



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, CAMPUS MEXICALI
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

EFEECTO DEL DESLIZAMIENTO EN LAS PAREDES SOBRE EL
FLUJO CONVECTIVO EN UNA CAVIDAD IMPULSADO POR UN
GRADIENTE DE TEMPERATURA INCLINADO

TESIS DOCTORAL

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

M.C. DANIEL BARRERA ROMÁN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO SEBASTIÁN ORTIZ PÉREZ
DR. EMMANUEL SANTIAGO DURAZO ROMERO

MEXICALI, B.C.

NOVIEMBRE, 2021

**Efecto del deslizamiento en las paredes sobre el flujo convectivo en una
cavidad impulsado por un gradiente de temperatura inclinado**

por

M.C. Daniel Barrera Román

Tesis presentada para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en

FACULTAD DE INGENIERÍA, CAMPUS MEXICALI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Mexicali, B.C.. Noviembre, 2021

DEDICATORIA

A mi hija Valeria, eres mi motivación para seguir adelante a pesar de las adversidades.

A mis padres Noé e Irene; y mi hermano Aarón, por su apoyo incondicional.

Reconocimientos

A mis padres, porque sobre todas las cosas, siempre confiaron en mi y me han dado todo lo que ha estado a su alcance para poder realizarme, sin ustedes nada de esto hubiera sido posible. Gracias.

Al Dr. Alejandro Sebastián Ortiz Pérez, que me tuvo la confianza y me dio la oportunidad de trabajar con él. Gracias Doc por sus consejos, dedicación y paciencia durante este periodo.

Al Dr. Emmanuel Durazo, por sus consejos y apoyo.

A los miembros del comité, por sus valiosos consejos que enriquecieron este trabajo de investigación, en especial al Dr. Ildebrando Pérez Reyes.

En general, a mi familia y amigos, que siempre me alentaron a seguir adelante.

A la maestra Eva Herrera, por su paciencia, atención y orientación en todo momento.

Al CONACyT por el apoyo como becario 328720.

Al programa MyDCI de la UABC, por la formación recibida por parte de la FIM.

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal analizar la estabilidad lineal del flujo convectivo confinado en una cavidad a la que se le aplica un gradiente de temperatura inclinado, donde las paredes horizontales que delimitan al fluido dentro de la cavidad están sujetas al efecto de la condición de deslizamiento. Los fluidos considerados en la investigación tienen números de Prandtl de 0.1, 0.7, 10 y 500, los cuales se relacionan con algunas aplicaciones industriales. Aplicando el teorema de Pi-Buckingham se definen los parámetros adimensionales más importantes para el problema, los cuales se utilizan en el modelo matemático a resolver (ecuaciones gobernantes: masa, momento y energía). Se utilizan los perfiles de velocidad y temperatura del estado básico bajo las condiciones de deslizamiento y sin deslizamiento en la discusión de resultados. El desarrollo del análisis de estabilidad lineal se realiza a través del enfoque de modos normales, mediante el cual se obtiene el sistema de ecuaciones matriciales que se resuelve utilizando el método numérico Galérkin con funciones ortogonales de Chandrasekhar y series de Fourier. Los resultados obtenidos se presentan en forma de curvas para los diferentes modos de inestabilidad presentes en cada uno de los números de Prandtl propuestos y se comparan con aquellos obtenidos para la condición de flujo sin deslizamiento. Al considerar el efecto del deslizamiento en las paredes horizontales, este provoca cambios en los modos de inestabilidad, lo cual origina curvas completamente diferente en los diagramas de estabilidad anteriormente reportados en la literatura. Los resultados sugieren que la condición de deslizamiento tiene un efecto desestabilizador en comparación con el caso de no-deslizamiento, donde el efecto desestabilizador se aprecia en la reducción de áreas estables para la mayoría de los casos evaluados. Sin embargo, para el caso de fluidos con números de Prandtl de 10 y 500, el deslizamiento genera una configuración de flujo estratificada que incluye zonas estables e inestables debido a la temperatura; y en conjunto provocan la aparición del modo transversal oscilatorio To , dando como resultado, dos puntos de codimensión adicional a lo reportado anteriormente por otros investigadores.

Abstract

The main objective of the present thesis work is to analyze the linear stability for convective flow confined in a cavity to which an inclined temperature gradient is applied, where the horizontal walls that delimit the fluid within the cavity are subject to the slippage effect. The considered fluids in the investigation have Prandtl numbers of 0.1, 0.7, 10 and 500, which are related to some industrial applications. Applying the Pi-Buckingham theorem, the most important dimensionless parameters for the problem are defined, which are used in the mathematical model to be solved (governing equations: mass, momentum and energy). The velocity and temperature profiles for the basic state under slip and no-slip conditions are used in the results discussion section. The development of the linear stability analysis is carried out through the approach of normal modes, through which the matrix equation system obtained is solved using the Galérkin numerical method. The results obtained are presented in the form of curves for the different instability modes present in each of the proposed Prandtl numbers and are compared with those obtained for the no-slip flow condition. The slip condition has a destabilizing effect compared to the non-slip case, where the destabilizing effect is observed in the reduction of stable areas for most of the cases evaluated. However, for the case of fluids with Prandtl numbers of 10 and 500, the slip condition generates a stratified flow pattern that includes stable and unstable zones due to temperature; and together they cause the appearance of the oscillatory transverse mode To , giving as a result, additional codimension-two points that have not been previously reported by other researchers.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Revisión bibliográfica	3
1.2.1. Flujo convectivo en el área de metalurgia	3
1.2.2. Flujo en el área de microfluidos	5
1.2.3. Estabilidad del flujo convectivo impulsados por un gradiente de temperatura inclinado ...	7
1.2.4. Flujo considerando deslizamiento en las superficies que delimitan al fluido	11
1.2.5. Flujo en el proceso de fabricación del vidrio por el método de flotado	14
1.2.6. Resumen de la revisión bibliográfica	14
1.3. Hipótesis	15
1.4. Objetivos	16
1.5. Metodología	16
1.6. Alcance	17
1.7. Descripción de los capítulos	18
2. Marco Teórico	19
2.1. Teorema de transporte de Reynolds	19
2.2. Conservación de masa	21
2.3. Conservación de momento.	23
2.4. Conservación de Energía.	24
2.5. Ecuaciones constitutivas.	26
2.6. Teorema de Pi-Buckingham	30

3. Modelo Matemático	33
3.1. Teorema de Pi-Buckingham	33
3.2. Adimensionalización de las ecuaciones de conservación	38
3.2.1. Ecuación de momento (Navier-Stokes)	38
3.2.2. Ecuación de la Energía	39
3.2.3. Ecuación de Continuidad	40
3.3. Estado Básico	40
3.3.1. Perfil de velocidad con deslizamiento	43
3.3.2. Perfil de temperatura con deslizamiento	49
3.4. Estado Perturbado	50
3.4.1. Ecuación de Navier-Stokes	50
3.4.2. Ecuación de la Energía	50
3.4.3. Ecuación de Continuidad	51
3.5. Modos Normales	52
3.5.1. Ecuación de Momento (Navier-Stokes) para U : componentes \mathbf{i} y \mathbf{j}	52
3.5.2. Ecuación de Momento (Navier-Stokes) para W : componente \mathbf{k}	53
3.5.3. Ecuación de la Energía para θ	54
3.5.4. Sistema de Ecuaciones para el estado Perturbado	54
4. Esquema Numérico	59
4.1. Justificación	59
4.1.1. Método de Galérkin	60
4.2. Análisis Numérico	63
4.2.1. Funciones Propias para la componente vertical de la perturbación de la velocidad, W_1	64
4.2.2. Valores Propios para la componente vertical de la perturbación de la velocidad, W_1	65
4.2.3. Funciones Propias para la componente horizontal de la perturbación de la velocidad, U_1 ..	68
4.2.4. Valores Propios para la componente horizontal de la perturbación de la velocidad, U_1	69
4.2.5. Funciones Propias para la temperatura θ	70
4.2.6. Análisis numérico	71
4.2.7. Análisis de convergencia para el método numérico de Galérkin	72
5. Resultados Numéricos	75
5.1. Resultados para $Pr = 0.1$	76

Índice general	xvii
5.2. Resultados para $Pr = 0.71$	83
5.3. Resultados para $Pr = 10$	90
5.4. Resultados para $Pr = 500$	96
6. Discusión de los resultados	105
6.1. Validación con otros modelos y experimentos	105
6.2. Perfiles de velocidad	106
6.3. Perfiles de temperatura	109
7. Conclusiones	121
A. Apéndice	125
A.1. Adimensionalización de las ecuaciones de conservación	125
A.1.1. Ecuación de momento (Navier-Stokes)	125
A.2. Estado Básico - Ecuación de Navier-Stokes.	126
A.3. Perfil de velocidad con deslizamiento.	129
A.3.1. Componente U_s	129
A.3.2. Componente V_s	130
A.4. Perfil de temperatura con deslizamiento	132
A.5. Modos Normales	136
A.5.1. Ecuación de Momento componente U	136
A.5.2. Ecuación de Momento componente W	147
Referencias	149

Índice de figuras

1-1. Cavity que contiene un fluido sujeta a un gradiente de temperatura inclinado.	2
1-2. Diagrama de Flujo de la metodología para el desarrollo de la investigación	16
2-1. Volumen de control y superposición de los volúmenes de control	21
2-2. Estado triaxial de esfuerzos	23
3-1. Modelo físico del estado básico	40
3-2. Modelo físico del estado básico con condiciones de frontera normalizadas	41
3-3. Representación geométrica del deslizamiento del fluido sobre la pared	44
3-4. Perfil de velocidad para el flujo con deslizamiento.....	45
5-1. Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 0.1$	77
5-2. Detalle de las gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 0.1$	78
5-3. Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 0.1$	79
5-4. Gráficas de σ_C vs Ra_H para $Pr = 0.1$	80
5-5. Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 0.1$	81
5-6. Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 0.1$	82
5-7. Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} negativo para $Pr = 0.1$	83
5-8. Gráficas del Ra_{VC} vs Ra_H para $Pr = 0.71$	84
5-9. Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 0.71$	86
5-10. Gráficas de σ_C vs Ra_H para $Pr = 0.71$	86
5-11. Gráficas de ϕ_C vs Ra_H para $Pr = 0.71$	87
5-12. Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 0.71$	88
5-13. Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} negativo para $Pr = 0.71$	89

5-14. Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 10$	90
5-15. Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 10$	91
5-16. Gráficas de σ_C vs Ra_H para $Pr = 10$	92
5-17. Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 10$	93
5-18. Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 10$	94
5-19. Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} negativo para $Pr = 10$	95
5-20. Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 500$	97
5-21. Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 500$	98
5-22. Gráficas de σ_C vs Ra_H para $Pr = 500$	98
5-23. Detalle de las gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 500$	99
5-24. Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 500$	100
5-25. Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} positivo para $Pr = 500$	102
5-26. Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} negativo para $Pr = 500$	103
6-1. Comparación de los perfiles de velocidad $U_s(z)$ vs z para un $Pr = 0.71$	107
6-2. Comparación de los perfiles de velocidad $U_s(z)$ vs z para $Pr = 10$ y $Pr = 500$	108
6-3. Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ vs z para $Pr = 0.1$	110
6-4. Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 0.71$	111
6-5. Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 0.71$	112
6-6. Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 10$	113
6-7. Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 10$	115
6-8. Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 500$	117
6-9. Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 500$	118

Índice de cuadros

4-1. Análisis de convergencia del método de Galérkin para $Pr = 10$ y el modo To	73
4-2. Valores del Ra_H a un $Ra_{VC} = 0$ para $Pr = 10$ y el modo To	74
5-1. Valores críticos del Ra_V para los casos con y sin deslizamiento ($Pr = 10$ y el modo To)	96

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del problema

El flujo convectivo es muy común en distintas aplicaciones industriales como: metalurgia [1], crecimiento de cristales [2], procesos de recubrimiento de superficies [3] y microfluidos [4]. En el caso de aplicaciones en metalurgia, el flujo convectivo representa un problema al momento de solidificar el material, por lo que es vital hacer que el flujo sea laminar previo a la solidificación para obtener un material homogéneo. De no ser así, el material a nivel microscópico contiene imperfecciones en su red cristalina; lo cual impacta directamente a escala macroscópica en las propiedades físicas del mismo, por ejemplo: en la resistencia, rigidez, ductibilidad, conductividad térmica y eléctrica, por mencionar algunas.

El movimiento de fluidos tanto en la naturaleza como en algunas aplicaciones industriales, puede ocurrir por diversos factores; tales como gradientes en la concentración de especies, diferencias de presión o de temperatura. Siendo de especial interés en este trabajo dentro de los anteriores factores mencionados, los fenómenos convectivos debido a la presencia de gradientes de temperatura. Este fenómeno y su estudio en relación a la estabilidad del flujo convectivo impulsado por gradientes de temperatura estrictamente horizontales o verticales, ha sido un tema bastante estudiado por la comunidad científica [5–14]. Sin embargo, en la práctica es difícil garantizar que el gradiente de temperatura al que está sometido el fluido se encuentre dirigido estrictamente en una sola dirección, por lo que al considerar un gradiente de temperatura inclinado (gradiente de temperatura vertical y horizontal aplicados de manera simultánea) con respecto a la superficie resulta ser una situación más realista [15–18] (ver Fig. 1-1).

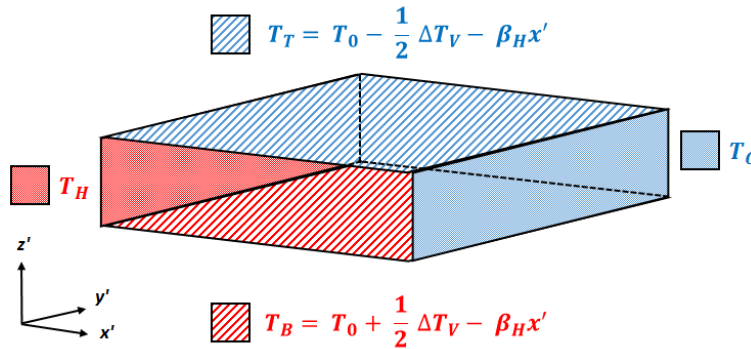


Figura 1-1: Cavidad que contiene un fluido sujeta a un gradiente de temperatura inclinado. Las temperaturas para las paredes horizontales caliente y fría de la cavidad, están representadas por T_B y T_T respectivamente; mientras que las temperaturas para las paredes verticales caliente y fría de la cavidad, están representadas por T_H y T_C respectivamente.

En la Figura 1-1, se tiene el modelo físico del fenómeno, el cual consiste en una cavidad que contiene un fluido y que se encuentra bajo el efecto de un gradiente de temperatura inclinado. Donde T_0 representa la temperatura de referencia (promedio entre T_B y T_T), ΔT_V es la diferencia de temperaturas entre las paredes horizontales de la cavidad ($\Delta T_V = T_B - T_T$) y β_H representa el gradiente de temperatura horizontal, es decir, el gradiente de temperatura impuesto sobre las paredes verticales de la cavidad.

Por otra parte, uno de los parámetros fundamentales necesarios para resolver ecuaciones de mecánica de fluidos es el conocimiento de la condición de frontera de la velocidad del fluido. En el caso de fluidos newtonianos a escala macroscópica, la condición de frontera de no-deslizamiento es común en los casos que tratan flujos sobre superficies no hidrofóbicas o no existen condiciones de contacto entre fluido-fluido; pero a escala microscópica, tanto trabajos experimentales como simulaciones han demostrado la posibilidad de deslizamiento en el flujo de fluidos [19–21].

Con base a lo anterior; el caso de flujo convectivo debido a un gradiente de temperatura inclinado, considerando el efecto del deslizamiento del fluido en las superficies horizontales ha sido menos explorado. Por lo que las estructuras convectivas que de ahí se derivan aún no se han comprendido en su totalidad. Además, el entendimiento del fenómeno ofrece la oportunidad de conocer las técnicas para controlarlo; y por ende, en las aplicaciones que involucren estos fenómenos, permitirá desarrollar procesos más eficientes y obtención de productos de mayor calidad. Es por ello que en este trabajo se analizará la estabilidad lineal de un flujo impulsado por fuerzas de flotación debido a un gradiente de temperatura inclinado con condiciones de frontera de deslizamiento.

1.2. Revisión bibliográfica

De acuerdo a lo descrito en el apartado anterior, el flujo convectivo es un tema bastante estudiado y con gran variedad de aplicaciones en el sector industrial. Sin embargo, su estudio bajo las condiciones de relevancia para este trabajo de investigación (estabilidad del flujo convectivo inducido por un gradiente de temperatura inclinado bajo condiciones de deslizamiento), representa un caso que no ha sido abordado anteriormente. Por lo tanto, la revisión bibliográfica tiene por objeto, dar a conocer al lector algunos de los trabajos que se han realizado y que están relacionados con algunas de las características que en este trabajo de tesis se consideran para el análisis y comprensión del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado bajo condiciones con y sin deslizamiento. La revisión bibliográfica se clasificó de la siguiente manera:

- 1) Flujo convectivo en el área de metalurgia.
- 2) Flujo en el área de microfluidos.
- 3) Estabilidad del flujo convectivo impulsados por un gradiente de temperatura inclinado.
- 4) Flujo considerando deslizamiento en las superficies que delimitan al fluido.
- 5) Flujo en el proceso de fabricación del vidrio por el método de flotado.

1.2.1. *Flujo convectivo en el área de metalurgia*

Dentro de las investigaciones en el área de metalurgia, un trabajo referente al estudio del flujo convectivo en metales líquidos, fue realizado por Braunsfurth y Mullin [22]. En dicho trabajo se analizó experimentalmente la influencia de los parámetros de control en el comportamiento y evolución en el tiempo de los patrones de flujo que se manifiestan en una muestra de galio (Ga) líquido expuesto a un gradiente de temperatura horizontal. Los parámetros de control para las pruebas experimentales fueron el número de Grashof Gr y el número de Prandtl Pr ; los cuales fueron establecidos por medio de una diferencia de temperaturas aplicada a la muestra. Para las pruebas experimentales, utilizaron un canal rectangular de cerámica (pirofilita) como recipiente para el galio líquido; dicho canal estaba delimitado por paredes o placas conductoras de molibdeno, para inducir el gradiente de temperaturas horizontal; y se utilizó un termopar tipo K para el monitoreo de la temperatura de la muestra del metal en distintos puntos. Los resultados mostraron la presencia de estados dinámicos o cambiantes, íntimamente dependientes de los parámetros de control (Gr y Pr). Ya que pequeños cambios en el número de Grashof y Prandtl, revelaron cambios abruptos en el comportamiento de los patrones de flujo y su evolución en el tiempo. Además,

revelaron que la muestra experimentó bifurcaciones degeneradas de Hopf, donde la frecuencia y amplitud de las oscilaciones decrecieron hasta cero en cuanto se alcanzaron las condiciones del punto crítico.

Para el caso de investigaciones acerca del flujo convectivo con aplicación en crecimiento de cristales, en el trabajo de Jakeman et al. [2], se llevó a cabo un estudio experimental para analizar las oscilaciones térmicas en líquidos y gases sometidos a convección libre. El prototipo experimental consistía de dos barras de cobre como paredes laterales, una en cada extremo de un recipiente rectangular de pirofilita y el espacio intermedio fue llenado con galio fundido. Una de las paredes de cobre se calentó con un horno de resistencia y la otra se enfrió con agua, estableciendo así un flujo de calor axial a lo largo del recipiente. Se colocó un termopar en el galio fundido en una posición arbitraria (las superficies de cobre y los extremos del termopar se recubrieron con molibdeno y una suspensión de nitruro de boro respectivamente, para evitar la corrosión por el galio fundido). De los resultados obtenidos, se presentó evidencia de la presencia de oscilaciones por convección en el crecimiento de cristales en fundiciones y se mostró que estas oscilaciones producen una distribución no homogénea del soluto en el cristal (fenómeno comúnmente conocido como estrías de impurezas). Se concluyó que las oscilaciones y fluctuaciones son mayormente visibles en fluidos con bajo número de Prandtl, que la amplitud y complejidad de las oscilaciones incrementaron cuando el número de Rayleigh se incrementó y finalmente, los estados básicos tuvieron duraciones desde pocos segundos hasta unos pocos minutos. Por otra parte, en el trabajo de Lan et al. [23] se analizó la estabilidad y bifurcación del flujo para el crecimiento horizontal de cristales de Bridgman en un material de bajo número de Prandtl. En el modelo consideraron transferencia de calor bidimensional y flujo de fluido del material fundido, la interfaz de crecimiento y conducción de calor en el cristal. Las paredes inferior y superior del modelo físico se consideraron adiabáticas y conductoras (alternadamente). Todas las paredes del modelo se consideraron sólidas excepto la superior, la cual se estableció como una superficie libre de esfuerzo. Además se realizó un análisis de estabilidad lineal de las soluciones obtenidas, así como la construcción de diagramas de bifurcación. También analizaron el comportamiento transitorio para ilustrar el comportamiento global de los estados básicos después de ser afectados por una perturbación. Dentro de sus resultados se determinó que la evolución dinámica de la interfaz debido a la convección, proporcionó información útil para la comprensión del crecimiento del cristal. La amplitud de oscilación de la velocidad en la interfaz disminuyó con el aumento del calor de fusión y resultó estar en el mismo orden de la tasa de crecimiento que comúnmente es utilizada en la práctica.

Finalmente, un estudio orientado al análisis de los efectos del agua en una capa de óxido de una aleación no newtoniana de Galio-Indio y las implicaciones de estos efectos en microsistemas con metales líquidos, fue el trabajo realizado por Khan et al. [20]. Dentro de sus resultados se determinó que al colocar agua en los microcanales antes de inyectar el metal, el agua creó una capa deslizante entre el metal y las paredes de los microcanales. Una capa de deslizamiento acuosa permite el accionamiento controlado del metal líquido dentro de los

micro-canales a través de la electrodeposición continua y evita que el metal se pegue a las superficies mojadas, en comparación a uno de los principales problemas prácticos en el uso de aleaciones de galio. Además, se aplicó la capa de deslizamiento para demostrar su funcionalidad en una antena retráctil basada en Galio-Indio, por lo que la presencia de la capa de deslizamiento proporciona una opción para evitar el uso de mercurio (Hg) en dispositivos y experimentos que dependen de metales líquidos. También la presencia de agua redujo la presión necesaria para inyectar el metal en los micro-canales en relación a micro-canales secos.

Trabajos relacionados con el estudio de las corrientes convectivas en capas de estaño fundido, se presentan más adelante en la sección "1.2.5. Análisis del flujo en el proceso de fabricación del vidrio por el método de flotado", al considerarlos mayormente relacionados con el proceso de fabricación y su impacto en la calidad del producto obtenido.

1.2.2. Flujo en el área de microfluidos

Para aplicaciones en el área de microfluidos, Riviere et al. [24] construyeron un prototipo experimental para estudiar flujos impulsados por el calentamiento de una capa de fluido por medio de un láser infrarrojo. Para el análisis de este tipo de flujos a escala microscópica, en el prototipo experimental se hicieron mediciones de temperatura con un colorante sensible a la fluorescencia y se analizó el patrón de flujo para diferentes potencias del haz del láser utilizando un sistema de velocimetría de partículas (PIV, por sus siglas en inglés). Usando la técnica de fluorescencia, se midió con precisión el perfil de temperatura para caracterizar los flujos hidrodinámicos; lo que permitió determinar experimentalmente la transición entre el régimen difusivo y advectivo. Los datos obtenidos de las mediciones de temperatura también fueron utilizados en simulaciones numéricas para comparar las predicciones de los perfiles de velocidad con los obtenidos experimentalmente. La comparación entre los resultados numéricos y experimentales mostró que el modelo utilizado estaba de acuerdo cuantitativamente con la experimentación, por lo que se hizo un estudio paramétrico para diferentes espesores de muestra y distribuciones de temperatura. Del estudio paramétrico se reveló una transición entre dos regímenes. Un primer régimen específico para capas delgadas donde el escalamiento de la velocidad estuvo de acuerdo con resultados previamente publicados en la literatura. En el segundo régimen obtenido que fue para capas gruesas, se mostró que la longitud característica del flujo depende en gran medida del espesor de la capa, mientras que la magnitud de la velocidad mostró incrementos mínimos con respecto a la variación en el espesor de la película. Los resultados apoyaron las bases para enfoques opto-térmicos en aplicaciones de micro-fluidos sobre la manipulación de partículas por

calentamiento con láser. En términos más generales, se abrió una ruta sobre la convección inducida por la luz y los efectos ópticos para aplicaciones opto-fluídicas.

Otro trabajo importante orientado a ser utilizado como guía para el diseño y la optimización de chips en microfluidos y que está relacionado con el estudio de las inestabilidades en el flujo, es el realizado por Shi y Liu [25], quienes investigaron los efectos causados por el flujo cortante que ocurre en diversas aplicaciones electroquímicas (como la electrodeposición, galvanoplastia y electrodiálisis). En su investigación los autores consideraron el modelo adimensional de Poiseuille-Navier-Stokes y Poisson-Nernst-Planck, que involucra la fuerza de flotación inducida por la polarización de la concentración de iones. Al estudiar los efectos de la longitud característica sobre la inestabilidad de Rayleigh-Bénard y la transición de la inestabilidad electro-conectiva a la inestabilidad de Rayleigh-Bénard por diferencias de concentración, encontraron que la inestabilidad de Rayleigh-Bénard se manifiesta para flujos cortantes a baja velocidad o un número de Rayleigh grande, pero a medida que se incrementó el flujo, los patrones debidos a la inestabilidad de Rayleigh-Bénard desaparecieron para dar paso a la formación de vórtices debido a la inestabilidad electro-conectiva. Además, dentro de los resultados numéricos, encontraron que en la literatura existente se subestima la convección de Rayleigh-Bénard y se sobreestima el efecto de la capa de Debye, lo que genera una gran diferencia entre los resultados obtenidos mediante simulación y los datos obtenidos experimentalmente.

Por lo tanto, es importante señalar que los efectos de flotación son un factor que debe de considerarse cuando se analizan flujos a microescala, siempre y cuando los efectos termogravitacionales estén presentes en el fenómeno bajo análisis. Por ejemplo, en el área de microfluidos para el caso de algunos flujos que involucran el proceso de reacción en cadena de polimerasa (Polymerase Chain Reaction, PCR por sus siglas en inglés), la PCR estándar opera en un rango de temperaturas que van entre los 60 °C y 97 °C [26, 27], con lo cual es suficiente para que se active el proceso por efectos térmicos y se pueden alcanzar valores de hasta 10^4 o incluso más en el número de Rayleigh, lo cual ha sido confirmado por Squires y Quake [28].

Otro factor importante a considerar en los estudios sobre tecnología basada en microfluidos, es el efecto del deslizamiento entre el fluido y las superficies que lo delimitan. Esto debido a que resulta ser un agente desestabilizador de interés para aplicaciones que involucran procesos de transferencia de calor y movimiento de fluidos, en las cuales la condición ideal de no-deslizamiento entre las partículas de fluido y la superficie no puede mantenerse [29, 30]. Un factor importante para esta condición son las diferencias de presión, las cuales resultan ser una fuerza común para propiciar el deslizamiento, así como también los gradientes de temperatura pueden establecer condiciones que ayuden a desestabilizar el flujo del fluido.

1.2.3. Estabilidad del flujo convectivo impulsados por un gradiente de temperatura inclinado

El estudio de la estabilidad de flujos convectivos impulsados por gradientes de temperatura estrictamente horizontales o verticales, ha sido un tema bastante estudiado por la comunidad científica. Desafortunadamente, en la práctica es difícil garantizar un gradiente de temperatura estrictamente dirigido en una sola dirección. Sin embargo, si se establece un gradiente de temperatura inclinado (gradientes vertical y horizontal aplicados de manera simultánea), el resultado es una consideración más realista. Esta condición ha sido considerada en diferentes fenómenos, tales como: flujos termocapilares [3,4], medios porosos [31] y flujo termogravitacional [15–18] donde el análisis del flujo fue realizado en capas poco profundas y dentro de los resultados se determinó que varios modos de inestabilidad compiten por ser el más crítico; y como resultado, manifiestarse como la inestabilidad predominante. Para los fluidos bajo este comportamiento, el número de Prandtl juega un papel crucial, ya que el modo de inestabilidad más crítico depende de él.

Con respecto a los flujos termocapilares bajo el efecto de un gradiente de temperatura inclinado, en el trabajo de Ueno et al. [3]; se llevó a cabo un análisis experimental sobre la convección termocapilar en una fina capa líquida de hasta 2 mm de profundidad en condiciones de gravedad normal bajo el efecto de gradientes de temperatura perpendiculares y paralelos a la superficie libre aplicados de manera simultánea. Para el estudio se utilizó como fluido de trabajo la silicona de 2, 5, 10 y 20 centistokes (cSt) y $Pr = 27.9, 67.0, 111.9$ y 206.8 a temperatura ambiente respectivamente, en un contenedor cilíndrico de 50 mm de diámetro. Como resultados encontraron diferentes patrones de flujo diferentes: la convección de Marangoni-Bénard, células de Bénard y convección en forma de rayas (streak convection, por su definición en inglés). Los patrones encontrados fueron caracterizados mediante los números de Marangoni horizontales y verticales (Ma_V y Ma_H). Por otra parte, Nepomnyashchy et al. [32] investigaron la estabilidad del flujo termocapilar en un sistema de aire-agua con un gradiente de temperatura inclinado, mediante análisis de estabilidad lineal y no lineal. Dentro de sus resultados encontraron tres modos de inestabilidad: ondas hidrotermales oblicuas, rollos longitudinales y ondas bidimensionales. Además; determinaron que mediante una desviación mínima del gradiente de temperatura media en dirección vertical, se suprimió la inestabilidad de Pearson (convección Marangoni-Bénard o por efectos termocapilares) y se produjeron ondas hidrotermales oblicuas. Por último, determinaron una transición entre los rollos longitudinales y las ondas que se mueven en dirección del flujo interfacial; pero la verificación de las predicciones teóricas obtenidas en su análisis numérico, no fueron realizadas mediante experimentos. Dentro de ésta aplicación también se encuentra el trabajo de Shklyaev y Nepomnyashchy [4]; donde llevaron a cabo un estudio numérico en tres dimensiones sobre la estabilidad del flujo termocapilar del agua (número de Prandtl $Pr = 7$) generado por un gradiente de temperatura

inclinado y analizaron la evolución de los regímenes convectivos predichos por la teoría de estabilidad. Dentro de sus resultados se encontró que, para un determinado gradiente de temperatura fijo relativamente pequeño a través de la capa líquida (gradiente de temperatura longitudinal), se originaron patrones de flujo hexagonales, de tipo rollos y cuadrangulares, flujo de retorno paralelo, ondas hidrotermales y otros patrones de células convectivas diferentes. Además, predijeron mayormente la formación de rollos longitudinales en relación con la aparición de rollos transversales, lo cual ya había sido reportado anteriormente por Kelly [33].

Sin embargo, en los trabajos previamente mencionados, el análisis de estabilidad lineal se ha realizado bajo la consideración de flujos convectivos en capas de fluidos de longitud infinita; que por lo general, es una consideración comúnmente utilizada a pesar de que la convección ocurre inevitablemente en cavidades o confinamientos tridimensionales de volumen finito. Además, es bien sabido que las superficies de las fronteras del contenedor tienen una importante influencia en la estructura y estabilidad de la celda convectiva formada [34, 35]. Por ejemplo, en el trabajo de Mizushima [36], se analizó la inestabilidad térmica en un fluido confinado en una cavidad rectangular de dimensiones finitas asumiendo flujo bidimensional. Las placas de las fronteras horizontales se consideraron rígidas y conductoras térmicas perfectas. Se utilizaron tres distintos tipos de condiciones de frontera: paredes rígidas y conductoras térmicas perfectas, paredes rígidas y perfectamente aisladas y superficies libres y perfectamente aisladas. Se obtuvieron varias condiciones críticas de la estabilidad lineal del estado básico para distintas relaciones de aspecto. Se concluyó que las características de la estabilidad son muy diferentes entre los casos con paredes rígidas en comparación con las de superficie libre. Se obtuvieron expresiones analíticas para determinar el número de Rayleigh crítico para cavidades muy anchas y muy estrechas. Además se confirmó la aparición de vórtices de Moffat (vórtices que se forman en las esquinas y cercanías de puntos de separación del flujo) para el caso de paredes rígidas y conductoras térmicas perfectas.

Dentro de las investigaciones sobre flujo termogravitacional debido a un gradiente de temperatura inclinado, se tiene el trabajo de Nield [15]; en el cual realizó un estudio de convección inducida por la aplicación de gradiente de temperatura inclinado en una capa de fluido horizontal poco profunda. Donde la componente horizontal de este gradiente indujo una circulación de Hadley, que se volvió inestable cuando el componente vertical del gradiente de temperatura alcanzó un valor crítico. El análisis de estabilidad lineal del flujo fue con base en los números de Rayleigh horizontal R_H y vertical R_V . El método utilizado es válido para cualquier número de Prandtl Pr y se incluyó el caso para un $R_V = 0$. El sistema de ecuaciones diferenciales fue resuelto mediante una aproximación directa de Galerkin, lo cual resultó ser conveniente para los cálculos numéricos en el rango de los parámetros de interés. Los resultados confirmaron y ampliaron los resultados reportados anteriormente por otros investigadores.

También se encuentra el trabajo de Ortíz y Dávalos [16], donde se investigó la inestabilidad del flujo de una capa fluida horizontal bajo un gradiente de temperatura inclinado. Para lo cual se consideró una capa de fluido de

extensión infinita y paredes verticales laterales uniformemente calentadas, ubicadas muy lejos de la región central. Además, la capa también se consideró dentro de dos paredes horizontales, rígidas y paralelas perpendiculares a la gravedad y sujetas a un gradiente de temperatura vertical adverso. Los cálculos se realizaron para números Prandtl Pr en el rango de 0.026 a 1 (para representar materiales como metales líquidos o gases). Además los autores mejoraron el método numérico de Galérkin y obtuvieron nuevos resultados e importantes ampliaciones y correcciones al trabajo de Nield [15]. Dentro de los resultados se descubrió un nuevo modo de inestabilidad; al cual lo llamaron modo oscilatorio oblicuo Obo , que apareció dentro del rango $0.2 < Pr < 0.45$ y representó en ser la primer inestabilidad en aparecer para un rango particular del número de Rayleigh horizontal R_H para todos los números de Prandtl Pr hasta $Pr = 1$. Se encontró una nueva co-dimensión de dos modos de inestabilidad cuando el número de Prandtl se incrementa a $Pr = 0.4886$, cuando las curvas del modo Obo y el modo longitudinal estacionario interseccionaron. Otro punto nuevo de co-dimensión apareció en el rango $0.5 < Pr < 1$, el cual correspondió al cruce entre las curvas del modo Obo y el modo longitudinal estacionario impar LS_2 . Por último, los autores presentaron una descripción detallada del cambio en la forma cualitativa de las curvas críticas para números de Prandtl entre $Pr = 0.026$ y $Pr = 1$.

Continuando con los trabajos de Ortíz y Dávalos [17], realizaron también un análisis de la inestabilidad del flujo de una capa fluida horizontal poco profunda bajo un gradiente de temperatura inclinado pero en esta ocasión, fue para números de Prandtl Pr en el rango $2 \leq Pr \leq 500$ (se analizaron magnitudes mayores del Pr , pero los resultados fueron similares). Dentro de sus resultados, encontraron que el modo oblicuo oscilatorio Obo aún se manifiesta para $Pr = 2$ (lo cual ya se había reportado en su trabajo anterior, donde el rango de valores investigados fue $Pr \leq 1$). Además las magnitudes del número de Rayleigh horizontal R_H utilizadas fueron mucho mayores que las reportadas anteriormente en la literatura. También mostraron que el modo transversal oscilatorio To encontrado por Nield [15] disminuyó considerablemente su rango con el Pr , pero nunca dejó de manifestarse. Encontraron que para $Pr \geq 0.5$, los modos longitudinales LS_1 y LS_2 desempeñan papeles importantes en la inestabilidad de casi todo el rango del R_H investigado, excepto en el corto rango donde están presentes los modos Obo y To . Además presentaron unas ecuaciones muy simples y útiles para calcular las curvas críticas para los modos LS_1 y LS_2 , con las cuales resultaron obtener buenas aproximaciones para $Pr = 10$ y mejores aproximaciones para $Pr \geq 100$. Basándose en el perfil de temperatura principal pudieron describir los cambios en la estructura de la celda convectiva al incrementarse el R_H . El crecimiento del R_H aumentó la región estable en medio de la capa líquida y consecuentemente se aumentó la separación entre las regiones inestables formadas cerca de las paredes horizontales que contienen al fluido (superior e inferior). La mayor separación entre las regiones inestables debido al aumento del R_H ; resultó generar las condiciones para la creación de una estructura de dos celdas convectivas (LS_2) y otra estructura de tres celdas (LS_1).

Con la finalidad de complementar sus trabajos anteriores, Ortíz y Dávalos [18] realizaron un estudio sobre la convección natural de una capa de fluido de longitud infinita bajo la influencia de un gradiente de temperatura inclinado, considerando negativa la componente vertical del gradiente de temperatura (es decir, un número de Rayleigh vertical negativo R_V). Este fenómeno es importante en aplicaciones cuando el $R_V < 0$ se utiliza para estabilizar un líquido y aún persiste un gradiente de temperatura horizontal. Dentro de los resultados se encontró que con el aumento en la magnitud del R_V negativo, los modos de convección estacionarios y oscilatorios compiten entre sí por ser el primero en desestabilizarse. Además, describieron a detalle los análisis para siete magnitudes del número de Prandtl. Del estudio realizado llegaron a la conclusión que incluso cuando el $R_V < 0$, las inestabilidades de flujo todavía están presentes y siempre es posible encontrar patrones de flujo interesantes por analizar.

Cabe mencionar que la importancia de los trabajos anteriormente descritos para el caso de análisis de estabilidad de flujo convectivo inducido por un gradiente de temperatura inclinado, radica en la elaboración de diagramas de estabilidad para los diferentes fluidos analizados caracterizados a través de su número de Prandtl. Otro trabajo relacionado con la obtención de diagramas de estabilidad, es el estudio llevado a cabo por Lyubimova y Skuridin [37]; en el cual se estudió el efecto de las condiciones de frontera térmicas y la propagación de ondas acústicas sobre la estabilidad del flujo convectivo estacionario en una capa horizontal. El modelo consistió en un fluido delimitado por paredes rígidas horizontales en la parte superior e inferior. La variación de la temperatura se realizó en sentido del eje longitudinal del modelo, el cual también se utilizó para la propagación de la onda acústica. Los parámetros mediante los cuales se caracterizó el estudio fueron los números adimensionales: Grashof Gr , Prandtl Pr y Reynolds Re . Sin embargo, como se menciona en la descripción del modelo, el fluido se sometió a un gradiente de temperatura horizontal.

Otro trabajo en el cual se consideraron los efectos de las condiciones de frontera sobre la estabilidad del flujo convectivo, es el de Mizev y Schwabe [38], en el cual se realizó un estudio experimental sobre las inestabilidades convectivas en una capa líquida horizontal bajo la acción de un gradiente de temperatura inclinado considerando la condición de frontera superior como superficie libre. El fluido de trabajo utilizado fue aceite de silicona de 10 cSt (número de Prandtl $Pr = 102$). Durante el estudio, se analizó la influencia de la gravedad sobre la formación de los patrones convectivos para capas de fluido con diferentes grosores. De los resultados, se determinó que el comportamiento del sistema depende apreciablemente del número de Bond (relación de las fuerzas de flotación y las fuerzas de tensión superficial). Para el caso de pequeños números de Bond (cuando la influencia de la flotabilidad fue mínima), se observaron cuatro patrones de flujo diferentes (flujo paralelo constante, celdas de Bénard Marangoni, celdas de Bénard-Marangoni a la deriva y rollos longitudinales). Para números de Bond más grandes (cuando la influencia de la flotabilidad resultó considerable), aparecieron nuevas estructuras convectivas: rollos longitudinales de superficie y las celdas a la deriva en la superficie, además de los patrones anteriormente

mencionados. Por lo que los autores describieron el comportamiento de los patrones convectivos obtenidos y presentaron un diagrama de estabilidad con base a los números de Marangoni verticales y horizontales.

Por otra parte, en el trabajo de Nezar y Rahal [39] se realizó un estudio numérico mediante software comercial (Gambit y FLUENT) para determinar las inestabilidades del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado en una capa de fluido horizontal con la condición de la superficie superior como superficie libre. El fluido de trabajo utilizado fue aceite de silicona ($Pr = 102$) y se varió el espesor de la capa de fluido de 1.7 mm a 3.2 mm, para estudiar el efecto de la gravedad y la tensión superficial en la formación de los patrones convectivos. De los resultados se obtuvieron las siguientes conclusiones: al aplicar un gradiente de temperatura vertical se produjeron celdas convectivas tipo Bénard-Marangoni, donde el espesor de la capa de fluido tuvo gran influencia en el tipo de patrón de flujo generado y la morfología de los patrones cambia completamente de celdas hexagonales a rollos longitudinales para un rango del espesor de la capa líquida de 3 mm a 3.5 mm.

1.2.4. Flujo considerando deslizamiento en las superficies que delimitan al fluido

Para fluidos newtonianos, se ha demostrado el incumplimiento de la condición de no-deslizamiento a través de la experimentación a escala microscópica [19, 20]. Por ejemplo, en el trabajo de Pit et al. [19]; se realizó un estudio mediante una técnica experimental (Total Internal Reflection - Fluorescence Recovery After Phobleaching, TIR-FRAP por sus siglas en inglés) con el objetivo de analizar la velocidad de un líquido en contacto con una pared. Como aplicación, orientaron su investigación considerando como condición de frontera la velocidad de un líquido durante fenómenos de fricción con lubricación y estudiaron la influencia de un aditivo común (ácido esteárico) en un aceite base (hexadecano) y se demostró que los fluidos newtonianos simples pueden desarrollar deslizamiento en el pared. Además, para el flujo de gas en microcanales se ha demostrado que se producen situaciones similares [40].

Entre los trabajos realizados mediante simulación, la investigación de Barrat et al. [41] mediante una simulación de dinámica molecular, llegó a la conclusión de que cuando el ángulo de contacto es lo suficientemente grande, la condición de deslizamiento entre el fluido y las paredes es adecuada para el caso de líquidos que mojan parcialmente un sólido.

El trabajo de Lee [21] también incluyó los efectos de deslizamiento en cojinetes lubricados con gas, los cuales son utilizados en maquinaria de micro-rotación; donde el gas se desliza sobre una superficie de apoyo cuando el espesor de la película del rodamiento es lo suficientemente pequeño como para alcanzar una relación particular respecto del camino libre molecular del gas. Dentro de los resultados, cabe destacar que el efecto del flujo con

deslizamiento en la carga no dimensional a temperatura ambiente no fue significativo; sin embargo, el flujo con deslizamiento disminuyó la capacidad de carga en condiciones de alta temperatura. La nanotecnología no está exenta de este fenómeno, ya que el uso de nanofibras proporciona un deslizamiento sobre el aire circundante utilizado en los materiales para procesos de filtración de aire (AFM, por sus siglas en inglés) con la finalidad de combatir la contaminación del aire [42]. Sin embargo, el deslizamiento trae consecuencias en el rendimiento de micro-bombas magneto hidrodinámicas (MHD, por sus siglas en inglés) [43, 44]; y desempeñan un papel crucial en los micro-sistemas de análisis total (μ TAS, por sus siglas en inglés). Continuando con trabajos que involucran el deslizamiento en el flujo de gas, Arkilic et al. [45] demostraron que la tasa de flujo másico a través del microcanal se puede predecir con precisión utilizando la condición de deslizamiento en las paredes de microcanales largos cuando se tiene helio fluyendo a través de ellos. Esos resultados también fueron confirmados por Liu et al. [46] para flujo a través de microcanales. Además, el estudio experimental del flujo de gas (nitrógeno, helio y argón) en microcanales de silicio realizado por Harley et al. [40], demostró la concordancia de los datos experimentales con respecto a las predicciones de la teoría mediante el uso de un modelo de flujo isotérmico con deslizamiento.

La capa límite juega un papel importante como se ha comentado anteriormente, la complejidad del flujo considerando el deslizamiento es amplia y cubre diferentes áreas, por ejemplo, la condición de deslizamiento se presenta en condiciones de flujo subsónico enrarecido en atmósferas extraterrestres y para pequeños vehículos aéreos. Se han realizado estudios numéricos sobre este tema, entre ellos, Rahman y Eltayeb [47] llevaron a cabo una evaluación del flujo convectivo con condición de deslizamiento para fluidos ligeramente enrarecidos que fluyen sobre una cuña, incluyendo un salto térmico y considerando la dependencia de las propiedades de transporte con la temperatura. Dentro de sus resultados se determinó que una fuerte rarefacción y un mayor ángulo de cuña controlaron significativamente el crecimiento del grosor de las capas límite hidrodinámica y térmica, las cuales resultaron ser más bajas para un flujo donde las propiedades del fluido permanecieron constantes en relación para un flujo de propiedades dependientes con la temperatura. Dentro del campo de la ingeniería química, Hamza [48] estudió numéricamente el comportamiento transitorio y permanente del flujo por convección natural de un fluido exotérmico en un canal vertical considerando la condición de deslizamiento entre la pared y un fluido newtoniano. Dentro de los resultados obtenidos se observó que la formación del flujo dependía fuertemente del deslizamiento.

Uno de los efectos ocasionados por el deslizamiento es el aumento de la velocidad del flujo, ya que se produce una reducción de la fricción con la pared; como lo mostró Haq et al. [49], quien analizó el flujo de un fluido viscoso e incompresible al hacerlo pasar por una placa vertical sujeta a un salto de temperatura en la pared. En el trabajo de Buonomo y Manca [50] se obtuvieron resultados similares; ellos realizaron un estudio numérico para analizar el estado estable del flujo por convección natural de aire en micro-canales verticales de placas paralelas. Dentro de los resultados encontrados se determinó que el flujo másico máximo siempre se obtuvo para el valor del

número de Knudsen Kn más alto utilizado. Por otro lado, Martin y Boyd [51] llevaron a cabo un estudio del flujo en una capa límite laminar usando la condición de frontera de deslizamiento. Sin embargo, ellos determinaron que el deslizamiento en la pared provocó que las capas límite fueran más delgadas, lo cual originó un retraso en la transición a la turbulencia. Además, se afectó la transferencia de calor; ya que sin una condición de salto térmico el deslizamiento condujo a una mayor transferencia de calor; pero cuando se agregó la condición de salto térmico, la transferencia de calor disminuyó por debajo de los valores obtenidos para el caso de no deslizamiento. Además, el efecto combinado del deslizamiento y la transferencia de calor contribuye en la modificación del régimen de flujo, para este caso Chakraborty et al. [52] investigó las características de la transferencia de calor en flujos de gas por convección natural a través de microcanales verticales calentados simétricamente considerando canales con relaciones de aspecto grandes y condiciones de régimen de flujo con deslizamiento. Dentro de sus resultados determinaron en cuanto a las características de la transferencia de calor, que el número de Nusselt promedio con efectos de deslizamiento en la pared se volvió más prominente para valores más altos del número de Knudsen. Sin embargo, el aumento relativo en la tasa de transferencia de calor tendió a detenerse para valores más altos del número de Rayleigh. En el trabajo realizado por Qian et al. [53] se presentó una condición de frontera de Navier generalizada (GNBC, por sus siglas en inglés), con la cual se pudo resolver el problema de la línea de contacto móvil. El efecto de deslizamiento en algunas superficies puede controlarse mediante varias técnicas. Para superficies hidrofóbicas a microescala, en el trabajo de Karatay et al. [54], el deslizamiento en la superficie se controló modificando la geometría de las burbujas inmersas en sus bordes o fronteras, lo cual contribuyó al deslizamiento en las paredes.

