

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA  
CALIFORNIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y NEGOCIOS



ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE  
CONTROLADORES ROBUSTOS APLICADOS A UN SISTEMA  
DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN INGENIERÍA

PRESENTA

SANDRA SOTO

DIRECTOR DE TESIS  
DR. CARLOS ALBERTO CHÁVEZ GUZMÁN

TECATE, BAJA CALIFORNIA, ENERO 2017.

## RESUMEN

En esta tesis se presenta un análisis comparativo del desempeño de un control global por la técnica de Modo Deslizante (MD) y un control local por la técnica de  $H_\infty$ , aplicados a un sistema de levitación magnética (magnetic levitation system 33-210) con el objetivo de estabilizar el sistema en el punto de operación (punto de equilibrio) aún en presencia de perturbaciones. La planta bajo estudio presenta incertidumbre en el modelo y ruido en las mediciones en base a esto se seleccionaron los controles robustos que eliminen o atenúen las perturbaciones, el desempeño mostrado por los controles son acordes a lo esperado en la teoría, presentando un mejor desempeño el controlador en forma local, no obstante, el control por modos deslizantes presenta un desempeño similar al primero, esto se debe a la región de operación de la planta delimitada por el transductor.

Palabras Clave: Control por modo deslizante, Control  $H_\infty$ , Levitación magnética y análisis comparativo.

## ABSTRACT

In this thesis is shown the performance of two techniques of global and local controls between the sliding mode control and  $H_\infty$  control applying to magnetic levitation system 33-210, the control objective is the equilibrium point of the feedback system will be stable in presence of perturbations. The system is perturbed by model uncertainties and external disturbances, according with this, we propose two robust controllers that rejected or attenuate those perturbations, the performance of the feedback systems with each control is according with the theory, on experiments results we conclude the local control is better than the sliding model control, because the operation region is delimited by the vision transducer.

Keywords: Sliding mode control,  $H_\infty$  control, Magnetic levitation and Comparative analysis.

## DEDICATORIA

A mi hijo

GIBRAM FRANCISCO CHAVEZ SOTO

Por ser mi más grande motivación de superación tanto personal como profesional, porque él me hace querer ser mejor persona cada día y en cada momento, ser un ejemplo de superación y porque me ha enseñado que la mejor enseñanza se da con el ejemplo.

## AGRADECIMIENTOS

El lograr la realización de este trabajo ha sido un camino lleno de esfuerzos y retos que superar los cuales no habrían sido posible de realizar de no ser por el apoyo de quienes hoy agradezco:

Mi familia...

Por darme su total apoyo, principalmente a mi esposo Javier Gibram Chavez Delgado por su comprensión y amor que hicieron que el ánimo no decayera en ningún momento.

Mis maestros...

Por compartirme sus conocimientos y experiencias. En especial al maestro Carlos Alberto Chávez Guzmán por darse el tiempo, el esfuerzo, tener la paciencia y por el apoyo que siempre recibí, todo lo necesaria para que yo obtuviera el aprendizaje y lograra la meta.

Mis amigos...

Porque en los momentos que necesité de ellos ahí estuvieron, los que están cerca por el ánimo y fortaleza y los que están a la distancia por que ni eso les impidió echarme la mano cuando el mundo se me cerraba.

Mis compañeros de trabajo...

Por sus consejos, comprensión y apoyo tanto educativos, de trabajo y de trámites que hicieron que se me facilitara todo.

Y a Dios...

Por darme fortaleza, consuelo y paciencia en los momentos difíciles y de estrés.

## Índice general

<i>Resumen</i> . . . . .	I
<i>Abstract</i> . . . . .	II
<i>Dedicatoria</i> . . . . .	III
<i>Agradecimientos</i> . . . . .	IV
<i>Índice de figuras</i> . . . . .	VII
<i>Índice de tablas</i> . . . . .	VIII
<i>Simbología y/o notación</i> . . . . .	1
<b>1.. Introducción</b> . . . . .	2
1.1. Planteamiento . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	5
1.2.1. Objetivos generales . . . . .	5
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.3. Hipótesis . . . . .	5
<b>2.. Planta de levitación magnética</b> . . . . .	6
2.1. Definiciones utilizadas en el marco teórico . . . . .	8
2.2. Modelado matemático del levitador magnético. . . . .	10
2.3. Representación en espacio de estados . . . . .	13

## Índice general

---

2.3.1. Análisis del punto de equilibrio . . . . .	16
2.4. Sistema linealizado . . . . .	17
2.4.1. Controlabilidad . . . . .	19
2.4.2. Análisis de estabilidad . . . . .	19
<b>3.. Objetivo de control . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>4.. Controles robustos . . . . .</b>	<b>23</b>
4.1. Control por modo deslizante . . . . .	23
4.1.1. Teoría del control por modo deslizante . . . . .	24
4.1.2. Diseño de control por modo deslizante . . . . .	25
4.1.3. Análisis de alcanzabilidad . . . . .	26
4.2. Control $H_\infty$ . . . . .	27
4.2.1. Teoría del control $H_\infty$ . . . . .	27
4.2.2. Diseño de control $H_\infty$ . . . . .	30
4.3. Resultados experimentales . . . . .	30
4.3.1. Rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante . . . . .	32
4.3.2. Rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control $H_\infty$ . . . . .	35
<b>5.. Análisis estadístico de resultados . . . . .</b>	<b>38</b>
5.1. Error cuadrático Medio (ECM) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado . . . . .	38
5.2. Desviación estándar (s) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado . . . . .	39
<b>6.. Conclusiones . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>42</b>

