

Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ingeniería



Control de un Sistema
Masa-Resorte-Amortiguador Subactuado de
Dos Grados de Libertad con Holgura
Mecánica

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Doctor en
Ciencias presenta:

Mario Mora Camacho

Mexicali, Baja California, México, 27 de Agosto del 2018

Agradecimientos

A mí familia por todo el apoyo.

Al Dr. David Rosas por la paciencia, su conocimiento y su amistad.

A mis sinodales, Dr. Marco Felix, Dr. Luis Martínez, Dr. Luis Ahedo y al Dr. Raul Rascón, por sus comentarios.

Al CONACyT por la beca económica y a la Universidad Autónoma de Baja California, en especial a la Facultad de Ingeniería, por su apoyo en la elaboración de los experimentos.

Resumen

Se propone una estrategia para resolver los problemas de regulación y seguimiento de trayectorias en un sistema mecánico de dos grados de libertad (2GDL) del tipo masa resorte amortiguador, el cual presenta el fenómeno de holgura mecánica, también conocido como backlash, además de incertidumbres paramétricas y medición parcial del vector de estado. El diseño del controlador se divide en dos etapas.

En la primera se asume que se cuenta con la medición de todos los estados del sistema, así como de los términos de perturbación. En base a esto, el sistema se divide en un subsistema actuado y un sistema subactuado; la posición de la masa actuada se define como la entrada de control del subsistema subactuado, la cual se diseña como un controlador ideal que resuelve los problemas de regulación y de seguimiento de trayectorias para el sistema subactuado. Finalmente, la entrada de control del sistema actuado se diseña para resolver el problema de seguimiento de trayectorias considerando como señal de referencia la señal de control ideal para el subsistema subactuado.

La segunda etapa del diseño del controlador consiste en la propuesta de una estrategia para implementar el controlador propuesto previamente, la cual se basa en la estructura de control con compensación activa de perturbaciones, conocida como ADRC por sus siglas en inglés. En esta estructura de control se incorporan observadores robustos que se encargan de estimar las variables de estado, señales auxiliares y perturbaciones en el sistema, que permiten la implementación del control ideal.

El desempeño del controlador se muestra tanto en forma numérica y experimental, para los objetivos de control de regulación y de seguimiento de trayectorias, para dos magnitudes de la holgura mecánica.

Abstract

We propose a strategy to solve the tracking and regulation problem for a 2DOF underactuated mass-spring-damper system with backlash on the underactuated joint, parametric uncertainties and partial measurement of the state vector. The design of the controller is divided into two stages, in the first it is assumed that the full state vector and all perturbations in the system are available. The model is divided into an actuated subsystem and one underactuated. The position of the actuated mass is defined as the control input of the underactuated subsystem, which is designed as an ideal controller that solves the tracking and regulation control problems for the underactuated mass. Finally, the control input of the actuated subsystem is designed to solve the tracking problem considering as a reference signal the control signal of the underactuated subsystem. The second stage solves the problem of the implementation of the previously designed ideal controller using the active disturbances rejection control structure (ADRC). Here state observers estimate the non-measured state variables and, at the same time, estimate perturbations and auxiliary signals for their compensation. The performance of the closed loop system is illustrated by numerical simulations and experimental results.

Contenido

1	INTRODUCCIÓN	1
2	ANTECEDENTES	6
2.1	Existencia y unicidad de soluciones	7
2.2	Estabilidad de puntos de equilibrio	9
2.2.0.1	Método indirecto de Lyapunov	11
2.2.0.2	Método directo de Lyapunov	12
2.3	Estabilidad de sistemas perturbados	14
2.3.1	Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes	14
2.3.2	Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanescentes	15
2.4	Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable	16
2.5	Sistemas lagrangianos y sus propiedades	23
2.6	Sistemas mecánicos subactuados	26
3	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE CONTROL	29
4	SOLUCIÓN CONCEPTUAL DEL PROBLEMA DE CONTROL	36
4.1	Análisis de estabilidad	38
5	IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN CONCEPTUAL	40

5.1	Estimación de x_4 y $\Gamma(\cdot)$	40
5.2	Estimación de e_4 y $\Psi(\cdot)$	42
6	DESEMPEÑO DE LA ESTRATEGIA DE CONTROL	46
6.1	Implementación del sistema en lazo cerrado	46
6.2	Desempeño del sistema para una holgura de 0.001m	49
6.2.1	Resultados numéricos	49
6.2.2	Resultados experimentales	50
6.3	Desempeño del sistema para una holgura de 0.01m	58
6.3.1	Resultados numéricos	58
6.3.2	Resultados experimentales	60
6.4	Control PID	62
7	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	68
7.1	Trabajo futuro	69

Lista de Figuras

Figura 1	Diagrama a bloques de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones.	3
Figura 2	Soluciones que cruzan la superficie S	10
Figura 3	Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S	10
Figura 4	Comportamiento del decremento de las funciones de Lyapunov con respecto al tiempo.	20
Figura 5	Sistema masa-resorte-amortiguador subactuado de dos grados de libertad con holgura mecánica.	30
Figura 6	Fenómeno de la holgura mecánica visto como una combinación de las funciones de histéresis y de zona muerta.	30
Figura 7	Función saturación con histéresis $SatH(x, d)$	31
Figura 8	Diagrama a bloques de la implementación del algoritmo propuesto.	45
Figura 9	Sistema masa-resorte-amortiguador de 2GDL subactuado con holgura mecánica.	47
Figura 10	Holgura mecánica entre el resorte k_2 y la masa m_2	48

Figura 11	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Referencia $r(t)$ (azul) and x_3 (verde).	50
Figura 12	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Comportamiento del error e_1	51
Figura 13	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Comportamiento de la señal de control u	51
Figura 14	Referencia $r(t)$ (negro) and x_3 (rojo). Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$	52
Figura 15	Error e_1 . Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$	52
Figura 16	Señal de control u . Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$	53
Figura 17	Resultados experimentales. Señal de referencia $r(t)$ (línea azul) y salida x_3 (línea verde), caso con $d = 0,001m$	54
Figura 18	Resultados experimentales. Señal de error e_1 , caso con $d = 0,001m$	55
Figura 19	Resultados experimentales. Señal de control u , caso con $d = 0,001m$	55
Figura 20	Referencia $r(t)$ y posición x_3 . Resultados experimentales con $d = 0,001m$	56
Figura 21	Error de seguimiento e_1 . Resultados experimentales con $d = 0,001m$	56

Figura 22	Control u . Resultados experimentales con $d = 0,001m$	57
Figura 23	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Referencia $r(t)$ (azul) and x_3 (verde).	58
Figura 24	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Comportamiento del error e_1	59
Figura 25	Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Comportamiento del control u	59
Figura 26	Referencia $r(t)$ (línea azul) y x_3 (línea verde). Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$	60
Figura 27	Error de seguimiento e_1 . Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$	61
Figura 28	Señal de control u . Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$	61
Figura 29	Resultados experimentales. Referencia $r(t)$ (línea negra) y x_3 (línea roja), caso con holgura $d = 0,01m$	62
Figura 30	Resultados experimentales. Señal de error e_1 , caso con holgura $d = 0,01m$	63
Figura 31	Resultados experimentales. Señal de control, caso con holgura $d = 0,01m$	63
Figura 32	Referencia $r(t)$ y posición x_3 . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$	64

Figura 33	Error de seguimiento e_1 . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$	64
Figura 34	Señal de control u . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$	65
Figura 35	Referencia $r(t)$ y salida x_3 con el control PID.	66
Figura 36	Error e_1 con el control PID.	67
Figura 37	Control PID u	67

Capítulo 1

Introducción

El control de sistemas mecánicos subactuados, mecanismos con un número de entradas de control menor al número de grados de libertad, ha recibido mucha atención en las últimas décadas. Esto se debe principalmente a los retos teóricos que presenta así como a la aplicabilidad de los resultados en diferentes sistemas como robots, vehículos aeroespaciales, vehículos acuáticos y grúas son algunos ejemplos de sistemas mecánicos subactuados [1], [2]. Aunque se han propuesto importantes técnicas de control para esta clase de sistemas aún quedan muchos problemas abiertos ya que, en muchas ocasiones, la solución se aplica a un sistema en particular y no se consideran situaciones prácticas como la medición parcial del vector de estado, la presencia de incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, o la presencia de no linealidades fuertes como la fricción seca, zonas muertas en los actuadores o el fenómeno de holgura mecánica, conocido como backlash, en las articulaciones del mecanismo. Otros temas de investigación importantes son la síntesis de modelos adecuados que permitan la realización de controladores que sean factibles para ser implementados [20].

La holgura mecánica es un fenómeno que limita el desempeño de los sistemas de control ya que introduce errores en estado estable e incluso puede ocasionar la presencia de ciclos límites o inestabilidad. La holgura mecánica ha sido estudiada desde el año 1940 y desde entonces han aparecido muchas propuestas para modelarlo y mitigar sus efectos [21].

Existen diferentes maneras de modelar el fenómeno de holgura mecánica. En [22] se establece que la holgura mecánica y la histéresis son fenómenos diferentes; sin embargo, en muchas ocasiones el modelo del fenómeno de la histéresis se utiliza para modelar la holgura mecánica, lo mismo ocurre con el modelo de la zona muerta [23]. También se han propuesto modelos dinámicos basados en ecuaciones diferenciales, ver por ejemplo [24], y modelos basados en aproximaciones suaves de la función zona muerta, ver por ejemplo [25], [26]. Sin embargo, en base a la investigación realizada en esta tesis, se puede decir que a la fecha

no existe un consenso sobre un único modelo para la holgura mecánica. Mas bien, en cada trabajo se adopta o se propone un modelo de la holgura mecánica que permita resolver el problema de control; esta es la estrategia que se aplica en esta tesis.

En lo que se refiere a la propuesta de algoritmos de control para sistemas subactuados se puede decir lo siguiente. Algunos algoritmos de control que resuelven los problemas de control de regulación y seguimiento de trayectorias, pero que no toman en cuenta situaciones prácticas, como la medición parcial del vector de estado y la presencia de perturbaciones, se encuentran en [7], [27], [11] y otras referencias citadas en estos artículos. También se han hecho propuestas de controladores que producen sistemas en lazo cerrado con cierto grado de robustez, por ejemplo [8] y [9].

Dos trabajos que abordan el problema de control de sistemas subactuados con holgura mecánica son [28] y [29].

En [28] basados en la técnica de control H_∞ , se propone un controlador para seguimiento de trayectorias para una clase de sistemas no suaves que incluyen los fenómenos de fricción seca y holgura mecánica. El controlador presenta un buen comportamiento al aplicarse al prototipo 220 de Educational Control Products, denominado emulador industrial. Sin embargo, este algoritmo no puede ser aplicado para resolver el problema de regulación ya que una condición necesaria es que la derivada de la señal de referencia debe ser diferente de cero casi todo el tiempo. En [29] se propone un controlador basado en H_∞ para resolver el problema de regulación para un sistema masa resorte amortiguador de dos grados de libertad, subactuado, con holgura mecánica en la segunda articulación y fricción seca. En este caso se obtienen buenos resultados experimentales, pero este algoritmo no resuelve el problema de seguimiento de trayectoria.

Una estrategia de control, para sistemas mecánicos completamente actuados, que elimina o reduce significativamente el efecto producido por perturbaciones externas y variaciones paramétricas, es la llamada estructura de control con compensación activa de perturbaciones,

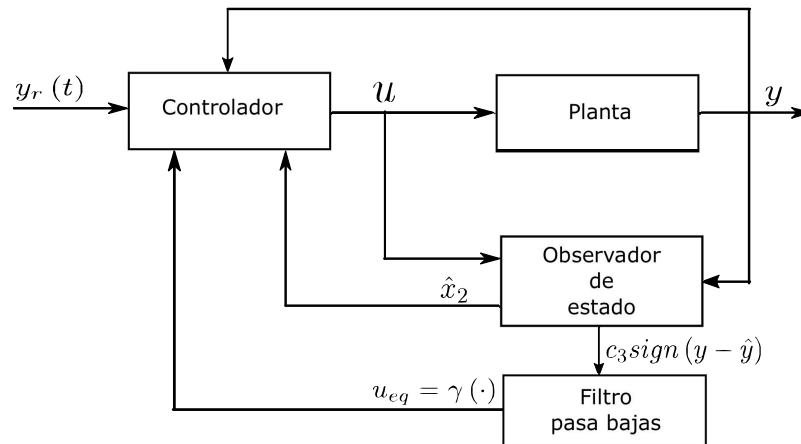


Figura 1. Diagrama a bloques de la estructura de control con compensación activa de perturbaciones.

denominada ADRCS por sus siglas en inglés y que se muestra en la figura 1. Esta estructura de control incluye un observador robusto para estimar el vector de velocidad, las perturbaciones y los términos generados por variaciones paramétricas; el controlador incorpora las perturbaciones estimadas para eliminar las perturbaciones reales en la planta. Idealmente, si la estimación de las perturbaciones es precisa, la estructura de control garantiza, en estado estable, un error cero en el objetivo de control utilizando algún controlador nominal que considera a una planta sin perturbaciones, de esta forma se obtiene un sistema en lazo cerrado con buenas propiedades de robustez. El marco teórico de esta estructura de control, pruebas de estabilidad y algunas aplicaciones pueden encontrarse en [30]-[36], y [59].

Debido a las buenas características de robustez de la estructura de control ADRCS para sistemas mecánicos completamente actuados se espera que pueda resolver, bajo ciertas condiciones, los objetivos de control de regulación y seguimiento de trayectorias en una clase de sistemas subactuados inciertos.

En esta tesis se propone una estrategia de control, basados en la estructura de control ADRCS, para resolver los objetivos de control de regulación y seguimiento de trayectorias en un sistema mecánico del tipo masa-resorte-amortiguador, de dos grados de libertad, subactuado, con holgura mecánica en la segunda articulación, con incertidumbres paramétricas

y perturbaciones externas, así como considerando que solo se tiene medición de las posiciones. Además, basados en [37], se propone un modelo suave para la holgura mecánica, el cual se forma por una función lineal y una aproximación suave de la función saturación, esta última se considera como una perturbación acotada en el diseño del controlador.

La estrategia de control que se propone se basa en la siguiente pregunta: ¿cómo se debe de mover la masa m_1 tal que la masa m_2 siga la señal de referencia?

El diseño del controlador se lleva a cabo en dos etapas, en la primera la planta se divide en un subsistema actuado y en uno subactuado y se asume que se cuenta con la medición del vector de estado completo y de todos los términos de perturbación. Para el diseño del controlador se define a la posición de la masa actuada como la entrada de control del subsistema subactuado, la cual se diseña como un controlador ideal que resuelve los objetivos de control de regulación y seguimiento de trayectorias para la masa subactuada. Finalmente, la señal de control del subsistema actuado se diseña para resolver el problema de seguimiento considerando como señal de referencia a la señal de control del subsistema subactuado.

La segunda etapa del diseño del controlador resuelve el problema de la implementación del controlador ideal previamente diseñado, la cual se basa en la estructura de control ADRCS. Aquí se incorporan observadores de estado que se encargan de estimar los estados no medidos, las perturbaciones en la planta y las señales auxiliares necesarias para implementar las señal de control.

El desempeño de la estructura de control se ilustra tanto en forma numérica como experimental, para los objetivos de regulación como de seguimiento de trayectorias, con dos longitudes de la holgura mecánica, obteniendo errores pequeños en el objetivo de control que no se han reportado anteriormente.

La organización de la tesis es la siguiente. En el capítulo 1 se presenta un resumen de los conceptos básicos que se utilizan en la solución del problema de control. En el capítulo 2 se hace el planteamiento formal del problema de control a resolver. La solución ideal del

problema de control, en donde se asume que se cuenta con la medición del estado completo y de todas las perturbaciones presentes en el sistema se presenta en el capítulo 3, mientras que en el capítulo 4 se presenta la estrategia para su implementación experimental basada en la estrategia de control ADRC. En el capítulo 5 se presenta el desempeño de la estrategia de control que se propone a través de simulaciones numéricas y resultados experimentales para dos longitudes de la holgura mecánica. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones finales de la tesis y posibles líneas de investigación futuras.

Capítulo 2

Antecedentes

Un sistema dinámico es aquel cuyo estado evoluciona con respecto al tiempo. Dicha evolución está gobernada por un conjunto de reglas, no necesariamente ecuaciones, que especifica el valor del estado para cada instante de tiempo, dependiendo del estado anterior [43].

Muchos sistemas dinámicos pueden ser descritos por la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado con condición inicial $x(t_0)$, $\dot{x} \equiv dx/dt$ es la derivada del vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de control y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es, en general, un campo vectorial no lineal. Bajo una elección del vector de control como $u = u(t, x)$ el sistema (1) puede ser reescrito en la forma

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2)$$

En general, los sistemas dinámicos se pueden clasificar en discretos y en continuos, a su vez dentro de estas clasificaciones en autónomos y no autónomos. Los sistemas dinámicos discretos suelen ser descritos por un sistema de ecuaciones en diferencias, mientras que los sistemas dinámicos continuos son descritos por un sistema de ecuaciones diferenciales. Para ambos tipos de sistemas, si $f(\cdot)$ del sistema (2) depende explícitamente del tiempo se trata de un sistema no autónomo, de lo contrario se trata de un sistema autónomo.

Una solución de un sistema dinámico puede ser constante o variante en el tiempo. A las soluciones constantes se les conoce también como puntos de equilibrio, mientras que a las soluciones variantes en el tiempo también se les conoce como soluciones dinámicas.

Los puntos de equilibrio son de mucho interés en la ingeniería de control. Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (2) si, cuando el estado inicial del sistema x_0 es igual al punto de equilibrio, es decir, $x_0 = x^*$, entonces la solución $x = x^*$ permanece para todo tiempo futuro [42]. Los puntos de equilibrio de (2) son las raíces reales para x de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

2.1 Existencia y unicidad de soluciones

Ahora se presentan las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de soluciones en el sentido usual.