El fenómeno de deslizamiento tiene efectos tanto en la configuración del flujo básico como en su estabilidad. Para análisis del flujo básico o completamente desarrollado (incluidos el flujo transitorio), Azese [55] y los autores mencionados anteriormente desarrollaron formulaciones para flujos de Couette y de Poiseuille, donde se incluyó el efecto del deslizamiento. Referente al análisis de estabilidad del flujo, Ghosh et al. [56] en su investigación relacionada con las características de la estabilidad lineal del flujo impulsado por un gradiente de presión considerando fluidos miscibles y de diferente viscosidad en un canal con condiciones de deslizamiento en la pared, mostró que el deslizamiento tuvo un efecto estabilizador. Sin embargo, el deslizamiento también puede afectar el comportamiento de fenómenos de transferencia de calor; por ejemplo, en el trabajo de Cole et al. [57] se evaluó de forma analítica el flujo de gas en régimen de flujo con deslizamiento, incluyendo la conducción axial de calor en el fluido y transferencia de calor conjugada. Además, Xu et al. [58], en sus investigaciones abordaron el fenómeno de deslizamiento mediante el modelado de capas límite, al realizar un estudio numérico-experimental para evaluar el alcance del deslizamiento y la transición de las escalas de longitud, desde el régimen dominado por el deslizamiento al régimen sin deslizamiento. El análisis de estabilidad fue lineal y, la experimentación, en

una capa de polimetilmetacrilato (PMMA, por sus siglas en inglés) sobre una subcapa de poliestireno (PS, por sus siglas en inglés).

1.2.5. Flujo en el proceso de fabricación del vidrio por el método de flotado

Otra importante aplicación sobre la influencia de un gradiente de temperatura inclinado en las propiedades de un material, es en el proceso de vidrio flotado propuesto por Pilkington [59]; el cual consiste en una plancha de vidrio fundida que se hace flotar sobre una capa de estaño fundido (con lo que se obtiene un vidrio de grosor uniforme y con una superficie muy plana). De acuerdo con el trabajo realizado por Prieto M. et al. [60], en este proceso de fabricación se tienen seis paredes en la cámara de flotado: dos paredes verticales (laterales) que sirven de confinamiento para la lámina de vidrio y que están en contacto con el estaño fundido, dos paredes verticales (entrada y salida) en contacto con la atmósfera y dos paredes horizontales; una inferior y otra superior (sistema de enfriamiento y calentamiento). Por lo tanto, el gradiente de temperatura inclinado se logra con un gradiente de temperatura entre la entrada y salida de la cámara de flotado (gradiente de temperatura horizontal) y la diferencia de temperaturas entre la superficie inferior y superior (gradiente de temperatura vertical). Por otra parte, se ha considerado que las partículas de estaño fundido adyacentes a la lámina de vidrio provocan flujos inversos en el baño de estaño fundido (corrientes en la dirección opuesta al avance de la lámina de vidrio); por lo que el flujo inverso tiene una temperatura diferente al resto del baño de estaño, lo cual puede provocar temperaturas inapropiadas para la formación y el enfriamiento de la lámina de vidrio. Además, resulta importante controlar las corrientes convectivas que aparecen sobre la capa de vidrio en formación para prevenir el desarrollo de patrones de distorsión superficial en la lámina de vidrio [61, 62]. Es muy relevante para las industrias relacionadas con los procesos de formación de vidrio y para la investigación relacionada con líquidos newtonianos [63, 64], la comprensión y el control de estos fenómenos, como resultado, se pueden obtener mejores controles de calidad y procesos de seguridad.

1.2.6. Resumen de la revisión bibliográfica

Durante la revisión bibliográfica se encontraron diferentes estudios y análisis teóricos, analíticos, numéricos, experimentales y en algunas ocasiones, combinaciones entre ellos relacionados con el fenómeno de la estabilidad del flujo convectivo. En general, algunos de los estudios estuvieron orientados a:

- Determinar los efectos de las condiciones de frontera (paredes rígidas conductoras o adiabáticas o superficie libre) sobre la estabilidad del flujo convectivo. [34–36, 38]

- Visualizar los diferentes patrones de flujo que se originan en la transición del flujo estable al flujo turbulento. [3, 4, 24, 32]

- Analizar los parámetros de control como los números de Grashof Gr , de Rayleigh Ra (horizontal y vertical para los casos de gradientes de temperatura dirigidos en una sola dirección), de Reynolds Re y del Prandtl Pr ; y su influencia en el comportamiento del flujo. [2, 22, 51, 52]

- Determinar las regiones de flujo estable para generar diagramas de estabilidad para diferentes fluidos caracterizados a través de su número de Prandtl Pr . [15–18, 37]

Sin embargo, en ningún estudio se contempla el análisis de estabilidad lineal del flujo convectivo debido a un gradiente de temperatura inclinado para condiciones de flujo con deslizamiento. Por lo tanto, con la finalidad de comprender la dinámica de éstos fenómenos en cuanto a los parámetros críticos que disparan la convección impulsada por un gradiente de temperatura inclinado, este trabajo de tesis doctoral presenta un análisis de estabilidad lineal para el problema de convección natural debido a un gradiente de temperatura inclinado cuando se tienen condiciones de deslizamiento. Los resultados obtenidos para la estabilidad del flujo bajo la condición de flujo con deslizamiento se comparan con aquellos obtenidos para la condición de flujo sin deslizamiento para cuatro diferentes números de Prandtl. Además, los resultados se presentan en forma de curvas críticas para los diferentes modos de inestabilidad presentes para cada número de Prandtl; y se consideran ambas regiones del número de Rayleigh vertical Ra_V (región positiva para cavidades calentadas por debajo y región negativa para cavidades calentadas por la pared superior).

1.3. Hipótesis

El efecto del deslizamiento en las paredes horizontales desestabiliza el flujo convectivo impulsado por gradientes de temperatura inclinados en relación al caso con fronteras sin deslizamiento.

1.4. Objetivos

- Analizar la estabilidad del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado cuando se tiene o no se tiene deslizamiento para determinar la región de estabilidad.
- Determinar los parámetros críticos en los cuales el sistema inicial se vuelve inestable mediante modelado numérico y/o computacional para conocer el nivel de control a ejercer en las aplicaciones que involucran estos fenómenos.
- Seleccionar números de Prandtl Pr para fluidos presentes en aplicaciones.
- Determinar el patrón de flujo que caracteriza a la inestabilidad más crítica para cada número de Prandtl analizado.

1.5. Metodología

En general, las actividades para el desarrollo del proyecto de investigación se definen a través del siguiente diagrama de flujo:

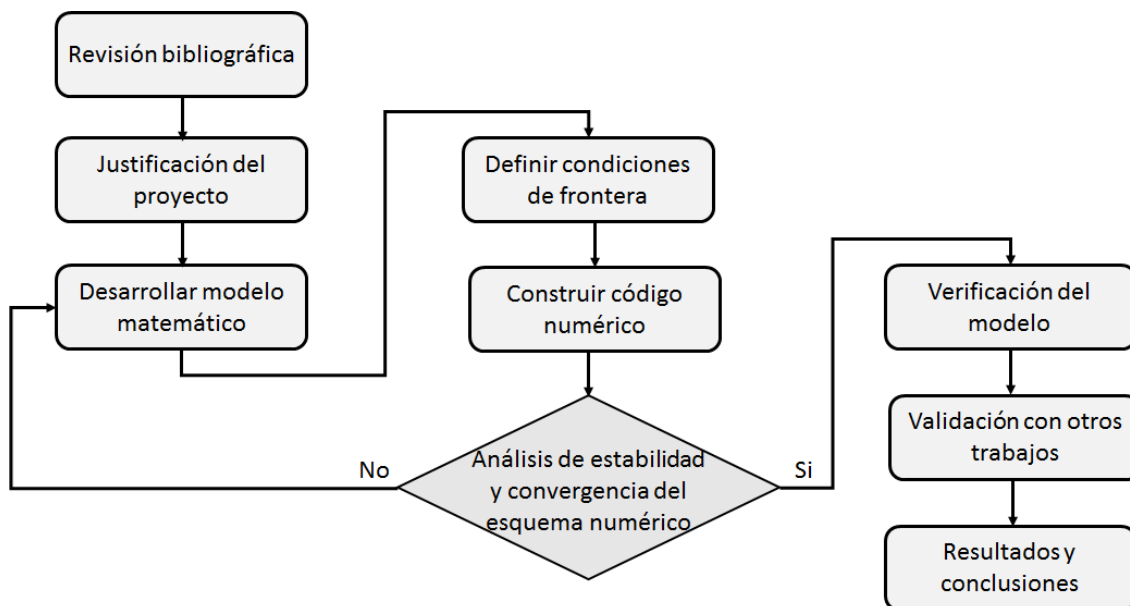


Figura 1-2: Diagrama de Flujo que muestra la metodología a seguir para el desarrollo de la investigación y cumplimiento de los objetivos establecidos.

1.6. Alcance

Analizar la estabilidad del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado mediante el modelado numérico a través del enfoque de estabilidad lineal utilizando el método Galérkin con funciones ortogonales de Chandrasekhar y series de Fourier. Para lo cual se involucran cuatro diferentes fluidos caracterizados por medio de su número de Prandtl Pr según su aplicación:

- Hierro líquido a 1500 K con un $Pr = 0.1$, el cual corresponde a las aplicaciones en procesos de metalurgia [1].
- Aire a 303 K con un $Pr = 0.71$, el cual corresponde a las aplicaciones para procesos de filtrado [42].
- Agua saturada a 283 K con un $Pr = 10$, el cual corresponde a las aplicaciones en el área de microfluidos. Debido a que normalmente los fluidos de trabajo utilizados son los electrolitos, los cuales tienen propiedades muy similares a las del agua [65].
- Vidrio fundido a 1350 K con un $Pr = 500$, el cual corresponde a las aplicaciones del proceso de fabricación de vidrio por medio del método de flotado [59].

El análisis de estabilidad lineal se realizará considerando dos condiciones de frontera distintas sobre las paredes que delimitan al fluido:

- No deslizamiento entre las partículas de fluido que están en contacto con la superficie. Para la cual se considera un número de Knudsen $Kn = 0$.
- Deslizamiento entre las partículas de fluido que están en contacto con la superficie. Para la cual se considera un número de Knudsen $Kn = 0.1$.

Esto con la finalidad de obtener los diagramas de estabilidad para cada fluido según su aplicación, determinar la inestabilidad más crítica presente y hacer una comparación del efecto del deslizamiento sobre la estabilidad del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado para cada uno de los fluidos.

1.7. Descripción de los capítulos

El documento de tesis está estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2; se presenta el marco teórico, en el cual se describe el sistema físico junto con las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, así como también se describe el análisis de estabilidad lineal llevado a cabo. En el Capítulo 3; se presenta la descripción del método numérico utilizado (Galérkin). El Capítulo 4 presenta la sección de los resultados numéricos obtenidos, los cuales se muestran en forma de curvas para los valores críticos del número de Rayleigh vertical (Ra_{VC}), número de onda (α_C) y frecuencia de oscilación (σ_C) con respecto al número de Rayleigh horizontal (Ra_H). En el Capítulo 5, se presenta la discusión de los resultados numéricos por medio de los perfiles de velocidad y temperatura, así como también la validación de los mismos con respecto a otros modelos y experimentos. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones acerca de los resultados obtenidos en este trabajo de investigación.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Teorema de transporte de Reynolds

En mecánica de fluidos, es más conveniente trabajar con volúmenes de control y, por lo tanto, surge la necesidad de relacionar los cambios en un volumen de control con los cambios en un sistema. Por lo tanto, esta relación entre las razones de cambio de una propiedad extensiva con respecto al tiempo para un sistema y para un volumen de control, está dada por medio del teorema del transporte de Reynolds; el cual recibe ese nombre en honor al ingeniero inglés Osborne Reynolds (1842-1912).

El teorema del transporte de Reynolds, establece una relación entre las tasas de cambio del sistema y las integrales de superficie y volumen del volumen de control. La variable α puede representar, respectivamente, la masa, momento lineal, momento angular o la energía. Su deducción está dada como sigue:

$$\alpha = \alpha(x, y, z, t) \quad (2-1)$$

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial t} dt + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz \quad (2-2)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2-3)$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2-4)$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \alpha \quad (2-5)$$

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial\alpha}{\partial x_k} \quad (2-6)$$

La expresión 2-6 es la rapidez de cambio lagrangiana $D\alpha/Dt$ de α para un elemento de fluido dado en términos de las derivadas eulerianas $\partial\alpha/\partial t$, $\partial\alpha/\partial x_k$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \quad (2-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{V(t)} \alpha(t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(t) dV \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] \right\} - \int_{V(t)} \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} dV \quad (2-9)$$

Pero:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(t+\delta t) dV \right] \right\} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{S(t)} \alpha(t+\delta t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] \delta t dS \right\} \quad (2-10)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V(t)} \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} dV \quad (2-11)$$

Usando el teorema de Stokes:

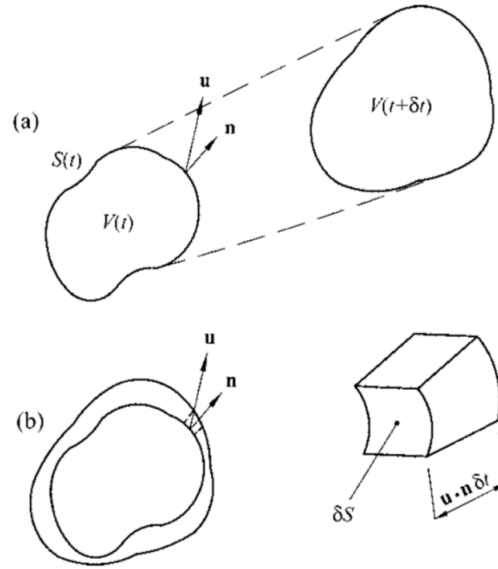


Figura 2-1: a) Volumen de control deformado arbitrariamente en los tiempo t y $t + \delta t$. b) superposición de los volúmenes de control para mostrar el cambio de volumen dV

$$\int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\alpha(t) \mathbf{u}) dV \quad (2-12)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) \right] dV \quad (2-13)$$

2.2. Conservación de masa

La conservación de la masa es equivalente a fijar la derivada lagrangiana D/Dt de la masa contenida en el volumen V ($\int_V \rho dV$) igual a cero:

Usamos el teorema de transporte de Reynolds en el que la densidad es la propiedad del fluido α_t .

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV \quad (2-14)$$

Debido a que el volumen V se elige arbitrariamente, la única forma en que puede satisfacerse para todas las elecciones posibles de V , es que el integrando sea cero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2-15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (2-16)$$

La expresión (2-16) expresa el hecho que la masa se conserva, la implicación que la velocidad es continua, por esta razón la ecuación (2-16) es llamada la ecuación de continuidad. Podemos desarrollar los términos anteriores como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (2-17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2-18)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2-19)$$

La variación de la densidad puede ignorarse para el caso de flujo en líquidos. en este caso estamos hablando de fluido incompresible. Para un fluido incompresible, no solamente la masa permanece constante, sino también en el volumen y por lo tanto la densidad no cambia. Esto puede escribirse como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2-20)$$

En vista de la relación anterior, la ecuación de continuidad puede expresarse para un fluido incompresible como:

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2-21)$$

Debe notarse que la ecuación (2-21) no es válida únicamente para el caso especial de $D\rho/Dt$, sino también para flujo de un fluido estratificado.

2.3. Conservación de momento.

Es la aplicación de la ecuación de Newton de movimiento a un elemento de fluido. Las fuerzas que actúan sobre una masa de fluido pueden clasificarse como fuerzas de cuerpo (gravitacionales o electromagnéticas) o fuerzas de superficie (Presión o esfuerzos viscosos). Si \mathbf{f} es un vector que representa la resultante de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, la fuerza neta sobre la masa de volumen V será $(\int_V \rho \mathbf{f} dV)$. También si \mathbf{P} es un vector de superficie que representa la fuerza de superficie resultante que actúa sobre una superficie que contiene a V será $\int_S \mathbf{P} dS$. En base al principio de conservación, la suma de las fuerzas resultantes es igual a la rapidez de cambio de momento (o fuerza de inercia). La masa por unidad de volumen es ρ y su momento es $\rho \mathbf{u}$ tal que el momento contenido en el volumen V es $\int_V \rho \mathbf{u} dV$, de tal forma que la ley de conservación de momento resulta en:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{P} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (2-22)$$

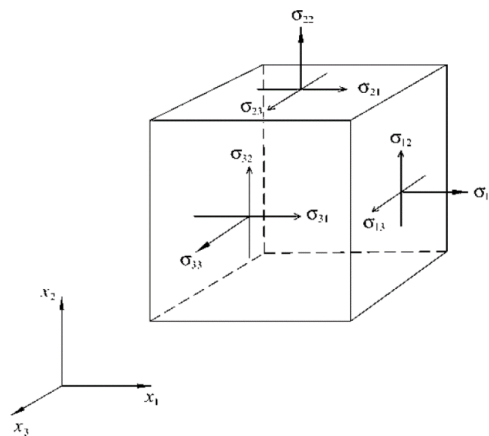


Figura 2-2: Estado triaxial de esfuerzos

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V \rho f_j dV \quad (2-23)$$

Usando el teorema del transporte de Reynolds y la transformación de integral de superficie a integral de volumen:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V \rho f_i dV \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (2-25)$$

Desarrollando:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (2-26)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (2-27)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (2-28)$$

El primer término del miembro izquierdo es la aceleración temporal y el segundo es la aceleración convectiva.

2.4. Conservación de Energía.

La energía total contenida en el volumen V , que incluye las energías interna y cinética:

$$\int_V \left[\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right] dV \quad (2-29)$$

El cambio total de energía es igual a la rapidez con la cual el trabajo se realiza menos la rapidez con la cual el calor está siendo agregado.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left[\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right] dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} dS + \int_V \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-30)$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] \right\} =$$

$$\int_S u_j \sigma_{ij} n_i dS + \int_V u_j \rho f_j dV - \int_S q''_j \cdot n_j dS \quad (2-31)$$

También:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] \right\} =$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) dV + \int_V u_j \rho f_j dV - \int_V \frac{\partial q''_j}{\partial x_j} dV \quad (2-32)$$

una vez que todas las integrales son de volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) + \rho u_j f_j - \frac{\partial q''_j}{\partial x_j} \quad (2-33)$$

El primer término del miembro izquierdo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) + \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2-34)$$

El segundo término del miembro izquierdo:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = e \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) \quad (2-35)$$

Haciendo uso de la ecuación de continuidad: $\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = -e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} - \frac{1}{2} u_j u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) \quad (2-36)$$

entonces el miembro izquierdo queda como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} u_j u_j \right) \quad (2-37)$$

Reduciendo, el miembro izquierdo queda como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2-38)$$

Regresando a la ecuación de conservación de energía:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \rho u_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \rho u_j f_j - \frac{\partial q''_j}{\partial x_j} \quad (2-39)$$

Vemos que aparece la ecuación de momento y la podemos simplificar:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + u_j \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = u_j \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q''_j}{\partial x_j} \quad (2-40)$$

Por lo tanto la ecuación que expresa la conservación de la energía térmica es:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q''_j}{\partial x_j} \quad (2-41)$$

El primer término del miembro izquierdo expresa la rapidez de cambio de la energía interna y el segundo expresa el cambio convectivo local causado por el flujo de fluido desde un área a otra. El primer término del miembro derecho expresa la conversión de energía mecánica a térmica y el segundo la rapidez en la que el calor está siendo agregado desde afuera, ya sea por conducción o por otro medio.

2.5. Ecuaciones constitutivas.

Los nueve elementos del tensor esfuerzo serán relacionados a los nueve elementos del tensor de rapidez de rapidez de deformación, e_{kl} a través de una serie de parámetros. Todos estos parámetros, excepto 2, serán calculados analíticamente y recordando las 2 que son los coeficientes de viscosidad, deben determinarse empíricamente. Para lograr este fin, se introducen los postulados para un fluido newtoniano.

1. Cuando el fluido está en reposo, el esfuerzo es hidrostático y la presión ejercida por el fluido es la presión termodinámica.

2. El tensor de esfuerzos está linealmente relacionado al tensor de rapidez de deformación, e_{kl}
3. Entonces no hay esfuerzos cortantes en la rotación de un cuerpo rígido del fluido.
4. No hay direcciones preferenciales en el fluido, las propiedades del fluido son funciones de sus puntos.

Es posible descomponer el tensor de rapidez de deformación puede descomponerse en sus partes simétrica y antisimétrica:

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2-42)$$

Donde el primer término es la rapidez de corte (parte simétrica) y el segundo es la rapidez de rotación (parte antisimétrica). La condición 1, requiere que el esfuerzo sea de la forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2-43)$$

donde τ_{ij} depende del movimiento del fluido y se llama tensor de esfuerzo cortantes. p es la presión termodinámica y δ_{ij} es la delta de kronecker. Entonces la única incógnita es el tensor de esfuerzos cortantes τ_{ij} . La condición 2, postula que el tensor de esfuerzos cortantes está linealmente relacionado al tensor de rapidez de deformación. Esta es la característica distintiva de los fluidos newtonianos. Hay nueve elementos del tensor de esfuerzos cortantes τ_{ij} y cada uno de estos elementos puede ser expresado como una combinación lineal de los nueve elementos en el tensor de rapidez de deformación e_{kl} , es decir, 81 parámetros serán necesarios para relacionar τ_{ij} y e_{kl} . Esto significa que un tensor de cuarto rango se requiere, de tal forma que la la condición 2 queda como:

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (2-44)$$

En base a la condición 3, en el campo de flujo se está llevando a cabo una simple rotación de cuerpo rígido, no deberían haber esfuerzos cortantes en el fluido. por lo tanto los coeficientes relacionados con la parte antisimétrica deben ser cero, por lo tanto la relación constitutiva debe ser:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \beta_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2-45)$$

Hasta ahora, los 81 elementos del tensor de cuarto rango no han sido determinadas. Para ello usaremos la condición 4, que es la condición de isotropía y que garantiza que los resultados obtenidos deben ser independientes de la orientación del sistema coordenado elegido. El tensor isotrópico más general de orden 4 tiene la forma:

$$\beta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2-46)$$

Debido a que el tensor β_{ijkl} además de ser isotrópico debe ser simétrico entonces λ debe ser cero y la forma para el esfuerzo cortante es:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2-47)$$

Se puede demostrar que:

$$\frac{1}{2} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2-48)$$

$$\frac{1}{2} \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2-49)$$

$$\frac{1}{2} \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-50)$$

De esta forma podemos expresar la ecuación constitutiva para el esfuerzo como:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-51)$$

λ y μ son coeficientes de viscosidad. La ley de Newton de viscosidad nos dice que el factor de proporcionalidad entre la rapidez de deformación y el esfuerzo es la viscosidad dinámica, por lo tanto μ es la viscosidad dinámica. λ es el segundo coeficiente viscoso. Para obtener su significado, el promedio de la componente normal de esfuerzo es:

$$-\bar{p} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (2-52)$$

El esfuerzo normal promedio es la presión mecánica en el fluido y es igual a tercera parte de la traza del tensor de esfuerzo.

$$-\bar{p} = \frac{1}{3} \left[\left(-p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(-p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(-p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad (2-53)$$

$$-\bar{p} = -p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2-54)$$

Para gases monoatómicos y líquidos $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. La otra ecuación constitutiva es la ecuación de flujo de calor por conducción:

$$q''_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2-55)$$

Finalmente, la ecuación de conservación de momento queda como:

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_j \quad (2-56)$$

Y la ecuación de la energía

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = \left[-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2-57)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2-58)$$

El término $-p \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, representa la transferencia reversible de energía debido a la compresión. Los términos cuadráticos representan la función disipación y es la medida de la rapidez sobre la cual la energía mecánica está siendo convertida en energía térmica.

2.6. Teorema de Pi-Buckingham

El método de repetición de variables propuesto por Edgar Buckingham (1867-1940), se puede considerar como un procedimiento paso a paso para obtener parámetros adimensionales y simplificar el análisis, reduciendo el número de variables a considerar en un fenómeno físico. La descripción detallada de los pasos se enumera a continuación [66]:

1. Hacer una lista de los parámetros (variables dimensionales, variables adimensionales y constantes dimensionales) y contarlos. Sea n el número total de parámetros en el problema, incluyendo la variable dependiente. Cerciorarse de que cualquier parámetro independiente en la lista sea realmente independiente de los demás; es decir, que no se pueda expresar en términos de cualquier otro parámetro ya considerado en la lista.

2. Hacer una lista con las dimensiones primarias para cada uno de los n parámetros.

3. Suponer el parámetro de reducción j . Como primera suposición, es posible considerar j igual al número de dimensiones primarias involucradas en el problema. La cantidad de números Π esperados (k) se obtiene mediante:

$$k = n - j$$

Si en este paso, o durante algún paso subsecuente, el análisis no funciona, es necesario verificar que se hayan incluido suficientes parámetros en el primer paso. Otra opción es regresar y reducir j por uno e intentar de nuevo.

4. Elegir los j parámetros repetitivos o cantidades básicas que se usarán para construir cada número Π . Dado que los parámetros repetitivos tienen el potencial para aparecer en cada número Π , es necesario elegirlos atinadamente. Para lo cual se recomienda considerar los siguientes lineamientos:

- Nunca tomar la variable dependiente. De lo contrario, esta podría aparecer en todos los números Π , lo cual es indeseable.
- Los parámetros repetitivos elegidos no deben ser susceptibles de formar ellos mismos un grupo adimensional. De otro modo, sería imposible generar el resto de los números Π .
- Los parámetros repetitivos elegidos deben representar todas las dimensiones primarias en el problema.
- Nunca escoger parámetros que ya sean adimensionales. Éstos ya son números Π , por su cuenta.

- Nunca escoger dos parámetros con las mismas dimensiones o con dimensiones que difieran sólo por un exponente.
- Siempre que sea posible, se deben elegir constantes dimensionales sobre las variables dimensionales, de modo que sólo un número Π contenga la variable dimensional.
- Escoger parámetros comunes porque ellos aparecen en cada una de los números Π . En problemas de flujo de fluido por lo general se elige una longitud, una velocidad, una masa o la densidad.
- Escoger parámetros simples sobre los parámetros complejos siempre que sea posible. Es mejor escoger parámetros con sólo una o dos dimensiones básicas (por ejemplo, una longitud, un tiempo, una masa o una velocidad) en lugar de parámetros que estén formados por varias dimensiones básicas (por ejemplo: la energía o la presión).

5. Generar los números Π uno a la vez mediante el agrupamiento de los j parámetros repetitivos con uno de los parámetros restantes, y forzar el producto a ser adimensional. De esta manera, se construyen todos los k Π . Comúnmente, el primer número Π se designa como Π_1 , es el número Π dependiente (el que está en el lado izquierdo de la lista).

6. Verificar que todos los números Π de hecho sean adimensionales.

Capítulo 3

Modelo Matemático

3.1. Teorema de Pi-Buckingham

Con la finalidad de determinar los perfiles de velocidad y temperatura en el fenómeno bajo estudio, a continuación se presenta el desarrollo para obtener los parámetros adimensionales para el caso de flujo dentro de una cavidad impulsado por un gradiente de temperatura inclinado, sujeto a condición de deslizamiento en sus superficies. Para determinar los parámetros adimensionales importantes del fenómeno, se utilizó el teorema de Pi-Buckingham, el cuál es una técnica para simplificar el análisis y reducir el número de variables a considerar en un fenómeno físico.

Todas las cantidades mecánicas pueden expresarse por medio de una combinación lineal de tres dimensiones fundamentales, masa (M), longitud (L) y tiempo (T). Estas dimensiones son para la velocidad: LT^{-1} , aceleración: LT^{-2} , fuerza: MLT^{-2} , presión: $ML^{-1}T^{-2}$, energía: ML^2T^{-2} , momento: MLT^{-1} , densidad: ML^{-3} , viscosidad dinámica: $ML^{-1}T^{-1}$, viscosidad cinemática: L^2T^{-1} , etc...

Consideremos flujo viscoso en una cavidad impulsado por un gradiente de temperatura inclinado, esto se logra permitiendo el calentamiento en una de sus paredes horizontales y una pared vertical, además de permitir el deslizamiento de una de las paredes horizontales. Las variables relevantes involucradas para el análisis del fenómeno con sus respectivas dimensiones son las siguientes:

d = espesor [L]

L = longitud de la capa [L]

H = ancho o profundidad [L]

ΔT_V = diferencia de temperatura vertical [Θ]

ΔT_H = diferencia de temperatura horizontal [Θ]

κ = difusividad térmica [L^2T^{-1}]

ν = difusividad viscosa [L^2T^{-1}]

ρ_0 = densidad [ML^{-3}]

α_T = coeficiente de expansión térmica [Θ^{-1}]

U_c = velocidad característica [LT^{-1}]

ΔP = presión [$ML^{-1}T^{-2}$]

g = aceleración de la gravedad [LT^{-2}]

l_s = longitud del deslizamiento [L]

De las cuales se consideran como cantidades básicas: $\{d, \kappa, \nu, \rho_0, \alpha_T\}$, de un total de trece parámetros. Por lo cual, la diferencia entre la totalidad de parámetros y las cantidades básicas nos resulta en ocho cantidades Π :

$$\Pi_1 = [L], \quad \Pi_2 = [H], \quad \Pi_3 = [l_s] \quad \Pi_4 = [\Delta T_V] \quad \Pi_5 = [\Delta T_H] \quad \Pi_6 = [U_c] \quad \Pi_7 = [\Delta P] \quad \Pi_8 = [g]$$

El proceso para determinar las expresiones para cada cantidad Π es el mismo; de manera muy general, el proceso consiste en generar un sistema de ecuaciones lineales con los exponentes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$ de las cantidades básicas $\{d, \kappa, \nu, \rho_0, \alpha_T\}$ y resolverlo para determinar sus valores, de tal manera que se pueda generar una expresión para cada una de las cantidades Π . Aplicando el proceso anteriormente descrito, las ecuaciones para las tres primeras cantidades Π son:

$$\Pi_1 = \frac{L}{d} \quad \Pi_2 = \frac{H}{d} \quad \Pi_3 = \frac{l_s}{d}$$

Resolviendo para $[\Delta T_V]$ se tiene:

$$\Pi_4 = \frac{[\Delta T_V]}{d^{\alpha_4} \kappa^{\beta_4} \nu^{\gamma_4} \rho_0^{\delta_4} \alpha_T^{\lambda_4}} = \frac{\Theta}{(L)^{\alpha_4} (L^2T^{-1})^{\beta_4} (L^2T^{-1})^{\gamma_4} (ML^{-3})^{\delta_4} (\Theta^{-1})^{\lambda_4}}$$

Por lo tanto, los valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[\Delta T_V]$ son:

$$\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = \delta_4 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_4 = -1$$

Sustituyendo los valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_4]$ se tiene:

$$\Pi_4 = \frac{\Delta T_V}{\alpha_T^{-1}} = \Delta T_V \alpha_T$$

De manera análoga, se repite el procedimiento para $[\Delta T_H]$:

$$\Pi_5 = \frac{[\Delta T_H]}{d^{\alpha_5} \kappa^{\beta_5} v^{\gamma_5} \rho_0^{\delta_5} \alpha_T^{\lambda_5}} = \frac{\Theta}{(L)^{\alpha_5} (L^2 T^{-1})^{\beta_5} (L^2 T^{-1})^{\gamma_5} (ML^{-3})^{\delta_5} (\Theta^{-1})^{\lambda_5}}$$

Por lo tanto, los valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[\Delta T_H]$ son:

$$\alpha_5 = \beta_5 = \gamma_5 = \delta_5 = 0 \text{ y } \lambda_5 = -1$$

Sustituyendo los valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_5]$ se tiene:

$$\Pi_5 = \frac{\Delta T_H}{\alpha_T^{-1}} = \Delta T_H \alpha_T$$

Resolviendo para $[U_c]$ se tiene:

$$\Pi_6 = \frac{[U_c]}{d^{\alpha_6} \kappa^{\beta_6} v^{\gamma_6} \rho_0^{\delta_6} \alpha_T^{\lambda_6}} = \frac{LT^{-1}}{(L)^{\alpha_6} (L^2 T^{-1})^{\beta_6} (L^2 T^{-1})^{\gamma_6} (ML^{-3})^{\delta_6} (\Theta^{-1})^{\lambda_6}}$$

Como se mencionó anteriormente, a continuación se describe el procedimiento para determinar los valores de los coeficientes que cumplen con la expresión para $[U_c]$. Cabe mencionar que este procedimiento es el mismo que se utiliza para resolver las demás expresiones para las cantidades $\Pi (L, H, ls, \Delta T_V, \Delta T_H, \Delta P \text{ y } g)$. El sistema de ecuaciones que resulta para los coeficientes de las dimensiones M, L, T y θ para $[U_c]$ es:

$$M = 0 \alpha_6 + 0 \beta_6 + 0 \gamma_6 + \delta_6 + 0 \lambda_6 = 0$$

$$L = \alpha_6 + 2 \beta_6 + 2 \gamma_6 - 3 \delta_6 + 0 \lambda_6 = 1$$

$$T = 0 \alpha_6 - \beta_6 - \gamma_6 + 0 \delta_6 + 0 \lambda_6 = -1$$

$$\theta = 0 \alpha_6 + 0 \beta_6 + 0 \gamma_6 + 0 \delta_6 + \lambda_6 = 0$$

A partir de la ecuación de M y θ se obtienen los valores para δ y λ respectivamente:

$$\delta_6 = \lambda_6 = 0$$

A partir de la ecuación de T se obtiene:

$$\beta_6 = 1 - \gamma_6$$

Sustituyendo la expresión anterior de β_6 en la ecuación de L se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha_6 + 2(1 - \gamma_6) + 2\gamma_6 &= 1 \\ \alpha_6 + 2 - 2\gamma_6 + 2\gamma_6 &= 1 \\ \alpha_6 &= -1\end{aligned}$$

Proponiendo el valor de $\gamma_6 = -1$ y sustituyendo en la expresión de β_6 se tiene:

$$\beta_6 = 1 - \gamma_6 \implies \beta_6 = 2$$

Con lo cual, se han determinado todos los valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[U_c]$, los cuales son:

$$\alpha_6 = -1, \beta_6 = 2, \gamma_6 = -1 \text{ y } \delta_6 = \lambda_6 = 0$$

Sustituyendo los valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_6]$ se tiene:

$$\Pi_6 = \frac{U_c}{d^{-1}\kappa^2\nu^{-1}}$$

Esta última expresión genera que $U_c = \frac{\kappa^2}{d\nu}$, lo cual vuelve un poco más complejo el análisis de adimensionalización de la ecuación de momento llevado a cabo en la siguiente sección. Por lo que una expresión más conveniente resulta al proponer el valor de $\gamma_6 = 0$. Anteriormente se tenía que:

$$\gamma_6 = -1 \implies \beta_6 = 1 - \gamma_6 \implies \beta_6 = 2$$

Al proponer $\gamma_6 = 0$ se tiene:

$$\gamma_6 = 0 \implies \beta_6 = 1 - \gamma_6 \implies \beta_6 = 1$$

Por lo tanto, los nuevos valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[U_c]$ son:

$$\alpha_6 = -1, \beta_6 = 1 \text{ y } \gamma_6 = \delta_6 = \lambda_6 = 0$$

Sustituyendo los nuevos valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_6]$ se tiene:

$$\Pi_6 = \frac{U_c}{d^{-1}\kappa}$$

Resolviendo para $[\Delta P]$ se tiene:

$$\Pi_7 = \frac{[\Delta P]}{d^{\alpha_7} \kappa^{\beta_7} v^{\gamma_7} \rho_0^{\delta_7} \alpha_T^{\lambda_7}} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(L)^{\alpha_7} (L^2T^{-1})^{\beta_7} (L^2T^{-1})^{\gamma_7} (ML^{-3})^{\delta_7} (\Theta^{-1})^{\lambda_7}}$$

Por lo tanto, los valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[\Delta P]$ son:

$$\alpha_7 = -2, \beta_7 = \gamma_7 = \delta_7 = 1 \text{ y } \lambda_7 = 0$$

Sustituyendo los valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_7]$ se tiene:

$$\Pi_7 = \frac{\Delta P}{d^{-2} \kappa v \rho_0}$$

Resolviendo para $[g]$ se tiene:

$$\Pi_8 = \frac{[g]}{d^{\alpha_8} \kappa^{\beta_8} v^{\gamma_8} \rho_0^{\delta_8} \alpha_T^{\lambda_8}} = \frac{LT^{-2}}{(L)^{\alpha_8} (L^2T^{-1})^{\beta_8} (L^2T^{-1})^{\gamma_8} (ML^{-3})^{\delta_8} (\Theta^{-1})^{\lambda_8}}$$

Por lo tanto, los valores de los exponentes que cumplen con la expresión para $[g]$ son:

$$\alpha_8 = -3, \beta_8 = \gamma_8 = 1 \text{ y } \delta_8 = \lambda_8 = 0$$

Sustituyendo los valores de los exponentes en la expresión para $[\Pi_8]$ se tiene:

$$\Pi_8 = \frac{g}{d^{-3} \kappa v}$$

Finalmente se tienen determinadas las ocho cantidades Π las cuales se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{L}{d} & \Pi_2 &= \frac{H}{d} \\ \Pi_3 &= \frac{l_s}{d} & \Pi_4 &= \Delta T_V \alpha_T \\ \Pi_5 &= \Delta T_H \alpha_T & \Pi_6 &= \frac{U_c}{d^{-1} \kappa} \\ \Pi_7 &= \frac{\Delta P}{d^{-2} \kappa v \rho_0} & \Pi_8 &= \frac{g}{d^{-3} \kappa v} \end{aligned}$$

3.2. Adimensionalización de las ecuaciones de conservación

3.2.1. Ecuación de momento (Navier-Stokes)

Para fluidos newtonianos, los esfuerzos viscosos son proporcionales a la rapidez de deformación del elemento. Para estas condiciones de flujo, la ecuación de Navier-Stokes, usando la aproximación de Boussinesq, está dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \frac{1}{\rho_0} \cdot \nabla' p' + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}' + \mathbf{f} \quad (3-1)$$

donde el símbolo ' denota a las variables y operadores de carácter dimensional, por lo que t' y p' son el tiempo y presión dimensionales respectivamente. Además, $\mathbf{u}' = \langle u', v', w' \rangle$ representa el vector de velocidad del fluido. Por otra parte, \mathbf{f} representa las fuerzas de cuerpo ($\mathbf{f} = \frac{\Delta \rho \cdot \mathbf{g}}{\rho_0}$) y se sabe que $\rho = \rho_0 (1 - \alpha_T \Delta T)$, por lo tanto; despejando para $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ se tiene que $\Delta \rho = -\rho_0 \alpha_T \Delta T$, siendo el término negativo ya que representa una disminución de densidad. Entonces se tiene para \mathbf{f} lo siguiente:

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta \rho \cdot \mathbf{g}}{\rho_0} = (-\alpha_T \Delta T)(-g)\mathbf{k} = g \alpha_T \Delta T = g \alpha_T (T' - T_0)\mathbf{k}$$

Sustituyendo la expresión anterior de \mathbf{f} en la Ec. (3-1), se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \frac{1}{\rho_0} \cdot \nabla' p' + \nu \nabla'^2 \mathbf{u}' + g \alpha_T (T' - T_0)\mathbf{k} \quad (3-2)$$

donde T' es la temperatura y T_0 representa la temperatura de referencia para la densidad ρ_0 .

Recordando las expresiones Π_6 y Π_7 determinadas en la sección anterior para U_c y ΔP respectivamente, y definiendo t_c , ∇' y ∇'^2 :

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{\kappa}{d} & t_c &= \frac{d^2}{\kappa} \\ \nabla' &= \frac{1}{d} & \nabla'^2 &= \frac{1}{d^2} \\ \Delta P &= \frac{\kappa \nu \rho_0}{d^2} \end{aligned}$$

Aplicando los parámetros adimensionales a la Ec. (3-2) y considerando que $\mathbf{u}' = U_c \cdot \mathbf{u}$, $t' = t_c \cdot t$ y que $p' = \Delta P \cdot p$, reacomodando términos se tiene (ver sección del apéndice A.1.1):

$$Pr^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + T\mathbf{k} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3-3)$$

3.2.2. Ecuación de la Energía

La ecuación válida para fluidos newtonianos bajo condiciones transitorias, y contemplando conducción de calor está dada por:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial e}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') e \right] = k \nabla'^2 T' \quad (3-4)$$

donde k es la conductividad térmica del fluido y la energía está dada por $e = C_v T'$, ya que el calor específico se considera a volúmen constante debido a que el volúmen de control es fijo y no sufre cambios con respecto al tiempo. Por lo que la Ec. (3-4) queda de la siguiente manera:

$$\rho_0 \left[\frac{\partial C_v T'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') (C_v T') \right] = k \nabla'^2 T' \implies \rho_0 C_v \left[\frac{\partial T'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') T' \right] = k \nabla'^2 T'$$

Dividiendo la expresión anterior entre $\rho_0 C_v$ se tiene:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') T' = \frac{k}{\rho_0 C_v} \nabla'^2 T'$$

De la expresión anterior se obtiene el coeficiente de difusividad térmica ($\kappa = \frac{k}{\rho_0 C_v}$), por lo que se tiene:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') T' = \kappa \nabla'^2 T' \quad (3-5)$$

Se sabe que $\Delta T = T' - T_0 = T^*$, por lo que $T' = \Delta T + T_0$, entonces $T' = T^* + T_0$. Considerando que $\mathbf{u}' = U_c \mathbf{u}$ y que $t' = t_c \cdot t$; y aplicando los parámetros adimensionales anteriormente definidos para U_c , t_c , ∇' y ∇'^2 a la Ec. (3-5), se tiene:

$$\left(\frac{\Delta T_V \kappa}{Ra_V d^2} \right) \frac{\partial T^*}{\partial t} + \left(\frac{\Delta T_V \kappa}{Ra_V d^2} \right) \mathbf{u} \cdot \nabla T^* = \left(\frac{\Delta T_V \kappa}{Ra_V d^2} \right) \nabla^2 T^*$$

Simplificando el término $\left(\frac{\Delta T_V \kappa}{Ra_V d^2} \right)$ de la expresión anterior se obtiene la ecuación adimensional de la energía, la cual se define como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (3-6)$$

3.2.3. Ecuación de Continuidad

Para las condiciones de flujo incompresible y estacionario, la ecuación de continuidad es:

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (3-7)$$

Considerando que $\mathbf{u}' = U_c \mathbf{u}$ y aplicando los parámetros adimensionales anteriormente definidos para U_c y ∇' a la Ec. (3-7), se tiene:

$$\left(\frac{1}{d} \frac{\kappa}{d}\right) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \left(\frac{\kappa}{d^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de continuidad adimensional es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3-8)$$

3.3. Estado Básico

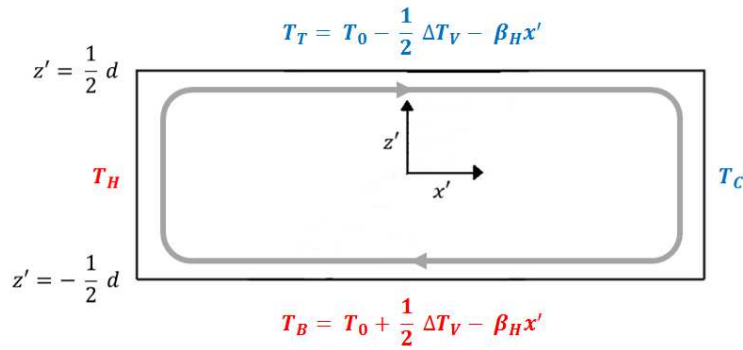


Figura 3-1: Modelo físico del estado básico

Considere flujo viscoso dentro de una cavidad impulsado por un gradiente de temperatura inclinado, como se ilustra en la Figura (3-1). El flujo está delimitado por fronteras fijas e impermeables. El gradiente de temperatura inclinado se logra permitiendo el calentamiento en una de sus paredes horizontales y una pared vertical. Del esquema del modelo físico se define lo siguiente:

T_H = temperatura de la pared vertical caliente

T_C = temperatura de la pared vertical fría

ΔT_H = diferencia de temperatura horizontal = $T_H - T_C = \beta_H \cdot L$

T_B = temperatura de la pared horizontal inferior caliente

T_T = temperatura de la pared horizontal superior fría

ΔT_V = diferencia de temperatura vertical = $T_B - T_T$

En la Figura (3-2) se tiene el esquema del modelo físico, considerando el caso normalizado para las condiciones de frontera de temperatura en las paredes horizontales y para el espesor de la capa de fluido.