## Índice de figuras

2.1. Levitador magnético . . . . .	6
2.2. Esquema del levitador modelo 33-210 del fabricante Feedback Instruments Ltd. . . . .	7
2.3. Sistema de levitación magnético . . . . .	12
2.4. Diagrama de bloques del sistema de control lineal . . . . .	14
4.1. Control de modo deslizante . . . . .	24
4.2. Diagrama de bloques para control $H_\infty$ . Referencia: Aliyu (2011) . . . . .	28
4.3. Diagrama de bloques del sistema a lazo cerrado . . . . .	31
4.4. Diagrama de simulación en MATLAB de control por modo deslizante . . . . .	32
4.5. Desempeño del posicionamiento del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante . . . . .	33
4.6. Desempeño de la entrada de control del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante . . . . .	34
4.7. Plano de fase del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante . . . . .	35
4.8. Diagrama de simulación en MATLAB de control $H_\infty$ . . . . .	36
4.9. Desempeño del posicionamiento del sistema en lazo cerrado con el control $H_\infty$ . . . . .	36
4.10. Desempeño de la entrada de control del sistema en lazo cerrado con el control $H_\infty$ . . . . .	37

## Índice de tablas

2.1. Valores físicos del levitador magnético. . . . .	18
5.1. Análisis del error cuadrático medio de la trayectoria del estado $x_1(t)$ con respecto a $x_0$ . . . . .	39
5.2. Análisis de la desviación estándar de la trayectoria del estado $x_1(t)$ . . .	39

## SIMBOLOGÍA Y/O NOTACIÓN

$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$
$\ x\ $	Norma Euclidiana.
$A^T$	La transpuesta de la matriz A.
$A^{-1}$	La inversa de la matriz A.
$\ A\ $	Norma espectral de la matriz A.
$x^*$	Punto de equilibrio.
$H_\infty$	H infinito.
$\ f(x)\ $	Norma de la función .
$Re\lambda_i$	Parte real de los valores propios de la matriz.
$Sign(s)$	Función signo.
$\emptyset(t)^+$	Magnitud de perturbación.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe una gran variedad de técnicas de control robusto, entre ellas podemos mencionar importantes aportaciones, como en (Utkin, 2009) y (Fridman, 2014) que propone el control por modos deslizantes y el control por modo deslizante integral garantizando estabilidad en tiempo finito del sistema en lazo cerrado, además de rechazar las perturbaciones acopladas al sistema, en (Heng, 2014) nos dice que existe al menos un controlador sólo si la solución a las ecuaciones algebraicas de Riccati son definidas positivas y el radio espectral de su producto es de menos de  $\gamma^2$ . En estas condiciones, una parametrización de todos los controladores de la solución del problema se da como una transformación lineal fraccional en una contracción estable libre de parámetros, en (Isidori, 1992), (Aliyu, 2011) y (Orlov, 2014) se extiende la teoría de control  $H_\infty$  no lineal al resolver la desigualdad diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Isaccs, este control se caracteriza por estabilizar asintóticamente el sistema en lazo cerrado y atenuar perturbaciones, (Astrom, 2008) el control adaptativo que puede modificar su comportamiento en respuesta a perturbaciones y cambios en la dinámica del sistema y en (Freeman, 2009) se logra saber que backstepping es una técnica de control que se diseña para estabilizar sistemas dinámicos no lineales partiendo de un sistema conocido y hacia atrás a subsistemas del mismo hasta alcanzar el control externo final.

Es por ello que se optó por trabajar con los controles  $H_\infty$  y por modos deslizantes, debido a que el primero logra atenuar las perturbaciones, el segundo rechaza las perturbaciones acopladas. La aportación de la tesis es el análisis comparativo del desempeño del sistema en lazo cerrado realizado entre las técnicas de control robusto  $H_\infty$  y modo deslizante, la primera en forma local y la segunda en forma global aplicado al levitador magnético Magnetic Levitation Systems 33-210 de Feedback. Los resultados obteni-

## 1.1 Planteamiento

---

dos de la implementación de los controles nos dejan ver un mejor desempeño para el control  $H_\infty$  con respecto al control por modo deslizante debido a que el primero logra mejor atenuación de las perturbaciones como son incertidumbre en el modelo y disturbios externos, reafirmando los resultados estadísticos mediante el análisis del error cuadrático medio con respecto al punto de equilibrio y la desviación estándar.

La tesis está organizada iniciando con la planta de levitación magnética donde se define el modelo dinámico, la representación en espacio de estados y el sistema linealizado del levitador magnético, así como el objetivo de control, en el capítulo 4 se desarrollan los controles robustos por modos deslizantes y el control  $H_\infty$ , así como el rendimiento en lazo cerrado de los mismo, en capítulo 5 el análisis estadístico de resultados experimentales y por último se presentan las conclusiones.