Teorema 1(Existencia y Unicidad Local)[42] *Sea $f(t, x)$ una función continua por tramos en t y satisface la condición Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. *Entonces, existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado*

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ con } x(t_0) = x_0,$$

tiene una solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.

Teorema 2(Existencia y unicidad global)[42] *Suponga que $f(t, x)$ es continua por tramos en t y satisface*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

$$\|f(t, x_0)\| \leq h,$$

$\forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$. *Entonces, la ecuación de estado*

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ con } x(t_0) = x_0$$

tiene una solución única sobre $[t_0, t_1]$.

Ahora se presenta la definición de solución en el sentido de Filippov para el sistema (2), esta definición es más general porque considera al campo vectorial $f(\cdot)$ continuo o discontinuo [60].

Considere el sistema (2), donde $f(\cdot)$ es continuo por tramos en un dominio G ; $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y M es un conjunto (de medida cero) de puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$.

Para cada punto (t, x) del dominio G se define un conjunto $F(t, x)$ en un espacio de dimensión n . Si en el punto (t, x) la función $f(\cdot)$ es continua, el conjunto $F(t, x)$ consiste de un punto que coincide con el valor de la función $f(\cdot)$ en este punto. Si (t, x) es un punto de discontinuidad de la función $f(\cdot)$, el conjunto $F(t, x)$ se define de otra forma como se describe más adelante. Una solución de la ecuación (2) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (3)$$

esto es, una función vectorial $x(t)$ absolutamente continua definida en un intervalo o un segmento I para el cual $\dot{x}(t) \in F(t, x)$ casi en todo punto de I .

Definición 1 (Definición del convexo más simple) Para cada punto $(t, x) \in G$ el conjunto $F(t, x)$ es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contenga todos los valores límite de la función vectorial $f(t, x^*)$ para $(t, x^*) \notin M, t = cte$.

Una solución de (2) es una solución de la inclusión (3) con $F(t, x)$ así construida. En los puntos donde la función $f(\cdot)$ es continua el conjunto $F(t, x)$ consiste del punto $f(t, x)$, y la solución satisface la ecuación (2) en el sentido usual. Si el punto $(t, x) \in M$ el conjunto $F(t, x)$ es un segmento, polígono o un poliedro.

Considere el caso donde la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave S dada por la ecuación $\psi(x) = 0$. La superficie S divide al espacio x en los dominios G^+ y G^- . Para

un tiempo t constante y para el punto x^* aproximándose al punto $x \in S$ desde los dominios G^+ y G^- , la función $f(t, x^*)$ tiene los valores límite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x^* \in G^- \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^-(t, x), \\ \lim_{\substack{x^* \in G^+ \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^+(t, x). \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $F(t, x)$ puede representarse geoméricamente como un segmento lineal uniendo los puntos finales de los vectores $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$.

Si para $t_1 < t < t_2$ este segmento cae a un lado del plano P tangente a la superficie S en el punto x , la solución para este tiempo t pasa de un lado de la superficie S al otro (ver figura 2).

Si este segmento intersecta al plano P , el punto de intersección es el punto final de un vector $f^0(t, x)$ que determina la velocidad de movimiento $\dot{x} = f^0(t, x)$ a lo largo de la superficie S en el espacio x (ver figura 3). Esto significa que la función $x(t)$ que satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(t, x)$$

es una solución de la ecuación (2) en virtud de la definición (3). Si $f^0 \neq f^+$, $f^0 \neq f^-$, a tal solución se le llama *modo deslizante*.

2.2 Estabilidad de puntos de equilibrio

Un conjunto especial de soluciones de (2) son los puntos de equilibrio x_e . Iniciando en un punto x_e en el tiempo t_0 la solución de (2) permanecerá ahí para todo $t \geq t_0$.

Existen varias definiciones de estabilidad, por ejemplo, estabilidad entrada-salida, estabilidad de Poincaré, estabilidad de Lagrange, estabilidad de Lyapunov, entre otras. En este trabajo se utiliza la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Al hablar de estabilidad nos referiremos a la estabilidad en el sentido de Lyapunov de puntos de equilibrio.

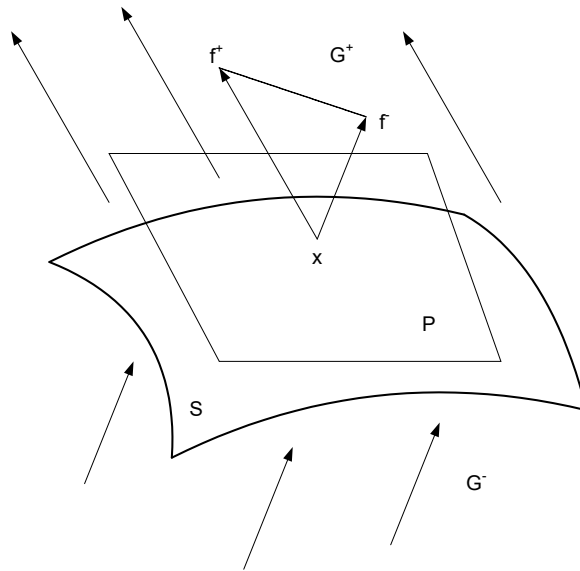


Figura 2. Soluciones que cruzan la superficie S .

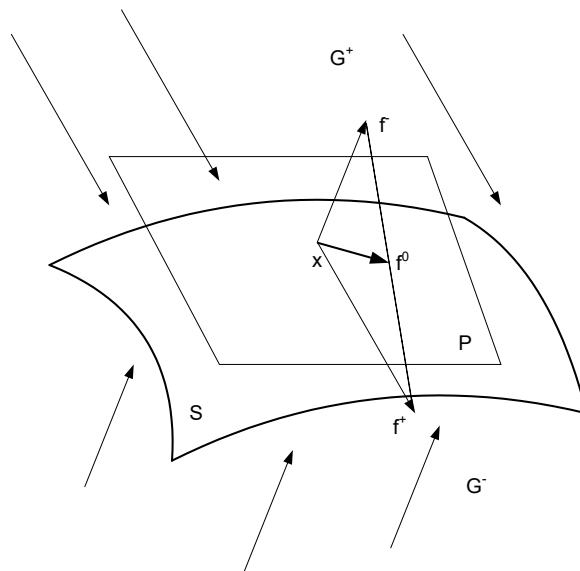


Figura 3. Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S .

A continuación se presentan las definiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov [44].

Definición 2(Estabilidad) El punto de equilibrio $x = 0$ se dice que es estable si, para cualquier $R > 0$, existe una $r > 0$, tal que si $\|x(0)\| < r$, entonces $\|x(t)\| < R$ para toda $t > 0$. De lo contrario, el punto de equilibrio es inestable.

Definición 3(Estabilidad asintótica) Un punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable si es estable, y si además existe alguna $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 4(Estabilidad exponencial) Un punto de equilibrio $x = 0$ es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos α y λ tal que

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t},$$

en alguna bola B_r alrededor del origen.

Definición 5(Estabilidad global) Si la estabilidad asintótica (o exponencial) se mantiene para cualquier estado inicial, entonces se dice que el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente (o exponencialmente) estable.

2.2.0.1 Método indirecto de Lyapunov

Considere que el sistema (2) es autónomo y asumir que $f(\cdot)$ es continuamente diferenciable. Entonces el sistema dinámico puede ser escrito como

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} x + T.O.S.,$$

donde $T.O.S$ son los términos de orden superior de x . Por lo que el sistema se define como

$$\dot{x} = Ax, \tag{4}$$

donde (4) es una aproximación lineal del sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio (origen).

Teorema 3(Método por linealización de Lyapunov) [44]

- Si el sistema linealizado es estrictamente estable, es decir, todos los valores propios de la matriz A están en el lado izquierdo del semiplano complejo, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable.
- Si el sistema linealizado es inestable, es decir, al menos un valor propio de la matriz A está en el lado derecho del semiplano complejo, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es inestable.
- Si el sistema linealizado es marginalmente estable, es decir, todos los valores propios de la matriz A están en el lado izquierdo del semiplano complejo, pero al menos uno de ellos se encuentra en el eje imaginario, entonces no se puede concluir nada a partir de la aproximación lineal.

2.2.0.2 Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es la extensión matemática de una observación física fundamental: si la energía de un sistema mecánico o eléctrico se disipa continuamente, entonces el sistema, lineal o no lineal, eventualmente debe dirigirse a un punto de equilibrio. Por lo tanto, podemos determinar la estabilidad de un sistema examinando la variación de una función escalar.

A continuación se presentan algunas definiciones para la utilización de este método [44].

Definición 6 Una función escalar continua $V(x)$ se dice ser localmente definida positiva si $V(0) = 0$ y, en una bola B_{R_0}

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0,$$

si $V(0) = 0$ y la propiedad anterior se mantiene sobre todo el espacio de estado, entonces $V(x)$ es globalmente definida positiva.

Definición 7 Si, en una bola B_{R_0} , la función $V(x)$ es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas, y si su derivada en el tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2) es semidefinida negativa, esto es

$$\dot{V}(x) \leq 0,$$

entonces se dice que $V(x)$ es función de Lyapunov para el sistema (2).

Teorema 4(Estabilidad Local) Si, en una bola B_{R_0} , existe una función escalar $V(x)$ con derivadas parciales continuas tal que

- $V(x)$ es definida positiva (localmente en B_{R_0})
- $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa (localmente en B_{R_0}) entonces el punto de equilibrio es estable y si, además,
- $\dot{V}(x)$ es localmente definida negativa en B_{R_0} , entonces la estabilidad es asintótica.

Teorema 5(Estabilidad Global) Asuma que existe una función escalar V del estado x , con derivadas continuas de primer orden tal que

- $V(x)$ es definida positiva,
- $\dot{V}(x)$ es definida negativa,
- $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$.

entonces el punto de equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable.

Teorema 6La Salle. Considere la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

donde el origen $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un punto de equilibrio. Se asume que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ globalmente definida positiva y radialmente acotada tal que

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n.$$

Defina el conjunto Ω como

$$\Omega = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : \dot{V}(x) = 0 \right\}.$$

Si $x(0) = 0$ es el único estado inicial en Ω cuya correspondiente solución, $x(t)$, permanece siempre en Ω entonces el origen $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es globalmente asintóticamente estable.

2.3 Estabilidad de sistemas perturbados

Considere el sistema con perturbaciones denotadas por $\xi(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x) + \xi(t, x), \quad (5)$$

donde $f : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $\xi : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ son funciones continuas por tramos en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, y $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Se considera al sistema (5) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (6)$$

La mayoría de las veces no se conoce con exactitud el término $\xi(t, x)$, sin embargo, se puede conocer cierta información, por ejemplo la cota superior de $\|\xi(t, x)\|$. [42]

2.3.1 Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes

Se dice que una perturbación es desvanescente si $\xi(t, 0) = 0$. Suponga que $x_e = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6), y sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (8)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (9)$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathcal{D}$ y para algunas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 . Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface el acotamiento de crecimiento lineal

$$\|\xi(t, x)\| \leq \sigma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad (10)$$

donde σ es una constante positiva que satisface

$$\sigma < \frac{c_3}{c_4}. \quad (11)$$

Se tiene el siguiente resultado [42].

Lema 1 Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov para el sistema nominal que satisface las condiciones (7) a (9) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$. Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface (10) y (11). Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema perturbado (5). Además, si todas las condiciones se satisfacen en forma global, entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.

2.3.2 Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanescentes

Cuando no se sabe si $\xi(t, 0) = 0$ es posible que el origen $x_e = 0$ ya no sea un equilibrio del sistema perturbado (5).

Lo mejor que se puede esperar es que la solución $x(t)$ permanezca en una vecindad del origen, si la perturbación es pequeña en algún sentido.

Supóngase que el origen del sistema nominal (6) es exponencialmente estable. Entonces se tiene el siguiente lema [42]

Lema 2 Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (7) a (9) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$. Suponga que el término de perturbación satisface

$$\|\xi(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r$$

para toda $t \geq 0$, toda $x \in \mathcal{D}$, y alguna constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda $\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2} r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado (5) satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)] \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

para algún tiempo finito T , donde

$$k = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}},$$

$$\gamma = \frac{(1 - \theta) c_3}{2c_2},$$

$$b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2 \delta}{c_1 \theta}}.$$

2.4 Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable

Ahora se muestra la estabilidad de una estructura de segundo orden presentada en [57], la cual es útil para demostrar la estabilidad de los observadores de estado utilizados en el presente trabajo.

Considere el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c \operatorname{sign}(z_1), \end{aligned} \tag{12}$$

donde a y b son constantes positivas, $\xi(t)$ es una perturbación externa acotada

$$|\xi(t)| \leq \rho,$$

ρ es una constante, c es un parámetro de control y $\operatorname{sign}(\cdot)$ es la función signo. Defina una matriz A de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \tag{13}$$

y una matriz P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

que es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -I$, donde I es la matriz identidad. Las propiedades de estabilidad del sistema (12) se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 7 Para el sistema (12), si

$$c > \frac{2a\rho}{\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^3(P)}{\lambda_{\min}(P)}},$$

para algún $0 < \theta < 1$, $\lambda_{\max}(P)$ y $\lambda_{\min}(P)$ son los valores propios máximo y mínimo de la matriz P . Entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

Proof. La demostración se divide en dos partes; primero se define un sistema nominal con $\xi(t) = 0$, y se prueba estabilidad exponencial del origen usando herramientas para sistemas con estructura variable. Después, se encuentran las condiciones sobre c tal que las propiedades de estabilidad se mantengan para el sistema perturbado.

El sistema nominal de (12) está definido por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 - c \operatorname{sign}(z_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Se puede demostrar estabilidad asintótica del origen del sistema (15) utilizando la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}az_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + c|z_1|$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V} = -bz_2^2,$$

que es semidefinida negativa y aplicando el teorema de invarianza para sistemas discontinuos presentado en [58] se concluye que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Sin embargo, la demostración que a continuación se presenta ayuda a visualizar las propiedades de robustez del sistema (12).

El sistema (15) tiene dos estructuras: S_1 para $z_1 > 0$,

$$S_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -az_1 - bz_2 - c, \end{cases}$$

y S_2 para $z_1 < 0$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{v}_1 = v_2, \\ \dot{v}_2 = -av_1 - bv_2 + c. \end{cases}$$

Cada estructura tiene un punto de equilibrio; para S_1 su equilibrio es $\bar{z}_{S_1} = (-c/a, 0)$ y para S_2 es $\bar{z}_{S_2} = (c/a, 0)$. Note que estos equilibrios se ubican en la región donde la dinámica del sistema está dada por la otra estructura (S_2 para \bar{z}_{S_1} , S_1 para \bar{z}_{S_2}).

Cada punto de equilibrio es exponencialmente estable con las siguientes funciones de Lyapunov:

Para S_1

$$V_{S_1}(z) = z^T P z + 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (16)$$

$$\dot{V}_{S_1}(z) = -z^T z - 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (17)$$

y para S_2

$$V_{S_2}(z) = z^T P z - 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (18)$$

$$\dot{V}_{S_2}(z) = -z^T z + 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (19)$$

donde $\gamma = [c/a \ 0]^T$.

Aplicando el criterio dado en [9] para probar la existencia de modos deslizantes se concluye que la superficie de discontinuidad dada por $z_1 = 0$ no es una superficie deslizante.

Note también que las soluciones cruzan la línea $z_1 = 0$ del cuadrante II al cuadrante I, y del cuadrante IV al cuadrante III.

Ahora considere las funciones $V_{S_1}(z)$, $V_{S_2}(z)$ y sus derivadas. Estas funciones se intersectan en el origen y toman el valor $V_{S_i}(0) = (c/a)^2 p_{11}$, para $i = 1, 2$. Defina dos vecindades del origen, Ω_ε con radio $\varepsilon > 0$, y Ω_β que se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Omega_\beta &= \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \Omega_1 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 \geq 0, V_{S_1}(v) \leq \beta\}, \\ \Omega_2 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 < 0, V_{S_2}(v) \leq \beta\},\end{aligned}$$

donde $\beta > (c/a)^2 p_{11}$. Finalmente, defina una vecindad Ω_δ con radio $\delta < \varepsilon$ (δ puede depender de ε y β ; $\delta(\varepsilon, \beta)$) tal que $\Omega_\delta \subset \Omega_\beta$.

Defina un conjunto de tiempos $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots\}$, en estos tiempos se presentan las conmutaciones de estructura. Se asume que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ donde t_0 es el tiempo inicial.

Si $\|z(t_0)\| < \delta$ y $z(t_0) \in \Omega_k \subset \Omega_\beta$ para alguna $k = 1, 2$ (la k -ésima estructura está activa), entonces el primer cambio de estructuras se presenta en t_1 , y debido a que $\dot{V}_{S_k} < 0$, se tiene que $\|z(t_0)\| > \|z(t_1)\|$, entonces $V_{S_k}(z(t_0)) > V_{S_k}(z(t_1))$. Ahora $z(t_1)$ es la condición inicial para la siguiente estructura.

La segunda conmutación se presenta en t_2 ; el sistema pasa de Ω_{k+1} a Ω_k y $\|z(t_1)\| > \|z(t_2)\|$, $V_{S_{k+1}}(z(t_1)) > V_{S_{k+1}}(z(t_2))$. En cada instante de tiempo donde se presenta una conmutación $z_1 = 0$; por lo tanto $z_2(t_1) > z_2(t_2)$, y la condición inicial para la siguiente estructura es $(0, z_2(t_2))$. Este fenómeno se presenta para todo $t_i \in T$ por lo que se puede concluir que $V_{S_k}(z(t_j)) > V_{S_k}(z(t_{j+2}))$, es decir, el valor de cada función de Lyapunov disminuye cada que su estructura sale de operación, ver figura 4.

