de difusión de energía cinética es menor en esta zona [Spitzer 1987].

⁹ Se alcanza en un solo punto de la serie de datos, lo cual representa menos de 1 NBU de tiempo en dicho estado. Además la amplitud de las oscilaciones estadísticas debidas al movimiento de las partículas y dependientes del número de las mismas es del orden del pico observado.

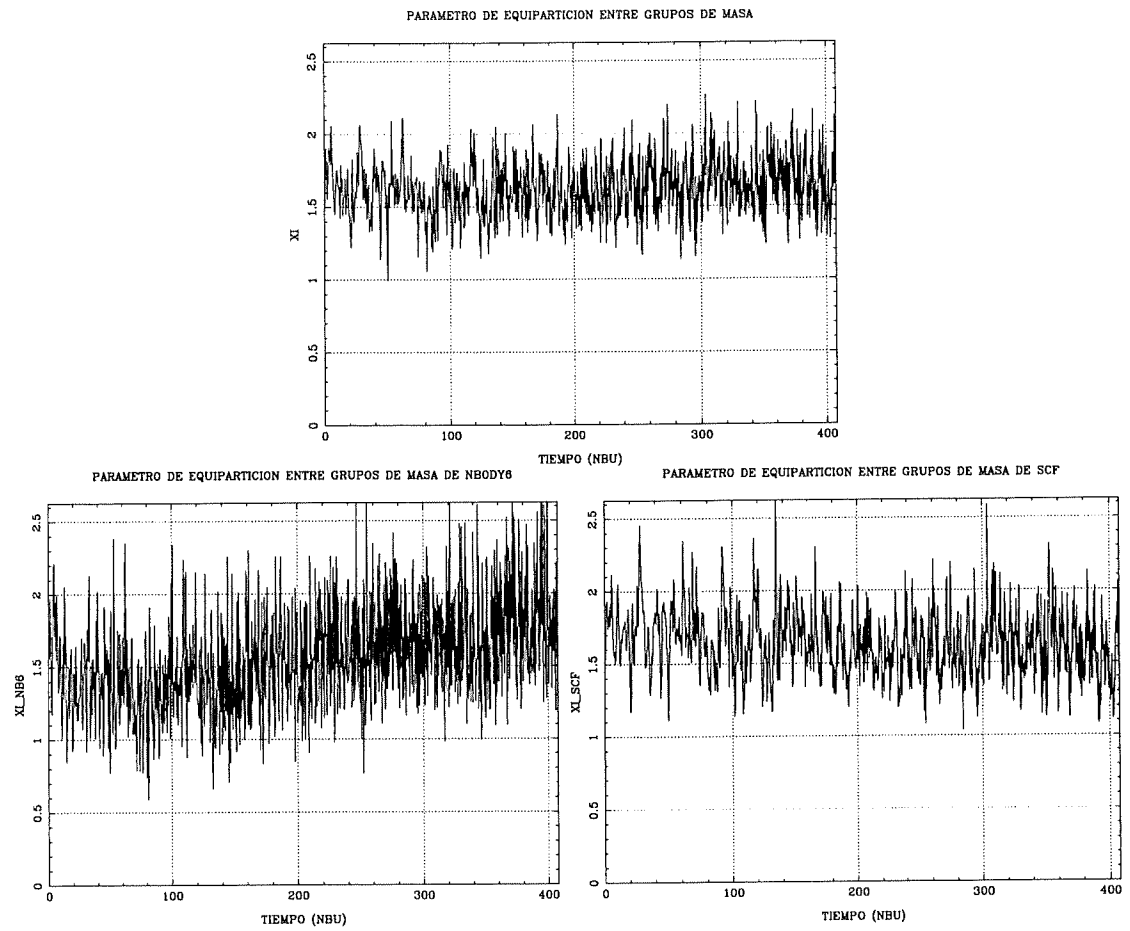


Figura 6.11. Parámetro de equipartición entre los grupos de masa, ξ_m , en función del tiempo para el experimento M2-1. *Superior*: sistema global; *Inferior izquierda*: subsistema de NBODY6; *inferior derecha*: subsistema de SCF.

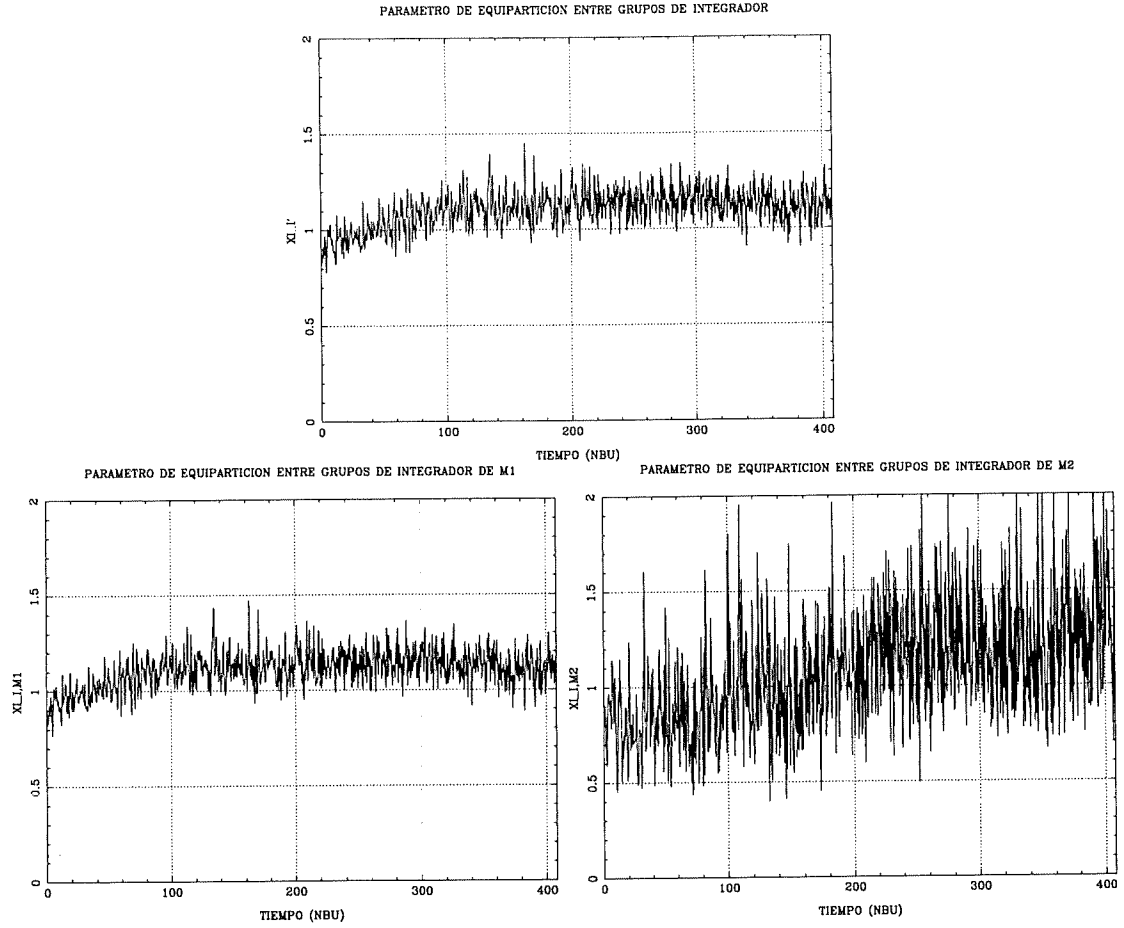


Figura 6.12. Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para el experimento M2-1. *Superior*: sistema global; *inferior izquierda*: subsistema de masa ligera; *inferior derecha*: subsistema de masa pesada.

equipartición de la energía cinética es notable por sí solo, ya que sólo el criterio de equipartición de Watters *et al.* considera que este sistema puede alcanzar tal estado (ver sección 3.4).

Por otro lado, con respecto al parámetro de equipartición de la energía cinética entre los grupos de integrador, ξ_i , definido en la sección 6.1, se observa inicialmente la ya mencionada tendencia de las estrellas de mayor velocidad cuadrática a ser designadas al integrador SCF, debido al criterio de selección de momento angular (figura 6.12). Posteriormente, la velocidad cuadrática media de las partículas en el subsistema NB6 parece incrementarse considerablemente respecto al subsistema SCF, especialmente entre las partículas pesadas. Esto último no se debe a que haya una evolución diferenciada de ambas componentes de masa en el subsistema SCF, sino más bien a la evolución diferenciada que hay en el subsistema NB6, como se muestra en la figura 6.10.

Si, por otra parte, consideramos al parámetro ξ_i como una medida aproximada de la diferencia (o contraste) de energía cinética promedio entre el *núcleo* y *halo* del cúmulo, como pretende separar el criterio de momento angular empleado por EuroStar, esperamos que la energía cinética promedio de las estrellas del núcleo se incremente mientras que la del halo disminuya, producto del colapso gravotérmico del cúmulo entero. Correspondientemente, tendríamos entonces que $v_{m,NB6}^2$ se incrementa mientras $v_{m,SCF}^2$ disminuye, por lo que ξ_i se incrementa también; esto es precisamente lo que cualitativamente observamos en las figuras 6.9 y 6.12. Como se discutió anteriormente, es en el reajuste de los potenciales suavizados de ambos subsistemas, NB6 y SCF, que existe el mecanismo de transferencia de energía entre ambos, posibilitando un colapso gravotérmico global «inducido» por el colapso gravotérmico del subsistema NB6.

6.3.1.2. Segregación de masa

El otro aspecto de la evolución dinámica de los cúmulos globulares por analizar con detalle es el de la segregación de masa que, si bien está ligado al proceso de equipartición de la energía —pues sin éste no sería posible la primera—, representa un aspecto distinto de la evolución global del cúmulo globular. Las herramientas básicas que nos permitirán analizar el efecto de la segregación de masa en los distintos subsistemas son sus radios lagrangianos, pues en ellos se observa de manera directa la evolución en el tiempo del perfil radial de la distribución de masa.

En la figura 6.13 podemos observar los radios lagrangianos para los subsistemas G, M1, M2, NB6 y SCF. Globalmente, las partes internas del cúmulo tienden a contraerse, mientras que las partes externas tienden a expandirse; sin embargo, el punto de inflexión de este comportamiento cualitativo¹⁰ no parece ser el radio medio de masa¹¹, sino algún radio lagrangiano cercano al 40 % de la masa total ($\sim 0,6$ NBU). El radio medio de masa aumenta aproximadamente 25 % de su valor original al terminar la simulación. Nuevamente podemos afirmar una concordancia cualitativa con el efecto del colapso gravotérmico.

Al comparar el sistema G con la evolución separada de sus dos componentes de masa, es evidente que el subsistema M1 domina la evolución global, muy por encima de la influencia del subsistema M2, como podemos ver en la parte superior de la figura 6.13. La distribución de masa del subsistema M1 presenta entonces una evolución casi idéntica al del sistema G, aunque con una tendencia levemente mayor a ocupar zonas externas del cúmulo; i.e., las zonas internas se contraen menos y las zonas externas se expanden más que el sistema global. El subsistema M2 resalta la escala de tiempo mencionada en la subsección anterior, $t_{NBU} \approx 20$, en la cual las zonas más internas tienden rápidamente a contraerse. Los radios lagrangianos más

¹⁰ Aquel radio lagrangiano que permanece aproximadamente constante a lo largo de toda la simulación (o al menos hasta previo el colapso del núcleo).

¹¹ El radio medio de masa, r_h , se corresponde con el radio lagrangiano del 50 % de la masa del sistema global.

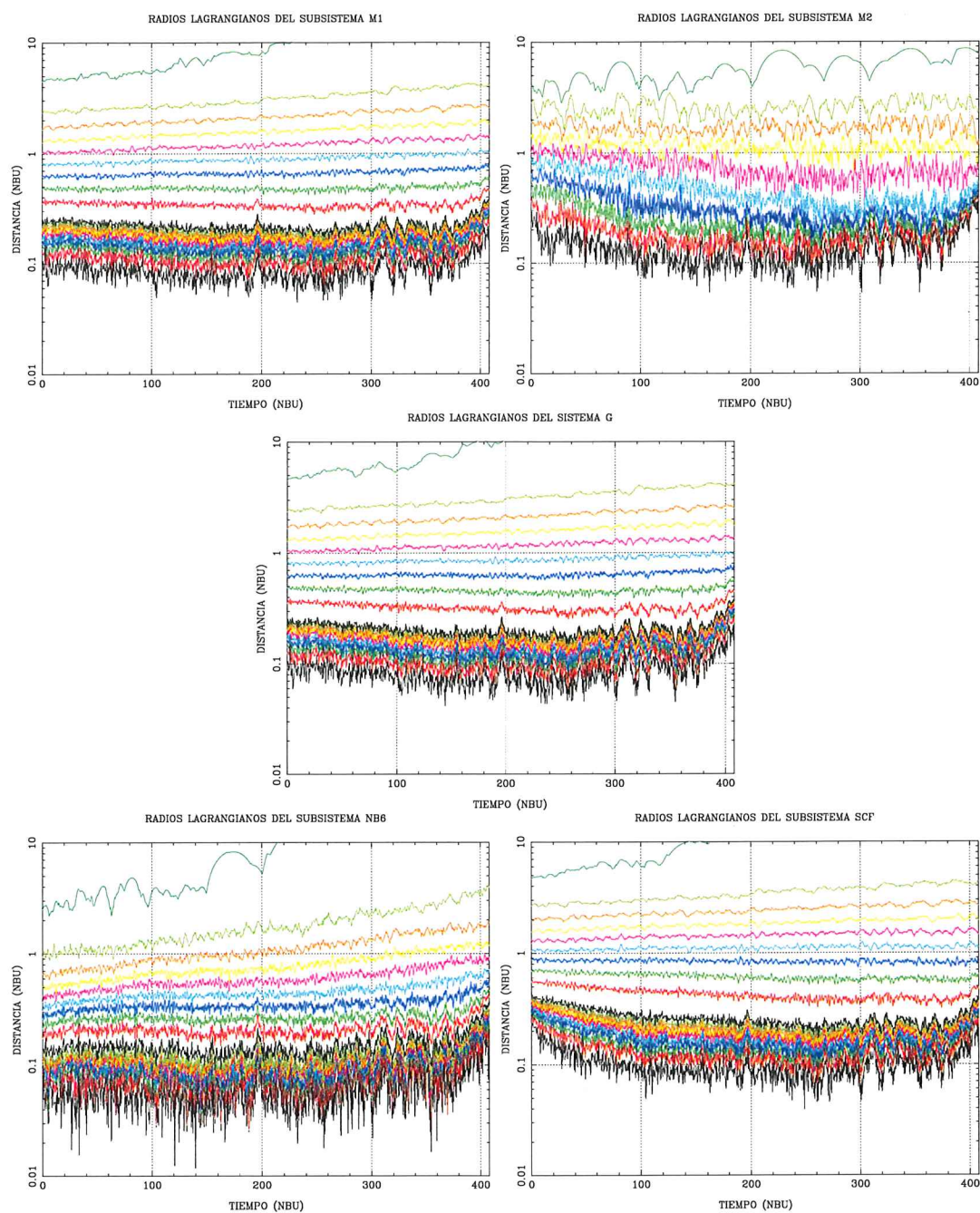


Figura 6.13. Radios lagrangianos en función del tiempo para los sistemas G, M1, M2, NB6 y SCF en el experimento M2-1. Se muestran, de menor a mayor, los radios lagrangianos correspondientes al 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90 y 100% de la masa del sistema respectivo. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera; *superior derecha:* subsistema de masa pesada; *centro:* sistema global; *inferior izquierda:* subsistema de NBODY6; *inferior derecha:* subsistema de SCF.

externos de este subsistema tienden también a expandirse pero, a diferencia de los sistemas G y M1, el punto de inflexión está cerca del radio lagrangiano del 80 % de la masa, en $r \approx 1,8$; lo cual denota su mucha mayor tendencia a contraerse.

Por otra parte, el sistema SCF domina la evolución global de la distribución de masa del sistema global, por encima de la influencia del subsistema NB6; esto se debe simplemente a su mayoría numérica (y, por tanto, de masa). Hay una notable contracción de las capas internas del subsistema SCF durante las primeras ~ 40 NBU, lo cual podemos suponer se debe a dos causas principales: (i) por un periodo no mayor a 4 tiempos de cruce¹² (~ 28 NBU como máximo), las partículas se redistribuyen en el cúmulo simplemente como consecuencia de sus órbitas pues, inicialmente el subsistema SCF prácticamente carece de estrellas en el núcleo dado del método de asignación de las partículas de EuroStar; (ii) el subsistema NB6 contrae sus capas internas como consecuencia de las partículas ligeras que empiezan a ser eyectadas del núcleo (por la equipartición de la energía; ver figura 6.14 y texto más adelante) lo cual modifica al potencial global del cúmulo haciendo más profundo el pozo de potencial, propiciando que los cascarones más internos del subsistema SCF se colapsen.

El sistema global parece entrar en un cambio cualitativo evolutivo al llegar al punto de mayor concentración alrededor de $t_{NBU} \sim 260$, cuando el núcleo del cúmulo parece dejar de contraerse y empezar, por el contrario a expandirse. Podemos asociar esta escala temporal con el tiempo de colapso de núcleo, t_{cc} , ya que esta escala se corresponde con este cambio cualitativo en la evolución dinámica del sistema. Este tiempo se acerca al computado teóricamente mostrado en el cuadro 6.1 en la página 73.