### 1.1. Planteamiento

Comparar el rendimiento de los controles robustos aplicados a un sistema de levitación magnética.

Es claro que los levitadores magnéticos han adquirido mayor importancia debido a las diferentes aplicaciones que estos tienen en la industria como el ya conocido rodamiento magnético aplicados a medios de transporte como el caso del tren rápido de Japón y China, así como robots cartesianos controlados por sistemas servo-magnéticos por ejemplo: los últimos modelos de maquinas de inserción automática para tarjetas en fresas CNC, todos estos perturbados por vibraciones de las estructuras y corrientes de aire como algunos ejemplos, por ello se proponen los controles que atenúen y eliminen estas perturbaciones.

Es por ello que el lograr el control de un levitador magnético soportando las perturbaciones, será el propósito principal de este estudio.

Los levitadores magnéticos han sido muy estudiados tanto en su estructura como

## 1.1 Planteamiento

---

en su control, pero aquí se atacarán las perturbaciones mediante el control por modos deslizantes y  $H_\infty$ .

### 1.2. Objetivos

Dentro de los objetivos de este trabajo están los siguientes:

#### 1.2.1. Objetivos generales

Comparar y analizar el desempeño entre los sistemas de control por modo deslizante y el control  $H_\infty$  para resolver el problema de estabilización del punto de equilibrio aplicado al levitador magnético en presencia de perturbaciones.

#### 1.2.2. Objetivos específicos

- Validar el modelo del levitador magnético proporcionado por el fabricante, mediante las leyes físicas que rigen el sistema dinámico de la planta.
- Análisis y síntesis del control por modo deslizante y del control  $H_\infty$ .
- Obtener el desempeño de cada controlador.
- Obtener el análisis comparativo del desempeño entre los controles.

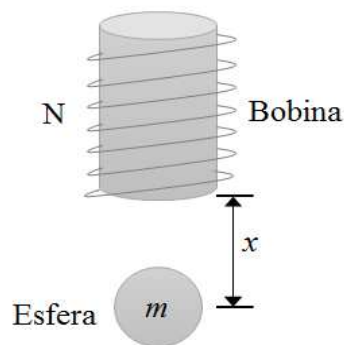
### 1.3. Hipótesis

$H_0$ : El rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control  $H_\infty$  es mejor que el control por modo deslizante en presencia de perturbaciones.

$H_1$ : El rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante es mejor que el control  $H_\infty$  en presencia de perturbaciones.

## 2. PLANTA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA

Un sistema levitador está compuesto de un electroimán fijo o bobina con un núcleo de material ferromagnético con un alambre esmaltado enrollado a su alrededor y un objeto colocado bajo él de un material ferromagnético que está suspendido entre la base de la bobina, logrando de esta manera levitar.



*Fig. 2.1:* Levitador magnético

En la planta levitadora, el número de vueltas del alambre esmaltado en el núcleo se indican con la literal  $N$ , la esfera ferromagnética se caracteriza por tener una masa  $m$  y estar ubicada a una distancia  $x$  de la bobina ayudándonos esto a conocer la autoinductancia y el flujo magnético en el sistema.

La levitación magnética tiene grandes aplicaciones, dentro de las más destacadas están sistemas de transporte de alta velocidad y sistemas servo magnéticos. Existen dos principios de levitación que sustentan todas estas aplicaciones: (i) repulsión y (ii) atracción. (i) En la levitación por repulsión, las corrientes inducidas en un cuerpo conductor

generan las fuerzas de levitación. Este sistema es estable en su eje vertical, y tiene un punto de equilibrio natural, por consecuencia su sistema resulta de fácil control. (ii) En la levitación por atracción, un cuerpo es atraído por un flujo magnético en contra de la gravedad; el equilibrio que se produce entre la fuerza de atracción y la gravedad es inestable, por lo que la levitación por atracción requiere de sistemas de control y en este nos enfocaremos.

La planta del levitador magnético por atracción con que se trabajará es *Magnetic Levitation Systems 33-210* del fabricante *textitFeedback Instruments Ltd.*, y como todo levitador carece de linealidad.

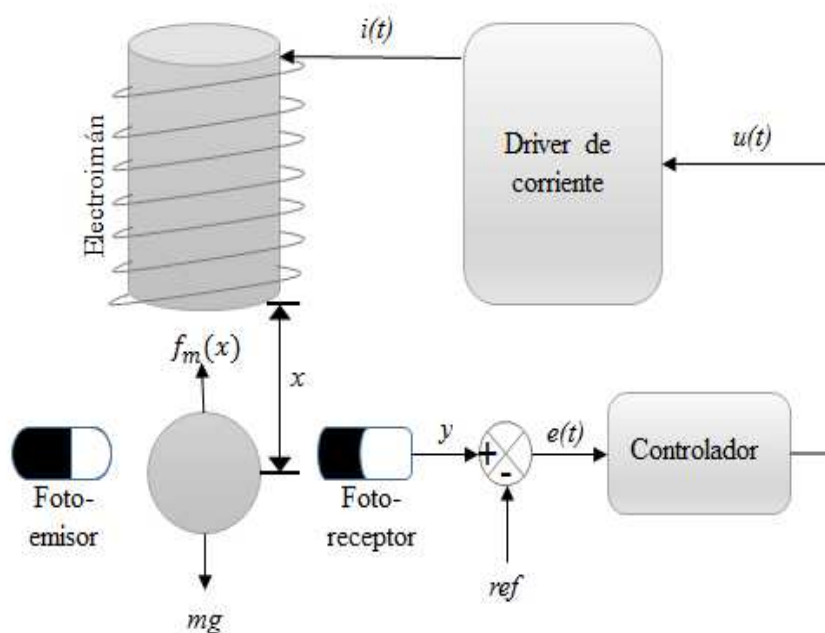


Fig. 2.2: Esquema del levitador modelo 33-210 del fabricante Feedback Instruments Ltd.

