

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



**ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA EN DISCOS DE ACRECIÓN CON
UN PERFIL DE ROTACIÓN ARBITRARIO**

TESIS

Que para obtener el título de

Físico

Presenta

JOEL ANTÚNEZ GARCÍA

Ensenada, Baja California, Noviembre 1999

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTABILIDAD HIDRODIÁMICA EN DISCOS DE ACRECIÓN CON
UN PERFIL DE ROTACIÓN ARBITRARIO**

TESIS PROFESIONAL

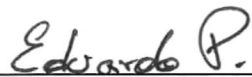
QUE PRESENTA

JOEL ANTÚNEZ GARCÍA

APROBADA POR:



Dr. Mauricio Reyes Ruiz
Presidente del Jurado



Físico Eduardo Gerardo Pérez Tijerina
Primer Vocal



Dr. Guillermo García Segura
Secretario

En honor y agradecimiento a mi madre:

Consuelo García Acosta

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Mauricio Reyes Ruiz por la confianza y las grandes muestras de paciencia puestas en mi, así como también su indiscutible amistad.

A Eduardo Pérez Tijerina y a su esposa Miriam por los grandes momentos de amistad y apoyo que me dieron en las buenas y en las malas.

A mis hermanos Marcelino, Alma Lorena, Diana Leticia, Cesar Alberto, Rogelio, Guillermo y al que en paz descansa José Luis, por haberme brindado su apoyo y el calor familiar.

A mis compañeros y vecinos de cubiculo: Carlos Domínguez, Javier Godoy, Javier Salinas, Brenda, Eduardo de la Fuente (maily, Mr. Rosas), Fidel Cruz, Octavio.

A todo el personal del instituto de Astronomía y al mismo instituto por haberme permitido realizar mi tesis en él.

Al club de motociclistas “Bucaneros de Ensenada” por haberme apoyado y haber compartido conmigo muy buenos momentos en mi vida.

A todos y cada uno de mis amigos, que de alguna manera influyeron en mi vida y supieron estar en el momento correcto.....

RESUMEN

Se presenta un análisis de estabilidad, en un disco protoplanetario de grosor general, partiendo de la idea de que los elementos de materia que constituyen el disco, se comportan como elementos de fluido. Nos centramos en hacer el análisis para el caso puramente hidrodinámico considerando la característica de fluido incompresible. Para establecer la estabilidad del disco, haremos un análisis en función de modos normales para perturbaciones lineales. De tal análisis, obtenemos un criterio de estabilidad general en dirección transversal al plano del disco, este análisis será obtenido bajo el panorama de cálculo de variaciones. También obtenemos la solución analíticas para un caso en particular, lo que nos permitan corroborar en parte, los resultados obtenidos en el criterio de estabilidad general. Esto en conjunto con otros trabajos, en los cuales solamente se hace un análisis en dirección radial, nos puede permitir un mejor entendimiento de la dinámica de las perturbaciones lineales.

Índice

1	Introducción	1
2	Conceptos fundamentales	7
2.1	Ecuación fundamental para un fluido newtoniano	8
2.1.1	Relación entre el esfuerzo deviatórico y la cantidad de tensión para un fluido newtoniano	9
2.1.2	Comentarios del término viscoso.	16
2.1.3	Ecuación de Navier-Stokes.	17
2.2	Aproximación de Boussinesq	18
2.2.1	Ecuación de continuidad	19
2.3	Criterio de Rayleigh	21
3	Análisis de estabilidad hidrodinámica	25
3.1	Planteamiento del problema	26
3.2	Ecuaciones en términos del desplazamiento lagrangiano	29
3.3	El caso de simetría axial.	32

3.4	Solución general de las ecuaciones.	34
3.4.1	caso $q=0$	36
3.4.2	caso $q=1$	43
3.4.3	caso $q=2$	45
4	Conclusiones	47

Capítulo 1

Introducción

Nuestro conocimiento acerca del sistema solar, ha mejorado mucho durante los últimos veinte años debido a la nueva información que se ha descubierto mediante el empleo de mejores telescopios, radiotelescopios y sondas espaciales. Gracias a estos avances tecnológicos, nuestro conocimiento se ha extendido en los procesos por los cuales llegaron a constituirse la Tierra y los demás planetas. Actualmente, los astrónomos suponen que el Sol y los planetas se formaron al mismo tiempo a partir de una nube, o nebulosa, de gas y polvo. De esta teoría entre otras, surgen las siguientes interrogantes: ¿Cuándo dio esta nebulosa origen al sistema solar (solar nebula)? ¿De qué estaba compuesta la nebulosa solar?. ¿Cómo evoluciono el material sólido a partir de una nube de gas?. ¿Que causo la diferencia entre los planetas terrestres (pequeños y densos) y los planetas Jovianos (grandes y rarificados)?.

La versión moderna de la teoría nebular de Kant y Laplace, el paradigma domi-

nante para la formación de sistemas planetarios, establece los siguientes puntos:

- Una nebulosa en rotación se forma a partir de una nube de gas interestelar que se contrae o se colapsa (fig. 1.a). La tendencia a conservar el momento angular, provoca que el gas de la nube gire mas rápido y la nebulosa tienda a aplanarse formando un disco (fig. 1.b). Bajo ciertas condiciones, la nebulosa se forma con una concentración central (protosol) la cual es envuelta por el disco de gas (y polvo).
- Una vez formado el disco, en su interior se llevara a cabo la formación de los planetas, a partir de la acumulación de granos de polvo y gas en objetos cada vez mas grandes. La formación del sistema solar bajo estas condiciones puede explicar por que los planetas tienen alrededor de un 98 por ciento del momento angular total, mientras que el sol contiene 99.9 por ciento de la masa total del sistema. Los mecanismos de disipación presentes en un medio gaseoso, pueden también explicar por que las órbitas de los planetas son casi coplanares circulares y su giro alineado (fig. 1.c).
- En la formación de los planetas por acreción (con “acreción” nos referimos a la acumulación de materia sobre un cuerpo masivo central) de sólidos, los núcleos de los planetas Jovianos son los primeros en formarse, debido a que se forman en las regiones mas frías de la nebulosa solar, donde la abundancia de gas y polvo es mayor por la coagulación de hielo. Los planetas Jovianos adquieren suficiente masa como para empezar a capturar gravitacionalmente gran parte del gas que

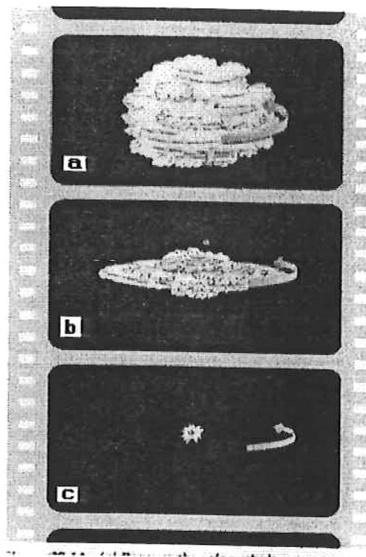


Figura 1.1: (a) Debido a que la nebulosa solar se encontraba girando, (b) esta se contrajo en un disco y (c) los planetas se formaron con órbitas casi en el mismo plano.

los rodea dentro de la nebulosa solar; esto puede explicar sus grandes tamaños y su composición.

Las observaciones astronómicas de los últimos veinte años, refuerza este paradigma y sugieren además que el disco protoplanetario medio ambiente donde se formaron los planetas, se puede modelar apropiadamente como un disco de acreción, en el cual se transporta momento hacia afuera, dando como resultado el acrecimiento de la masa a el objeto central (protosol). Hacemos un paréntesis para señalar que aunque el termino de acreción no existe en el castellano, el termino de discos de acreción es el propuesto por la IAU para denotar este tipo de objetos.

Esto nos lleva a una de las mas grandes incertidumbres que se tiene en los estudios de discos protoplanetarios; el mecanismo de transferencia de momento angular. Este mecanismo, gobierna la cantidad con la que el material del disco es acretado y/o

dispersado por el Sol. Además, controla la completa evolución del sistema. La disipación viscosa inducida por las moléculas, es el mecanismo natural de transferencia de momento angular. El cual, no obstante, da escalas tiempos de evolución para la nebulosa solar, mucho mayores que la presente edad del sistema solar.

Esto implica que algunos otros mecanismos debieron estar presentes en la nebulosa que formo el sistema solar, para tener un mecanismo de transferencia de momento mas eficiente.

El interés moderno en el estudio de discos de acreción tubo sus inicios en el trabajo de Kuiper (1941) [1] en el tratamiento de sistemas binarios. Kuiper estudio las propiedades de los flujos de gas inducidos de una estrella a otra por medio de fuerzas de marea. A el particularmente le intrigaron los resultados “curiosos” en el curso de la transferencia de materia, al parecer se formaba un anillo alrededor de la estrella acretante. Esos anillos de hecho, fueron los primeros indicios de estructuras que vendrían siendo visualizadas como prueba que sus estudios estaban correctos. Varios trabajos importantes de esta era (por ejemplo Crawford and Kraft, 1956 [2]) muestran un entendimiento de los resultados de Kuiper y recurren a ellos como apoyo para lo que hoy podemos referirnos como discos basados en acreción.