Entonces las secuencias $W_1 = \{V_{S_k}(t_1), V_{S_k}(t_3), \dots\}$ y $W_2 = \{V_{S_{k+1}}(t_2), V_{S_{k+1}}(t_4), \dots\}$ son estrictamente decrecientes y convergen a $(c/a) p_{11}$, y también se satisface que $\|z(t_{i+1})\| < \|z(t_i)\| < \dots < \|z(t_0)\| < \delta < \varepsilon \forall t > t_0, \forall i$.

Figura 4. Comportamiento del decremento de las funciones de Lyapunov con respecto al tiempo.

Para todo $\varepsilon > 0$ y $\beta > (c/a)^2 p_{11}$ se puede encontrar una constante δ tal que las trayectorias iniciando en Ω_δ permanecerán en la vecindad Ω_ε para todo $t \geq t_0$. De esta manera, el origen es estable en el sentido de Lyapunov.

Para demostrar estabilidad asintótica es suficiente notar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_k}(t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_{k+1}}(t_i) = \frac{c}{a} p_{11},$$

éste es el valor que toman ambas funciones de Lyapunov en el origen, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Para demostrar estabilidad exponencial note que la solución en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1)$ decrece en forma exponencial debido a la estabilidad exponencial del equilibrio de cada estructura. Cuando el sistema cambia de estructura, la solución mantiene su constante de tiempo porque ambas estructuras tienen la misma matriz A , por lo tanto, $\|v(t)\|$ en los intervalos de tiempo $[t_i, t_{i+1})$ estará por debajo de la función exponencial que domina a la solución en el intervalo $[t_0, t_1)$; entonces el origen es exponencialmente estable.

Finalmente, para demostrar que este resultado es global, note que el punto de equilibrio de cada estructura es exponencialmente estable en forma global, lo que implica que las propiedades que se mencionaron anteriormente se mantienen para cualquier condición inicial.

Ahora se analiza el sistema perturbado (12). Considere la estructura S_1 (el análisis para la estructura S_2 es similar),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c, \end{aligned} \tag{20}$$

y el cambio de variables $w_1 = z_1 + c/a$ y $w_2 = z_2$. La dinámica del sistema (20) en el nuevo espacio de estado está dado por

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -aw_1 - bw_2 + \xi(t),\end{aligned}$$

o en forma simplificada

$$\dot{w} = Aw + g,$$

donde $g = [0 \quad \xi(t)]^T$.

Se propone la función de Lyapunov

$$V(w) = w^T P w,$$

donde las matrices A y P se definen por (13) y (14) respectivamente. La derivada de V está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(w) &= -w^T w + 2w^T P g \\ &\leq -\|w\|^2 + 2|w^T P g| \\ &\leq -\|w\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) \|w\| \rho.\end{aligned}$$

Debido a que $a > 0$ y $b > 0$, se puede aplicar el lema 13 [42], y concluir que, para todo $\|w(t_0)\| > \tilde{\mu}$ la solución $w(t)$ satisface

$$\|w(t)\| \leq k \exp(-\gamma(t - t_0)) \|w(t_0)\| \quad \forall t_0 \leq t < t_0 + t_f,$$

y

$$\|w(t)\| \leq \tilde{\mu} \quad \forall t \geq t_0 + t_f,$$

donde t_f es un tiempo finito, y

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \\ \gamma &= \frac{(1-\theta)}{2\lambda_{\max}(P)}, \\ \tilde{\mu} &= 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\rho}{\lambda_{\min}(P)\theta}}, \end{aligned}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$. Esta parte muestra que la bola de radio $\tilde{\mu}$, con centro ubicado en $(-c/a, 0)$, es un atractor para la estructura S_1 , denotado por B_{S_1} .

De forma similar, las trayectorias de la estructura S_2

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) + c, \end{aligned}$$

convergen a la bola B_{S_2} de radio $\tilde{\mu}$ centrada en $(c/a, 0)$. De esta manera, cada estructura del sistema perturbado tiene un atractor (una bola) de radio $\tilde{\mu}$, simétricamente localizadas sobre el eje z_1 y a una distancia $r = c/a$ del origen. Si esta distancia es mayor que $\tilde{\mu}$, es decir, si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho}{\theta}\right), \quad (21)$$

entonces los dos atractores B_{S_1} y B_{S_2} no se intersectan, y el comportamiento de la solución del sistema perturbado será cualitativamente igual al comportamiento del sistema nominal. De esta manera, el origen del sistema perturbado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global. ■

2.5 Sistemas lagrangianos y sus propiedades

El modelo matemático de un sistema lagrangiano de n grados de libertad es el siguiente

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) + \xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q) = \tau \quad (22)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz centrífuga y de Coriolis, D es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, τ es el vector de pares de entrada que se considera acotado tal que produce un comportamiento acotado. Finalmente, $\xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q)$ es un vector que contiene los términos producidos por incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas y se considera acotado; $\|\xi(t, \ddot{q}, \dot{q}, q)\| \leq \rho$.

Para mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, que son una clase importante de sistemas lagrangianos, las matrices y vectores que forman el modelo (22) tienen las siguientes propiedades [54].

- Matriz de inercia $M(q)$

(a) $M(q)$ es una matriz definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos sólo dependen de q . Su inversa $M^{-1}(q)$ existe y es definida positiva.

(b) La energía cinética del sistema se define como

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

(c) Existe una constante

$$\lambda_{\max} \{M(q)\} \leq \beta \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n.$$

(d) Existe una constante $k'_M > 0$ tal que

$$\|M(x)y\| \leq k'_M \|y\|$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$.

- Matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$

(a) La matriz $C(q, \dot{q})$ puede ser no única, pero el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es único.

(b) $C(q, 0) = 0$ para todo vector $q \in \mathfrak{R}^n$.

(c) Para todo vector $q, x, y, z \in \mathfrak{R}^n$ y escalar α , se tiene que

$$\begin{aligned} C(q, x) y &= C(q, y) x, \\ C(q, z + \alpha x) y &= C(q, z) y + \alpha C(q, x) y. \end{aligned}$$

(d) Existe una constante $K_{C_1} > 0$ tal que

$$\|C(q, x) y\| \leq K_{C_1} \|x\| \|y\|$$

para todo $q, x, y \in \mathfrak{R}^n$.

(e) Existen constantes k_{C_1} y k_{C_2} tales que

$$\|C(q, z) w - C(y, v) w\| \leq k_{C_1} \|z - v\| \|w\| + k_{C_2} \|x - y\| \|w\| \|z\|$$

para todo vector $v, x, y, z, w \in \mathfrak{R}^n$.

(f) Para una forma particular de la matriz $C(q, \dot{q})$, ésta se relaciona con la matriz de inercia $M(q)$ por la expresión

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0,$$

y además

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T.$$

• Vector de pares gravitacionales $G(q)$

(a) El vector $G(q)$ es Lipschitz, es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|G(x) - G(y)\| \leq k_g \|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$.

(b) Existe una constante k' tal que

$$\|G(q)\| \leq k'$$

para todo $q \in \mathfrak{R}^n$.

- Dinámica residual $h(t, e, \dot{e})$

La dinámica residual $h(t, e, \dot{e})$ se define de la siguiente manera

$$h(t, e, \dot{e}) = [M(q) - M(q - e)]\ddot{q} + [C(q, \dot{q}) - C(q - e, \dot{q} - \dot{e})]\dot{q} + G(q) - G(q - e).$$

El vector de dinámica residual depende de e, \dot{e} , así como de q, \dot{q} y \ddot{q} que se suponen acotadas.

- (a) Existen constantes k_{h_1} y k_{h_2} mayores que cero tal que la norma de la dinámica residual cumple con

$$\|h(t, e, \dot{e})\| \leq k_{h_1} \|\dot{e}\| + k_{h_2} \|f(e)\|$$

para todo $e, \dot{e} \in \mathfrak{R}^n$, donde $f(e)$ es la función tangente hiperbólica vectorial definida como

$$f(e) = [\tanh(e_1) \quad \dots \quad \tanh(e_n)]^T.$$

- Linealidad en parámetros

- (a) Para todo $u, v, w \in \mathfrak{R}^n$

$$M(q)u + C(q, w)v + g(q) = \Phi(q, u, v, w)\theta + \kappa(q, u, v, w)$$

donde $\kappa(q, u, v, w)$ es un vector de $n \times 1$, $\Phi(q, u, v, w)$ es una matriz de $n \times m$ y el vector $\theta \in \mathfrak{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros del mecanismo.

- (b) Si $q, u, v, w \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(q, u, v, w) \in L_\infty^{n \times m}$.

2.6 Sistemas mecánicos subactuados

Un sistema mecánico subactuado se puede definir como aquel que posee menos actuadores que grados de libertad [3]. Formalmente un sistema mecánico subactuado se define como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = B(q)\tau,$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $\tau \in \mathbb{R}^m$ es la fuerza de entrada generalizada ($m < n$) y $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ posee rango completo para todo q [4]. Sin embargo, es necesario precisar que no sólo se tiene que cumplir con lo anterior si no que también el objetivo de control debiera ser sobre el grado de libertad subactuado, de lo contrario carecería del reto que conlleva el no poder ejercer acción directamente sobre esta dinámica.

La importancia de los sistemas mecánicos subactuados radica en las múltiples aplicaciones; como vehículos acuáticos y subacuáticos, aeronaves, naves espaciales, sistemas de absorción contra sismos, vehículos terrestres, robots, entre otros.

Los sistemas subactuados pueden ser clasificados debido a su subactuación [5]:

- Debido a la naturaleza de la dinámica del sistema, como vehículos aeroespaciales, aéreos, terrestres, acuáticos y subacuáticos entre otros.
- Debido al diseño, para la reducción de los costos o para propósitos prácticos. Por ejemplo satélites.
- Debido a la falla del actuador. Por ejemplo vehículos aéreos.
- Debido a la imposición en forma artificial para crear sistemas no lineales complejos, por ejemplo, el carro-péndulo, la bola-viga, el acrobot, el pendubot, entre otros.

El control de sistemas subactuados es un reto para el área de control ya que no es posible implementar los controladores que se utilizan para sistemas actuados, al menos directamente. Dicho lo anterior, para el control de subactuados se han utilizado control óptimo [6], control difuso [7], backstepping [5], control por modos deslizantes [8] [9], linealización parcial por retroalimentación [10] [5], métodos basados en energía [11]. Por otro lado, tenemos que los objetivos de control más comunes para sistemas mecánicos subactuados son: planeación de trayectoria, seguimiento de trayectoria y estabilización [12].

Por otro lado, para el desarrollo de investigación y propósitos educativos, se han creado prototipos didácticos para el área del control de sistemas subactuados. En [1] se presenta a el Pendubot, el cual es un artefacto mecatrónico utilizado para la investigación y la educación. En [13] y [14] se presenta una nueva propuesta de un kit reconfigurable que incluye entre otros la configuración del pendubot. En 2001 [10] presentan un kit mecatrónico configurable con la configuración del pendubot incluida.

La implementación de los controladores es otro reto a la hora de diseñarlos ya sea para sistemas actuados o subactuados debido a que, generalmente no se consideran cosas como la variación paramétrica al no tener un modelo exacto del sistema, las no linealidades que surgen inherentemente en los sistemas mecánico como la saturación, backlash, zona muerta, el no poseer el vector de estado completo, la fricción.

Al igual que en sistemas mecánicos completamente actuados, en los sistemas subactuados existe el problema de no poseer el vector de estado completo, generalmente por no tener un sensor para la medición de la velocidad. Para resolver este problema se pueden aplicar, en general, observadores de estado diseñados para mecanismos completamente actuados. También se han aplicado otras técnicas para estimar la velocidad como la diferenciación de la posición y el uso de filtros para eliminar el ruido, ver por ejemplo [15], [16] y [17].

En general, en el control de sistemas subactuados no se considera a la fricción y muchas veces se asume un modelo sin fricción como estándar [11], esto debido en gran parte a que la mayoría de los trabajos en la literatura son teóricos. Sin embargo, en la práctica esto no es así. Existen algunos trabajos que sí consideran a la fricción, por ejemplo en [18] se considera un modelo de fricción viscosa. Otro trabajo que considera un modelo de fricción viscosa y una aproximación continua de fricción de Coulomb se presenta en [6]. Por último, un controlador basado en energía con compensación de la fricción mediante redes neuronales es presentado [19].

Capítulo 3

Planteamiento del problema de control

Considere un sistema masa-resorte-amortiguador subactuado de dos grados de libertad, como el que se muestra en la figura 5, cuyo modelo en variables de estado está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}B(\Delta x, d) + \frac{k_a}{m_1}u + \gamma_1(\cdot), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -\frac{b_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_1}B(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot),\end{aligned}\tag{23}$$

donde x_1 y x_2 son la posición y la velocidad de la masa m_1 , x_3 y x_4 son la posición y la velocidad de la masa m_2 , u es la entrada de control, $B(\Delta x, d)$ es una función que describe al fenómeno de la holgura mecánica, cuya característica se muestran en la figura 6, donde d es la longitud de la holgura y $\Delta x = x_3 - x_1$. Finalmente $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ son las perturbaciones debidas a las incertidumbres paramétricas, las cuales son acotadas si el estado es acotado. Los parámetros del sistema son las constantes de los resortes k_1 y k_2 (N/m), las constantes de fricción b_1 y b_2 (kg/s), y k_a (N/V) es la constante del amplificador de potencia; todos los parámetros son positivos.

Para simplificar la dinámica del modelo del sistema, en particular el fenómeno de la holgura mecánica, se utiliza la igualdad propuesta en [37]

$$B(\Delta x, d) = SatH(\Delta x, d) - \Delta x,\tag{24}$$

donde $SatH(\Delta x, d)$ es la función saturación con histéresis como se muestra en la figura 7.

Dado que el término no lineal de la función $B(\Delta x, d)$ es una colección de las funciones de saturación $Sat(\Delta x, d)$ con desplazamientos, los cuales son acotados, y presentándose solo

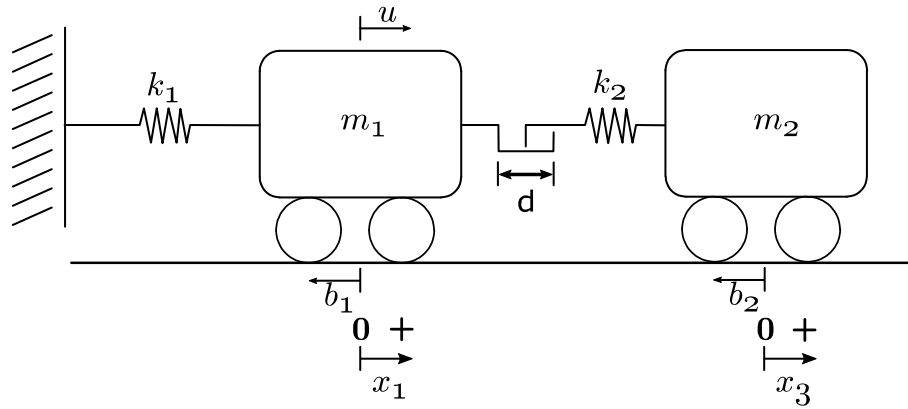


Figura 5. Sistema masa-resorte-amortiguador subactuado de dos grados de libertad con holgura mecánica.

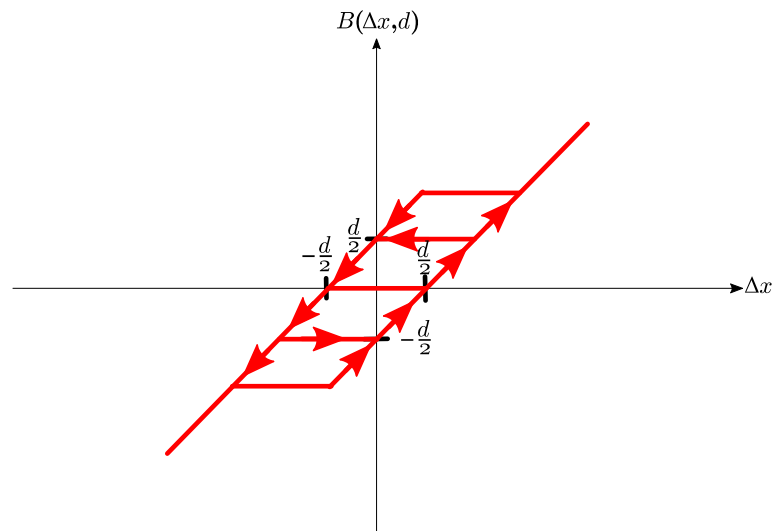


Figura 6. Fenómeno de la holgura mecánica visto como una combinación de las funciones de histéresis y de zona muerta.