El sensor consiste en un foto-emisor y un fotorreceptor infrarrojo, el actuador es el electroimán y el controlador utiliza la señal de los infrarrojos para activar el electroimán quien logra mantener la esfera flotando.

### 2.1. Definiciones utilizadas en el marco teórico

#### - Sistema lineal

Un sistema es lineal si tiene proporcionalidad esto es que el movimiento de salida esta directamente relacionado con la entrada y superposición que significa que si tenemos dos o más fuerzas de entrada, el movimiento de salida será proporcional a la suma de las fuerzas de entrada. (Khalil, 2015)

#### - Sistema no lineal

En los sistemas no lineales el movimiento de salida no es directamente proporcional a la entrada ni sigue la ley de superposición, en este las entradas se combinan entre sí y producen nuevos elementos en la salida que no estaban presentes en la entrada. (Khalil, 2015)

#### - Sistema invariante en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si un corrimiento de tiempo en la señal de entrada ocasiona un corrimiento de tiempo en la señal de salida. Esto es, si  $y[n]$  es la salida de un sistema discreto invariante en el tiempo cuando  $x[n]$  es la entrada, entonces  $y[n - n_0]$  es la salida cuando  $x[n - n_0]$ . (Khalil, 2015)

#### - Matriz Jacobiano

La matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función y se utiliza para aproximar linealmente a la función en un punto mediante la siguiente formula:

$$J_f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

## 2.1 Definiciones utilizadas en el marco teórico

---

### - Definida positiva

La función escalar  $V(x)$  es positiva definida en una región que incluye el origen del espacio de estado, si  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  y  $V(x) = 0$  para  $x = 0$ . (Khalil, 2015)

### - Semidefinida positiva

La función escalar  $V(x)$  es positiva definida en una región, que incluye el origen del espacio de estado, si  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  en la región excepto en el origen y ciertos estados en donde  $V(x) = 0$ . (Khalil, 2015)

### - Teorema de Sylvester

El teorema de Sylvester esta basado en la llamada fórmula de interpolación de Lagrange que permite determinar la expresión de un polinomio  $f(\lambda)$  a partir de  $n$  datos independientes  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ . (Kelly, 2005)

### - Control admisible

Es aquel control que satisface las restricciones de control en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_n]$ .

### - Exponencialmente estable

Segun (Kelly, 2005) es exponencialmente estable si se satisface la siguiente desigualdad

$$\|x(t)\| \leq \kappa(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < \alpha \quad (2.2)$$

con  $\kappa(r, s) = \eta r e^{-\gamma s}$ ,  $\eta > 0$ ,  $\gamma > 0$ . (Khalil, 2015)

### 2.2. Modelado matemático del levitador magnético.

Conocer las variables y desarrollar el modelo matemático del levitador magnético es de gran importancia para trabajar en sistemas de control basados en el modelo.

De acuerdo a (Naumovié, 2003) las leyes físicas que rigen el sistema dinámico de la planta son la segunda Ley de Newton o ley de fuerza y la segunda Ley de Kirchhoff o regla de las tensiones.

En la parte de la planta que se refiere al electroimán se realiza la suma de la diferencia de potenciales que establece Ley de Kirchhoff.

$$u(t) - v_R(t) - v_L(t) = 0, \quad (2.3)$$

donde  $u(t)$  es el voltaje de entrada al sistema,  $V_R(t)$  el voltaje en la resistencia y  $V_L(t)$  el voltaje de la bobina.

Se sustituye con las igualdades de voltaje basadas en la Ley de Ohm para la resistencia como para el inductor quedando:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.4)$$

representando  $R$  el valor de la resistencia medida en ohmios,  $i(t)$  la corriente que fluye en el circuito medida en amperes respecto al tiempo  $t$  en segundos y  $L$  el valor del inductor en henrios.

Se despeja la derivada de la corriente en el inductor respecto al tiempo

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{-R}{L}i(t) + \frac{u(t)}{L} \quad (2.5)$$

Aplicando la segunda Ley de Newton en las fuerzas que actúan sobre la esfera

## 2.2 Modelado matemático del levitador magnético.

---

magnética podemos expresar que:

$$F_g - \beta \dot{x} - f_m(x) = m\ddot{x}, \quad (2.6)$$

donde  $f_m \in R^+$  es la fuerza electromagnética medida en Newtons,  $\beta$  es el coeficiente de fricción viscosa. La expresión matemática de la fricción viscosa es:  $\beta \frac{dx(t)}{dt}$  donde  $\beta \approx 0$  se desprecia y  $F_g \in R^1$  es la fuerza de gravedad con unidades de Newton por kilogramo según (Kuo, 2007):

$$F_g = mg, \quad (2.7)$$

donde  $m$  es la masa de la esfera medida en kilogramos y  $g$  la gravedad en  $m/s^2$ .