El principal problema de los últimos 30 años en la teoría de discos de acreción ha sido entender como es que acretan. En principio, la presencia de un arrastre viscoso permite la transferencia de momento angular de un elemento de fluido a otro, la viscosidad molecular es incapaz de reproducir las tazas de acreción observadas en

discos de acreción de diversos tipos (ver por ejemplo: Papalizoce and Lin 1997 [3]). Si de otra manera, el disco de algún modo fuera turbulento, la viscosidad efectiva debido a la interacción de remolinos¹.

(eddies), puede fácilmente ser mucho mayor, dando lugar a las tasas de acreción observadas. La pregunta ahora es: ¿Bajo que condiciones se da la turbulencia en estos discos?. Esta pregunta es el punto central de esta tesis, para entender como se es que se da la turbulencia en estos discos, debemos establecer un criterio que nos diga bajo que condiciones ocurren inestabilidades en el flujo del gas en discos protoplanetarios. Nos restringiremos a estudiar el caso puramente hidrodinámico y de flujo incompresible, bajo el panorama de perturbaciones lineales. Este tipo de análisis ya se ha realizado anteriormente, como el trabajo de B. Dubrulle y Valdetarro [5]. Como antecedentes a este problema podemos señalar el trabajo de Chandrasekhar [13] y el trabajo de Drazin and Reid [6], quienes analizaron la estabilidad de un flujo de Couette. En este trabajo, estamos interesados en analizar como es el comportamiento de las perturbaciones en el flujo básico, de manera global. Esto nos dará un panorama en conjunto con los resultados obtenidos por estas personas, mas general y un mayor entendimiento sobre los procesos que ocurren en tales discos. Podemos también citar los trabajos de Steven A. Balbus y John Hawley [7], B. Dubrulle y Knobloch [8]. Donde se incluyen los efectos del campo magnético. Tales modelos son interesantes, ya que exponen de manera mas completa la dinámica de las perturbaciones en discos

¹De acuerdo a Frisch y Orszag (1990)[4], la idea una "viscosidad de remolino" (eddy viscosity) aumentada, data desde los principios del siglo XX y fue originada por Boussinesq y Prandtl

protoplanetarios, pero esto implica un sistema de ecuaciones muy complejo, para el cual difícilmente podemos obtener soluciones analíticas. A diferencia de este trabajo, además de establecer un criterio de estabilidad y de obtener soluciones analíticas para ciertos perfiles de rotación angular, no fijamos el grosor del disco.

Como comentamos, en el caso magnetohidrodinámico obtener soluciones analíticas se torna extremadamente difícil, y a lo que mas se puede llegar es simplemente a obtenerse un criterio muy restringido de estabilidad. La manera en que generalmente se tratan este tipo de problemas, es numéricamente. La aportación importante entonces de esta tesis, es la obtención analítica de un criterio de estabilidad hidrodinámica, así como soluciones para uno de los perfiles de rotación propuestos en el análisis.

En el capítulo dos de esta tesis, se expondrán los conceptos relevantes para el desarrollo de nuestro análisis así como también, el criterio fundamental de nuestro análisis: el criterio de Rayleigh. En el capítulo tres, se establecerá el criterio general de estabilidad así como también el resultado analítico para un perfil de rotación angular en particular. Por último en el capítulo cuatro estableceremos las conclusiones obtenidas de nuestro análisis.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En este capítulo, se expondrán los conceptos físicos que son fundamentales para el desarrollo de nuestro problema. La dinámica de las perturbaciones lineales en un disco de acreción se harán con un enfoque hidrodinámico, con la idea de que cada elemento que constituye nuestro disco se comporta como elemento de fluido. Las ecuaciones fundamentales en mecánica de fluidos son básicamente dos, si se considera que existe equilibrio termodinámico; la ecuación de conservación de masa y la ecuación de conservación de momento (algunas veces llamadas ecuaciones de Cauchy). El primer concepto que expondremos a continuación, es a partir de la consideración de que el flujo es laminar e isotrópico; la derivación de las ecuaciones de Navier Stokes. El segundo concepto se refiere a la aproximación de Boussinesq o condición de incompresibilidad. Por último, revisaremos la derivación clásica del criterio de Rayleigh que es básico en un análisis hidrodinámico para determinar de manera general la estabilidad

de un flujo de “Couette”. La ecuación de continuidad no será derivada aquí, ya que el interés de este capítulo es solo de establecer el panorama y las características bajo las cuales trataremos el flujo, tal derivación es comúnmente encontrada en los textos de mecánica de fluidos.

2.1 Ecuación fundamental para un fluido newtoniano

El análisis dinámico de un flujo generalmente se basa en considerar que el fluido está compuesto de pequeños elementos de fluido, y entonces analizar la transferencia de momento y masa entre elemento y elemento de fluido. La relación entre el esfuerzo y la deformación en un medio continuo es llamada *ecuación fundamental* o relación constitutiva. Partimos de la suposición de que en un fluido en reposo solo hay componentes normales de esfuerzo superficiales, y el esfuerzo no depende de la orientación de la superficie, en otras palabras, el tensor de esfuerzos para el fluido en reposo es *isotrópico* o esféricamente simétrico. Un tensor isotrópico es definido como en el cual, sus componentes no cambian bajo una rotación del sistema de coordenadas en el que se definan. El tensor isotrópico fundamental de segundo orden es, la delta de Kronecker

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otro tensor isotrópico de segundo orden debe ser proporcional a δ . Generalmente para el tensor de esfuerzos en un fluido en reposo adopta la forma

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad (2.1)$$

donde P es la *presión termodinámica* relacionada con ρ y T por una ecuación de estado. [Por ejemplo, la presión termodinámica para un gas ideal es $P = \rho RT$]. El signo negativo es introducido en (2.1) al definirse que las componentes normales del esfuerzo son positivas si indican tensión, y negativas para compresión. En un fluido en movimiento se desarrollan componentes adicionales de esfuerzo debido a la viscosidad. Entonces las componentes de σ son diferentes, y el esfuerzo cortante o las componentes tangenciales de esfuerzo, se manifiestan debido a que el fluido ahora se encuentra en movimiento. Para un fluido en movimiento podemos partir de que el tensor de esfuerzos tiene una parte $-P\delta_{ij}$ la cual debe existir si el fluido se encuentra en reposo, y otra parte d_{ij} (esfuerzo deviatórico) solo para cuando el fluido se encuentra en movimiento:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij}. \quad (2.2)$$

2.1.1 Relación entre el esfuerzo deviatórico y la cantidad de tensión para un fluido newtoniano

El esfuerzo en algún punto dentro de un fluido, es una expresión de las reacciones mutuas entre las partes adyacentes en una superficie elemental cerca del punto, entonces, es natural considerar la relación entre el esfuerzo y las propiedades locales del fluido.

La manera de determinar el esfuerzo en un fluido en reposo, de manera general es por medio de P , ya que esta relacionada localmente por la ecuación de estado cuando los parámetros de estado (ejemplo densidad y temperatura) son conocidos; y además si la distribución de las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen que actúan en el fluido son conocidas, no es necesario considerar variables locales de estado en mas de un punto debido a que la presión relativa es determinada en cualquier lugar por la ecuación de equilibrio mecánico (Por ejemplo: la máquina de Pascal.). Por ejemplo:

$$P = P_o - \rho gz$$

En el caso de un fluido en movimiento relativo, la relación entre las propiedades locales del fluido es mas complicada, en dos aspectos: primero, el tensor de esfuerzos contiene tanto una parte no isotrópica como una parte isotrópica, y segundo, la cantidad escalar de P que especifica la parte isotrópica en si misma no es una de las variables de estado usada en equilibrio termodinámico. La primera parte de esas dos manifestaciones de la desviación del equilibrio representa un transporte de momento, o fricción interna que se discutirá a continuación.

El argumento que usaremos para establecer la relación entre el esfuerzo deviatórico d_{ij} y las propiedades locales del fluido, es del tipo de aproximación *fenomenológica*, y la forma de las relaciones que tomaremos es independiente del mecanismo molecular de fricción interna.

La cantidad de flujo de momento atraves de un elemento de superficie material, la cual es resultado de la interacción friccional de la materia en movimiento relativo

entre dos elementos de fluido y la cual es representada por el esfuerzo deviatórico, en general se considera como una hipótesis, que su dependencia es solo en la distribución instantánea de la velocidad del fluido en la vecindad del elemento, o mas precisamente, en la desviación de la uniformidad de la distribución de velocidades.¹ El gradiente de velocidad, del cual una componente típica es $\partial u_i / \partial x_j$, es entonces el parámetro del campo de flujo con mas relevancia para el esfuerzo deviatórico, y entonces $\partial u_i / \partial x_j$ es normalmente uniforme sobre distancias grandes comparadas con las del mecanismo de transporte molecular de momento, supondremos que este es el parámetro *relevante*. Además, d_{ij} es cero en fluido estacionario y entonces desaparece con $\partial u_i / \partial x_j$.