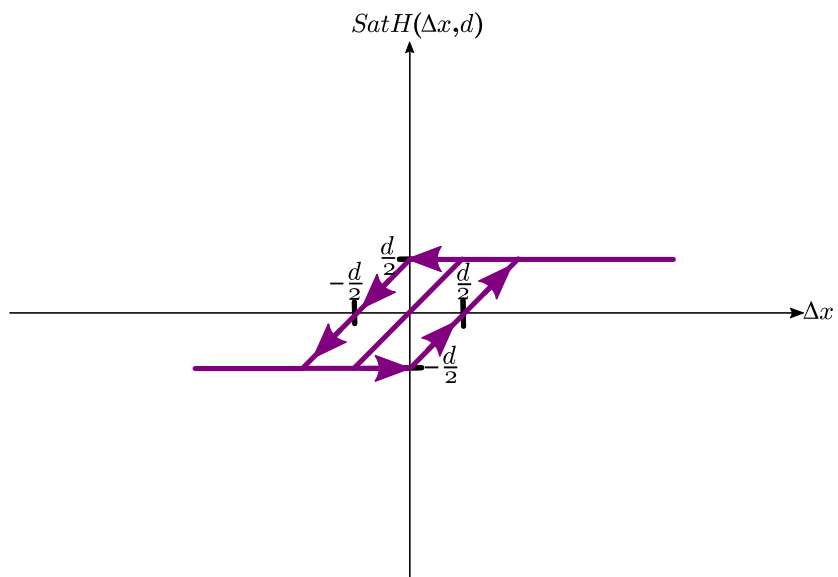


Figura 7. Función saturación con histéresis $SatH(x, d)$.

uno a la vez, un modelo simplificado del modelo de (24) es

$$B(\Delta x, d) = Sat(\Delta x, d) - \Delta x, \quad (25)$$

donde

$$Sat(\Delta x, d) = \frac{1}{2\rho} \left(\log \left(\cosh \left(\rho \left(\Delta x + \frac{d}{2} \right) \right) \right) - \log \left(\cosh \left(\rho \left(\Delta x - \frac{d}{2} \right) \right) \right) \right), \quad (26)$$

y $\rho = 10/d$. La función (26) es una versión suave de la función saturación y es una función \mathcal{C}^k ; este modelo es el que se utilizará en este trabajo.

Es importante notar que las derivadas de la función $Sat(\Delta x, d)$ están dadas por

$$\dot{Sat}(\Delta x, d) = \frac{\partial Sat(\Delta x, d)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial Sat(\Delta x, d)}{\partial x_3} x_4,$$

tomando en cuenta que

$$\frac{\partial Sat(\Delta x, d)}{\partial x_1} = 0,2171 \left(-\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) + \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right)$$

$$\frac{\partial Sat(\Delta x, d)}{\partial x_3} = 0,2171 \left(\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) - \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right)$$

luego

$$\begin{aligned} \dot{Sat}(\Delta x, d) &= 0,2171 x_2 \left(-\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) + \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right) \\ &+ 0,2171 x_4 \left(\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) - \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \ddot{Sat}(\Delta x, d) &= \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &+ \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_4} \dot{x}_4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_1} &= \frac{2,171}{d} x_2 \left(-\tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) + \tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right) + \\ &\quad \frac{2,171}{d} x_4 \left(-\tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) + \tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_2} = 0,2171 \left(-\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) + \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_3} &= \frac{2,171}{d} x_2 \left(\tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) - \tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right) + \\ &\quad \frac{2,171}{d} x_4 \left(\left(-\tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) \right) + \tanh^2 \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{Sat}(\Delta x, d)}{\partial x_4} = 0,2171 \left(\tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 + \frac{d}{2} \right) \right) - \tanh \left(\frac{10}{d} \left(x_3 - x_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right).$$

Si el estado es acotado para todo $t \geq t_0$, se tiene que las primeras dos derivadas con respecto al tiempo de la función $Sat(\Delta x, d)$ son acotadas.

Sustituyendo (25) en (23) se tiene

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (27)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \frac{k_a}{m_1}u + \gamma_1(\cdot), \quad (28)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (29)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{b_2}{m_2}x_4 - \frac{k_2}{m_2}Sat(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot), \quad (30)$$

$$y_1 = x_1, \quad (31)$$

$$y_2 = x_3. \quad (32)$$

Basados en las definiciones anteriores, se establece el objetivo de control, siendo este el diseño de una señal de control u tal que la salida de la masa subactuada converja en forma asintótica a una referencia $r(t)$ que puede ser constante o variante en el tiempo, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_3 - r(t)\| = 0,$$

donde $r(t)$ es una función C^k con una k suficientemente grande.

Para resolver este problema, se define las variables de error $e_1 = x_3 - r(t)$ y $e_2 = x_4 - \dot{r}(t)$, cuya dinámica está dada por

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (33)$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{k_2}{m_2}e_1 - \frac{k_2}{m_2}e_2 - \frac{k_2}{m_2}r(t) - \frac{b_2}{m_2}\dot{r}(t) - \ddot{r}(t) + \Gamma(\cdot) + \frac{k_2}{m_2}x_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \frac{k_a}{m_1}u + \gamma_1(\cdot),$$

donde

$$\Gamma(\cdot) = -\frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot),$$

es una perturbación acotada

$$|\Gamma(\cdot)| < \sigma.$$

Ahora, el objetivo de control es diseñar una entrada de control u de tal forma que las variables de error tiendan a cero mientras x_1 y x_2 permanecen acotadas, en los siguientes capítulos se describirá la estrategia para el diseño de la señal de control u .

Capítulo 4

Solución conceptual del problema de control

En este capítulo se propone la estrategia de control que resuelve el problema de control considerando que todos los estados y las perturbaciones son conocidas, en el siguiente capítulo se mostrará una forma de implementarla.

El sistema (33) puede dividirse en dos subsistemas; un subsistema subactuado

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\frac{k_2}{m_2}e_1 - \frac{b_2}{m_2}e_2 + \Gamma(\cdot) - \frac{k_2}{m_2}r(t) - \frac{b_2}{m_2}\dot{r}(t) - \ddot{r}(t) + \frac{k_2}{m_2}x_1, \end{aligned} \quad (34)$$

y un subsistema actuado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 - \frac{b_1}{m_1}x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 - \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \frac{k_a}{m_1}u. \end{aligned} \quad (35)$$

Como se puede ver, la entrada de control no aparece en el subsistema (34), por lo que se considera a la variable de estado x_1 como una entrada de control para dicho subsistema. Entonces, si $x_1 = x_r$ donde

$$x_{1r} = \frac{m_2}{k_2} \left(\frac{k_2}{m_2}r(t) + \frac{b_2}{m_2}\dot{r}(t) + \ddot{r}(t) - \Gamma(\cdot) - k_{p1}e_1 - k_{d1}e_2 \right), \quad (36)$$

el origen $e_1 = 0$ y $e_2 = 0$ será un punto de equilibrio asintóticamente estable. Sustituyendo (36) en (34) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\left(\frac{k_2}{m_2} + k_{p1}\right)e_1 - \left(\frac{b_2}{m_2} + k_{d1}\right)e_2, \end{aligned} \quad (37)$$

donde k_{p1} y k_{d1} son constantes positivas, y dado que k_2 , b_2 y m_2 son constantes positivas, se garantiza que el origen del subsistema (37) es un punto de equilibrio exponencialmente estable.

Ahora, el objetivo de control del subsistema actuado (35) es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1 - x_{1r}\| = 0.$$

Definiendo las variables de error $e_3 = x_1 - x_{1r}$ y $e_4 = x_2 - \dot{x}_{1r}$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}e_3 - \frac{b_1}{m_1}e_4 + \frac{k_2}{m_1}x_3 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} - \frac{b_1}{m_1}\dot{x}_{1r} - \ddot{x}_{1r} \\ &\quad - \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \gamma_1(\cdot) + \frac{k_a}{m_1}u, \\ y_e &= e_3, \end{aligned} \tag{38}$$

luego, para estabilizar el origen de (38) se propone

$$u = \frac{m_1}{k_a} \left(-\frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} - \Psi(\cdot) - k_{p2}e_3 - k_{d2}e_4 \right), \tag{39}$$

donde

$$\Psi(\cdot) = -\frac{b_1}{m_1}\dot{x}_{1r} - \ddot{x}_{1r} - \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \gamma_1(\cdot)$$

es una perturbación acotada.

Sustituyendo (39) en (38) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + k_{p2} \right) e_3 - \left(\frac{b_1}{m_1} + k_{d2} \right) e_4. \end{aligned} \tag{40}$$

Dado que las constantes k_1, k_2, b_1, k_{p2} y k_{d2} son positivas, el origen de (40) es un punto de equilibrio exponencialmente estable; como en (40), k_{p2} y k_{d2} son ganancias del control para mejorar el desempeño del controlador en lazo cerrado.

4.1 Análisis de estabilidad

Para probar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se considera el siguiente sistema de error

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\frac{k_2}{m_2}e_1 - \frac{b_2}{m_2}e_2 + \Gamma(\cdot) - \frac{k_2}{m_2}r(t) - \frac{b_2}{m_2}\dot{r}(t) - \ddot{r}(t) + \frac{k_2}{m_2}x_1, \\ \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}e_3 - \frac{b_1}{m_1}e_4 + \frac{k_2}{m_1}x_3 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} + \Psi(\cdot) + \frac{k_a}{m_1}u. \end{aligned} \quad (41)$$

con

$$u = \frac{m_1}{k_a} \left(-\frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} - \Psi(\cdot) - k_{p2}e_3 - k_{d2}e_4 \right),$$

entonces e_3 y e_4 convergen a cero exponencialmente; entonces x_1 converge exponencialmente a x_{1r} independientemente del comportamiento de e_1 y e_2 . Ahora x_{1r} se puede reescribir como

$$x_1 = \frac{m_2}{k_2} \left(\frac{k_2}{m_2}r(t) + \frac{b_2}{m_2}\dot{r}(t) + \ddot{r}(t) - \Gamma(\cdot) - k_{p1}e_1 - k_{d1}e_2 \right) + e_3. \quad (42)$$

Sustituyendo 42 en 41 se tiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\left(\frac{k_2}{m_2} + k_{p1}\right)e_1 - \left(\frac{b_2}{m_2} + k_{d1}\right)e_2 + \frac{k_2}{m_2}e_3, \\ \dot{e}_3 &= e_4, \\ \dot{e}_4 &= -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + k_{p2}\right)e_3 - \left(\frac{b_1}{m_1} + k_{d2}\right)e_4, \end{aligned} \quad (43)$$

donde

$$\frac{k_2}{m_2} |e_3| \leq \rho_0 e^{-\sigma_0 t},$$

para algunas constantes positiva ρ_0 y σ_0 . Por lo tanto, existe un conjunto de constantes k_{p1}, k_{p2}, k_{d1} y k_{d2} tal que el origen del sistema (43) sea un punto de equilibrio asintóticamente estable en un región suficientemente grande $\Omega \subset \mathfrak{R}^4$.

Capítulo 5

Implementación de la solución conceptual

Dado que la solución conceptual es ideal, en este capítulo se presenta una estrategia para implementar dicha solución tomando en cuenta que no se tiene la medición del vector de estado completo, así como de las variaciones paramétricas, además la solución conceptual considera términos adicionales que no están disponibles para su implementación. La estrategia propuesta se basa en el uso de observadores discontinuos que, además de estimar el vector de velocidad, estima los términos de perturbación en la planta y los términos necesarios para implementar la señal de control.

La solución conceptual no se puede implementar directamente debido a que las perturbaciones $\Gamma(\cdot)$ y $\Psi(\cdot)$, el estado x_4 y el error e_4 no están disponibles. Para resolver estos problemas, en este capítulo, se presenta la estrategia para implementar la entrada de control (39) basada en la estructura de control rechazo de perturbación activa, donde se utiliza un observador de estado discontinuo para estimar los estados y los términos desconocidos a través de un filtro pasa bajas.

Para estimar x_4 , e_4 , $\Gamma(\cdot)$ y $\Psi(\cdot)$ se proponen dos observadores de estado robustos basados en el observador propuesto en [38], el cual ha mostrado buen desempeño en la práctica.

5.1 Estimación de x_4 y $\Gamma(\cdot)$

Una de las primeras señales a implementar es x_{1r} dada por

$$x_{1r} = \frac{m_2}{k_2} \left(\frac{k_2}{m_2} r(t) + \frac{b_2}{m_2} \dot{r}(t) + \ddot{r}(t) - \Gamma(\cdot) - k_{p1} e_1 - k_{d1} e_2 \right),$$

donde

$$\Gamma(\cdot) = -\frac{k_2}{m_1} Sat(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot), e_1 = x_3 - r(t) \text{ y } e_2 = x_4 - \dot{r}(t)$$

es importante notar que el término de perturbación $\Gamma(\cdot)$ contiene al término de $-(k_2/m_1) Sat(\Delta x, d)$ debido a la holgura mecánica considerando la igualdad propuesta en [37], así como el término $\gamma_2(\cdot)$ que incluye a las variaciones paramétricas. Por otro lado, en la variable de error $e_2 = x_4 - \dot{r}(t)$ sólo se conoce a $\dot{r}(t)$, por lo que es necesario estimar a la variable de estado x_4 .

Recordando el sistema formado por las ecuaciones (29), (30) y (32),

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{b_2}{m_2} x_4 - \frac{k_2}{m_2} Sat(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot), \end{aligned} \quad (44)$$

$$y_2 = x_3, \quad (45)$$

se proponen el observador de estado dado por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_4 + c_4(y_2 - \tilde{y}_2), \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{b_2}{m_2} \tilde{x}_4 + c_5(y_2 - \tilde{y}_2) + c_6 sign(y_2 - \tilde{y}_2), \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{x}_3. \end{aligned} \quad (46)$$

Para demostrar la estabilidad del observador se definen las variables de error $z_3 = x_3 - \tilde{x}_3$, $z_4 = x_4 - \tilde{x}_4$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= z_4 - c_4 z_3, \\ \dot{z}_4 &= -\frac{b_2}{m_2} z_4 + \Gamma(\cdot) - c_5 z_3 - c_6 sign(z_3), \end{aligned}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la perturbación que se quiere estimar. Ahora, con un cambio de variables $v_3 = z_3, v_4 = z_4 - c_4 z_3$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 &= v_4, \\ \dot{v}_4 &= -\left(\frac{b_2}{m_2}c_4 + c_5\right)v_3 - \left(\frac{b_2}{m_2} + c_4\right)v_4 - c_6 \text{sign}(v_3) + \Gamma(\cdot), \end{aligned} \quad (47)$$

ya que la perturbación $\Gamma(\cdot)$ es acotada se pueden encontrar constantes c_4, c_5 y c_6 que garantizan la convergencia exponencial al origen del sistema (47), por lo que la variable \tilde{x}_4 converge a x_4 y el control equivalente es igual al término de perturbación $\Gamma(\cdot)$, el cual se puede obtener filtrando al término $c_6 \text{sign}(v_3)$ utilizando un filtro pasa bajas [38].

5.2 Estimación de e_4 y $\Psi(\cdot)$

Ahora se estiman los términos e_4 y $\Psi(\cdot)$ que son necesarios para implementar la señal de control u dada por

$$u = \frac{m_1}{k_a} \left(-\frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} - \Psi(\cdot) - k_{p2}e_3 - k_{d2}e_4 \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi(\cdot) &= -\frac{b_1}{m_1}\dot{x}_{1r} - \ddot{x}_{1r} - \frac{k_2}{m_1} \text{Sat}(\Delta x, d) + \gamma_1(\cdot), \\ e_3 &= x_1 - x_{1r}, \\ e_4 &= x_2 - \dot{x}_{1r}, \end{aligned}$$

es claro ver que en $\Psi(\cdot)$, además de contener a las variaciones paramétricas $\gamma_1(\cdot)$ y al término debido a la holgura mecánica, contiene términos debidos a control x_{1r} , que para implementar el control se requieren sus derivadas.

Recordando el sistema (38) que está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{e}_3 &= e_4, \\
\dot{e}_4 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}e_3 - \frac{b_1}{m_1}e_4 + \frac{k_2}{m_1}x_3 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} - \frac{b_1}{m_1}\dot{x}_{1r} - \ddot{x}_{1r} \\
&\quad - \frac{k_2}{m_1}Sat(\Delta x, d) + \gamma_1(\cdot) + \frac{k_a}{m_1}u, \\
y_e &= e_3,
\end{aligned}$$

se propone el siguiente observador de estado

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{e}}_3 &= \tilde{e}_4 + c_1(y_e - \tilde{y}_e), \\
\dot{\tilde{e}}_4 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}e_3 - \frac{b_1}{m_1}\tilde{e}_4 + \frac{k_2}{m_1}x_3 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_{1r} + \frac{k_a}{m_1}u \\
&\quad + c_2(y_e - \tilde{y}_e) + c_3sign(y_e - \tilde{y}_e), \\
\tilde{y}_e &= \tilde{e}_3.
\end{aligned} \tag{48}$$

Para demostrar la estabilidad del observador se definen las variables de error $z_1 = e_3 - \tilde{e}_3$, $z_2 = e_4 - \tilde{e}_4$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 - c_1z_1, \\
\dot{z}_2 &= -\frac{b_1}{m_1}z_2 + \Psi(\cdot) - c_2z_1 - c_3sign(z_1),
\end{aligned}$$

donde $\Psi(\cdot)$ es la perturbación que se desea estimar. Luego, con un cambio de variables $v_1 = z_1, v_2 = z_2 - c_4z_1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= v_2, \\
\dot{v}_2 &= -\left(\frac{b_1}{m_1}c_1 + c_2\right)v_1 - \left(\frac{b_1}{m_1} + c_1\right)v_2 - c_3sign(v_1) + \Psi(\cdot),
\end{aligned} \tag{49}$$

Por último, de las secciones anteriores y de acuerdo con [38] y [39], es posible encontrar un conjunto de constantes c_1, c_2 y c_3 tal que el origen del sistema de error sea un punto de equilibrio asintóticamente estable en una región del espacio de estado y se garantiza que \tilde{e}_4 es una estimación de e_4 .

También, el sistema (49) presenta un modo deslizante de segundo orden en $v_1 = 0$ y $v_3 = 0$, [38], [39], donde el control equivalente u_{eq} está dado por

$$u_{eq} = \Psi(\cdot),$$

para el sistema (49). El control equivalente u_{eq} está en las componentes de bajas frecuencias del término discontinuo en el observador cuando las trayectorias se encuentran en la superficie de deslizamiento y se puede recuperar utilizando un filtro pasa bajas [9]. De esta manera se estiman todos los términos necesarios para implementar la señal de control (39). Un diagrama a bloque de la implementación propuesta se puede observar en la Figura 8.