Si ahora dividimos a los subsistemas NB6 y SCF en sus dos respectivas componentes de masa y analizamos su evolución respectiva, podemos ver con mayor detalle la evolución del sistema y sus causas, igual que se hizo con el análisis de la velocidad cuadrática media. La *evolución diferenciada*¹³ de ambas componentes de masa en el subsistema NB6 es bastante clara, con las estrellas ligeras tendiendo a ocupar las regiones más externas del cúmulo y las más pesadas tendiendo a ocupar las más internas. Todos los cascarones lagrangianos del subsistema M1 tienden a expandirse, especialmente durante las primeras ~ 100 NBU; aún dentro de este periodo, las primeras ~ 20 NBU muestran una tasa de expansión notablemente superior, con-

¹² Inicialmente, el 100 % de las partículas del subsistema SCF se ubican por debajo de 5 NBU de radio y tienen una velocidad cuadrática media de aproximadamente 0,52, lo cual nos da un tiempo de cruce *máximo* de 6,9 NBU, si escogemos esta distancia como el tamaño total del sistema. El periodo de la órbita de una estrella promedio es aproximadamente 4 veces el tiempo dinámico que, a su vez, es aproximadamente igual al tiempo de cruce (ver subsección 3.3.1 del capítulo 3).

¹³ Llamaremos *evolución diferenciada* a un comportamiento evolutivo distinto de las componentes de masa o subsistemas (disjuntos) a que se refiera —bajo las herramientas de análisis con las cuales se estudien—; las cuales forman parte de un sistema global que las incluye. Inversamente, cuando el comportamiento de ambos subsistemas (componentes de masa) de un sistema global es casi el mismo (y, por tanto, aproximadamente igual al del sistema global) diremos que *no* existe una evolución diferenciada.

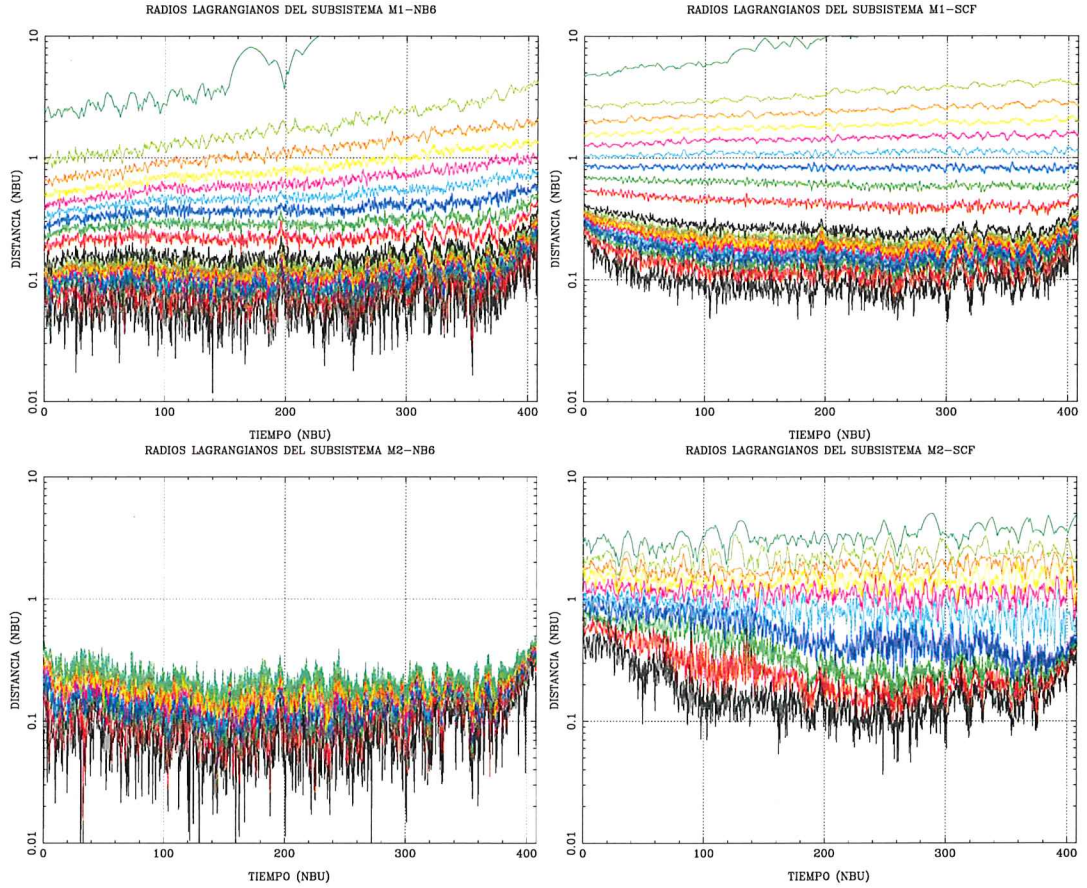


Figura 6.14. Radios lagrangianos en función del tiempo para los subsistemas M1-NB6, M1-SCF, M2-NB6 y M2-SCF para el experimento M2-1. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera de NBODY6; *superior derecha:* subsistema de masa ligera de SCF; *inferior izquierda:* subsistema de masa pesada de NBODY6; *inferior derecha:* subsistema de masa pesada de SCF.

cordando con el tiempo de equipartición. Sin embargo, los cascarones más internos (hasta r_h aproximadamente) parecen llegar a un estado estacionario pasadas las 100 NBU de tiempo y hasta antes del colapso del núcleo, mientras que los cascarones más externos nunca dejan de expandirse.

Correspondientemente, el subsistema M2 presenta su mayor tasa de contracción durante las primeras ~ 15 NBU, periodo tras el cual presenta una re-expansión considerable. Este «rebote» puede ser producido debido a que, al contraerse el subsistema M2 abruptamente por consecuencia de la equipartición de la energía, sus estrellas comienzan a interactuar preferentemente con las de su misma masa pesada, en vez

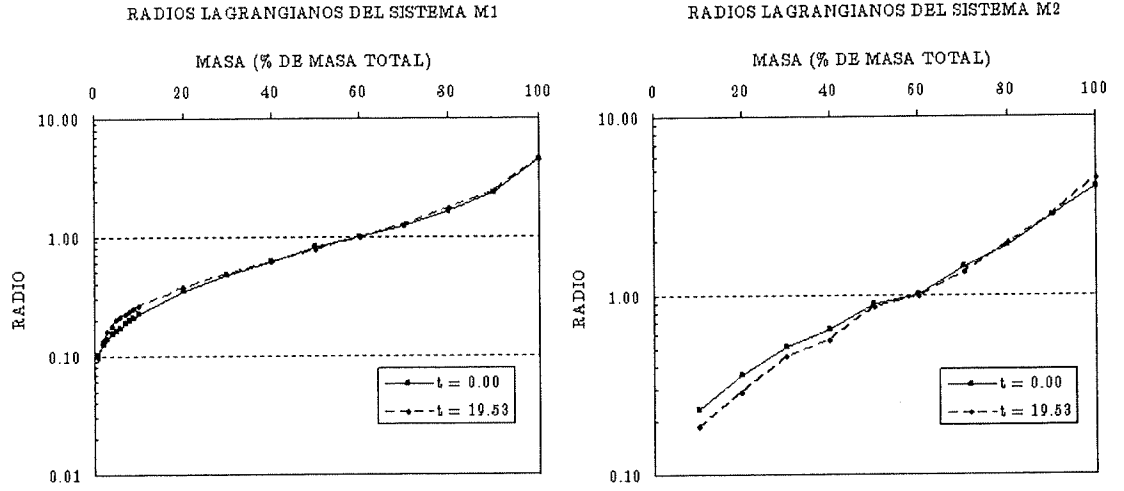


Figura 6.15. Comparación de radios lagrangianos en el tiempo inicial y a $\sim t_{eq}$ de los subsistemas M1 y M2 para el experimento M2-1. *Izquierda:* subsistema de masa ligera; *derecha:* subsistema de masa pesada.

de con las estrellas del subsistema M1, dando lugar a una *relajación violenta*¹⁴ en un periodo del del orden del tiempo de relajación medio de masa, t_{rh} . La re-expansión se frena alrededor de $t_{NBV} \approx 40$ para dar lugar al proceso de colapso gravotérmico del cúmulo entero. En la gráfica de este subsistema sólo se pueden mostrar los radios lagrangianos de 10, 20, ..., 90 y 100% de la masa debido al reducido número de partículas pertenecientes al mismo.

Las componentes de masa del subsistema SCF no parecen tener una evolución considerablemente diferente, más allá de las diferencias causadas por fluctuaciones estadísticas, particularmente en el mucho menos numeroso subsistema M2-SCF.

En la figura 6.15 se presenta la comparación de todos los radios lagrangianos analizados para los subsistemas M1 y M2, a dos diferentes tiempos: al tiempo inicial y a $\sim t_{eq}$. Se puede observar claramente como las partículas ligeras tienden a incrementar la magnitud de sus radios lagrangianos más internos, pasado este tiempo; en contraste con las partículas pesadas que tienden a reducir la magnitud de sus radios lagrangianos internos en el mismo periodo.

Una manera más clara de analizar el efecto de la segregación de masa se obtiene comparando la evolución temporal de las densidades centrales, ρ_0 , y del radio medio de masa, ρ_h , para ambas componentes de masa, globalmente y en los subsistemas diferenciados por integrador. Estas densidades promedio se han aproximado tomando aquellas del volumen del cascarón delimitado por las esferas de radio 0,10 y 0,17 y

¹⁴ En los cúmulos globulares, la *relajación violenta* es un proceso que se da durante su primera fase evolutiva y cuando todavía se encuentra fuera de equilibrio virial; conduce al estado de equilibrio dinámico cuasi-estático descrito por los modelos de la sección 3.1 [Binney y Tremaine 1987, describen este proceso de manera sencilla].

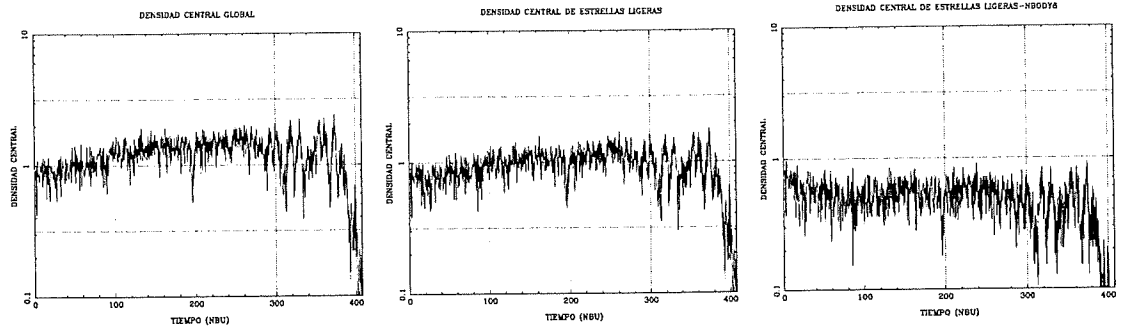


Figura 6.16. Densidad central en función del tiempo para de los sistemas G, M1 y M1-NB6 para el experimento M2-1. *Izquierda:* sistema global; *centro:* sistema de masa ligera; *derecha:* sistema de masa ligera de NBODY6.

del cascarón delimitado por las esferas de radio 1,29 y 2,15, respectivamente; ambos cascarones son concéntricos en el centro de masa del sistema global. En la figura 6.16 se muestra la densidad central de masa en los sistemas G, M1 y M1-NB6.

Resulta bastante claro que la densidad central global, $\rho_{0,G}$, *aumenta* con relativa constancia hasta llegar a un máximo en $t_{NBU} \sim 270$, tiempo en el cual ocurre un cambio cualitativo en la evolución de esta cantidad, comenzando a presentar oscilaciones de amplitud progresivamente mayor; hasta que ocurre un nuevo cambio cualitativo en $t_{NBU} \approx 375$, cuando $\rho_{0,G}$ cae abruptamente. La evolución de la densidad central de masa del subsistema M1, $\rho_{0,M1}$, presenta un comportamiento cualitativamente muy similar al del sistema global, con una tasa de crecimiento muy similar a la del sistema global, pero en todo tiempo presenta menor densidad que el primero. Sin embargo, si delimitamos el sistema bajo análisis aún más y observamos sólo las partículas de masa ligera integradas por NBODY6 (i.e. el subsistema M1-NB6), observamos un cambio sustancial en la manera como evoluciona la densidad central. Las partículas de este último subsistema, en vez de concentrarse en el núcleo, incrementando la densidad promedio del mismo, tienden a evacuarlo, haciendo descender su valor progresivamente durante toda la simulación, aunque particularmente durante las primeras 20 NBU de tiempo.

De lo anterior podemos decir al menos dos cosas: (i) La densidad de masa promedio central del sistema global aumenta a una tasa relativamente constante hasta llegar a la fase de colapso del núcleo central, principalmente a causa de las estrellas pesadas y de las estrellas ligeras de SCF que caen a órbitas más bajas y se acumulan en el centro; (ii) las estrellas ligeras manejadas por NBODY6 tienden a ser expulsadas del núcleo del sistema debido a que el proceso de equipartición de la energía con las estrellas pesadas del mismo integrador las hace alcanzar velocidades más altas.

Cuando las partículas ligeras de SCF caen hacia el núcleo del sistema, no existe un mecanismo eficiente que las impulse de nuevo hacia órbitas superiores, como sucede en el subsistema de NB6 a causa de la relajación de dos cuerpos y la equipartición de la energía cinética con las estrellas pesadas; por ende, aquellas partículas de este

tipo que caen a esta zona difícilmente la abandonan en el futuro y, lejos de esto, se ven cada vez más atrapadas en el potencial central a medida que la concentración del cúmulo aumenta por conducto de la redistribución de masa en el subsistema NB6. Cabe señalar que, al no haber distinción alguna entre partículas de M1 y M2 en el subsistema SCF —en términos del modelo físico subyacente a este integrador—, las partículas pesadas de éste siguen el mismo destino que las partículas ligeras.

La densidad de masa promedio en un cascarón cercano al radio medio de masa para los sistemas G, M1, M2, NB6 y SCF se muestra en la figura 6.17. Vemos que en las regiones medias del cúmulo, cercanas al radio medio de masa, la densidad del sistema global permanece aproximadamente constante, con un muy ligero incremento previo a $t_{NB6} \sim 150$ y un ligero decremento después de esto, llegando al valor original alrededor de $t_{NB6} \sim 300$ y disminuyendo poco más después de este tiempo. El mismo comportamiento cualitativo, un tanto amplificado, se observa en la componente de masa ligera, mientras que el subsistema de estrellas masivas claramente disminuye su densidad en esta zona espacial, alcanzando un mínimo alrededor de la mitad de su valor original en $t_{NB6} \approx 375$. Lo anterior, combinado con los resultados de la densidad central, corrobora la hipótesis de que las estrellas masivas tienden a *segregarse* hacia la región central del cúmulo, mientras que las estrellas ligeras tienden expandir sus órbitas como consecuencia de la energía cinética que obtienen por medio de encuentros de dos cuerpos con las estrellas pesadas. Esta tendencia es aún más clara cuando analizamos las componentes de masa de los subsistemas NB6 y SCF por separado (ver abajo).

Por su parte, el subsistema NB6 tiene una clara tendencia a aumentar su densidad de masa en esta franja durante todo lo largo de la simulación y hasta alcanzar un valor final de más del doble de su valor inicial. El sistema SCF, en contraste, disminuye su densidad una tasa pequeña pero, aproximadamente constante a lo largo de toda la duración del experimento hasta disminuir por cerca de un quinto de su valor inicial al final del mismo.

En la figura 6.18 podemos observar la evolución temporal de la densidad promedio cerca del radio medio de masa (del sistema global) para las componentes de masa de los subsistemas NB6 y SCF por separado. El incremento en la densidad de masa por conducto de las estrellas ligeras resulta más evidente en el subsistema M1-NB6, puesto que es en la parte de NB6 donde el proceso de relajación de dos cuerpos ocurre y, por tanto, las estrellas ligeras desplazan sus órbitas hacia esta región cercana a $r_{h,G}$. El reducido número de partículas pesadas en el subsistema de NB6 (17) y el hecho de que éstas se concentren en la región central del cúmulo simplemente como consecuencia de la distribución inicial de King¹⁵ hizo imposible graficar la aproximación de la densidad en la zona en cuestión para el subsistema M2-NB6, simplemente porque ésta se presentó nula. Lo anterior, consecuentemente nos afirma

¹⁵ Todas las partículas del subsistema M2-NB6 permanecen en órbitas por debajo del radio medio de masa del sistema global, $r_{h,G}$, durante toda la simulación.