Nosotros no tenemos manera de deducir la dependencia de d_{ij} en $\partial u_i / \partial x_j$ para fluidos en general, por simplicidad supondremos que es función lineal de varias componentes del gradiente de velocidad para cantidades suficientemente pequeñas de esas magnitudes.

El tensor de gradiente de velocidad puede ser descompuesto en su parte simétrica y antisimétrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

La parte antisimétrica de la ecuación (2.3) representa la rotación del fluido sin deformación, debido a que

$$\omega_k = (\nabla \times \vec{u})_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

¹Ver An introduction to Fluid dynamics, G. K. Batchelor, cap. 3 [10].

y esta no puede generar por si misma esfuerzo² (una justificación se dará un poco adelante, bajo la restricción de un fluido isotrópico). El esfuerzo debe entonces ser generado solamente por la cantidad tensorial

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Que no es otra cosa que la tasa de deformación.

Tomemos una relación lineal del tipo

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.4)$$

donde A_{ijkl} es un tensor de cuarto orden con 81 componentes que dependen del estado termodinámico local del medio, pero no directamente de la distribución de velocidades. La ecuación (2.4) simplemente significa que cada componente del esfuerzo es linealmente relacionada con todas las nueve componentes de e_{ij} ; todas las 81 constantes son necesarias para describir completamente la relación.

Ahora veremos que si el fluido es isotrópico no se puede generar esfuerzo deviatórico. Para esto consideremos el caso en el que el fluido se encuentra en rotación pura. Se observa de (2.3) que una dirección contraria de $\vec{\omega}$ ocasiona un cambio de signo en todas las componentes del esfuerzo deviatórico, lo cual es imposible en un fluido isotrópico porque esta operación es equivalente a mantener a $\vec{\omega}$ fija y escoger

²Aunque en algunas exposiciones de dinámica de fluidos se afirme que el esfuerzo deviatórico no puede ser generado por rotación pura, independiente de la estructura del fluido, simplemente porque esta no genera una deformación en el fluido; algunas veces, la justificación rigurosa se torna elusiva.

una orientación diferente del fluido. Si suponemos que el medio es isotrópico y que el tensor de esfuerzos es simétrico solo dos de los 81 elementos de A_{ijkl} sobreviven. En un medio isotrópico la relación tensión-deformación es independiente de la rotación del sistema de coordenadas. Es mostrado en textos de análisis tensorial³ que todos los tensores isotrópicos de orden par se reducen a productos de δ_{ij} , y que un tensor isotrópico de cuarto orden debe de tener la forma

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (2.5)$$

donde λ , μ y γ son escalares que dependen de las propiedades termodinámicas de estado locales. Entonces ya que d_{ij} es un tensor simétrico, (2.4) requiere que A_{ijkl} también sea simétrico en i y en j . Esto es consistente con (2.4) solo si

$$\gamma = \mu, \quad (2.6)$$

entonces solo dos constantes de las 81 originales, sobreviven bajo las restricciones de la isotropía material y de la simetría de los esfuerzos. Ahora podemos ver que substituyendo (2.5) en la ecuación (2.4) obtenemos

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kl} \delta_{ij}$$

donde $e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ es la cantidad volumétrica de tensión. El tensor de esfuerzo total (2.4) es entonces

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kl} \delta_{ij} \quad (2.7)$$

³Ver por ejemplo, Aris (1962) [11], pagina 30.

Las dos constantes escalares μ y λ pueden relacionarse de la siguiente manera, tomando $i = j$ y sumando sobre todos los índices repetidos y notando que $\delta_{ii} = 3$, tenemos que

$$\sigma_{ii} = -3P + (2\mu + 3\lambda)e_{kk},$$

de la cual se encuentra que la presión es

$$P = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\nabla \cdot \vec{u}. \quad (2.8)$$

Finalmente para un fluido completamente incomprensible ($\nabla \cdot \vec{u} = e_{ii} = 0$) el tensor d_{ii} tiene cero contribución al promedio normal del esfuerzo deviatorico, esto es

$$d_{ii} = (2\mu + 3\lambda)e_{ii} = 0$$

para todos los valores de e_{ii} , implicando que

$$2\mu + 3\lambda = 0,$$

ó,

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (2.9)$$

se encuentra que es muy aproximada, y puede ser derivada de la teoría cinética de gases monoatómicos⁴.

Con esta suposición la ecuación (2.7) se reduce a

⁴Aspectos históricos interesantes de la suposición de Stokes $3\lambda + 2\mu = 0$ pueden ser encontrados en Truesdell (1952) [12].

$$\sigma_{ij} = -\left(P + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{u}\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (2.10)$$

Esta relación lineal entre σ y \mathbf{e} es consistente junto con la definición del coeficiente de Newton para la viscosidad en un simple flujo paralelo $u(y)$, para el cual (2.10) da un esfuerzo de corte de $\sigma = \mu(du/dy)$. Consecuentemente, un fluido que obedece (2.10) es llamado *fluido newtoniano*. La propiedad del fluido μ en (2.10) solo depende del estado termodinámico.

Los términos no diagonales de (2.10) son fácil de entender. Ellos son del tipo

$$\sigma_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

los cuales relacionan el esfuerzo de corte con la cantidad de corte. Los términos diagonales son mas difíciles de entender. Por ejemplo, (2.10) da

$$\sigma_{11} = -p + 2\mu\left[-\frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]$$

lo cual significa que el esfuerzo viscoso normal en el plano normal a el eje x_1 es proporcional a la diferencia entre la cantidad de extensión en la dirección x_1 y la cantidad de expansión promedio en el punto. Solo las cantidades de extensión diferentes del promedio por consiguiente generan esfuerzo viscoso normal.

2.1.2 Comentarios del término viscoso.

Para un fluido incompresible $D\rho/Dt = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, el esfuerzo viscoso en un punto es

$$d_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

el cual muestra que σ depende solo de la deformación del elemento de fluido en un punto, y no de la rotación ($\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i$). Nosotros podemos usar esta propiedad en la ecuación fundamental newtoniana, basado en el hecho de que para rotación de cuerpo rígido (esto es, un flujo en el cual la velocidad tangencial es proporcional al radio) los elementos de fluido no se deforman, y entonces no existe esfuerzo viscoso.

Consideremos la fuerza viscosa por unidad de volumen en algún punto, dada por

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = -\mu (\nabla \times \vec{\omega})_i, \quad (2.12)$$

donde hemos usado la relación para un fluido incompresible,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{\omega})_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon_{kmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_m} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i}. \end{aligned}$$

La relación (2.12)) puede causar confusión, ya que se ve que la fuerza neta viscosa

depende de la *vorticidad*⁵, mientras que (2.11) muestra que el esfuerzo solo depende de la cantidad de tensión y es independiente de la vorticidad local. La aparente paradoja es explicada notando que la fuerza neta viscosa esta dada por las derivadas espaciales de vorticidad o la derivada espacial de deformación; de la manera de (2.12). La fuerza neta viscosa desaparece cuando ω es uniforme en todas partes (como en rotación de cuerpo sólido), en ese caso la condición de incompresibilidad requiere que el esfuerzo sea cero en todas partes.

2.1.3 Ecuación de Navier-Stokes.

La ecuación de movimiento para un fluido Newtoniano es obtenida por la sustitución de la ecuación fundamental (2.10) en la ecuación de Cauchy o de conservación de momento

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

de tal sustitución obtenemos

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u})\delta_{ij} \right], \quad (2.13)$$

donde ρF_i representa una fuerza de cuerpo (por ejemplo la fuerza de gravedad.). En esta ultima ecuación notamos que $(\partial P/\partial x_j)\delta_{ij} = \partial P/\partial x_i$. La ecuación (2.13) es una forma general de la ecuación de *Navier-Stokes*. La viscosidad μ en esta ecuación puede ser función del estado termodinámico, y es notable que para algunos fluidos μ tiene

⁵El término $\nabla \times \vec{\omega}$, es conocido en mecánica de fluidos como la vorticidad.

una fuerte dependencia en la temperatura, un decrecimiento con T para líquidos y un aumento con T para los gases. Si las diferencias de temperatura dentro del fluido son pequeñas, esto es, que de un punto a otro punto dentro del fluido se mantenga constante, entonces μ puede salir de la derivada en (2.13) reduciéndose a

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho F_i + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho F_i + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u}) \right] \end{aligned}$$

donde

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_3},$$

es el laplaciano de u_i . Para fluidos incompresibles $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{F} + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (2.14)$$

Si los efectos viscosos son despreciables, obtendremos la *ecuación de Euler*

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{F}. \quad (2.15)$$

2.2 Aproximación de Boussinesq

Para flujos que satisfacen ciertas condiciones, Boussinesq sugirió en 1903 que se pueden despreciar los cambios en la densidad en el fluido, excepto en el término

gravitacional donde ρ es multiplicado por g . Esta aproximación también trata las propiedades del fluido (tales como μ , κ , C_p) como constantes. Aquí discutiremos las bases de la aproximación de una manera intuitiva y examinaremos las simplificaciones resultantes en las ecuaciones de movimiento, tomando en cuenta las características de un fluido isotrópico.