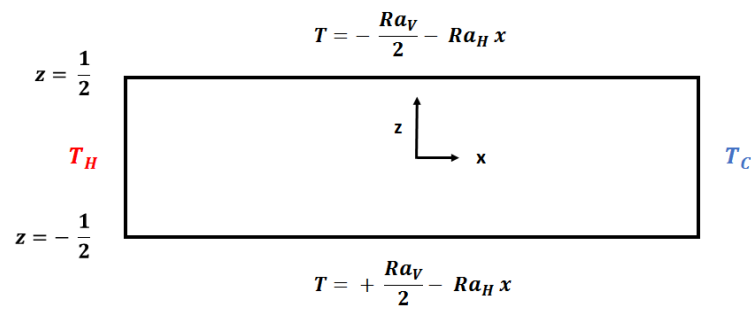


Figura 3-2: Modelo físico del estado básico para el caso normalizado para las condiciones de frontera de temperatura en las paredes horizontales

La ecuación adimensional de Navier-Stokes determinada para el estado general viene dada por la Ec. (3-3):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = Pr (-\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + T \mathbf{k})$$

Estableciendo que las variables afectadas por la perturbación son la velocidad, presión y temperatura se obtiene lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_s + \varepsilon u_1 \\ v &= V_s + \varepsilon v_1 \\ w &= W_s + \varepsilon w_1 \end{aligned} \right\} \mathbf{u} = \langle U_s(z) \mathbf{i}, V_s(z) \mathbf{j} \rangle + \varepsilon \mathbf{u}_1(x, y, z, t)$$

$$p = p_s(x, y, z) + \varepsilon p_1(x, y, z, t)$$

$$T = T_s(x, z) + \varepsilon T_1(x, y, z, t)$$

donde las ecuaciones para el estado básico y sus respectivas perturbaciones, están identificadas con el subíndice s y 1 respectivamente. Partiendo del caso del flujo total (la perturbación más el estado básico), la ecuación adimensional de Navier-Stokes dada por la Ec. (3-3), al introducir el término ε (el cual representa un parámetro muy pequeño relacionado con el estado perturbado) y sustituyendo las perturbaciones de la velocidad, presión y temperatura, resulta en:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) \cdot \nabla (\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) = Pr [-\nabla(p_s + \varepsilon p_1) + \nabla^2(\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) + (T_s + \varepsilon T_1)\mathbf{k}] \quad (3-9)$$

Al juntar los términos que no están multiplicados por alguna potencia de ε en la Ec. (3-9), es posible obtener la expresión para el estado básico:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{U}_s = Pr (-\nabla p_s + \nabla^2 \mathbf{U}_s + T_s \mathbf{k}) \quad (3-10)$$

donde $\mathbf{U}_s = (U_s, V_s, W_s) = (U_s, V_s, 0)$. Especificando que el caso de estudio es bajo condiciones de flujo estacionario ($\frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} = 0$) y unidireccional en x ; donde $U_s = U_s(z)$, por lo que el término $\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{U}_s = 0$ debido a que la componente de la velocidad en x es una función de z . Por lo tanto la ecuación de Navier-Stokes queda de la siguiente manera:

$$0 = -\nabla p_s + \nabla^2 \mathbf{U}_s + T_s \mathbf{k} \quad (3-11)$$

Con el objetivo de separar el campo de presión y velocidad, se aplica a la Ec. (3-11) el rotacional; ya que se sabe que el rotacional de una función por su divergencia es igual a cero ($\nabla \times \nabla \phi = 0$). Asumiendo según Cormack e Imberger [6, 8] que el perfil de temperatura está dado en la forma: $T_s = T_s(z) - T_{sx}$, donde $T_{sx} = -Ra_H x$, de tal forma que al aplicar el doble rotacional a la Ec.(3-11) resulta en:

$$\frac{\partial^3 \mathbf{U}_s}{\partial z^3} = -Ra_H \quad (3-12)$$

El procedimiento similar al descrito anteriormente para obtener la Ec. (3-12) considerando el caso dimensional, se muestra a detalle en la sección del apéndice **A. 2**.

Considerando el caso del flujo total (la perturbación más el estado básico) en la expresión adimensional para la ecuación de la energía, después de sustituir las perturbaciones de la velocidad y temperatura, la Ec.(3-6) resulta en:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon T_1}{\partial t} + (\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) \cdot \nabla (T_s + \varepsilon T_1) = \nabla^2 (T_s + \varepsilon T_1) \quad (3-13)$$

donde los términos que resultan de orden cero de ε , generan la expresión para el estado básico; y los términos que resultan de orden uno de ε , generan la expresión para el estado perturbado.

3.3.1. Perfil de velocidad con deslizamiento

Con la finalidad de determinar el perfil de velocidad considerando el deslizamiento en las paredes superior e inferior del volumen de control, es necesario establecer las condiciones de frontera adecuadas para la velocidad y temperatura del fluido. Por lo tanto; las características de las paredes horizontales mostradas en la Figura (3-1), se basan en paredes rígidas perfectamente conductoras. El conjunto de condiciones de frontera que se deben de satisfacer por \mathbf{u} (en forma dimensional) en las paredes del volumen de control son:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad \text{en } z' = \pm \frac{d}{2} \quad (3-14)$$

$$\beta \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } z' = \pm \frac{d}{2} \quad (3-15)$$

donde $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor del esfuerzo cortante, \mathbf{t} y \mathbf{n} son los vectores tangencial y normal a las paredes horizontales, respectivamente. Posteriormente se define l_s como la longitud del deslizamiento, la cual es la relación de la viscosidad dinámica μ y el coeficiente de fricción β [53, 67] y representa la distancia a la cual la velocidad se desvanece o anula (ver Figura (3-3)) [67, 68]. Las ecuaciones (3-14) y (3-15) son las llamadas Condiciones de Frontera Generalizadas de Navier [53].

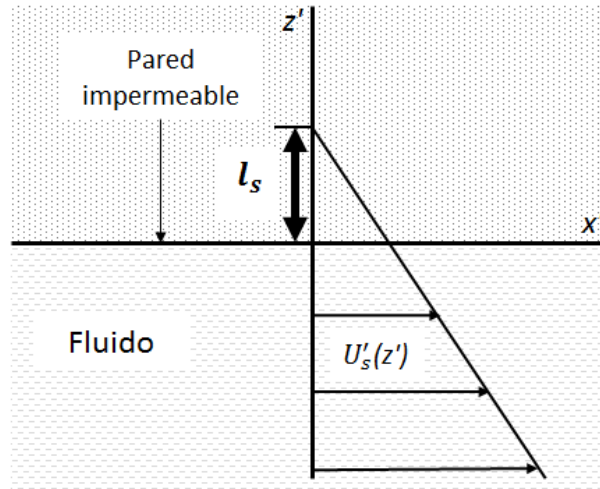


Figura 3-3: Representación geométrica del deslizamiento del fluido sobre la pared. Las paredes horizontales y verticales son consideradas conductoras térmicas perfectas e impermeables. Es importante notar que l_s se puede considerar como una magnitud del efecto del deslizamiento.

En la Figura 3-3 se muestra la representación geométrica del deslizamiento del fluido sobre una pared horizontal impermeable, donde $U'_s(z')$ representa la componente horizontal dimensional del vector velocidad \mathbf{u} en la dirección x . Para pequeños valores de la longitud del deslizamiento l_s las ecuaciones de Navier-Stokes siguen siendo válidas. Además, cabe señalar que la condición de no-deslizamiento se obtiene cuando $l_s \rightarrow 0$. Entonces, de la adimensionalización de las condiciones de frontera establecidas por las ecuaciones (3-14) y (3-15) se puede obtener el número de Knudsen $Kn = l_s/d$, el cual se utilizará para medir el efecto del deslizamiento. En la Figura (3-4) se muestra el perfil de velocidad resultante al considerar el efecto del deslizamiento en las paredes horizontales de la cavidad.

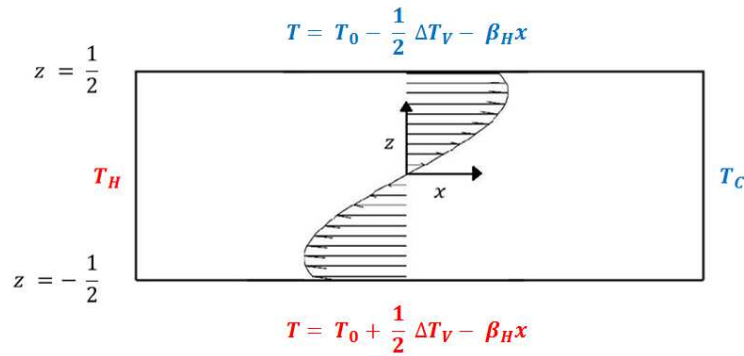


Figura 3-4: Perfil de velocidad para el flujo con deslizamiento.

Como se mencionó al inicio de la sección, en el modelo se ha considerado que las paredes son impermeables, perfectamente conductoras y con deslizamiento. Por lo tanto; aplicando la condición general de Navier de deslizamiento en las fronteras del modelo, da como resultado que las componentes horizontales de la velocidad no desaparecen en la pared. Este efecto se caracteriza por el número de Knudsen Kn (ver Fig. (3-3)) y cuando Kn tiende a cero, se obtiene la condición de frontera de no deslizamiento, es decir, la condición de una velocidad igual cero en las paredes impermeables comunes.

Para definir las condición de frontera para la componente de velocidad u , es necesario establecer que los vectores normales a la superficies horizontales (paralelas a la dirección x) están orientados en dirección z de la siguiente manera:

$$\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1) \quad \text{en} \quad z = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{n}_2 = (0, 0, -1) \quad \text{en} \quad z = \frac{1}{2}$$

mientras que el vector tangencial a la superficie horizontal para la componente u viene establecido por:

$$\mathbf{t}_1 = (1, 0, 0)$$

Por otra parte, se sabe que el tensor de esfuerzos está definido por:

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

La componente normal del tensor de esfuerzos en $z = -\frac{1}{2}$ es:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = [0, 0, 1] \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = [\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}]$$

Por lo que la componente tangencial del esfuerzo para u en $z = -\frac{1}{2}$ es:

$$\mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = [1, 0, 0] \cdot [\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}] = \tau_{31}$$

donde: $\tau_{31} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

Entonces la condición del esfuerzo para u en $z = -\frac{1}{2}$ es:

$$\beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \longrightarrow u = Kn\tau_{31}$$

donde la relación de la viscosidad dinámica μ y el coeficiente de fricción β definen a la longitud del deslizamiento l_s ; y al normalizarla, se obtiene el número de Knudsen ($Kn = l_s/d$). Sustituyendo la expresión de τ_{31} , para u se tiene:

$$u = Kn \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

donde la componente vertical de la velocidad en dirección z (w), debe ser igual a cero en $z = \pm \frac{1}{2}$. Que de acuerdo con Chandrasekhar [69], esta consideración define la condición de frontera para una pared impermeable. Por lo tanto, la expresión anterior resulta en:

$$u = Kn \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ó} \quad u = Kn Du$$

La componente normal del tensor de esfuerzos en $z = \frac{1}{2}$ es:

$$\mathbf{n}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = [0, 0, -1] \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = [-\tau_{31}, -\tau_{32}, -\tau_{33}]$$

Por lo que la componente tangencial del esfuerzo para u en $z = \frac{1}{2}$ es:

$$\mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = [1, 0, 0] \cdot [-\tau_{31}, -\tau_{32}, -\tau_{33}] = -\tau_{31}$$

donde: $-\tau_{31} = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

Entonces la condición del esfuerzo para u en $z = \frac{1}{2}$ es:

$$\beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \longrightarrow u = Kn(-\tau_{31}) = -Kn\tau_{31}$$

donde la relación de la viscosidad dinámica μ y el coeficiente de fricción β definen a la longitud del deslizamiento l_s ; y al normalizarla, se obtiene el número de Knudsen ($Kn = l_s/d$). Sustituyendo la expresión de $-\tau_{31}$, para u se tiene:

$$u = -Kn \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

donde $w = 0$, debido a la condición de pared impermeable. Por lo tanto, la expresión anterior resulta en:

$$u = -Kn \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ó} \quad u = -KnDu$$

Retomando las condiciones determinadas para u en $z = \pm \frac{1}{2}$ se tiene:

$$u = \pm KnDu \tag{3-16}$$

donde $u = U_s + \epsilon \mathbf{u}_1$.

Para determinar el perfil de velocidad considerando el deslizamiento en las paredes superior e inferior del volumen de control, se establecen las siguientes condiciones de frontera dadas por la Ec.(3-16):

$$U_s(1/2) + Kn \left. \frac{\partial U_s}{\partial z} \right|_{z=1/2} = 0 \tag{3-17}$$

$$U_s(-1/2) - Kn \left. \frac{\partial U_s}{\partial z} \right|_{z=-1/2} = 0 \tag{3-18}$$

Al integrar tres veces la Ec. (3-12), se determina la expresión para $U_s(z)$:

$$U_s(z) = -Ra_H \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_0 \tag{3-19}$$

Durante el proceso de evaluación de las condiciones de frontera establecidas por las Ecs. (3-17) y (3-18), los valores de $C_0 = C_2 = 0$ son los que satisfacen las ecuaciones derivadas de las tercer condición de frontera (conservación de masa) y con lo cual se determina el valor de C_1 (ver sección del apéndice **A.3.1**). Por lo tanto, sustituyendo la expresión para C_1 en la Ec. (3-19) se tiene:

$$U_s(z) = -Ra_H \frac{z^3}{6} + C_1 z \implies U_s(z) = -Ra_H \frac{z^3}{6} + \left(\frac{Ra_H}{4} \left(\frac{1}{6} + Kn \right) \right) z$$

Reorganizando términos en la expresión anterior, se determina la ecuación para el perfil de velocidad con deslizamiento:

$$U_s(z) = \frac{Ra_H}{24} \left(\frac{1 + 6Kn}{1 + 2Kn} - 4z^2 \right) z \quad (3-20)$$

Considerando el caso de flujo sin deslizamiento; es decir, cuando Kn tiende a cero ($Kn = 0$), la Ec. (3-20) se reduce y establece el perfil de velocidad para la condición de no deslizamiento $U_s(z)$:

$$U_s(z) = Ra_H \frac{z}{6} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right) \quad (3-21)$$

De igual manera, es necesario determinar la componente V_s de la velocidad del estado básico, pero ahora considerando el efecto del deslizamiento de sus fronteras horizontales. Por lo tanto, la expresión para el comportamiento de v y la nueva condición de frontera son:

$$\frac{\partial^3 V_s}{\partial z^3} = 0 \quad \text{donde : } V_s(z) = Az^2 + Bz + C$$

$$\left[V_s + Kn \frac{\partial V_s}{\partial z} \right] \Big|_{z=1/2} \quad \text{y} \quad \left[V_s - Kn \frac{\partial V_s}{\partial z} \right] \Big|_{z=-1/2}$$

Dentro del procedimiento para determinar V_s , resulta que los valores que cumplen la expresión resultante son $C = 0$ y por ende $A = 0$. De tal forma que el efecto de la velocidad v es nulo, ya que A , B y C son iguales a cero; es decir, $V_s(z) = Az^2 + Bz + C$ es igual a cero y se desprecia (ver sección del apéndice **A.3.2**).

3.3.2. Perfil de temperatura con deslizamiento

Retomando la Ec. (3-13) para el caso del estado básico y considerando que se tiene flujo estacionario, la ecuación de la energía es:

$$\mathbf{U}_s \cdot \nabla T_s = \nabla^2 T_s \quad (3-22)$$

Después de simplificar, reorganizar e introducir el Ra se tiene:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = -Ra_H U_s \quad (3-23)$$

Sustituyendo la ecuación del perfil de velocidad con deslizamiento (Ec. (3-20)) en la Ec. (3-23), se tiene:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = -\frac{Ra_H^2 z^3}{6} - \frac{Ra_H^2}{2} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1 + 2Kn)} \right] z \quad (3-24)$$

Para determinar el perfil de temperaturas con deslizamiento, se resuelve la Ec.(3-24) integrando dos veces, y las constantes de integración que resultan se calculan utilizando las condiciones de frontera para T_s en $z = 1/2$ y $z = -1/2$; por lo tanto, después de simplificar y reorganizar términos de la expresión resultante, se determina la ecuación para el perfil de temperatura con deslizamiento:

$$T_s = \frac{Ra_H^2}{576} \left[\frac{1 + 6Kn}{1 + 2Kn} - \frac{3}{10} (1 + 4z^2) \right] (1 - 4z^2) z - Ra_V z - Ra_H x \quad (3-25)$$

Debido al calentamiento lateral en la cavidad, la distribución de temperatura resultante es una función del gradiente horizontal y vertical. Por lo tanto, es evidente que la expresión para el perfil de temperatura tiene la forma: $T_s = T_s(z) - T_{sx}$, donde $T_{sx} = -Ra_H x$; funciones similares a esta expresión analítica resultante para el perfil de temperatura, fueron propuestas en [6, 70] y comparadas con resultados experimentales en [8], donde se demostró la concordancia entre los perfiles de temperatura obtenidos analíticamente y los obtenidos a través de mediciones experimentales.

Considerando el caso de flujo sin deslizamiento; es decir, cuando Kn tiende a cero ($Kn = 0$), se encuentra el perfil de temperatura para el estado básico sin deslizamiento a partir de la Ec.(3-25). En la sección del apéndice A. 4, se muestra con mayor detalle el procedimiento para obtener la Ec.(3-25) a partir de la Ec.(3-5).

3.4. Estado Perturbado

Con la finalidad de determinar las ecuaciones gobernantes del estado perturbado, el término ε se considera para representar las pequeñas perturbaciones sobre el estado básico del fenómeno bajo estudio, a continuación se presenta el desarrollo para obtenerlas.

3.4.1. Ecuación de Navier-Stokes

Al juntar los términos que se encuentran multiplicados por alguna potencia de ε en la Ec. (3-9), se obtiene la expresión para el estado perturbado:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = Pr (\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k}) \quad (3-26)$$

De la Ec. (3-26) el término $\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1$ se puede despreciar debido a que es muy pequeño; éste término representa el cambio de la perturbación, la cual ya de por sí se ha considerado ser muy pequeña. Debido a que en la expresión resultante de Navier-Stokes para el estado perturbado no aparece p_s , no es necesario definir el estado básico de la presión. Por lo tanto la expresión anterior queda de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = Pr (\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k}) \quad (3-27)$$

La Ec. (3-27) representa la expresión para la ecuación de Navier-Stokes para el estado perturbado.

3.4.2. Ecuación de la Energía

Retomando la Ec. (3-13) se tiene:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon T_1}{\partial t} + (\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) \cdot \nabla (T_s + \varepsilon T_1) = \nabla^2 (T_s + \varepsilon T_1)$$

Al juntar los términos que se encuentran multiplicados por alguna potencia de ε en la Ec. (3-13), es posible obtener la expresión para el estado perturbado:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{U}_s \cdot \nabla T_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_s + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1 = \nabla^2 T_1 \quad (3-28)$$

De la Ec. (3-28) el término $\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1$ se puede despreciar ya que es muy pequeño (como se mencionó anteriormente).

Por lo tanto, la expresión anterior queda de la forma:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{U}_s \nabla T_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_s = \nabla^2 T_1 \quad (3-29)$$

La Ec. (3-29) representa la expresión para la ecuación de la Energía para el estado perturbado.

3.4.3. Ecuación de Continuidad

La Ecuación de Continuidad adimensional para el estado básico está dada por la Ec. (3-8):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3-30)$$

Sustituyendo la expresión para la perturbación de la velocidad en la Ec. (3-30) se tiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}_s + \varepsilon \mathbf{u}_1) = 0 \quad (3-31)$$

La expresión anterior representa la ecuación de continuidad del estado básico con una pequeña perturbación.

Restando la Ec. (3-30) a la Ec. (3-31) se tiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}_s + \mathbf{u}_1) - [\nabla \cdot \mathbf{u}]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (3-32)$$

La Ec. (3-32) representa la expresión para la ecuación de Continuidad para el estado perturbado.

3.5. Modos Normales

A continuación, se desarrolla el procedimiento para simplificar las ecuaciones gobernantes obtenidas para el estado perturbado. En primer lugar, se aplicará dos veces el rotacional ($\nabla \times$); posteriormente, mediante el uso de la ecuación de continuidad se divide el campo de presión y de velocidad del fluido con la finalidad de que sus componentes vertical y horizontal sean independientes entre sí. Y en segundo lugar, ya que resulta preferible obtener patrones periódicos en la capa de fluido, la estabilidad del sistema se investiga en términos del enfoque de modos normales.

Este método consiste en introducir perturbaciones de forma sinusoidal a un estado básico o estado inicial cuya estabilidad se quiere analizar, utilizando series de Fourier. Una perturbación arbitraria puede ser descompuesta en un conjunto completo de modos normales. Las perturbaciones para la velocidad y temperatura se representan como $[U_1(z), V_1(z), W_1(z), \theta(z)] \exp[i(kx + ly - \sigma t)]$. Donde k y l son las componentes x y y del número de onda (α), σ representa la frecuencia de oscilación de la perturbación.

3.5.1. Ecuación de Momento (Navier-Stokes) para U : componentes i y j

Retomando la Ec. (3-27), la cual representa la expresión para la ecuación de Navier-Stokes para el estado perturbado, se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = Pr (\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k})$$

De la expresión anterior se observa que es posible eliminar el término de la presión si se aplica a toda la expresión el rotacional, ya que se sabe que el rotacional del gradiente de una función es igual a cero ($\nabla \times \nabla \phi = 0$), por lo tanto se tiene:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = Pr (\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k}) \right]$$

Definiendo que $\omega_1 = \nabla \times \mathbf{u}_1$ y $\Omega = \nabla \times \mathbf{U}_s$, la expresión anterior resulta en:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s] = Pr (\nabla^2 \omega_1 + \nabla \times T_1 \mathbf{k}) \quad (3-33)$$

Aplicando las propiedades de los operadores Levi-Civita (ε_{ijk}) y Delta de Kronecker, para después introducir las perturbaciones de la velocidad \mathbf{u}_1 y temperatura T_1 ; y asumiendo las perturbaciones en forma de ondas oscilatorias y planas, la ecuación de Momento es (para mayor detalles del prodecimiento, consultar la sección del apéndice **A.5.1**):

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](-\alpha^2 U_1 + ikDW_1) - k^2 W_1 D U_s - klW_1 DV_s + k^2 W_1 D U_s + l^2 W_1 D U_s = 0 \quad (3-34)$$

Desarrollando términos e introduciendo $\alpha = k^2 + l^2$, que representa la magnitud del vector de onda; después de cierta manipulación para asociar y reducir la expresión resultante, se tiene:

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](-\alpha^2 U_1 + ikDW_1) + lW_1(lDU_s - kDV_s) = 0 \quad (3-35)$$

3.5.2. Ecuación de Momento (Navier-Stokes) para W : componente \mathbf{k}

La ecuación de momento al aplicar doble rotacional es:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{u}_1 + 2\nabla(ikwDU_s + ilwDV_s) - \nabla^2 i(kU_s + lV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wDU_s) \mathbf{i} = Pr[-\nabla^4 w + \nabla(DT_1) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k}]$$

Considerando la dirección \mathbf{k} y simplificando términos se tiene:

$$i\sigma \nabla^2 w + 2D[iwD(kU_s + lV_s)] - \nabla^2 [iw(kU_s - lV_s)] = Pr(-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$$

Recurriendo a la identidad dada por $\nabla^2(F \cdot G) = F \cdot \nabla^2 G + 2\nabla F \cdot \nabla G + G \nabla^2 F$, recordando que U_s y V_s sólo tienen variación en z (por lo que el operador ∇ se puede representar solamente mediante el operador D) e introduciendo el término $\nabla^2 = D^2 - \alpha^2$; después de simplificar y reorganizar términos, la expresión anterior resulta en (para mayor detalles del prodecimiento, consultar la sección del apéndice **A.5.2**):

$$[Pr(D^2 - \alpha^2)^2 - i(kU_s + lV_s - \sigma)](D^2 - \alpha^2)W_1 + iW_1 D^2(kU_s + lV_s) - Pr\alpha^2 \theta = 0 \quad (3-36)$$

3.5.3. Ecuación de la Energía para θ

La ecuación de la energía en su forma normalizada es:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{U}_s \nabla T_1 + \mathbf{u}_1 \nabla T_s = \nabla^2 T_1 \quad (3-37)$$

de donde \mathbf{U}_s sólo depende de x , T_s está dada por $T = T_s(z) - Ra_H x$, $\nabla^2 = (D^2 - \alpha^2)$ y se sabe que $\frac{\partial}{\partial t} = -i\sigma$. Sustituyendo esto en la Ec. (3-37) se obtiene:

$$-i\sigma T_1 + u \frac{\partial T_s}{\partial x} + v \frac{\partial T_s}{\partial y} + w \frac{\partial T_s}{\partial z} + \mathbf{U}_s \frac{\partial T_1}{\partial x} = (D^2 - \alpha^2) T_1$$

Como $\frac{\partial T_s}{\partial x} = -Ra_H$, $D = \frac{\partial}{\partial z}$, $ik = \frac{\partial}{\partial x}$ y $v \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (ya que no depende de esa dirección), la expresión anterior resulta:

$$-i\sigma T_1 + u(-Ra_H) + \omega D T_s + ik \mathbf{U}_s T_1 = (D^2 - \alpha^2) T_1$$

Multiplicando por (-1) la expresión anterior se obtiene:

$$i\sigma T_1 + Ra_H u - w D T_s - ik \mathbf{U}_s T_1 = -(D^2 - \alpha^2) T_1$$

Reorganizando términos:

$$(D^2 - \alpha^2) T_1 + i\sigma T_1 + Ra_H u - w D T_s - ik \mathbf{U}_s T_1 = 0 \longrightarrow -i(k \mathbf{U}_s - \sigma) T_1 + (D^2 - \alpha^2) T_1 + Ra_H u - w D T_s = 0$$

Factorizando T_1 de la expresión anterior y en términos de las amplitudes se obtiene:

$$[(D^2 - \alpha^2) - i(k \mathbf{U}_s - \sigma)] \theta + Ra_H U_1 - W_1 D T_s = 0 \quad (3-38)$$

3.5.4. Sistema de Ecuaciones para el estado Perturbado

De las secciones anteriores se obtuvieron las ecuaciones para poder determinar las variables de la velocidad U_1 (componente en x) y W_1 (componente en z); así como también para la variable de la temperatura θ (componente en z). Retomando las ecuaciones (3-35), (3-36) y (3-38) se tiene:

$$\begin{aligned}
& [Pr(D^2 - \alpha^2) - i(k\mathbf{U}_s + lV_s - \sigma)](-\alpha^2 U_1 + ikDW_1) + lW_1(lD\mathbf{U}_s - kDV_s) = 0 \\
& [Pr(D^2 - \alpha^2)^2 - i(k\mathbf{U}_s + lV_s - \sigma)](D^2 - \alpha^2)W_1 + iW_1D^2(k\mathbf{U}_s + lV_s) - Pr\alpha^2\theta = 0 \\
& [(D^2 - \alpha^2) - i(k\mathbf{U}_s - \sigma)]\theta + Ra_H U_1 - W_1DT_s = 0
\end{aligned}$$

Para las ecuaciones que se utilizarán para determinar U_1 y W_1 , es decir las ecuaciones (3-35) y (3-36) respectivamente; el término $V_s = 0$ ya que no depende de las direcciones en cuestión (x en u y z en w). Por lo tanto, simplificando estas ecuaciones y reacomodando su orden se tiene:

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(k\mathbf{U}_s - \sigma)](D^2 - \alpha^2)W_1 + ikW_1D^2\mathbf{U}_s - Pr\alpha^2\theta = 0 \longrightarrow W_1 \quad (3-39)$$

$$[(D^2 - \alpha^2) - i(k\mathbf{U}_s - \sigma)]\theta + Ra_H U_1 - W_1DT_s = 0 \longrightarrow \theta \quad (3-40)$$

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(k\mathbf{U}_s - \sigma)](-\alpha^2 U_1 + ikDW_1) + l^2W_1D\mathbf{U}_s = 0 \longrightarrow U_1 \quad (3-41)$$

Con la finalidad de resolver el sistema de ecuaciones ((3-39)-(3-41)), es necesario establecer la ecuación correspondiente a cada una de las incógnitas (W_1 , θ y U_1). Por lo tanto, se asigna a cada variable la ecuación donde dicha variable esté sujeta a la derivada de mayor orden. Por lo que la Ec. (3-39) es para W_1 (velocidad en dirección z), la Ec. (3-40) es para θ (temperatura) y la Ec. (3-41) es para U_1 (velocidad en dirección x).

Para definir las condición de frontera para la componente de velocidad w , es necesario recurrir a la Ec. de continuidad para flujo incompresible dada por $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Recordando que $\frac{\partial}{\partial x} = ik$, $\frac{\partial}{\partial y} = il$ y que $D = \frac{\partial}{\partial z}$, al sustituir estas expresiones en la Ec. de continuidad para flujo incompresible, resulta en:

$$iku + ilv + Dw = 0$$

Multiplicando la ecuación anterior por el operador D se obtiene:

$$ikDu + ilDv + D^2w = 0$$

Procediendo de igual forma como se obtuvo la Ec. (3-16) para la componente u , es posible determinar una condición de frontera similar para la componente v . Por lo tanto, recurriendo a estas condiciones de frontera (para u y v) y despejando para Du y Dv respectivamente, se tiene :

$$\begin{aligned}
u = \pm KnDu & \longrightarrow Du = \mp \frac{u}{Kn} \\
v = \pm KnDv & \longrightarrow Dv = \mp \frac{v}{Kn}
\end{aligned}$$

Sustituyendo Du y Dv en la expresión $ikDu + ilDv + D^2w = 0$ se obtiene:

$$ik \left(\mp \frac{u}{Kn} \right) + il \left(\mp \frac{v}{Kn} \right) + D^2w = 0$$

Al multiplicar por Kn la expresión anterior resulta en:

$$\mp iku \mp ilv + KnD^2w = 0 \quad \text{ó} \quad \mp (iku + ilv) + KnD^2w = 0$$

De la Ec. de continuidad ($iku + ilv + Dw = 0$), despejando para Dw resulta que $Dw = -iku - ilv$ o bien $Dw = -(iku + ilv)$. Al sustituir Dw en la expresión $\mp (iku + ilv) + KnD^2w = 0$ se tienen dos casos:

$$\begin{aligned} -(iku + ilv) + KnD^2w = 0 &\longrightarrow Dw + KnD^2w = 0 \\ (iku + ilv) + KnD^2w = 0 &\longrightarrow -Dw + KnD^2w = 0 \end{aligned}$$

donde al multiplicar por (-1) la expresión $-Dw + KnD^2w = 0$ se obtiene $Dw - KnD^2w = 0$. Por lo tanto, la condición de frontera para la componente w de la velocidad es:

$$Dw \pm KnD^2w = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3-42)$$

Finalmente, la perturbación de la temperatura debe desvanecerse en las paredes para satisfacer la condición de paredes perfectamente conductoras, es decir, la temperatura adimensional debe ser igual cero en las paredes, por lo que la condición de frontera para la amplitud de la temperatura θ es:

$$\theta = 0, \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3-43)$$

Retomando y reacomodando términos en la Ec.(3-16) definida en la sección **3.3.1**; considerando las expresiones dadas por (3-42) y (3-43), estableciendo que $w = 0$ en las paredes horizontales para la Ec. (3-42), las condiciones de frontera correspondientes a las ecuaciones ((3-39)-(3-41)) son:

$$u \pm KnDu = 0, \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3-44)$$

$$w = Dw + KnD^2w = 0, \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3-45)$$

$$\theta = 0, \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (3-46)$$

donde las condiciones de frontera en la Ec. (3-44) son las mismas utilizadas en los trabajos reportados por Gers-ting y Lauga et al. [71, 72].

Una vez definidas las condiciones de frontera para el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones ((3-39)-(3-41)), se procede a simplificar las expresiones. Por lo tanto, retomando y dividiendo la Ec. (3-39) entre Pr y reacomodando términos, se tiene:

$$\begin{aligned} [(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)] (D^2 - \alpha^2) W_1 + ikW_1Pr^{-1}D^2U_s - \alpha^2\theta &= 0 \\ [(D^2 - \alpha^2)^2 - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)(D^2 - \alpha^2) + ikPr^{-1}D^2U_s] W_1 - \alpha^2\theta &= 0 \\ \langle (D^2 - \alpha^2)^2 + iPr^{-1}\{\sigma(D^2 - \alpha^2) + k[D^2U_s - U_s(D^2 - \alpha^2)]\} \rangle W_1 - \alpha^2\theta &= 0 \end{aligned} \quad (3-47)$$

Asignando el operador L_1 como:

$$L_1 = (D^2 - \alpha^2)^2 + iPr^{-1}\{\sigma(D^2 - \alpha^2) + k[D^2U_s - U_s(D^2 - \alpha^2)]\}$$

Sustituyendo L_1 en la Ec. (3-47) se obtiene:

$$L_1W_1 - \alpha^2\theta = 0 \quad (3-48)$$

De la Ec. (3-40) se asigna el operador L_2 como:

$$L_2 = (D^2 - \alpha^2) - i(KU_s - \sigma)$$

Sustituyendo L_2 en la Ec. (3-40) y reacomodando términos queda de la forma:

$$W_1DTs + L_2\theta - Ra_HU_1 = 0 \quad (3-49)$$

Dividiendo la Ec. (3-41) entre Pr y separando términos para W_1 y U_1 , se tiene:

$$\begin{aligned} [(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)] (-\alpha^2U_1 + ikDW_1) iPr^{-1} + l^2iPr^{-1}W_1DU_s &= 0 \\ \{[(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)] (ikD) + l^2Pr^{-1}DU_s\} W_1 + \{[(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)] (-\alpha^2)\} U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3-50)$$

Asignando los operadores L_3 y L_4 como:

$$L_3 = [(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)](ikD) + l^2Pr^{-1}DU_s$$

$$L_4 = [(D^2 - \alpha^2) - iPr^{-1}(kU_s - \sigma)](-\alpha^2)$$

Sustituyendo L_3 y L_4 en la Ec. (3-50) se obtiene:

$$L_3W_1 + L_4U_1 = 0 \quad (3-51)$$

Las ecuaciones (3-48), (3-49) y (3-51) representan las ecuaciones del sistema perturbado, cuya solución se llevará a cabo para determinar las incógnitas W_1 , θ y U_1 , respectivamente. Por lo tanto, reescribiendo dichas ecuaciones en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} L_1 & -\alpha^2 & 0 \\ DTs & L_2 & -Ra_H \\ L_3 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \theta \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la solución del sistema de ecuaciones generado, es necesario utilizar un método numérico apropiado a las características del problema bajo análisis. Al resultar un problema de valores propios, se utilizará un método de residuos pesados: método Galérkin [73, 74], en el que se incluyen los modos pares e impares al mismo tiempo en el proceso [9]. Esto se describe con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Esquema Numérico

La solución del sistema de ecuaciones para el estado perturbado puede considerarse como un problema de valores propios si el sistema es homogéneo; y si el sistema no lo es, el problema se reduce a encontrar los coeficientes de las funciones propias que minimizan el error de aproximación. Como se mencionó anteriormente en la sección 1.6, para esto se usará el método de Galérkin con funciones ortogonales de Chandrasekhar y series de Fourier; con lo que se pretende analizar la estabilidad lineal del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado mediante el modelado numérico y considerando cuatro diferentes fluidos caracterizados por medio de su número de Prandtl Pr según su aplicación.

4.1. Justificación

La formulación variacional de cualquier problema exige como requisito previo, el conocimiento de la función que lo gobierna. Sin embargo, en ocasiones dicha función es difícil y en algunos casos hasta imposible de obtener. Una solución alterna consiste en utilizar el llamado método de residuos ponderados, el cual es una técnica numérica a través de la cual se obtienen soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales, con sus respectivas condiciones de frontera y/o condiciones iniciales.

Debido a las diferentes posibilidades en la selección de las funciones de peso que pueden utilizarse, existen distintos criterios de residuos ponderados como lo son: el método de colocación, subdominio, mínimos cuadrados, Galérkin, etc. Entre éstos, el más utilizado es el método de Galérkin [75, 76].

Este método espectral, emplea polinomios globales como funciones de prueba para la discretización de ecuaciones diferenciales parciales. Proporciona aproximaciones muy precisas con un número relativamente pequeño

de incógnitas. Por lo tanto, ha ganado popularidad, especialmente en el campo de la dinámica de fluidos computacional [77, 78].

Por otra parte existen muchos trabajos en los cuales se utiliza el método de Galërkin para obtener la solución aproximada de las ecuaciones gobernantes [15–18, 74]. Dentro de las características de éste método se tiene:

- El método de Galërkin se adapta muy bien a las aplicaciones de flujo de fluidos en comparación con los métodos de momentos y colocación, los cuales no se prestan tan directamente a éstas aplicaciones ya que son más complicados.
- El método de Galërkin es el más popular de los métodos de residuos ponderados, ya que una ventaja computacional de este método es que, en general, la matriz de funciones de prueba resulta simétrica.
- Sin embargo, en situaciones prácticas la determinación de las funciones propias apropiadas para usar en el método de Galërkin puede ser extremadamente difícil, especialmente en casos donde el dominio no tiene una forma simple.

Por lo tanto, es apropiado para análisis donde se trabaje con una geometría simple. Lo cual concuerda con el presente trabajo, ya que se analizará el flujo convectivo en una cavidad rectangular.

4.1.1. Método de Galërkin

El método de Galërkin consiste en hacer la proyección de los residuales sobre cada función propia igual a cero. Por ejemplo, si se reemplaza el término que representa la solución aproximada $\mathbf{v}(z)$ en lugar de la solución exacta $\mathbf{u}(z)$ para un sistema de ecuaciones en forma matricial, el resultado ya no será exactamente cero. En su lugar se obtiene una función conocida como residuo, $\mathbf{r}(z)$. La solución aproximada del problema diferencial original se busca como la combinación lineal de un número finito de funciones propias, el cual es un subespacio de dimensión finita sobre el cual se hace la proyección. Las funciones propias son linealmente independientes y bastante simples, su estructura depende del dominio de definición de la solución del problema y de las condiciones de frontera. El producto punto del residuo por cada función propia debe ser cero. Cada uno de los productos puntos igualados a cero genera una ecuación con unos coeficientes como incógnitas; el objetivo consiste encontrar los coeficientes que den la mejor aproximación a la solución de la ecuación diferencial.

Debido a que la geometría del problema no es muy compleja (ya que si lo fuera se tendrían que usar funciones definidas en puntos de malla y por ende el método de elemento finito) y de las condiciones de frontera; se usan funciones propias globales, de las cuales dos series de funciones son ortogonales.

En algunas aplicaciones se implementa una herramienta adicional al método de Galérkin; debido a que el producto interno entre las funciones usadas y la ecuación diferencial es difícil de evaluar, así que es necesario implementar el método de Galérkin con integración numérica (GNI, por sus siglas en inglés).

Por lo tanto, a continuación se desarrolla de forma general el procedimiento del método numérico de Galérkin. El sistema de ecuaciones del problema puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}(z) = \mathbf{F}(z) \quad (4-1)$$

donde \mathbf{A} es un operador lineal (generado a partir del sistema de ecuaciones del estado perturbado), $\mathbf{F}(z)$ es una función dada que está definida en el interior de un dominio P y $\mathbf{u}(z)$ es la solución (vector formado por las incógnitas: W_1 , θ y U_1). Para cada función $v(z)$ del dominio $\Phi(A)$ del operador \mathbf{A} , el residuo se define como:

$$\mathbf{r}_v(z) = \mathbf{A} v(z) - \mathbf{F}(z) \quad (4-2)$$

Es claro que $\mathbf{r}_u(z) = 0$ para la solución exacta

$$u^i(z) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^i \phi_j^i(z)$$

Sin embargo para una solución aproximada

$$v^i(z) = \sum_{j=1}^N s_j^i \phi_j^i(z)$$

El residuo no es idénticamente nulo, y según el criterio de Galérkin (Skiba [79]), el residuo tiene que ser ortogonal a cada función propia $\phi_j^i(z)$

$$\langle r_v^i(z), \phi_j^i(z) \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$\langle f, g \rangle = \int_P f(z)g(z)dz$$

es el producto interno en el espacio de funciones \mathbf{H} . Así, la solución aproximada en el método de Galérkin satisface exactamente la proyección de la ecuación (4-2) en el subespacio \mathbf{H}_N generado por las N funciones propias $\{\phi_1(z), \phi_2(z), \dots, \phi_N(z)\}$. Es posible utilizar la misma función propia ϕ de la solución exacta $u^i(z)$ en la solución aproximada $v^i(z)$. La diferencia radica en que para la solución exacta, el residual es igual a cero al considerar un número infinito de términos dentro de la función propia; mientras que para la solución aproximada, el residual es distinto de cero debido a que se considera un número finito de términos dentro de la función propia. Por lo que $\phi = \Phi$, únicamente se hace referencia a distinta nomenclatura para diferenciar la solución exacta de la aproximada.

Según el criterio de Galérkin, al hacer cero la proyección del residual sobre cada función propia se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{G}$$

donde

$$G_i = \langle F_j(z), \phi_j^i(z) \rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

representa la proyección de la parte no homogénea sobre cada función propia.

$$M_{ij} = \langle \mathbf{A}\phi_j^m(z), \phi_i^n(z) \rangle, \quad i, j, m, n = 1, 2, \dots, N$$

La matriz M_{ij} resulta del sistema de ecuaciones que involucran los coeficientes a determinar y s_j^i son los coeficientes que van a satisfacer la condición sobre el residual, es decir, hacer la proyección del residual igual a cero. Por ejemplo, al establecer una función propia Φ_i para cada incógnita del problema: W_1 , θ y U_1 , la solución del problema considerando un segundo orden de aproximación para las funciones propias, el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial se obtiene a partir de:

$$\begin{bmatrix} L_1 & -\alpha^2 & 0 \\ DT_s & L_2 & -Ra_H \\ L_3 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1W_1 + A_2W_2 \\ B_1\theta_1 + B_2\theta_2 \\ C_1U_1 + C_2U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando las proyecciones sobre las funciones propias W_1 , θ_1 , U_1 , W_2 , θ_2 y U_2 se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\langle W_1, A_1L_1W_1 - B_1\alpha^2\theta_1 + 0 + A_2L_1W_2 - B_2\alpha^2\theta_2 + 0 \rangle = \langle W_1, 0 \rangle$$

$$\langle \theta_1, A_1DT_sW_1 + B_1L_2\theta_1 - C_1Ra_HU_1 + A_2DT_sW_2 + B_2L_2\theta_2 - C_2Ra_HU_2 \rangle = \langle \theta_1, 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle U_1, A_1 L_3 W_1 + 0 + C_1 L_4 U_1 + A_2 L_3 W_2 + 0 + C_2 L_4 U_2 \rangle &= \langle U_1, 0 \rangle \\ \langle W_2, A_1 L_1 W_1 - B_1 \alpha^2 \theta_1 + 0 + A_2 L_1 W_2 - B_2 \alpha^2 \theta_2 + 0 \rangle &= \langle W_2, 0 \rangle \\ \langle \theta_2, A_1 DT_s W_1 + B_1 L_2 \theta_1 - C_1 Ra_H U_1 + A_2 DT_s W_2 + B_2 L_2 \theta_2 - C_2 Ra_H U_2 \rangle &= \langle \theta_2, 0 \rangle \\ \langle U_2, A_1 L_3 W_1 + 0 + C_1 L_4 U_1 + A_2 L_3 W_2 + 0 + C_2 L_4 U_2 \rangle &= \langle U_2, 0 \rangle \end{aligned}$$

Los otros términos de la expansión hasta infinito ya no aparecen porque se asume que la proyección del residual es cero. Por lo tanto, indicando la proyección de las funciones propias, el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} \langle W_1, L_1 W_1 \rangle - \alpha^2 \langle W_1, \theta_1 \rangle & 0 & \langle W_1, L_1 W_2 \rangle - \alpha^2 \langle W_1, \theta_2 \rangle & 0 \\ \langle \theta_1, DT_s W_1 \rangle & \langle \theta_1, L_2 \theta_1 \rangle - Ra_H \langle \theta_1, U_1 \rangle & \langle \theta_1, DT_s W_2 \rangle & \langle \theta_1, L_2 \theta_2 \rangle - Ra_H \langle \theta_1, U_2 \rangle \\ \langle U_1, L_3 W_1 \rangle & 0 & \langle U_1, L_4 U_1 \rangle & \langle U_1, L_3 W_2 \rangle & 0 & \langle U_1, L_4 U_2 \rangle \\ \langle W_2, L_1 W_1 \rangle - \alpha^2 \langle W_2, \theta_1 \rangle & 0 & \langle W_2, L_1 W_2 \rangle - \alpha^2 \langle W_2, \theta_2 \rangle & 0 \\ \langle \theta_2, DT_s W_1 \rangle & \langle \theta_2, L_2 \theta_1 \rangle - Ra_H \langle \theta_2, U_1 \rangle & \langle \theta_2, DT_s W_2 \rangle & \langle \theta_2, L_2 \theta_2 \rangle - Ra_H \langle \theta_2, U_2 \rangle \\ \langle U_2, L_3 W_1 \rangle & 0 & \langle U_2, L_4 U_1 \rangle & \langle U_2, L_3 W_2 \rangle & 0 & \langle U_2, L_4 U_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

donde la matriz del extremo izquierdo del sistema matricial anterior, define a la matriz M_{ij} . Entontes el problema se reduce en encontrar los valores de los coeficientes A_j , B_j y C_j que minimizan el residual s_j^i .

Debido a que la Ec. (4-3) es un sistema homogéneo, para que la solución sea distinta de la solución trivial se tiene que cumplir la condición de que el determinante de la matriz M del sistema sea cero. Y a partir del determinante de M , se encuentran los valores propios del número de Rayleigh vertical (Ra_V) y la frecuencia de oscilación de la perturbación (σ), dados los valores del número de Rayleigh horizontal (Ra_H) y el número de onda (α), donde la parte real y la parte imaginaria del determinante se hacen cero de manera simultánea. Por lo tanto, la convergencia del método depende crucialmente de las funciones propias elegidas. Para ello se proponen funciones propias que satisfacen las condiciones de frontera; tomando en cuenta que cada expansión, tenga su parte par e impar.

4.2. Análisis Numérico

Para realizar el análisis numérico, primero es necesario determinar las funciones propias para cada una de las variables a cacular, así como las expresiones para determinar los valores propios con la finalidad de cumplir con

las condiciones de frontera establecidas. Posteriormente, se realizan los cálculos mediante el método numérico Galërkin para la obtención de la aproximación.