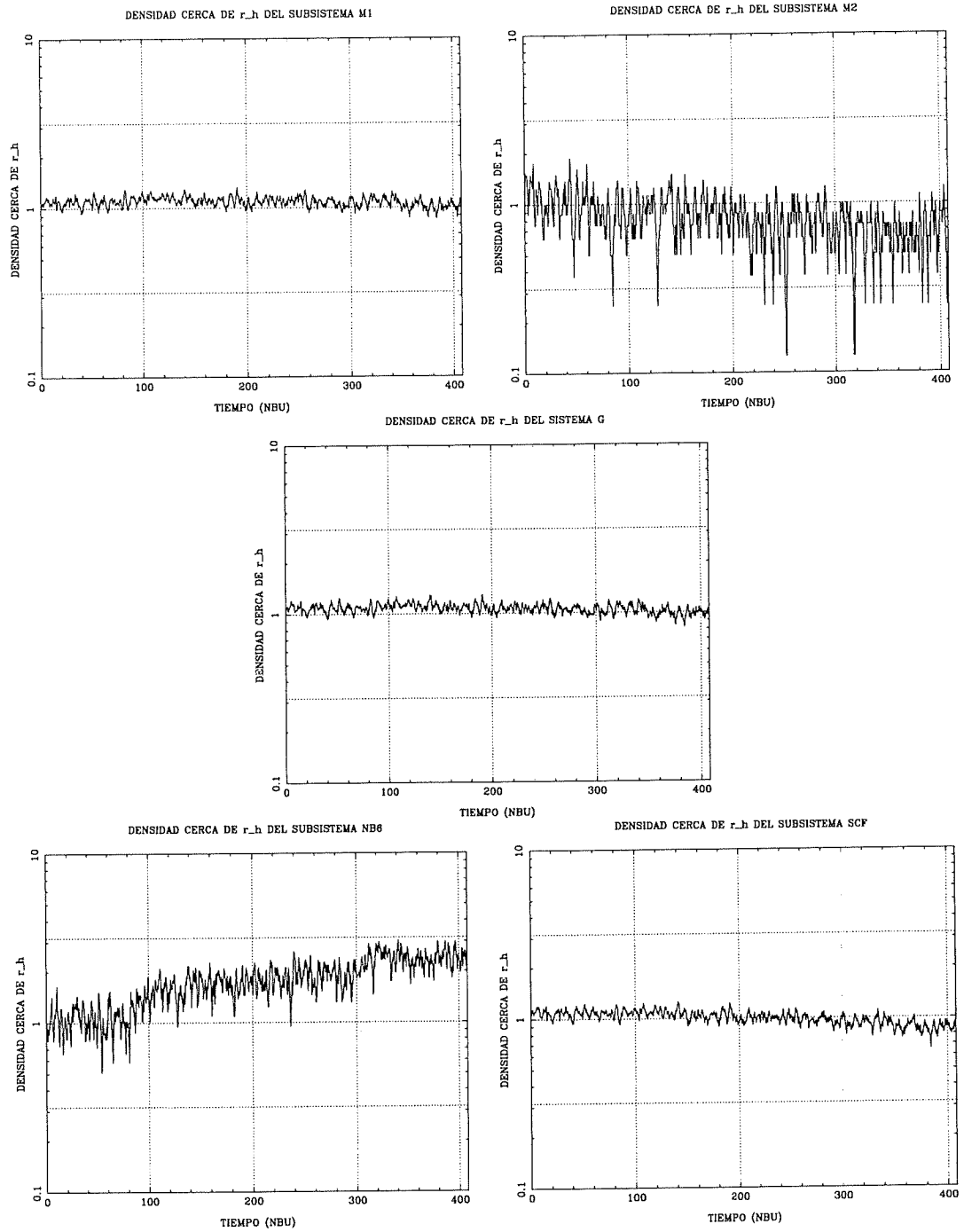


Figura 6.17. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6 y SCF para el experimento M2-1. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera; *superior derecha:* subsistema de masa pesada; *centro:* sistema global; *inferior izquierda:* subsistema de NBODY6; *inferior derecha:* subsistema de SCF.

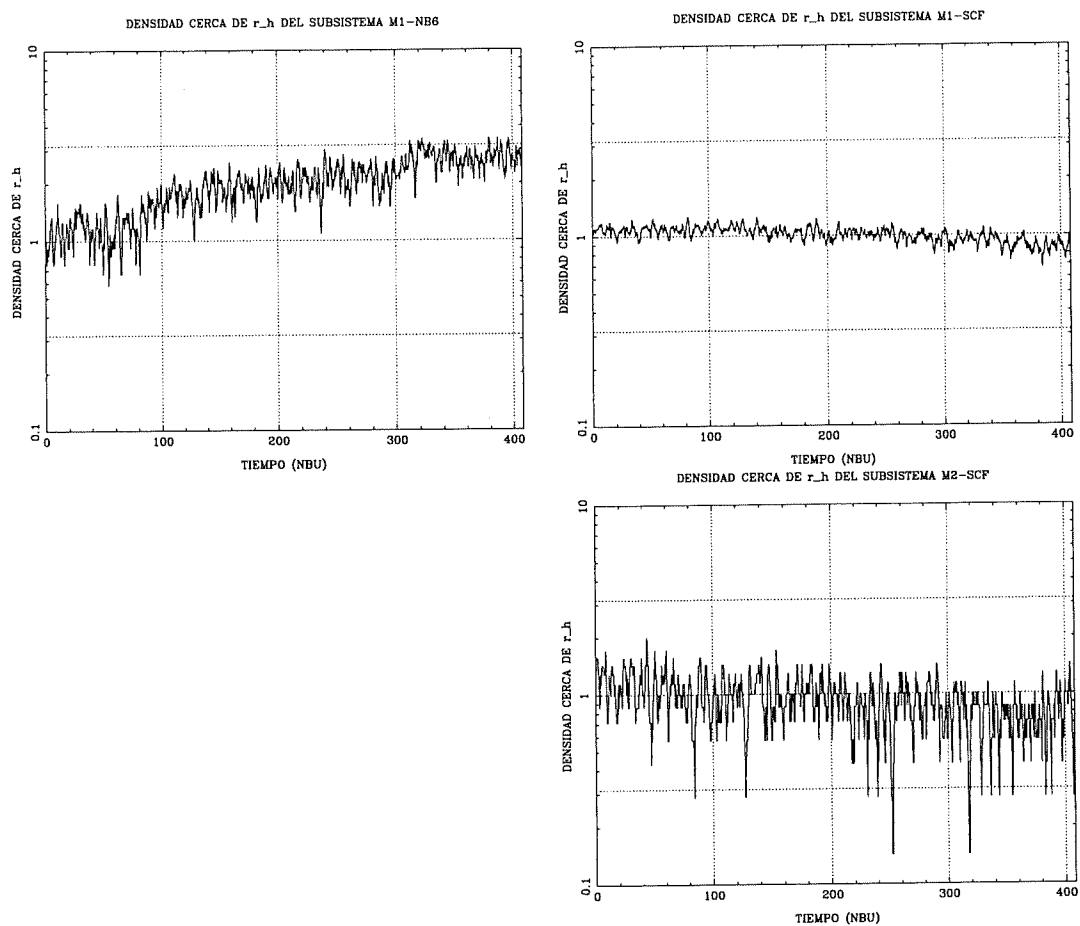


Figura 6.18. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF para el experimento M2-1. *Superior izquierda:* subsistema de masa ligera de NBODY6; *superior derecha:* subsistema de masa ligera de SCF; *inferior:* subsistema de masa pesada de SCF.

que la densidad mostrada en la gráfica superior derecha de la figura 6.17 corresponde enteramente a aquella producida por partículas pesadas del subsistema SCF, por lo que su evolución resulta ser idéntica a la de la gráfica inferior derecha de la figura 6.18.

6.3.2. Resultados del modelo con $\mu = 2,00$

El experimento realizado de dos componentes de masa con un cociente entre masas $\mu = 2,00$ corresponde al designado por M2-2 (ver cuadro 5.1 en la página 61), con un total de 1000 partículas. El sistema alcanzó un tiempo total de integración de $t_{NBU} \approx 193$ o aproximadamente $6,6 t_{rh}$. En la figura 6.19 podemos observar el error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-2. Se grafican las dos líneas resultantes de ambos cálculos de la energía potencial, como en la figura 6.8. Durante aproximadamente la mitad de la simulación, hasta $t_{NBU} \approx 100$, dE se mantiene por debajo de $\sim 10^{-3}$; a partir de este tiempo dE comienza a incrementarse hasta sobrepasar el límite de tolerancia de 10^{-2} a las 180 NBU, aproximadamente, por lo que pasado este tiempo los resultados cuantitativos son poco confiables. Como se comentó en la subsección anterior, el método de cálculo de la energía basado en el potencial suavizado del sistema global no toma en cuenta la interacción de dos cuerpos que puede generar interacciones fuertes como la formación de sistemas binarios, particularmente en las zonas más compactas del cúmulo, lo cual se refleja en la diferencia entre ambos cálculos. El incremento en el error de la energía inicial coincide con un aumento de la densidad central particularmente en el subsistema de masa pesada de NB6 (ver subsección 6.3.2.2).

6.3.2.1. Equipartición de la energía

En la figura 6.20 podemos observar la velocidad cuadrática media para todos los subsistemas del experimento M2-2. La figura coloca las distintas gráficas a manera de matriz, de manera que el renglón superior presenta información sólo del subsistema M1 y el renglón inferior sólo del subsistema M2; mientras que el renglón central es la composición de los otros dos, presentando información de ambas componentes de masa del sistema G. Por otra parte, la columna izquierda presenta información sólo del subsistema NB6 y la columna derecha sólo del subsistema SCF; mientras que la columna central presenta información de ambos subsistemas de integrador del sistema G, igualmente siendo la composición de las otras dos columnas. De esta manera, la gráfica central es la velocidad cuadrática media del sistema entero.

Igualmente en concordancia con la condición de equilibrio virial, $\overline{v_{m,G}^2}$ se mantiene alrededor de 0,5 durante toda la simulación, con claras oscilaciones con periodo del orden de t_{cr} , simplemente debido a las órbitas de las partículas. $\overline{v_{m,M1}^2}$, $\overline{v_{m,SCF}^2}$ y $\overline{v_{m,M1-SCF}^2}$ presentan una evolución temporal prácticamente indistinguible de aquella del sistema global; excepto en las primeras ~ 20 NBU, donde $\overline{v_{m,SCF}^2}$ y $\overline{v_{m,M1-SCF}^2}$ presentan la tendencia inicial a presentar un valor sólo ligeramente mayor al pro-

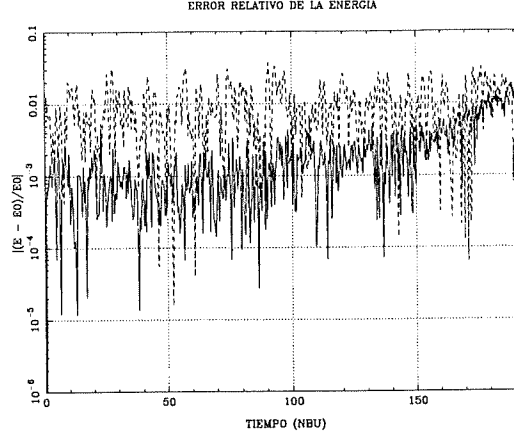


Figura 6.19. Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-2. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de *EuroStar*, calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).

medio global, pero tendiendo lentamente a disminuir durante toda la simulación. La razón de lo anterior radica en lo expuesto en la subsección 6.3.1.1. Por su parte, $v_{m,M1-NB6}^2$, $v_{m,NB6}^2$ y $v_{m,M2-NB6}^2$ presentan inicialmente un valor notoriamente inferior al promedio global, situándose alrededor de $\sim 0,45$, por la misma razón expuesta. Al comparar ambas componentes de masa del subsistema NB6 es evidente que las estrellas pesadas pierden energía cinética mientras que las ligeras la ganan, particularmente durante las primeras ~ 50 NBU de la simulación. Aún dentro de este periodo, $v_{m,M1-NB6}^2$ se incrementa a una mayor tasa durante las primeras ~ 15 NBU, para luego aumentar ligeramente durante las siguientes ~ 120 NBU cuando parece obtener su valor máximo (aproximadamente en $t_{NBU} \approx 135$). Asimismo, $v_{m,M2-NB6}^2$ parece disminuir notoriamente desde $\sim 0,45$ hasta $\sim 0,35$ durante este mismo periodo inicial de 15 NBU aproximadamente, aunque este efecto es más difícil de notar debido al mucho mayor ruido estadístico (el subsistema M2-NB6 incluye solamente a 14 partículas). Este tiempo inicial en el que parece haber una más rápida evolución en las energías cinéticas promedio de ambas componentes de masa concuerda notoriamente con el tiempo de equipartición teórico para este sistema, mostrado en la tabla 6.1, $t_{eq} = 14,6$.

Vemos entonces que la evolución de la velocidad cuadrática media de los distintos subsistemas es consistente con un escenario de equipartición de la energía cinética entre ambas componentes de masa del subsistema NB6, en un tiempo característico $t_{eq}^* \approx 15$ NBU, y una nula equipartición de la energía entre las componentes de masa del subsistema SCF.

En la figura 6.21 podemos observar el parámetro de equipartición entre las com-

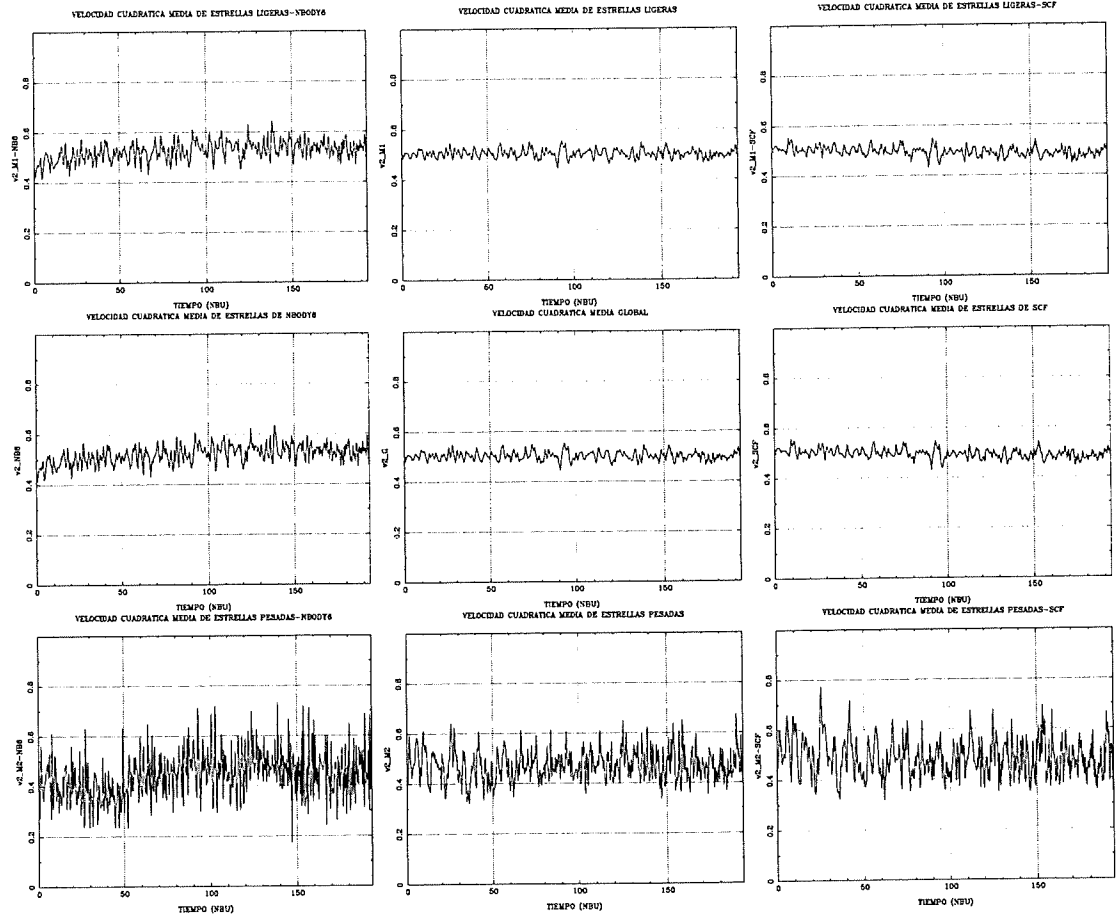


Figura 6.20. Velocidad cuadrática media en función del tiempo para todos los subsistemas del experimento M2-2. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior central:* subsistema M1; *superior derecha:* subsistema M1-SCF; *central izquierda:* subsistema NB6; *central:* sistema G; *central derecha:* subsistema SCF; *inferior izquierda:* subsistema M2-NB6; *inferior central:* subsistema M2; *inferior derecha:* subsistema M2-SCF.

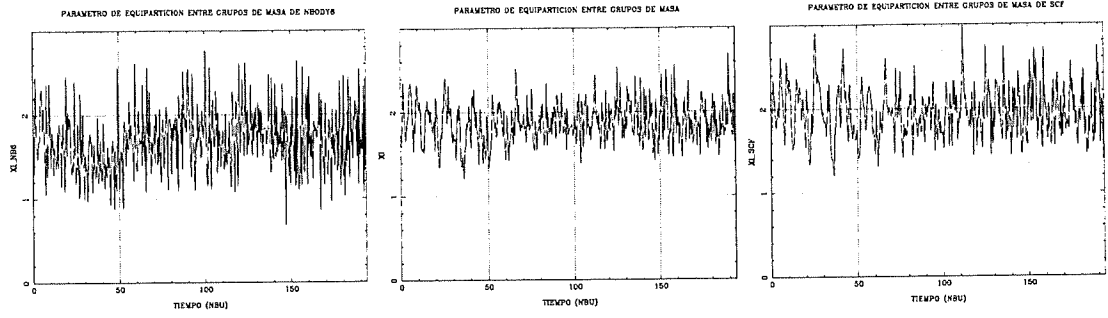


Figura 6.21. Parámetro de equipartición de la energía cinética entre las componentes de masa en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-2.