2.2.1 Ecuación de continuidad

La aproximación de Boussinesq reemplaza la ecuación de continuidad

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.16)$$

por la forma incompresible

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.17)$$

Esto no significa algunas veces, que la densidad sea mantenida constante a lo largo de la dirección de movimiento, si no que simplemente la magnitud de $\rho^{-1}(D\rho/Dt)$ es pequeña en comparación con la magnitud del gradiente de la velocidad en $\nabla \cdot \vec{u}$. Podemos pensar en varias situaciones donde las variaciones de la densidad no pueden ser despreciadas. La primera situación es para un flujo estacionario con un numero de Mach grande (definido como u/c , donde u es la velocidad medida típicamente del flujo y c es la velocidad del sonido en el medio). A grandes números de Mach los efectos de la presión son grandes debido a que ocurren cambios muy significativos en la densidad. Un valor típico de c para el aire a temperaturas ordinarias es 350 m/s, entonces la hipótesis es razonable para velocidades menores de 100 m/s. Para agua

$c = 1470$ m/s pero las velocidades normalmente alcanzadas son mucho menores que estas, entonces la hipótesis de incompresibilidad en líquidos sigue siendo razonable.

Una segunda situación en la cual los efectos de incompresibilidad son importantes es cuando la escala vertical del flujo es muy grande comparada con las variaciones en las presiones hidroestáticas causando grandes cambios en la densidad. En un campo hidroestático la escala vertical en la cual los cambios en la densidad se tornan importantes es del orden de $c^2/g \sim 410$ km para el aire.

En las dos situaciones mencionadas el medio se mantiene como “compresible”, y la densidad depende fuertemente de la presión. Ahora supongamos que los efectos de compresibilidad son pequeños, entonces los cambios en la densidad son causados solo por cambios en la temperatura, como en el problema de convección. En este caso la aproximación de Boussinesq se aplica cuando las variaciones en la temperatura son pequeñas. Supongamos que ρ cambia con T de acuerdo a

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha\delta T$$

donde $\alpha \equiv \rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_P$ es el coeficiente térmico de expansión. Para un gas perfecto $\alpha = 1/T \sim 3 \times 10^{-3} K^{-1}$, y para líquidos típicos $\alpha \sim 5 \times 10^{-4} K^{-1}$ a temperatura ambiente. Con una diferencia de la temperatura en el fluido de $10^\circ K$, la variación de la densidad será de unos cuantos puntos porcentuales. Esto nos regresa a que $\rho^{-1}(D\rho/Dt)$ puede también ser no mayor que un bajo porcentaje en los gradientes de velocidad en $\nabla \cdot \vec{u}$. Para ver esto supongamos que el campo de flujo es caracterizado por una escala de longitud L , una escala de velocidad U , y una escala de temperatura

δT . Lo cual quiere decir que la que la velocidad varia por U , y la escala de temperatura varia por δT , en una distancia del orden de L . La magnitud de los dos términos en la ecuación de continuidad tiene un radio típico

$$\frac{(1/\rho)(D\rho/Dt)}{\nabla \cdot \vec{u}} \sim \frac{(1/\rho)u(\partial\rho/\partial x)}{U/L} \sim \frac{(U/\rho)(\delta\rho/L)}{U/L} = \frac{\delta\rho}{\rho} = \alpha\delta T \ll 1$$

las cuales permiten reemplazar la ecuación de continuidad (2.16) por su forma incompresible (2.17), y la ecuación de Navier Stokes (ec. (2.15)) como

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{u}.$$

2.3 Criterio de Rayleigh

Cuando se estudia un flujo con las características del tipo de “Couette” desde el punto de vista hidrodinámico, existe el denominado criterio de Rayleigh, que determina la estabilidad de dicho fluido para perturbaciones lineales. Este se enuncia de la siguiente manera: *en ausencia de viscosidad, la condición necesaria y suficiente para que una distribución de velocidad angular $\Omega(r)$ sea estable es*

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0 \quad (2.18)$$

en cualquier intervalo y además, la distribución es inestable si $(r^2\Omega)^2$ decrece en cualquier punto dentro del intervalo.

$r^2\Omega$ es el momento angular por unidad de masa, de un elemento de fluido alrededor del eje de rotación, una manera alternativa de establecer el criterio de Rayleigh es:

una estratificación de momento angular con respecto de un eje es estable si y solo si esta crece monótonicamente hacia afuera.

Rayleigh no estableció su criterio por medio de una discusión analítica en función de las ecuaciones perturbadas relevantes, sino de la siguiente manera.

Las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan un fluido incompresible inviscido en coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) son ⁶:

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)U_r - \frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)U_\theta + \frac{U_\theta U_r}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)U_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (2.21)$$

donde

$$(\vec{U} \cdot \nabla) = U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Además tenemos la ecuación de continuidad, que bajo la aproximación de Boussineq se escribe como:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad (2.23)$$

Estas ecuaciones claramente permiten la solución estacionaria,

$$U_r = U_z = 0 \quad U_\theta = V(r) \quad (2.24)$$

⁶Las consideraciones que se siguen son igualmente aplicables si una fuerza externa derivable de un potencial axisimétrico esta presente

donde $V(r)$ es una función arbitraria de r . En términos de $V(r)$, la distribución de presión es determinada por

$$P = \rho \int \frac{dr}{r} V^2(r) \quad (2.25)$$

Cuando se tiene simetría axial, las ecuaciones (2.20)-(2.22) se reducen a:

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} = \frac{U_\theta^2}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P}{\rho} \right). \quad (2.28)$$

La ecuación (2.24) es equivalente a

$$\frac{d}{dt} (r U_\theta) = \frac{d}{dt} (r^2 \Omega) = 0. \quad (2.29)$$

De lo cual, el momento angular $L (= r^2 \Omega)$ de un elemento de fluido, por unidad de masa, se mantiene constante conforme este se mueve. Y los movimientos en la dirección radial y axial toman lugar como si U_θ estuviera ausente, y una fuerza $U_\theta^2/r = L^2/r^3$ actuase en la dirección radial. Ya que L es una constante de movimiento, podemos asociar a la fuerza L^2/r^3 una energía potencial $\rho L^2/2r^2$. Esta energía potencial es la misma que la energía cinética asociada con la velocidad U_θ en la dirección transversal.

Supongamos ahora que intercambiamos el fluido contenido en dos anillos elementales, de igual altura y masa, centrados en $r = r_1$ y $r = r_2 (> r_1)$. Si dr_1 y dr_2 son los

grosos de los anillos, la igualdad de las masas requiere que $2\pi r_1 dr_1 = 2\pi r_2 dr_2 = dS$.

En vista de que L es constante con el movimiento, el fluido en r_2 , después del intercambio, debe de tener el mismo momento angular (L_1) que tenía en r_1 antes del intercambio; similarmente, el fluido a r_1 , después del intercambio, debe de tener el mismo momento angular (llamado L_2) que el que se tenía en r_2 . Como resultado, el cambio en la energía cinética (o, que es lo mismo, el cambio en la energía potencial centrífuga) es proporcional a

$$\left[\left(\frac{L_2^2}{r_1^2} + \frac{L_1^2}{r_2^2} \right) - \left(\frac{L_1^2}{r_1^2} + \frac{L_2^2}{r_2^2} \right) \right] dS = (L_2^2 - L_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) dS. \quad (2.30)$$

Recordando que $r_2 > r_1$, observamos que el cambio en energía es positivo o negativo de acuerdo a si L_2 es mayor o menor que L_1 . Consecuentemente, si L^2 es una función monótonamente creciente de r , el intercambio de anillos de fluido tal como el que acabamos de imaginar no puede ocurrir sin una fuente de energía; y esto significa estabilidad. De otra manera, si L^2 decrece en cualquier punto, entonces el intercambio de anillos de fluido en esta región resultara de una liberación de energía; y esto significa inestabilidad. En el siguiente capítulo se dará una derivación formal del criterio de estabilidad para ciertos perfiles de velocidad, lo cual nos dará una idea del comportamiento hidrodinámico de las perturbaciones en discos protoplanetarios.

Capítulo 3

Análisis de estabilidad hidrodinámica

El fin de este trabajo consiste en analizar bajo que condiciones un flujo del tipo de Couette¹ (Similar al de un disco de acreción dada la simetría cilíndrica de nuestro problema.), se mantiene estable cuando una perturbación infinitesimal se le aplica. Es bien sabido que la inestabilidad hidrodinámica en un flujo de este tipo ocurre cuando un gradiente de momento angular adverso se sostiene. Tal como dicta el criterio de Rayleigh presentado en el capítulo anterior.

Para el tratamiento de un problema de estabilidad generalmente se procede de la siguiente manera. Se empieza con un flujo básico no perturbado, el cual representa un estado estacionario del sistema. Suponiendo que las variables físicas que describen

¹El flujo de Couette es aquel que existe entre dos cilindros concéntricos, girando uno con respecto al otro.

el sistema sufren pequeños incrementos (infinitesimales), y despreciando todos los productos y potencias mayores que la primera en los incrementos, solo nos quedamos con los términos lineales. La teoría derivada en base de tales *ecuaciones linealizadas* es llamada teoría lineal de estabilidad a diferencia de las *teorías no lineales* en las cuales se consideran posibles amplitudes finitas de las perturbaciones. En este trabajo solo estamos interesados en la teoría lineal de estabilidad, la cual presupone que las perturbaciones son infinitesimales.