En (Serway, 2005) la fuerza electromagnética es la fuerza generada por el campo que se produce por el paso de la corriente eléctrica a través de un conductor y mediante la aplicación de las Leyes de Ampere y Faraday podemos escribir la siguiente ecuación en función de la inductancia  $L$  y de la corriente que circula por el conductor, tomando como interés la fuerza electromagnética generada en una única dirección.

$$f_m = \frac{-i^2(t)}{2} \frac{dl(x)}{dx}. \quad (2.8)$$

Al sustituir la  $f_m$  y la  $F_g$  en la ecuación 2.6 tendremos:

$$m\ddot{x} = mg + \frac{i^2(t)}{2} \frac{d(x)}{dx}. \quad (2.9)$$

De esta manera podemos expresar también la inductancia en función de la posición como:

## 2.2 Modelado matemático del levitador magnético.

---

$$l(x) = L + \frac{L_o x_o}{x} \quad (2.10)$$

donde:  $x_o$  es la distancia de referencia indicada en la figura (2.3),  $L$  inductancia sin presencia de esfera y  $L_o$  es la inductancia con esfera en movimiento.

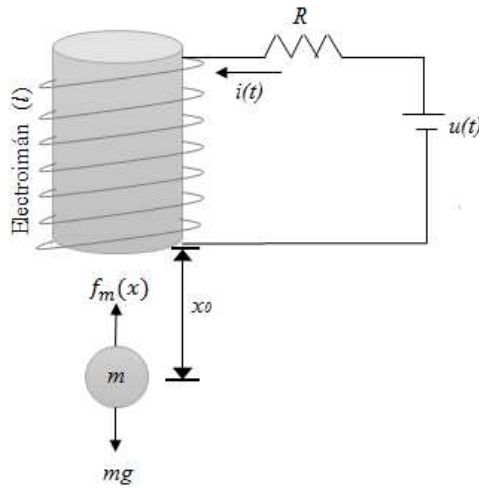


Fig. 2.3: Sistema de levitación magnético

Al sustituir la ecuación 2.10 en 2.9 se obtiene el modelo dinámico del levitador magnético que resulta ser un sistema no lineal.

$$m\ddot{x} = mg + \frac{i^2(t)}{2} \frac{d\left(\frac{L+L_o x_o}{x}\right)}{dx} \quad (2.11)$$

Se realiza la derivada con respecto a  $x$  en la ecuación(2.11)

$$m\ddot{x} = mg + \frac{i^2(t)}{2} \left[ \frac{d\frac{L_o x_o}{x}}{dx} \right], \quad (2.12)$$

### 2.3 Representación en espacio de estados

---

Se despeja la derivada temporal de mayor orden dando como resultado la dinámica del sistema de levitación magnética

$$\ddot{x} = g - \frac{L_o x_o}{2m} \frac{i^2(t)}{x^2} \quad (2.13)$$

Se obtiene un sistema no lineal invariante con el tiempo donde la no linealidad se expresa en los estados de  $i$  y  $x$ .

### 2.3. Representación en espacio de estados

Debido a la complejidad de los sistemas es mas viable utilizar teoría de control en espacios de estados por lo que será necesario conocer: los estados que se definen como el conjunto de variables que junto a la entrada determinan el comportamiento del sistema; las variables de estado siendo éstas el menor numero de variables que determinan el estado del sistema; vector de estado que es el conformado de elementos compuestos por las variables de estado y espacio de estado que es donde se representa un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales que se combinan en una ecuación diferencial matricial.

Sea el sistema no lineal e invariante en el tiempo definido por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y(t) &= g(x, u) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde (2.14) describe a (2.14) como la ecuación de estado y de la salida del sistema respectivamente así como a  $x$  la variable de estado y  $u$  la señal de control.

### 2.3 Representación en espacio de estados

Si se linealiza el sistema (2.14) alrededor del punto de operación, se tienen la siguiente representación en espacio de estado en forma lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x)x(t) + B(x)u(t) \\ y(t) &= C(x)x(t) + D(x)u(t)\end{aligned}\quad (2.15)$$

donde  $A(x) \in R^{n \times n}$  se denomina matriz de estado,  $B(x) \in R^{n \times m}$  matriz de entrada,  $C(x) \in R^{m \times n}$  matriz de salida y  $D(x) \in R^{m \times m}$  matriz de transmisión directa, mostrado en la siguiente figura.