4.2.1. *Funciones Propias para la componente vertical de la perturbación de la velocidad,*

W_1

Debido a la necesidad de ampliar la solución en términos de funciones que satisfagan cuatro condiciones de contorno, es posible hacer que las funciones propias correspondientes a una ecuación diferencial de cuarto orden satisfagan cuatro condiciones de contorno. Considerando el enfoque propuesto por Chandrasekhar y Reid [80], Harris y Reid [81] y Chandrasekhar [69]. La solución general al problema de eigenvalores propuesto queda dividida en funciones par e impar:

$$y = B_1 \text{Cosh}(\lambda z) + B_2 \text{Cos}(\lambda z) + B_3 \text{Senh}(\lambda z) + B_4 \text{Sen}(\lambda z) \quad (4-4)$$

Por lo tanto, la solución general en términos de las variables del problema en cuestión es $W_1 = W_e + W_o$, donde los subíndices e y o indican las partes *par* e *impar* de la función respectivamente (del inglés, *even* y *odd*). Considerando solo la parte par de la Ec. (4-4) y adecuándola al problema en cuestión se tiene:

$$W_e = a_1 \text{Cosh}(\lambda z) + a_2 \text{Cos}(\lambda z) = 0 \quad (4-5)$$

De la ecuación anterior; dividiendo la parte de $\text{Cosh}(\lambda z)$ entre $\text{Cosh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ y la $\text{Cos}(\lambda z)$ entre $\text{Cos}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, se obtiene la expresión para la función propia de la parte par de W_1 :

$$W_e = a \left[\frac{\text{Cosh}(\lambda z)}{\text{Cosh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} - \frac{\text{Cos}(\lambda z)}{\text{Cos}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (4-6)$$

Ahora considerando la parte impar de la Ec. (4-4), para el problema en cuestión se tiene:

$$W_o = a_3 \text{Senh}(\lambda z) + a_4 \text{Sen}(\lambda z) = 0 \quad (4-7)$$

De la ecuación anterior; dividiendo la parte de $\text{Senh}(\lambda z)$ entre $\text{Senh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ y la $\text{Sen}(\lambda z)$ entre $\text{Sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, se obtiene la expresión para la función propia de la parte impar de W_1 :

$$W_o = a \left[\frac{\text{Senh}(\lambda z)}{\text{Senh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} - \frac{\text{Sen}(\lambda z)}{\text{Sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] \quad (4-8)$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones para W_e y W_o dadas por las Ecs. (4-6) y (4-8) respectivamente, las expansiones de las variables que se utilizan en el análisis numérico para W_1 son:

$$W_1 = W_e + W_o = \sum_{n=1}^N \left[a_{2n-1} \left(\frac{\text{Cosh}\lambda_{2n-1} z}{\text{Cosh}\frac{\lambda_{2n-1}}{2}} - \frac{\text{Cos}\lambda_{2n-1} z}{\text{Cos}\frac{\lambda_{2n-1}}{2}} \right) + a_{2n} \left(\frac{\text{Senh}\lambda_{2n} z}{\text{Senh}\frac{\lambda_{2n}}{2}} - \frac{\text{Sen}\lambda_{2n} z}{\text{Sen}\frac{\lambda_{2n}}{2}} \right) \right] \quad (4-9)$$

4.2.2. Valores Propios para la componente vertical de la perturbación de la velocidad, W_1

De la Ec. (4-5), calculando la primera y segunda derivada de W_e se obtiene:

$$\begin{aligned} DW &= \lambda [a_1 \text{Senh}(\lambda z) - a_2 \text{Sen}(\lambda z)] \\ D^2W &= \lambda^2 [a_1 \text{Cosh}(\lambda z) - a_2 \text{Cos}(\lambda z)] \end{aligned}$$

Sustituyendo DW y D^2W en la condición de frontera $W = DW + KnD^2W = 0$ para $z = \pm 1/2$ dada por la Ec. (3-45) se tiene:

$$W = DW + KnD^2W = 0 \quad \rightarrow \quad W = \lambda [a_1 \text{Senh}(\lambda z) - a_2 \text{Sen}(\lambda z)] + Kn\lambda^2 [a_1 \text{Cosh}(\lambda z) - a_2 \text{Cos}(\lambda z)] = 0$$

Dividiendo entre λ la expresión anterior para W se obtiene:

$$a_1 \text{Senh}(\lambda z) - a_2 \text{Sen}(\lambda z) + Kn\lambda [a_1 \text{Cosh}(\lambda z) - a_2 \text{Cos}(\lambda z)] = 0$$

Agrupando términos resulta en:

$$a_1 [\text{Senh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cosh}(\lambda z)] - a_2 [\text{Sen}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cos}(\lambda z)] = 0 \quad (4-10)$$

Por otra parte, de la Ec (3-45) se tiene que $W = 0$, por lo tanto la Ec. (4-5) es:

$$W_e = a_1 \text{Cosh}(\lambda z) + a_2 \text{Cos}(\lambda z) = 0 \quad (4-11)$$

Expresando las ecuaciones (4-10) y (4-11) en forma matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \text{Senh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cosh}(\lambda z) & -\text{Sen}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cos}(\lambda z) \\ \text{Cosh}(\lambda z) & \text{Cos}(\lambda z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

Calculando el determinante de la matriz se tiene:

$$\text{Cos}(\lambda z) [\text{Senh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cosh}(\lambda z)] - \text{Cosh}(\lambda z) [-\text{Sen}(\lambda z) + Kn\lambda \text{Cos}(\lambda z)] = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior entre $\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)$ y simplificando términos se obtiene:

$$\frac{\text{Senh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)}{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)} + Kn\lambda \frac{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)}{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)} + \frac{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Sen}(\lambda z)}{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)} + Kn\lambda \frac{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)}{\text{Cosh}(\lambda z) \text{Cos}(\lambda z)} = 0$$

$$\text{Tanh}(\lambda z) + Kn\lambda + \text{Tan}(\lambda z) + Kn\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Tanh}(\lambda z) + \text{Tan}(\lambda z) + 2 Kn\lambda = 0$$

Sustituyendo para $z = 1/2$ se obtiene la ecuación para determinar los valores propios de la función de prueba de la parte par W_e :

$$\text{Tanh}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \text{Tan}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2 Kn\lambda = 0 \quad (4-12)$$

De la Ec. (4-7), calculando la primera y segunda derivada de W_o se obtiene:

$$\begin{aligned} DW &= \lambda [a_3 \text{Cosh}(\lambda z) + a_4 \text{Cos}(\lambda z)] \\ D^2W &= \lambda^2 [a_3 \text{Senh}(\lambda z) - a_4 \text{Sen}(\lambda z)] \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriormente obtenidas para DW y D^2W en la condición de frontera de la Ec. (3-45) se tiene:

$$W = DW + KnD^2W = 0 \quad \longrightarrow \quad W = \lambda [a_3 \text{Cosh}(\lambda z) + a_4 \text{Cos}(\lambda z)] + Kn\lambda^2 [a_3 \text{Senh}(\lambda z) - a_4 \text{Sen}(\lambda z)] = 0$$

Dividiendo entre λ la expresión anterior para W se obtiene:

$$a_3 \text{Cosh}(\lambda z) + a_4 \text{Cos}(\lambda z) + Kn\lambda [a_3 \text{Senh}(\lambda z) - a_4 \text{Sen}(\lambda z)] = 0$$

Agrupando términos resulta en:

$$a_3 [\text{Cosh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{ Senh}(\lambda z)] + a_4 [\text{Cos}(\lambda z) - Kn\lambda \text{ Sen}(\lambda z)] = 0 \quad (4-13)$$

Por otra parte, de la Ec (3-45) se tiene que $W = 0$, por lo tanto la Ec. (4-7) es::

$$W = a_3 \text{Senh}(\lambda z) + a_4 \text{Sen}(\lambda z) = 0 \quad (4-14)$$

Expresando las Ecuaciones (4-13) y (4-14) en forma matricial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \text{Cosh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{ Senh}(\lambda z) & \text{Cos}(\lambda z) - Kn\lambda \text{ Sen}(\lambda z) \\ \text{Senh}(\lambda z) & \text{Sen}(\lambda z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0$$

Calculando el determinante de la matriz se tiene:

$$\text{Sen}(\lambda z) [\text{Cosh}(\lambda z) + Kn\lambda \text{ Senh}(\lambda z)] - \text{Senh}(\lambda z) [\text{Cos}(\lambda z) - Kn\lambda \text{ Sen}(\lambda z)] = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior entre $\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)$ y simplificando términos se obtiene:

$$\frac{\text{Cosh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)}{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)} + Kn\lambda \frac{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)}{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)} - \frac{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Cos}(\lambda z)}{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)} + Kn\lambda \frac{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)}{\text{Senh}(\lambda z) \text{ Sen}(\lambda z)} = 0$$

$$\text{Coth}(\lambda z) + Kn\lambda - \text{Cot}(\lambda z) + Kn\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Coth}(\lambda z) - \text{Cot}(\lambda z) + 2 Kn\lambda = 0$$

Sustituyendo para $z = 1/2$ se obtiene la ecuación para determinar los valores propios de la función de prueba de la parte impar W_o :

$$\text{Coth}\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \text{Cot}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2 Kn\lambda = 0 \quad (4-15)$$

Retomando las Ecs. (4-12) y (4-15), las expansiones de las variables que se utilizan en el análisis numérico son:

$$\operatorname{Tanh} \frac{\lambda_{2n-1}}{2} + \operatorname{Tan} \frac{\lambda_{2n-1}}{2} + 2\lambda_{2n-1}Kn = 0 \quad (4-16)$$

$$\operatorname{Coth} \frac{\lambda_{2n}}{2} - \operatorname{Cot} \frac{\lambda_{2n}}{2} + 2\lambda_{2n}Kn = 0 \quad (4-17)$$

4.2.3. Funciones Propias para la componente horizontal de la perturbación de la velocidad, U_1

De la condición de frontera dada por la Ec. (3-44), considerando sólo para U se tiene:

$$U \pm KnDU = 0, \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (4-18)$$

La solución general para las variables del problema en cuestión es $U_1 = U_e + U_o$, donde los subíndices e y o indican las partes *par* e *impar* de la función respectivamente (del inglés, *even* y *odd*). Por lo tanto, considerando la solución para la parte par en términos de funciones que satisfagan las condiciones de frontera queda de la siguiente manera:

$$U_e = c_k \operatorname{Cos}(\gamma z) \quad (4-19)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre $\operatorname{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$, se obtiene la expresión para la función propia de la parte par de U :

$$U_e = c_k \left[\frac{\operatorname{Cos}(\gamma z)}{\operatorname{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} \right] \quad (4-20)$$

La solución para la parte impar en términos de funciones que satisfagan las condiciones de frontera queda de la siguiente manera:

$$U_o = c_k \operatorname{Sen}(\gamma z) \quad (4-21)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre $\operatorname{Cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$, se obtiene la expresión para la función propia de la parte impar de U :

$$U_o = c_k \left[\frac{\operatorname{Sen}(\gamma z)}{\operatorname{Cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} \right] \quad (4-22)$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones para U_e y U_o dadas por las Ecs. (4-20) y (4-22) respectivamente, las expansiones de las variables que se utilizan en el análisis numérico para U_1 son:

$$U_1 = U_e + U_o = \sum_{n=1}^N \left[c_{2n-1} \frac{\text{Cos} \gamma_{2n-1} z}{\text{Sen} \frac{\gamma_{2n-1}}{2}} + c_{2n} \frac{\text{Sen} \gamma_{2n} z}{\text{Cos} \frac{\gamma_{2n}}{2}} \right] \quad (4-23)$$

De manera análoga se procedería para determinar la función propia para la componente V , pero como se demostró anteriormente, esta componente no tiene efecto sobre el fenómeno analizado. Por lo tanto, se omite el proceso para su determinación.

4.2.4. Valores Propios para la componente horizontal de la perturbación de la velocidad, U_1

Derivando la Ec. (4-19), para la parte par (U_e) se tiene:

$$DU = -c_k \gamma \text{Sen}(\gamma z)$$

Sustituyendo las expresiones de U y DU en la Ec. (4-18), reorganizando términos y sustituyendo $z = 1/2$ se llega a:

$$U + KnDU = 0 \rightarrow c_k \text{Cos}(\gamma z) - Kn c_k \gamma \text{Sen}(\gamma z) = 0 \rightarrow c_k [\text{Cos}(\gamma z) - Kn \gamma \text{Sen}(\gamma z)] = 0$$

$$\text{Cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right) - Kn \gamma \text{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = 0$$

Dividiendo la expresión anterior entre $\text{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$ y simplificando términos se obtiene la ecuación para determinar los valores propios de la función de prueba de la parte par U_e :

$$\frac{\text{Cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\text{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} - Kn \gamma \frac{\text{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\text{Sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = 0$$

$$\text{Cot} \left(\frac{\gamma}{2} \right) - Kn \gamma = 0 \quad (4-24)$$

Derivando la Ec. (4-21), para la parte impar (U_o) se tiene:

$$DU = c_k \gamma \text{Cos}(\gamma z)$$

Sustituyendo las expresiones de U y DU en la Ec. (4-18), reorganizando términos y sustituyendo $z = 1/2$ se llega a:

$$U + KnDU = 0 \rightarrow c_k \text{Sen}(\gamma z) + Kn c_k \gamma \text{Cos}(\gamma z) = 0 \rightarrow c_k [\text{Sen}(\gamma z) + Kn \gamma \text{Cos}(\gamma z)] = 0$$

$$\text{Sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + Kn \gamma \text{Cos}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 0$$

Dividiendo la expresión anterior entre $\text{Cos}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ y simplificando términos se obtiene la ecuación para determinar los valores propios de la función de prueba de la parte impar U_o :

$$\frac{\text{Sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\text{Cos}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + Kn \gamma \frac{\text{Cos}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\text{Cos}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 0$$

$$\text{Tan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) + Kn\gamma = 0 \quad (4-25)$$

Retomando las Ecs. (4-24) y (4-25), las expansiones de las variables que se utilizan en el análisis numérico son:

$$\text{Cot}\frac{\gamma_{2n-1}}{2} - \gamma_{2n-1} Kn = 0 \quad (4-26)$$

$$\text{Tan}\frac{\gamma_{2n}}{2} + \gamma_{2n} Kn = 0 \quad (4-27)$$

De manera análoga se procedería para determinar la expresión para generar los valores propios para la componente v , pero como se demostró anteriormente, esta componente no tiene efecto sobre el fenómeno analizado. Por lo tanto, se omite el proceso para su determinación.

4.2.5. Funciones Propias para la temperatura θ

De la Ec. (3-46) para θ se tiene:

$$\theta = 0, \quad z = \pm 1/2 \quad (4-28)$$

La solución para la parte par en términos de funciones que satisfagan las condiciones de frontera queda de la siguiente manera:

$$\theta_e = \text{Cos}[(2n - 1) \pi z] \quad (4-29)$$

donde el subíndice e indica la parte par de la función (del inglés, *even*).

La solución para la parte impar en términos de funciones que satisfagan las condiciones de frontera queda de la siguiente manera:

$$\theta_o = \text{Sen}(2n\pi z) \quad (4-30)$$

donde el subíndice o indica la parte impar de la función (del inglés, *odd*). Por lo tanto, las expansiones de las variables que se utilizan en el análisis numérico son:

$$\theta = \theta_e + \theta_o = \sum_{n=1}^N [b_{2n-1} \text{Cos}(2n-1)\pi z + b_{2n} \text{Sen} 2n\pi z] \quad (4-31)$$

4.2.6. Análisis numérico

Una vez determinadas las funciones propias y sus respectivas expresiones para los valores propios, se realizan los cálculos mediante el método numérico Galerkin para la obtención de la solución numérica para el sistema de ecuaciones dado por las Ecs. ((3-39)-(3-41)).

Los coeficientes que hacen nula la proyección del residual se calculan mediante la sustitución de las funciones propias dadas por las Ecs. (4-9), (4-23) y (4-31) en el sistema de ecuaciones del problema ((3-39)-(3-41)); para posteriormente hacerse ortogonales a las funciones propias correspondientes. Debido a que la proyección del residual sobre cada función propia debe ser igual a cero, la solución del problema homogéneo se reduce a encontrar el determinante de una matriz M de orden $3(2N) \times 3(2N)$ considerando el problema en su forma general (3 ecuaciones con 3 incógnitas: W_1 , θ y U_1 , que incluyen 2 partes: par e impar) o una matriz M de orden $3N \times 3N$ para el caso de los modos longitudinales (en donde sólo se considera la parte par o impar, según sea el caso). La variable N representa el número de términos considerados en las expansiones de las funciones propias para las tres

incógnitas del problema (W_1 , θ y U_1), y su valor depende de la precisión requerida. Para los resultados mostrados en este trabajo de investigación, los cálculos fueron obtenidos utilizando un cuarto orden de aproximación, para el cual, las matrices generadas son de magnitud: 12 x 12 para las perturbaciones longitudinales y de 24 x 24 para las transversales y oblicuas. Por lo que la matriz M está definida como:

$$M = \begin{pmatrix} M_{3i-2,3j-2} & M_{3i-2,3j-1} & M_{3i-2,3j} \\ M_{3i-1,3j-2} & M_{3i-1,3j-1} & M_{3i-1,3j} \\ M_{3i,3j-2} & M_{3i,3j-1} & M_{3i,3j} \end{pmatrix} \quad (4-32)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{3i-2,3j-2} &= \langle L_1 W_j, W_i \rangle & M_{3i-2,3j-1} &= -\alpha^2 \langle \theta_j, W_i \rangle \\ M_{3i-2,3j} &= 0 & M_{3i-1,3j-2} &= \langle DTW_j, \theta_i \rangle \\ M_{3i-1,3j-1} &= \langle L_2 \theta_j, \theta_i \rangle & M_{3i-1,3j} &= -R_H \langle U_j, \theta_i \rangle \\ M_{3i,3j-2} &= \langle L_3 W_j, U_i \rangle & M_{3i,3j-1} &= 0 \\ M_{3i,3j} &= \langle L_4 U_j, U_i \rangle & & \end{aligned} \quad (4-33)$$

En las Ecs. (4-33), L_1 a L_4 son los operadores anteriormente determinados en el capítulo 3 para las expresiones dadas por las Ecs. (3-48), (3-49) y (3-51). La notación $\langle \rangle$, representa la integral del producto de las funciones a través de la capa de fluido.

Como se explicó anteriormente al final de la sección 4.1.1, la condición para sistemas homogéneos se obtiene a partir de $\det(M) = 0$. A partir de esta condición ($\det(M) = 0$), mediante la técnica numérica de Newton-Raphson multidimensional es posible obtener los valores de las incógnitas: el número de Rayleigh vertical (Ra_V) y la frecuencia de oscilación para la perturbación (σ), dados los valores del número de onda (α), el ángulo de propagación de la perturbación (ϕ), el número de Rayleigh horizontal (Ra_H) y el número de Prandtl (Pr).

4.2.7. Análisis de convergencia para el método numérico de Galérkin

Con la finalidad de determinar la convergencia del método numérico Galérkin utilizado, se presentan los resultados del análisis de convergencia realizado mediante la comparación del error porcentual entre los diferentes órdenes de aproximación. El análisis de convergencia se realizó para el modo de inestabilidad más difícil de con-

verger, el cual está definido por el modo To considerando un $Pr = 10$. Los resultados se muestran en el Cuadro 4-1.

Cuadro 4-1: Análisis de convergencia del método de Galérkin para $Pr = 10$ y el modo To .

Ra_H	3er Orden			Error (%)	4to Orden			Error (%)
	R_{AVC}	α_C	σ_C		R_{AVC}	α_C	σ_C	
2000	10327.88	1.80	000.00	-0.01	10326.98	1.80	0.000	0.00
3000	12057.58	3.88	121.33	-0.01	12057.30	3.88	121.28	0.00
4000	14766.02	4.62	212.99	0.16	14788.48	4.61	212.41	0.01
5000	16308.83	5.47	323.36	0.58	16397.13	5.44	321.55	0.04
6000	16142.09	6.20	442.29	1.18	16309.35	6.18	440.84	0.16
7000	13879.33	6.80	565.95	2.24	14115.85	6.77	563.32	0.58
8000	09189.61	7.27	690.32	5.34	09500.30	7.24	686.68	2.14
9000	01787.62	7.63	813.00	31.97	02193.33	7.58	805.77	16.53
10000	-8536.94	7.90	932.51	-17.92	-8024.28	7.84	921.94	-10.84
11000	-21899.6	8.10	1048.38	-9.32	-21302.4	8.05	1036.47	-6.34
12000	-38321.5	8.28	1165.31	-6.99	-37716.4	8.23	1150.70	-5.30
13000	-57753.8	8.43	1281.25	-5.75	-57291.9	8.42	1269.74	-4.90
14000	-80114.1	8.58	1400.08	-4.82	-80040.6	8.62	1394.01	-4.73

Ra_H	5to Orden			Error (%)	6to Orden			Error (%)
	R_{AVC}	α_C	σ_C		R_{AVC}	α_C	σ_C	
2000	10326.78	1.80	000.00	0.00	10326.69	1.80	000.00	0.00
3000	12057.00	3.88	121.28	0.00	12056.86	3.88	121.28	0.00
4000	14789.30	4.61	212.39	0.00	14789.32	4.61	212.40	0.00
5000	16402.80	5.44	321.52	0.01	16403.62	5.44	321.51	0.00
6000	16331.64	6.17	440.10	0.02	16334.81	6.17	440.09	0.00
7000	14187.10	6.76	562.32	0.07	14195.62	6.76	562.33	0.01
8000	09683.61	7.21	683.57	0.25	09702.91	7.21	683.60	0.05
9000	02579.17	7.54	801.10	1.85	02618.29	7.53	800.10	0.36
10000	-7329.52	7.77	913.18	-1.24	-7256.56	7.77	913.24	-0.23
11000	-20187.7	7.95	1022.98	-0.78	-20060.3	7.94	1021.79	-0.14
12000	-36074.0	8.12	1134.57	-0.72	-35862.0	8.10	1131.90	-0.12
13000	-55021.8	8.28	1247.76	-0.75	-54682.0	8.25	1243.38	-0.12
14000	-77055.1	8.46	1367.04	-0.82	-76526.6	8.42	1360.73	-0.13

Ra_H	7mo Orden			Error (%)	8vo Orden		
	R_{AVC}	α_C	σ_C		R_{AVC}	α_C	σ_C
2000	10326.66	1.80	0.000	0.00	10326.65	1.80	000.00
3000	12056.79	3.88	121.28	0.00	12056.76	3.88	121.28
4000	14789.27	4.61	212.39	0.00	14789.23	4.61	212.39
5000	16403.70	5.44	321.51	0.00	16403.67	5.44	321.51
6000	16335.34	6.17	440.09	0.00	16335.40	6.17	440.09
7000	14197.29	6.76	562.33	0.00	14197.56	6.76	562.33
8000	09706.85	7.21	683.60	0.01	09707.57	7.21	683.60
9000	02626.16	7.53	800.13	0.06	02627.65	7.53	800.14
10000	-7242.44	7.76	912.14	-0.04	-7239.69	7.76	912.15
11000	-20036.9	7.94	1021.863	-0.02	-20032.3	7.94	1021.88
12000	-35825.2	8.10	1132.01	-0.02	-35817.8	8.10	1132.04
13000	-54626.1	8.25	1243.55	-0.02	-54614.8	8.25	1243.60
14000	-76443.3	8.41	1359.37	-0.02	-76426.8	8.41	1359.44

Los errores porcentuales calculados en el Cuadro 4-1, corresponden a la diferencia entre la solución obtenida con el orden de aproximación de mayor precisión (8vo Orden) en relación con los demás órdenes de aproximación (3ero, 4to, 5to, 6to y 7mo Orden). De acuerdo al Cuadro 4-1, el mayor error porcentual entre el orden de aproximación utilizado para la obtención de los resultados mostrados en este trabajo (4to Orden) y el orden de aproximación de mayor precisión (8vo Orden) es de 16.53%.

Además, con base al Cuadro 4-1 se observa que los mayores porcentajes se obtienen entre el rango de 9000 a 10000 para el número de Rayleigh horizontal Ra_H , el cual corresponde a la región donde la curva crítica cruza el eje horizontal en un valor de $Ra_{VC} = 0$, pero con un valor muy similar para el Ra_H al cual la curva cruza el eje horizontal cuando se incrementa el orden de aproximación (ver Cuadro 4-2). Los errores porcentuales que se muestran en el Cuadro 4-2 fueron calculados a través de la diferencia existente entre la solución obtenida con el orden de aproximación de mayor precisión (9no Orden) en relación con los otros seis órdenes de aproximación. Por lo tanto, los errores porcentuales respaldan la fiabilidad de los resultados numéricos presentados en este trabajo de investigación.

Cuadro 4-2: Valores del Ra_H a un $Ra_{VC} = 0$ para los diferentes órdenes de aproximación (caso $Pr = 10$ y el modo To).

Orden	$Ra_{VC} = 0$			Error (%)
	Ra_H	α_C	σ_C	
3ro	9195.93	7.69	836.77	1.08
4to	9241.43	7.65	834.17	0.59
5to	9290.22	7.61	833.58	0.07
6to	9295.31	7.61	834.07	0.01
7mo	9296.33	7.61	834.19	0.00
8vo	9296.53	7.61	834.21	0.00
9no	9296.57	7.61	834.22	-

Los resultados obtenidos para los casos de los números de Prandtl analizados ($Pr = 0.1, 0.71, 10$ y 500) se presentan con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

En esta sección se presentan los resultados para cuatro números de Prandtl diferentes ($Pr = 0.1, 0.71, 10, 500$), los cuales son comúnmente utilizados en metalurgia, procesos de filtración de aire, microfluidos y el proceso de fabricación de vidrio por el método de flotado, respectivamente. Los resultados se presentan en forma de curvas de criticalidad para las variables de interés; las cuales se grafican en el eje vertical en función del número de Rayleigh horizontal Ra_H (eje horizontal). Los valores críticos de las variables de interés que se grafican son las siguientes: número de Rayleigh vertical Ra_{VC} , número de onda de la perturbación α_C y frecuencia de la perturbación σ_C . Además, por gráfica de cada variable de interés para cada número de Prandtl Pr , se presentan las curvas de criticalidad para los casos de flujo sin deslizamiento para un $Kn = 0$ y con deslizamiento para un $Kn = 0.1$. Cabe mencionar que las curvas de criticalidad bajo el efecto del deslizamiento se identifican con la leyenda *Slip* (proveniente de la palabra *deslizamiento* por su traducción al inglés) y están representadas mediante curvas continuas; mientras que los valores críticos de las variables de interés sin el efecto del deslizamiento, simplemente aparecen con el nombre del modo de inestabilidad al que pertenece cada curva y están representadas mediante curvas discontinuas. Esto con la finalidad de analizar el efecto del deslizamiento del fluido sobre las superficies que lo delimitan en la estabilidad del flujo.

Por otra parte, es importante señalar que las inestabilidades pueden aparecer en distintos modos, lo cual implica que para ciertos números de Prandtl Pr , la inestabilidad más crítica resultante sea diferente en comparación con otro Pr . Por lo tanto, con la finalidad de describir los diferentes modos de inestabilidad presentes para cada Pr , es necesario definir la siguiente nomenclatura: los modos longitudinales; hacen referencia a celdas o rollos convectivos dirigidos o alineados con la dirección del flujo básico (dirección "x") y están identificados mediante la letra L , y los modos transversales; los cuales hacen referencia a rollos convectivos dirigidos de forma perpendicular a la dirección del flujo básico (dirección "y") y están identificados mediante la letra T . Cabe mencionar que ambos modos de inestabilidad (longitudinal y transversal) pueden ser de carácter estacionario y/o oscilatorio y están

identificados mediante los subíndices S u O , respectivamente. Debido a que diferentes modos de inestabilidad pueden competir por la misma configuración de celda o rollo convectivo, éstas configuraciones se identifican con los subíndices 1 y 2 según sea el caso. Por último, las curvas de los modos de inestabilidad son utilizadas para determinar la zona estable originada por la aparición de los modos más críticos, es decir, la zona de estabilidad es definida por los modos de inestabilidad que poseen los valores más bajos del Ra_{VC} .

5.1. Resultados para $Pr = 0.1$

A continuación se muestran los resultados obtenidos para $Pr = 0.1$, que corresponde al caso de hierro fundido líquido a una temperatura de 1500 K, el cual es utilizado en el área de la metalurgia [1]. Las curvas de criticalidad para un Ra_{VC} positivo, es decir; para el caso cuando el fluido es sometido a calentamiento desde la superficie horizontal inferior de la cavidad ($z = -1/2$), se muestran en la Figura (5-1). Donde es posible observar los valores del Ra_{VC} positivo en función del Ra_H para los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . En la Figura (5-2) se muestra una ampliación de la zona cercana al origen (esquina inferior izquierda) de la Figura (5-1), con la finalidad de observar con mayor detalle las curvas más críticas para este Pr . Como se mencionó anteriormente, las curvas de los modos de inestabilidad determinan la zona estable causada por la aparición de los modos más críticos.

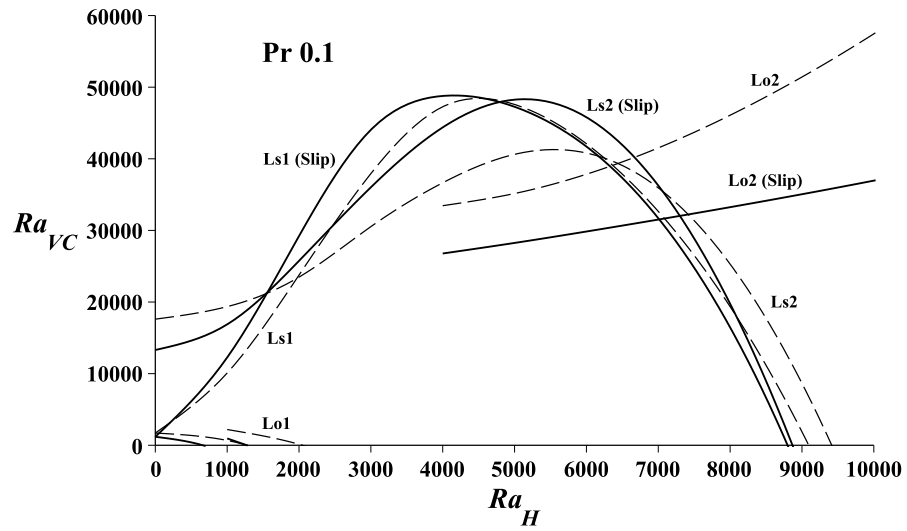


Figura 5-1: Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 0.1$. En esta figura, se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . En la zona inferior izquierda del gráfico, se tiene el modo T_3 para ambas condiciones de deslizamiento, el cual resulta ser el más crítico (ver Fig. (5-2) para mayor detalle). Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

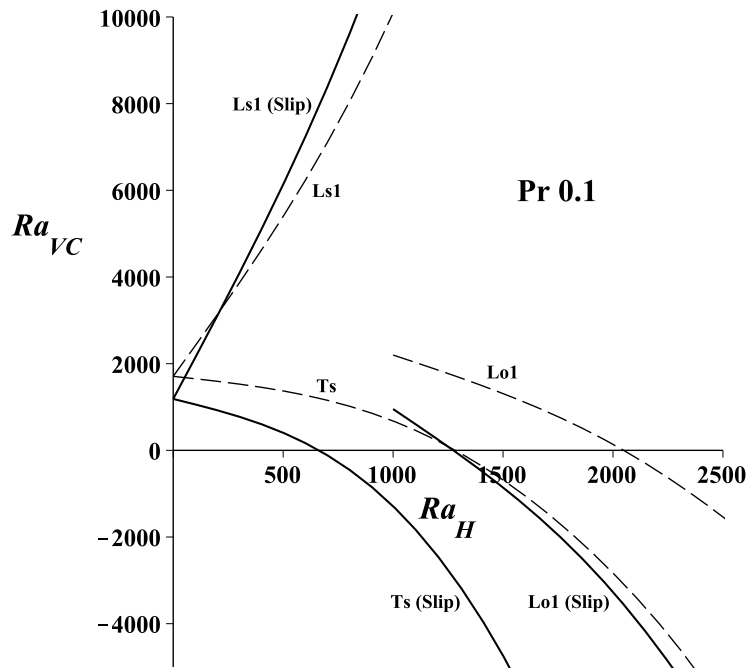


Figura 5-2: Detalle de las gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 0.1$. En esta figura, la inestabilidad más crítica es el modo T_S para ambas condiciones de deslizamiento, sin deslizamiento para un $Kn = 0$ (curva discontinua) y con deslizamiento para un $Kn = 0.1$ (curva continua). Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

A partir de la Figura (5-2), los valores más bajos del Ra_{VC} los posee el modo T_S para ambas condiciones de deslizamiento. Por lo tanto, el modo T_S resulta ser el más crítico con un valor del $Ra_{VC} = 1707.767$ para un $Ra_H = 0$, para el caso sin deslizamiento con un $Kn = 0$ (ver curva T_S en Fig. (5-2)); por lo que este valor obtenido está de acuerdo con los resultados clásicos reportados por Chandrasekhar [69]. Sin embargo, cuando el sistema es afectado por el deslizamiento, se obtiene un valor crítico totalmente diferente para el modo T_S , por lo que la nueva condición crítica originada por el efecto del deslizamiento con $Kn = 0.1$, es $Ra_{VC} = 1186.070$ para un $Ra_H = 0$ (ver curva $T_S(Slip)$ en Fig. (5-2)); el cual está de acuerdo con los resultados reportados por Kuo y Chen [82] en su trabajo sobre convección natural de Rayleigh con deslizamiento. Es importante hacer notar que la estabilidad del fluido puede determinarse por dos o más valores críticos diferentes del Ra_V . Por ejemplo, para un $Ra_H = 1000$ dado, se tienen dos valores diferentes del Ra_{VC} : 677.666 para el caso sin deslizamiento y -1289.23 para el caso con deslizamiento (ver Fig. (5-2) para más detalles); pero es posible obtener valores menores como se muestra en la Fig. (5-1) para el mismo Ra_H .

Por lo tanto, la Figura (5-2) sugiere que el efecto de deslizamiento desestabiliza el flujo, ya que la curva para el modo $T_S(Slip)$ cae primero a un valor del $Ra_{VC} = 0$ en comparación con la curva del modo T_S sin deslizamiento. En otras palabras, cuando se tiene ausencia de gradiente de temperatura vertical ($Ra_{VC} = 0$), el flujo solo se desestabiliza por calentamiento lateral y las condiciones críticas correspondientes para los modos T_S y $T_S(Slip)$ son $Ra_{HC} = 1276.36$, $\alpha_C = 2.57$ y $Ra_{HC} = 703.25$, $\alpha_C = 1.99$, respectivamente.

Por otro lado, el número de onda crítico (α_C) y la frecuencia de oscilación (σ_C) en función del número de Rayleigh horizontal (Ra_H) se muestran en las Figs. (5-3) y (5-4); donde en ésta última, se aprecia que para $Pr = 0.1$ los modos longitudinales L tienen frecuencia de oscilación.

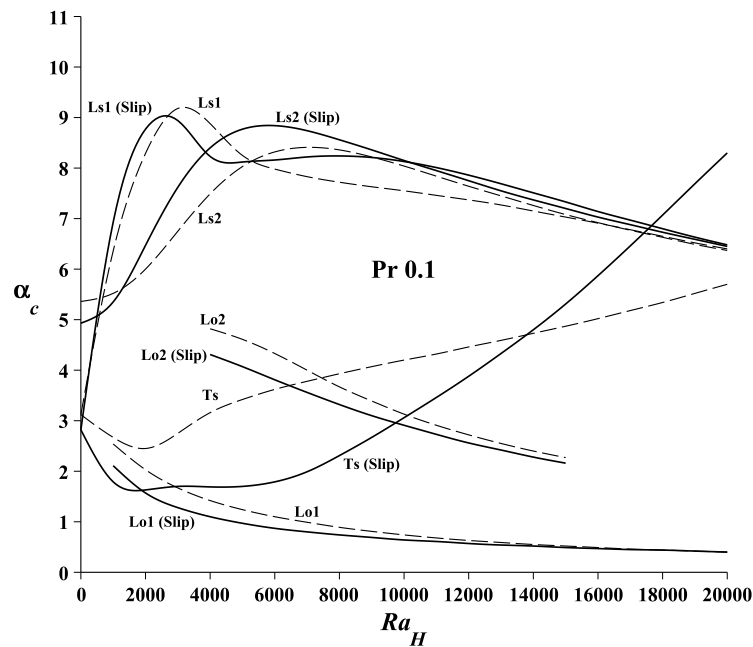


Figura 5-3: Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 0.1$.

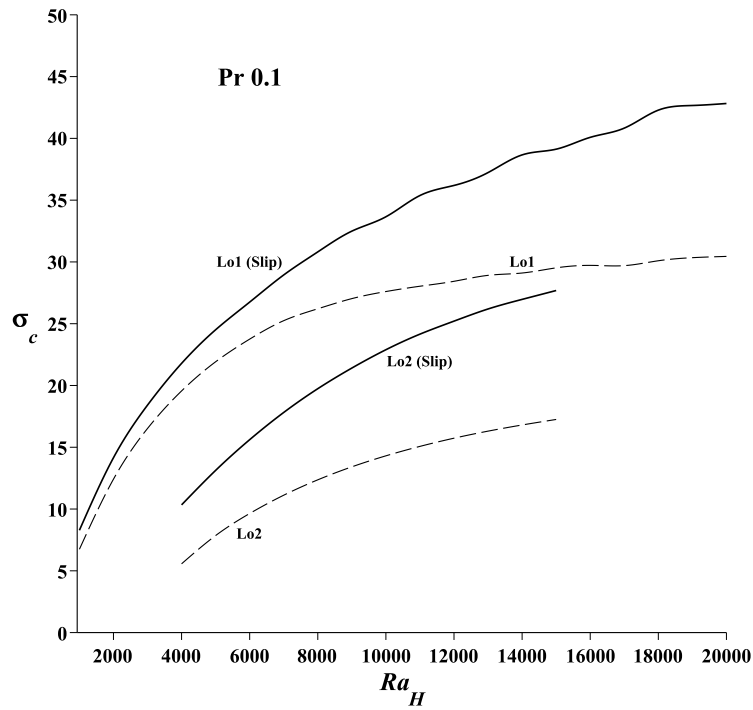


Figura 5-4: Gráficas de σ_c vs Ra_H para $Pr = 0.1$.

Las curvas de criticalidad para un Ra_{VC} negativo, es decir; para el caso cuando el fluido es sometido a calentamiento desde la superficie horizontal superior de la cavidad ($z = 1/2$), se muestran en la Figura (5-5). Donde es posible apreciar el efecto desestabilizador provocado por la condición de deslizamiento en las paredes horizontales de la cavidad, ya que la curva del modo $T_S(Slip)$ posee los valores más bajos del Ra_{VC} en relación a la curva del modo T_S sin deslizamiento. Por otra parte, un comportamiento común de estas curvas de criticalidad es que a medida que el Ra_H aumenta, el Ra_{VC} se vuelve más negativo.

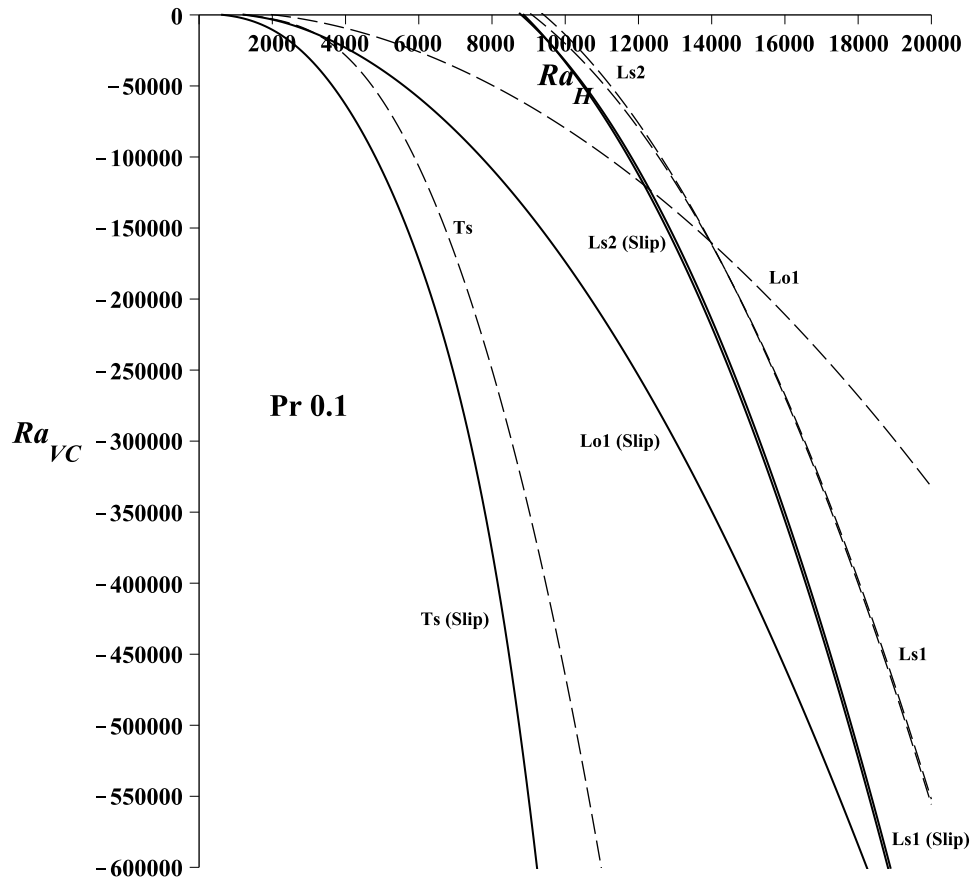


Figura 5-5: Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 0.1$. En esta figura se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr , donde se tiene que el modo T_S para ambas condiciones de deslizamiento, resulta ser el más crítico. Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

Como se mencionó anteriormente, el modo T_S resultó ser el más crítico para ambos casos del Ra_V : positivo y negativo (ver Figs. (5-2) y (5-5)), así como también para ambas condiciones de deslizamiento ($Kn = 0$ y $Kn = 0.1$). Por lo que en las Figuras (5-6) y (5-7), se muestran las zonas de estabilidad para el $Pr = 0.1$ para ambos casos del Ra_V (positivo y negativo, respectivamente) y ambas condiciones de deslizamiento.

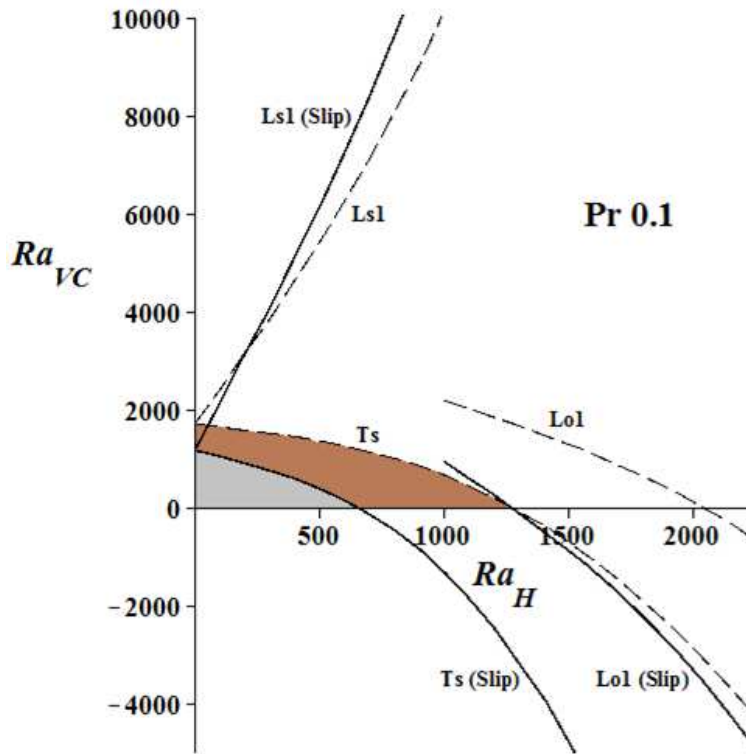


Figura 5-6: Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 0.1$. El modo T_S al ser el más crítico, establece las zonas de estabilidad para los casos con y sin deslizamiento, las cuales se identifican en color gris y café, respectivamente.

Con base a la Figura (5-6) se observa que el modo T_S resulta ser el más crítico y establece la zona de estabilidad dentro del rango $0 \geq Ra_H \leq 1276.36$ para el caso sin deslizamiento ($Kn = 0$), la cual se identifica en color café; y para el mismo modo, la zona de estabilidad queda establecida en el rango $0 \geq Ra_H \leq 703.25$ para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris. Mientras que considerando la Figura (5-7), se observa que el modo T_S resulta ser el más crítico para los casos con y sin deslizamiento (identificados en color gris y café, respectivamente) conforme se incrementa el Ra_H .

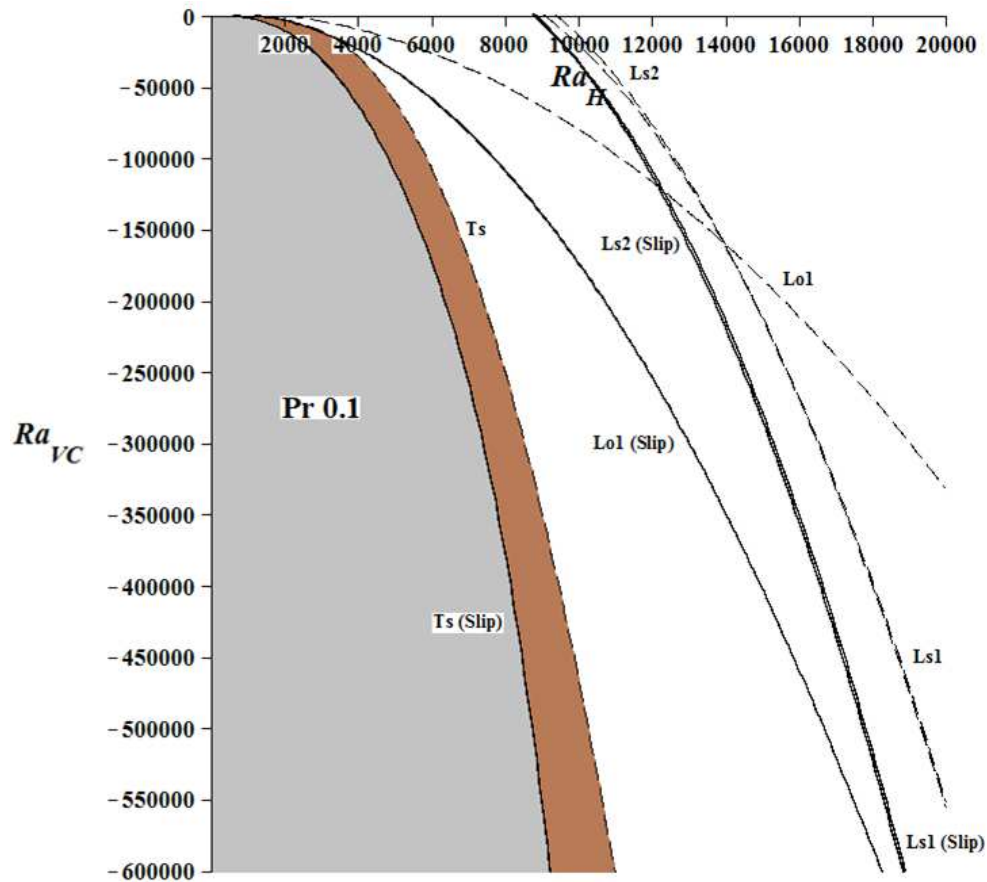


Figura 5-7: Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} negativo para $Pr = 0.1$. El modo T_S al ser el más crítico, establece las zonas de estabilidad para los casos con y sin deslizamiento, las cuales se identifican en color gris y café, respectivamente.