La estabilidad debemos entenderla en el sentido de estabilidad con respecto a todas las posibles perturbaciones (infinitesimales). De manera que para que una investigación de estabilidad sea completa, es necesario que la reacción del sistema para todas las posibles perturbaciones sea analizada. En la práctica, esto se lleva a cabo por medio de expresar una perturbación arbitraria como una superposición de ciertos modos básicos permitidos y haciendo un exámen de la estabilidad del sistema para a cada uno de esos modos.

3.1 Planteamiento del problema

El problema que analizaremos es el siguiente. Consideramos flujos estacionarios circulares, de un fluido incompresible ² entre dos cilindros coaxiales, donde los efectos de viscosidad son despreciables. Las ecuaciones que gobiernan un flujo no viscoso e

²Incompresibilidad en el sentido de la aproximación de Boussinesq (ver sección 2.3).

incompresible son,

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) U_r - \frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) U_\theta - \frac{U_\theta U_r}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) U_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (3.4)$$

donde

$$(\vec{U} \cdot \nabla) = U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.5)$$

y

$$\Pi = P/\rho + \Psi. \quad (3.6)$$

En donde Ψ es un potencial gravitacional axisimétrico dado, ρ es la densidad del disco, P es la presión hidrostática y \vec{U} es el vector velocidad para un elemento de fluido localizado en algún punto del disco con coordenadas r , θ y z .

Un conjunto de soluciones estacionarias para este sistema de ecuaciones es dada por:

$$U_r = U_z = 0, \quad U_\theta = r\Omega(r). \quad (3.7)$$

Ya que estamos interesados en analizar el comportamiento de perturbaciones pequeñas en el plano (r, z) , propondremos una solución de la forma:

$$\delta F(z, r, \theta) = f(z, r)e^{i(pt+k_\theta\theta)}, \quad (3.8)$$

donde p es una constante (la cual puede ser compleja), por la condición de unicidad k_θ es un entero (el cual puede ser positivo, negativo o cero) y se identifica como el número de onda en dirección axial y $f(z, r)$ es la amplitud de la perturbación en la cantidad F . Entonces el estado fuera de equilibrio, estará descrito por las cantidades:

$$\begin{aligned} u_r(z, r)e^{i(pt+k_\theta\theta)}, \quad r\Omega(r) + u_\theta(z, r)e^{i(pt+k_\theta\theta)}, \quad u_z(z, r)e^{i(pt+k_\theta\theta)}, \\ (\delta\Pi =)\varpi(z, r)e^{i(pt+k_\theta\theta)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

El nuevo conjunto de ecuaciones partiendo de (3.1) a (3.4) en función de (3.9), que describirán el estado fuera de equilibrio a primer orden son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)u_r + i\frac{k_\theta}{r}u_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.10)$$

$$i\sigma u_r - 2\Omega u_\theta = -\frac{\partial \varpi}{\partial r}, \quad (3.11)$$

$$i\sigma u_\theta + \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right)u_r = -i\frac{k_\theta}{r}\varpi, \quad (3.12)$$

$$i\sigma u_z = -\frac{\partial \varpi}{\partial z}, \quad (3.13)$$

donde

$$\sigma = p + \Omega k_\theta. \quad (3.14)$$

3.2 Ecuaciones en términos del desplazamiento lagrangiano

Las perturbaciones en un flujo pueden también expresarse en términos del *desplazamiento Lagrangiano* $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$, el cual describe el desplazamiento de un elemento de fluido en el flujo perturbado relativo a su localización \vec{x} al tiempo t en el flujo no perturbado.³

En esta descripción el flujo base no necesita ser estacionario y el análisis matemático se simplifica un poco. Si llamamos q a alguna cantidad que puede ser relacionada con un elemento de fluido, entonces *el cambio Lagrangiano* en q debido a la perturbación es definido por

$$\Delta q = q(\vec{x} + \vec{\xi}(\vec{x}, t), t) - Q(\vec{x}, t), \quad (3.15)$$

donde $Q(\vec{x}, t)$ es la distribución de q en el flujo no perturbado, y el correspondiente *cambio euleriano* es definido por

$$q^\dagger = q(\vec{x}, t) - Q(\vec{x}, t). \quad (3.16)$$

A primer orden en $\vec{\xi}$, dichos cambios están relacionados por

$$\Delta q = q^\dagger + \vec{\xi} \cdot \nabla q, \quad (3.17)$$

³Para una discusión mas general del desplazamiento Lagrangiano ver Chandrasekhar 1969, 13

siendo esta relación válida para cualquier propiedad q .

Consideremos el cambio Lagrangiano en la velocidad, el cual es definido como la velocidad de un elemento de fluido en la posición $\vec{x} + \vec{\xi}$ en el flujo perturbado relativo a su velocidad en \vec{x} en el flujo no perturbado. Entonces tenemos

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\xi}, \quad (3.18)$$

donde \vec{U} es el campo de velocidades del flujo no perturbado, y

$$u^\dagger = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla U \quad (3.19)$$

para el cambio Euleriano de la ecuación (3.17). Ahora podemos proceder directamente a las ecuaciones de modos normales tomando $\vec{\xi} = (\xi_r, \xi_z, \xi_\theta) e^{i(pt+k_\theta\theta)}$. Entonces de la ecuación (3.19) obtenemos que:

$$u_r^\dagger = i\sigma\xi_r, \quad u_\theta^\dagger = i\sigma\xi_\theta - r\frac{d\Omega}{dr}\xi_r, \quad u_z^\dagger = i\sigma\xi_z. \quad (3.20)$$

En términos de este desplazamiento $\vec{\xi}$ las ecuaciones (3.11)-(3.14) son:

$$(\sigma^2 - 2r\Omega\frac{d\Omega}{dr})\xi_r + 2i\Omega\sigma\xi_\theta = \frac{\partial\varpi}{\partial r}, \quad (3.21)$$

$$\sigma^2\xi_\theta - i\sigma\Omega\xi_r = i\frac{k_\theta}{r}\varpi, \quad (3.22)$$

$$\sigma^2\xi_z = \frac{\partial\varpi}{\partial z}, \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\xi_r + i\frac{k_\theta}{r}\xi_\theta + \frac{\partial\xi_z}{\partial z} = 0. \quad (3.24)$$

Multiplicando (3.22) por $i\frac{k_\theta}{r}$ y derivando a (3.23) respecto a z , respectivamente tenemos

$$i\frac{k_\theta}{r}\sigma^2\xi_\theta + \frac{k_\theta}{r}\sigma\Omega\xi_r = -\frac{k_\theta^2}{r^2}\varpi, \quad (3.25)$$

$$\sigma^2\frac{\partial\xi_z}{\partial z} = \frac{\partial^2\varpi}{\partial z^2}, \quad (3.26)$$

De (3.24) y haciendo uso de (3.25) y (3.26), tendremos que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{k_\theta}{\sigma} \frac{2\Omega}{r}\right)\xi_r = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{k_\theta^2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varpi \quad (3.27)$$

Ahora de (3.22) y (3.21)

$$\left(\sigma^2 - 2r\Omega\frac{d\Omega}{dr} - 4\Omega^2\right)\xi_r = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2k_\theta\Omega}{\sigma r}\right)\varpi, \quad (3.28)$$

manipulando (3.27) y (3.28) obtenemos

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r) - \frac{2\Omega k_\theta}{\sigma r}\xi_r = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{k_\theta^2}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varpi \quad (3.29)$$

y

$$\left(\sigma^2 - \Phi(r)\right)\xi_r = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2k_\theta\Omega}{\sigma r}\right)\varpi, \quad (3.30)$$

donde

$$\Phi(r) = 2r\Omega\frac{d\Omega}{dr} + 4\Omega^2 = \frac{2\Omega}{r}\frac{d}{dr}(r^2\Omega). \quad (3.31)$$

A $\Phi(r)$ en flujos de Couette se le conoce como el discriminante de estabilidad.

3.3 El caso de simetría axial.

En el caso que tenemos simetría axial, $k_\theta = 0$ y $\sigma = p$, entonces las ecuaciones (3.29) y (3.30) se reducen a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial z^2}, \quad (3.32)$$

$$\left(p^2 - \Phi(r) \right) \xi_r = \frac{\partial \varpi}{\partial r}, \quad (3.33)$$

eliminando ϖ entre (3.32) y (3.33), obtendremos

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) \right) + \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} = \frac{\Phi(r)}{p^2} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2}. \quad (3.34)$$

La solución de esta ecuación, para un fluido que esta confinado entre dos cilindros coaxiales de radio interior r_i y radio exterior r_e , requiere que las componentes radiales de la velocidad desaparezcan para tales valores de r , dicho de otra manera, debemos considerar las condiciones de frontera:

$$\xi_r = 0 \quad \text{para } r = r_i \text{ y } r_e.$$

En este caso las solución de (3.34) constituye un problema de valor característico clásico de Sturm Liouville. A continuación establecemos de manera general para este tipo de problema, el criterio de estabilidad de la siguiente manera.