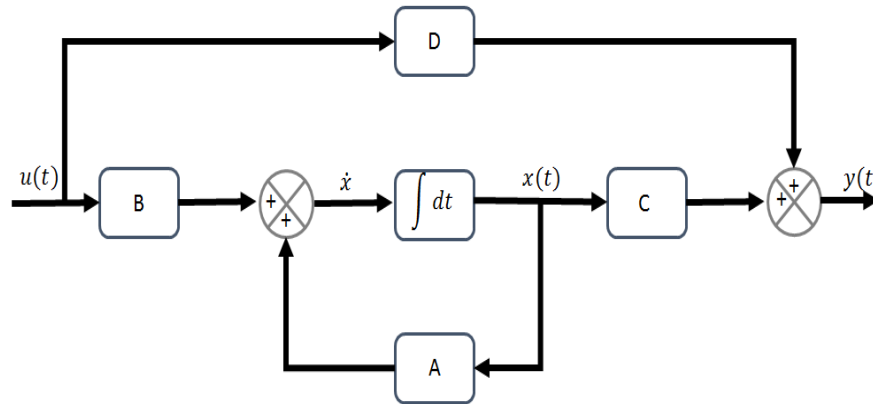


Fig. 2.4: Diagrama de bloques del sistema de control lineal

Para el sistema 2.13 reemplazamos la parte constante  $\frac{L_0 x_0}{2m}$  de la fuerza magnética por  $\Gamma$  quedando de la siguiente manera:

$$\ddot{x} = g - \Gamma \frac{i^2(t)}{x^2(t)}, \quad (2.16)$$

donde:

- $x(t) \in R^1$  es la posición de la esfera medida en metros.

### 2.3 Representación en espacio de estados

---

- $\dot{x}(t) \in R^1$  es la velocidad de la esfera medida en metros por segundo.
- $i(t) \in R^1$  es la corriente necesaria para mantener la esfera en levitación medida en amperes.

quedando la representación de los estados de la planta definida como:  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ,  $x_3(t) = i(t)$  y la entrada de control  $u(t)$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{\Gamma x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u\end{aligned}\tag{2.17}$$

del sistema 2.17 se propone el estado  $x_3$  como una entrada de control virtual

$$-\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u = 0\tag{2.18}$$

por lo que

$$x_3 = i = \frac{u}{R}\tag{2.19}$$

Considerando el trabajo de (Fallaha, 2005) se toma la siguiente igualdad  $i = 0.15u + i_0$  donde  $u$  es el voltaje de entrada al levitador magnético y en él se especifica que el prototipo de levitador modelo 33-210 del fabricante Feedback Instruments Ltd. tiene un convertidor de voltaje a corriente interno que genera la corriente que pasa a través del electroimán mediante la anterior relación lineal con la tensión aplicada al mismo. Considerando el convertidor de corriente a voltaje la representación en espacio de estados queda:

## 2.3 Representación en espacio de estados

---

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= g - \Gamma \left( \frac{i}{x_1} \right)^2 \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde  $y$  es la salida del sistema.

El modelo dinámico que representa al levitador se redujo a dos estado debido al convertidor de voltaje a corriente establecido por el fabricante.

### 2.3.1. Análisis del punto de equilibrio

Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estados se dice que es un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  si tiene la propiedad de que cada vez que el estado del sistema comienza en  $x^*$ , permanecerá en  $x^*$  para todos los tiempos futuros de acuerdo a (Khalil, 2015).

Existen sistemas con puntos de equilibrio múltiples como el péndulo y sistemas con unicidad en el punto de equilibrio, como el sistema que se va analizar.

Para demostrar unicidad del punto de equilibrio del levitador magnético igualamos las ecuaciones de estado a cero para encontrar los puntos de equilibrio  $x_1$  y  $x_2$

$$0 = \dot{x}_2^*\tag{2.21}$$

$$0 = g - \Gamma \left( \frac{i}{x_1} \right)^2\tag{2.22}$$

donde experimentalmente se obtiene que  $i_0 = 0.375A$  con un valor de  $\Gamma$  en el punto de equilibrio igual a;

## 2.4 Sistema linealizado

---

$$\Gamma = g \left( \frac{x_0}{i_0} \right)^2, \quad (2.23)$$

se sustituyen los valores en la ecuación (2.22) se obtiene:

$$x_1^* = \sqrt{\frac{\Gamma i^2}{g}} = 0.032m \quad (2.24)$$

El punto de equilibrio en el sistema levitador es  $(0.032, 0)$  y a su vez este es el mismo al punto de operación del sistema  $x_1^* = x_0$ .

### 2.4. Sistema linealizado

Si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal según (Khalil, 2015), a tal sistema se le conoce como sistema linealizado y es equivalente al sistema no lineal dentro de cierto rango de operación.

El sistema de ecuaciones (2.20) se linealiza utilizando series de Taylor alrededor del punto de operación (punto de equilibrio).

Se define  $f_1(x)$  como la ecuación de estado para  $\dot{x}_1$  y  $f_2(x)$  como la ecuación de estado para  $\dot{x}_2$ .

$$\dot{x}_1 = x_2(t) = f_1(x) \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_2 = g - \Gamma \left( \frac{i}{x_1} \right)^2 = f_2(x). \quad (2.26)$$

## 2.4 Sistema linealizado

---

Desarrollando el Jacobiano en las funciones (2.25) y (2.26)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{du} \end{bmatrix} u \quad (2.27)$$

y sustituyendo los parámetros de la tabla (2.1).

Tab. 2.1: Valores físicos del levitador magnético.