Izquierda: subsistema NB6; *centro:* sistema G; *derecha:* subsistema SCF.

ponentes de masa, ξ_m , para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-2. Nuevamente, al igual que en el experimento analizado anterior, el sistema *global* nunca alcanza un estado de equipartición de la energía cinética entre sus componentes de masa aunque, esta vez, comparado con el mismo experimento, se sitúa aun más lejos de hacerlo en todos los puntos de la evolución temporal del parámetro $\xi_{m,G}$. Es evidente, sin embargo, que la razón de esto radica en que el subsistema SCF nunca tiende hacia este estado de equipartición, permaneciendo siempre $\xi_{m,SCF} \approx 2$. Si observamos solamente el subsistema NB6, la evolución del parámetro $\xi_{m,NB6}$ es notoriamente diferente. En el periodo inicial de duración aproximada al tiempo de equipartición, $t_{eq}^* \approx 15$ NBU, se da la mayor y más rápida disminución de este parámetro, bajando desde $\sim 2,0$ hasta $\sim 1,4$; para luego proseguir a una disminución gradual más lenta que en el periodo citado, hasta llegar a su punto más bajo de $\sim 1,2$ en $t_{NBU} \approx 45$. Si bien se encuentra cerca de la condición de equipartición, ni siquiera el subsistema NB6 alcanza este estado, lo cual no es sorprendente desde el punto de vista de los criterios descritos en la sección 3.4, del capítulo 3, pues ninguno de éstos prevé un estado de equipartición para este experimento.

En la figura 6.22 podemos observar el parámetro de equipartición entre los grupos de integrador, ξ_i , para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-2. La evolución temporal de este parámetro es muy similar a la de los respectivos subsistemas del experimento M2-1; al menos en su parte inicial, pues este último experimento alcanzó un mayor tiempo de evolución en términos de, ambos, unidades de N-cuerpos y tiempos de relajación. En todas las gráficas se observa que las estrellas integradas por SCF tuvieron inicialmente una mayor energía cinética promedio respecto a las estrellas integradas por NBODY6.

Las partículas ligeras de NB6 comenzaron a ganar energía cinética respecto de aquellas de SCF, durante las primeras ~ 100 NBU, particularmente durante las primeras ~ 50 NBU; para luego disminuir muy lentamente en lo restante de la simulación. Esto sucede debido a que las estrellas del subsistema M1-NB6 adquieren energía cinética por conducto de la equipartición de la energía con las estrellas del

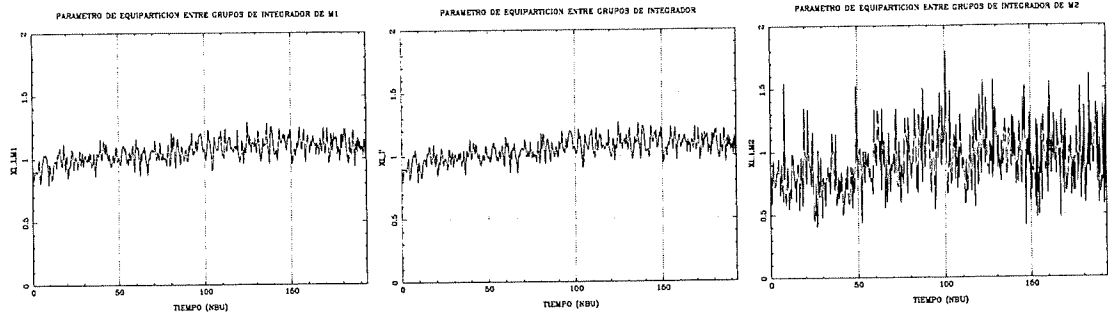


Figura 6.22. Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-2. *Izquierda:* subsistema M1; *centro:* sistema G; *derecha:* subsistema M2.

subsistema M2-NB6; mientras que las estrellas de M1-SCF pierden un poco de energía cinética en promedio en este mismo periodo, debido a la concentración del potencial gravitacional global y el consecuente reajuste de las partículas hacia el equilibrio virial.

Por su parte, las partículas pesadas de NB6 pierden energía cinética en promedio respecto de sus iguales de SCF durante las primeras ~ 45 NBU, particularmente durante las primeras ~ 15 NBU; para luego incrementarla pasado este tiempo, estabilizándose la diferencia entre ambos subsistemas a partir de $t_{NBU} \approx 80$.

6.3.2.2. Segregación de masa

En la figura 6.23 podemos observar los radios lagrangianos de todos los subsistemas para el experimento M2-2. El sistema global presenta la tendencia a contraer sus capas interiores y a expandir sus capas exteriores, siendo el punto de inflexión de este comportamiento cualitativo el radio lagrangiano del 50% de la masa, $r_{50,G}$, que corresponde al radio medio de masa del sistema global, $r_{h,G}$, y que permanece aproximadamente constante a lo largo de la duración entera de la simulación en un valor de $r_{50,G} \approx 0,8$. El radio más interno del sistema G, $r_{01,G}$, se sitúa inicialmente en $r_{01,G}(0) \approx 0,1$ y decae hasta $r_{01,G}(190) \approx 0,07$ a una tasa aproximadamente constante que no parece cambiar demasiado aún hasta el final del experimento, lo cual sugiere que el sistema no alcanzó el estado de colapso del núcleo central durante el tiempo de integración realizado. Lo anterior concuerda con lo esperado teóricamente, pues según el resultado mostrado en el cuadro 6.1 en la página 73, el tiempo de colapso del núcleo esperado es de $t_{cc} \sim 240$ NBU. Durante las primeras ~ 15 NBU se observa una contracción de las capas internas del cúmulo relativamente más rápida que en el resto del experimento, seguida de una expansión casi igual de rápida.

Analizando ambas componentes de masa del sistema global, la contracción inicial de las capas internas observada en el sistema G ocurre tanto en el subsistema M1 como en el subsistema M2, pero en este último se prolonga hasta $t_{NBU} \approx 40$, mientras que en el primero la tendencia se revierte presentando una expansión de las capas

internas a partir de $t_{NBU} \approx 15$ y hasta aproximadamente el mismo tiempo en que el subsistema M2 se contrae. El tiempo observado de ~ 15 NBU para la contracción inicial del subsistema M2 se aproxima al tiempo de equipartición calculado para este experimento, $t_{eq} = 14,6$; pero no es así para el caso del subsistema M1, donde las capas internas del subsistema se *contraen* durante este mismo periodo, en vez de *expandirse*, como era esperado. La diferencia cualitativa entre ambos subsistemas no se reduce sólo al tiempo en que ambos comportamientos descritos actúan, también incluye la extensión espacial de los mismos sobre sus respectivos subsistemas. Es decir, si bien las capas *muy* internas del subsistema M1 parecen contraerse inicialmente, tan cerca como a partir del radio lagrangiano $r_{05,M1}$, el subsistema M1 *sí* se expande casi monotónicamente hasta por lo menos $t_{NBU} \approx 50$; y a partir de $r_{30,M1}$ el subsistema se expande durante toda la simulación. Por su parte el subsistema M2 contrae todas sus capas casi monotónicamente durante toda la simulación a partir del radio lagrangiano $r_{50,M2}$ y sólo los cascarones más internos a este radio presentan una ligera reexpansión entre las ~ 50 y ~ 110 NBU para posteriormente contraerse de nuevo.

Separando el análisis un poco más, en cuanto a los subsistemas diferenciados por su integrador, se observa que aun en el subsistema colisional M1-NB6, los cascarones interiores a $r_{05,M1-NB6}$ se contraen durante los primeros ~ 15 NBU pero solamente para expandirse en aun mayor medida justo después y hasta $t_{NBU} \approx 55$. Aproximadamente a partir de $r_{10,M1-NB6}$ este subsistema se expande casi monotónicamente durante toda la simulación. Por otro lado, todas las partículas del subsistema M2-NB6 contraen notablemente sus órbitas durante principalmente las primeras ~ 15 NBU, lo cual nuevamente sustenta el argumento de la equipartición de la energía entre ambos grupos de masa que actúa durante este periodo principalmente; después se presenta una etapa de expansión de todos los cascarones lagrangianos de este subsistema mucho más lenta que la contracción inicial hasta aproximadamente $t_{NBU} \approx 90$. Posteriormente el subsistema M2-NB6 se contrae durante el resto de la simulación, salvo una corta expansión-contracción relativamente violenta en $t_{NBU} \approx 120$ que, dado el reducido número de partículas del subsistema, bien puede ser causada por una o dos partículas que son expulsadas del núcleo debido a una interacción fuerte para luego volver a caer en él; el tiempo en que transcurre este evento concuerda con el orden del tiempo de cruce del sistema. Al final de la simulación el subsistema M2 alcanza su mayor grado de concentración.

Ambas componentes de masa del subsistema SCF evolucionan con aparente indistinción entre ambos tipos de partículas. Las diferencias cualitativas observadas en la evolución temporal de los radios lagrangianos de ambos subsistemas M1-SCF y M2-SCF pueden ser explicadas con base al relativamente reducido número de partículas del último (27 elementos), y su consecuentemente mayor ruido estadístico. El subsistema SCF presenta una contracción de sus cascarones internos y una expansión de sus cascarones externos. El punto de inflexión de este comportamiento cualitativo se presenta aproximadamente en el radio lagrangiano $r_{50,SCF}$, el cual permanece cerca

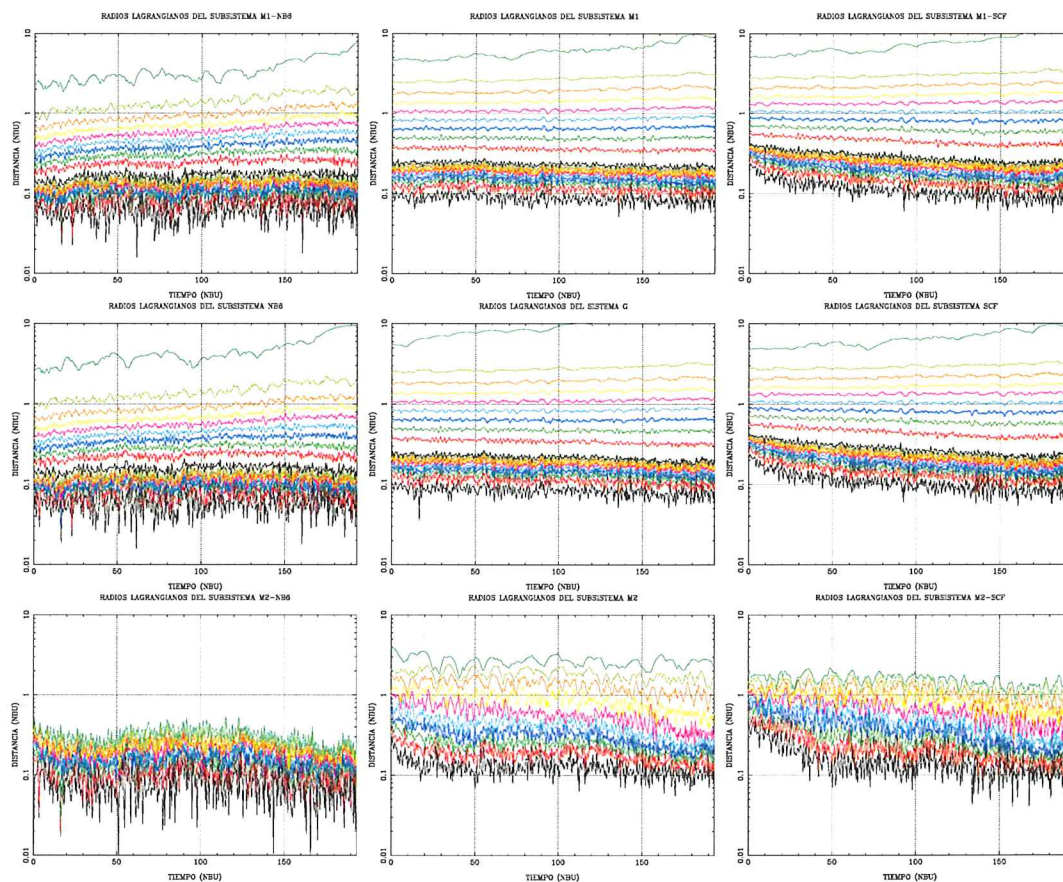


Figura 6.23. Radios lagrangianos en función del tiempo para todos los subsistemas para el experimento M2-2. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior central:* subsistema M1; *superior derecha:* subsistema M1-SCF; *central izquierda:* subsistema NB6; *central:* sistema G; *central derecha:* subsistema SCF; *inferior izquierda:* subsistema M2-NB6; *inferior central:* subsistema M2; *inferior derecha:* subsistema M2-SCF.

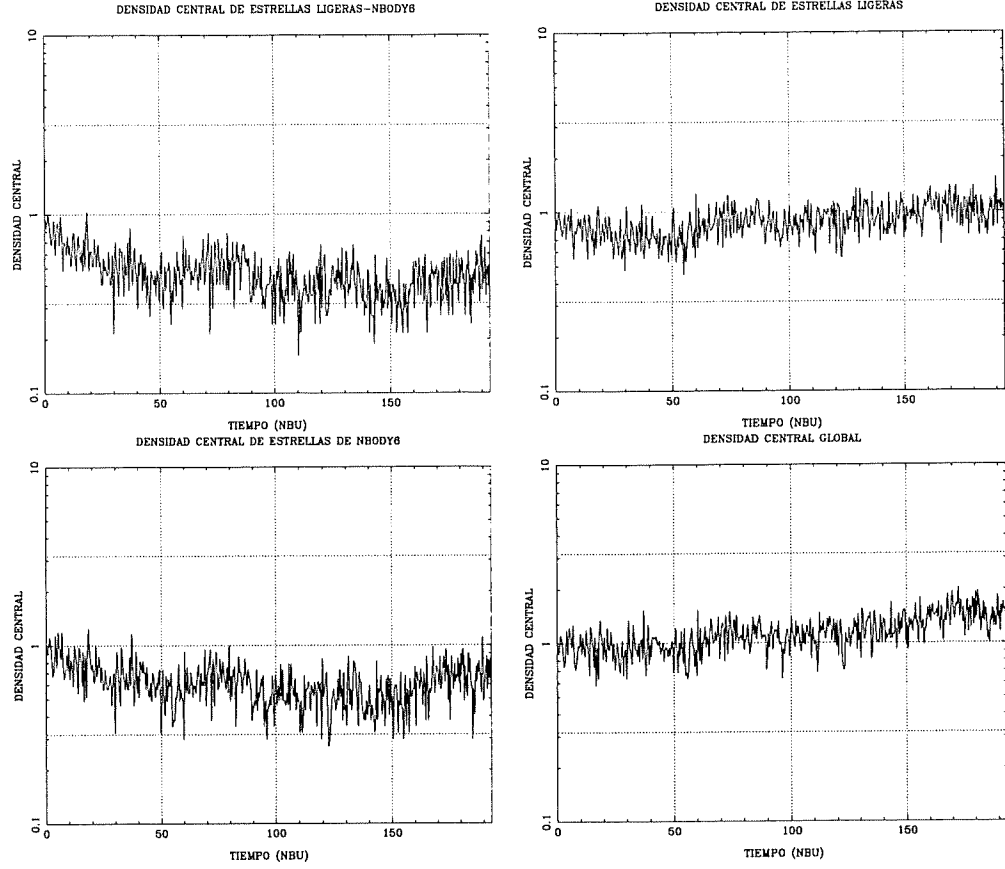


Figura 6.24. Densidad central en función del tiempo para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-2. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior derecha:* subsistema M1; *inferior izquierda:* subsistema NB6; *inferior derecha:* sistema G.

de 1,0 NBU de radio durante toda la simulación. La contracción inicial de las capas internas durante las primeras ~ 30 NBU puede ser explicada igualmente que en el experimento discutido anterior (subsección 6.3.1.2).

Ahora, con respecto al análisis de la densidad promedio en los cascarones internos de los subsistemas analizados, en la figura 6.24 podemos observar la densidad central para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-2. La densidad central global, $\rho_{0,G}$, se incrementa casi durante toda la simulación, con ligeras fluctuaciones; sin embargo, la densidad central del subsistema NB6, $\rho_{0,NB6}$, disminuye a su vez casi durante toda la simulación, exceptuando las últimas ~ 50 NBU cuando esta última parece incrementarse notablemente. Esto nos lleva a concluir que las partículas que incrementan la densidad central son principalmente aquellas pertenecientes al subsistema SCF.