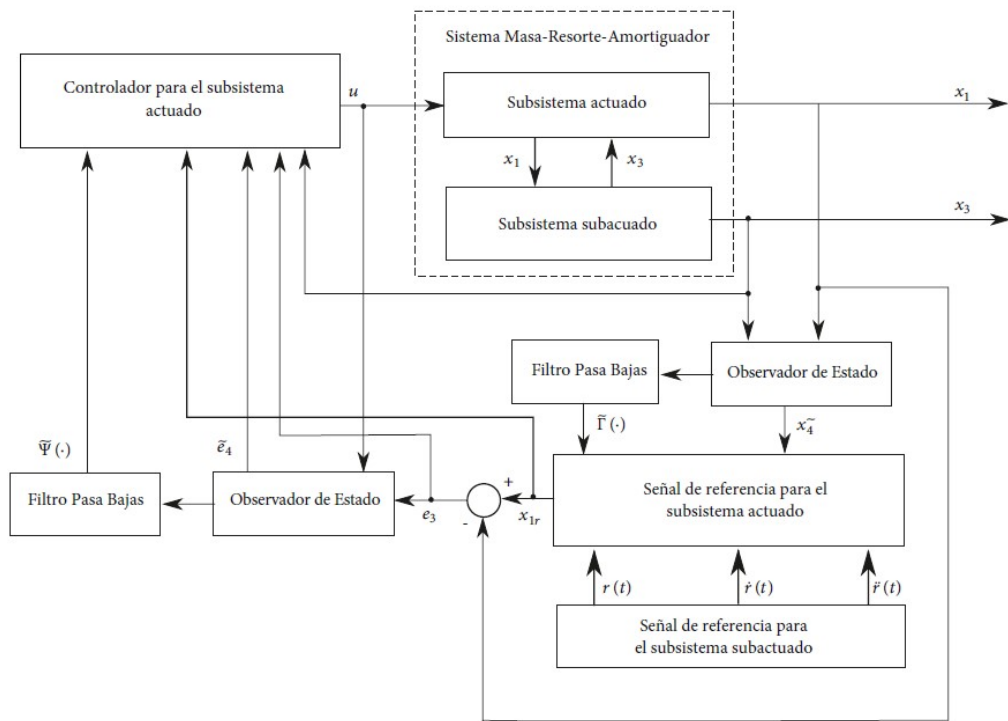


Figura 8. Diagrama a bloques de la implementación del algoritmo propuesto.

Capítulo 6

Desempeño de la estrategia de control

En este capítulo se muestra el desempeño de la estrategia de control propuesta en un sistema masa-resorte-amortiguador, modelo 210, de la empresa Educational Control Products, el cual se muestra en la Figura 9. Para introducir la holgura mecánica se modificó la unión entre el segundo resorte k_2 y la masa m_2 , ver Figura 10.

6.1 Implementación del sistema en lazo cerrado

Se consideraron dos casos de longitud de la holgura mecánica d ; $d = 0,001m$ y $d = 0,01m$, siendo los parámetros nominales del sistema $m_1 = m_2 = 0,49kg$, $k_1 = 121.61N/m$, $k_2 = 77.81N/m$, $b_1 = 1,73kg/seg$, $b_2 = 1,84kg/seg$, $k_m = 1,19N/V$.

Sustituyendo parámetros nominales el modelo de la planta queda como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -406.98x_1 - 3.53x_2 + 158.8x_3 + 158.8Sat(\Delta x, d) + 2.43u + \gamma_1(\cdot), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= 158,8x_1 - 158,8x_3 - 3,76x_4 - 158,8Sat(\Delta x, d) + \gamma_2(\cdot),\end{aligned}$$

mientras los observadores de estado (48) y (46) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{e}}_3 &= \tilde{e}_4 + c_1(y_e - \tilde{y}_e), \\ \dot{\tilde{e}}_4 &= -406,98\tilde{e}_3 - 3,53\tilde{e}_4 + 158,8x_3 - 406,98x_{1r} + 2,43u \\ &\quad + c_2(y_e - \tilde{y}_e) + c_3sign(y_e - \tilde{y}_e), \\ \tilde{y}_e &= \tilde{e}_3.\end{aligned}$$

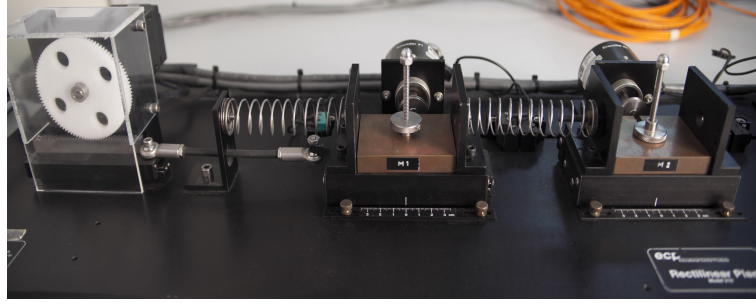


Figura 9. Sistema masa-resorte-amortiguador de 2GDL subactuado con holgura mecánica.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_4 + c_4 (y_2 - \tilde{y}_2), \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= 158,8x_1 - 158,8x_3 - 3,76\tilde{x}_4 + c_5 (y_2 - \tilde{y}_2) + c_6 \text{sign} (y_2 - \tilde{y}_2), \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{x}_3\end{aligned}$$

donde $c_1 = 50, c_2 = 1, c_3 = 10, c_4 = 50, c_5 = 1, c_6 = 5$, las constantes c_3 y c_6 se sintetizan considerando $d = 0,01m$. Para estimar los términos $\Gamma(\cdot)$ y $\Psi(\cdot)$ se utilizó un filtro butterworth pasa bajas de segundo orden

$$F_1(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 1,4142\omega_c s + \omega_c^2},$$

con una $\omega_c = 50\text{rad/seg}$.

La señal de control x_{1r} para la parte subactuada del sistema toma la siguiente forma

$$x_{1r} = \frac{1}{158,8} \left(-158,8e_1 - 3,76e_2 - 158,8r(t) - 3,76\dot{r}(t) - \ddot{r}(t) + \tilde{\Gamma}(\cdot) \right),$$

donde $e_1 = x_3 - r(t)$ y $e_2 = x_4 - \dot{r}(t)$. Finalmente, el control u de la parte actuada del sistema es

$$u = \frac{1}{2,59} \left(158,8x_3 - 406,98x_{1r} - \tilde{\Psi}(\cdot) - k_{p2}e_3 - k_{d2}e_4 \right),$$

donde $e_3 = x_1 - x_{1r}$ y $e_4 = x_2 - \dot{x}_{1r}$.



Figura 10. Holgura mecánica entre el resorte k_2 y la masa m_2 .

En las siguientes secciones se presentan los resultados numéricos y experimentales que muestran el desempeño de la estrategia de control. Para mostrar el efecto de la compensación de la perturbación causado por las variaciones paramétricas y por la holgura mecánica en el sistema de control, las simulaciones numéricas y los experimentos fueron desarrollados de la siguiente manera: primero, se aplica el control propuesto en lazo cerrado sin compensar las perturbaciones, en $t = 20\text{seg}$ se añade la estimación $\tilde{\Gamma}(\cdot)$ en la señal x_{1r} para compensar el término $\Gamma(\cdot)$, finalmente en $t = 40\text{seg}$ se le agrega el término $\tilde{\Psi}(\cdot)$ a la señal de control u para compensar el término $\Psi(\cdot)$.

Los experimentos fueron implementados en un controlador en tiempo real dSPACE 1103, utilizando el algoritmo Euler con paso fijo; todos los experimentos fueron realizados con un tiempo de muestreo $T_s = 0,00001\text{seg}$.

6.2 Desempeño del sistema para una holgura de 0.001m

En esta sección se muestra el desempeño de la estrategia de control propuesta para el caso de una holgura mecánica "pequeña"; $d = 0,001\text{m}$, con esto se busca resolver los casos de holgura en transmisiones y engranes. Primero se muestran resultados numéricos seguidos de los resultados experimentales.

6.2.1 Resultados numéricos

Con el fin de ilustrar el desempeño en forma teórica, en este apartado se muestran simulaciones numéricas para los objetivos de regulación y seguimiento de trayectoria.

En primer lugar se muestra el desempeño de la estrategia de control para el caso de regulación. La figura 11 muestra la señal de referencia, gráfica azul, que corresponde a un tren de pulsos, y la salida x_3 , gráfica verde. Como se puede observar, cuando no se tiene la compensación de las perturbaciones el error e_1 alcanza magnitudes muy grandes. Conforme se va incorporando la compensación de perturbaciones este error disminuye considerablemente, lo que se puede observar con mejor detalle en la figura 12. La señal de control se muestra en la

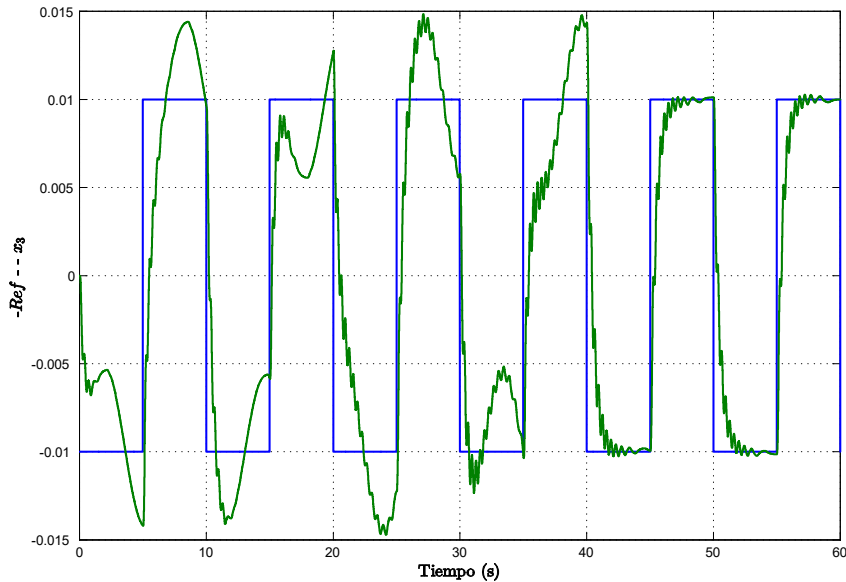


Figura 11. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Referencia $r(t)$ (azul) and x_3 (verde).

figura (13), en donde se observa que las componentes de alta frecuencia tienen una magnitud pequeña y que durante todo el tiempo el control toma valores que están en el rango adecuado para su implementación.

Para el caso de seguimiento de trayectorias, en la figura 14 se muestra la señal de referencia $r(t) = 0,01\text{sen}(t)$, línea negra, y la posición x_3 , línea roja. En la figura 15 se puede ver que el error es pequeño sin compensar las perturbaciones, sin embargo, cuando la compensación es aplicada el error disminuye aún más alrededor de $\pm 1 \times 10^{-4}m$. Es importante notar que la señal de control, ver figura 16 se mantiene en un rango apropiado para la implementación experimental del controlador.

6.2.2 Resultados experimentales

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la implementación física del controlador bajo los objetivos de regulación y seguimiento de trayectoria.

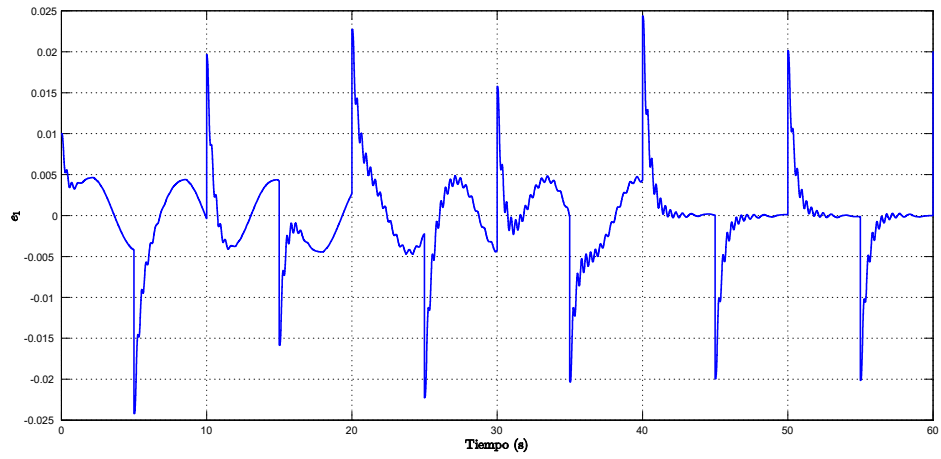


Figura 12. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Comportamiento del error e_1 .

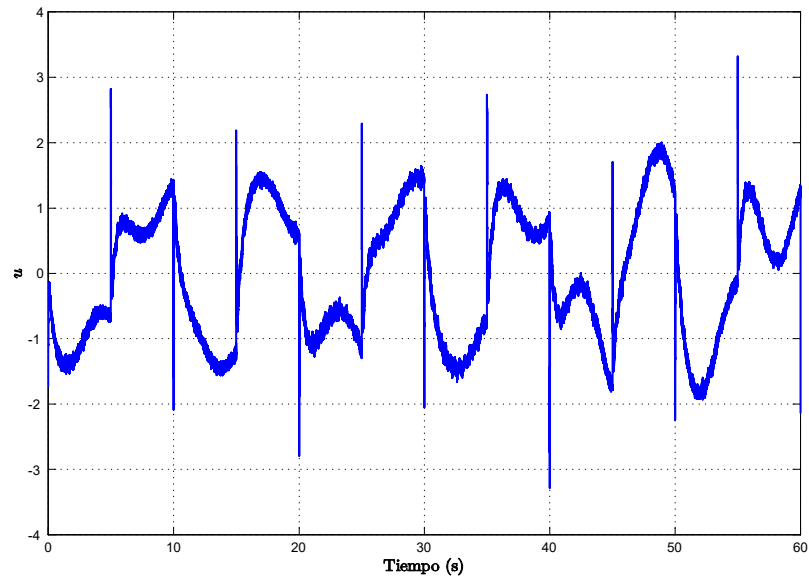


Figura 13. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$. Comportamiento de la señal de control u .

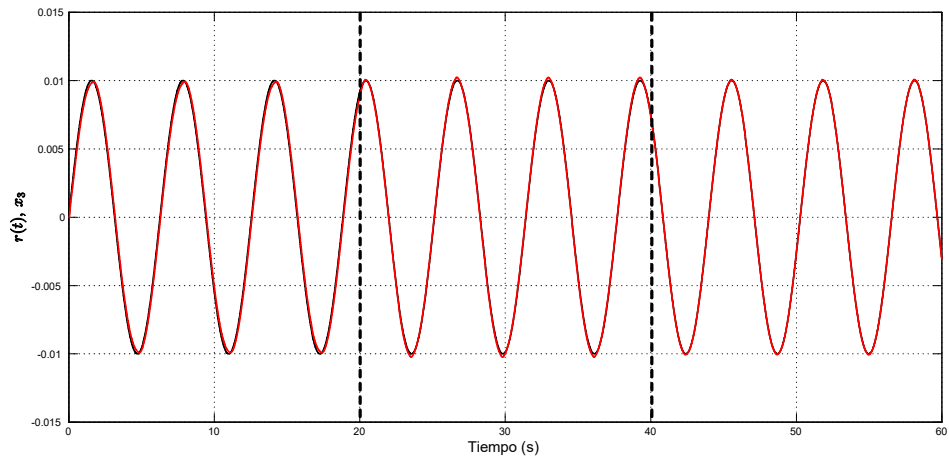


Figura 14. Referencia $r(t)$ (negro) and x_3 (rojo). Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$.

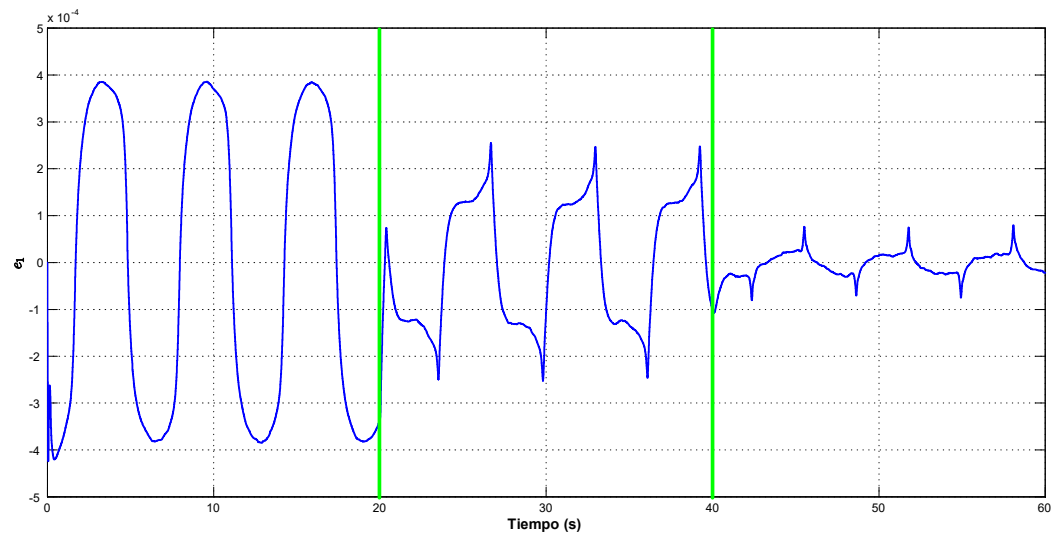


Figura 15. Error e_1 . Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$.