Multipliquemos la ecuación (3.34) por $r \xi_r$ e integrémosla sobre el rango r .

$$\int_{r_i}^{r_e} \left[r \xi_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) \right) + r \xi_r \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} \right] dr = \frac{1}{p^2} \int_{r_i}^{r_e} \Phi(r) \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} r \xi_r^2 dr. \quad (3.35)$$

La primera integral del lado izquierdo puede ser reescrita integrándola una vez por partes, de lo cual obtenemos

$$\int_{r_i}^{r_e} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) \right)^2 - r\xi_r \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} \right] dr = -\frac{1}{p^2} \int_{r_i}^{r_e} \Phi(r) \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} r \xi_r^2 dr \quad (3.36)$$

despejando p^2

$$p^2 = \frac{\int_{r_i}^{r_e} \Phi(r) \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} r \xi_r^2 dr}{\int_{r_i}^{r_e} \left[r \xi_r \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) \right)^2 \right] dr}. \quad (3.37)$$

Para tener estabilidad, de acuerdo a como se definió en (3.8), p debe ser un número real, de otra manera tendríamos que la perturbación crecerá exponencialmente con el tiempo. Hasta el momento no podemos determinar el criterio de estabilidad a partir de la ecuación (3.37). En la siguiente sección obtendremos que $\xi(r, z) = Z(z)R(r)$, donde llegaremos a que las soluciones en $Z(z)$ tienen forma sinusoidal. Este resultado lo podemos usar en la ecuación (3.32) para obtener mas información de p , con lo cual llegaremos a que

$$p^2 = \frac{\int_{r_i}^{r_e} \Phi(r) r \xi_r^2 dr}{\int_{r_i}^{r_e} \left[r \xi_r^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r\xi_r) \right)^2 \right] dr}. \quad (3.38)$$

De la ecuación (3.38) es aparente de manera inmediata que p^2 es positivo si $\Phi(r)$ es positivo para todos los puntos del disco dentro del rango r_i y r_e , y es negativo si $\Phi(r)$ es negativo para cualquier punto del disco dentro del rango r_i y r_e . Un resultado adicional para la existencia de modos inestables, es cuando se tiene que $\Phi(r)$ es en cualquier punto del disco negativo, lo cual puede ser deducido considerando la ecuación (3.34) y reescribirla en términos de $Z(z)$ que tienen forma sinusoidal, de lo

cual obtendremos

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) \right) - \xi_r = -\frac{1}{p^2} \Phi(r) \xi_r, \quad (3.39)$$

como condición para que

$$I_1 = \int_{r_i}^{r_e} \Phi(r) r \xi_r^2 dr \quad (3.40)$$

sea un máximo, o un mínimo, dada

$$I_2 = \int_{r_i}^{r_e} \left[r \xi_r^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} (r \xi_r) \right)^2 \right] dr, \quad (3.41)$$

para p^2 , dado el valor I_1/I_2 . Si $\Phi(r)$ debe ser negativa dentro de las fronteras del disco, I_1 permite un valor negativo y por lo tanto un mínimo negativo, y un modo de la perturbación es inestable.

Por lo tanto tenemos que para que un flujo arbitrario sea estable, $\Phi(r)$ debe ser positivo dentro de las fronteras del disco.

3.4 Solución general de las ecuaciones.

Para comparar el resultado obtenido en la sección (1.2), resolveremos algunos casos para los cuales a partir de la ecuación (3.34), podemos obtener soluciones analíticas.

Para esto propondremos que ξ_r es separable, esto es

$$\xi_r(r, z) = Z(z)R(r). \quad (3.42)$$

Entonces de la ecuación (3.34) obtendremos el siguiente par de ecuaciones

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR(r)) \right) = C^2 \left(1 + \frac{\Phi(r)}{p^2} \right) R(r) \quad (3.43)$$

y

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z) - C^2Z(z) = 0 \quad (3.44)$$

Donde C es una constante de separación. Recordemos que ξ_r es la componente del desplazamiento Lagrangiano en dirección radial, entonces, tanto $R(r)$ como $Z(r)$ son cantidades que expresan conjuntamente a través de la ecuación (3.20) la componente de la velocidad en dirección radial. De la ecuación (3.37) tenemos que si el disco tiene un grosor $2H$, las condiciones de frontera son

$$Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{en } z=H \\ 0, & \text{en } z=-H \end{cases} \quad (3.45)$$

esto es, no tenemos componente de la velocidad radial fuera del disco, la cual es una condición para fronteras libres. La solución general para la ecuación (3.37) es

$$Z(z) = A \sin(Cz) + B \cos(Cz), \quad (3.46)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Ahora apliquemos las condiciones de frontera (3.45) a (3.46), esto nos dará como resultado que $C = n\pi/H$ y que

$$Z(z) = \sum_n \hat{A}_n \text{Sen}\left(\frac{n\pi}{H}(z + H)\right) \quad (3.47)$$

donde n es un número entero,

$$\hat{A}_n = \frac{A_n}{\text{Cos}\left(\frac{n\pi}{H}\right)}.$$

Por otro lado, si consideramos que

$$\Omega(r) = \alpha r^{-q} \quad (3.48)$$

donde α y q son constantes, tenemos que la ecuación (3.43) la podemos reescribir como

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R - \left[1 - \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha^2 (2-q)r^{-2q}}{p^2} \right) r^2 \right] R = 0 \quad (3.49)$$

Para esta última ecuación podemos analizar algunos casos particulares, para ciertos valores de q para los cuales podamos obtener soluciones analíticas.

3.4.1 caso $q=0$

Este caso corresponde a un disco que gira como cuerpo rígido. Para este caso tendremos que la ecuación (3.49) tiene la forma

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R + \left[\left(\frac{n\pi}{pH} \right)^2 (1 + 4\alpha^2) r^2 - 1 \right] R = 0. \quad (3.50)$$

La cual se puede escribir en la forma de una ecuación de Bessel,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R + (s^2 r^2 - \nu^2) R = 0 \quad (3.51)$$

cuyas soluciones son

$$R(r) = DJ_\nu(ar) + EN_\nu(ar). \quad (3.52)$$

Donde

$$a = \left(\frac{n\pi}{pH} \right) \sqrt{1 + 4\alpha^2}, \quad (3.53)$$

y

$$\nu^2 = 1. \quad (3.54)$$

Como ν es entero, las solución general de (3.51) usualmente se escriben en términos de las funciones linealmente independientes $J_\nu(ar)$ y $N_\nu(ar)$, donde esta última es la función de Neuman (o funciones de Bessel de segundo tipo) de orden ν la cual es dada por

$$N_\nu(ar) = \frac{J_\nu(ar) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(ar)}{\sin(\nu\pi)}, \quad (3.55)$$

Aplicamos condiciones de frontera en r para una frontera rígida. Esto es supondremos que nuestro fluido está contenido entre dos discos concéntricos, de radio interior r_i y de radio exterior r_e de manera que se cumpla que

$$\xi_r(r) = 0 \quad \text{para } r = r_i, r_e. \quad (3.56)$$

Entonces

$$R(r_i) = BJ_1(ar_i) + DN_1(r_i) = 0 \quad (3.57)$$

y

$$R(r_e) = BJ_1(ar_e) + DN_1(ar_e) = 0. \quad (3.58)$$

Como no estamos interesados en el caso trivial $B, D = 0$, de (3.57) y (3.58) obtendremos, si definimos

$$\beta = \frac{r_i}{r_e}, \quad (3.59)$$

que

$$J_1(a_m\beta r_i)N_1(a_m r_i) - J_1(a_m r_i)N_1(a_m\beta r_i) = 0. \quad (3.60)$$

donde, para un valor dado de β y r_i , los a_m son los valores de a que satisfacen (3.58).

De acuerdo a como definimos nuestro perfil de velocidades en la ecuación (3.48), tenemos que, particularmente para nuestro Sistema Solar en la vecindad de la Tierra, $\Omega = 2\pi/(1 \text{ año})$, con lo cual fijamos el valor para Ω ,

$$\Omega = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7} = \alpha(1.5 \times 10^{13})^{-q}, \quad (3.61)$$

de donde para $q = 0$

$$\alpha \approx 1.992 \times 10^{-7},$$

entonces debido a que en este caso $\alpha \ll 1$, la ecuación (3.53) la podemos reescribir como

$$a_n = \left(\frac{n\pi}{pH} \right), \quad (3.62)$$

Algunos ceros de la ecuación (3.58), así como algunos valores de p_{mn} , se muestran en la siguiente tabla para un valor de $\beta = .01$ y $H = 1$.

p_{nm} 's (UA) ⁻¹						
m/n	$a_m r_i$ (UA)	0	1	2	3	4
0	.0383	0	81.96	163.92	245.89	327.85
1	.07019	0	44.75	89.511	134.26	179.02
2	.10181	0	30.855	61.711	92.567	123.423
3	.13333	0	23.554	47.109	70.664	94.2195
4	.16492	0	19.050	38.100	57.1501	76.20
5	.19644	0	15.992	31.984	47.975	63.967
6	.22798	0	13.779	27.559	41.339	55.1191

Tabla 1: En esta tabla se muestran debajo de las columnas de 0 a 4, los diferentes valores que toma p_{nm} para cada uno de los valores de las raíces $a_m r_i$ en conjunto con el modo n.