Por otra parte, la densidad central del sistema de masa ligera, $\rho_{0,SCF}$, disminuye casi un 30 % durante las primeras ~ 50 NBU para luego incrementarse, aunque con

ciertas oscilaciones, durante el resto de la simulación; lo cual, comparando con la evolución global de la densidad central, hace suponer que la componente de masa pesada contribuye notablemente al incremento de esta última, particularmente durante el período inicial previo a $t_{NBU} \approx 50$. Además, si bien la densidad de estrellas ligeras parece incrementarse en el núcleo durante la mayor parte de la simulación, al comparar con la evolución de la densidad central del subsistema M1-NB6, $\rho_{0,M1-NB6}$, parece evidente que se trata casi en su totalidad de estrellas del subsistema SCF, puesto que aquellas pertenecientes al subsistema NB6 parecen abandonar notablemente las regiones internas durante la mayor parte de la duración del experimento, llegando a alcanzar cerca de un 30 % de su densidad original (en $t_{NBU} \approx 140$).

Por último, al comparar la evolución de la densidad central del subsistema NB6, $\rho_{0,NB6}$, con la respectiva evolución de su componente de masa ligera, $\rho_{0,M1-NB6}$, parece evidente que la componente pesada de este subsistema contribuye notablemente a incrementar la densidad central del mismo, pues durante toda la simulación el subsistema NB6 mantiene una menor pérdida de densidad central respecto a su valor inicial que el mismo valor del subsistema M1-NB6, lo cual sólo puede provenir de la componente de masa pesada que se acumula en el centro del sistema.

La otra densidad que resulta interesante observar, por comparación con aquella del centro del sistema, es sin duda aquella cercana al radio medio de masa. En la figura 6.25 podemos observar la densidad cercana al radio medio de masa para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-2. La densidad global en esta zona parece permanecer constante durante toda la simulación, al igual que en el subsistema SCF (ambas componentes), con una muy ligera disminución en este último. En contraste con esto, las partículas ligeras de NB6 incrementan su densidad en esta zona a más del doble de su densidad original, al finalizar la simulación; en todo tiempo por encima del incremento de la densidad cerca de r_h del subsistema NB6 en general, lo cual sólo puede denotar un decremento de la densidad promedio de partículas de masa pesada en este cascarón.

En base a estos resultados analizados y los anteriores para este experimento, podemos afirmar que la evolución de la distribución de masa de este experimento es, en general, consistente con un escenario de segregación de masa, particularmente durante las fases iniciales de la evolución del mismo en las primeras ~ 20 NBU, donde las estrellas ligeras de NB6 son expulsadas del centro del sistema y las estrellas pesadas de NB6 caen hacia el mismo. Al mismo tiempo, las estrellas de SCF más cercanas al núcleo, tanto pesadas como ligeras, caen también hacia el centro del sistema (hacia un pozo de potencial) sin ningún mecanismo posterior para abandonar esta región, mientras que las capas externas del subsistema SCF tienden a expandirse.

6.3.3. Resultados del modelo con $\mu = 2,50$

En este caso, el experimento realizado de dos componentes de masa con un cociente $\mu = 2,50$ analizado en este trabajo corresponde al designado por M2-3 (ver

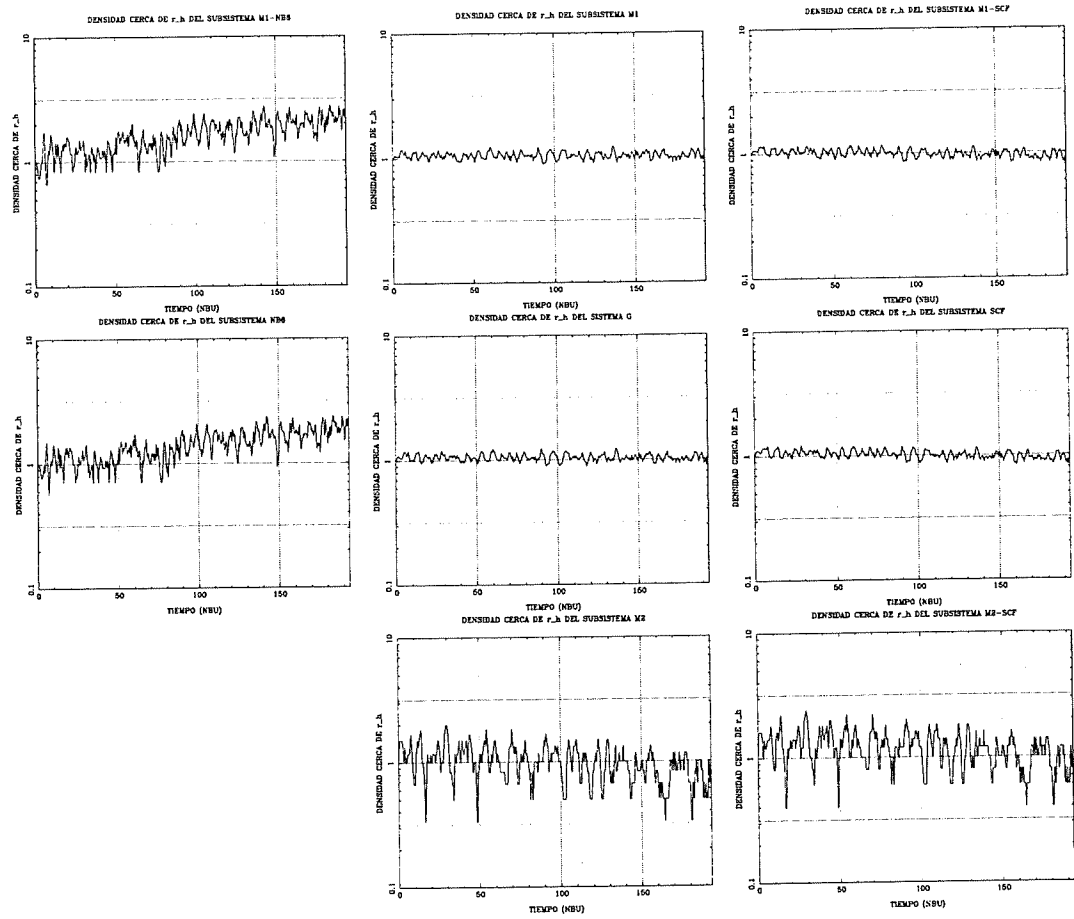


Figura 6.25. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-2.

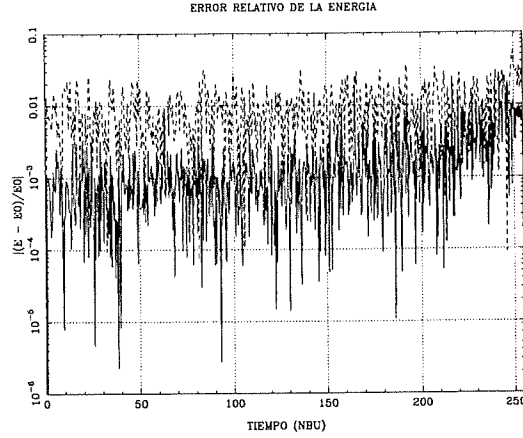


Figura 6.26. Error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-3. La línea continua utiliza para su cálculo la energía potencial proveniente del cálculo directo de los potenciales puntuales de cada partícula, mientras que la línea cortada emplea la energía potencial proveniente de *EuroStar*, calculada a partir del potencial suavizado aproximado sobre todo el cúmulo (SCF).

cuadro 5.1 en la página 61) consistente de un modelo con igualmente 1000 partículas divididas en las características mostradas en el mismo cuadro. Este experimento alcanzó un total de 254 NBU de tiempo de integración total, equivalentes a cerca de $8,6 t_{rh}$ en unidades del mismo sistema. En la figura 6.26 podemos observar el error relativo de la energía total del sistema global respecto a la energía inicial del mismo en función del tiempo para el experimento M2-3.

Durante las primeras ~ 150 NBU, el error relativo de la energía respecto de la energía inicial del sistema entero, dE , se mantiene por debajo de 10^{-3} , incrementándose a partir de este tiempo, hasta alcanzar 2×10^{-3} en $t_{NBU} \approx 210$. A partir de este último tiempo, dE , se incrementa notablemente con gran rapidez hasta alcanzar casi 9×10^{-3} al término de la simulación. El tiempo en que comienza rápidamente a crecer el valor de dE en la parte final de la simulación coincide con el tiempo en que la densidad central alcanza su máximo global (colapso del núcleo central; ver subsección 6.3.3.2 en la página 103).

6.3.3.1. Equipartición de la energía

En un primer enfoque hacia el análisis del proceso de equipartición de la energía cinética en el cúmulo globular, analizaremos la evolución temporal de la velocidad cuadrática media (o energía cinética por unidad de masa promedio) de los distintos subsistemas del modelo. En la figura 6.27 podemos observar dicha cantidad para todos los subsistemas del experimento M2-3.

Nuevamente $\overline{v_{m,G}^2}$ permanece casi constante en el valor 0,5 durante toda la simulación, al igual que $\overline{v_{m,M1}^2}$, $\overline{v_{m,SCF}^2}$ y $\overline{v_{m,M1-SCF}^2}$; si bien la parte de SCF presenta una

muy ligera reducción de su energía cinética promedio durante toda la simulación. De $v_{m,M2}^2$ primeramente debemos decir que se basa en un subsistema que sólo tiene 32 elementos en total, por lo que presenta un gran ruido estadístico. Dicho esto, presenta una tendencia a disminuir durante las primeras ~ 90 NBU, de $\sim 0,50$ a $\sim 0,45$, y a aumentar después de este tiempo aun hasta el final de la simulación, alcanzando de nuevo un valor cercano a $0,50$. Este comportamiento sigue de cerca aquél de su subsistema de SCF, sólo que en este último caso la incertidumbre estadística es aún mayor. Lo que es más, sabemos de antemano que el integrador SCF no cuenta con mecanismos que diferencien entre una partícula de un grupo de masa u otro, lo cual nos dice que la evolución de este parámetro de ambas componentes de masa de SCF debe ser muy similar y cualitativamente igual; por tanto, fuera del evidente ruido, $v_{m,M2-SCF}^2$ debe ser en realidad muy similar a $v_{m,SCF}^2$.

Como en los casos anteriores, la región colisional de NBODY6, que toma en cuenta las interacciones de dos cuerpos entre las partículas, presenta la mayor evolución temporal diferenciada entre ambas componentes de masa. Primeramente se debe resaltar que inicialmente todas las partículas del subsistema NB6 tienen una energía cinética por unidad de masa promedio inferior a la del promedio global o, lo equivalentemente, inferior a la del subsistema de SCF. A saber, $v_{m,NB6}^2(0) \approx 0,45$; valor inicial que, dada la ausencia de razones para argumentar al contrario, podemos asumir que se refleja igualmente en la velocidad cuadrática media de ambas componentes de masa del subsistema colisional. La componente de masa ligera de NB6 domina consistentemente la evolución de todo el subsistema, pues 262 de las 271 partículas del mismo pertenecen a dicha componente; por lo cual, para todo fin práctico, $v_{m,NB6}^2(t) \cong v_{m,M1-NB6}^2(t)$ para todo tiempo t . Dado lo anterior, en el marco de un proceso de equipartición de la energía cinética entre ambas componentes de masa, resulta comprensible por qué $v_{m,NB6}^2$ aumenta de $\sim 0,45$ a $\sim 0,50$ en las primeras ~ 20 NBU, siendo ésta su más rápida evolución. La energía cinética por unidad de masa promedio de las 9 partículas que conforman la componente de masa pesada de NB6, $v_{m,M2-NB6}^2$, más allá del evidentemente grande ruido estadístico, sí parece tener relativamente claras tendencias en su evolución temporal. Durante las primeras ~ 20 NBU se da la más clara y abrupta disminución de este parámetro, de $\sim 0,45$ hasta por lo menos $\sim 0,30$ o aun un poco más debajo, para posteriormente incrementarse durante el resto de la simulación, aunque con claras y grandes oscilaciones. Tal vez una aparente excepción a este comportamiento al final de la simulación para este último subsistema ocurre de $t_{NBU} \approx 235$ en adelante (las últimas 20 NBU), cuando parece ocurrir otra disminución abrupta de la cantidad en cuestión.

Para analizar más claramente el grado de equipartición de la energía entre las dos componentes de masa del sistema, observamos el parámetro ξ_m , como en los experimentos anteriores. En la figura 6.28 podemos observar el parámetro de equipartición entre las componentes de masa para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-3. De los experimentos analizados en este trabajo, este caso es en el cual se observa el menor acercamiento de este parámetro hacia la condición de equi-

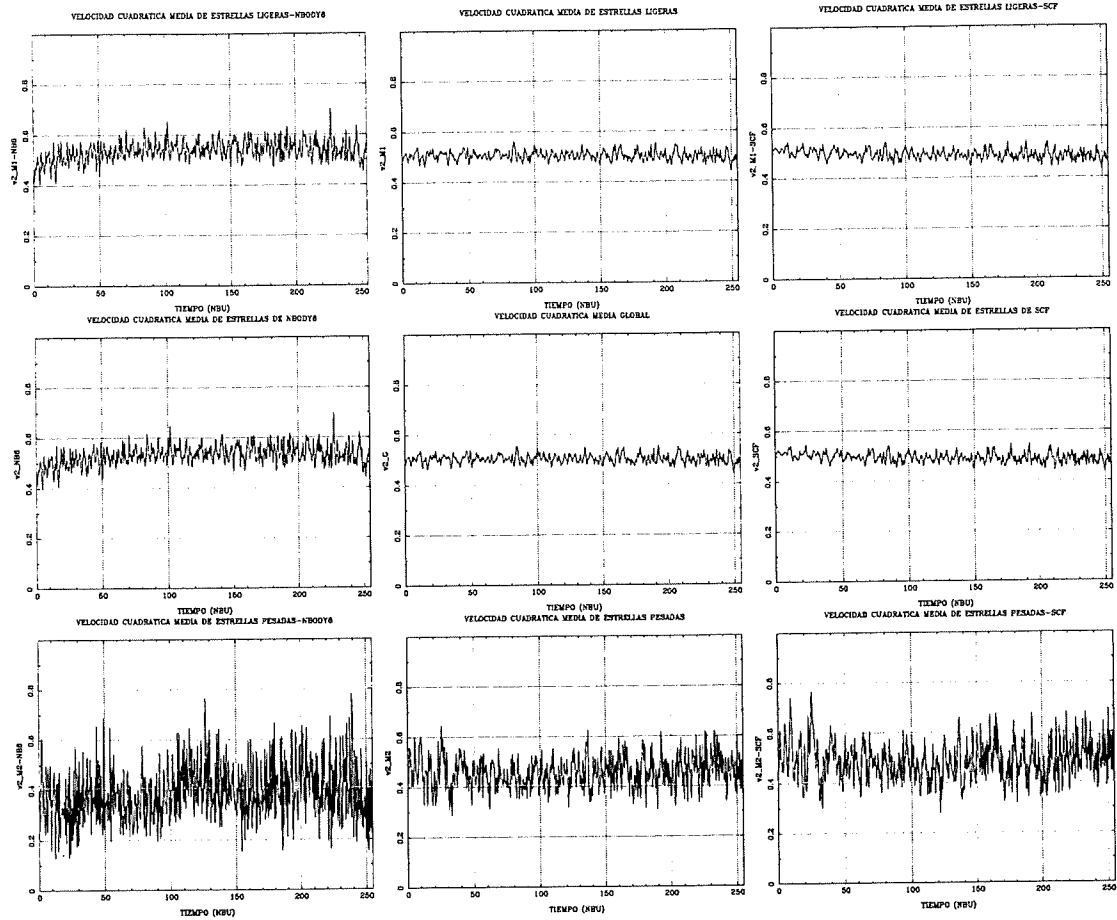


Figura 6.27. Velocidad cuadrática media en función del tiempo para todos los subsistemas del experimento M2-3. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior central:* subsistema M1; *superior derecha:* subsistema M1-SCF; *central izquierda:* subsistema NB6; *central:* sistema G; *central derecha:* subsistema SCF; *inferior izquierda:* subsistema M2-NB6; *inferior central:* subsistema M2; *inferior derecha:* subsistema M2-SCF.

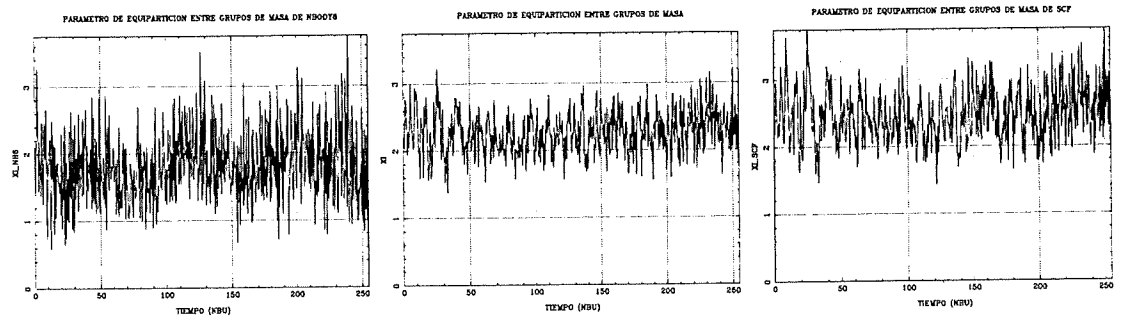


Figura 6.28. Parámetro de equipartición de la energía cinética entre las componentes de masa en función del tiempo para los subsistemas G, NB6 y SCF del experimento M2-3. *Izquierda:* subsistema NB6; *centro:* sistema global; *derecha:* subsistema SCF.