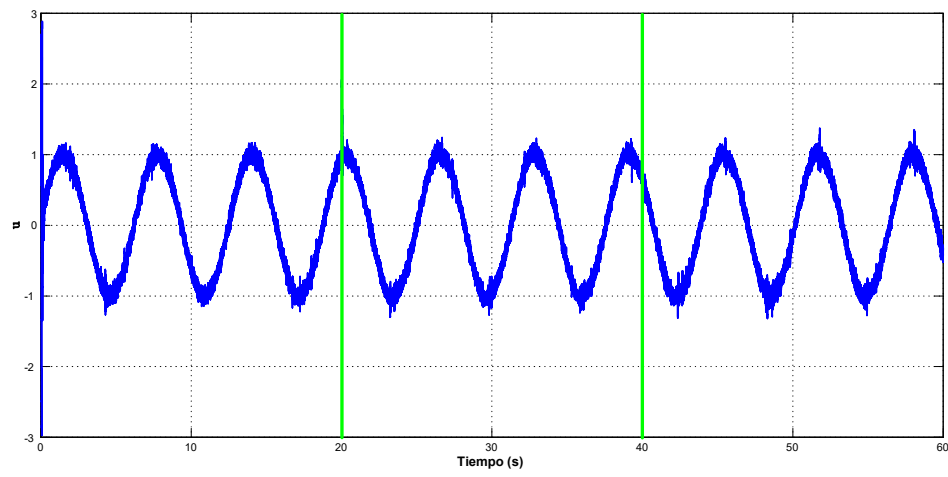


Figura 16. Señal de control u . Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,001m$.

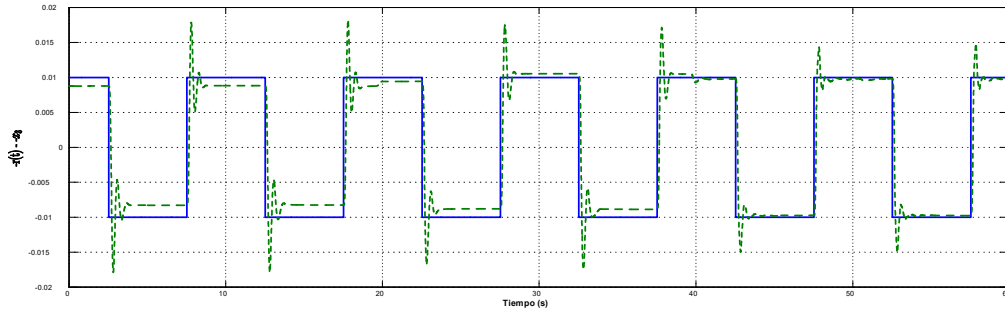


Figura 17. Resultados experimentales. Señal de referencia $r(t)$ (línea azul) y salida x_3 (línea verde), caso con $d = 0,001m$.

Para el objetivo de regulación se aplica una señal pulsada como referencia con una amplitud de $0,01m$ y una frecuencia de $0,1Hz$. Cuando no se compensa ninguna perturbación el error entre la referencia, línea negra en la figura 17, y la salida, línea roja en la figura 17, es grande. Después de compensar las perturbaciones se obtiene un error de alrededor de $2,5 \times 10^{-4}m$ como se puede ver en la figura 18. La entrada de control se encuentra en un rango adecuado de voltaje para todo tiempo, ver figura 19.

Para el caso de seguimiento de trayectorias, en la figura 20 se puede ver la señal de referencia $r(t)$ y la posición x_3 , línea negra y roja, respectivamente. A diferencia de las simulaciones, en los experimentos, el error de seguimiento es considerablemente grande cuando no se hace la compensación de las perturbaciones, pero decrece cuando estas son compensadas, ver figura 21. Se obtiene un error de seguimiento de $\pm 5 \times 10^{-4}m$, similar a las simulaciones numéricas. En este caso se puede ver claramente que la amplitud de la señal de control u se incrementa cuando se agregan el término $\tilde{\Psi}(\cdot)$ en $t = 40seg$, ver figura 22.

-

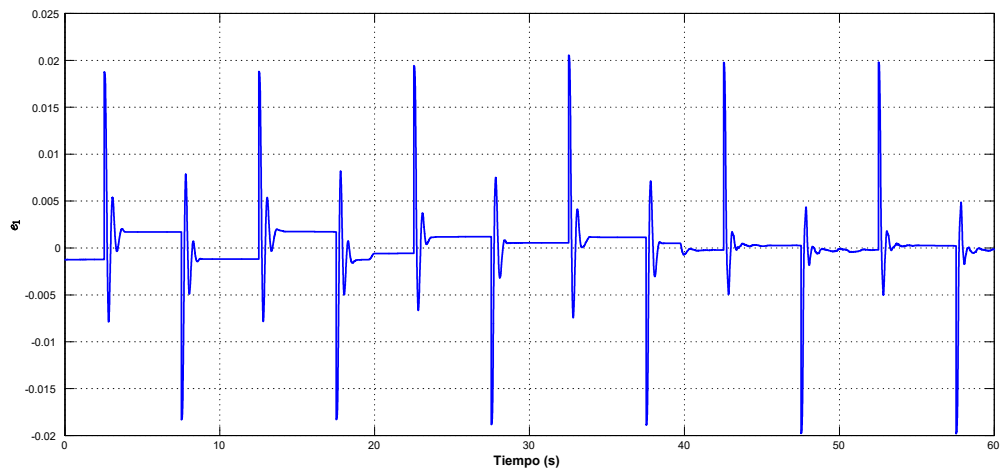


Figura 18. Resultados experimentales. Señal de error e_1 , caso con $d = 0,001m$.

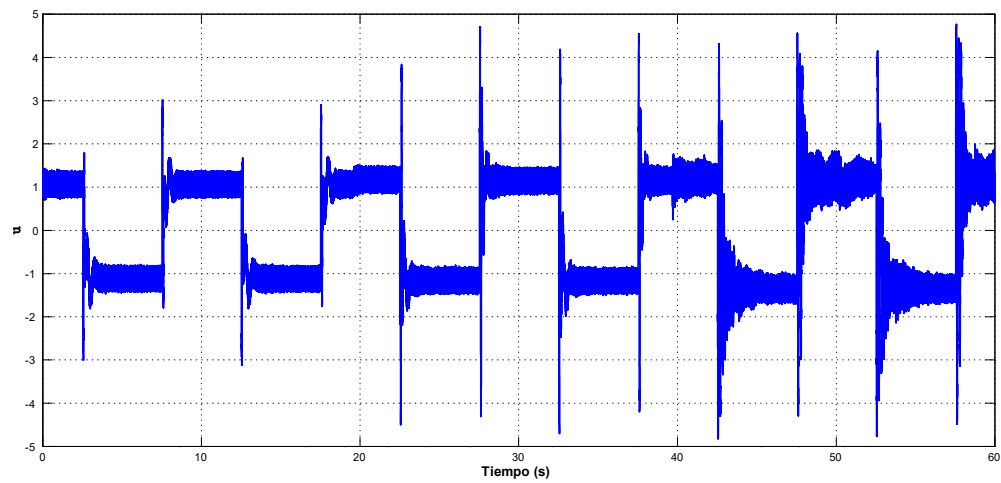


Figura 19. Resultados experimentales. Señal de control u , caso con $d = 0,001m$.

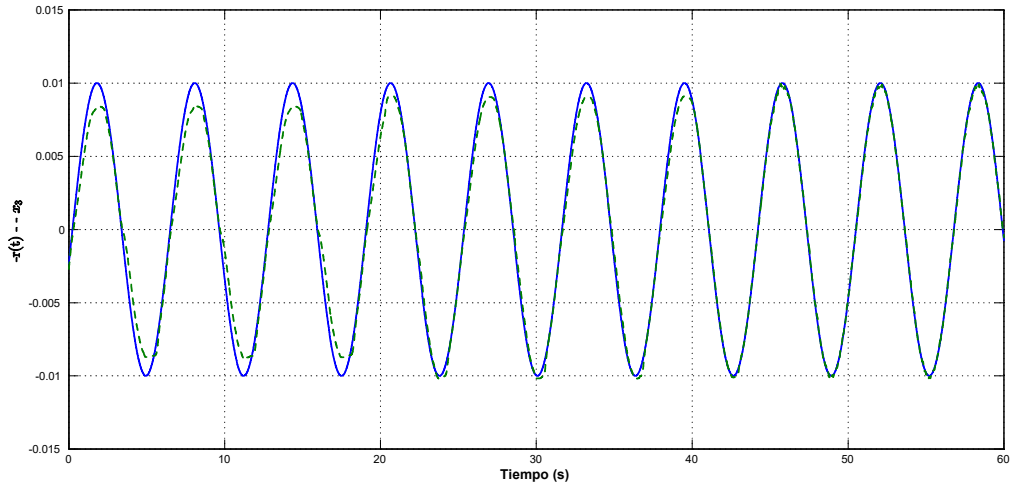


Figura 20. Referencia $r(t)$ y posición x_3 . Resultados experimentales con $d = 0,001m$.

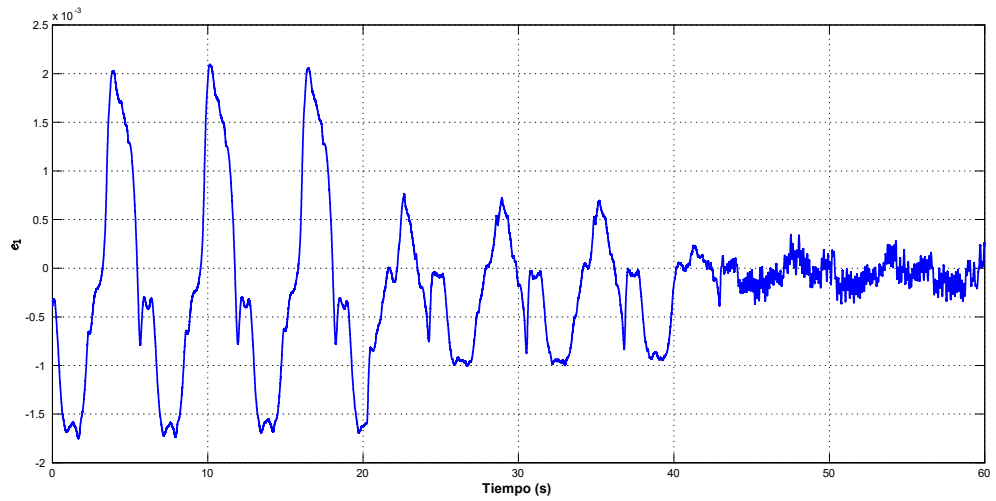


Figura 21. Error de seguimiento e_1 . Resultados experimentales con $d = 0,001m$.

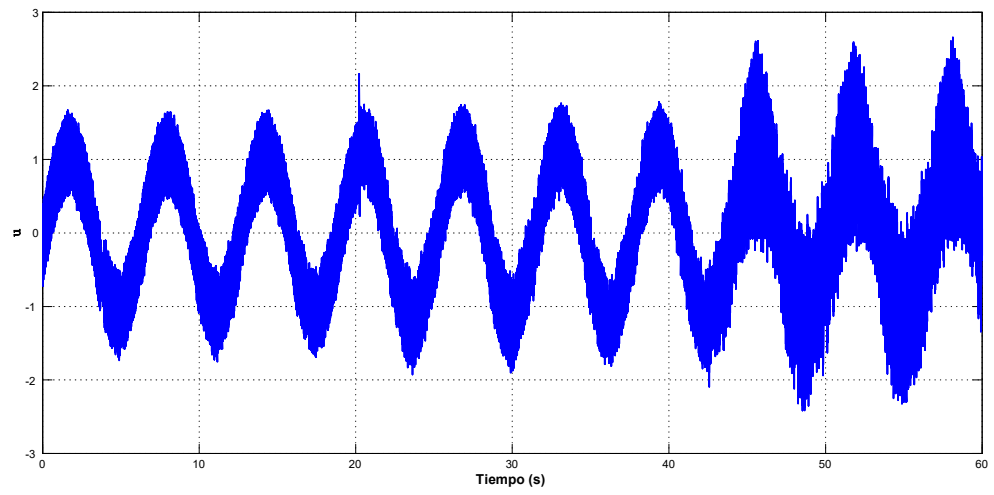


Figura 22. Control u . Resultados experimentales con $d = 0,001m$.

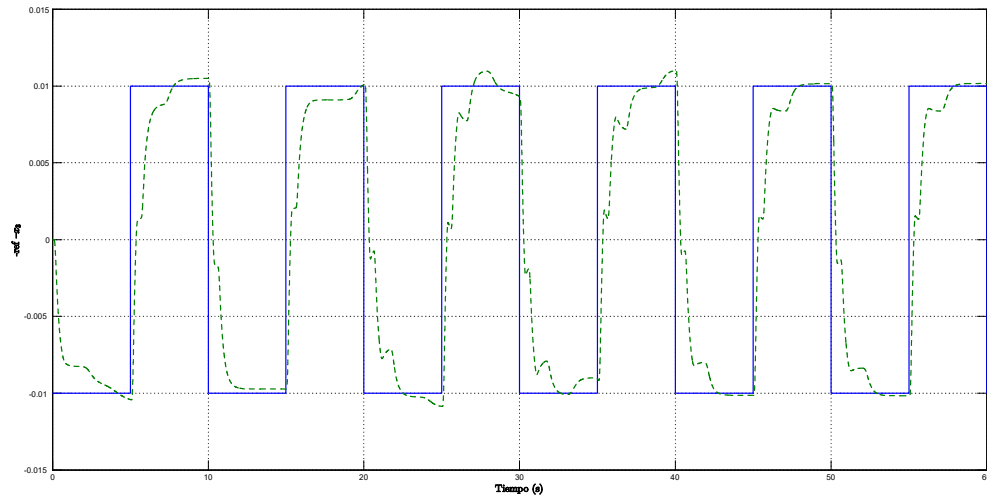


Figura 23. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Referencia $r(t)$ (azul) and x_3 (verde).

6.3 Desempeño del sistema para una holgura de 0.01m

En esta subsección, se muestra el caso cuando $d = 0,01m$, mostrando primero resultados numéricos para ver la viabilidad del controlador para este caso para posteriormente realizar la implementación experimental.

6.3.1 Resultados numéricos

Ahora se presenta los resultados numéricos para los objetivos de regulación y seguimiento de trayectoria. Los resultados para el caso de regulación se muestran en la figura 23, donde la señal de referencia es un tren de pulsos, gráfica de color rojo, con una amplitud de $0,01m$, es decir, es de la misma amplitud de la horgura. Durante el intervalo de tiempo en donde no se aplica la compensación de perturbaciones el error en estado estable es grande, pero al incorporar la compensación el error disminuye considerablemente, como se puede ver en la figura 24. La entrada de control se encuentra dentro del rango de operación adecuado para poder implementarse, ver figura 25.

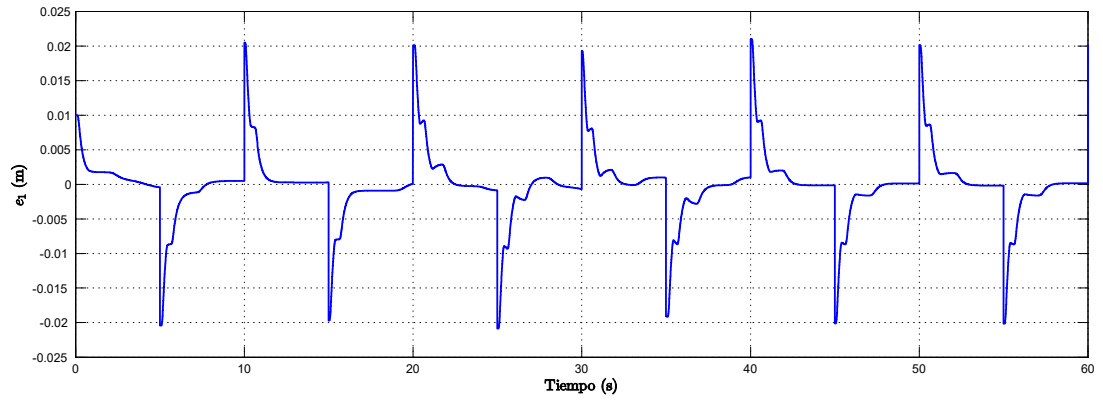


Figura 24. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Comportamiento del error e_1 .

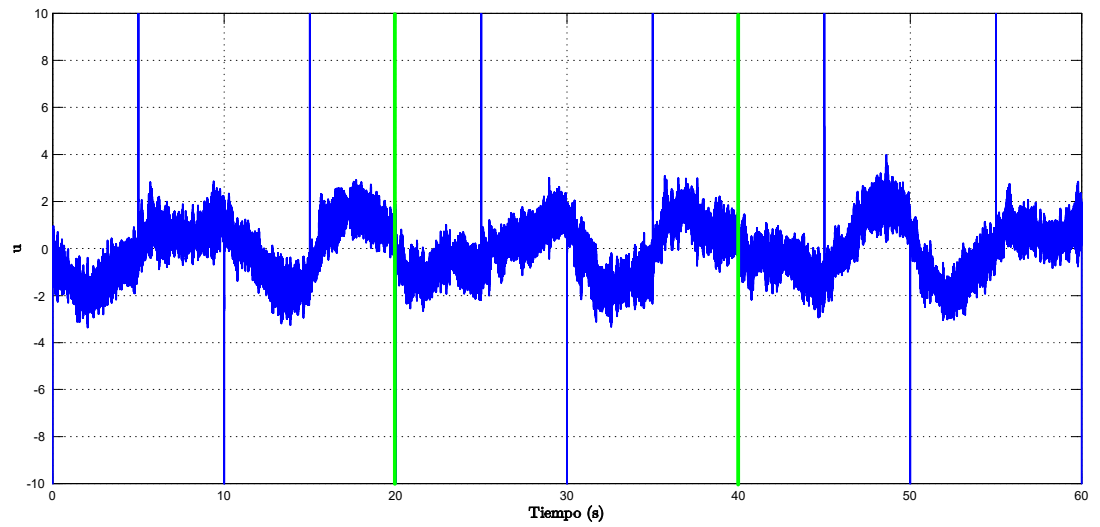


Figura 25. Resultados numéricos con holgura mecánica $d = 0,01m$. Comportamiento del control u .