Como vemos, cada una de las cantidades mostradas aquí son reales, las cantidades relevantes para cada modo están dadas en unidades astronómicas ⁴ (UA). En las figuras (1.1), (1.2) y (1.3) se muestran algunas funciones $\xi_{mn}(r, z)$ en función de las cantidades citadas en esta tabla.

Lo que se muestra en estas gráficas es el comportamiento de la función

$$f(r, z)_{mn} = \sin\left(\frac{n\pi}{H}(z + H)\right) \left(N_1(a_m r) - \frac{N(a_m r_i)}{J_1(a_m(r_i))} J_1(a_m r) \right),$$

ya que no estamos interesados en la visualización de una perturbación, sino del comportamiento de cada uno de los modos del desplazamiento lagrangiano $\xi_{mn}(z, r)$.

⁴1UA = 152.1x10⁹cm

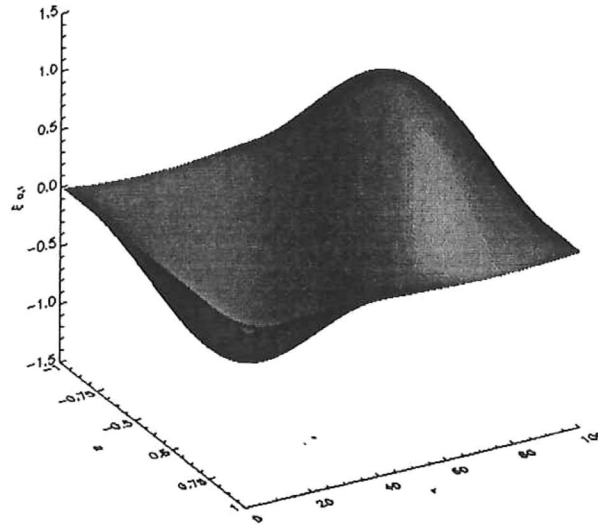


Figura 3.1: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento lagrangiano para el modo $m = 0, n = 1$.

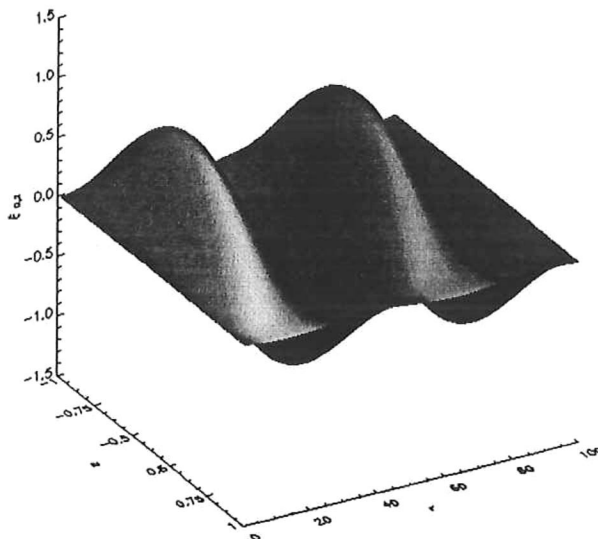


Figura 3.2: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento lagrangiano para los modos $m = 0, n = 2$.

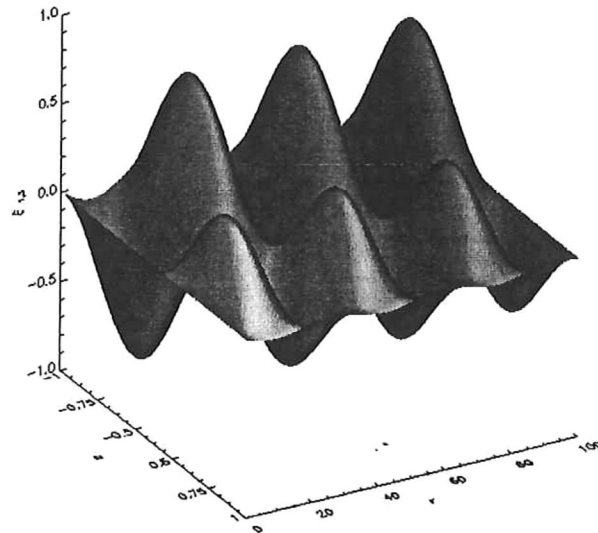


Figura 3.3: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento lagrangiano para los modos $m = 1$, $n = 3$.

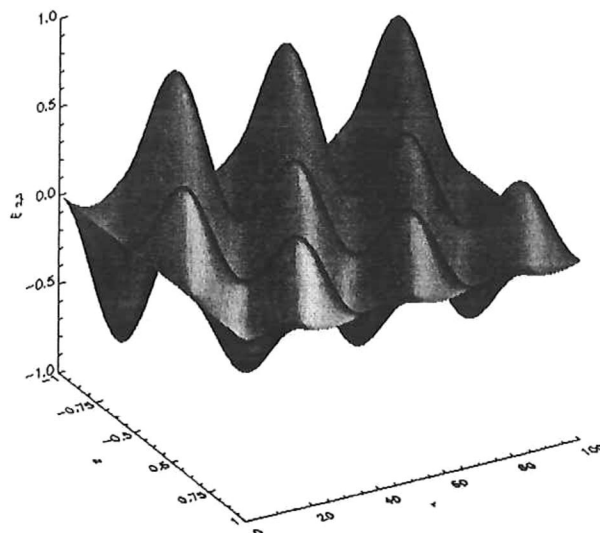


Figura 3.4: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento lagrangiano para los modos $m = 2$, $n = 3$.

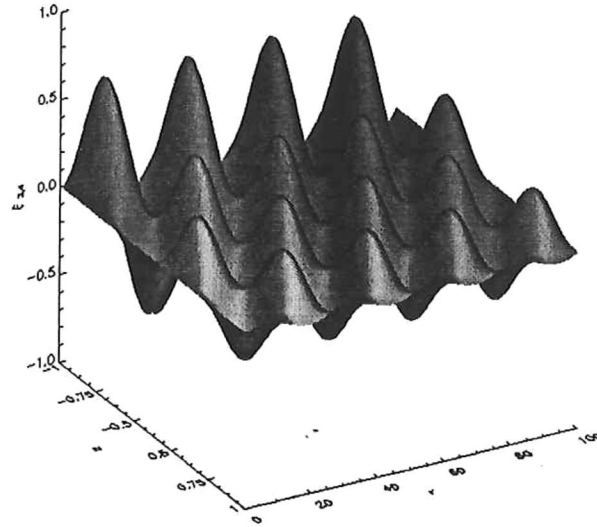


Figura 3.5: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento Lagrangiano para los modos $m = 3$, $n = 4$.

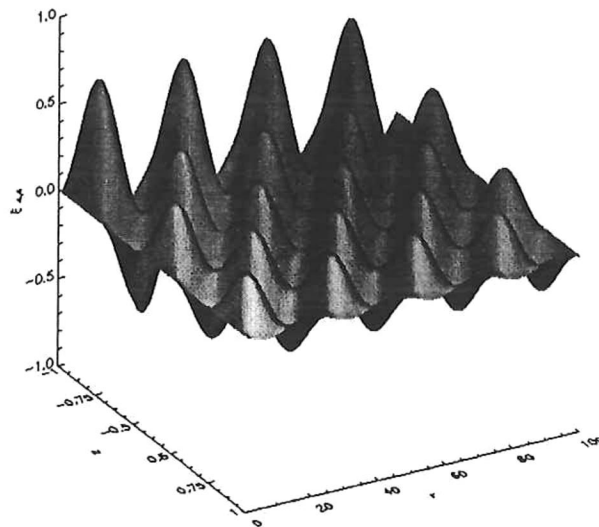


Figura 3.6: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento Lagrangiano para los modos $m = 4$, $n = 4$.

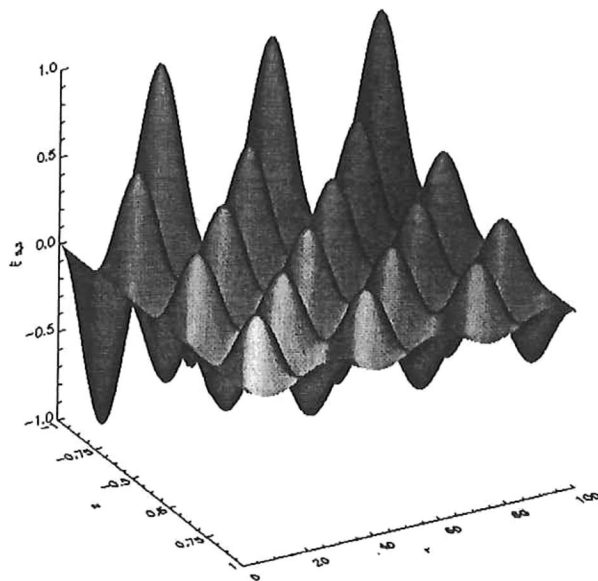


Figura 3.7: Visualización gráfica del comportamiento del desplazamiento lagrangiano para los modos $n = 3, m = 3, m = 5, n = 3$.