5.2. Resultados para $Pr = 0.71$

En la Figura (5-8) se muestran los resultados obtenidos para el $Pr = 0.71$, que corresponde el caso de aire a una temperatura de 303 K, el cual es utilizado en procesos de filtrado con aire [42]. Las curvas de criticalidad comprenden ambas zonas del Ra_{VC} (positiva y negativa), donde es posible observar los valores del Ra_{VC} en función del Ra_H para los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . Como se mencionó anteriormente, la zona de estabilidad para cada caso del Ra_V es definida por los modos de inestabilidad que poseen los valores más bajos del Ra_{VC} .

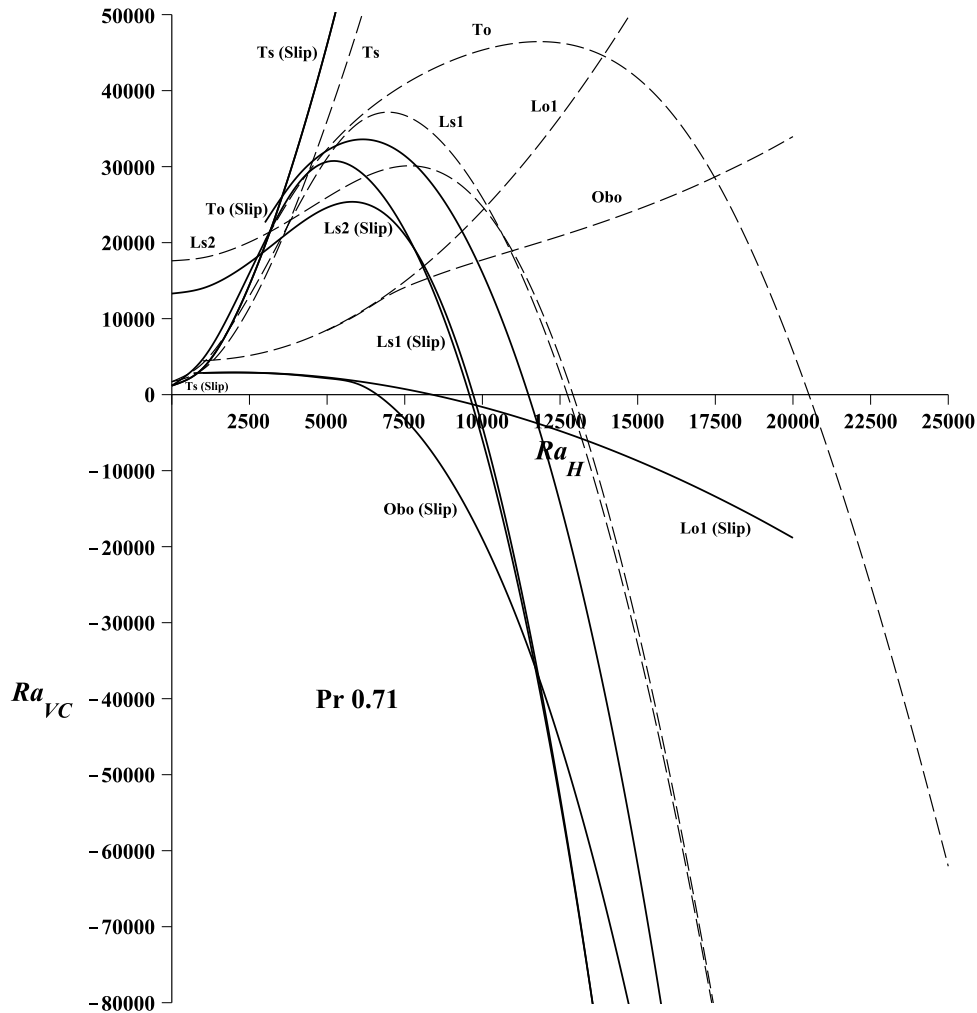


Figura 5-8: Gráficas del Ra_{VC} vs Ra_H para $Pr = 0.71$. En esta figura se observan ambas zonas del Ra_{VC} (positiva y negativa) para los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

A diferencia del caso anterior ($Pr = 0.1$), es importante notar que la zonas de estabilidad positiva y negativa para cada caso del deslizamiento (con y sin, $Kn = 0.1$ y $Kn = 0$, respectivamente), no están definidas por un solo modo de inestabilidad. En la Fig. (5-8) se muestran diferentes modos de inestabilidad que al intersectar unos con otros, se crea una zona de estabilidad definida por los primeros modos inestables. Las intersecciones entre las curvas de los modos de inestabilidad representan puntos de codimensión (o coexistencia); es decir, son puntos críticos en los cuales dos modos de inestabilidad compiten entre sí por ser la inestabilidad más crítica y así manifestarse

como patrón de flujo dentro la capa de fluido. Además se aprecia la presencia del modo oblicuo oscilatorio Ob_O , el cual figura en una vasta región como el más inestable. El modo Ob_O cambia la ubicación de los puntos de codimensión desde un Ra_{VC} positivo (para el caso sin la condición de deslizamiento) a un Ra_{VC} negativo. Por otra parte, también se aprecia que la presencia de los modos longitudinales estacionarios (LS_1 y LS_2) es relevante para valores negativos altos del $Ra_{VC} < -37\ 000$.

Considerando el efecto del deslizamiento en las paredes de la cavidad ($Kn = 0.1$), la estabilidad del modo T_S se ve afectada y provoca una nueva condición dada por un valor del $Ra_{VC} = 1186.070$ para un $Ra_H = 0$ (ver curva $T_S(Slip)$ en Fig. (5-8)). Con la finalidad de expresar los valores que caracterizan a cada punto de codimensión, de aquí en adelante los valores críticos para cada uno de ellos, serán expresados de la siguiente manera: (Ra_H , Ra_{VC} , α_C , σ_C). De los modos de inestabilidad mostrados en la Fig. (5-8) para la zona positiva del Ra_{VC} , el primero inestable es el T_S para un rango $0 \leq Ra_H \leq 849.7$. Después de un valor para el Ra_H de 849.7, la curva del modo T_S se cruza con la curva del modo Lo_1 y crean un punto de codimensión donde ambos modos son posibles. El punto de coexistencia se encuentra cuando el $Ra_H = 849.70$ en (849.70, 2846.230, 2.45, 0) para el T_S y en (849.70, 2846.220, 2.43, 10.633) para el Lo_1 . A partir de este punto, el modo Lo_1 bajo la condición de deslizamiento tiene valores críticos del Ra_{VC} más bajos con respecto a la curva del modo T_S . Por lo tanto, el modo Lo_1 es el más inestable en el rango de $849.70 \leq Ra_H \approx 4000$.

Cuando el $Ra_H \approx 4000$, el modo Ob_O comienza a ser el más inestable. Este punto se encuentra cuando el $Ra_H \approx 4000$ en (4000, 2600, 1.66, 52.041) para Lo_1 y en (4000, 2600, 1.67, 52.323) para el Ob_O cuando $\phi = 89^\circ$. El modo Ob_O alcanza un valor de cero para el Ra_{VC} en las siguientes condiciones: $Ra_H = 6606.104$, $\alpha_C = 1.68$ y $\sigma_C = 94.492$ cuando $\phi = 71^\circ$. Por lo tanto, el modo Ob_O es el más inestable en el rango de $4000 \approx Ra_H \leq 6606.104$ para la zona positiva del Ra_{VC} . Como en el caso anterior ($Pr = 0.1$), la condición de deslizamiento desestabiliza las curvas de los diferentes modos de inestabilidad y modifica sus respectivas zonas de estabilidad. Los valores críticos de α_C , σ_C , y ϕ_C en función del Ra_H para este número de Pr se muestran en las Figuras ((5-9)-(5-11)), donde se observan pequeños cambios en los números de onda y la frecuencia de los primeros modos inestables: $LS_1(Slip)$, $Lo(Slip)$ y $Ob_O(Slip)$.

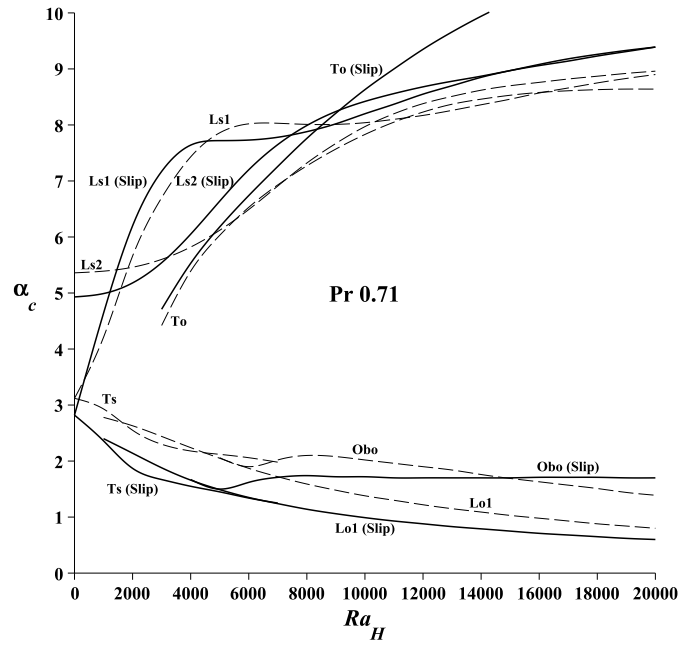


Figura 5-9: Gráficas de α_c vs Ra_H para $Pr = 0.71$.

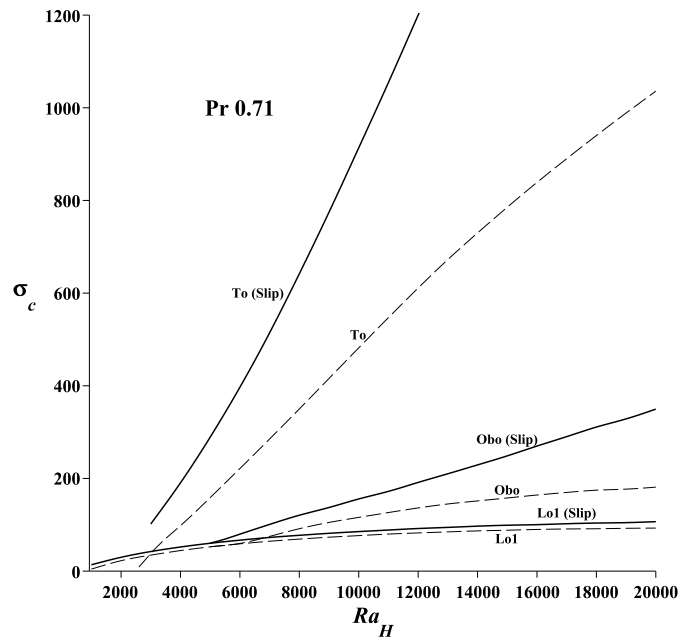
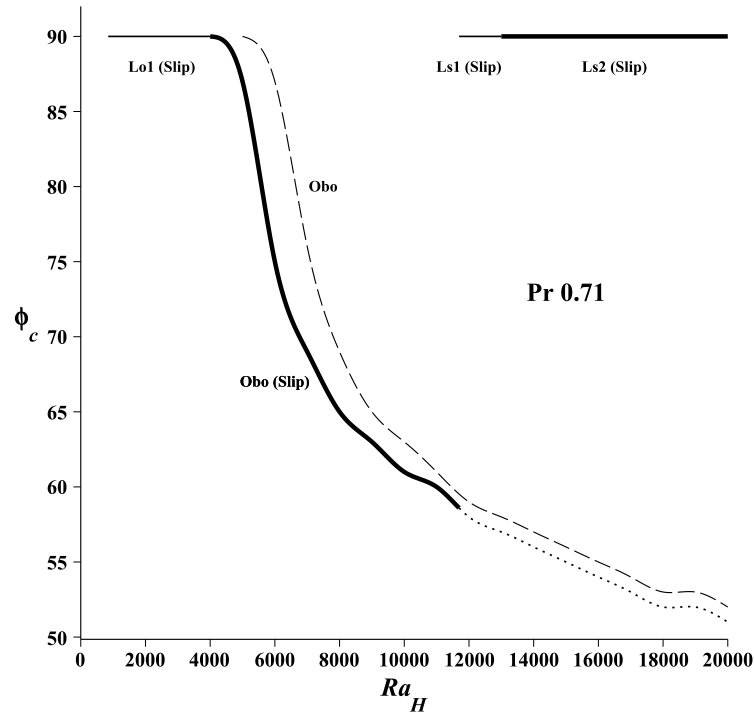


Figura 5-10: Gráficas de σ_c vs Ra_H para $Pr = 0.71$.

Figura 5-11: Gráficas de ϕ_c vs Ra_H para $Pr = 0.71$.

Considerando el efecto del deslizamiento cuando el fluido se calienta desde la parte superior (caso de Ra_V negativo) en la Figura (5-8), los modos T_O , Ls_1 y Ls_2 alcanzan un valor de 0 para el Ra_{VC} antes de sus respectivas curvas sin deslizamiento. Por otra parte, para las curvas de los modos Lo_1 y Ob_O , el efecto de deslizamiento provoca un cambio dramático en la tendencia de las curvas en comparación con sus respectivas curvas sin deslizamiento. Además se aprecia que la curva del modo Ob_O cruza a la zona negativa del Ra_{VC} con un valor del Ra_H de 6606.104, y cuando la curva del Ob_O se cruza con la curva del modo Ls_1 en $Ra_H = 11695.284$, se crea un punto de coexistencia. El punto de coexistencia se encuentra cuando el $Ra_H = 11695.284$ en $(11695.284, -35789.454, 1.69, 184.190)$ con $\phi = 59^\circ$ para el modo Ob_O y en $(11695.284, -35789.455, 8.49, 0)$ para el modo Ls_1 . El modo Ls_1 bajo la condición de deslizamiento tiene ahora los valores más bajos del Ra_{VC} con respecto a la curva del modo Ob_O ; por lo tanto, el Ls_1 es el más inestable en la zona negativa del Ra_{VC} en el rango $11695.284 \leq Ra_H \approx 13000$. A partir de un $Ra_H \approx 13000$, la curva del modo Ls_1 se cruza con la curva del modo Ls_2 , el cual se establece como el más crítico para este Ra_H en adelante en la zona negativa del Ra_{VC} . Además, las curvas para los modos T_O , Ls_1 y Ls_2 bajo la condición del deslizamiento tienen valores más pequeños del Ra_{VC} en relación con sus respectivas curvas sin deslizamiento.

Como se mencionó anteriormente haciendo referencia a la Fig. (5-8), las zonas de estabilidad positiva y negativa para cada condición del deslizamiento (con y sin, $Kn = 0.1$ y $Kn = 0$, respectivamente) quedaron establecidas por los diferentes modos de inestabilidad que al intersectar unos con otros, dieron origen a la zona de estabilidad definida por los modos inestables más críticos para este Pr . De tal forma que las zonas estables para un Ra_{VC} positivo, quedaron definidas por los modos: T_S , Lo_1 , Ob_O y Ls_1 para el caso sin deslizamiento; y por los modos: T_S , Lo_1 y Ob_O para el caso con deslizamiento. Mientras que las zonas estables para un Ra_{VC} negativo, quedaron definidas por los modos: Ls_1 y Ls_2 para el caso sin deslizamiento; y por los modos: Ob_O , Ls_1 y Ls_2 para el caso con deslizamiento.

Por lo tanto, en la Figura (5-12), se muestran las zonas de estabilidad para el $Pr = 0.71$ para el caso del Ra_{VC} positivo y ambas condiciones de deslizamiento. Cabe mencionar que cuando $Kn = 0$ (caso sin deslizamiento), la región estable en color café también incluye a la región que aparece en color gris (caso con deslizamiento, $Kn = 0.1$). Los modos: T_S ($0 \leq Ra_H \leq 849.7$), Lo_1 ($849.70 \leq Ra_H \approx 4000$) y Ob_O ($4000 \approx Ra_H \leq 6606.104$) definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris.

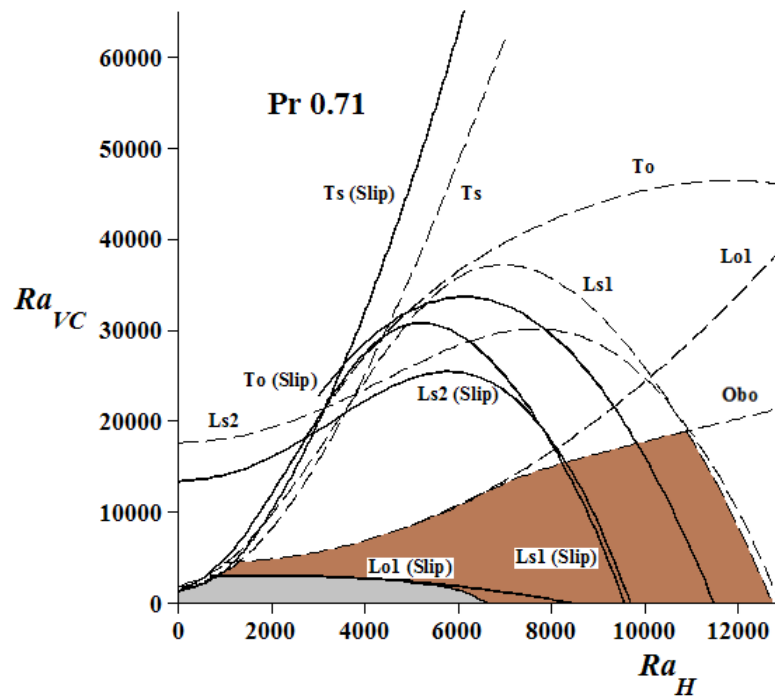


Figura 5-12: Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 0.71$. Los modos: T_S , Lo_1 , Ob_O y Ls_1 definen la zona de estabilidad al ser los más críticos para el caso sin deslizamiento ($Kn = 0$), la cual se identifica en color café. Los modos: T_S , Lo_1 y Ob_O definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris.

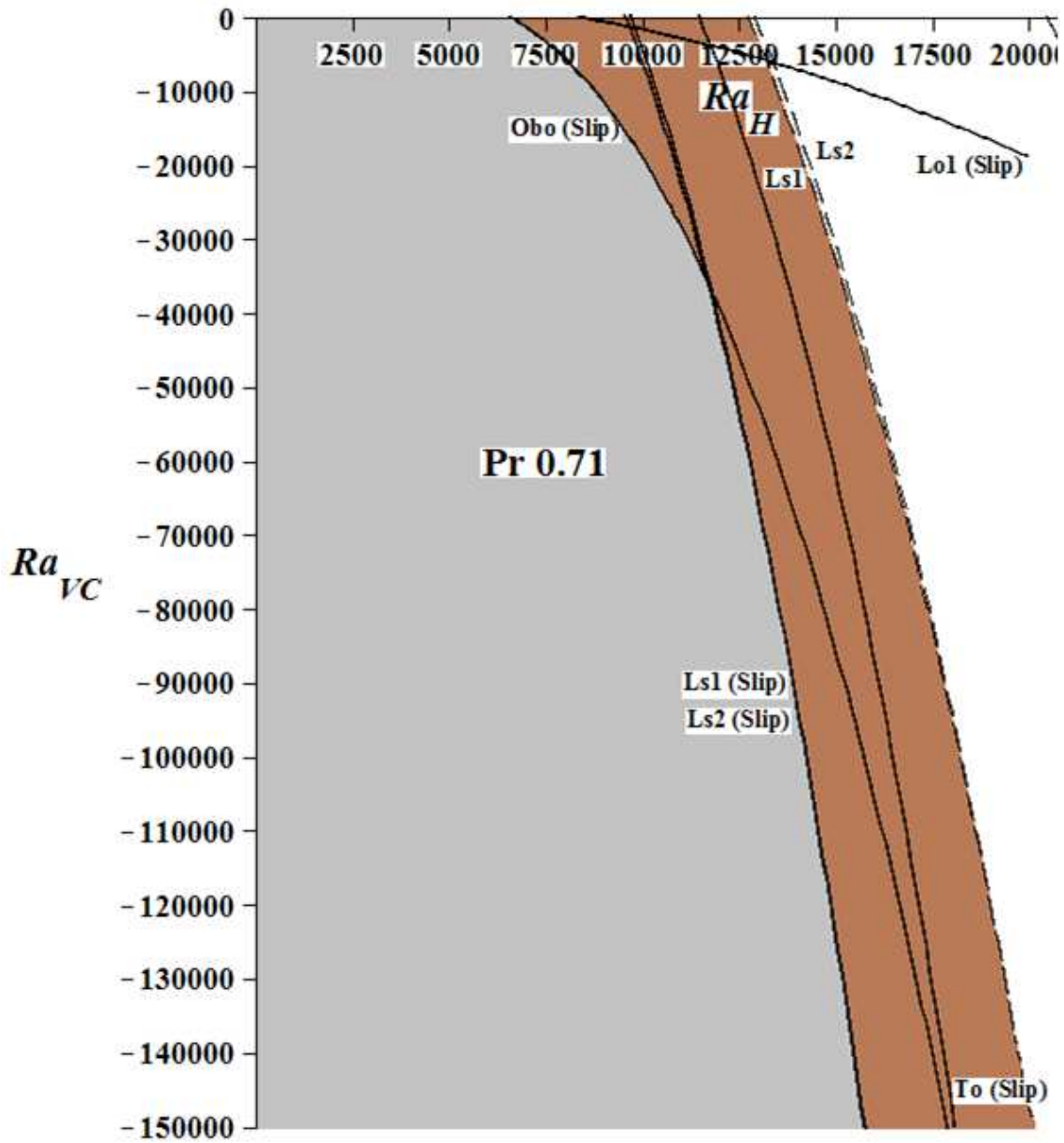


Figura 5-13: Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} negativo para $Pr = 0.71$. Los modos: Ls_1 y después el Ls_2 definen la zona de estabilidad al ser los más críticos para el caso sin deslizamiento ($Kn = 0$), la cual se identifica en color café. Los modos: Ob_0 , Ls_1 y Ls_2 definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris.

Con base en la Figura (5-13), se observan las zonas estables para un Ra_{VC} negativo; donde el modo Ls_1 y después el Ls_2 al ser los más críticos, establecen la zona de estabilidad para el caso sin deslizamiento, dicha zona

se identifica en color café; y los modos: Ob_O ($6606.104 \leq Ra_H \leq 11695.284$), Ls_1 ($11695.284 \leq Ra_H \approx 13000$) y Ls_2 (de un $Ra_H \approx 13000$ en adelante) definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento, la cual se identifica en color gris.

5.3. Resultados para $Pr = 10$

Por lo general, en microfluídica, los fluidos de trabajo son los electrolitos y es posible tratar el agua del océano como un electrolito. Además, los electrolitos tienen propiedades similares a las del agua. Por lo tanto, en la Figura (5-14) se presentan los resultados para un $Pr = 10$; el cual corresponde al agua líquida saturada a 283 K [65]. En esta figura se muestran los valores críticos del Ra_V (Ra_{VC}) positivo en función del Ra_H , donde es posible apreciar que los modos oscilatorios longitudinales Lo_1 y Lo_2 no aparecen en la gráfica; debido a que son muy estables y alcanzan valores de Ra_{VC} positivos altos fuera del rango de interés.

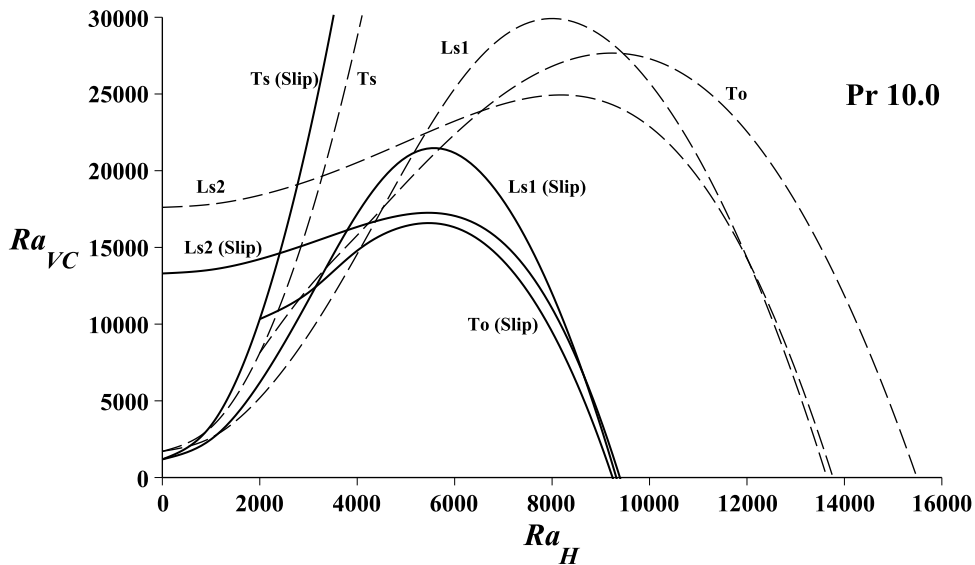


Figura 5-14: Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 10$. En esta figura, se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este número de Pr . Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

Cuando el fluido se somete a la condición de deslizamiento en las paredes ($Kn = 0.1$), los modos Ls_1 y Ts se ven afectados, provocando que comiencen en un valor distinto en comparación a cuando no se exponen al

deslizamiento. Por lo que el nuevo valor para ésta condición es un $Ra_{VC} = 1186.070$ en un $Ra_H = 0$. Considerando el efecto de deslizamiento para los modos de inestabilidad mostrados en la Fig.(5-14), el más inestable es el modo Ls_1 en un rango de $0 \leq Ra_H \leq 3172.27$. Después de un valor para el Ra_H de 3172.27, la curva del modo Ls_1 se cruza con la curva del modo To , provocando un punto de codimensión. El punto de coexistencia ocurre para un valor del $Ra_H = 3172.27$ en $(3172.27, 12580.94, 4.85, 0)$ para el modo Ls_1 y en $(3172.27, 12580.94, 3.99, 135.561)$ para el modo To . A partir de este punto de codimensión, el modo To bajo la condición de deslizamiento es menos estable que los longitudinales y alcanza primero un valor de 0 para el Ra_{VC} en $Ra_H = 9241.43$, $\alpha_C = 7.65$ y $\sigma_C = 834.173$. Por lo tanto, el modo To es el más inestable en el rango $3172.27 \leq Ra_H \leq 9241.43$. Como en los casos anteriores ($Pr = 0.1$ y 0.71), la condición de deslizamiento reduce la región estable originada por la condición de frontera de no deslizamiento, permitiendo que el modo To sea el más crítico en un rango más amplio del Ra_H . Una vez más, se verifica el efecto desestabilizador de la condición de deslizamiento sobre la estabilidad del flujo. Los valores críticos de α_C y σ_C en función de Ra_H para este número Pr se muestran en las Figuras (5-15 y 5-16), donde se observa un cambio notable en la frecuencia del modo To debido al deslizamiento.

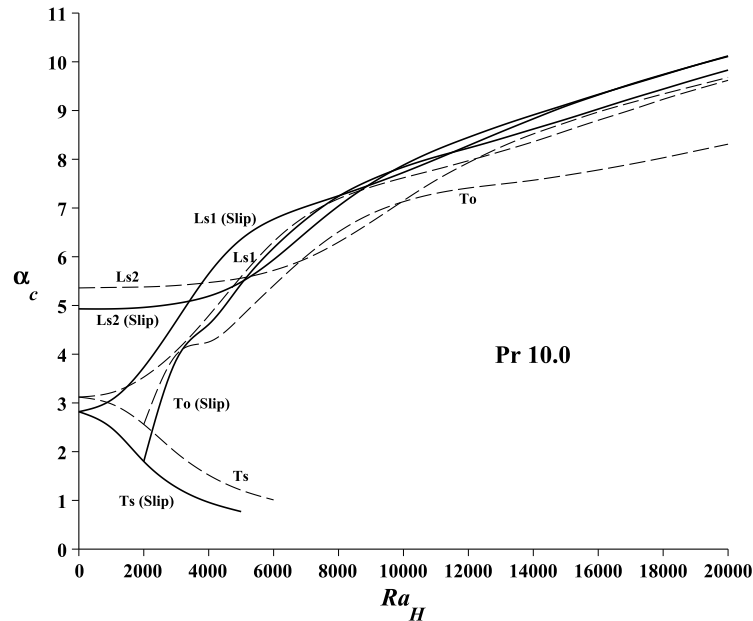


Figura 5-15: Gráficas de α_C vs Ra_H para $Pr = 10$.

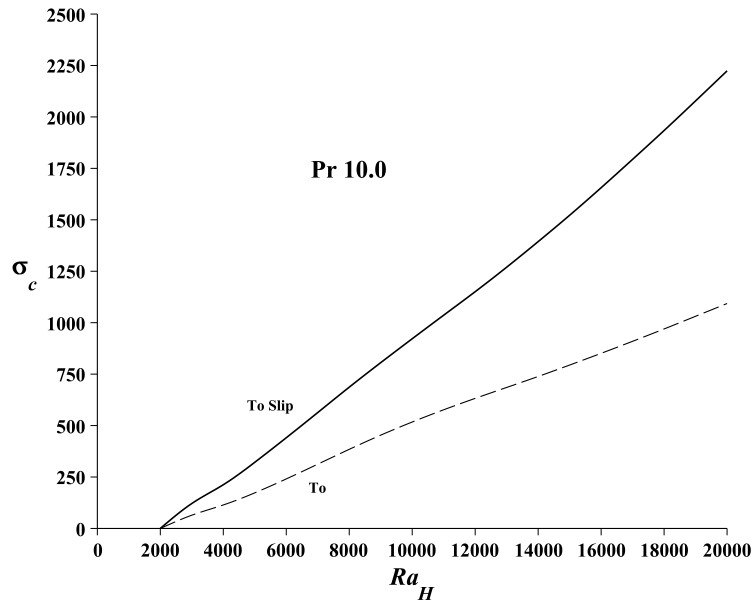


Figura 5-16: Gráficas de σ_c vs Ra_H para $Pr = 10$.

El efecto de deslizamiento cuando el fluido se calienta desde la parte superior (caso del Ra_V negativo) se muestra en la Figura (5-17) donde se observa que los modos T_0 , Ls_1 y Ls_2 alcanzan un valor de 0 para el Ra_{VC} antes de sus respectivas curvas sin deslizamiento.

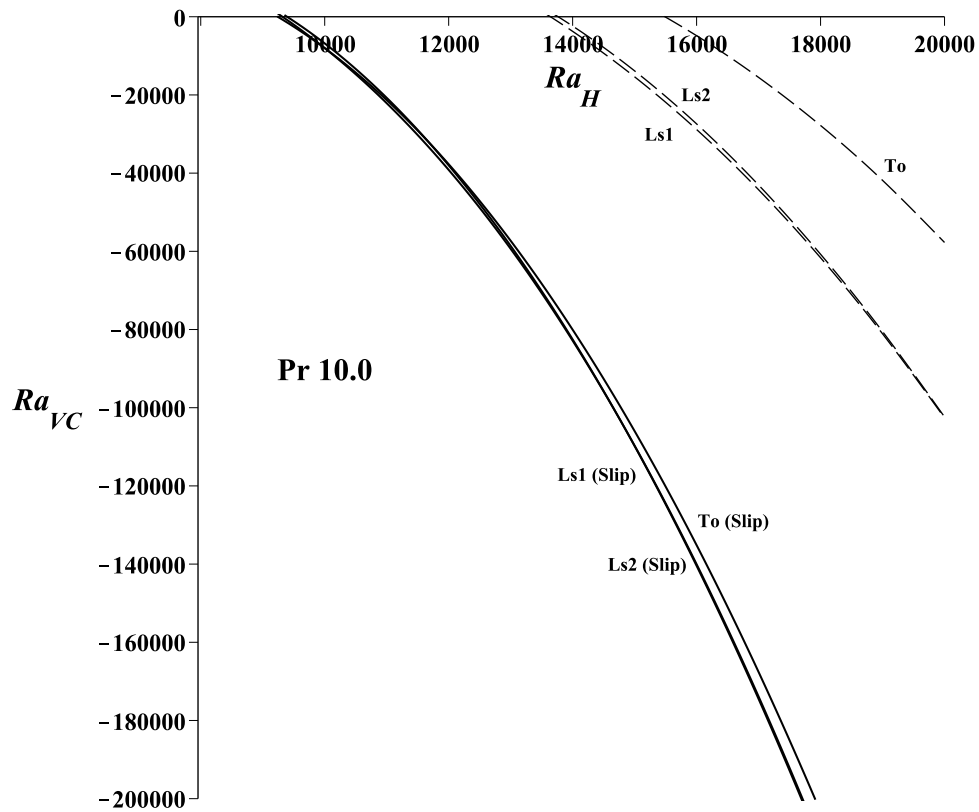


Figura 5-17: Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 10$. En esta figura se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

Una vez que la curva del modo T_O cruza el eje horizontal, le sigue el modo Ls_1 y casi inmediatamente el modo Ls_2 (como se puede ver en las Figs.((5-14) y (5-17)). Las curvas de estos tres modos muestran una tendencia a converger alrededor de un valor del $Ra_H \approx 12500$, para lo cual muestran un valor del $Ra_{VC} \approx -50000$ dando lugar a un nuevo punto de codimensión; a partir de aquí, las curvas de los modos Ls_1 y Ls_2 se acercan entre sí y alcanzan valores críticos negativos más bajos del Ra_{VC} con respecto al modo T_O . Un comportamiento similar se produce a medida que los valores del Ra_H aumentan aún más, donde los modos Ls_1 y Ls_2 tienden a acercarse y competir entre sí para ser la primera inestabilidad crítica en el área negativa del Ra_{VC} . Finalmente, el modo Ls_2 es el más inestable en el rango restante del Ra_H para los valores negativos del Ra_{VC} .

Como se mencionó anteriormente haciendo referencia a la Fig.(5-14) para la zona de estabilidad positiva y a la Fig.(5-17) para la zona de estabilidad negativa para cada condición del deslizamiento (con y sin, $Kn = 0.1$ y Kn

= 0, respectivamente), las zonas de estabilidad quedaron establecidas por los diferentes modos de inestabilidad que al intersectar unos con otros, dieron origen a la zona de estabilidad definida por los modos inestables más críticos para este valor de Pr . De tal forma que las zonas estables para un Ra_{VC} positivo, quedaron definidas por los modos: LS_1 ($0 \leq Ra_H \leq 4538.5$), T_O ($4538.5 \leq Ra_H \leq 6548$), LS_2 ($6548 \leq Ra_H \leq 12039.8$) y LS_1 ($12039.8 \leq Ra_H \leq 13641.76$) para el caso sin deslizamiento; y por los modos: LS_1 ($0 \leq Ra_H \leq 3172.27$) y T_O ($3172.27 \leq Ra_H \leq 9241.43$) para el caso con deslizamiento. Por lo tanto, en la Figura (5-18), se muestran las zonas de estabilidad para el $Pr = 10$ para el caso del Ra_V positivo y ambas condiciones de deslizamiento.

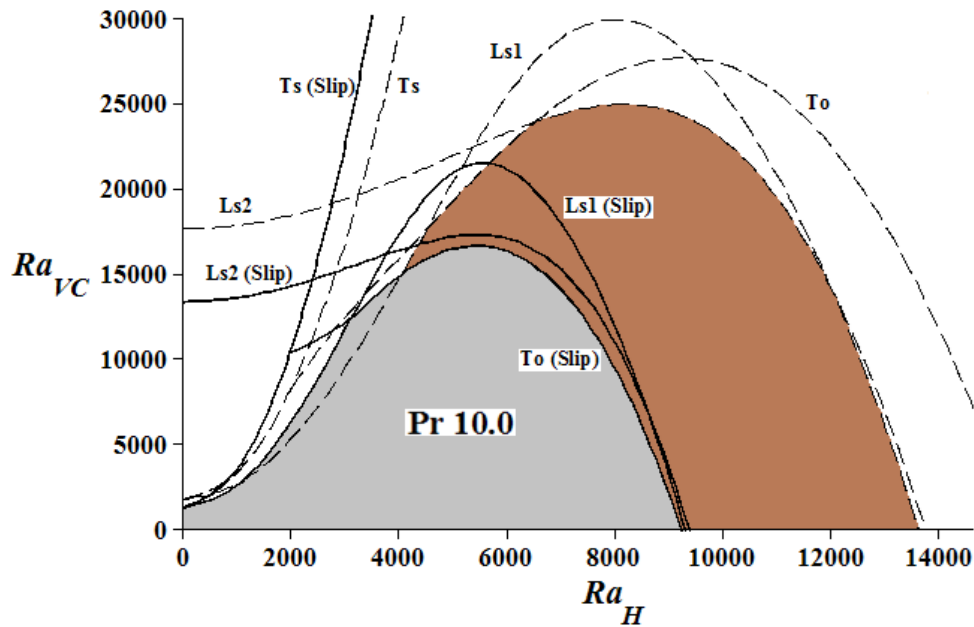


Figura 5-18: Zonas de estabilidad para el caso del Ra_{VC} positivo para $Pr = 10$. Los modos: LS_1 , T_O , LS_2 y LS_1 definen la zona de estabilidad al ser los más críticos para el caso sin deslizamiento ($Kn = 0$), dicha zona se identifica en color café; y los modos: LS_1 y T_O definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris.

Mientras que las zonas estables para un Ra_{VC} negativo, quedaron definidas por los modos: LS_1 y LS_2 para el caso sin deslizamiento; y por los modos: T_O , LS_1 y LS_2 para el caso con deslizamiento, como se aprecia en la Figura (5-19).

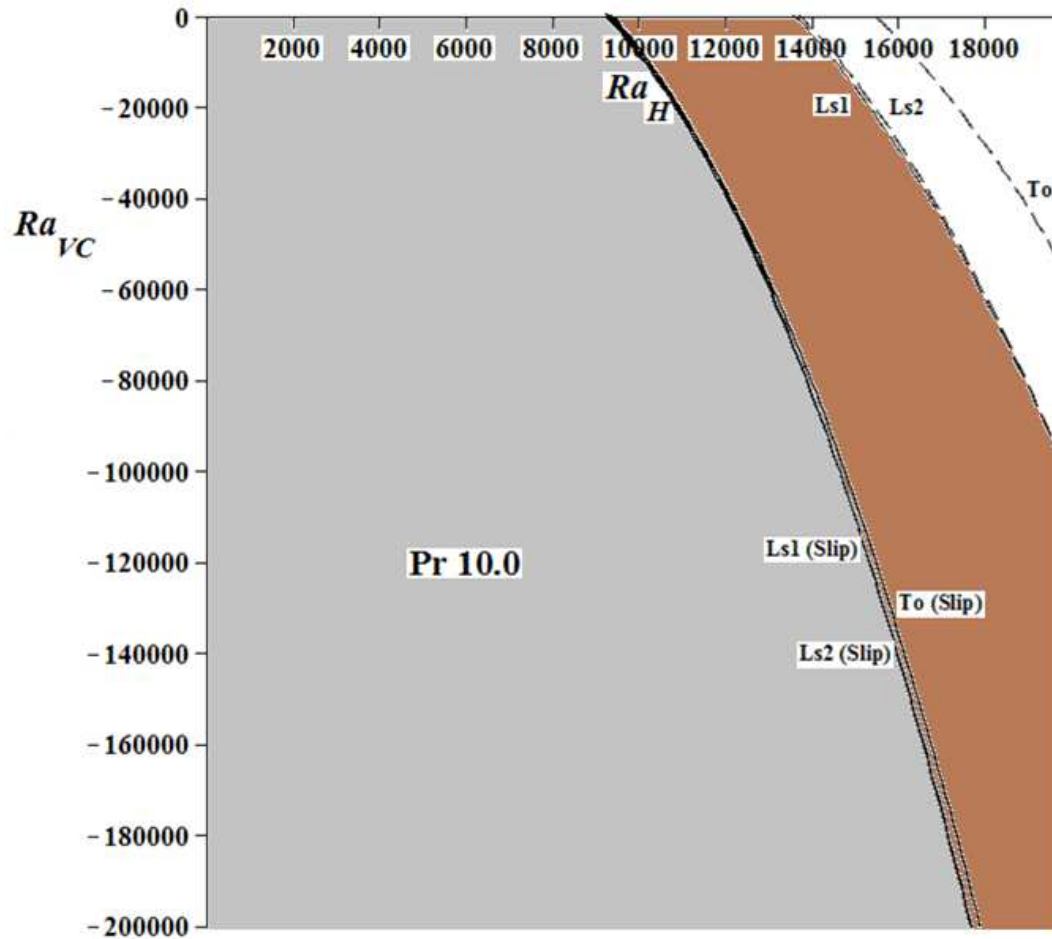


Figura 5-19: Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} negativo para $Pr = 10$. El modo Ls_1 y después el Ls_2 al ser los más críticos, establecen la zona de estabilidad para el caso sin deslizamiento, dicha zona se identifica en color café; y los modos: To , Ls_1 y Ls_2 definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento, la cual se identifica en color gris.

En el Cuadro 5-1 se aprecia la influencia del número de Knudsen en la estabilidad del flujo a través de los valores críticos obtenidos numéricamente para el caso $Pr = 10$ y para el modo To en un rango del Ra_H de 3000 a 12000.

Cuadro 5-1: Valores críticos del Ra_V para los casos con y sin deslizamiento ($Pr = 10$ y el modo To)

Ra_H	No deslizamiento ($Kn = 0$)			Deslizamiento ($Kn = 0.1$)		
	Ra_{VC}	α_C	σ_C	Ra_{VC}	α_C	σ_C
3000	12362.717	3.99	64.386	12057.302	3.88	121.282
4000	15791.412	4.25	114.129	14788.476	4.61	212.407
5000	19202.311	4.77	173.006	16397.129	5.44	321.552
6000	22368.547	5.41	240.677	16309.349	6.18	440.836
7000	24986.242	6.01	312.387	14115.853	6.77	563.320
8000	26805.768	6.51	384.535	9500.301	7.24	686.677
9000	27633.966	6.88	453.478	2193.332	7.58	805.774
10000	27298.229	7.13	517.317	-8024.277	7.84	921.937
11000	25641.377	7.30	576.779	-21302.374	8.05	1036.471
12000	22545.769	7.41	632.180	-37716.368	8.23	1150.693

Como se puede ver en los resultados de los valores numéricos que se muestran en el Cuadro 5-1, la condición de deslizamiento ($Kn = 0.1$) reduce el valor crítico de los números de Rayleigh de la condición de frontera de no-deslizamiento ($Kn = 0$). Este efecto desestabilizador es el responsable de que el modo To sea el más inestable en una región importante del mapa de estabilidad.

5.4. Resultados para $Pr = 500$

A continuación, se presentan los resultados para un $Pr = 500$, el cual corresponde a vidrio fundido para las aplicaciones de proceso de vidrio flotado [59]. Debido a que el vidrio fundido posee una viscosidad muy alta, en consecuencia, el número de Prandtl también resulta ser grande [59, 83, 84]. Durante el proceso de vidrio flotado, el vidrio líquido se vierte sobre una cama de estaño fundido; debido a la alta viscosidad y baja densidad del vidrio en relación con las propiedades del estaño, éstos no se mezclan y originan una superficie de contacto perfectamente plana entre ellos. Como se mencionó anteriormente, el vidrio fundido se caracteriza por un Pr alto, el cual resulta ser de un orden de magnitud superior a 10^3 . Por lo tanto, mediante una comparación entre las curvas resultantes para $Pr = 1000$ con respecto a un $Pr = 500$, se observó que el comportamiento de los diferentes modos de inestabilidad presentes para cada Pr es prácticamente el mismo. Es por ello que se considera un número Pr de 500 como válido para representar al vidrio fundido. Por otra parte, en la interfaz entre el vidrio líquido y el estaño fundido se supone que es en donde se manifiesta el fenómeno de deslizamiento, debido a que es una condición

de frontera adecuada para las interfaces tipo líquido-líquido [85]. De la misma manera que en el caso anterior ($Pr = 10$), aquí los modos oscilatorios longitudinales Lo_1 y Lo_2 no aparecen en la gráfica; esto se debe a que son muy estables y alcanzan valores positivos del Ra_{VC} fuera del rango mostrado. Por lo tanto, en la Figura (5-20) se muestran los valores críticos del Ra_V (Ra_{VC}) positivo en función del Ra_H para el $Pr = 500$.

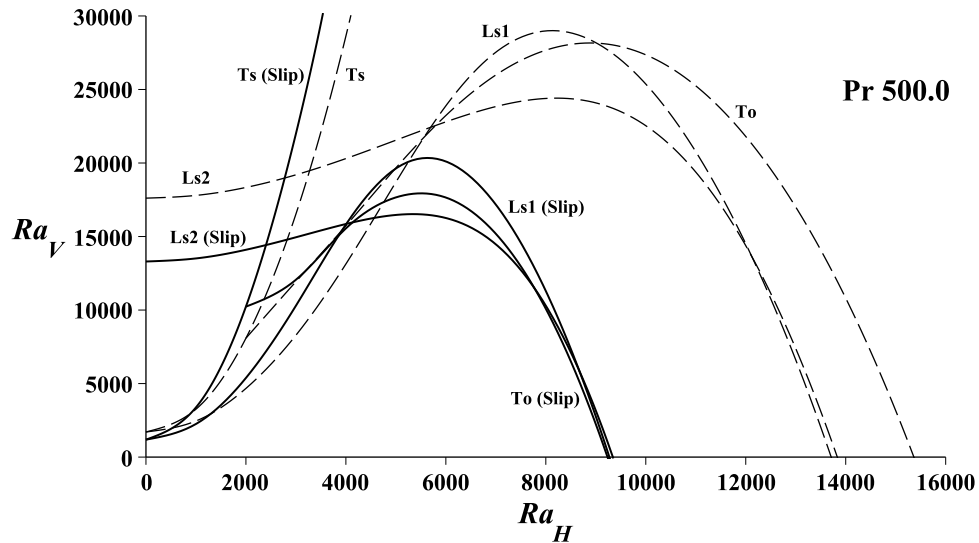


Figura 5-20: Gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 500$. En esta figura, se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

Además, los valores críticos de α_C y σ_C en función del Ra_H para este número Pr se muestran en las Figuras (5-21 y 5-22).