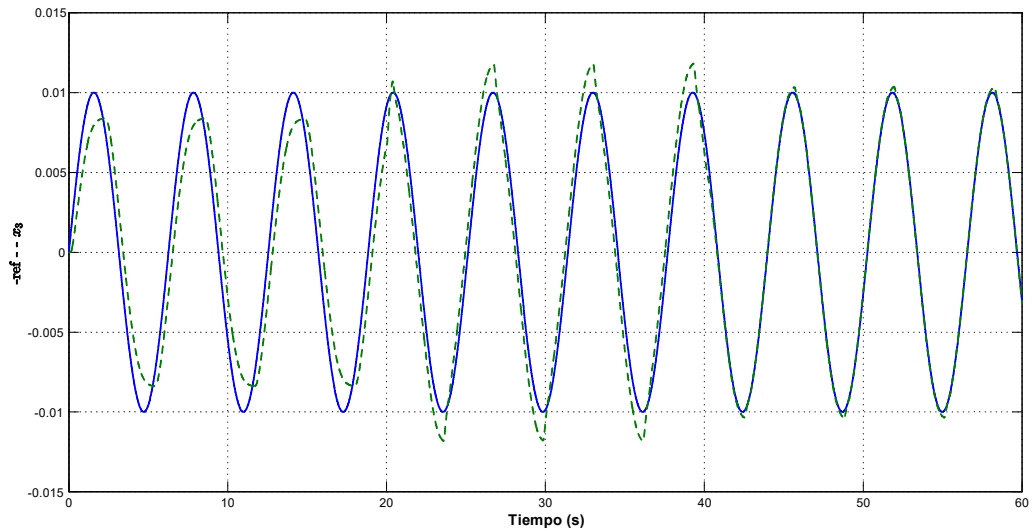


Figura 26. Referencia $r(t)$ (línea azul) y x_3 (línea verde). Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$.

Para el caso de seguimiento de trayectorias, en la figura 26 se muestra la señal de referencia $r(t) = 0,01sen(t)$, línea negra, y la posición x_3 , línea roja. Debido a que la holgura mecánica es mayor que el caso anterior, el error de seguimiento en lazo cerrado, sin la compensación de las perturbaciones, también es mayor. Cuando la compensación es hecha el error decrece, como se puede ver en la figura 27; el error de seguimiento es alrededor de $\pm 5 \times 10^{-4}m$. La entrada de control u , ver la figura 28, tiene un rango apropiado para la implementación experimental del controlador.

6.3.2 Resultados experimentales

Los resultados experimentales para una holgura $d = 0,01m$ son presentados en esta subsección. Dichos experimentos bajo los objetivos de control de regulación y seguimiento de trayectoria.

Para el objetivo de control de regulación se aplicó la misma señal pulsada que se utilizó en el caso 1 y se obtuvieron resultados similares. Cuando no se compensa ninguna perturbación

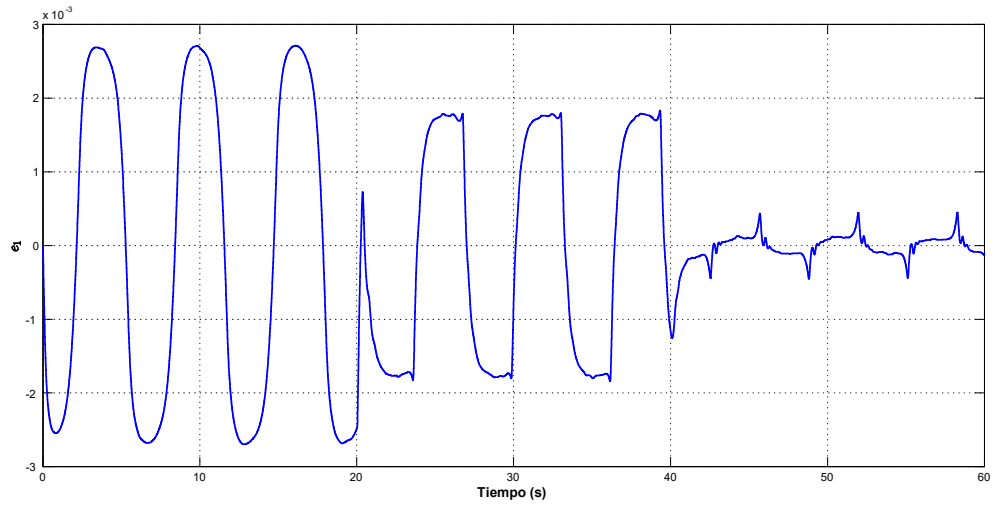


Figura 27. Error de seguimiento e_1 . Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$.

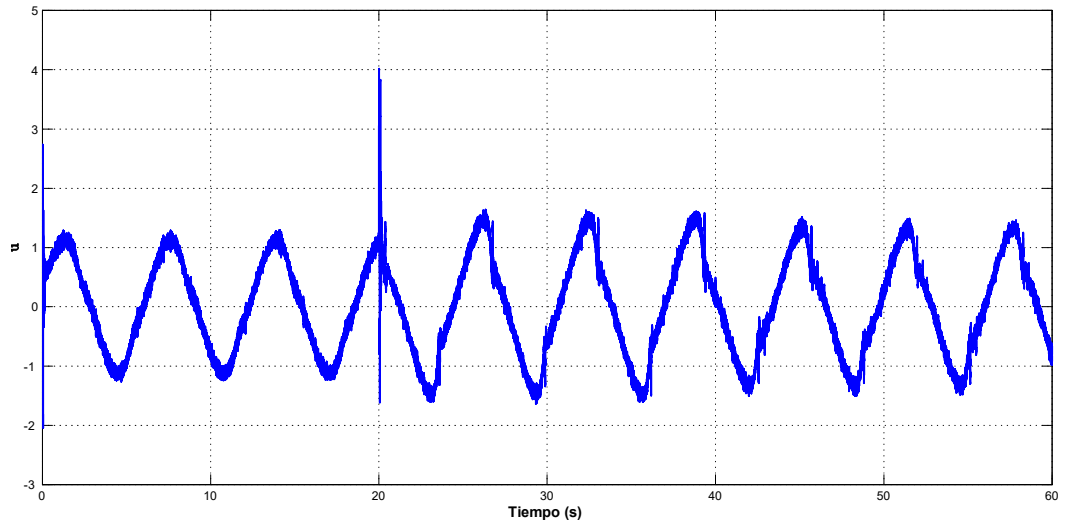


Figura 28. Señal de control u . Resultados numéricos con holgura $d = 0,01m$.

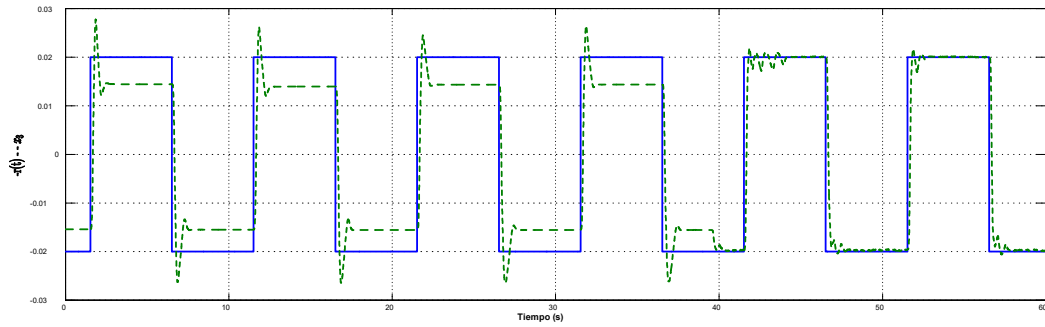


Figura 29. Resultados experimentales. Referencia $r(t)$ (línea negra) y x_3 (línea roja), caso con holgura $d = 0,01m$.

el error entre la referencia, línea negra en la figura 29, y la salida, línea roja 29, es grande. Después de la compensación de las perturbaciones se obtiene un error de alrededor de $1,4 \times 10^{-4}m$, como se puede ver en la figura 30. La entrada de control se mantiene en un rango adecuado para todo tiempo, ver figura 31.

Para el caso de seguimiento de trayectorias se cambió el parámetro d de $0,001m$ a $0,01m$ en las señales de control, pero los parámetros de los observadores, los filtros y las ganancias del controlador se mantuvieron sin cambio, son iguales que en las simulaciones.

El comportamiento de la posición x_3 , con respecto a la señal de referencia $r(t)$, es mostrado en la figura 32, mientras el error de seguimiento e_1 se muestra en la figura 33. En este experimento se puede observar que el error e_1 es grande cuando no se compensan las perturbaciones, decrece un poco cuando se agrega el término $\tilde{\Gamma}(\cdot)$ en x_{1r} , pero decrece considerablemente cuando se compensa el término $\tilde{\Psi}(\cdot)$ en la señal de control u . Se obtiene un error de seguimiento entre $\pm 2 \times 10^{-3}m$. La señal de control u se mantiene en el rango de $\pm 3V$, como se puede ver en la figura 34.

6.4 Control PID

Con el fin comparar el algoritmo de control propuesto, se implementó de forma experimental un control PID. Básicamente se consideró a la planta como un modelo de caja negra donde

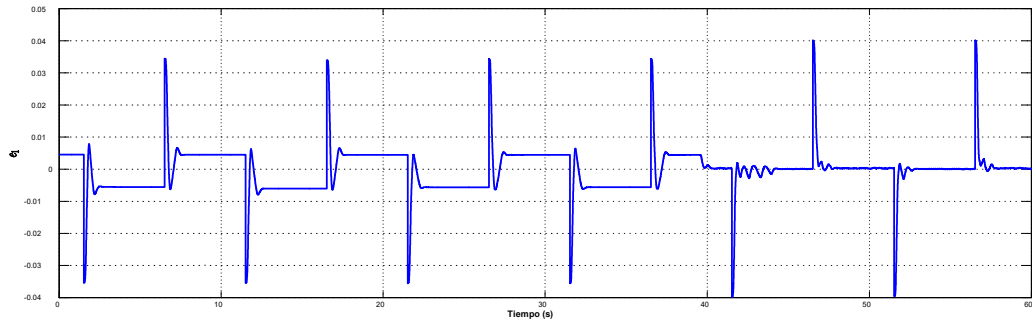


Figura 30. Resultados experimentales. Señal de error e_1 , caso con holgura $d = 0,01m$.

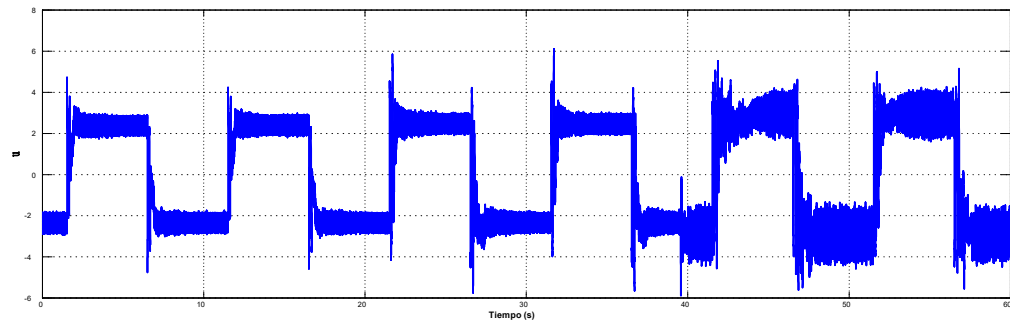


Figura 31. Resultados experimentales. Señal de control, caso con holgura $d = 0,01m$.

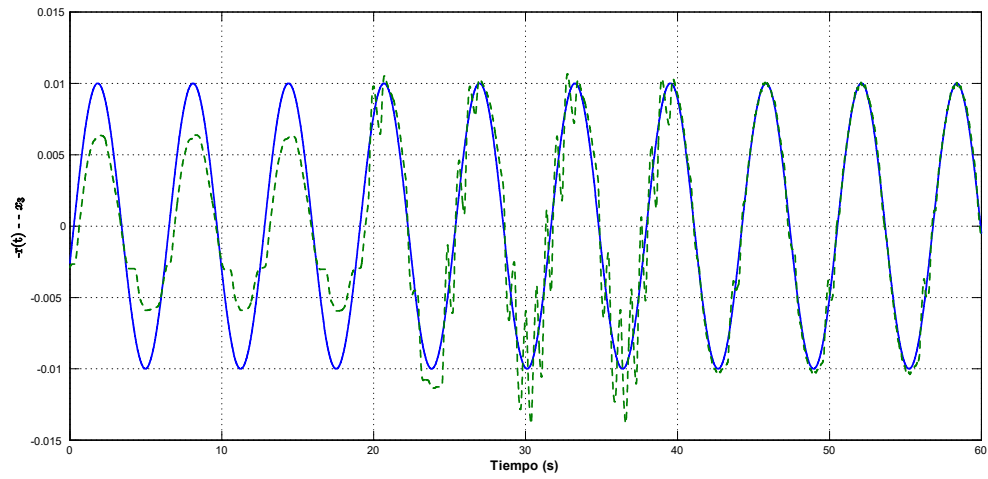


Figura 32. Referencia $r(t)$ y posición x_3 . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$.

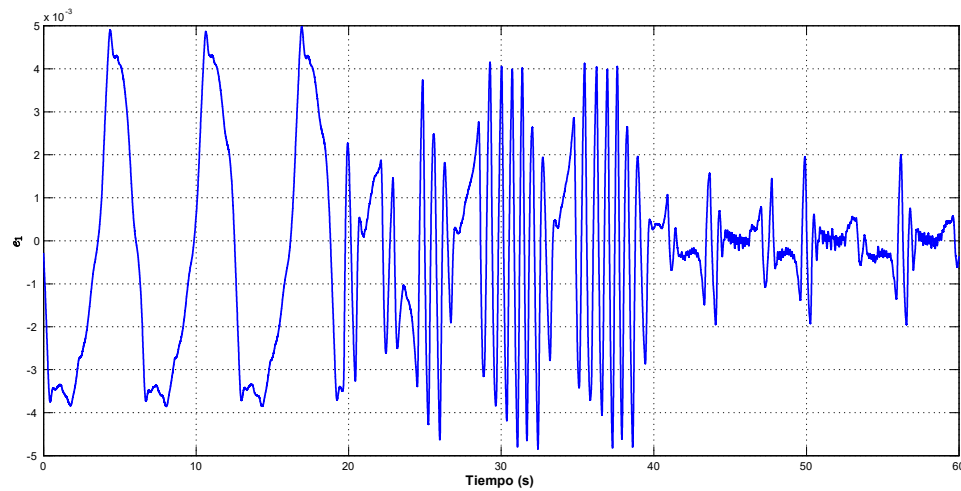


Figura 33. Error de seguimiento e_1 . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$.

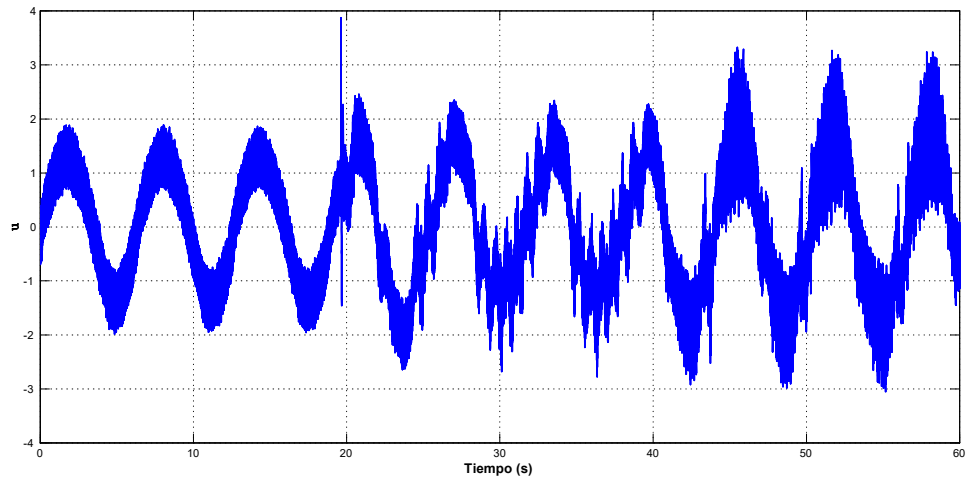


Figura 34. Señal de control u . Resultados experimentales con una holgura $d = 0,01m$.