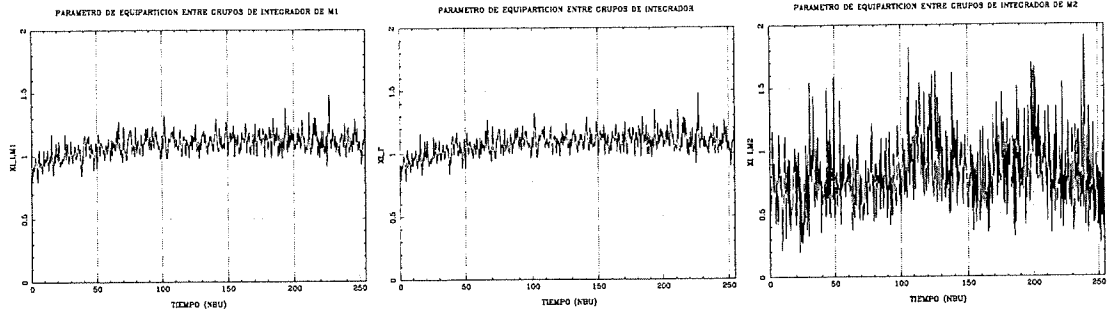


Figura 6.29. Parámetro de equipartición entre los grupos de integrador en función del tiempo para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-3. *Izquierda:* subsistema M1; *centro:* sistema global; *derecha:* subsistema M2.

partición $\xi_m = 1$, en los tres sistemas en que se calcula. Es evidente que globalmente no se alcanza este estado y mucho menos en el subsistema SCF. El mayor grado de equipartición de la energía en ambos subsistemas se da con ξ_m aún por encima de 2,0 en $t_{NBU} \approx 15$, marginalmente consistente con el tiempo de equipartición teórico calculado para las condiciones de este modelo, $t_{eq} = 8,6$ (ver cuadro 6.1 en la página 73). En el caso de $\xi_{m,NB6}$ resulta mucho más evidente la tendencia rápida inicial hacia la equipartición, cayendo de $\xi_{m,NB6}(0) \approx 2,5$ hasta $\xi_{m,NB6}(15) \approx 1,4$. Aun dentro del citado periodo, al tiempo sugerido por el cálculo teórico de la escala temporal para la equipartición de la energía, $t_{NBU} \sim 10$, $\xi_{m,NB6}$ ya había descendido hasta llegar a $\sim 1,6$, lo cual da cuenta de la importancia de esta escala de tiempo.

Siguiendo la línea del análisis realizado en el resto de los experimentos, analicemos ahora la diferencia de energía cinética promedio entre estrellas de la misma masa pero manejadas por distinto integrador, mediante el parámetro que se ha designado como ξ_i que, a su vez, nos da una idea de la evolución diferenciada entre el núcleo y halo del sistema, que podemos asociar con el proceso de colapso gravotérmico. En la figura 6.29 podemos observar el parámetro de equipartición entre los grupos de integrador para los subsistemas G, M1 y M2 del experimento M2-3. Inicialmente, las partículas de SCF tienen mayor velocidad cuadrática media que las partículas de NB6, en ambas componentes M1 y M2, con aproximadamente un 10 % de diferencia. En las primeras ~ 30 NBU, las partículas de NB6 ganan considerable velocidad respecto a las de SCF en el sistema global, alcanzando entonces la misma velocidad promedio ambos subsistemas. Después de este tiempo, el subsistema NB6 se calienta por encima del de SCF, hasta que alrededor de $t_{NBU} \approx 200$, es un cerca de un 10 % más caliente que el último, revirtiéndose así la situación inicial. Es cercano a este punto en el tiempo que parece ocurrir el colapso gravotérmico del sistema entero, pues entonces la tendencia se invierte y NB6 comienza a perder energía cinética respecto a SCF. Por causas citadas con anterioridad en esta misma subsección (ver más arriba), el subsistema M1 presenta una evolución casi idéntica a la global descrita. Por otro lado, en el subsistema M2, las partículas de NB6 rápidamente pierden energía cinética

respecto a las de SCF en las primeras ~ 20 NBU, para posteriormente presentar una tendencia hacia un calentamiento respecto a las mismas. Sin embargo, parece que, salvo periodos muy aislados, las partículas de NB6 nunca alcanzan mayor velocidad promedio que las de SCF; si bien la evidencia no es clara dado el muy reducido número de partículas de masa pesada. Un poco después de $t_{NBU} \approx 200$ se observa también que las partículas de NB6 empiezan a perder energía de nuevo respecto a las de SCF. Si conectamos la discusión anterior con una asociación (un tanto burda) núcleo-NB6 y halo-SCF¹⁶ se hace evidente el proceso de colapso gravotérmico.

6.3.3.2. Segregación de masa

Utilizamos nuevamente los radios lagrangianos de cada subsistema para analizar la evolución temporal de la distribución de masa en cada uno de ellos y en el sistema global. En la figura 6.30 podemos observar los radios lagrangianos de todos los subsistemas, excepto el subsistema M2-NB6¹⁷, para el experimento M2-3. Los cascarones internos del sistema global se contraen hasta $r_{40,G}$ aproximadamente, radio lagrangiano que permanece aproximadamente constante durante toda la simulación cerca del valor 0,6. El radio lagrangiano más interno analizado, $r_{01,G}$, se contrae hasta cerca del valor 0,05 en su punto de mayor contracción al tiempo $t_{NBU} \approx 220$, tras inicialmente ubicarse en $\sim 0,1$. Tras este tiempo, todos los cascarones internos, al menos hasta cerca de $r_{40,G}$, muestran una súbita expansión hacia el fin de la simulación; lo cual sugiere que el colapso del núcleo central tuvo lugar en el citado tiempo. Opuestamente, los cascarones lagrangianos más externos que dicho radio se expanden durante toda la simulación a tasas progresivamente mayores para las capas más externas del cúmulo.

Notablemente, a pesar de que las partículas de masa ligera conforman la abrumadora mayoría del sistema global, con 968 de los 1000 elementos totales, la evolución de los radios lagrangianos del subsistema M1 presenta relativamente claras diferencias con la del sistema G. Primeramente, el punto de inflexión entre la contracción y expansión de los cascarones se ubica en $r_{30,M1} \approx 0,5$, al menos 0,1 unidades¹⁸ por debajo del valor del sistema global. Esto se ve reflejado en que todos los cascarones externos se expanden más y todos los cascarones internos se contraen menos que los del sistema G. Lo que es más, los cascarones lagrangianos por debajo de $r_{10,M1}$

¹⁶ En realidad, la división no es tan clara como se quisiera, a pesar de que el método de selección de las partículas de EuroStar sí tiene como intención separar al sistema en núcleo colisional (manejado por NBODY6) y halo no colisional (manejado por SCF) de manera que, si bien inicialmente la distinción entre núcleo y halo es clara, en cuanto al criterio de momento angular empleado y hasta espacialmente, esta situación va progresivamente desapareciendo durante toda la simulación hasta que, al final, numerosas partículas de SCF se encuentran en el núcleo del cúmulo y numerosas partículas de NB6 se encuentran en el halo.

¹⁷ Este subsistema consta sólo de 9 elementos para este modelo en particular, por lo cual fue imposible calcular sus radios lagrangianos de la manera en como se hizo para los experimentos anteriores.

¹⁸ Unidades de N-cuerpos.

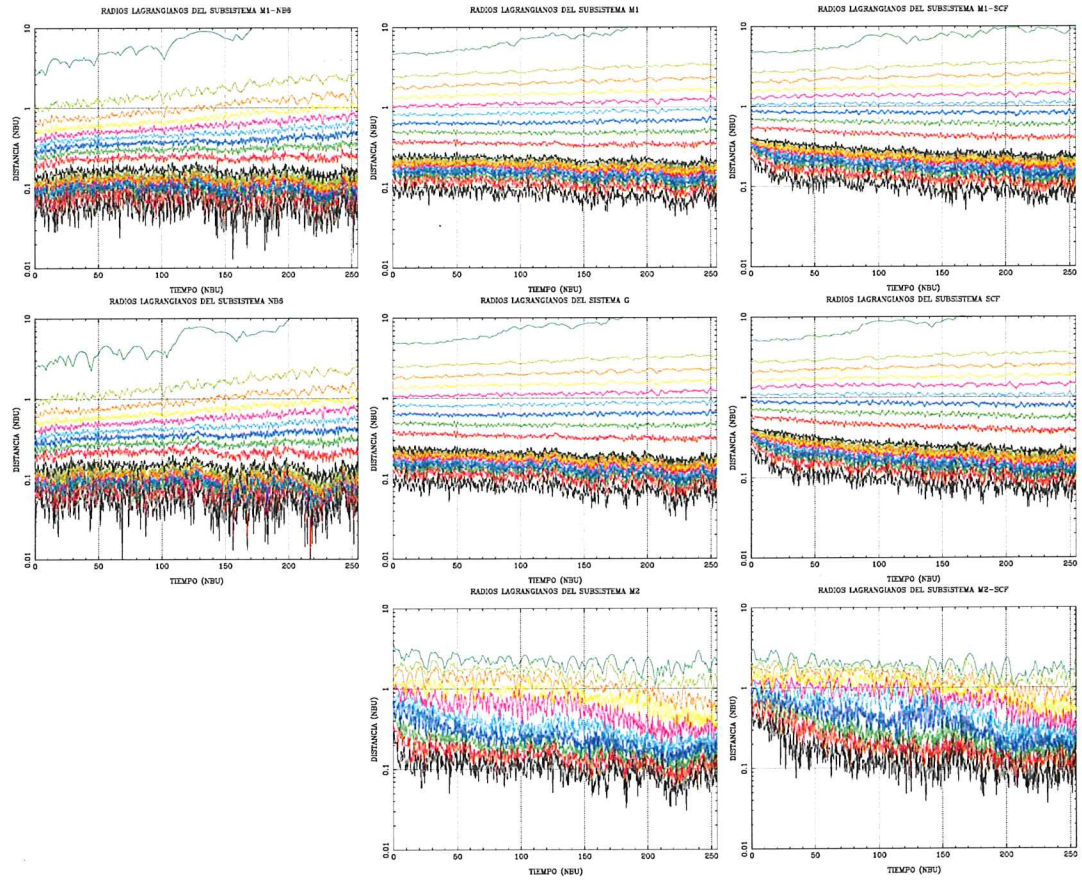


Figura 6.30. Radios lagrangianos en función del tiempo para todos los subsistemas, excepto el subsistema M2-NB6, para el experimento M2-3. En las gráficas del subsistema de masa pesada (todo el renglón inferior) se muestran sólo los radios lagrangianos del 10, 20, ..., 90 y 100 % de la masa debido al reducido número de partículas en este subsistema. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior central:* subsistema M1; *superior derecha:* subsistema M1-SCF; *central izquierda:* subsistema NB6; *central:* sistema global; *central derecha:* subsistema SCF; *inferior central:* subsistema M2; *inferior derecha:* subsistema M2-SCF.

permanecen casi constantes y hasta parecen expandirse un poco durante al menos las primeras ~ 20 NBU.

De las diferencias entre la evolución del subsistema M1 y el sistema G podemos inferir que el subsistema M2 tiene un cierto impacto sobre este último, mayor al observado en los experimentos analizados anteriormente, a pesar de su reducido número de elementos. El subsistema M2 contrae todas sus capas durante toda la simulación, particularmente durante las primeras ~ 15 NBU, a una tasa mayor que en los subsistemas G y M1 para todo radio lagrangiano. Es notable, por ejemplo, que $r_{10,M2}$ comience en un valor de cerca de 0,3 para llegar a reducirse hasta casi 0,05 en su punto de mayor contracción en $t_{NBU} \approx 220$; i.e. el 10 % de la masa de este subsistema (unas 4 partículas) se encuentran en órbitas por debajo de este valor, a este tiempo. Al igual que en los otros subsistemas, pasado este tiempo de colapso del núcleo central, se observa una súbita y rápida expansión de las capas internas hasta $r_{60,M2}$ aproximadamente.

Un aspecto notable, aunque ausente su gráfica principal, es la evolución del subsistema M2-NB6. Si bien en la figura 6.30 no se muestran los radios lagrangiano de este subsistema, podemos inferir su evolución (al menos cualitativamente) a partir del impacto que tiene sobre los otros subsistemas. Si en la columna izquierda de la figura 6.30 comparamos la evolución del subsistema NB6 con la del subsistema M1-NB6, por ejemplo, notaremos considerables diferencias entre ambos. La evolución de ambos subsistemas es prácticamente idéntica por encima de r_{10} , pero a partir de este mismo radio lagrangiano y hacia el centro del sistema encontramos algunas diferencias evidentes. Primeramente, durante el periodo inicial comparable con t_{eq} , las capas internas del subsistema NB6 se contraen notablemente más que aquellas del subsistema M1-NB6, necesariamente a causa de aquellas partículas del subsistema M2-NB6; lo cual nos indica que este último subsistema se contrae muy rápido durante este mismo periodo. La otra diferencia más notable ocurre en $t_{NBU} \approx 220$ cuando, mientras $r_{01,M1-NB6}$ alcanza sólo 0,04, $r_{01,NB6}$ e incluso $r_{02,NB6}$ se sitúan por debajo de 0,02. Casi con certeza, esto es el producto de una fuerte interacción de dos partículas masivas ligadas.

El efecto del subsistema M2-NB6 sobre el subsistema M2 es aun más notable, dado que representa casi un 30 % de este último. Muy evidente resulta el efecto cuando comparamos el subsistema M2 con el subsistema M2-SCF. Particularmente durante las primeras ~ 30 NBU, es notable la mucho más rápida contracción del subsistema M2, evidenciando la influencia de sus partículas de NB6.

Analicemos ahora el efecto de la segregación de masa desde el punto de vista de la evolución temporal de la densidad central para cada uno de los subsistemas. En la figura 6.31 podemos observar la densidad central para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-3. La disposición de las gráficas dentro de la figura sigue la línea de las figuras anteriores, excepto que no se muestra la columna de

SCF¹⁹. La densidad global, $\rho_{0,G}$, se incrementa a una tasa (logarítmica) relativamente constante durante casi toda la simulación hasta alcanzar un incremento máximo de alrededor del 60 % en $t_{NBU} \approx 230$. $\rho_{0,M1}$ disminuye rápidamente en un 30 % de su valor original durante las primeras ~ 10 NBU, para luego aumentar durante el resto de la simulación hasta llegar a su valor máximo de cerca de 120 % de su valor inicial en $t_{NBU} \approx 230$. Dadas las considerables diferencias entre el sistema G y el subsistema M1 que, numéricamente, domina al primero, podemos afirmar que el subsistema M2 tiene un efecto apreciable en la densidad central global; el cual podemos observar en la gráfica inferior derecha de la figura 6.3.3.2. La densidad central del subsistema M2 se incrementa importantemente casi durante toda la simulación, aunque con ciertas fluctuaciones, llegando a alcanzar *por lo menos* siete veces su valor inicial en $t_{NBU} \approx 210$; siendo este subsistema, por mucho, el que más concentración presenta en algún punto de su evolución, inclusive por encima del subsistema M2-NB6. La razón de lo anterior radica en que, como se muestra en las gráficas de la evolución de los radios lagrangianos para el sistema SCF (ver columna derecha de la figura 6.3.3.2) y como se discutió en el análisis de los otros modelos, las partículas del sistema SCF (tanto pesadas como ligeras) más cercanas al núcleo también tienden a caer hacia el mismo como consecuencia del reajuste del potencial global, sumándose así al incremento de la densidad central por parte de las partículas pesadas de NB6.

Si bien la densidad central de las estrellas ligeras parece aumentar, como se observa en la gráfica superior derecha de la figura 6.3.1, es evidente que esto sucede gracias a aquellas partículas de SCF, puesto que las partículas del subsistema M1-NB6 disminuyen su densidad en esta misma región considerablemente al menos durante las primeras ~ 30 NBU y nunca recuperan su densidad inicial. Después de $t_{NBU} \approx 30$, $\rho_{0,M1-NB6}$ alcanza un valor cerca del 50 % de su valor original alrededor del cual se mantiene relativamente próximo durante el resto de la simulación.

En contraparte a la densidad central de los subsistemas, en la figura 6.3.2 podemos observar la densidad cercana al radio medio de masa para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-3. Parece notable que la densidad cercana al radio medio de masa del sistema global permanezca aproximadamente constante cuando hemos visto que existen evidentes «flujos de partículas» hacia dentro y fuera del cúmulo durante toda la simulación. Si comparamos $\rho_{h,M1}$ con $\rho_{h,M2}$ vemos que, mientras la densidad de las estrellas ligeras prácticamente no cambia durante toda la simulación, manteniéndose en su valor inicial, la densidad de las estrellas pesadas disminuye en un 50 % al terminar la simulación. Sin embargo, al comparar con los radios lagrangianos del subsistema M2 encontramos que la densidad inicial de este subsistema en esta zona se sustenta en unas 5 partículas que

¹⁹ Las gráficas de la evolución temporal de la densidad central para los subsistemas SCF, M1-SCF y M2-SCF son imposibles de realizar conforme a las características de las demás dado que los valores que se muestran son con respecto a la densidad inicial, cuyo valor para estos subsistemas es cero por las características de selección de partículas de EuroStar.