Parámetro	Magnitud
$m$	$0.02 \text{ Kg}$
$g$	$9.81 \text{ m/s}^2$
$\Gamma$	$0.071434 \text{ m}^2/\text{As}^2$
$x_0$	$0.032 \text{ m}$
$i_0$	$0.375 \text{ A}$

Se obtiene el modelo dinámico del sistema de levitación magnética al rededor del punto de equilibrio:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 613.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -52.36 \end{bmatrix} i \quad (2.28)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Se concluye con la representación en espacio de estado lineal para el levitador magnético (2.28) y (2.29).

## 2.4 Sistema linealizado

---

### 2.4.1. Controlabilidad

Para el diseño de control primero debemos corroborar que efectivamente las variables de estado de esta planta sean controlables.

Según (Utkin, 1992) la ecuación de estados, o el par  $A, B$  se dicen controlables si para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in R^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in R^n$ , existe una entrada de control que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo finito.

Mediante la prueba de controlabilidad para el sistema de  $R^2$ , la matriz de controlabilidad queda:

$$c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & -52.36 \\ -52.36 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde la  $\det(c) = -2741.57 \neq 0$  por lo que es no singular y controlable.

### 2.4.2. Análisis de estabilidad

Se realiza un análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov empleando el método indirecto que establece (Khalil, 2015):

Teorema 1 Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \Gamma \frac{x_2^2}{x_1^2} \end{bmatrix} \rightarrow f(t) \quad (2.31)$$

donde  $f : R^n \rightarrow R^n$  es una función continuamente diferenciable y alrededor del origen.

Sea

$$A = \frac{df(x)}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 613.125 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = 0. \quad (2.32)$$

## 2.4 Sistema linealizado

---

Entonces

1. El origen es asintóticamente estable si  $Re\lambda_i < 0$  para todos los valores propios de  $A$ .

2. El origen es inestable si  $Re\lambda_i > 0$  para uno o más de los valores propios de  $A$ .<sup>1</sup>

Y al aplicar lo anterior al sistema de levitación magnética se obtiene:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -613.125 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 613.125 = 0 \quad (2.33)$$

con los valores propios  $\lambda_1 = -24.7614$  y  $\lambda_2 = 24.7614$  quedando uno del lado derecho del plano por lo que el sistema no linealizado resulta inestable.

Otro método para analizar estabilidad en el sentido de Lyapunov y saber si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen cercanas a él esto en el sistema ya linealizado según (Khalil, 2015).

Se propone una función escalar  $V(x)$  que cumple con las siguientes restricciones:

Evaluada en cero es  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  de la forma

$$V(x) = x^T P x = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad (2.34)$$

donde claramente  $P = P^T$  y  $P > 0$ .

Se obtiene la derivada temporal de la función  $V(x)$  a lo largo de la trayectoria del sistema linealizado (2.28), se concluye estabilidad en el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado cuando  $\dot{V}(x) \leq 0$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1x_2 + 613.125x_1x_2 = -x^T Q x \\ &= -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -613.125 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

---

<sup>1</sup> Se define  $Re\lambda_i$  como la parte real de los valores propios de una matriz.

## 2.4 Sistema linealizado

---

siendo  $Q = \begin{bmatrix} 0 & -613.125 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Aplicando el teorema de Silvester se concluye que  $Q$  es una matriz indefinida por lo tanto el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es inestable de la misma forma que se concluyó en el análisis anterior.

### 3. OBJETIVO DE CONTROL

El objetivo de control para el sistema en lazo cerrado se establece de la siguiente forma: para alguna condición inicial  $\|x_1(t_0)\| < \delta$  y en presencia de perturbaciones, se deberá satisfacer lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|x_1(t)\| = x_0, \quad (3.1)$$

donde  $\delta = 40mm$  es el diámetro del cilindro de visión instalado en el fototransistor utilizado para detectar la posición.

## 4. CONTROLES ROBUSTOS

Controlar es poder manipular elementos y parámetros para lograr que actúen en la forma deseada, controlar un sistema es la acción de poder decidir sobre la planta o proceso. Controlar un sistema de levitación magnética para estabilizarlo alrededor del punto de operación aun en presencia de perturbaciones.

Ya que el levitador magnético es un sistema sujeto a perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo se proponen dos controles robustos.

### 4.1. *Control por modo deslizante*

En este apartado se muestra el diseño y aplicación del control por modo deslizante en un levitador magnético con perturbaciones, el objetivo de control es llevar las trayectorias del sistema en lazo cerrado al modo deslizante. La alcanzabilidad a la superficie deslizante se realizará con el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

El control por modos deslizantes se caracteriza por ser robusto, además cuando la frecuencia de conmutación no es infinita o en el caso de que existan dinámicas no modeladas las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre una región próxima a la superficie deslizante logrando mantenerse en ella para lograr el control como se muestra en la figura (4.1).

## 4.1 Control por modo deslizante

---

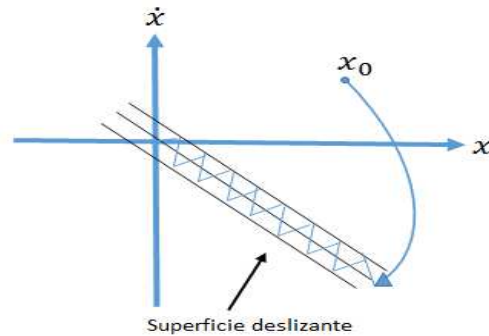


Fig. 4.1: Control de modo deslizante

### 4.1.1. Teoría del control por modo deslizante

El control por modos deslizantes consiste en lograr el objetivo de control en la ecuación de estados, después mediante conmutaciones a frecuencias altas, que tiendan a infinito, se fuerzan las trayectorias del sistema a converger a la superficie deslizante.