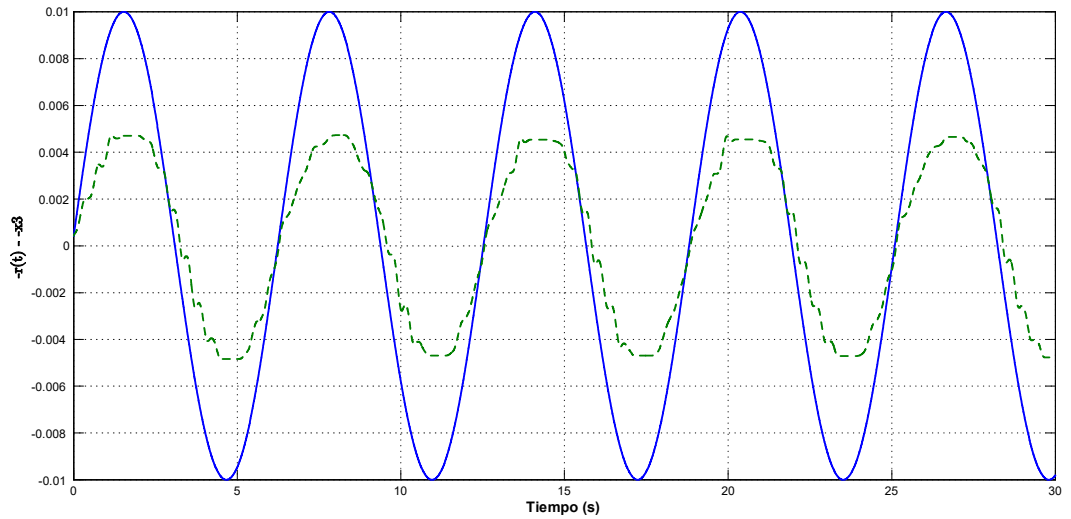


Figura 35. Referencia $r(t)$ y salida x_3 con el control PID.

se tiene una entrada u y una salida, en este caso x_3 . El control PID que se implementó tiene la siguiente forma

$$u = k_p e(t) + k_i \int e(t) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}$$

donde k_p es la ganancia proporcional, k_i es la ganancia integral, k_d es la ganancia derivativa y $e = r(t) - x_3$ es el error entre la referencia y la salida.

En la figura 35 podemos ver a la referencia y a la salida del sistema, se puede notar que hay un error considerablemente grande, esto se puede observar mejor en la figura 36. Por último, en la figura 37 se puede el control u . Las ganancias del experimento fueron $k_p = 200$, $k_i = 5$ y $k_d = 15$. Como conclusión de la comparación se puede decir que el desempeño del algoritmo de control propuesto es notablemente mejor que la implementación del control PID, esto en parte por considerar un modelo de una entrada y una salida, de ahí la importancia del algoritmo propuesto.

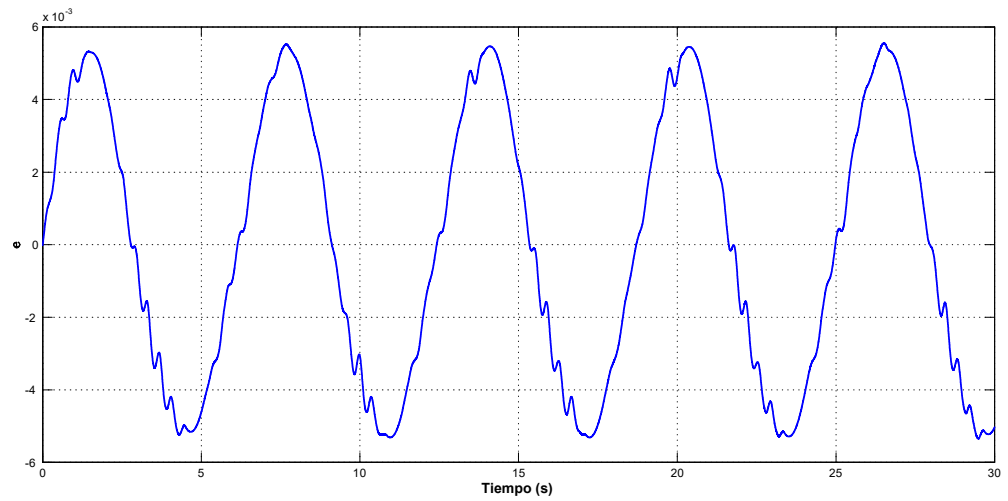


Figura 36. Error e_1 con el control PID.

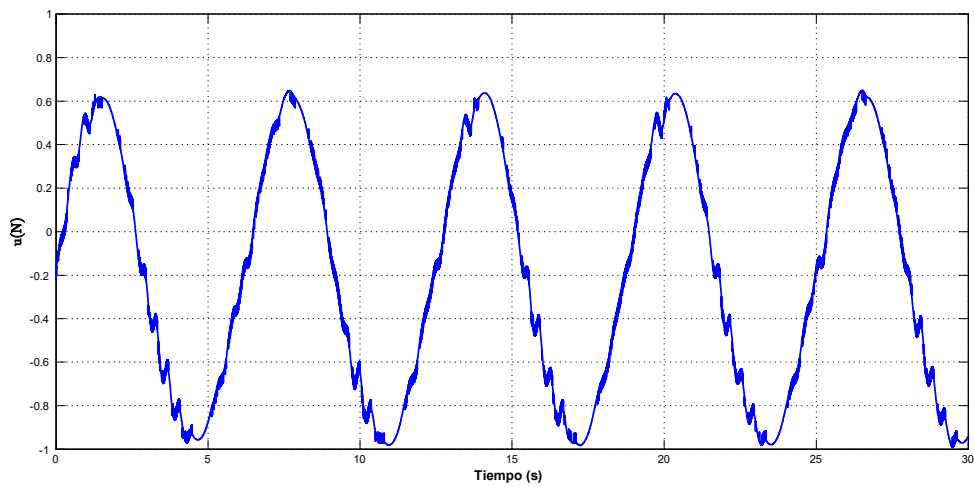


Figura 37. Control PID u .

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

Las conclusiones finales que se desprenden de este trabajo de tesis son las siguientes. La definición de un modelo adecuado del fenómeno de la holgura mecánica es un punto clave en la solución del problema de control. Sin embargo, más que buscar un modelo que represente con la mayor exactitud posible un fenómeno físico, hay que buscar un modelo que permita resolver el problema de control. A lo anterior se puede agregar que esta solución del problema no solo sea teórica, sino también práctica.

Por otro lado, ya que la estructura de control con compensación activa de perturbaciones (ADRC), con las modificaciones necesarias, pudo resolver adecuadamente los problemas de regulación y de seguimiento de trayectorias en el sistema que se abordó en esta tesis, es de esperarse que la ADRC sea una opción viable para resolver estos objetivos de control en una familia más amplia de sistemas subactuados.

En la práctica, el sistema mecánico masa resorte amortiguador tiene más términos no lineales y de perturbación que no fueron considerados en el modelo, como la zona muerta en el motor, la fricción seca y la dinámica del motor; a pesar de esto, el sistema en lazo cerrado presenta un buen desempeño. Por lo que se puede concluir que el sistema en lazo cerrado también es robusto a este tipo de perturbaciones que no se consideraron en el modelo.

Finalmente, es importante mencionar que las principales limitantes de la estrategia de control propuesta son dos. La primera es que se utiliza un observador discontinuo que depende un filtro pasa bajas para estimar los términos necesarios para implementar la señal de control. La calidad de la estimación depende fuertemente de la frecuencia de corte elegida, para lo cual no existe un criterio cuantitativo bien definido. El segundo problema es la necesidad de emplear una plataforma capaz de implementar sistemas de control en tiempo real, como la plataforma dSPACE 1103, que se utilizó en esta tesis y que tiene un costo elevado.

7.1 Trabajo futuro

En base a las anteriores conclusiones se pueden establecer diferentes líneas de investigación abiertas como las siguientes. Una primera línea de trabajo es definir criterios cuantitativos para el diseño de filtros pasa baja que mejoren la estimación de perturbaciones en sistemas mecánicos, lo cual mejorará el desempeño de los controladores que usan un filtro pasa bajas para recuperar el control equivalente para su posterior compensación.

Ya que el observador de estado es una de las partes principales de la estructura de control ADRC, otras líneas de investigación son incorporar otros observadores que hay en la literatura y que no necesitan el filtro pasa bajas para recuperar las perturbaciones, aunque en muchos de estos casos, una condición es que la derivada de la perturbación sea acotada, por lo que la fricción seca y el fenómeno de la holgura mecánica podrían causar problemas. Si estos observadores no permiten una solución más eficiente, entonces se deben de diseñar nuevas opciones de observadores de estado que permitan obtener mejores resultados.

Otra de las líneas de investigación importantes es buscar la forma de aplicar la estructura de control ADRC a una clase más amplia de sistemas subactuados bajo diferentes condiciones de perturbaciones.

Explorar la aplicación tanto de la identidad propuesta por Oldak [37] para la función de zona muerta como de la función de saturación propuesta en este trabajo con el fin de resolver problemas de holgura mecánica en sistemas completamente actuados.

Finalmente, con el objetivo de que la propuesta llegue a considerarse como un desarrollo tecnológico, otra línea de trabajo es buscar y definir plataformas alternativas para implementar la estructura de control que no tengan costos muy elevados, como circuitos analógicos basados en amplificadores operacionales.

Bibliografía

- [1] Spong, M. W., & Block, D. J. (1995, December). The Pendubot: A mechatronic system for control research and education. In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on* (Vol. 1, pp. 555-556). IEEE.
- [2] Spong, M. (1998). Underactuated mechanical systems. *Control problems in robotics and automation*, 135-150.
- [3] The swing up control problem for the acrobot. *Control Systems, IEEE*, 15(1):49–55, Feb 1995.
- [4] Spong, M. W. (1998). Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation* (pp. 135-150). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [5] Olfati-Saber, R. (2001). Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- [6] J.P.O. Oliver and O.A. Dominguez-Ramirez. Control based on swing up and balancing scheme for an underactuated system, with gravity and friction compensator. In *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, 2007. CERMA 2007*, pages 603–607, Sept 2007.
- [7] Begovich, O., Sanchez, E. N., & Maldonado, M. (2002). Takagi-Sugeno fuzzy scheme for real-time trajectory tracking of an underactuated robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(1), 14-20.
- [8] Lee, K., & Coverstone-Carroll, V. (1998). Control algorithms for stabilizing underactuated robots. *Journal of Robotic Systems*, 15(12), 681-697.
- [9] Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems* (Vol. 34). CRC press.
- [10] M.W. Spong, D.J. Block, and K.J. Astrom. The mechatronics control kit for education and research. In *Control Applications, 2001. (CCA'01). Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on*, pages 105–110, 2001.

- [11] Fantoni, I., & Lozano, R. (2002). Non-linear control for underactuated mechanical systems. Springer Science & Business Media.
- [12] A. De Luca, S. Iannitti, R. Mattone, and G. Oriolo. Control problems in underactuated manipulators. In *Advanced Intelligent Mechatronics, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/ASME International Conference on*, volume 2, pages 855–861 vol.2, 2001.
- [13] B. Potsaid and J.T. Wen. Edubot: a recon. . . gurable kit for control education. i. mechanical design. In *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pages 50–55, 2000.
- [14] B. Potsaid and J.T. Wen. Edubot: a recon. . . gurable kit for control education. ii. identi. . . cation and control. In *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pages 56–61, 2000.
- [15] F.B. Mathis, R. Jafari, and R. Mukherjee. Impulsive actuation in robot manipulators: Experimental veri. . . cation of pendubot swing-up. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 19(4):1469–1474, Aug 2014.
- [16] L. E. Ramos, B. Castillo-Toledo, and J. Alvarez. Nonlinear regulation of an underactuated system. In *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3288–3293 vol.4, Apr 1997.
- [17] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon, and A. Loria. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(6):1222–1224, Jun 1994.
- [18] J. Serrano-Heredia, Alexander G. Loukianov, and E. Bayro-Corrochano. State feedback block control regulation of the pendubot. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2011 8th International Conference on*, pages 1–6, Oct 2011.
- [19] Deyin Xia, Tianyou Chai, and Liangyong Wang. Fuzzy neural-network friction compensation-based singularity avoidance energy swing-up to nonequilibrium unstable position control of pendubot. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 22(2):690–705, March 2014.
- [20] Liu, Y., & Yu, H. (2013). A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(7), 921-935.

- [21] Nordin, M., & Gutman, P. O. (2002). Controlling mechanical systems with backlash—a survey. *Automatica*, 38(10), 1633-1649.
- [22] Kuruppu, U. S. (1965). Hysteresis and Backlash—A Comparison. *International Journal of Control*, 2(1), 1-8.
- [23] Shenton, A. T., & Abass, A. (2014). Non-parametric linear time-invariant extensions of non-invertible and backlash plant. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(18), 3092-3105.
- [24] Su, C. Y., Stepanenko, Y., Svoboda, J., & Leung, T. P. (2000). Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12), 2427-2432.
- [25] Merzouki, R., Davila, J. A., Fridman, L., & Cadiou, J. C. (2007). Backlash phenomenon observation and identification in electromechanical system. *Control Engineering Practice*, 15(4), 447-457.
- [26] Walha, L., Fakhfakh, T., & Haddar, M. (2006). Backlash effect on dynamic analysis of a two-stage spur gear system. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 6(3), 60-68.
- [27] Spong, M. W., Block, D. J., & Astrom, K. J. (2001). The mechatronics control kit for education and research. In *Control Applications, 2001.(CCA'01). Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on* (pp. 105-110). IEEE.
- [28] Ponce, I. U., Orlov, Y., Aguilar, L. T., & Alvarez, J. (2015). Sensorless Nonsmooth H_∞ -Tracking Synthesis of Servosystems with Backlash and Coulomb Friction. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11), 280-285.
- [29] Rascón, R., Alvarez, J., & Aguilar, L. T. (2016). Discontinuous H_∞ control of underactuated mechanical systems with friction and backlash. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(5), 1213-1222.
- [30] Gao, Z. (2014). On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA transactions*, 53(4), 850-857.
- [31] Han, J. (2009). From PID to active disturbance rejection control. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, 56(3), 900-906.

- [32] Ferreira, A., Bejarano, F. J., & Fridman, L. M. (2011). Robust control with exact uncertainties compensation: With or without chattering?. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 19(5), 969-975.
- [33] Almeida, D. I. R., Alvarez, J., & Peña, J. (2011). Control structure with disturbance identification for Lagrangian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(3), 486-495.
- [34] Huang, Y., & Xue, W. (2014). Active disturbance rejection control: methodology and theoretical analysis. *ISA transactions*, 53(4), 963-976.
- [35] Madoński, R., & Herman, P. (2015). Survey on methods of increasing the efficiency of extended state disturbance observers. *ISA transactions*, 56, 18-27.
- [36] Wang, L., & Su, J. (2015). Disturbance rejection control for non-minimum phase systems with optimal disturbance observer. *ISA transactions*, 57, 1-9.
- [37] Oldak, S., Baril, C., & Gutman, P. O. (1994). Quantitative design of a class of nonlinear systems with parameter uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(1), 101-117.
- [38] Rosas Almeida, D. I., Alvarez, J., & Fridman, L. (2007). Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(9), 842-861.
- [39] Perruquetti, W., & Barbot, J. P. (2002). *Sliding mode control in engineering*. CRC Press.
- [40] Rostalski, P., Besselmann, T., Barić, M., Belzen, F. V., & Morari, M. (2007). A hybrid approach to modelling, control and state estimation of mechanical systems with backlash. *International Journal of Control*, 80(11), 1729-1740.
- [41] Alvarez Joaquin, Rosas David and Peña Jonatan, *Analog Implementation of a Robust Control Strategy for Mechanical Systems*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, No. 9, September 2009.
- [42] Khalil, Hassan K. "Nonlinear Systems". Prentice Hall, Inc. Segunda edición. New Jersey 1996. 734 p.
- [43] Nayfeh H, A. y Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*". John Wiley & Sons, Inc.

Primera edición. New York 1995. 685 pp.

- [44] Slotine, J. y Weiping, L., "Applied Nonlinear Control". Prentice Hall, Inc. New Jersey 1991. 459 pp.
- [45] Alvarez, J, Orlov, I, Aho, L, An invariance principle for discontinuous dynamic systems with applications to a Coulomb friction oscillator, *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 2000, pp. 687-690.
- [46] David I. Rosas Almeida, Joaquín Alvarez, Leonid Fridman. Robust Observation and Identification of n DOF Lagrangian Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. V 17, pp 842-861.
- [47] Brockett, RW, 'Asymptotic stability and feedback stabilization', in *Differential Geometry Control Theory*, RW Brockett, RS Millman, HJ Sussman (eds), Birkhauser, 1983.
- [48] Filippov, AF, *Diferencial Equation with Discontinuous Right-hand Sides*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1988.
- [49] Loinessa, A, Haddad, WM, Chellaboina, V, Nonlinear system stabilization via stability based switching, *Proc. of the 37th IEEE CDC*, Tampa, diciembre, 1998, pp 2983-2997.
- [50] Weibing Gao, Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A new approach. *IEEE Trans. On Industrial Electronics*. V 40(1), 1993. pp. 45-55.
- [51] Mikleš, J., Fikar M., *Process Modeling, Identificación, and Control*, 2007, 480 p.
- [52] Spong, M. W., "The Swing Up Control Problem for the Acrobot", *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no. 1, pp. 49-55 (1995).
- [53] Ogata, Katsuhiko, *Ingeniería de Control Moderna*, 2003, 984 p.
- [54] Kelly, R., Santibáñez, V. and Loría, A., *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, 2005, 426 p.
- [55] Rosas D., Alvarez J. and Fridman L., Robust observation and identification of n DOF Lagrangian systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2007; 17:842-861.
- [56] Luenberger D. G. An Introduction to Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1971; Vol. AC-16, No 6.

- [57] Rosas Almeida, David Isaías. Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores discontinuos Tesis de doctorado en ciencias. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California. 2005.
- [58] Alvarez Gallegos, J., Orlov, Y. y Acho Zupa, L. 2000. "An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a Coulomb friction oscillator". *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*. 122: 687-690 p.
- [59] Ramos, G. A., Cortés-Romero, J., & Coral-Enriquez, H. (2015). Spatial observer-based repetitive controller: An active disturbance rejection approach. *Control Engineering Practice*, 42, 1-11.
- [60] Filippov, A. F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems* (Vol. 18). Springer Science & Business Media.