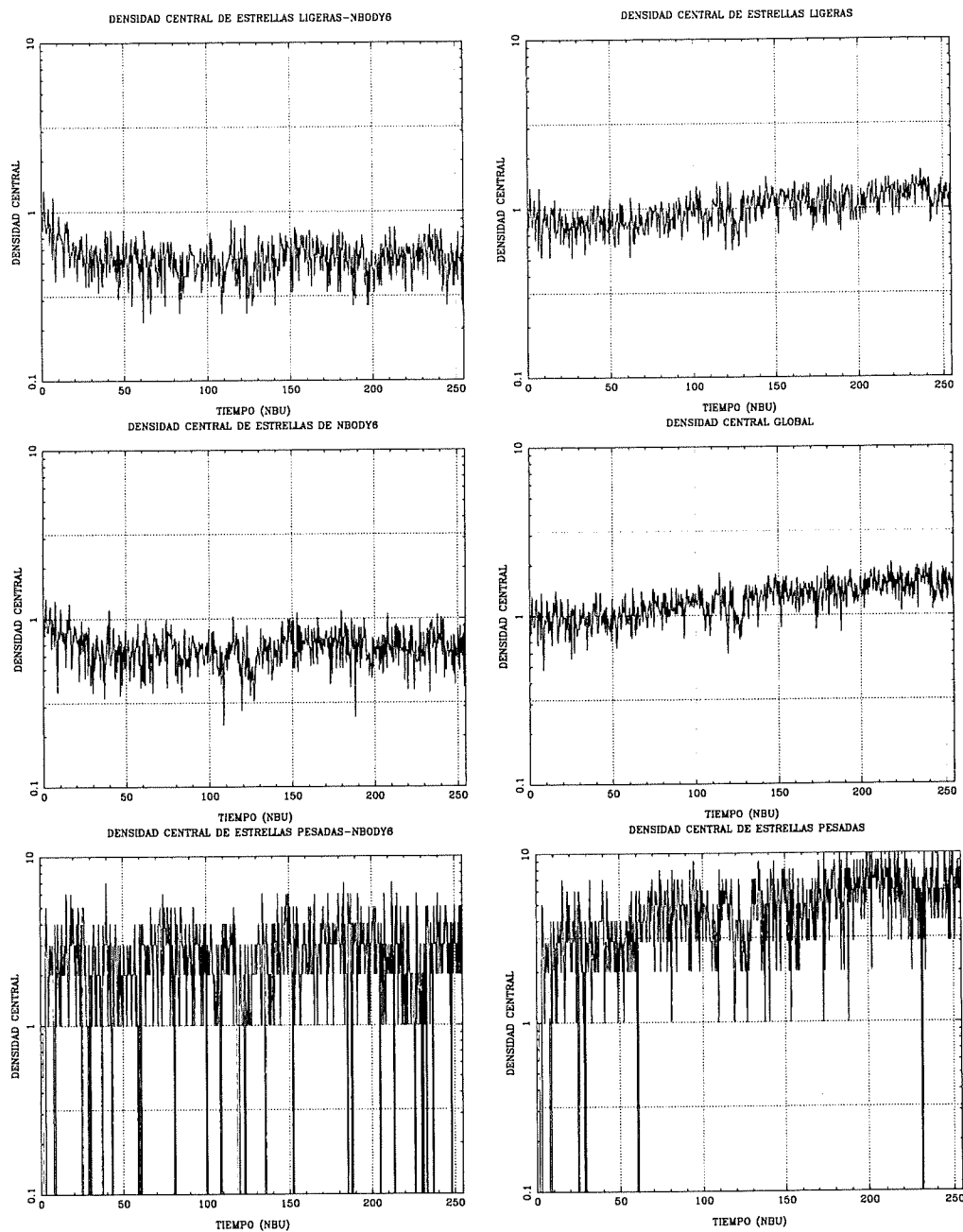


Figura 6.31. Densidad central en función del tiempo para los subsistemas G, M1, NB6 y M1-NB6 del experimento M2-3. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior derecha:* subsistema M1; *central izquierda:* subsistema NB6; *central derecha:* sistema G; *inferior izquierda:* subsistema M2-NB6; *inferior derecha:* subsistema M2.

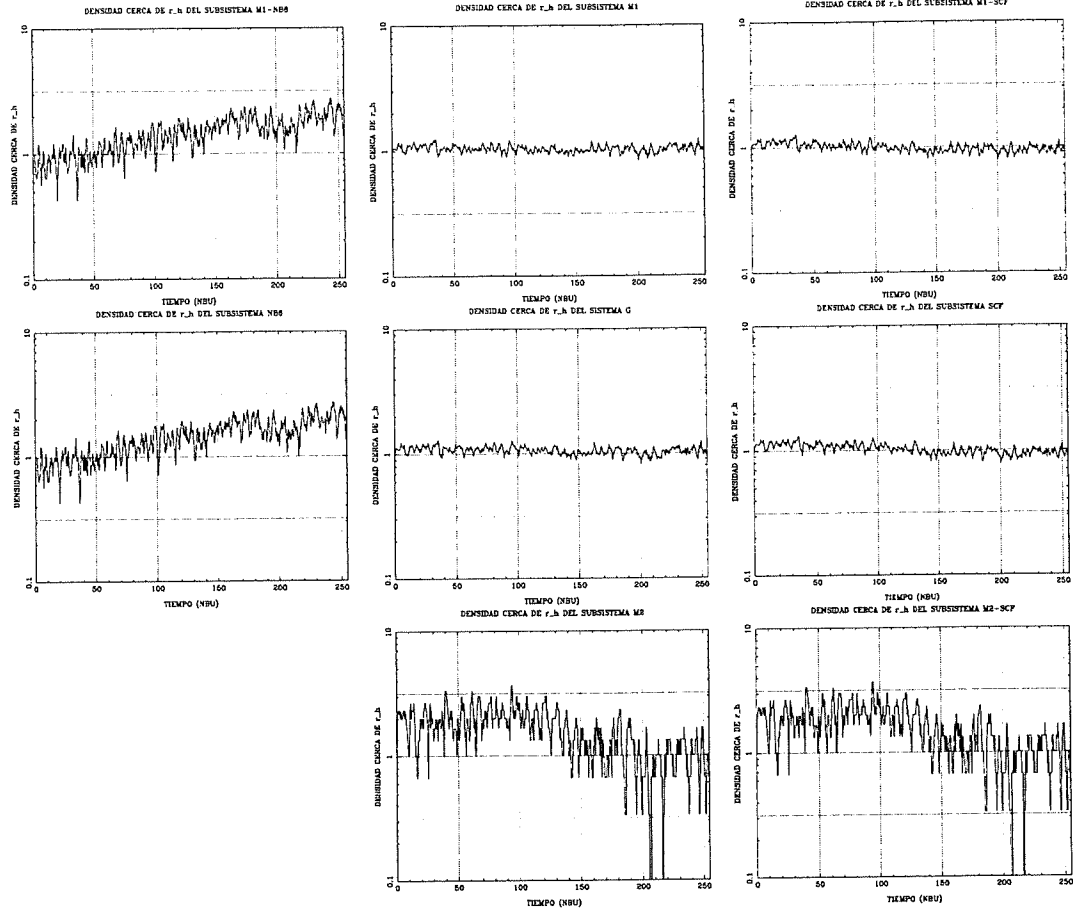


Figura 6.32. Densidad cercana al radio medio de masa en función del tiempo para los subsistemas G, M1, M2, NB6, SCF, M1-NB6, M1-SCF y M2-SCF del experimento M2-3. *Superior izquierda:* subsistema M1-NB6; *superior central:* subsistema M1; *superior derecha:* subsistema M1-SCF; *central izquierda:* subsistema NB6; *central:* sistema global; *central derecha:* subsistema SCF; *inferior central:* subsistema M2; *inferior derecha:* subsistema M2-SCF.

tienen inicialmente órbitas en estos rangos²⁰; por ende, una disminución del 50% en esta densidad representa la pérdida de unas 3 partículas en esta zona, lo cual no es significativo para afectar la densidad global de alrededor de 150 partículas de masa ligera en esta zona²¹.

Ahora, si bien $\rho_{0,M1}$ permanece relativamente constante, sí se observan cambios notables de la densidad en esta zona si dividimos a las partículas ligeras en sus subsistemas NB6 y SCF. Es muy evidente que $\rho_{0,M1-NB6}$ aumenta consistentemente

²⁰ Aproximadamente un 10% de las 32 partículas de masa pesada en este modelo.

²¹ Representaría una pérdida de cerca de 5% de la densidad global; cantidad difícilmente detectable dado el ruido estadístico existente.

durante casi toda la simulación hasta alcanzar por los menos al doble de su valor inicial en $t_{NB6} \approx 220$; lo cual, recordando la evolución de la densidad central para este mismo subsistema, es consistente con un escenario en el cual las masas ligeras de NB6 abandonan el núcleo para situarse en órbitas más externas. Por su parte, las estrellas ligeras de SCF disminuyen lentamente su densidad cerca de $r_{h,G}$ durante toda la simulación, debido a que éstas estrellas abandonan estas zonas para tender a ubicarse en órbitas más externas. De esta manera, vemos que, en cierto modo, las estrellas ligeras de SCF que abandonan la zona media del cúmulo se ven compensadas en número por aquellas partículas ligeras de NB6 que abandonan el núcleo para ubicarse en estas regiones medias.

La evolución temporal de ambas, la densidad central y la densidad cercana a $r_{h,G}$, son consistentes con un escenario en el cual las partículas ligeras de NB6 abandonan el núcleo del sistema a la par que las partículas pesadas de NB6 caen hacia el mismo. Por su parte, las partículas de SCF, tanto ligeras como pesadas, tienden subir hacia órbitas más externas las que ya se encuentran en tales y a caer hacia órbitas más internas las que ya se encuentran cerca del núcleo.

Capítulo 7

Conclusiones

A no ser que se indique lo contrario o que explícitamente se enuncien las diferencias individuales, las siguientes afirmaciones se refieren al resultado de todos los experimentos analizados.

Respecto al comportamiento del sistema global:

- La energía total del sistema permaneció casi constante dentro de los límites de error (ver definición en la sección 6.1) de $dE \lesssim 10^{-3}$ la mayor parte del tiempo; salvo casos excepcionales cuando se aproximó a $dE \sim 10^{-2}$ durante el periodo final.
- La velocidad cuadrática media del sistema global, $\overline{v_{m,G}^2}$, permaneció casi constante en un valor de 0,5 durante todo el tiempo de la simulación; lo cual es consistente con la condición de equilibrio virial (ver sección 3.1).
- El comportamiento global del sistema (incluyendo el de partículas de igual masa, MU-1) es consistente con el proceso de *colapso gravotérmico*, contrayendo sus radios lagrangianos internos y expandiendo sus radios lagrangianos externos a medida que avanza el tiempo a una tasa logarítmica aproximadamente lineal que varía según el experimento. El radio lagrangiano que permanece aproximadamente constante es siempre cercano (aunque inferior) al radio medio de masa, $r_{h,G}$. Desde un principio, la densidad central del sistema, $\rho_{0,G}$, aumenta progresivamente a una tasa relativamente constante; y la densidad cercana al radio medio de masa, $\rho_{h,G}$, permanece casi constante durante toda la simulación.
- El comportamiento anterior se interrumpe, en su caso, una vez alcanzado el estado de colapso del núcleo; tras el cual se presenta una expansión abrupta y rápida de los radios lagrangianos internos y una consecuente disminución de ρ_0 . El tiempo de colapso de núcleo del experimento, t_{cc}^* , —en aquellos en donde este estado evolutivo fue alcanzado— es aproximadamente consistente con el tiempo teórico calculado por las ecuaciones de Spitzer, t_{cc} (ver subsección 3.3.3 y cuadro 6.1 en la página 73). En el experimento M2-1 el colapso del núcleo está sucedido por una oscilación de los radios lagrangianos internos y en ρ_0 .

Respecto del comportamiento de las componentes de masa:

- El comportamiento de las componentes de masa del sistema global es aproximadamente consistente con un proceso de *equipartición de la energía cinética* al principio de la simulación y una consecuente *segregación de masa*. La velocidad

cuadrática media de las partículas de M2, $\overline{v_{m,M2}^2}$, tiende a *disminuir* rápidamente; mientras que la de las partículas de M1, $\overline{v_{m,M1}^2}$, tiende a *aumentar* durante el periodo de tiempo inicial comparable con el tiempo de equipartición, t_{eq} , calculado para cada experimento (ver cuadro 6.1 en la página 73), haciendo evidente el proceso de equipartición de la energía. En este mismo periodo, se observa una rápida *contracción* de los radios lagrangianos internos del subsistema M2 y una *expansión* de los radios lagrangianos internos del subsistema M1; un rápido ascenso de $\rho_{0,M2}$ y una rápida disminución de $\rho_{0,M1}$; así como, inversamente, un aumento en $\rho_{h,M1}$ y una súbita disminución de $\rho_{h,M2}$; lo cual demuestra el descenso de las partículas pesadas hacia órbitas cercanas al núcleo del sistema y el ascenso de las partículas ligeras originalmente cerca del núcleo hacia órbitas más altas.

- Pasado un periodo de tiempo comparable con t_{eq} , el comportamiento en función del tiempo paragenal de las componentes de masa es aproximadamente consistente con un proceso de *colapso gravotérmico* en ambas componentes. $\overline{v_{m,M2}^2}$ tiende a seguir disminuyendo y $\overline{v_{m,M1}^2}$ aumentando —aunque más lentamente, ambos— hasta un tiempo comparable con t_{rh} , aparentemente en una extensión del proceso de equipartición. Pasado este tiempo, la tendencia se revierte en ambos parámetros hasta alcanzar aproximadamente su valor inicial, cercano a $\overline{v_{m,G}^2} \approx 0,5$, haciendo evidente el calentamiento de las estrellas pesadas del núcleo y el enfriamiento de las estrellas ligeras del halo. Los radios lagrangianos internos de M1 ($\lesssim r_{40,M1}$) empiezan a contraerse pasado $\sim t_{eq}$; mientras que los del subsistema M2 no dejan de contraerse —aunque lo hacen más lentamente y con algunas fluctuaciones— hasta prácticamente el tiempo de colapso de núcleo, t_{cc}^* . Sólo las capas muy externas del subsistema M2 ($\gtrsim r_{80,M2}$) parecen expandirse (muy lentamente) durante toda (o la mayor parte de) la simulación. Ambas densidades centrales, $\rho_{0,M1}$ y $\rho_{0,M2}$, aumentan a una tasa aproximadamente constante pasado $\sim t_{eq}$, siendo mayor el aumento (relativo) de la última. . Por su parte la $\rho_{h,M1}$ permanece constante durante toda la simulación en su valor inicial y $\rho_{h,M2}$ disminuye regularmente durante toda la simulación hasta previo t_{cc}^* . Dicho esto, fue evidente que la causa del aumento de $\rho_{0,M1}$ se debió principalmente a las partículas de SCF y su carencia de mecanismos para abandonar el núcleo (ver más adelante).
- Durante el periodo inicial comparable con t_{eq} , se da la más rápida disminución del parámetro de equipartición, ξ_m , para luego aumentar lentamente durante el resto de la simulación; sin embargo, la equipartición de la energía cinética entre los grupos de masas *no* fue alcanzada *globalmente* para ninguno de los experimentos analizados.
- En los casos que fue posible analizar (M2-1 y M2-3), pasado t_{cc}^* , los radios lagrangianos internos de (ambos) M1 y M2 presentan considerables oscilaciones para luego reexpandirse rápidamente; $\rho_{0,M1}$ presenta algunas oscilaciones para luego

caer abruptamente; $\rho_{h,M2}$ muestra un ligero pero evidente aumento, denotando algunas estrellas ligeras que abandonan el núcleo hacia órbitas más altas. Lo anterior es cualitativamente consistente con la literatura existente sobre la evolución post-colapso del núcleo [Elson et al. 1987, Meylan y Heggie 1997].