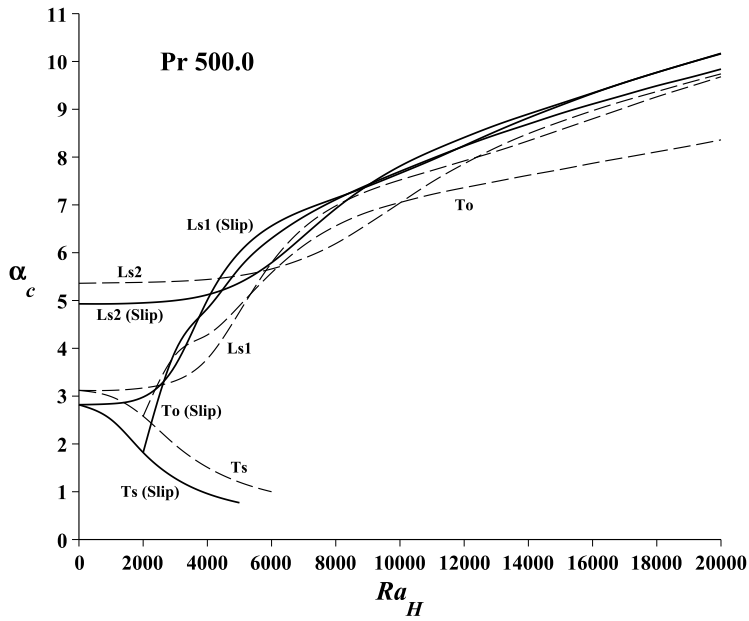


Figura 5-21: Gráficas de α_c vs Ra_H para $Pr = 500$.

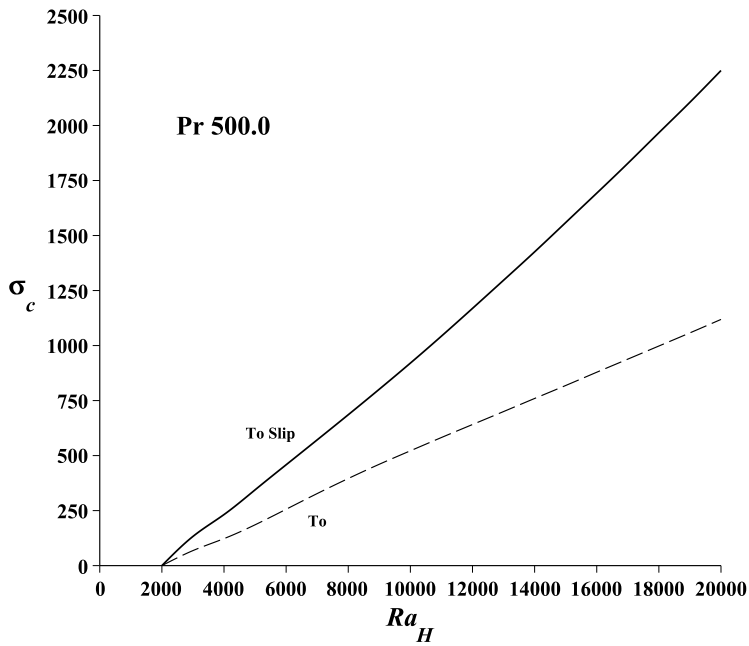


Figura 5-22: Gráficas de σ_c vs Ra_H para $Pr = 500$.

Cuando el fluido se somete a la condición de deslizamiento en las paredes ($Kn = 0.1$), la estabilidad del modo LS_1 se ve afectada; lo cual genera un nuevo valor crítico para el Ra_{VC} de 1186.070 en un $Ra_H = 0$ para esta condición. Considerando el efecto de deslizamiento para los modos de inestabilidad mostrados en la Figura (5-20), el más inestable es el modo LS_1 dentro de un rango de $0 \leq Ra_H \leq 3873.73$. A partir de un $Ra_H = 3873.73$, la curva del modo LS_1 se cruza con la curva del modo T_O , provocando el primer punto de codimensión. El primer punto de coexistencia entre los modos LS_1 y T_O , se encuentra cuando el $Ra_H = 3873.73$ en $(3873.73, 15165.426, 4.84, 0)$ para el modo LS_1 y en $(3873.73, 15165.415, 4.71, 218.36)$ para el modo T_O . Por lo tanto, el modo T_O es el modo más inestable en el rango $3873.73 \leq Ra_H \leq 4145.8$. Sin embargo, a diferencia del caso anterior ($Pr = 10$) con deslizamiento, ahora el modo T_O permanece como el más inestable para un pequeño rango del Ra_H . Después del $Ra_H = 4145.8$, la curva del modo T_O se cruza con la curva del modo LS_2 y se genera un segundo punto de codimensión. Éste segundo punto de coexistencia entre los modos T_O y LS_2 , ocurre cuando el $Ra_H = 4145.8$ en $(4145.8, 15969.528, 4.97, 248.117)$ para el modo T_O y en $(4145.8, 15969.571, 5.15, 0)$ para el modo LS_2 . En la Figura (5-23) se muestra con mayor detalle la zona para los primeros dos puntos de coexistencia entre los modos $LS_1 - T_O$ y $T_O - LS_2$ bajo el efecto de deslizamiento, respectivamente.

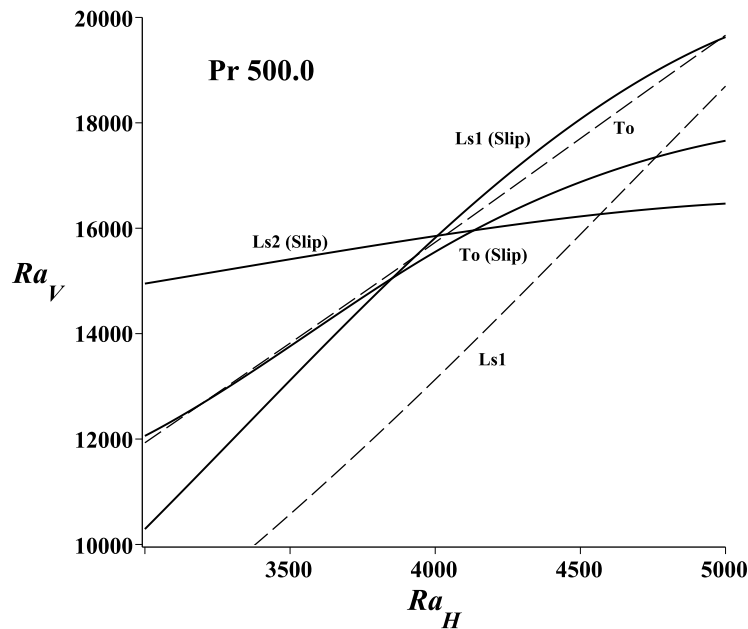


Figura 5-23: Detalle de las gráficas del Ra_{VC} positivo vs Ra_H para $Pr = 500$. En esta figura se presenta un aumento de la región entre $3000 \leq Ra_H \leq 5000$, donde aparecen los primeros dos puntos de coexistencia entre los modos $LS_1 - T_O$ y $T_O - LS_2$ bajo el efecto de deslizamiento.

A partir del segundo punto de coexistencia, el modo Ls_2 permanece como el más inestable hasta un $Ra_H = 7768$, donde el modo To aparece nuevamente; debido a que la curva del modo Ls_2 se cruza con la curva del modo To y se crea un tercer punto de codimensión. El tercer punto de coexistencia entre los modos Ls_2 y To , se encuentra cuando el $Ra_H = 7768$ en $(7768, 11513.005, 6.79, 0)$ para el modo Ls_2 y en $(7768, 11513.003, 7.03, 658.825)$ para el modo To . Finalmente, el modo To alcanza un $Ra_{VC} = 0$ cuando el $Ra_H = 9234.2$, para un α_C de 7.48 y un σ_C de 828.41. El segundo rango donde el modo To es el más inestable es $7768 \leq Ra_H \leq 9234.2$ para la zona del Ra_{VC} positivo. De la misma manera que el caso anterior ($Pr = 10$), para $Pr = 500$ el efecto de deslizamiento crea cambios notables cuando el fluido se calienta desde arriba (caso del Ra_{VC} negativo), como se muestra en la Figura (5-24).

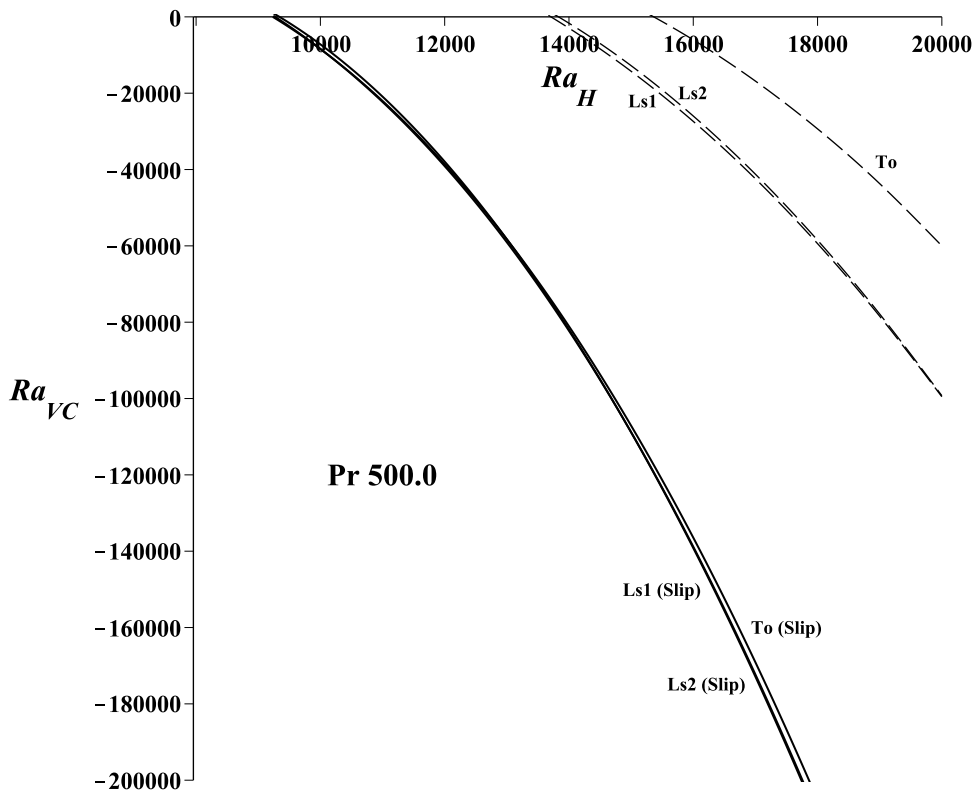


Figura 5-24: Gráficas del Ra_{VC} negativo vs Ra_H para $Pr = 500$. En esta figura se observan los diferentes modos de inestabilidad presentes para este Pr . Los modos para la condición sin deslizamiento se incluyeron como referencia para observar el cambio en el diagrama de estabilidad.

De la Figura (5-24) se parecía que los modos T_O , LS_1 y LS_2 bajo el efecto del deslizamiento, alcanzan un valor de 0 para el Ra_{VC} antes que sus respectivas curvas sin deslizamiento. Después de que el T_O entra en la región negativa de Ra_{VC} , es seguido por el modo LS_1 y casi inmediatamente, el modo LS_2 (como se puede ver en las figuras (5-20) y (5-24)). Las curvas de estos tres modos bajo el efecto del deslizamiento muestran una tendencia a converger alrededor de un valor de $Ra_H \approx 13000$, para el cual muestran un valor del $Ra_{VC} \approx -60000$, donde nuevamente aparece un punto de codimensión. Desde este punto, las curvas de los modos LS_1 y LS_2 se acercan entre sí y presentan los valores críticos más bajos del Ra_{VC} con respecto al modo T_O . Posteriormente, las curvas de los modos LS_1 y LS_2 se acercan y convergen en un $Ra_H \approx 14700$, para el cual corresponde un valor del $Ra_{VC} \approx -100000$, donde el modo LS_2 se convierte en la inestabilidad más crítica en la región del Ra_{VC} negativo.

Como se especificó anteriormente en la Fig.(5-20) para la zona de estabilidad positiva y a la Fig.(5-24) para la zona de estabilidad negativa para cada condición del deslizamiento (con y sin, $Kn = 0.1$ y $Kn = 0$, respectivamente), las zonas de estabilidad quedaron establecidas por los diferentes modos de inestabilidad que al intersectar unos con otros, dieron origen a la zona de estabilidad definida por los modos inestables más críticos para este Pr . De tal forma que las zonas estables para un Ra_{VC} positivo, quedaron definidas por los modos: LS_1 ($0 \leq Ra_H \leq 5563.6$), T_O ($5563.6 \leq Ra_H \leq 5793.9$), LS_2 ($5793.9 \leq Ra_H \leq 12120$) y LS_1 ($12120 \leq Ra_H \leq 13709.73$) para el caso sin deslizamiento; y por los modos: LS_1 ($0 \leq Ra_H \leq 3873.73$), T_O ($3873.73 \leq Ra_H \leq 4145.8$), LS_2 ($4145.8 \leq Ra_H \leq 7768$) y T_O ($7768 \leq Ra_H \leq 9234.2$) para el caso con deslizamiento. Por lo tanto, en la Figura (5-25), se muestran las zonas de estabilidad para el $Pr = 500$ para el caso del Ra_V positivo y ambas condiciones de deslizamiento.

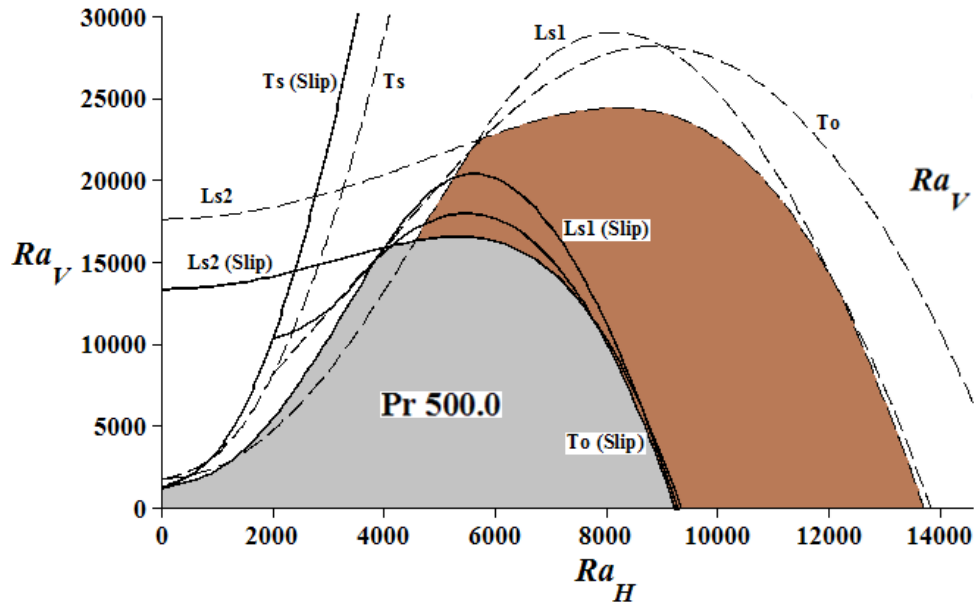


Figura 5-25: Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} positivo para $Pr = 500$. Los modos: Ls_1 , To , Ls_2 y Ls_1 definen la zona de estabilidad al ser los más críticos para el caso sin deslizamiento ($Kn = 0$), dicha zona se identifica en color café; y los modos: Ls_1 , To , Ls_2 y To definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$), la cual se identifica en color gris.

Mientras que las zonas estables para un Ra_{VC} negativo, quedaron definidas por los modos: Ls_1 y Ls_2 para el caso sin deslizamiento; y por los modos: To , Ls_1 y Ls_2 para el caso con deslizamiento (ver Figura (5-26)).

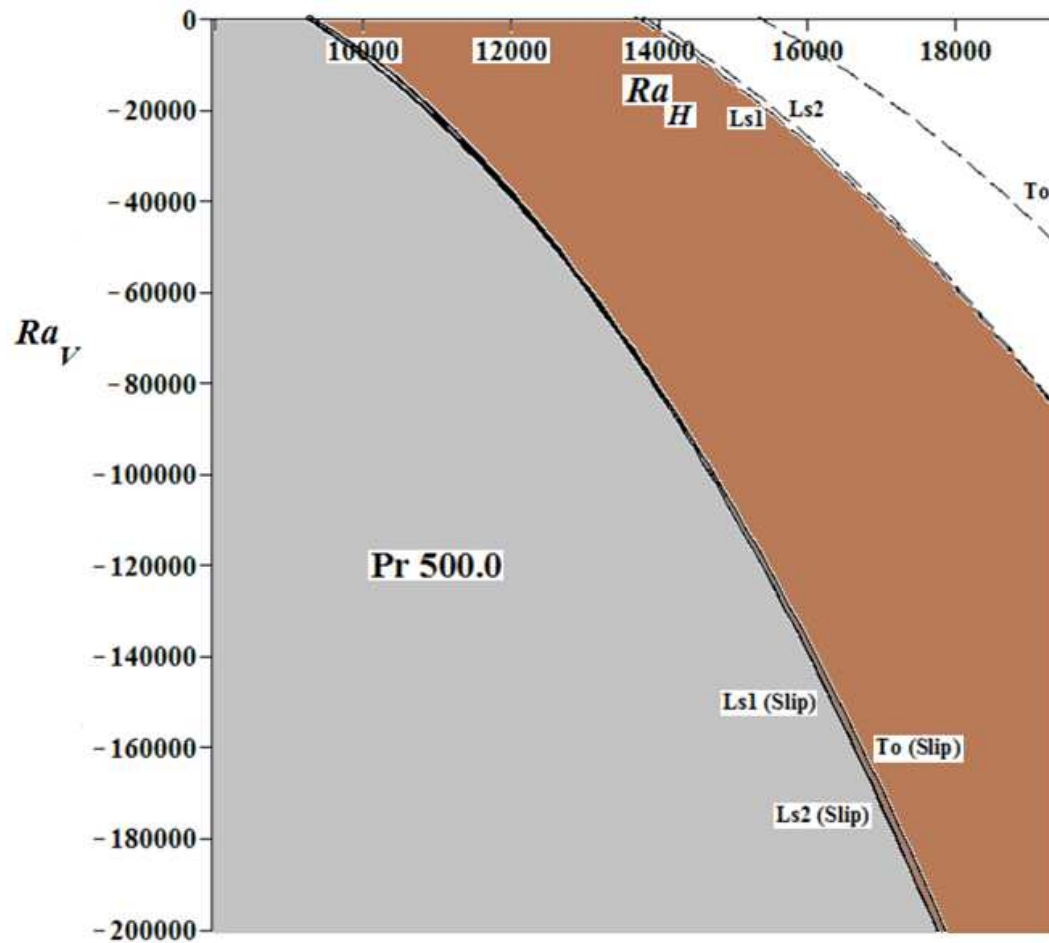


Figura 5-26: Zonas de estabilidad para los casos del Ra_{VC} negativo para $Pr = 500$. El modo Ls_1 y después el Ls_2 al ser los más críticos, establecen la zona de estabilidad para el caso sin deslizamiento, dicha zona se identifica en color café; y los modos: T_O , Ls_1 y Ls_2 definen la zona de estabilidad para el caso con deslizamiento, la cual se identifica en color gris.

Una vez mostrados y descritos los resultados numéricos obtenidos, se procederá a la discusión de los mismos tomando como referencia los perfiles de velocidad y temperatura para cada Pr , lo cual se presenta con mayor detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Discusión de los resultados

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados numéricos, los cuales se analizan por medio de los perfiles de velocidad y temperatura obtenidos mediante las expresiones determinadas en la sección de perfiles de velocidad y temperatura con y sin deslizamiento del Capítulo 2 (Ecs. (3-20) y (3-25)). El análisis se lleva a cabo para distintos puntos críticos del diagrama de estabilidad, con base a tres valores del Ra_H y sus respectivos valores del Ra_{VC} para los diferentes casos del Pr presentados ($Pr = 0.1, 0.71, 10$ y 500). Por otra parte, también se incluye una pequeña sección para la validación de los resultados numéricos obtenidos en este trabajo en comparación con otros resultados de modelos previamente reportados en la literatura, así como también con respecto al caso de trabajos experimentales previos.

6.1. Validación con otros modelos y experimentos

Los resultados del análisis numérico confirman los resultados reportados para el caso de convección horizontal, es decir para el caso cuando el $Ra_V = 0$ [86], así como también para el caso clásico de convección de Rayleigh con deslizamiento [82, 87] y, el caso de gradiente de temperatura inclinado con la condición de frontera de no-deslizamiento ($Kn = 0$) [16–18]. Cuando $Kn \rightarrow \infty$ y el $Ra_H = 0$, las condiciones de frontera dadas por las Ecs. ((3-16) y (3-42)) se reducen al caso de superficie libre y los cálculos numéricos dan como resultado la solución clásica para el caso de flujo libre en la superficie superior [69]: $Ra_{VC} = 657.7$ y $\alpha_C = 2.221$. Cuando $Kn \rightarrow 0$ y $Ra_H \rightarrow 0$, se obtiene el resultado bien conocido del problema de Rayleigh-Benard: $Ra_{VC} = 1708$, a partir del cual los resultados experimentales concuerdan muy bien [69].

Sin embargo, la condición de flujo básico se puede desestabilizar mediante calentamiento lateral y un $Ra_{VC} \rightarrow 0$ para un número de Rayleigh horizontal crítico Ra_{HC} dado. Para los metales líquidos, la primera inestabilidad se manifiesta a través del modo transversal estacionario Ts . Para lo cual, en el experimento de Hurlle et. al. [88]

el valor alcanza un $Ra_{HC} \approx 300$ para el caso de galio líquido ($Pr = 0.026$) dentro de una cavidad de 3 cm de largo, 1 cm de ancho y una profundidad de 0.6 cm; por lo tanto, nuestros cálculos dan como resultado un $Ra_{HC} \approx 218$. Cabe señalar que la diferencia entre el trabajo experimental en [88] y el resultado obtenido numéricamente mediante el modelo utilizado para este trabajo, puede deberse al efecto ocasionado por la presencia de las paredes laterales. Debido a que el modelo utilizado para los resultados numéricos aquí presentados, asume el flujo en una capa de fluido de extensión infinita, es decir, sin el efecto de las paredes laterales; como es el caso de la cavidad de dimensiones finitas utilizadas en el experimento de Hurle et. al. [88].

6.2. Perfiles de velocidad

Con la finalidad de comparar y comprender el efecto de deslizamiento sobre el comportamiento de la inestabilidad del flujo, en esta sección se presentan los perfiles de velocidad para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H . Como se ha venido mencionando anteriormente, es importante resaltar que la zona de principal interés en este trabajo se encuentra en la región media de la capa del fluido muy lejos de las paredes laterales. Por lo tanto, la solución para el perfil de velocidad del flujo con estas características depende del Ra_H , la variable z y el deslizamiento Kn como lo describe la Ec. (3-20). Por medio de la Ec. (3-20) se generaron los perfiles de velocidad, considerando ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) para valores del Ra_H de 1500, 3000 y 4500 para un $Pr = 0.71$, los cuales se muestran en la Figura (6-1).

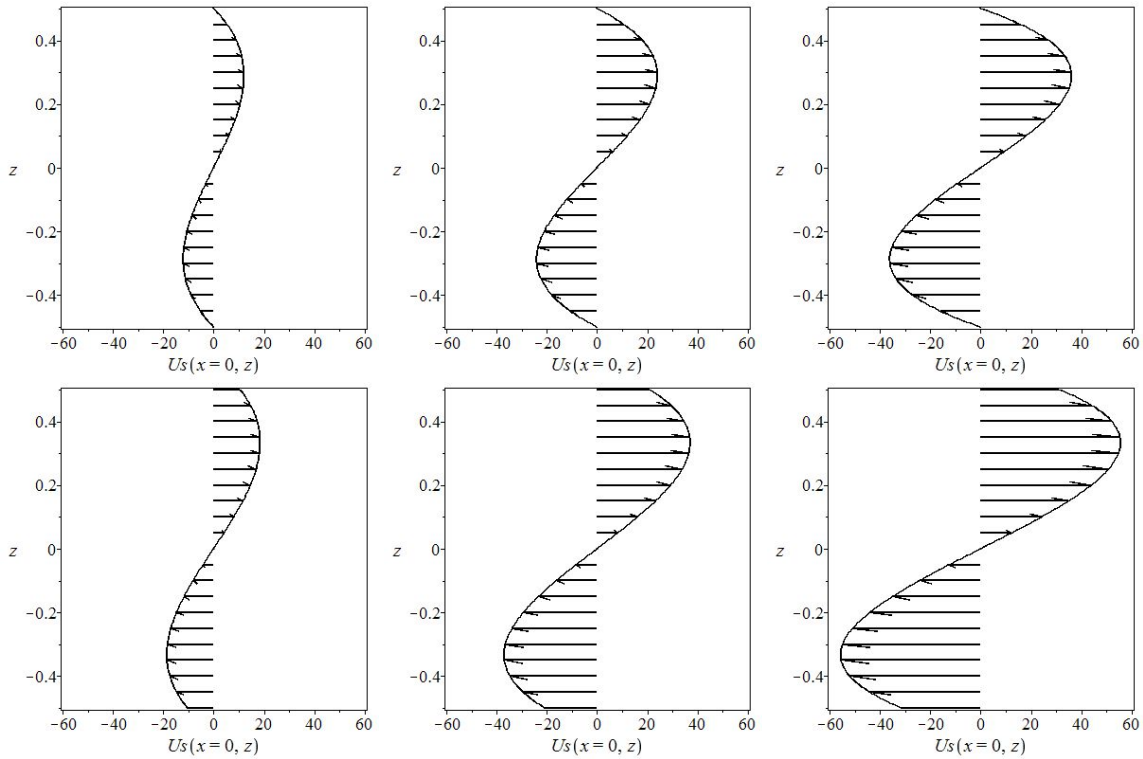


Figura 6-1: Comparación de los perfiles de velocidad $U_s(z)$ vs z para un $Pr = 0.71$ para valores del Ra_H de 1500, 3000 y 4500. En las figuras de la primera fila se muestran los casos para la condición de no-deslizamiento ($Kn = 0$) y en las figuras de la segunda fila se muestran los casos para la condición con deslizamiento ($Kn = 0.1$).

Con base en la Fig. (6-1), para el caso del $Pr = 0.71$ sin deslizamiento y un valor del Ra_H de 1500, el valor de velocidad máxima adimensional es de aproximadamente 12, y para el caso con deslizamiento para el mismo valor del Ra_H , la velocidad máxima aumentó a 18. Un comportamiento similar sigue ocurriendo a medida que aumenta el valor del Ra_H , debido a que para un $Ra_H = 3000$, el valor de la velocidad máxima adimensional para el caso sin deslizamiento aumenta de 24 a 35 para el caso con deslizamiento. De la misma manera, para un $Ra_H = 4500$, el valor de la velocidad máxima adimensional para el caso sin deslizamiento aumenta de 37 a 56 para el caso con deslizamiento.

De igual manera, por medio de la Ec. (3-20) se obtuvieron los perfiles de velocidad para los casos de $Pr = 10$ y $Pr = 500$ considerando ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) para valores del Ra_H de 3000, 5000 y 8000, los cuales se muestran en la Figura (6-2), respectivamente.

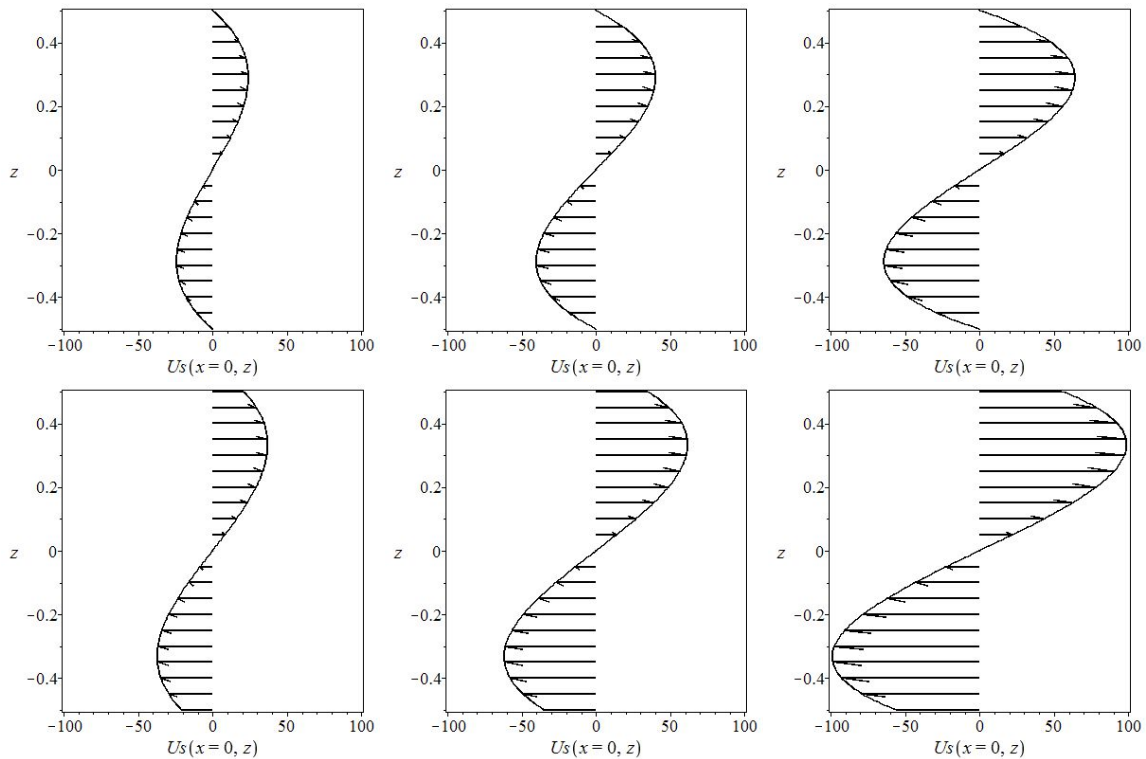


Figura 6-2: Comparación de los perfiles de velocidad $U_s(z)$ vs z para $Pr = 10$ y $Pr = 500$ para valores del Ra_H de 3000, 5000 y 8000. En las figuras de la primera fila se muestran los casos para la condición de no-deslizamiento ($Kn = 0$) y en las figuras de la segunda fila se muestran los casos para la condición con deslizamiento ($Kn = 0.1$).

De acuerdo con la Fig. (6-2), para los casos del $Pr = 10$ y 500 sin deslizamiento y un valor del Ra_H de 3000, el valor de la velocidad máxima adimensional es aproximadamente 25, y para el caso con deslizamiento para el mismo valor del Ra_H , la velocidad máxima aumenta por encima de 35. Un comportamiento similar se sigue presentando a medida que aumenta el valor del Ra_H , debido a que para un $Ra_H = 5000$, el valor de la velocidad máxima adimensional para el caso sin deslizamiento aumenta de 40 a más de 60 para el caso con deslizamiento. De la misma manera, para un $Ra_H = 8000$, el valor de la velocidad máxima adimensional para el caso sin deslizamiento aumenta de más de 60 a 100 para el caso con deslizamiento.

Es importante mencionar que el efecto del deslizamiento en las paredes horizontales reduce el esfuerzo cortante entre las partículas de fluido y la pared, lo cual provoca una reducción en la disipación viscosa. Como resultado, las fuerzas viscosas son menos capaces de equilibrar las fuerzas de flotación, y por lo tanto, la convección se

dispara más fácilmente. Además, la convección lateral promueve la aparición del modo hidrodinámico T_5 para aquellos fluidos que poseen un número de Pr bajo. El modo T_5 aparece en forma de vórtices estacionarios cuyo origen se debe a la interacción entre los dos flujos opuestos en el punto de inflexión ($z = 0$) del perfil de velocidad al centro de la capa de fluido (ver Figs. (5-11) y (6-1) para el caso de $Pr = 0.71$), que al considerar el deslizamiento en las paredes de la cavidad, esta interacción se vuelve más intensa.

6.3. Perfiles de temperatura

En esta sección se presentan los perfiles de temperatura obtenidos por medio de la Ec. (3-25) para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H , con la finalidad de comparar y comprender el efecto de deslizamiento sobre el comportamiento de la inestabilidad del flujo. De igual manera que en la sección anterior, la zona de principal interés es la región media de la capa del fluido muy lejos de las paredes laterales.

Los resultados para las regiones estables e inestables debido al perfil de temperatura principal para el $Pr = 0.1$ no se presentan en esta sección, debido a que el modo T_5 es muy inestable (ver Fig. (5-2)) y, por lo tanto, no hay una región estable para este caso. Los otros tres casos del Prandtl ($Pr = 0.71, 10$ y 500) si se presentan mas adelante. Según lo establecido por la Ec. (3-25), la parte dependiente de z del perfil de temperatura tiene cinco raíces debido a que es una ecuación de quinto orden. Por lo que una de las cinco raíces está en $z = 0$, lo cual representa un punto de inflexión cuando el perfil de temperatura cruza este punto. Este punto físicamente se puede describir como el punto de retorno en el cual el fluido cambia su dirección de flujo (véanse las Figs. (3-4), (6-1) y (6-2)). Mientras que para las cuatro raíces restantes, dos de ellas están fuera del rango de flujo delimitado por z , y las otras dos se pueden calcular aplicando la expresión: $z^2 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, de la cual se pueden obtener las raíces siempre y cuando el $Ra_H^2 \geq (24 Ra_V) / [1/4((1/6 + Kn)/(1 + 2Kn) - 1/20)]$. De no cumplirse esta condición, no es posible determinar las raíces y por lo tanto, no existe un punto de inflexión en el perfil de temperatura. De tal forma que la temperatura disminuye monótonamente con z ; que es el caso del perfil de temperatura para $Pr = 0.1$, donde la curva de inestabilidad más crítica corresponde al modo T_5 para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin), que se muestra en la Figura (6-3). Es importante resaltar este resultado debido a que solo una celda de convección se puede formar dentro de las paredes de la cavidad, como lo mencionan Ortiz-Pérez y Dávalos-Orozco (para más detalles, ver [16]). Además, Gershuni et al. [89] obtuvieron resultados similares para un fluido con número de Prandtl pequeño ($Pr = 0.1$), donde el modo hidrodinámico plano (modo T_5 según la terminología del presente trabajo) resultó ser el más inestable y mostró un perfil de temperatura que disminuye monótonamente con z . La aparición del modo T_5 se debe a que la generación de perturbaciones está relacionada con la formación

de vórtices estacionarios en la frontera de los flujos opuestos, es decir, en el punto de inflexión (en $z = 0$) del flujo básico. Como el fluido tiene una baja viscosidad y el efecto del deslizamiento genera una menor fricción con las paredes, el fluido no puede contener la configuración estratificada inestable; y si a esto se agrega la presencia del vórtice generado en el punto de inflexión, entonces se promueve la aparición de la inestabilidad esperada al aumentar el gradiente de temperatura horizontal (Ra_H) y el deslizamiento en las paredes.

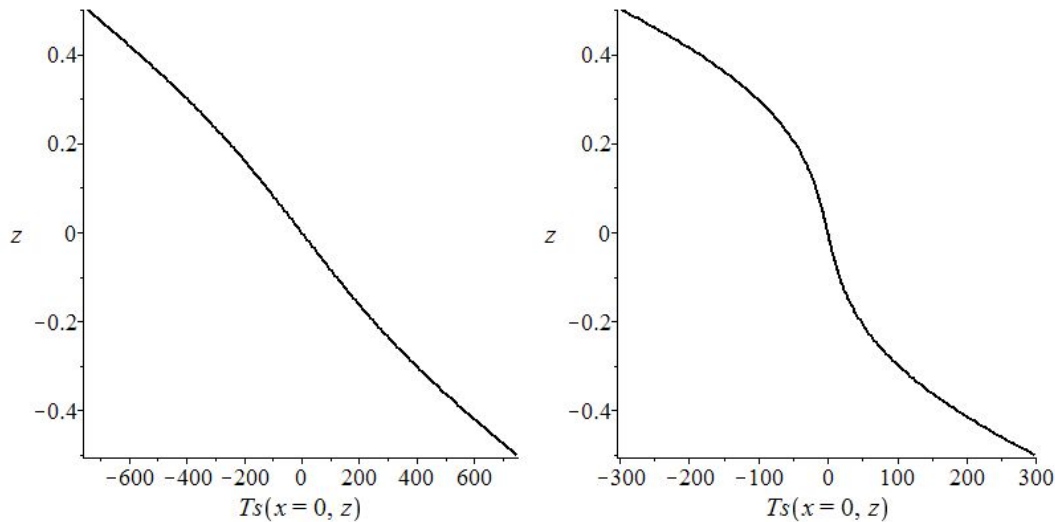


Figura 6-3: Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ vs z para $Pr = 0.1$. En las figuras se muestran los perfiles de temperatura para el modo T_S para un valor del $Ra_H = 500$ para la condición sin deslizamiento ($Kn = 0$) y con deslizamiento ($Kn = 0.1$), respectivamente.

En la Figura (6-3), los valores críticos para el caso sin deslizamiento y el caso con deslizamiento se describen de la siguiente manera: (Ra_H , Ra_{VC} , α_C , σ_C). El perfil de temperatura adimensional en la región media de la capa de fluido para el caso sin deslizamiento se produce para un valor del Ra_H de 500 en $(500, 1491.38, 2.93, 0)$ y en $(500, 596.065, 2.20, 0)$ para el caso con deslizamiento y un valor del $Pr = 0.1$.

Como sugieren las Figs. (6-5), (6-7) y (6-9), el perfil de temperatura principal tiene dos zonas potencialmente inestables, las cuales están determinadas por la condición mencionada anteriormente para las dos raíces de la parte dependiente z del perfil de temperatura que están dentro del rango de flujo de z . Lo anterior se presenta para los casos de $Pr = 0.71, 10$ y 500 , donde fue posible realizar los cálculos de las raíces, de tal forma que se determinó la zona estable desarrollada en el medio de la capa de fluido. Debido a la importancia de ubicar los puntos analizados

para los perfiles de velocidad y temperatura e identificar el modo de inestabilidad presente para cada punto, en la Figura (6-4), se muestran estos puntos para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H para el caso del $Pr = 0.71$.

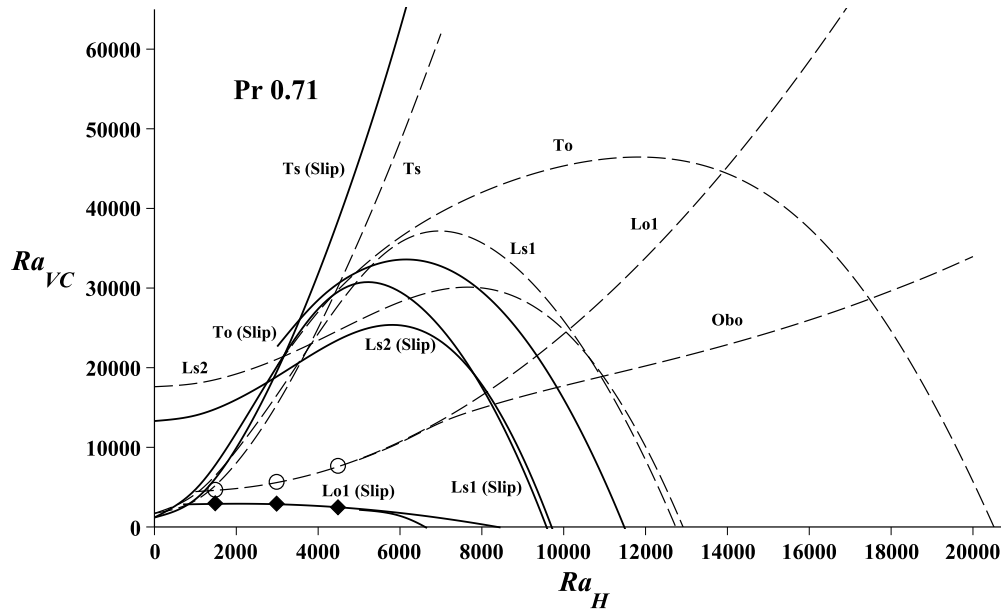


Figura 6-4: Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 0.71$.

Los valores críticos para los puntos presentados en la Figura (6-4) se describen de la siguiente manera: (Ra_H , Ra_{VC} , α_C , σ_C). Las curvas de criticidad más inestables presentadas para el caso del $Pr = 0.71$ son: para un $Ra_H = 1500$, el más inestable es el modo Lo_1 para ambas condiciones de deslizamiento en (1500, 4591.296, 2.71, 15.171) para el caso sin deslizamiento, y en (1500, 2897.656, 2.27, 22.347) para el caso con deslizamiento; para un $Ra_H = 3000$, el más inestable es el modo Lo_1 para ambas condiciones de deslizamiento en (3000, 5587.374, 2.44, 34.535) para el caso sin deslizamiento, y en (3000, 2851.030, 1.88, 42.255) para el caso con deslizamiento. Finalmente, para un $Ra_H = 4500$, los más inestables son el modo Lo_1 en (4500, 7597.108, 2.14, 48.526) para el caso sin deslizamiento, y el modo Obo en (4500, 2391.535, 1.58, 56.61) cuando $\phi_C = 89^\circ$ para el caso con deslizamiento. En los puntos correspondientes al caso con deslizamiento que se muestran en la Fig. (6-4), el efecto de la zona estable en la región media de la capa de fluido, da como resultado un par de ondas que viajan perpendicularmente con respecto al flujo básico y forman principalmente celdas convectivas o rollos longitudinales oscilatorios (ver los patrones de flujo en la Fig. (6-5)).

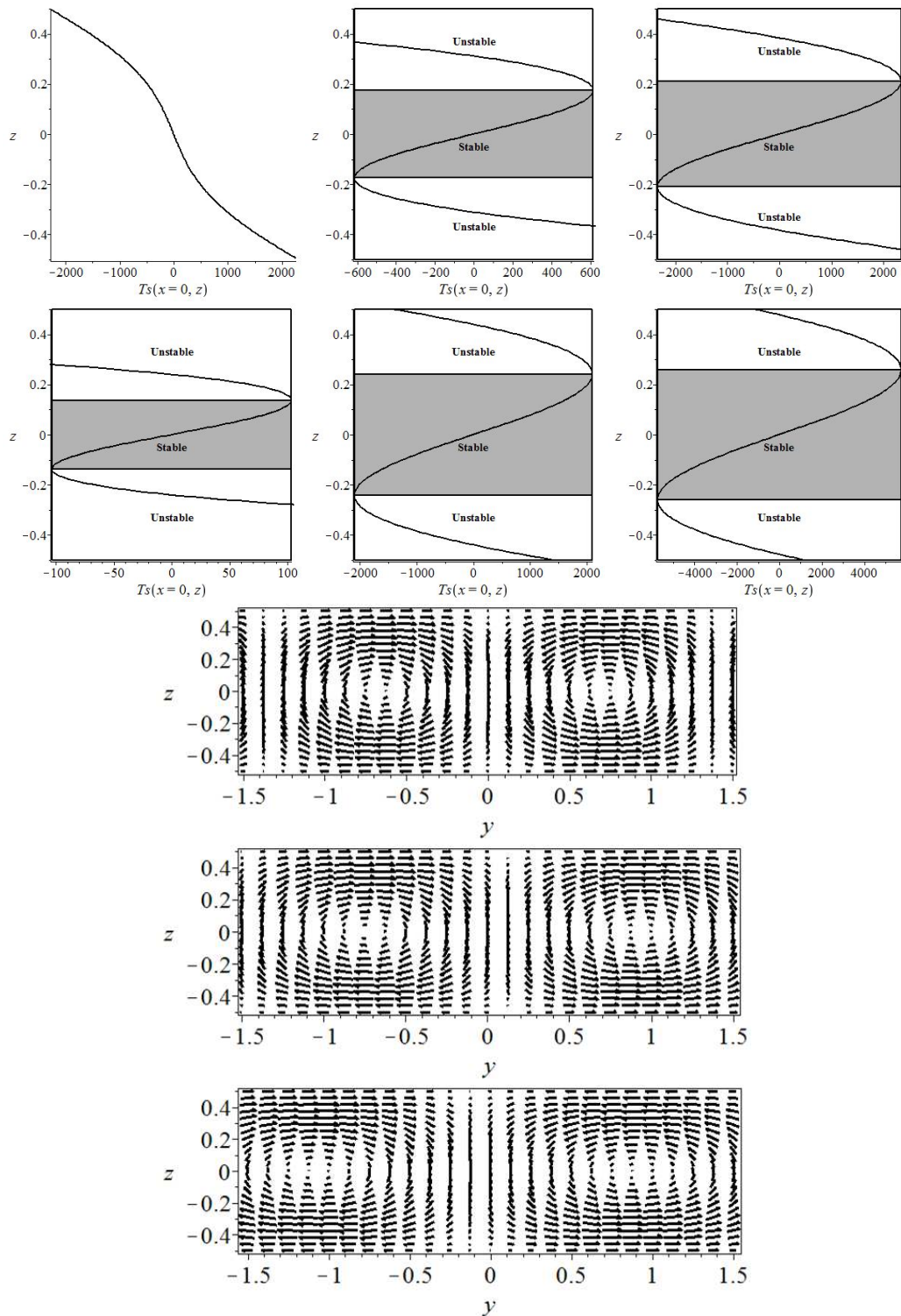


Figura 6-5: Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 0.71$ de los puntos críticos presentados en la Fig. (6-4) para valores del Ra_H de 1500, 3000 y 4500. En las figuras de la primera fila se muestran los casos para la condición de no-deslizamiento ($Kn = 0$) y en las figuras de la segunda fila se muestran los casos para la condición con deslizamiento ($Kn = 0.1$). Las últimas figuras muestran las líneas de corriente para los mismos valores del Ra_H para el caso con deslizamiento, las cuales corresponden a los modos Lo_1 , Lo_1 y Ob_0 respectivamente.

Con base en la Fig. (6-5) a un valor del Ra_H de 1500 para el caso de sin deslizamiento, se observa que la condición mencionada anteriormente para la existencia de una región estable en el medio de la capa de fluido no se cumple; por lo tanto, la temperatura disminuye monótonicamente con z (como se encontró en los resultados para el caso $Pr = 0.1$). Para los otros valores del Ra_H , la condición se cumple y se produce la aparición de dos regiones inestables en las superficies superior e inferior de la cavidad, las cuales están separadas por una zona estable en el medio. Como lo sugieren los resultados presentados en la Fig. (6-5), el perfil de temperatura adimensional en la región media de la capa de fluido se vuelve más estable a medida que aumenta el Ra_H ; debido a que la zona estable estratificada dentro del espesor de la capa de fluido aumenta con el Ra_H .