Como vemos para este caso, la forma de tales modos es oscilatoria y el valor de cada p_{mn} , es finito y real, lo cual nos dice que para este perfil de rotación tenemos estabilidad en nuestro sistema, lo cual, concuerda con el criterio de estabilidad ya antes obtenido por la ecuación (3.38), ya que en este caso se observa que el discriminante $\Phi(r)$ es positivo, lo cual como dijimos al final de la sección (3.4), es la condición única y suficiente, para tener estabilidad en el flujo.

3.4.2 caso $q=1$

Para este caso tenemos de que la ecuación toma la forma de

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R + \left[\left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 r^2 + \frac{1}{2p^2} \left(2p^2 - \left(\frac{2n\pi\alpha}{H} \right)^2 \right) \right] R = 0. \quad (3.63)$$

De esta última ecuación vemos que las soluciones, toman la misma forma que la ecuación (3.47), en este caso tenemos que

$$a_m = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \quad (3.64)$$

y

$$\nu^2 = \frac{1}{2p^2} \left(2p^2 - \left(\frac{2n\pi\alpha}{H}\right)^2 \right). \quad (3.65)$$

En este caso, aunque las soluciones de la ecuación (3.63) existen, estas no son lo suficiente como para darnos información de p , ya que para su solución, debemos postular valores de ν , lo cual no nos ayuda a concluir un criterio de estabilidad. Sin embargo podemos hacer varias observaciones a partir de los siguientes casos

- si p es una número complejo, no es posible obtener soluciones de (3.57), lo cual no nos ayuda en absoluto.
- si p es un numero puramente imaginario, los valores de ν son complejos, lo cual nos lleva a soluciones complejas, esto es; las soluciones no tienen un comportamiento puramente real⁵.
- si $p^2 < \left(\frac{2n\pi\alpha}{H}\right)^2$, esto nos conduce al caso anterior; a soluciones complejas.
- si p es real y además $2p^2 > \left(\frac{2n\pi\alpha}{H}\right)^2$, este caso nos lleva a soluciones del tipo de las de Bessel.

⁵Esto se puede observar cuando se expande las soluciones de la ecuación diferencial 3.63, en términos de series de potencias.

Como vemos, solo el ultimo caso, nos conducen a obtener soluciones bien comportadas. Los cuales indirectamente, avalan el criterio de estabilidad obtenido en la sección (3.4), ya que para este caso $\Phi = 2\alpha^2/r^2$, el cual es positivo.

3.4.3 caso q=2

Para este caso la ecuación ((3.54) toma la forma

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} R + \left(1 - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 r^2\right) R = 0. \quad (3.66)$$

Si hacemos el cambio de variable $u = \left(\frac{n\pi}{H}\right)r$, obtenemos que 3.66) se puede reescribir como

$$u^2 \frac{d^2}{du^2} R + u \frac{d}{du} R + \left(1 - u^2\right) R = 0. \quad (3.67)$$

Este caso, no es posible obtener información de manera analítica para p , ya que las soluciones son independientes del valor que tome p . Todavía mas aún, el criterio obtenido en la sección (3.2), exhibe este caso como caso limite, ya que el valor del discriminante es igual a cero.

Adentrarnos a examinar valores positivos mayores de q , no nos permite la obtención de soluciones analíticas, ya que ni aun tratando de obtener soluciones en función de series de potencias, nos conducen a obtener soluciones expresadas en términos de tales series. Por otro lado el criterio de estabilidad ya no es válido para valores positivos mayores a dos.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se analizó el comportamiento de las perturbaciones lineales en un flujo tipo de Couette con un perfil de rotación arbitrario. El estado base se toma como modelo del flujo en un disco de acreción protoplanetario, con el objetivo de analizar la generación de turbulencia en estos sistemas, buscando obtener un criterio de estabilidad de manera analítica, para lo cual utilizamos dos métodos matemáticos de análisis. El primer método dio como resultado un criterio de estabilidad general, el cual establece que la estabilidad en el disco se dará si y sólo si el discriminante $\Phi(= 2\Omega/r d(r^2\Omega)/dr)$ es positivo en todo el flujo. Para completar estos resultados, se utilizó un segundo método, en el cual se consideran dos casos para los cuales la forma de las ecuaciones diferenciales son solubles, sin embargo solo un caso, el correspondiente a rotación de cuerpo rígido para el cual $q = 0$ (sección 3.4.1), aportó información concreta para corroborar directamente el criterio general de estabilidad.

En tal caso como se observa en cada una de las figuras de 3.1 a 3.7, la forma de los desplazamientos lagrangianos $\xi_{r,z}$ es oscilatoria, y ya que las perturbaciones están descritas en función de tales desplazamientos y estos son oscilatorios, es decir, no crecen en función del tiempo debido a que los valores que toma $p = (1/t)$ para este caso son valores reales, por lo tanto la forma del vector de desplazamiento $\vec{\xi}$ es oscilatoria, lo cual nos dice que las perturbaciones para este caso no tienden a producir inestabilidad en el flujo.

El segundo caso $q = 1$ (sección 3.4.2) también aportó información, aunque de manera indirecta al criterio de estabilidad. También se exploró un último caso $q = 3$ (sección 3.4.3), para el cual el valor del determinante Φ es igual a cero. Este último, no se intento resolver, ya que no aportaba información alguna al criterio general de estabilidad.

La ventaja de establecer el criterio de estabilidad por dos caminos diferentes, es la de obtener un criterio de estabilidad mas concreto. Como observamos en este trabajo, solo se analizó el caso de simetría axial, extendernos al caso sin simetría axial no nos permite obtener de manera inmediata un criterio de estabilidad general, además que el hacer el análisis directo de las ecuaciones obtenidas para este caso no es tan simple.

En discos protoplanetarios, generalmente se considera que el flujo tiene un perfil de rotación kepleriano ($\Omega = \alpha r^{-3/2}$, donde $\alpha = \sqrt{GM}$ y M es la masa del objeto masivo central en este caso el Sol.). Para este caso el criterio general de estabilidad (Sección 3.3) establece que el flujo es estable ya que el discriminante Φ es positivo

($\Phi = \alpha^2 r^{-3}$). Esto implica que la turbulencia en discos protoplanetarios, podría tener su origen perturbaciones no lineales en el flujo o deben considerarse los efectos del campo magnético en el flujo del disco, tal como Sugieren Lynden-Bell (1969) [16] y Shakura y Sunyaev (1973) [17] en sus trabajos.

Como vemos, este trabajo abre la posibilidad de analizar problemas mas completos en los cuales los efectos de la viscosidad y del campo magnético sean incluidos, lo cual nos puede dar un panorama aun mas completo de la generación de turbulencia en discos protoplanetarios, así como tambien el entender cual es la relevancia de tales mecanismos en la transferencia de momento y masa.

Bibliografía

- [1] Kuiper, G., 1941, *Astrophys. J.*, **93**,133.
- [2] Crawford, J., and R. Kraft, 1956, *Astrophys. J.*, **123**, 44.
- [3] JCB Papaloizou and DNC Lin, 1997, *ARAA*, **33**, 505.
- [4] Frisch, U., and S. A. Orzag, 1990, *Phys. Today*, **43**, 124.
- [5] B. Dubruelle and L. Valdetarro., 1992, *Astron. and Astrophys*, **263** 387.
- [6] Drazin, P.g., and W. H. Reid, 1981, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University, Cambridge, England).
- [7] S. A. Balbus and J. F. Hawley, 1991, *Astropys. J.*, **376**, 214.
- [8] B. Dubruelle and E. Knobloch, *Astron. Astrophys.*, **274**, 667.
- [9] Steven A., 1998, Balbus and John F. Hawley, *Reviews of Modern Physics*, **70**, No. 1.
- [10] G. K. Batchelor, "An Introduction to Fluids Dinamycs", 1990, Cambridge University press.

- [11] Aris, R., 1962, "Vectors, Tensors and the basics Equations of fluid Mechanics", Prentice-Hall, New Jersey.
- [12] Truesdell, C.A., 1952, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **1**, 228.
- [13] S. Chandrasekhar, 1961, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover Publications, Inc., New York.
- [14] S. Chandrasekhar, 1959, The Stability of Non Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics, *Proc. N.A.S.*, **46**; 253.
- [15] B. Dubruelle, 1991, A Turbulent Closure Model for Thin Accretion Disks, *Astron. Astrophys.*, **256**, 592.
- [16] V.M. Canuto and A. Battaglia, 1987, *Astron. Astrophys.*, **193**, 313.
- [17] Patrick Cassen and Ann Moosman, 1981, *Icarus*, **48**, 353.
- [18] Lynden-Bell, D., 1969, *Nature (Londres)*, **223**, 690.
- [19] Shakura, N. I., and R. A. Sunyaev, 1973, *Astron. Astrophys.*, **24**, 337.