Respecto del comportamiento de los subsistemas de integrador:

- La velocidad cuadrática media *inicial* del subsistema NB6, $\overline{v_{m,SCF}^2}(0)$, es consistentemente *mayor* que la velocidad cuadrática media *inicial* del subsistema SCF, $\overline{v_{m,NB6}^2}(0)$. *A priori*, no hay ninguna razón para que esto suceda; sin embargo, se conjetura que la razón de este sesgo radica en el método de selección de las partículas utilizado por EuroStar (descrito en la sección 4.4) que, tal como fue utilizado en los experimentos de este trabajo, asigna las partículas de *menor* momento angular a NBODY6 y las de *mayor* momento angular a SCF. Dado que $\|\mathbf{L}_i\| = \|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{v}_i\| \sin \theta$ —donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$ —, las partículas con *baja* velocidad (al igual que las de menor radiovector) tienen *mayor* probabilidad de tener *bajo* momento angular y, por tanto, ser asignadas a NBODY6; inversamente, aquellas partículas de *alta* velocidad tienen mayor probabilidad de tener *alto* momento angular y, por ende, ser asignadas a SCF¹.
- Un punto importante que señalar sobre la distribución inicial de los subsistemas SCF y NBODY6 es que el primero tiende a ocupar las capas más externas del cúmulo y el segundo las más internas; de modo que $r_{h,NB6}(0) \approx 0,3$ y $r_{h,SCF}(0) \approx 1,0$; lo cual es de esperar a partir del criterio de selección de partículas de EuroStar, pues esa es precisamente su función —separar núcleo y halo del sistema—.
- No obstante el punto primero, respecto a la diferencia *inicial* entre $\overline{v_{m,NB6}^2}$ y $\overline{v_{m,SCF}^2}$, esta diferencia rápidamente desaparece en un periodo igualmente comparable con t_{eq} ; y, más allá de este punto, la diferencia se *invierte* (i.e. $\overline{v_{m,NB6}^2} > \overline{v_{m,SCF}^2}$), presumiblemente como consecuencia del colapso gravotérmico, incrementando la temperatura del subsistema NB6 —asociado con el núcleo— y disminuyendo lentamente la del subsistema SCF —asociado con el halo—. El aumento en la temperatura del núcleo está acompañado por una contracción de los radios lagrangianos internos de NB6 ($\lesssim r_{30,NB6}$).
- Si bien la mayor parte de las partículas de SCF sí tienden a desplazarse hacia órbitas más altas como producto de la expansión de estas zonas del cúmulo ($\gtrsim r_{40,G}$), una considerable parte de ellas sí tiende a contraerse hacia el núcleo, a pesar de que en su gran mayoría se trata de partículas ligeras que debieran segregarse a órbitas más altas. Lo anterior contribuye a incrementar tanto $\rho_{0,M1}$ como $\rho_{0,M2}$. Son de hecho estas partículas, las de SCF, las que mayormente contribuyen a

¹ Esto se cumple porque la distribución de las partículas es aproximadamente *isotérmica* e *isotrópica* (ver descripción de los modelos de King en la sección 3.1.4), por lo que las distribuciones de $\|\mathbf{r}\|$ y θ para una $\|\mathbf{v}\|$ dada deben ser (casi) idénticas para toda magnitud $\|\mathbf{v}\|$.

la densidad central del sistema, además de las de M2-NB6 (ver más adelante). Las partículas de SCF caen naturalmente como consecuencia de las variaciones del potencial global, particularmente por fluctuaciones con periodos comparables con el tiempo de cruce; sin embargo, a diferencia de las partículas de NBODY6, no cuentan con mecanismos eficientes para abandonar el núcleo una vez que han caído en él, puesto que entonces se hayan demasiado inmersas en el pozo de potencial e incapaces de tener encuentros cercanos de dos cuerpos con otras partículas que puedan traer como consecuencia su expulsión del núcleo, cual es el caso de las partículas de NB6.

- La evolución temporal del parámetro de equipartición entre los grupos de integrador, ξ_i , tuvo una evolución muy similar en todos los experimentos. Se parte de un valor ligeramente por debajo de la unidad, aumentando rápidamente durante un tiempo comparable con t_{rh} (pasando un poco antes por la unidad), y estabilizándose por encima de la unidad hasta llegar al colapso del núcleo, cuando presenta otra disminución. Cabe señalar que la medición del parámetro de equipartición no implica proceso de equipartición alguno entre ambas componentes de integrador (más allá del intercambio de fuerzas a que se refiere la sección 4.6).

Respecto de la evolución de las componentes de masa en cada uno de los subsistemas de integrador:

- Se observan notorias diferencias en la evolución temporal de los parámetros de las partículas pesadas y ligeras al dividir su análisis en subsistemas propios de NBODY6 y SCF para cada una de las componentes de masa. La razón de lo anterior puede radicar en una combinación de dos factores: (i) que el método del integrador NBODY6 es de fuerza directa, por lo que toma en cuenta las interacciones de dos-cuerpos entre las partículas (i.e. es colisional), mientras que el método del integrador SCF es de campo aproximado y no existe interacción de dos-cuerpos alguna, necesaria para algunos procesos evolutivos (ver sección 3.2.1 en la página 26); y (ii) que el subconjunto de partículas asignadas a NBODY6 representan (principalmente) aquellas que se encuentran en la zona más densa del cúmulo —el núcleo y un poco más—, mientras que las partículas asignadas a SCF se encuentran en las zonas menos densas del cúmulo —el halo— y, dado que los coeficientes de difusión de Spitzer [Spitzer 1987] dependen de la densidad local, podemos inferir que la diferencia evolutiva podría justificarse inclusive desde el punto de vista aislado de la diferencia de densidad entre ambos subsistemas NB6 y SCF.
 - En el periodo inicial comparable con t_{eq} , la *disminución* de $\overline{v_{m,M2-NB6}^2}$ es *mayor* que la de $\overline{v_{m,M2}^2}$ y los radios lagrangianos internos de M2-NB6 se contraen más que los del subsistema M2; asimismo, el *aumento* de $\overline{v_{m,M1-NB6}^2}$ es *mayor* que la de $\overline{v_{m,M1}^2}$; los radios lagrangianos internos de M1-NB6 se expanden más que los del subsistema M1 y $\rho_{0,M1-NB6}$ disminuye más que $\rho_{0,M1}$. Claramente

esto está directamente relacionado con el papel fundamental de la interacción de dos cuerpos en los subsistemas de NB6.

- Pasado el periodo inicial comparable con t_{eq} , $\overline{v_{m,M1-NB6}^2}$ tiende a *disminuir* hasta valores cercanos al promedio global $\sim 0,5$; $\rho_{0,M1-NB6}$ sigue disminuyendo —aunque más lentamente— hasta aproximadamente t_{cc}^* , cuando disminuye abruptamente aún más²; a diferencia de $\rho_{h,M1}$ que permanece aproximadamente constante todo el tiempo, $\rho_{h,M1-NB6}$ aumenta notablemente durante toda la simulación. Por otro lado, $\overline{v_{m,M2-NB6}^2}$ tiende a *aumentar*; aunque con considerables fluctuaciones, hasta valores también cercanos a $\overline{v_{m,G}^2}$; todos los radios lagrangianos de M2-NB6 se contraen con mayor rapidez y a niveles notablemente inferiores que los del subsistema M2. Esto es aproximadamente consistente con un proceso de colapso gravotérmico inducido por la relajación de dos cuerpos que se hace evidente en un tiempo comparable con t_{rh} .
- Si bien la equipartición de la energía cinética *no* se alcanza globalmente en ningún experimento, ésta sí parece ocurrir en el subsistema de NB6 de, al menos, el experimento M2-1, a un tiempo cercano a t_{eq} . El subsistema NB6 del experimento M2-2 tiene su mayor acercamiento al estado de equipartición en $t_{NBU} \approx 45$, llegando hasta $\xi_m \approx 1,2$. Para el experimento M2-3, $\xi_{m,NB6}$ alcanza, $\sim 1,4$ en $t_{NBU} \approx 15$. Este último dato fue difícil de cuantificar debido al gran ruido estadístico de este subsistema. Por tanto, con base a los presentes resultados, podemos concluir que la equipartición de la energía se alcanza sólo para $\mu \lesssim 1,75$, lo cual concuerda con el criterio de Watters *et al.* y aproximadamente con el de Inagaki y Wiyanto, aunque no con el de Spitzer.
- Ambas componentes de masa del subsistema de SCF presentan un evolución temporal muy similar, fuera del ruido estadístico considerablemente mayor para el subsistema M2 y de su diferente distribución espacial, la cual las hace responder de manera distinta a los cambios del potencial global. $\overline{v_{m,M1-SCF}^2}$ y $\overline{v_{m,M2-SCF}^2}$ comienzan ligeramente por encima del valor promedio global y disminuyen lentamente durante toda la simulación; los radios lagrangianos internos de estos subsistemas se contraen rápidamente durante un periodo inicial comparable con t_{rh} ; $\rho_{h,M1-SCF}$ y $\rho_{h,M1-NB6}$ disminuyen lentamente durante toda la simulación.
- Para el caso de $\xi_{m,SCF}$, este parámetro permanece aproximadamente «constante» oscilando (debido al ruido estadístico) alrededor de su valor inicial —aproximadamente μ — durante toda la simulación.

La separación de partículas en ambos subsistemas de integrador condujo a patrones evolutivos indeseables en el estudio de los fenómenos físicos de interés, producto

² A diferencia de $\rho_{0,M1}$ que aumenta después de t_{eq} , $\rho_{0,M1-NB6}$ disminuye casi todo el tiempo (salvo fluctuaciones con periodos principalmente del orden del tiempo de cruce).

de los respectivos modelos físicos subyacentes en cada integrador —bajo los parámetros, modelos y condiciones en que fue utilizado el integrador híbrido EuroStar en el presente trabajo—. El proceso de segregación de masa implica una rápida redistribución espacial de las partículas en todo el cúmulo, lo cual implica que muchas de las cuales se encontraban en un principio en el halo pasarán al núcleo y viceversa. Por lo anterior sería necesario realizar constantemente actualizaciones de las listas de partículas en la parte colisional y no colisional, en la medida en que cambian sus propiedades individuales; pero, como se discutió en la sección 4.5.2 y en la sección 5.5, el mecanismo de intercambio de partículas entre SCF y NBODY6 conlleva errores sistemáticos que, para el presente estudio, incrementaron el error en la conservación de la energía hasta niveles inaceptables, por lo cual fue imposible su utilización práctica, cuyas consecuencias se han observado a lo largo de este trabajo. Hasta donde fue posible experimentar, el error relativo de la energía superó rápidamente los niveles de tolerancia incluso con modelos de una sola masa (donde no hay proceso de segregación de masa alguno), cuando fue activado el mecanismo de intercambio de partículas. Una solución práctica que probó ser útil fue el aumento de la proporción de partículas manejadas por la parte de NBODY6 a por lo menos 40 %, aunque esto resultó demasiado ineficiente para los recursos computacionales de que se dispusieron, dada la mayor demanda de recursos computacionales del integrador de fuerza directa.

En general, los resultados son aproximadamente consistentes con la teoría y trabajos anteriores sobre la evolución dinámica de los cúmulos globulares, particularmente la de los modelos de dos componentes de masa con $q = 0,1$.

Bibliografía

- [Aarseth 1985] Aarseth S.J. 1985. En *Multiple Time Scales*. Eds. J.U. Brackbill y B.I. Cohen. Academic Press. New York. p. 377.
- [Aarseth 1993] Aarseth S.J. 1993. «Direct Methods for N-body simulations», in *Galactic Dynamics and N-body Simulations*. Eds. G. Contopoulos *et al.*, Simposio en Thessaloniki, Grecia.
- [Aarseth et al. 1974] Aarseth S.J., Hénon M., Wielen R. 1974. *Astron. Astrophys.*, **37**, 183.
- [Abramowitz y Stegun 1972] Abramowitz M. y Stegun I.A. 1972. *Handbook of Mathematical Functions*, 9. Dover. New York.
- [Aguilar 1993] Aguilar L.A. 1993. En *Galaxy Evolution: The Milky Way Perspective*, IAU Symp. **49**. Eds. R.S. Majewski. p. 155.
- [Ashman y Zepf 1998] Ashman K.M. y Zepf S.E. 1998. *Globular Cluster Systems*. Cambridge University Press. Cambridge, RU. pp. 5-50.
- [Bell 1988] Bell R. 1988. En *Globular Cluster Systems in Galaxies*, IAU Symp. **126**. Eds. J. Grindlay y D. Phillip. Kluwer Academic Publishers, p. 79.
- [Binney y Tremaine 1987] Binney J. y Tremaine S. 1987. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, EUA.
- [Bolte y Hogan 1995] Bolte M. y Hogan C.J. 1995. *Nature*, **376**, 399.
- [Chaboyer 1995] Chaboyer B. 1995. *Astrophys. J. Lett.*, **444**, L9.
- [Cruz 1999] Cruz Peregrino F. 1999. *El Efecto de los Choques Gravitacionales en el Sistema de Cúmulos Globulares Galáctico*. Tesis doctoral presentada ante el Instituto de Astronomía de la UNAM. D.F., México. pp. 1-15.
- [Djorgovsky y Meylan 1994] Djorgovsky S.G. y Meylan G. 1994. *Astron. J.*, **108**, 4.
- [Elson et al. 1987] Elson R., Hut P. e Inagaki S. 1987. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **25**, 565.
- [Fregeau et al. 2002] Fregeau J.M., Joshi K.J., Portegies Zwart S.F., Rasio F.A. 2002. *Astrophys. J.*, **570**, 171.
- [Heggie y Mathieu 1986] Heggie D.C. y Mathieu R.D. 1986. *Standardized units and time scales*, en *The use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, Eds. P. Hut y S. McMillan, p. 233.
- [Hemsendorf 1999] Hemsendorf M. 1999. *Dynamics of Black Holes in Galac-*

- [Hernquist y Ostriker 1992] Hernquist L. y Ostriker J.P. 1992. *Astrophys. J.*, **386**, 375.
- [Hozumi y Hernquist 1998] Hozumi S. y Hernquist L. 1999. *ASP Conf. Ser.*, **182**, 259.
- [Inagaki y Wiyanto 1984] Inagaki S. y Wiyanto P. 1984. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **36**, 391.
- [Khalisi 2002] Khalisi E. 2002. *Equipartition and Mass Segregation, simulations of star clusters with two mass-components*. Tesis doctoral presentada ante las Facultades combinadas de Ciencias Naturales y de Matemáticas de la Ruperto-Carola University of Heidelberg. Heidelberg, Alemania.
- [King 1966] King I.R. 1966. *Astron. J.*, **71**, 64.
- [King 1985] King I.R. 1985. En *Dynamics of Star Clusters*, IAU Symp. **133**. Eds. J. Goodman y P. Hut. Dordrecht, D. Reidel Publishing Co. p. 1.
- [Kustaanheimo y Stiefel 1965] Kustaanheimo P. y Stiefel E.L. 1965. *J. für Reine Angewandte Mathematik*, **218**, 204.
- [Larson 1990] Larson R.B. 1990. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **102**, 709.
- [Lee et al. 2004] Lee K.H., Lee H.M., Fahlman G.G. y Sung H. 2004. *Astron. J.*, **128**, 2838.
- [Lightman y Shapiro 1978] Lightman A.P. y Shapiro S.L. 1978. *Rev. Mod. Phys.*, **50**, 437.
- [Meylan y Heggie 1997] Meylan G. y Heggie D.C. 1997. *The Astron. Astrophys. Rev.*, **8**, 1.
- [Meylan y Pryor 1993] Meylan G. y Pryor C. 1993. En *Structure and Dynamics of Globular Clusters*. Eds. S. Djorgovsky y G. Meylan. *ASPCS*, **50**, 347.
- [Michie 1963] Michie R.W. 1963. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **125**, 127.
- [Mikkola 1997] Mikkola S. 1997. En *Visual Double Stars: Formation, Dynamics and Evolutionary Tracks*. Eds. J.A. Docobo, A. Elipe y H. McAlister. Dordrecht: Kluwer Academic. p. 269.
- [Merrit 1981] Merrit D. 1981. *Astron. J.*, **86**, 318.
- [Piotto et al. 1996] Piotto G., Cool A.M. y King I.R. 1996. En *Dynamical evolution of star clusters: confrontation of theory and observations*, IAU Symp. **174**. Eds. P. Hut y J. Makino, Kluwer Academic Publishers. p. 71.

- [Plummer 1911] Plummer H. C. 1911. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **71**, 460.
- [Pryor y Meylan 1993] Pryor C. y Meylan G. 1993. En *Structure, Dynamics and Chemical Evolution of Elliptical Galaxies*. Eds. I.J. Danzinger, W.W. Zeilinger y K. Kj  r (ESO, Munich). p. 357.
- [Renzini et al. 1996] Renzini A., Bragaglia A., Ferraro F.R., Gilmozzi R., Ortolani S., Holberg J.B., Liebert J., Wesemael F. y Bohlin R.C. 1996. *Astrophys. J. Lett.*, **465**, L23.
- [Rich 1996] Rich R. M. 1996. En *Formation of the Galactic Halo... Inside and Out*. Eds. H. Morrison y A. Sarajedini (ASP, San Francisco). p. 24.
- [Schramm et al. 1995] Schramm D.N., Dearborn D.S.P. y Truran J.W. 1995. *Comments on Astrophysics*, **17**, 343.
- [Shi 1995] Shi X. 1995. *Astrophys. J.*, **446**, 637.
- [Spitzer 1940] Spitzer L. 1940. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **100**, 396.
- [Spitzer 1969] Spitzer L. 1969. *Astrophys. J.*, **158**, L139.
- [Spitzer 1987] Spitzer L. 1987. *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, EUA.
- [Spurzem y Takahashi 1995] Spurzem R. y Takahashi, K. 1995. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **272**, 772.
- [van den Bergh 1993c] van den Bergh S. 1993c. *Astrophys. J.*, **411**, 178.
- [van den Bergh 1994] van den Bergh S. 1994. *Astrophys. J.*, **435**, 203.
- [Watters et al. 2000] Watters W.A., Joshi K.J. y Rashio F.A. 2000. *Astrophys. J.*, **539**, 331-341.
- [Webbink 1988] Webbink R.F. 1988. En *Globular Clusters Systems in Galaxies*, IAU Symp. **126**. Eds. J. Grindlay y D. Phillip. Kluwer Academic Press Publishers. p. 541.
- [White y Shawl 1987] White R.E. y Shawl S.J. 1987. *Astrophys. J.*, **317**, 246.
- [Zhao 1996] Zhao, H. 1996. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **278**, 488.
- [Zinn 1988] Zinn R. 1988. En *Globular Cluster Systems in Galaxies*, IAU Symp. **126**. Eds. J. Grindlay y D. Phillip. Kluwer Academic Press Publishers. 37.