En la Figura (6-6), se muestran los puntos analizados para los perfiles de velocidad y temperatura para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H para el caso del $Pr = 10$.

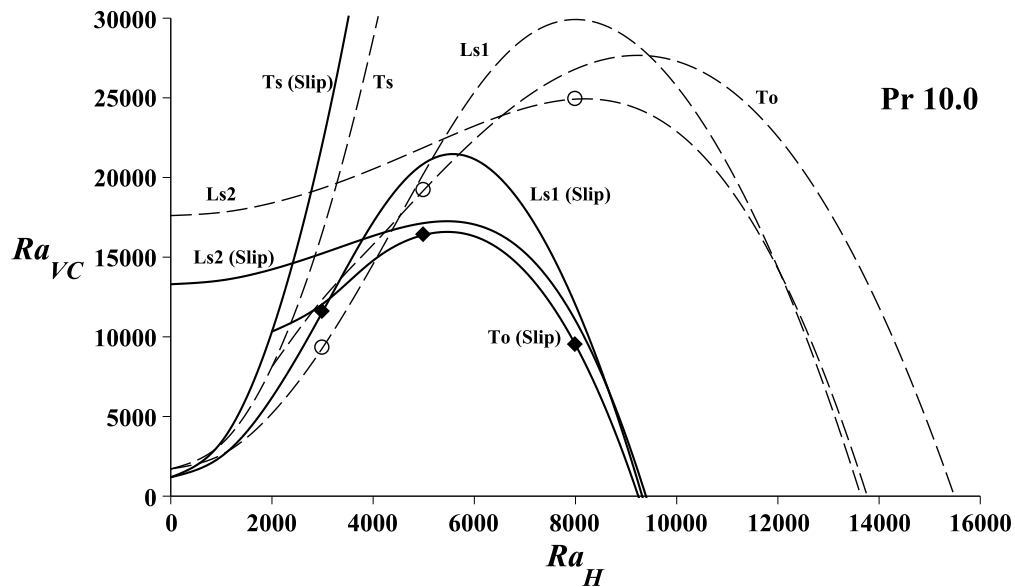


Figura 6-6: Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 10$.

Nuevamente, los valores críticos para los puntos presentados en la Figura (6-6) se describen como el caso anterior: $(Ra_H, Ra_{VC}, \alpha_C, \sigma_C)$. Las curvas de criticidad más inestables presentadas para el caso de $Pr = 10$ son: para un $Ra_H = 3000$, el más inestable es el modo Ls_1 para ambas condiciones de deslizamiento en $(3000, 9311.618, 4.07, 0)$ para el caso sin deslizamiento, y en $(3000, 11574.088, 4.68, 0)$ para el caso con deslizamiento. Para un $Ra_H = 5000$, el más inestable es el modo T_O para ambas condiciones de deslizamiento en $(5000, 19202.311, 4.77,$

173.006) para el caso sin deslizamiento, y en (5000, 16397.129, 5.44, 321.552) para el caso con deslizamiento. Finalmente, para un $Ra_H = 8000$, los más inestables son el modo LS_2 en (8000, 24920.669, 6.30, 0) para el caso sin deslizamiento y el modo TO en (8000, 9500.301, 7.24, 686.677) para el caso con deslizamiento.

En la Figura (6-7), se muestran los perfiles de temperatura para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H para el caso del $Pr = 10$.

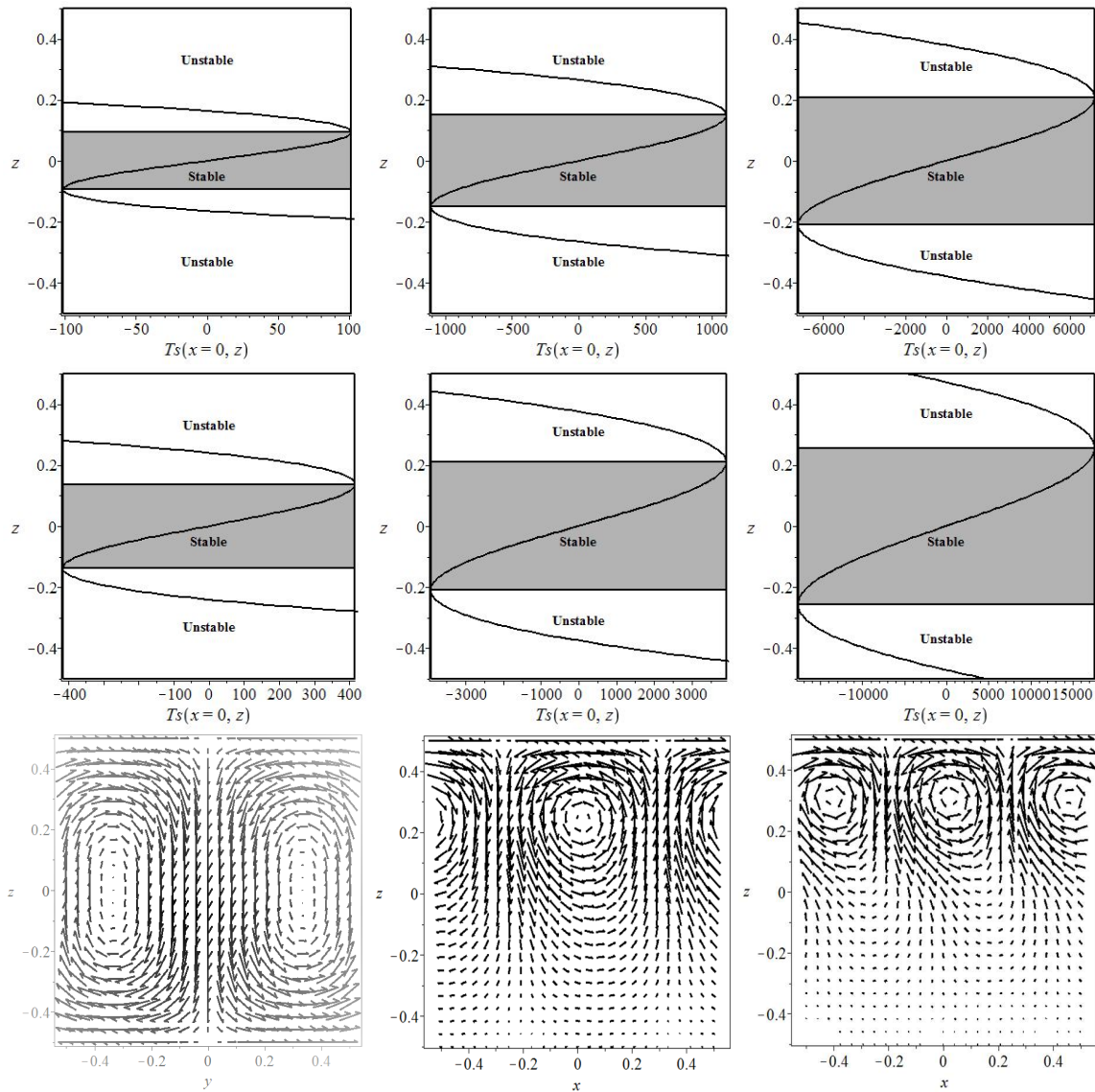


Figura 6-7: Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 10$ de los puntos críticos presentados en la Fig. (6-6) para valores del Ra_H de 3000, 5000 y 8000. En las figuras de la primera fila se muestran los casos para la condición de no-deslizamiento ($Kn = 0$) y en las figuras de la segunda fila se muestran los casos para la condición con deslizamiento ($Kn = 0.1$). Las figuras de la tercera fila muestran las líneas de corriente para los mismos valores del Ra_H para el caso con deslizamiento, las cuales corresponden a los modos LS_1 , TO y TO , respectivamente.

Como sugieren los resultados presentados en la Fig. (6-7), el perfil de temperatura adimensional en la región media de la capa de fluido se vuelve más estable a medida que aumenta el Ra_H ; debido a que la zona estable estratificada dentro del espesor de la capa de fluido aumenta con el Ra_H . Cuando el fluido se somete a la condición de deslizamiento en las paredes ($Kn = 0.1$), se obtiene un comportamiento más estable para el perfil de temperatura. Lo anterior se explica como sigue: considerando el caso sin deslizamiento a un valor del Ra_H de 3000, la altura de la zona estable estratificada a lo largo de la dirección z dentro del grosor de la capa de fluido es de -0.1 a 0.1 ; y para el caso con deslizamiento para el mismo valor del Ra_H , la altura de la zona estable aumenta a casi -0.15 a 0.15 . Debido a la presencia de la pequeña zona estable, las zonas inestables promueven la convección en forma de celdas o rollos estacionarios, los cuales están alineados con respecto a la dirección del flujo básico (ver el primer patrón de flujo en la Fig. (6-7)). Un comportamiento similar se sigue presentando a medida que aumenta el valor del Ra_H , debido a que para un $Ra_H = 5000$, la altura de la zona estable a lo largo de la dirección z para el caso sin deslizamiento aumenta de $z = \pm 0.15$ a $z = \pm 0.22$ para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$). De la misma manera para un $Ra_H = 8000$, la altura de la zona estable a lo largo de la dirección z para el caso sin deslizamiento aumenta de $z = \pm 0.22$ a $z = \pm 0.26$ para el caso con deslizamiento ($Kn = 0.1$). Con un aumento adicional del Ra_H , una región estable más amplia promueve la aparición de perturbaciones en forma de celdas convectivas o rollos oscilatorios transversales (rollos alineados con el eje y) con dos ondas opuestas, viajando a lo largo del eje x ; es decir, una en el flujo superior que es más caliente y la otra en la parte inferior que es más fría; con una tendencia a formar una nueva celda convectiva en la parte inferior (ver el segundo y tercer patrón de flujo en la Fig. (6-7)).

En la Figura (6-8), se muestran los puntos analizados para los perfiles de velocidad y temperatura para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H para el caso del $Pr = 500$.

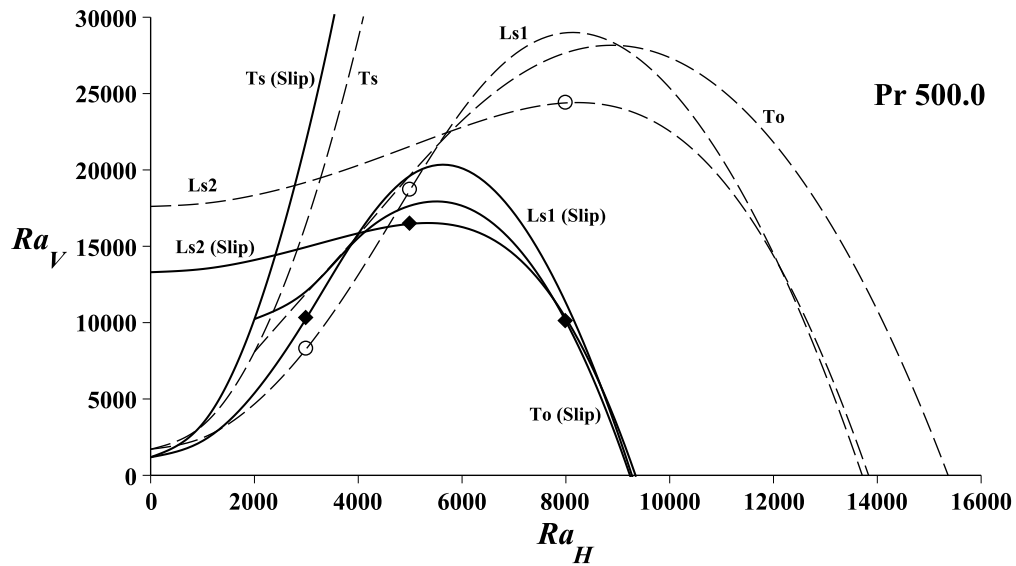


Figura 6-8: Puntos analizados del perfil de temperatura para $Pr = 500$.

Con base en la Figura (6-8), existen varias diferencias entre las curvas de criticidad más inestables presentadas en el caso anterior (ver Fig. (6-6) para el caso de $Pr = 10$). Mientras que para un $Ra_H = 3000$, el más inestable es el modo Ls_1 para ambas condiciones de deslizamiento en $(3000, 8284.854, 3.32, 0)$ para el caso sin deslizamiento, y en $(3000, 10291.950, 3.64, 0)$ para el caso con deslizamiento. Para un $Ra_H = 5000$, los más inestables son el modo Ls_1 en $(5000, 18695.962, 4.76, 0)$ para el caso sin deslizamiento, y el modo Ls_2 en $(5000, 16467.551, 5.37, 0)$ para el caso con deslizamiento. Finalmente, para un $Ra_H = 8000$, los más inestables son el modo Ls_2 en $(8000, 24390.560, 6.19, 0)$ para el caso sin deslizamiento, y el modo To en $(8000, 10088.714, 7.11, 685.623)$ para el caso con deslizamiento.

En la Figura (6-9), se muestran los perfiles de temperatura para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin) a diferentes valores del Ra_H para el caso del $Pr = 500$.

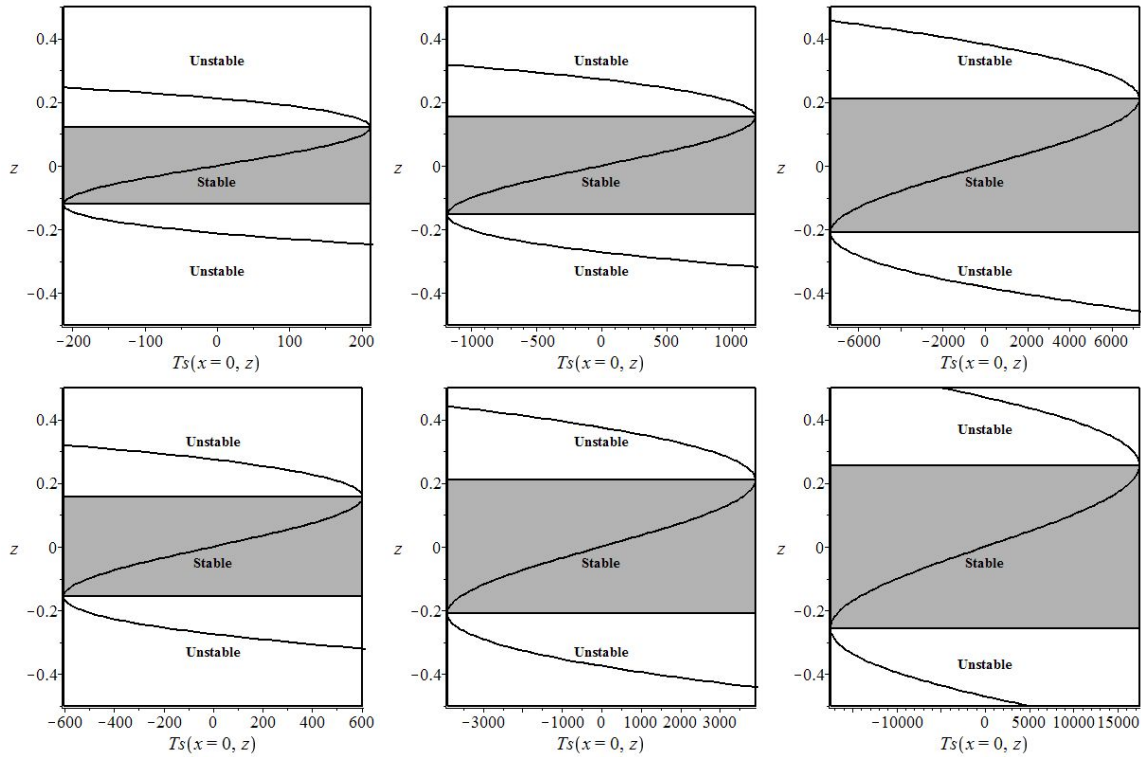


Figura 6-9: Comparación de los perfiles de temperatura $T_s(z)$ para $Pr = 500$ de los puntos críticos presentados en la Fig. (6-8) para valores del Ra_H de 3000, 5000 y 8000. En las figuras de la primera fila se muestran los casos para la condición de no-deslizamiento ($Kn = 0$) y en las figuras de la segunda fila se muestran los casos para la condición con deslizamiento ($Kn = 0.1$).

Como lo sugieren los resultados presentados en la Fig. (6-9), se observa un comportamiento similar con respecto al caso anteriormente discutido (ver Fig. (6-7) para el caso de $Pr = 10$), donde el perfil de temperatura adimensional en la región media de la capa de fluido se vuelve más estable para las siguientes condiciones: un aumento en la magnitud del Ra_H y la presencia del deslizamiento ($Kn = 0.1$) en el flujo. Para el caso sin deslizamiento y un valor del Ra_H de 3000, la altura de la zona estable a lo largo de la dirección z dentro del grosor de la capa de fluido es de $-0,12$ a $0,12$; y para el caso con deslizamiento para el mismo valor del Ra_H , la altura de la zona estable aumenta de $-0,15$ a $0,15$. Para un $Ra_H = 5000$, la altura de la zona estable a lo largo de la dirección z para el caso sin deslizamiento aumenta de $z = \pm 0,15$ a $z = \pm 0,22$ para el caso con deslizamiento ($Kn = 0,1$). Finalmente, para un $Ra_H = 8000$, la altura de la zona estable a lo largo de la dirección z para el caso sin deslizamiento aumenta de $z = \pm 0,22$ a $z = \pm 0,26$ para el caso con deslizamiento ($Kn = 0,1$). De los resultados presentados para los tres

Pr en las Figs. (6-5), (6-7) y (6-9), se observa el mismo comportamiento entre ellos; y también, a medida que aumenta el Ra_H , el gradiente de temperatura local en las dos regiones inestables aumenta para ambas condiciones de deslizamiento (con / sin). Ortiz-Pérez y Dávalos-Orozco [17] también observaron un comportamiento similar en su investigación realizada sobre el análisis del flujo convectivo impulsado por un gradiente de temperatura inclinado, sin embargo, sus resultados se refieren al caso sin deslizamiento.

Además, el perfil de temperatura principal se puede utilizar para comprender los cambios en la estructura de las celdas convectivas cuando se incrementa el Ra_H . Como se observó anteriormente, con el incremento del Ra_H la región estable en el medio de la capa de fluido aumenta (véanse las figuras (6-5), (6-7) y (6-9)); en consecuencia, la separación entre las regiones estratificadas inestables formadas cerca de cada una de las dos paredes horizontales (superficies superior e inferior) incrementa debido al aumento de la región estratificada estable, la cual se opone al origen de la convección en las regiones inestables y obliga a aumentar la diferencia de temperatura vertical para poder originar las condiciones de inestabilidad. Esta separación entre las regiones inestables es responsable de la aparición de los modos de inestabilidad LS_1 o LS_2 , como se menciona en [17, 89]; y también de las Figs. (6-6 y 6-8), se observa que para el caso sin deslizamiento, al pasar de un $Ra_H = 3000$ a un $Ra_H = 8000$ los modos de inestabilidad LS_1 o LS_2 para ambos números de Pr están presentes como los modos más inestables. Sin embargo, este comportamiento se ve afectado por la presencia del deslizamiento; dado que el más inestable al pasar de un $Ra_H = 3000$ a un $Ra_H = 8000$ es el modo TO , el cual está relacionado con la generación de ondas gravitacionales internas crecientes en la región estratificada estable más amplia, la cual es promovida por las regiones inestables más cercanas a las paredes. El efecto combinado de la presencia del deslizamiento y el aumento en la magnitud del Ra_H da como resultado un flujo más inestable, y por lo tanto, se observa un valor del Ra_{VC} más bajo para ambos números de Pr . Además, el número de Prandtl juega un papel crucial, ya que el modo de inestabilidad más crítico depende de él. Este comportamiento se observa como lo sugieren las Figuras (6-6) y (6-8) debido a que se observa un aumento local en la magnitud del Ra_{VC} para las primeras curvas de criticidad inestables al aumentar los valores del Ra_H ; y luego comienza a ser inestable, lo cual se aprecia cuando se pasa del $Pr = 10$ al $Pr = 500$.

En ese sentido, el deslizamiento tiene un efecto estabilizador menor en comparación con la condición de frontera de no-deslizamiento. El efecto desestabilizador del deslizamiento en el flujo para un número de $Pr = 0.1$ ocurre para todos los valores del Ra_H , y para el $Pr = 10$ a $Pr = 500$ proporciona cierta estabilización, pero en menor grado, como en los resultados observados por Ortiz-Pérez y Dávalos-Orozco [16, 17] para el caso sin deslizamiento. De los resultados obtenidos en este trabajo de investigación se muestra que para un Pr pequeño, el aumento en la magnitud del Ra_H desestabiliza el flujo inmediatamente (caso del $Pr = 0.1$); sin embargo, cuando se incrementa el número de Pr , se observa que el aumento en la magnitud del Ra_H primero estabiliza el flujo y luego lo desestabiliza (casos del $Pr = 0.71$, $Pr = 10$ y $Pr = 500$).

Capítulo 7

Conclusiones

Las conclusiones están basadas en el estudio que se llevó a cabo en este trabajo de tesis. A continuación se mencionan las más importantes:

Con base al análisis de convergencia (modo To y un $Pr = 10$) y considerando los errores porcentuales calculados en el Cuadro 4-1, los mayores porcentajes (Error Porcentual en el $Ra_{VC} \approx 18\%$) se encuentran en el rango de 9000 a 10000 para el número de Rayleigh horizontal Ra_H , el cual corresponde a la región donde la curva crítica cruza el eje horizontal en un valor de $Ra_{VC} = 0$; sin embargo, se tiene un valor muy similar en Ra_H al cual la curva cruza el eje horizontal, donde se tiene un error porcentual menor a 1% (ver Cuadro 4-2). Por lo tanto, la estabilidad y convergencia del algoritmo respaldan el planteamiento y la fiabilidad de los resultados numéricos presentados en este trabajo de investigación.

Para todos los casos del Pr analizados, la condición de deslizamiento en las paredes tiene un efecto desestabilizador en el flujo en comparación con el caso sin deslizamiento en las paredes, lo cual se aprecia en la reducción de áreas estables (ver Figs. (5-6), (5-11), (5-16) y (5-22) para $Pr = 0.1, 0.71, 10$ y 500 , respectivamente). El origen de las inestabilidades en el flujo se facilita al considerar el deslizamiento en las paredes, debido a que se reduce la fricción y, por lo tanto, la velocidad en el fluido aumenta. La desestabilización del flujo para fluidos con bajo número de Prandtl se puede explicar a través de la inestabilidad por esfuerzo cortante, la cual es promovida por el flujo básico y la configuración estratificada de las zonas inestables que se generan por el perfil de temperaturas. Esto se puede presentar cuando un fluido con baja viscosidad fluye sobre una superficie hidrofóbica, en la cual se tiene un ángulo de contacto grande, lo que provoca la reducción de los esfuerzos cortantes entre el fluido y la superficie debido al efecto de deslizamiento en las paredes. Bajo esta condición, el fluido de menor viscosidad, tiene una menor capacidad para absorber perturbaciones; y por lo tanto, el flujo se desestabiliza fácilmente en

comparación a fluidos con una viscosidad más alta. En el caso de fluidos con números de Prandtl moderados y altos, el flujo básico promueve la presencia de una región estable en la zona media de la capa de fluido, lo que da como resultado, un aumento en la estabilidad del flujo; y después de cierto calentamiento lateral (incremento del Ra_H), el sistema se vuelve inestable. Para fluidos con números de Prandtl altos, el deslizamiento provoca la aparición del modo T_O , dando como resultado, dos puntos de codimensión adicionales en comparación a los casos sin deslizamiento. Esto se debe al efecto combinado de la presencia del deslizamiento y el aumento en la magnitud del Ra_H , provocando un flujo menos estable con valores del Ra_{VC} y Ra_H más bajos.

Con base a las Figs. (5-10), (5-16) y (5-22) correspondientes a los fluidos con $Pr = 0.71, 10$ y 500 , se observa que el deslizamiento provoca un incremento notable en la frecuencia de oscilación de la perturbación (σ) si se compara con el caso sin deslizamiento para la inestabilidades más críticas de carácter oscilatorio (T_O, Lo_1 y Ob_O). Además, el deslizamiento provoca que las celdas convectivas de carácter oscilatorio que resultan ser las primeras inestables sean cada vez más pequeñas para los casos de fluidos con $Pr = 10$ y 500 (ver Figs. (5-15) y (5-21)); mientras que para un fluido con $Pr = 0.71$, las celdas convectivas tienden a mantener un tamaño constante a partir de la aparición del modo Ob_O (ver Fig. (5-9)). Por otra parte, la presencia del deslizamiento provoca la aparición de los modos oscilatorios en lugar de los estacionarios. Esto se puede observar en la Fig. (5-12), donde el modo longitudinal oscilatorio Lo_1 se anticipa a los modos Ls_1 y Ls_2 para el caso de un $Pr = 0.71$; y en las Fig. (5-18) y (5-25), donde el modo transversal oscilatorio T_O empezó a tomar un papel preponderante sobre los modos Ls_1 y Ls_2 para los casos de $Pr = 10$ y 500 , respectivamente. Así mismo, se encontró que para los fluidos con un $Pr = 0.71, 10$ y 500 , los modos longitudinales estacionarios par e impar (Ls_1 y Ls_2) aparecieron todavía como primera inestabilidad, en el caso de un Ra_{VC} negativo para cierto intervalo del Ra_H considerando el deslizamiento en las paredes. Donde para el fluido con $Pr = 0.71$, se manifiesta primero el modo Ob_O , para después originarse los modos Ls_1 y Ls_2 como los más inestables; y para el caso de fluidos con $Pr = 10$ y 500 , resulta aparecer primero el modo T_O y después le siguen los modos Ls_1 y Ls_2 como los más inestables.

El deslizamiento aparentemente debería de estabilizar el flujo debido a que su presencia amplifica la región estable del perfil básico de temperatura en la zona media de la capa del fluido (ver Figs (6-7) y (6-9)); sin embargo, esto no es garantía de que el flujo básico incremente su estabilidad (Ra_{VC}), sino que se vuelve más vulnerable al considerar esta condición de frontera en las paredes de la cavidad. En función de los resultados obtenidos para los casos de fluidos con $Pr = 0.71, 10$ y 500 , se concluye que las propiedades de la paredes juegan un papel importante al proporcionar cierta estabilidad donde se observó un incremento de los valores del Ra_{VC} ; sin embargo, el efecto estabilizador disminuye al momento de considerar el deslizamiento en las paredes, mientras

que para $Pr = 0.1$ desestabiliza completamente. Por lo tanto, la velocidad del fluido aumenta al reducirse la fricción entre las partículas del fluido y la superficie que lo delimita, y como resultado, se propicia aún más el origen de las inestabilidades, lo cual es muy evidente en el caso de $Pr = 0.1$.

Apéndice A

Apéndice

A.1. Adimensionalización de las ecuaciones de conservación

A.1.1. Ecuación de momento (Navier-Stokes)

Aplicando los parámetros adimensionales a la Ec. (3-2) y considerando que $\mathbf{u}' = U_c \cdot \mathbf{u}$, $t' = t_c \cdot t$ y que $p' = \Delta P \cdot p$, se tiene:

$$\frac{U_c^2}{d} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\frac{\kappa \nu \rho_0}{\rho_0 d^2 d} \nabla p + \frac{\nu U_c}{d^2} \nabla^2 \mathbf{u} + g \alpha_T (T' - T_0) \mathbf{k}$$

Sustituyendo para U_c en la expresión anterior resulta en:

$$\frac{k^2}{d^2 d} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\frac{\kappa \nu \rho_0}{\rho_0 d^2 d} \nabla p + \frac{\kappa \nu}{d^2 d} \nabla^2 \mathbf{u} + g \alpha_T (T' - T_0) \mathbf{k}$$

Asociando d y eliminando ρ_0 de la expresión anterior se tiene:

$$\frac{k^2}{d^3} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = -\frac{\kappa \nu}{d^3} \nabla p + \frac{\kappa \nu}{d^3} \nabla^2 \mathbf{u} + g \alpha_T \Delta T \mathbf{k}$$

Multiplicando por d^3 y dividiendo entre κ^2 la expresión anterior se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nu}{\kappa} \nabla p + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{g \alpha_T \Delta T \mathbf{k} d^3}{\kappa^2}$$

De la expresión anterior se obtiene el número de Prandtl ($Pr = \frac{\nu}{\kappa}$), por lo que se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -Pr \nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{g \alpha_T \Delta T \mathbf{k} d^3}{\kappa^2}$$

Se sabe que $\Delta T = T' - T_0 = T^*$, por lo que sustituyendo este término, separando κ^2 y multiplicando la expresión anterior por $\frac{\Delta T_V}{\Delta T_V}$ y $\frac{\nu}{\nu}$ se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -Pr \nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{g \alpha_T \Delta T_V d^3 T^* \mathbf{k} \nu}{\kappa \kappa \Delta T_V \nu}$$

De la expresión anterior se obtienen los números de Rayleigh vertical ($Ra_V = \frac{g \alpha_T \Delta T_V d^3}{\kappa \nu}$) y el número de Prandtl ($Pr = \frac{\nu}{\kappa}$), por lo que se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -Pr \nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Pr Ra_V T^* \mathbf{k}}{\Delta T_V}$$

Factorizando el número de Prandtl de la expresión anterior se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = Pr \left(-\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ra_V T^* \mathbf{k}}{\Delta T_V} \right)$$

Especificando que $T = \frac{Ra_V T^*}{\Delta T_V}$, se obtiene la ecuación de momento adimensional, la cual se define como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = Pr (-\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + T \mathbf{k})$$

o bien, reacomodando términos se tiene:

$$Pr^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + T \mathbf{k} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{A-1})$$

A.2. Estado Básico - Ecuación de Navier-Stokes.

Reacomodando algunos términos de la Ec. (3-2), la ecuación de Navier-Stokes considerando que las fuerzas de cuerpo son debidas al efecto de la gravedad (dirección vertical, eje z) se tiene:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' \right) = -\nabla' p' + \mu \nabla'^2 \mathbf{u}' + g \alpha_T T^* \mathbf{k}$$

Con el objetivo de separar el campo de presión y velocidad, se aplica a la ecuación anterior el rotacional; ya que se sabe que el rotacional del gradiente de una función es igual a cero ($\nabla \times \nabla \phi = 0$). Especificando que el caso de estudio es en condiciones de flujo estacionario ($\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} = 0$) y unidireccional en x ; donde $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'(z)$, por lo que el término $\mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = 0$ debido a que la componente de la velocidad en x es una función de z . Por lo tanto la ecuación de Navier-Stokes queda de la siguiente manera:

$$0 = \nabla' \times (-\nabla' p') + \mu \nabla'^2 \nabla' \times (\mathbf{u}') + g \alpha_T \nabla' \times (T^*) \mathbf{k} \implies 0 = \mu \nabla'^2 \nabla' \times (\mathbf{u}') + g \alpha_T \nabla' \times (T^*) \mathbf{k}$$

donde $\mathbf{u}' = \mathbf{U}'_s = (U'_s, V'_s, W'_s)$ debido a que se está resolviendo para el estado básico. De la expresión anterior se establece que $\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j}$, donde:

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si dos subíndices son iguales}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \quad \text{si el orden de giro es en contra al sentido de las manecillas del reloj}$$

$$\varepsilon_{ijk} = 1 \quad \text{si el orden de giro es en el sentido de las manecillas del reloj}$$

Determinando el rotacional para el subíndice $i = 1$ de ε se tiene:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \varepsilon_{1jk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j}$$

donde los subíndices j y k de ε sólo pueden tomar los valores de 2 o 3, es decir:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \varepsilon_{123} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} = + \left(\frac{\partial W'_s}{\partial y'} \right) \mathbf{i}$$

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \varepsilon_{132} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} = - \left(\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \right) \mathbf{i}$$

Por lo tanto, para el rotacional de $i = 1$ se tiene:

$$\left(\frac{\partial W'_s}{\partial y'} - \frac{\partial V'_s}{\partial z'} \right) \mathbf{i}$$

donde $\frac{\partial W'_s}{\partial y'} = 0$, por lo que el rotacional para $i = 1$ es:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = - \frac{\partial V'_s}{\partial z'} \mathbf{i}$$

Determinando el rotacional para el subíndice $i = 2$ de ε se tiene:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_j} = +\varepsilon_{231} \frac{\partial U'_s}{\partial z'} + \varepsilon_{213} \frac{\partial W'_s}{\partial x'} = \left(\frac{\partial U'_s}{\partial z'} - \frac{\partial W'_s}{\partial x'} \right) \mathbf{j}$$

donde $\frac{\partial W'_s}{\partial x'} = 0$, por lo que el rotacional para $i = 2$ es:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = \frac{\partial U'_s}{\partial z'} \mathbf{j}$$

Por lo tanto, de las expresiones determinadas anteriormente para los rotacionales de $i = 1$ e $i = 2$ se tiene que:

$$\nabla' \times \mathbf{U}'_s = -\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \mathbf{i} + \frac{\partial U'_s}{\partial z'} \mathbf{j}$$

Así mismo, de la Ec. (3-11) para determinar el rotacional de la temperatura se tiene:

$$\nabla' \times T^* \mathbf{k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial T_3}{\partial x_j} = +\varepsilon_{123} \frac{\partial T^*}{\partial y'} + \varepsilon_{213} \frac{\partial T^*}{\partial x'} = \frac{\partial T^*}{\partial y'} \mathbf{i} - \frac{\partial T^*}{\partial x'} \mathbf{j}$$

donde $\frac{\partial T^*}{\partial y'} \mathbf{i} = 0$, por lo que el rotacional para de la temperatura es:

$$\nabla' \times T^* \mathbf{k} = -\frac{\partial T^*}{\partial x'} \mathbf{j}$$

De manera análoga se resuelve para $\mu \nabla'^2 \nabla' \times \mathbf{U}'_s$; de donde se sabe que $\nabla' \times \mathbf{U}'_s = -\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \mathbf{i} + \frac{\partial U'_s}{\partial z'} \mathbf{j}$, por lo tanto:

$$\mu \nabla'^2 \nabla' \times \mathbf{U}'_s = \mu \nabla'^2 \left(-\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \mathbf{i} + \frac{\partial U'_s}{\partial z'} \mathbf{j} \right) = \mu \nabla'^2 \left(-\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \mathbf{i} \right) + \mu \nabla'^2 \left(\frac{\partial U'_s}{\partial z'} \mathbf{j} \right)$$

Separando los términos de la expresión anterior, se toma el primero en dirección \mathbf{i} ; y el segundo término se asocia con el obtenido para el rotacional de la temperatura ($\nabla' \times T^* \mathbf{k}$) al ser ambos en dirección \mathbf{j} y se tiene:

$$\text{dirección } \mathbf{i} \implies \mu \nabla'^2 \left(-\frac{\partial V'_s}{\partial z'} \right) = 0 \implies \frac{\partial^3 V'_s}{\partial z'^3} = 0$$

$$\text{dirección } \mathbf{j} \implies \mu \nabla'^2 \left(\frac{\partial U'_s}{\partial z'} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial x'} = 0 \implies \mu \frac{\partial^3 U'_s}{\partial z'^3} = \frac{\partial T^*}{\partial x'} \implies \mu \frac{\partial^3 U'_s}{\partial z'^3} = \rho_0 g \alpha_T \frac{\partial T^*}{\partial x'}$$

Definiendo que $T^* = T^*(z', x') = T_s(z') - \beta_H x$; entonces $\frac{\partial T^*}{\partial x'} = -\beta_H$, por lo tanto:

$$\mu \frac{\partial^3 U'_s}{\partial z'^3} = -\rho_0 g \alpha_T \beta_H$$

Dividiendo la expresión anterior entre ρ_0 y adimensionalizando los términos U'_s y z' , se tiene:

$$\frac{\mu}{\rho_0 d^3} U_c \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^3} = -g \alpha_T \beta_H$$

Se sabe que $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$, $U_c = \frac{\kappa}{d}$ y que $z^3 = d^3$; por lo tanto, la expresión anterior queda de la forma:

$$\frac{\nu \kappa}{d^3 d} \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^3} = -g \alpha_T \beta_H$$

Reorganizando términos para simplificar la expresión anterior, se determina el número de Rayleigh Horizontal ($Ra_H = \frac{g \alpha_T \beta_H d^4}{\nu \kappa}$):

$$\frac{\partial^3 U_s}{\partial z^3} = -\frac{g \alpha_T \beta_H d^4}{\nu \kappa} \implies \frac{\partial^3 U_s}{\partial z^3} = -Ra_H \quad (\text{A-2})$$

A.3. Perfil de velocidad con deslizamiento.

A.3.1. Componente U_s

Antes de evaluar las condiciones de frontera en la expresión de $U_s(z)$, es necesario determinar $\left. \frac{\partial U_s}{\partial z} \right|_{z=1/2}$:

$$\frac{\partial U_s}{\partial z} = \frac{\partial \left(-Ra_H \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_0 \right)}{\partial z} = -Ra_H \frac{3z^2}{6} + C_2 \frac{2z}{2} + C_1 = -Ra_H \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_1$$

Evaluando la expresión anterior se tiene:

$$-Ra_H \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_1 \Big|_{z=1/2} = -Ra_H \frac{(1/2)^2}{2} + C_2 (1/2) + C_1 = -\frac{Ra_H}{8} + \frac{C_2}{2} + C_1 \quad (\text{A-3})$$

Sustituyendo la expresión de $U_s(1/2)$ y la Ec. (A-3) en la Ec. (3-17) se tiene:

$$-\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} + \frac{C_1}{2} + C_0 + Kn \left(-\frac{Ra_H}{8} + \frac{C_2}{2} + C_1 \right) = -\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} + \frac{C_1}{2} + C_0 - Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} + Kn C_1 \quad (\text{A-4})$$

De igual forma se determina $\left. \frac{\partial U_s}{\partial z} \right|_{z=-1/2}$ antes de evaluar la condición de frontera:

$$-Ra_H \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_1 \Big|_{z=-1/2} = -Ra_H \frac{(-1/2)^2}{2} + C_2(-1/2) + C_1 = -\frac{Ra_H}{8} - \frac{C_2}{2} + C_1 \quad (\text{A-5})$$

Sustituyendo la expresión de $U_s(-1/2)$ y la Ec. (A-5) en la Ec. (3-18) se tiene:

$$\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} - \frac{C_1}{2} + C_0 - Kn \left(-\frac{Ra_H}{8} - \frac{C_2}{2} + C_1 \right) = \frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} - \frac{C_1}{2} + C_0 + Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} - Kn C_1 \quad (\text{A-6})$$

Sumando las ecuaciones (A-4) y (A-6) se tiene:

$$\left(-\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} + \frac{C_1}{2} + C_0 - Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} + Kn C_1 \right) + \left(\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} - \frac{C_1}{2} + C_0 + Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} - Kn C_1 \right)$$

$$\frac{2C_2}{8} + 2C_0 + 2Kn \frac{C_2}{2} = 0 \implies \frac{C_2}{4} + 2C_0 + 2Kn C_2 = 0 \implies 2C_0 + \left(\frac{1}{4} + 2Kn \right) C_2 = 0$$

Restando las ecuaciones (A-4) y (A-6) se tiene:

$$\left(-\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} + \frac{C_1}{2} + C_0 - Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} + Kn C_1 \right) - \left(\frac{Ra_H}{48} + \frac{C_2}{8} - \frac{C_1}{2} + C_0 + Kn \frac{Ra_H}{8} + Kn \frac{C_2}{2} - Kn C_1 \right)$$

$$-\frac{2Ra_H}{48} + \frac{2C_1}{2} - Kn \frac{Ra_H}{4} + 2Kn C_1 = 0 \implies -\frac{Ra_H}{24} + C_1 - Kn \frac{Ra_H}{4} + 2Kn C_1 = 0$$

$$-\frac{Ra_H}{4} \left(\frac{1}{6} + Kn \right) + C_1 (1 + 2Kn) = 0$$

Despejando para C_1 se tiene:

$$C_1 = \frac{\frac{Ra_H}{4} \left(\frac{1}{6} + Kn \right)}{1 + 2Kn} \quad (\text{A-7})$$

A.3.2. Componente V_s

Determinando $\frac{\partial V_s}{\partial z}$ se tiene:

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} \implies \frac{\partial (Az^2 + Bz + C)}{\partial z} \implies 2Az + B$$

Evaluando las condiciones de frontera anteriormente descritas para $z = -1/2$ y $z = 1/2$ respectivamente se tiene:

$$\left[V_s - Kn \frac{\partial V_s}{\partial z} \right] \Big|_{z=-1/2} \implies A(-1/2)^2 + B(-1/2) + C - Kn[2A(-1/2) + B] \implies \frac{A}{4} - \frac{B}{2} + C - Kn(-A + B) = 0$$

$$\left[V_s + Kn \frac{\partial V_s}{\partial z} \right] \Big|_{z=1/2} \implies A(1/2)^2 + B(1/2) + C + Kn[2A(1/2) + B] \implies \frac{A}{4} + \frac{B}{2} + C + Kn(A + B) = 0$$

Reorganizando términos se tiene:

$$\frac{A}{4} - \frac{B}{2} + C + KnA - KnB = 0 \quad \text{y} \quad \frac{A}{4} + \frac{B}{2} + C + KnA + KnB = 0$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores respectivamente se tiene:

$$\left[\frac{A}{4} - \frac{B}{2} + C + KnA - KnB = 0 \right] + \left[\frac{A}{4} + \frac{B}{2} + C + KnA + KnB = 0 \right] \implies \frac{2A}{4} + 2C + 2KnA \implies \frac{A}{2} + 2C + 2KnA$$

$$\left[\frac{A}{4} - \frac{B}{2} + C + KnA - KnB = 0 \right] - \left[\frac{A}{4} + \frac{B}{2} + C + KnA + KnB = 0 \right] \implies \frac{2B}{2} + 2KnB = 0$$

$$B(1 + 2Kn) = 0 \implies B = 0$$

Haciendo uso de la tercer condición de frontera (ecuación de continuidad), se tiene:

$$\int_{-1/2}^{1/2} V_s dz = 0 \implies \int_{-1/2}^{1/2} (Az^2 + Bz + C) dz = 0$$

$$\frac{Az^3}{3} + Cz \Big|_{z=-1/2}^{z=1/2} \implies \left[\frac{A(1/2)^3}{3} + C(1/2) \right] - \left[\frac{A(-1/2)^3}{3} + C(-1/2) \right]$$

$$\left[\frac{A}{24} + \frac{C}{2} \right] - \left[-\frac{A}{24} - \frac{C}{2} \right] \implies \frac{2A}{24} + \frac{2C}{2} \implies \frac{A}{12} + C$$

Utilizando ésta última expresión y la obtenida anteriormente de la suma de ecuaciones ($\frac{A}{2} + 2C + 2KnA$), se puede recurrir a la eliminación de Gauss-Jordan para determinar los valores de A y C como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{A}{12} + C = 0 \\ (\frac{1}{2} + 2Kn)A + 2C = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 1 \\ \frac{1}{2} + 2Kn & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 1 \\ 0 & -12(\frac{1}{2} + 2Kn) + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo cual $C = 0$ y por ende $A = 0$. De tal forma que el efecto de la velocidad v es nulo, ya que A , B y C son iguales a cero; es decir, $V_s(z) = Az^2 + Bz + C$ es igual a cero y se desprecia.

A.4. Perfil de temperatura con deslizamiento

Retomando la Ec. (3-5) para el estado básico y considerando que se tiene flujo estacionario, la ecuación de la energía es:

$$\rho_0 C_v \mathbf{u}' \cdot \nabla' T' = k \nabla'^2 T'$$

Recordando que el coeficiente de difusividad térmica es $\kappa = \frac{k}{\rho_0 C_v}$ y $T^* = T' - T_0$ se tiene:

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla' T^* = \kappa \nabla'^2 T^*$$

donde $\mathbf{u}' = (u', v', 0)$, por lo que la expresión anterior queda de la forma:

$$u' \frac{\partial T^*}{\partial x'} + v' \frac{\partial T^*}{\partial y'} = \kappa \nabla'^2 T^*$$

De la expresión anterior, el término $\frac{\partial T^*}{\partial y'} = 0$ ya que la temperatura sólo depende de la coordenada x' , por lo que se tiene:

$$u' \frac{\partial T^*}{\partial x'} = \kappa \nabla'^2 T^* \quad (\text{A-8})$$

Adimensionalizando la Ec. (A-8) y recordando que $T^* = \frac{\Delta T_V T}{Ra_V}$, $x' = Lx$, $u' = \frac{\kappa}{d}$ y $\nabla'^2 = \frac{1}{d^2}$ se tiene:

$$\frac{\kappa u \Delta T_V}{d L Ra_V} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\kappa \Delta T_V}{d^2 Ra_V} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Simplificando términos de la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{u}{L} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{d} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \implies u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{L}{d} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \implies -Ra_H u = \frac{L}{d} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Despejando para $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ de la expresión anterior se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{d}{L} Ra_H u \quad (\text{A-9})$$

De donde se sabe que $Ra_H = \frac{\Delta T_H g \alpha_T d^3}{\kappa \nu}$, por lo que la expresión anterior queda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{d}{L} \frac{\Delta T_H g \alpha_T d^3}{\kappa \nu} u$$

Sustituyendo $\beta_H = \frac{\Delta T_H}{L}$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{g \alpha_T \beta_H d^3}{\kappa \nu} u$$

Y como $Ra_H = \frac{g \alpha_T \beta_H d^4}{\kappa \nu}$, la expresión anterior queda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -Ra_H u \quad (\text{A-10})$$

Considerando el caso del estado básico y sustituyendo la ecuación del perfil de velocidad con deslizamiento U_s dado por la Ec. (3-20) en la Ec. (A-10), se tiene:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = -\frac{Ra_H^2 z^3}{6} - \frac{Ra_H^2}{2} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1+2Kn)} \right] z \quad (\text{A-11})$$

Para determinar el perfil de temperaturas con deslizamiento, es necesario integrar la expresión anterior dos veces, por lo que integrando con respecto a z una vez la Ec. (A-11) es:

$$\int \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = \frac{Ra_H^2 z^3}{6} - \frac{Ra_H^2}{2} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1+2Kn)} \right] z \right) dz$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial z} = \frac{Ra_H^2 z^4}{24} - \frac{Ra_H^2}{4} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1+2Kn)} \right] z^2 + K_1$$

Integrando nuevamente con respecto a z la expresión anterior queda como:

$$\int \left(\frac{\partial T_s}{\partial z} = \frac{Ra_H^2 z^4}{24} - \frac{Ra_H^2}{4} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1+2Kn)} \right] z^2 + K_1 \right) dz$$

$$T_s = \frac{Ra_H^2 z^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{12} \left[\frac{\frac{1}{6} + Kn}{2(1+2Kn)} \right] z^3 + K_1 z + K_0$$

Por lo tanto la expresión anterior es:

$$T_s = \frac{Ra_H^2 z^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{24} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) z^3 + K_1 z + K_0 \quad (\text{A-12})$$

Para determinar el valor de las constantes K_1 y K_0 , es necesario evaluar la Ec. (A-12) en $z = 1/2$ y $z = -1/2$. Por lo tanto, evaluando la Ec. (A-12) en $z = 1/2$ se tiene:

$$T_s = \frac{Ra_H^2 (1/2)^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{24} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) (1/2)^3 + K_1 (1/2) + K_0$$

$$T_s = \frac{Ra_H^2}{3840} - \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) + \frac{K_1}{2} + K_0 \implies -\frac{Ra_V}{2} = \frac{Ra_H^2}{3840} - \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) + \frac{K_1}{2} + K_0 \quad (\text{A-13})$$

Evaluando la Ec. (A-12) en $z = -1/2$ se tiene:

$$T_s = \frac{Ra_H^2 (-1/2)^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{24} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) (-1/2)^3 + K_1 (-1/2) + K_0$$

$$T_s = -\frac{Ra_H^2}{3840} + \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) - \frac{K_1}{2} + K_0 \implies \frac{Ra_V}{2} = -\frac{Ra_H^2}{3840} + \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) - \frac{K_1}{2} + K_0 \quad (\text{A-14})$$

Por lo tanto, sumando las ecuaciones (A-13) y (A-14) se tiene:

$$\left[-\frac{Ra_V}{2} = \frac{Ra_H^2}{3840} - \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) + \frac{K_1}{2} + K_0 \right] + \left[\frac{Ra_V}{2} = -\frac{Ra_H^2}{3840} + \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1+2Kn} \right) - \frac{K_1}{2} + K_0 \right]$$

$$2K_0 = 0 \implies K_0 = 0 \quad (\text{A-15})$$

Restando la Ec. (A-13) a la Ec. (A-14) se tiene:

$$\left[\frac{Ra_V}{2} = -\frac{Ra_H^2}{3840} + \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) - \frac{K_1}{2} + K_0 \right] - \left[-\frac{Ra_V}{2} = \frac{Ra_H^2}{3840} - \frac{Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) + \frac{K_1}{2} + K_0 \right]$$

$$\frac{2Ra_V}{2} = -\frac{2Ra_H^2}{3840} + \frac{2Ra_H^2}{192} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) - \frac{2K_1}{2} \implies Ra_V = -\frac{Ra_H^2}{1920} + \frac{Ra_H^2}{96} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) - K_1$$

Por lo tanto despejando para K_1 se tiene:

$$K_1 = -\frac{Ra_H^2}{1920} + \frac{Ra_H^2}{96} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) - Ra_V \implies K_1 = \frac{Ra_H^2}{96} \left[\frac{\left(\frac{1}{6} + Kn\right)}{(1 + 2Kn)} - \frac{1}{20} \right] - Ra_V \quad (A-16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (A-15) y (A-16) en la Ec. (A-12) se tiene:

$$T_s = \frac{Ra_H^2 z^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{24} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) z^3 + \left\{ \frac{Ra_H^2}{96} \left[\frac{\left(\frac{1}{6} + Kn\right)}{(1 + 2Kn)} - \frac{1}{20} \right] - Ra_V \right\} z + 0$$

$$T_s = \frac{Ra_H^2 z^5}{120} - \frac{Ra_H^2}{24} \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) z^3 + \left\{ \frac{Ra_H^2}{96} \left[\frac{\left(\frac{1}{6} + Kn\right)}{(1 + 2Kn)} - \frac{1}{20} \right] - Ra_V \right\} z$$

Factorizando Ra_H^2 , buscando un común múltiplo y reorganizando términos de la expresión anterior, se tiene:

$$T_s = \frac{Ra_H^2}{24} \left\{ \frac{z^5}{5} - \left(\frac{\frac{1}{6} + Kn}{1 + 2Kn} \right) z^3 + \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{1}{6} + Kn\right)}{(1 + 2Kn)} - \frac{1}{20} \right] z \right\} - Ra_V z$$

Finalmente; reorganizando términos de la expresión anterior, se determina la ecuación para el perfil de temperatura con deslizamiento de la forma $T_s = T_s(z) - T_{sx}$, donde $T_{sx} = -Ra_H x$:

$$T_s = \frac{Ra_H^2}{576} \left[\frac{1 + 6Kn}{1 + 2Kn} - \frac{3}{10} (1 + 4z^2) \right] (1 - 4z^2) z - Ra_V z - Ra_H x \quad (A-17)$$

A.5. Modos Normales

A.5.1. Ecuación de Momento componente U

La parte $[\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s]$ de la Ec. (3-33) se puede representar como $\nabla(\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{u}_1)$; y retomando las expresiones anteriormente definidas para $\boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times \mathbf{u}_1$ y $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U}_s$, el resultado para el producto cruz $\nabla \times [\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s]$ es:

$$\nabla \times [\nabla(\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{u}_1)] = \mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s$$

Para esta demostración se usará $\mathbf{u}_1 = (u, v, w)$, por simplicidad en el manejo de subíndices. Debido a que el producto punto de $(\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{u}_1)$ genera el escalar ϕ ; y el producto cruz de $\nabla \times \nabla \phi$ es igual a cero, esto conduce a:

$$\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s$$

$$0 = \nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) + \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) + \nabla \times [\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s]$$

Reacomodando términos en la expresión anterior se tiene:

$$-\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) - \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) = \nabla \times [\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s]$$

Sustituyendo el valor de $\nabla \times [\mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s]$ en la Ec. (3-33), se obtiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) - \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) = Pr (\nabla^2 \boldsymbol{\omega}_1 + \nabla \times T_1 \mathbf{k}) \quad (\text{A-18})$$

A partir de este punto los subíndices para el estado básico y sus correspondientes perturbaciones (s y 1 , respectivamente), serán omitidos en el desarrollo y se retomarán más adelante. Aplicando la propiedad del operador de Levi-Civita ε_{ijk} a la parte $-\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1)$ de la Ec. (A-18) se tiene:

$$\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} U_l \omega_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial (U_l \omega_m)}{\partial x_j}$$

donde el símbolo de permutación $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$, por lo que la expresión anterior queda de la forma:

$$\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \left[U_l \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} + \omega_m \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right]$$

Recordando las propiedades de la Delta de Kronecker se sabe que:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{il} = 1 \text{ si } i = l \\ \delta_{jm} = 1 \text{ si } j = m \end{array} \right\} \text{ caso contrario son igual a "0".}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{im} = 1 \text{ si } i = m \\ \delta_{jl} = 1 \text{ si } j = l \end{array} \right\} \text{ caso contrario son igual a "0".}$$

Aplicando las propiedades de la Delta de Kronecker a la expresión para $\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1)$ se tiene:

$$\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) = U_i \frac{\partial \omega_1}{\partial x_m} - U_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \omega_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j}$$

$$\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) = \mathbf{U}_s (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_1) - (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_s - \boldsymbol{\omega}_1 (\nabla \cdot \mathbf{U}_s)$$

Eliminando términos usando la ecuación de continuidad, la expresión anterior se reduce a:

$$\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1) = (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_s - (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_1 \quad (\text{A-19})$$

De igual manera como se resolvió para $\nabla \times (\mathbf{U}_s \times \boldsymbol{\omega}_1)$ de la Ec. (A-18); una vez aplicadas las propiedades de los operadores de Levi-Civita y de la Delta de Kronecker a la parte $-\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega})$ de la misma Ec. (A-18), se obtiene:

$$\nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A-20})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A-19) y (A-20) en la Ec. (A-18), la ecuación de Momento es:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_s + (\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_1 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = Pr (\nabla^2 \boldsymbol{\omega}_1 + \nabla \times T_1 \mathbf{k}) \quad (\text{A-21})$$

Para la componente en dirección \mathbf{j} de $\boldsymbol{\omega}_1$, se tiene:

$$\omega_1 \text{ en } \mathbf{j} = \varepsilon_{2jk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

donde hay dos posibilidades para los subíndices de ε :

$$231 = +$$

$$213 = -$$

Por lo tanto se tiene:

$$\omega_1 \text{ en } \mathbf{j} = \varepsilon_{2jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{231} \frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon_{213} \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} \rightarrow \omega_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j}$$

Para Ω en la dirección \mathbf{j} usamos:

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{U}_s = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U_{sk}}{\partial x_j} = \left(\varepsilon_{123} \frac{\partial W_s}{\partial y} - \varepsilon_{132} \frac{\partial V_s}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\varepsilon_{231} \frac{\partial U_s}{\partial z} - \varepsilon_{213} \frac{\partial W_s}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\varepsilon_{312} \frac{\partial V_s}{\partial x} - \varepsilon_{321} \frac{\partial U_s}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Donde $\mathbf{U}_s = \langle U_s, V_s, W_s \rangle = \langle U_s(z), V_s(z), 0 \rangle$ y el cambio de la velocidad U_s con respecto a y en dirección \mathbf{k} es igual a cero debido a que solo depende de z . Por lo tanto se tiene:

$$\Omega = \nabla \times U_{sj} = -\frac{\partial V_s}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial U_s}{\partial z} \mathbf{j}$$

Para $\nabla \times T_1 \mathbf{k}$ en la dirección \mathbf{j} se tiene:

$$\nabla \times T_1 \mathbf{k} = \varepsilon_{ij3} \frac{\partial T_1}{\partial x_j} = \varepsilon_{123} \frac{\partial T_1}{\partial y} - \varepsilon_{213} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_1}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial T_1}{\partial x} \mathbf{j}$$

donde $\frac{\partial T_1}{\partial y} \mathbf{i} = 0$ debido a que se está analizando con respecto a la dirección \mathbf{j} . Por lo tanto se tiene:

$$\mathbf{j} \cdot (\nabla \times T_1 \mathbf{k}) = -\frac{\partial T_1}{\partial x} \mathbf{j}$$

Por lo tanto, utilizando las expresiones determinadas para ω_1 , $\Omega = \nabla \times U_s$ y $\nabla \times T_1 \mathbf{k}$ en los términos de la Ec. (A-21), componente \mathbf{j} , se tiene:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla) \mathbf{U}_s \longrightarrow \omega_z \frac{\partial V_s}{\partial z}$$

$$(\mathbf{U}_s \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_1 \longrightarrow \left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 \longrightarrow -\frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow w \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega}_1 \longrightarrow \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\nabla \times T_1 \mathbf{k} \longrightarrow -\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (A-21), la ecuación de Momento en dirección \mathbf{j} es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \omega_z \frac{\partial V_s}{\partial z} + \left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \\ = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

De la expresión anterior para ω_z se tiene:

$$\omega_z = \omega_3 = \varepsilon_{3jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Factorizando el término $\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ en la ecuación de momento, sustituyendo la expresión anterior de ω_z y estableciendo que $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, la ecuación de momento para la componente en dirección \mathbf{j} es:

$$\left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial V_s}{\partial z} + \frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + w D^2 U_s = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right]$$

Simplificando los términos $\frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}$ en la ecuación anterior resulta:

$$\left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial z} - \frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + w D^2 U_s = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] \quad (\text{A-22})$$

Debido a que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, despejando para $\frac{\partial v}{\partial y}$ se tiene que $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}$. Sustituyendo lo anterior en la Ec. (A-22), la ecuación de Momento queda como:

$$\left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V_s}{\partial z} - \frac{\partial U_s}{\partial z} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w D^2 U_s = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right]$$

Estableciendo que $D = \frac{\partial}{\partial z}$, la expresión anterior resulta en:

$$\left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} D V_s + \frac{\partial u}{\partial x} D U_s + D U_s D w + w D^2 U_s = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right]$$

Introduciendo la identidad $D(w D U_s) = D U_s D w + w D^2 U_s$, la expresión anterior es:

$$\left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} D V_s + \frac{\partial u}{\partial x} D U_s + D(w D U_s) = Pr \left[\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial x} \right] \quad (\text{A-23})$$

La perturbación de la velocidad \mathbf{u} se establece como:

$$\mathbf{u} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]$$

Debido a que la perturbación es una onda oscilatoria que puede viajar en forma oblicua y horizontal, se asume que es una onda plana. Por lo tanto para la perturbación de la velocidad y temperatura se tiene:

$$\mathbf{u} = [U_1(z), V_1(z), W_1(z)] \cdot e^{i(kx + ly - \sigma t)} \longrightarrow \text{Onda Plana.}$$

$$T_1 = \theta(z) e^{i(kx + ly - \sigma t)}$$

Aplicando la derivada parcial a las componentes de \mathbf{u} y de la temperatura se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= ikU_1(z) e^{i(kx+ly-\sigma t)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= ilU_1(z) e^{i(kx+ly-\sigma t)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -i\sigma U_1(z) e^{i(kx+ly-\sigma t)} \\ \frac{\partial T_1}{\partial x} &= ik\theta(z) e^{i(kx+ly-\sigma t)} \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial x} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

Por lo tanto para $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= e^{i(kx+ly-\sigma t)} DU_1(z) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= ik e^{i(kx+ly-\sigma t)} W_1(z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= il e^{i(kx+ly-\sigma t)} U_1(z) \end{aligned}$$

Entonces si $u = U_1(z) e^{i(kx+ly-\sigma t)}$, aplicando $\frac{\partial}{\partial y}$ a u resulta en:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = il e^{i(kx+ly-\sigma t)} U_1(z) = ilu$$

De igual manera aplicando $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ a u se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= iku \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -i\sigma u \end{aligned}$$

Reemplazando los términos para $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ en la Ec. (A-23) se obtiene:

$$(ikU_s + ilV_s - i\sigma)(Du - ikw) + iluDV_s + ikuDU_s + D(wDU_s) = Pr [\nabla^2(Du - ikw) - ikT_1]$$

Factorizando i en el primer término e iu en el segundo y tercer término del lado izquierdo de la igualdad se tiene:

$$i(kU_s + lV_s - \sigma)(Du - ikw) + iu(kDU_s + lDV_s) + D(wDU_s) = Pr [\nabla^2(Du - ikw) - ikT_1]$$

Agregando el término $-iuD\sigma$ en el segundo término del miembro izquierdo de la igualdad para posteriormente factorizar el operador D se tiene:

$$i(kU_s + IV_s - \sigma)(Du - ikw) + iuD(kU_s + IV_s - \sigma) + D(wDU_s) = Pr [\nabla^2(Du - ikw) - ikT_1]$$

Introduciendo la identidad $iD[u(kU_s + IV_s - \sigma)] = iuD(kU_s + IV_s - \sigma) + i(kU_s + IV_s - \sigma)Du$, se tiene que $iuD(kU_s + IV_s - \sigma) = iD[u(kU_s + IV_s - \sigma)] - i(kU_s + IV_s - \sigma)Du$. Por lo que sustituyendo esta expresión en el miembro izquierdo de la expresión anterior se obtiene:

$$i(kU_s + IV_s - \sigma)(Du - ikw) + iD[u(kU_s + IV_s - \sigma)] - i(kU_s + IV_s - \sigma)Du + D(wDU_s) = Pr [\nabla^2(Du - ikw) - ikT_1]$$

Desarrollando el producto del primer término del lado izquierdo de la expresión anterior se tiene

$$i(kU_s + IV_s - \sigma)Du + kw(kU_s + IV_s - \sigma) + iD[u(kU_s + IV_s - \sigma)] - i(kU_s + IV_s - \sigma)Du + D(wDU_s) = Pr [\nabla^2(Du - ikw) - ikT_1]$$

Simplificando términos y multiplicando por el operador D , la expresión anterior resulta en:

$$iD^2u[(kU_s + IV_s - \sigma)] + kwD(kU_s + IV_s - \sigma) + k(kU_s + IV_s - \sigma)Dw + D^2(wDU_s) = Pr [\nabla^2(D^2u - ikDw) - ikDT_1]$$

Despejando la expresión anterior para $kwD(kU_s + IV_s - \sigma)$ resulta en:

$$kwD(kU_s + IV_s - \sigma) = Pr [\nabla^2(D^2u - ikDw) - ikDT_1] - iD^2[u(kU_s + IV_s - \sigma)] - k(kU_s + IV_s - \sigma)Dw - D^2(wDU_s) \quad (A-24)$$

La ecuación (A-24) se retomará más adelante para simplificar otras expresiones. Por otra parte, en la ecuación de momento en dirección \mathbf{i} se hace uso de las relaciones:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - (\omega \cdot \nabla)U_s + (U_s \cdot \nabla)\omega - (\Omega \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)\Omega = Pr \left(\nabla^2 \omega + \frac{\partial T_1}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial T_1}{\partial x} \mathbf{j} \right)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_z \frac{\partial U_s}{\partial z} + \left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega_x - \left[-\frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V_s}{\partial z} \mathbf{i} = Pr \left(\nabla^2 \omega_x + \frac{\partial T_1}{\partial y} \right)$$

Para ω_x se tiene:

$$\omega_x = \omega_1 = \varepsilon_{1jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{123} = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ y } \varepsilon_{132} = \frac{\partial v}{\partial z} \longrightarrow \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

De igual manera que se realizó para la dirección \mathbf{j} , es necesario aplicar el doble rotacional para reducir la expresión en dirección \mathbf{i} . De la ecuación de momento se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{U}_s &= Pr (-\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k}) \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \left(U_s \frac{\partial}{\partial x} + V_s \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{u}_1 + w \frac{\partial U_s}{\partial z} \mathbf{i} + w \frac{\partial V_s}{\partial z} \mathbf{j} &= Pr (-\nabla p_1 + \nabla^2 \mathbf{u}_1 + T_1 \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Aplicando el doble rotacional y haciendo uso de la ecuación de continuidad se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2 \mathbf{u}_1) + \nabla \left[\nabla \cdot \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right) \right] - \nabla^2 \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right) + \nabla \left[\nabla \cdot \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \mathbf{i} \right) \right] - \nabla^2 \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \mathbf{i} \right) = \\ Pr \left[-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \nabla \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

Tomando la parte $\nabla \left[\nabla \cdot \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right) \right]$ de la Ec. (A-25) se obtiene:

$$\nabla \left[\nabla \cdot \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right) \right] = \nabla \left[\frac{\partial U_s}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \nabla [ikwDU_s + ilwDV_s] \quad (\text{A-26})$$

Tomando la parte $-\nabla^2 \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right)$ de la Ec. (A-25) se obtiene:

$$-\nabla^2 \left(U_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + V_s \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial y} \right) = -\nabla^2 (ikU_s + ilV_s) \mathbf{u}_1 \quad (\text{A-27})$$

Tomando la parte $\nabla \left[\nabla \cdot \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) \right]$ de la Ec. (A-25) se obtiene:

$$\nabla \left[\nabla \cdot \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) \right] = \nabla \left[(\nabla w) \cdot \frac{\partial U_s}{\partial z} \mathbf{i} + (\nabla w) \cdot \frac{\partial V_s}{\partial z} \mathbf{j} \right] = \nabla (ikwDU_s + ilwDV_s) \quad (\text{A-28})$$

Tomando la parte $-\nabla^2 \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \right)$ de la Ec. (A-25) se obtiene:

$$-\nabla^2 \left(w \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) = -\nabla^2 (wDU_s) \mathbf{j} \quad (\text{A-29})$$

Tomando la parte $Pr \left[-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \nabla \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right]$ de la Ec. (A-25) se obtiene:

$$Pr \left[-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \nabla \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right] = Pr \left[-\nabla^4 u + \nabla (DT_1) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right] \quad (\text{A-30})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A-26), (A-27), (A-28), (A-29) y (A-30) en la Ec. (A-25) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2 \mathbf{u}_1) + \nabla [ikwDU_s + ilwDV_s] - \nabla^2 (ikU_s - ilV_s) \mathbf{u}_1 + \nabla (ikwDU_s + ilwDV_s) - \nabla^2 (wDU_s) = \\ Pr \left[-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \nabla (DT_1) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$

Agrupando términos de la expresión anterior se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{u}_1 + 2\nabla [ikwDU_s + ilwDV_s] - \nabla^2 (ikU_s + ilV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wDU_s) i = Pr \left[-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \nabla (DT_1) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k} \right]$$

Recordando que $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -i\sigma \mathbf{u}_1$ y que $\nabla^2 T_1 \mathbf{k}$ puede ignorarse debido a que se encuentra en una dirección diferente a la del análisis (componente \mathbf{i}); por lo tanto, sustituyendo en la expresión anterior se tiene:

$$i\sigma \nabla^2 \mathbf{u}_1 + 2\frac{\partial}{\partial x} [iwD(kU_s + lV_s - \sigma)] - \nabla^2 [i(kU_s + lV_s) \mathbf{u}_1] - \nabla^2 (wDU_s) = Pr \left(-\nabla^4 \mathbf{u}_1 + \frac{\partial}{\partial x} DT_1 \right)$$

Simplificando la expresión anteriormente obtenida resulta en:

$$i\sigma \nabla^2 \mathbf{u}_1 - 2kwD(kU_s + lV_s - \sigma) - \nabla^2 i(kU_s + lV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wDU_s) = Pr (-\nabla^4 \mathbf{u}_1 - ikDT_1)$$

Desarrollando el término $-2kwD(kU_s + lV_s - \sigma)$ en la expresión anterior se obtiene:

$$i\sigma \nabla^2 \mathbf{u}_1 - kwD(kU_s + lV_s - \sigma) - kwD(kU_s + lV_s - \sigma) - \nabla^2 i(kU_s + lV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wDU_s) = Pr (-\nabla^4 \mathbf{u}_1 - ikDT_1)$$

Sustituyendo la equivalencia para $-kwD(kU_s + lV_s - \sigma)$ determinada en la Ec. (A-24), la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} i\sigma \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \{Pr [\nabla^2 (D^2 u - ikDw) - ikDT_1] - iD^2 [\mathbf{u}_1 (kU_s + lV_s - \sigma)] - k(kU_s + lV_s - \sigma)Dw - D^2 (wDU_s)\} \\ - kwD(kU_s + lV_s - \sigma) - \nabla^2 i(kU_s + lV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wDU_s) = Pr (-\nabla^4 \mathbf{u}_1 - ikDT_1) \end{aligned}$$

Desarrollando para poder simplificar términos de la expresión anterior resulta en:

$$i\sigma\nabla^2\mathbf{u}_1 - Pr[\nabla^2(D^2\mathbf{u}_1 - ikDw) - ikDT_1] + iD^2[\mathbf{u}_1(kU_s + IV_s - \sigma)] + k(kU_s + IV_s - \sigma)Dw + D^2(wDU_s) \\ - kW_D(kU_s + IV_s - \sigma) - \nabla^2 i(kU_s + IV_s)\mathbf{u}_1 - \nabla^2(wDU_s) = Pr(-\nabla^4\mathbf{u}_1 - ikDT_1)$$

$$i\sigma\nabla^2\mathbf{u}_1 - Pr\nabla^2 D^2\mathbf{u}_1 + ikPr\nabla^2 Dw + ikPrDT_1 + iD^2\mathbf{u}_1(kU_s + IV_s - \sigma) + k(kU_s + IV_s - \sigma)Dw + D^2(wDU_s) \\ - kW_D(kU_s + IV_s - \sigma) - \nabla^2 i(kU_s + IV_s)\mathbf{u}_1 - \nabla^2(wDU_s) = Pr(-\nabla^4\mathbf{u}_1) - ikPrDT_1 \quad (\text{A-31})$$

De antemano se sabe que:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (ik)^2 + (il)^2 + D^2 = D^2 - k^2 - l^2 = D^2 - (k^2 + l^2) = D^2 - \alpha^2$$

Donde $\alpha = k^2 + l^2$, que representa la magnitud del vector de onda. Por lo tanto, reemplazando el valor para $\nabla^2 = D^2 - \alpha^2$ y quitando exponenciales en la Ec. (A-31), en términos de las amplitudes se tiene:

$$i\sigma(D^2 - \alpha^2)U_1 - Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + ikPr(D^2 - \alpha^2)DW_1 + ikPrD\theta + iD^2[U_1(kU_s + IV_s - \sigma)] \\ + k(kU_s + IV_s - \sigma)DW_1 + D^2(W_1DU_s) - kW_1D(kU_s + IV_s - \sigma) - (D^2 - \alpha^2)i(kU_s + IV_s)U_1 - (D^2 - \alpha^2)(W_1DU_s) \\ = Pr\left(- (D^2 - \alpha^2)^2 U_1\right) - ikPrD\theta$$

Desarrollando las partes de $i\sigma(D^2 - \alpha^2)U_1$ y $-(D^2 - \alpha^2)(W_1DU_s)$ la expresión anterior es:

$$i\sigma D^2 U_1 - i\sigma \alpha^2 U_1 - Pr(D^2 - \alpha^2)D^2 U_1 + Pr(D^2 - \alpha^2)(ikDW_1) + ikPrD\theta + iD^2[U_1(kU_s + IV_s - \sigma)] \\ - i(kU_s + IV_s - \sigma)(ikDW_1) + D^2(W_1DU_s) - kW_1D(kU_s + IV_s - \sigma) - (D^2 - \alpha^2)i(kU_s + IV_s)U_1 - D^2(W_1DU_s) \\ + \alpha^2 W_1DU_s = Pr\left(- (D^2 - \alpha^2)^2 U_1\right) - ikPrD\theta$$

Factorizando $(ikDW_1)$ y simplificando el término $D^2(W_1DU_s)$ en la expresión anterior se tiene:

$$i\sigma D^2 U_1 - i\sigma \alpha^2 U_1 - Pr(D^2 - \alpha^2)D^2 U_1 + \{Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + IV_s - \sigma)\}(ikDW_1) + iD^2[U_1(kU_s + IV_s - \sigma)] \\ - kW_1D(kU_s + IV_s - \sigma) - (D^2 - \alpha^2)i(kU_s + IV_s)U_1 + \alpha^2 W_1DU_s = Pr\left(- (D^2 - \alpha^2)^2 U_1\right) \quad (\text{A-32})$$

Desarrollando el miembro derecho en la expresión anterior se obtiene:

$$Pr(-\nabla^4 U_1) = -Pr(D^2 - \alpha^2)(D^2 - \alpha^2)U_1 = -Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + Pr(D^2 - \alpha^2)\alpha^2U_1$$

Sustituyendo lo obtenido anteriormente en la Ec. (A-32) resulta en:

$$i\sigma D^2U_1 - i\sigma\alpha^2U_1 - Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + [Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](ikDW_1) + iD^2U_1(kU_s + lV_s - \sigma) - kW_1D(kU_s + lV_s - \sigma) - (D^2 - \alpha^2)i(kU_s + lV_s)U_1 + \alpha^2wDU_s = -Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + Pr(D^2 - \alpha^2)\alpha^2U_1$$

Desarrollando las partes de $iD^2U_1(kU_s + lV_s - \sigma)$ y $(D^2 - \alpha^2)i(kU_s + lV_s)U_1$ en lo obtenido anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned} -i\sigma\alpha^2U_1 - Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + [Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](ikDW_1) + D^2i(kU_s + lV_s)U_1 \\ - kW_1D(kU_s + lV_s - \sigma) - D^2i(kU_s + lV_s)U_1 + \alpha^2i(kU_s + lV_s)U_1 + \alpha^2W_1DU_s = \\ -Pr(D^2 - \alpha^2)D^2U_1 + Pr(D^2 - \alpha^2)\alpha^2U_1 \end{aligned}$$

Simplificando términos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} -[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](\alpha^2U_1) + [Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](ikDW_1) \\ - kW_1D(kU_s + lV_s - \sigma) + \alpha^2W_1DU_s = 0 \end{aligned} \quad (A-33)$$

Agrupando algunos términos para simplificar la expresión anterior se tiene:

$$-kW_1D(kU_s + lV_s - \sigma) \longrightarrow -k^2W_1DU_s - klW_1DV_s \quad (A-34)$$

$$\alpha^2W_1DU_s \longrightarrow \text{como } \alpha = k^2 + l^2, \text{ se tiene } \longrightarrow k^2W_1DU_s + l^2W_1DU_s \quad (A-35)$$

Sustituyendo los términos restantes y los obtenidos mediante las ecuaciones (A-34) y (A-35) en la Ec. (A-33) se tiene:

$$[Pr(D^2 - \alpha^2) - i(kU_s + lV_s - \sigma)](-\alpha^2U_1 + ikDW_1) - k^2W_1DU_s - klW_1DV_s + k^2W_1DU_s + l^2W_1DU_s = 0$$

A.5.2. Ecuación de Momento componente W

La ecuación de momento al aplicar doble rotacional es:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{u}_1 + 2\nabla (ikwD\mathbf{U}_s + ilwDV_s) - \nabla^2 i(k\mathbf{U}_s + lV_s) \mathbf{u}_1 - \nabla^2 (wD\mathbf{U}_s) \mathbf{i} = \\ Pr [-\nabla^4 w + \nabla (DT_1) - \nabla^2 T_1 \mathbf{k}]$$

Considerando la dirección \mathbf{k} y simplificando términos se tiene:

$$i\sigma \nabla^2 w + 2D [iwD(kU_s + lV_s)] - \nabla^2 [iw(kU_s - lV_s)] = Pr (-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$$

Sabiendo que $\nabla^2 (F \cdot G) = F \cdot \nabla^2 G + 2\nabla F \cdot \nabla G + G \nabla^2 F$, aplicándolo en la parte $-\nabla^2 iw(kU_s - lV_s)$ de la expresión anterior se obtiene:

$$i\sigma \nabla^2 w + 2iwD^2(kU_s + lV_s) + 2iDwD(kU_s + lV_s) - iw\nabla^2(kU_s + lV_s) - 2\nabla(iw) \cdot \nabla(kU_s + lV_s) - (kU_s + lV_s) \nabla^2(iw) = \\ Pr (-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$$

Ya que U_s y V_s sólo tienen variación en z , el operador ∇ en la parte $-\nabla^2(kU_s + lV_s) = -D^2(kU_s + lV_s)$ y $-2\nabla(iw) \cdot \nabla(kU_s + lV_s)$ se puede representar solamente mediante el operador D ; por lo tanto, la expresión anterior resulta en:

$$i\sigma \nabla^2 w + 2iwD^2(kU_s + lV_s) + 2iDwD(kU_s + lV_s) - iwD^2(kU_s + lV_s) - 2D(iw) \cdot D(kU_s + lV_s) - (kU_s + lV_s) \nabla^2(iw) = \\ Pr (-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$$

Reorganizando términos para simplificar la expresión se tiene:

$$i\sigma \nabla^2 w + iwD^2(kU_s + lV_s) - (kU_s + lV_s) \nabla^2(iw) = Pr (-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$$

$$i\sigma \nabla^2 w + iwD^2(kU_s + lV_s) - (kU_s + lV_s) \nabla^2(iw) = Pr (-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1) \quad (\text{A-36})$$

Por otra parte, relacionando los términos $i\sigma \nabla^2 w$ y $-(kU_s + lV_s) \nabla^2(iw)$ resulta:

$$i\sigma\nabla^2 w - (kU_s + lV_s)\nabla^2(iw) \longrightarrow i[kU_s + lV_s - \sigma]\nabla^2 w \quad (\text{A-37})$$

Se sabe que $\nabla^2 = D^2 - \alpha^2$, por lo que desarrollando el término $Pr(-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1)$ de la Ec. (A-36), se obtiene:

$$\begin{aligned} Pr(-\nabla^4 w + D^2 T_1 - \nabla^2 T_1) &\longrightarrow Pr\left[-(D^2 - \alpha^2)^2 w + D^2 T_1 - (D^2 - \alpha^2) T_1\right] \longrightarrow \\ Pr\left[-(D^2 - \alpha^2)^2 w + D^2 T_1 - D^2 T_1 + \alpha^2 T_1\right] &\longrightarrow Pr\left[-(D^2 - \alpha^2)^2 w + \alpha^2 T_1\right] \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

Referencias

1. J. Szekely. *Fluid Flow Phenomena in Metals*. Academic Press, Inc., Massachusetts, U. S. A., first edition, 1988.
2. E. Jakeman and D.T.J. Hurlle. Thermal oscillations and their effect on solidification processes. *Review of Physics in Technology*, 3(1):3, 1972.
3. I. Ueno, T. Kurosawa, and H. Kawamura. Thermocapillary convection in thin liquid layer with temperature gradient inclined to free surface. In *International Heat Transfer Conference 12*, pages 1–6, 2002.
4. O. E. Shklyayev and A. A. Nepomnyashchy. Thermocapillary flows under an inclined temperature gradient. *Journal of Fluid Mechanics*, 504:99–132, 2004.
5. G. E. Willis, J. W. Deardorff, and R. C. J. Somerville. Roll-diameter dependence in rayleigh convection and its effect upon the heat flux. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(2):351–367, 1972.
6. D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. part 1. asymptotic theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(2):209–229, 1974.
7. D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. H. Seinfeld. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. part 2. numerical solutions. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(2):231–246, 1974.
8. Jorg Imberger. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. part 3. experimental results. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(2):247–260, 1974.
9. John Hart. A note on the stability of low-prandtl-number hadley circulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 132:271–281, 1983.
10. S. Armfield and R. Janssen. A direct boundary-layer stability analysis of steady-state cavity convection flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(6):539 – 546, 1996.
11. A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph, and A. L. Yarin. Stability of multiple steady states of convection in laterally heated cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 388:315–334, 1999.
12. Wei Wang and Rui Xin Huang. An experimental study on thermal circulation driven by horizontal differential heating. *Journal of Fluid Mechanics*, 540:49–73, 2005.
13. George K. Perekattu and C. Balaji. On the onset of natural convection in differentially heated shallow fluid layers with internal heat generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(19):4254 – 4263, 2009.
14. Li Zhang, You-Rong Li, and Ji-Ming Zhang. Numerical simulation of rayleigh-bénard convection of nanofluids in rectangular cavities. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(8):4043–4050, Aug 2017.
15. D. A. Nield. Convection induced by an inclined temperature gradient in a shallow horizontal layer. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 15(2):157–162, 1994.
16. A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Physics of Fluids*, 23(8):084107, 2011.
17. A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient for prandtl numbers $Pr > 1$. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 68:444–455, 2014.
18. A. S. Ortiz-Pérez and L. A. Dávalos-Orozco. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient with a negative vertical Rayleigh number. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90:1214 – 1220, 2015.
19. R Emmelt Pit, Hubert Hervet, and Liliane Léger. Friction and slip of a simple liquid at a solid surface. *Tribology Letters*, 7(2):147–152, Sep 1999.

20. M. R. Khan, C. Trlica, J. H. So, M. Valeri, and M. D. Dickey. Influence of water on the interfacial behavior of gallium liquid metal alloys. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 6(24):22467–22473, 2014.
21. Yong-Bok Lee, Hyun-Duck Kwak, Chang-Ho Kim, and Nam-Soo Lee. Numerical prediction of slip flow effect on gas-lubricated journal bearings for mems/mst-based micro-rotating machinery. *Tribology International*, 38(2):89 – 96, 2005.
22. Manfred G. Braunsfurth and T. Mullin. An experimental study of oscillatory convection in liquid gallium. *Journal of Fluid Mechanics*, 327:199–219, 1996.
23. C.W Lan, M.K Chen, and M.C Liang. Bifurcation and stability analyses of horizontal bridgman crystal growth of a low prandtl number material. *Journal of Crystal Growth*, 187(2):303 – 313, 1998.
24. David Rivière, Bertrand Selva, Hamza Chraïbi, Ulysse Delabre, and Jean-Pierre Delville. Convection flows driven by laser heating of a liquid layer. *Phys. Rev. E*, 93:023112, Feb 2016.
25. Pengpeng Shi and Wei Liu. Length-dependent instability of shear electroconvective flow: From electroconvective instability to rayleigh-bénard instability. *Journal of Applied Physics*, 124(20):204304, 2018.
26. Madhavi Krishnan, Victor M. Ugaz, and Mark A. Burns. PCR in a Rayleigh-Bénard convection cell. *Science*, 298(5594):793–793, 2002.
27. Dieter Braun, Noel L. Goddard, and Albert Libchaber. Exponential dna replication by laminar convection. *Phys. Rev. Lett.*, 91:158103, Oct 2003.
28. Todd M. Squires and Stephen R. Quake. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Rev. Mod. Phys.*, 77:977–1026, Oct 2005.
29. Z. Li. *Microfluidics at micrometric and sub-micrometric scale : NanoPTV, droplets formation, and sub-micrometric model*. Ph. D. thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris, 2014.
30. P. Tabeling. A brief introduction to slippage, droplets and mixing in microfluidic systems. *Lab on a Chip*, 9(17):2428, 2009.
31. D. A. Nield. Convection in a porous medium with inclined temperature gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(1):87–92, 1991.
32. Alexander A. Nepomnyashchy, Ilya B. Simanovskii, and Leonid M. Braverman. Stability of thermocapillary flows with inclined temperature gradient. *Journal of Fluid Mechanics*, 442:141–155, 2001.
33. R.E. Kelly. The onset and development of thermal convection in fully developed shear flows. volume 31 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 35 – 112. Elsevier, 1994.
34. Stephen H. Davis. Convection in a box: linear theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(3):465–478, 1967.
35. E. L. Koschmieder. *Bénard Cells and Taylor Vortices*. Cambridge University Press, New York, U. S. A., first edition, 1993.
36. Jiro Mizushima. Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box. *Journal of the Physical Society of Japan*, 64(7):2420–2432, 1995.
37. T.P. Lyubimova and R.V. Skuridin. The effect of thermal boundary conditions on a stability of convective flow in a horizontal layer subjected to the longitudinal temperature gradient and acoustic wave. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91:1046 – 1059, 2015.
38. A Mizev and Dietrich Schwabe. Convective instabilities in liquid layers with free upper surface under the action of an inclined temperature gradient. *Physics of Fluids - PHYS FLUIDS*, 21, 11 2009.
39. D. Nezar and S. Rahal. Numerical simulation of convective instabilities in a liquid layer submitted to an inclined gradient of temperature. *Energy Procedia*, 36:380 – 385, 2013. TerraGreen 13 International Conference 2013 - Advancements in Renewable Energy and Clean Environment.

40. J. C. Harley, Y. Huang, H. H. Bau, and J. N. Zemel. Gas flow in micro-channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 284(-1):257, 1995.
41. J. L. Barrat and L. Bocquet. Large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4671–4674, Jun 1999.
42. X. Zhao, S. Wang, X. Yin, J. Yu, and B. Ding. Slip-effect functional air filter for efficient purification of PM2.5. *Scientific Reports*, 6(1), 2016.
43. Qiang Li, Ming-Fu Yu, Jie Li, Xiao-Chen Zhang, and Hong Sun. Finite element analysis of effects of joule heating, electro-osmosis and slip conditions on the performance of magnetohydrodynamic (MHD) micropumps. *AIP Advances*, 8(7):075330, 2018.
44. M. Rivero and S. Cuevas. Analysis of the slip condition in magnetohydrodynamic (mhd) micropumps. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 166-167:884 – 892, 2012.
45. M.A. Schmidt E.B. Arklic, K.S. Breuer. Gaseous flow in microchannels, in: Application of microfabrication to fluid mechanics. *ASME FED*, 197:57–66, 1994.
46. Jianqiang Liu, Yu-Chong Tai, and Chih-Ming HoKin-Cheonk Pong. MEMS for pressure distribution studies of gaseous flows in microchannels. In *Proceedings IEEE Micro Electro Mechanical Systems. 1995*, pages 209–215. IEEE, 1995.
47. M.M. Rahman and I.A. Eltayeb. Convective slip flow of rarefied fluids over a wedge with thermal jump and variable transport properties. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(4):468 – 479, 2011.
48. M.M. Hamza. Free convection slip flow of an exothermic fluid in a convectively heated vertical channel. *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4):1313–1323, 2018.
49. S. U. Haq, I. Khan, F. Ali, A. Khan, and T. N. Ahmed. Influence of slip condition on unsteady free convection flow of a viscous fluid with ramped wall temperature. *Abstract and Applied Analysis*, 2015:1–7, 2015.
50. Bernardo Buonomo and Oronzio Manca. Natural convection slip flow in a vertical microchannel heated at uniform heat flux. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(8):1333 – 1344, 2010.
51. M. J. Martin and I. D. Boyd. Momentum and heat transfer in a laminar boundary layer with slip flow. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 20:710–719, 2006.
52. Suman Chakraborty, S.K. Som, and Rahul. A boundary layer analysis for entrance region heat transfer in vertical microchannels within the slip flow regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(11):3245 – 3250, 2008.
53. T. Qian, X. P. Wang, and P. Sheng. A variational approach to moving contact line hydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 564:333–360, 2006.
54. Elif Karatay, A. Sander Haase, Claas Willem Visser, Chao Sun, Detlef Lohse, Peichun Amy Tsai, and Rob G. H. Lammertink. Control of slippage with tunable bubble mattresses. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(21):8422–8426, 2013.
55. Martin Ndi Azese. On the generalization of velocity slip in fluid flows using a steady-state series expansion of the wall shear stress: Case of simple newtonian fluids. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 57:204 – 213, 2016.
56. Sukhendu Ghosh, R. Usha, and Kirti Chandra Sahu. Linear stability analysis of miscible two-fluid flow in a channel with velocity slip at the walls. *Physics of Fluids*, 26(1):014107, 2014.
57. K. D. Cole, B. Cetin, and L. Brettmann. Microchannel heat transfer with slip flow and wall effects. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 28(3):455–462, July 2014.
58. L. Xu, D. Bandyopadhyay, P. D. S. Reddy, A. Sharma, and S. W. Joo. Giant slip induced anomalous dewetting of an ultrathin film on a viscous sublayer. *Scientific Reports*, 7(1):1–9, 2017.
59. L. A. B. Pilkington. Review lecture. the float glass process. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 314(1516):1–25, 1969.

60. Manuela Prieto, José Díaz, and Eduardo Egusquiza. Analysis of the fluid-dynamic and thermal behaviour of a tin bath in float glass manufacturing. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(4):348 – 359, 2002.
61. W. J. Muhlstadt and J. R. Schornhorst. Control of thermal convection in a float glass forming chamber, January 1976. Patent US3934994A.
62. Z. Xing, S. Xu, Y. Li, and S. Liu. Simulation of molten-glass evolution from spout lip to tin bath. *International Journal of Applied Glass Science*, 7(4):492–502, 2015.
63. J. C. Mauro, Y. Yue, A. J. Ellison, P. K. Gupta, and D. C. Allan. Viscosity of glass-forming liquids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(47):19780–19784, 2009.
64. Jesús Manuel Fernández Oro, Katia María Argüelles Díaz, Carlos Santolaria Morros, Angel F Cobo Hedilla, and Maurice Lemaille. Multiphase modelling of pouring glass over the spout lip of an industrial float in the flat glass forming process. *International journal for numerical methods in fluids*, 58(10):1147–1177, 2008.
65. M. Qin and H. H. Bau. When MHD-based microfluidics is equivalent to pressure-driven flow. *Microfluid Nanofluid*, 10:287–300, 2011.
66. Y. A Cengel and J. M.. Cimbala. *Fluid mechanics: Fundamentals and applications*. McGraw-Hill Education, Columbus OH, USA, 2017.
67. P. G. de Gennes. On fluid/wall slippage. *Langmuir*, 18(9):3413–3414, 2002.
68. Olga I. Vinogradova. Slippage of water over hydrophobic surfaces. *International Journal of Mineral Processing*, 56(1):31 – 60, 1999.
69. S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1981.
70. Marcello Lappa. Exact solutions for thermal problems: Buoyancy, marangoni, vibrational and magnetic-field-controlled flows. *Review of Applied Physics*, 1:1–14, 12 2012.
71. John M. Gersting. Hydrodynamic stability of plane porous slip flow. *The Physics of Fluids*, 17(11):2126–2127, 1974.
72. Eric Lauga and Carlo Cossu. A note on the stability of slip channel flows. *Physics of Fluids*, 17(8):088106, 2005.
73. B. A. Finlayson. The Galerkin method applied to convective instability problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 17(1):201–208, 1968.
74. B. A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, New York, USA, 1972.
75. J. Shen. Efficient spectral-galerkin method i. direct solvers for the second and fourth order equations using legendre polynomials. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(6):1489 – 1505, 1994.
76. J. Shen. Efficient spectral-galerkin method ii. direct solvers of second and fourth order equations by using chebyshev polynomials. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(1):74 – 87, 1995.
77. C. Canuto. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer series in computational physics. Springer-Verlag, 1988.
78. D. Gottlieb, S.A. Orszag, Society for Industrial, and Applied Mathematics. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
79. Y. N. Skiba. *Métodos y Esquemas Numéricos. Un Análisis Computacional*. Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., 2005.
80. S. Chandrasekhar and W. H. Reid. On the expansion of functions which satisfy four boundary conditions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 43(6):521–527, 1957.

81. D. L. Harris and W. H. Reid. On Orthogonal Functions which Satisfy Four Boundary CONDITIONS. I. TABLES for Use in Fourier-Type Expansions. *XXXX*, 3:429, October 1958.
82. L.-S. Kuo and P.-H. Chen. Effects of slip boundary conditions on rayleigh-bénard convection. *Journal of Mechanics*, 25(2):205–212, 2009.
83. L. Gránásy and Gy. Mészáros. Models for continuous casting of metallic glass ribbons i: The applicability of the infinite-viscosity assumption to thermal history calculations. *Materials Science and Engineering*, 72(1):71 – 83, 1985.
84. Q. Zheng and J. C. Mauro. Viscosity of glass-forming systems. *Journal of the American Ceramic Society*, 100(1):6–25, 2016.
85. P. Poesio, A. Damone, and Omar K. Matar. Slip at liquid-liquid interfaces. *Phys. Rev. Fluids*, 2:044004, Apr 2017.
86. H. P. Kuo, S. A. Korpela, A. Chait, and Marcus P. Stability of natural convection in a shallow cavity. In *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, volume 4, pages 1539–1544, 1986.
87. D. F. STRANGES, JOHN R. DE BRUYN, and R. E. KHAYAT. Influence of second-order partial slip boundary conditions on thermal convection. *High Temperatures – High Pressures*, 46(4/5):289 – 312, 2017.
88. D. T. J. Hurle, E. Jakeman, and Johnson C. P. Convective temperature oscillations in molten gallium. *J. Fluid Mech.*, 64(3):565–576, 1974.
89. G.Z. Gershuni, Patrice Laure, V.M. Myznikov, Bernard Roux, and E.M. Zhukhovitsky. On stability of plane parallel advective flows in long horizontal layer. *Microgravity quarterly: MGQ*, 3:141–152, 01 1992.