Es un control no lineal, robusto, que elimina las perturbaciones de tipo acopladas y aplicable a sistemas lineales controlables, no lineales (estabilizables), autónomos y no autónomos.

Los sistemas con modos deslizantes tienen capacidad para ser una herramienta eficiente para el control complejo de alto orden de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas, un problema común para muchos procesos de tecnología moderna según (Fridman, 2016) por lo tanto resulta muy conveniente de usar para el sistema de levitación magnética.

## 4.1 Control por modo deslizante

---

### 4.1.2. Diseño de control por modo deslizante

El diseño de control por modos deslizantes inicia al proponer la función de deslizamiento:

$$S(x) = C_1 x_1 + x_2 \quad (4.1)$$

como una combinación lineal de los estados de la planta, para el sistema no lineal 2.20, donde  $C_1$  es una constante mayor a 0.

La derivada temporal de la función de deslizamiento se define como:

$$\dot{S}(x) = C_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \quad (4.2)$$

sustituimos las ecuaciones de estado (2.20) en la (4.2) y considerando las perturbaciones al sistema nos queda:

$$\dot{S}(x) = C_1 x_2 + g - C \left( \frac{i}{x_1} \right)^2 + \emptyset(t) = 0, \quad (4.3)$$

donde  $\emptyset(t)$  se refiere a las perturbaciones e incertidumbre del modelo.

De acuerdo al análisis del control equivalente (Utkin (2009)) se obtiene que la corriente es la solución a la derivada temporal  $\dot{S}(x) = 0$  y compensando con el control discontinuo se obtiene de la siguiente forma:

$$i = \sqrt{\frac{x_1^2 (C_1 x_2 + g + M \text{sign}(s))}{C}}, \quad (4.4)$$

#### 4.1 Control por modo deslizante

---

donde  $M$  es la ganancia del control discontinuo y la función signo se define como:

$$\text{Sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Como resultado se obtiene la dinámica del sistema en lazo cerrado y (4.4) dentro de la superficie deslizante.

##### 4.1.3. Análisis de alcanzabilidad

La alcanzabilidad es una base fundamental para estudiar las propiedades dinámicas de cualquier sistema y establece que un sistema es alcanzable si se puede llevar desde cualquier punto a otro cualquiera en tiempo finito.

Para el análisis de alcanzabilidad al sistema de levitación magnética usamos la ecuación candidata de Lyapunov:

$$V(s) = \frac{1}{2} S^T S \quad (4.5)$$

y se obtiene su derivada temporal de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (2.20):

$$\dot{V}(s) = \frac{1}{2} S \dot{S} = S \left( C_1 x_2 + g - \frac{\Gamma i^2}{x_1^2} + \emptyset(t) \right), \quad (4.6)$$

en la ecuación anterior se sustituye la entrada del control (4.4) quedando de la siguiente forma:

$$\dot{V}(s) = S \left( C_1 x_2 + g - \frac{\Gamma \left( \sqrt{\frac{x_1^2 (C_1 x_2 + g + M \text{sign}(s))}{\Gamma}} \right)^2}{x_1^2} + \emptyset(t) \right), \quad (4.7)$$

eliminando términos la derivada temporal nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(s) = -S [M \text{sign}(s) - \emptyset(t)], \quad (4.8)$$

para concluir que las trayectorias alcanzan modo deslizante debemos demostrar que  $\dot{V}(s) < 0$  de la siguiente ecuación

$$\dot{V}(s) \leq -|S| [M - \emptyset(t)^+] \quad (4.9)$$

podemos apreciar que para que  $\dot{V}(s)$  sea definida negativa la ganancia del control discontinuo debe ser mayor a la cota máxima de la perturbación  $\emptyset(t)^+$  conocida a priori.

## 4.2. Control $H_\infty$

En este capítulo se presenta la teoría, la síntesis y los resultados del control  $H_\infty$  para el sistema de levitación magnética linealizado en el punto de operación representado en variables de estado.

### 4.2.1. Teoría del control $H_\infty$

Considerando el siguiente diagrama de bloques:

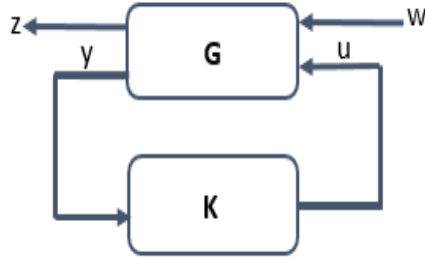


Fig. 4.2: Diagrama de bloques para control  $H_\infty$ . Referencia: Aliyu (2011)

donde la planta es  $G$  y el control  $K$ , siendo estos reales y racionales.

La representación en espacio de estado del sistema lineal de la estructura del control  $H_\infty$  esta dada como sigue de acuerdo a (Orlov, 2014):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde  $x \in R^n$  es el vector de estados,  $u \in R^m$  es el vector de entrada del control,  $w \in R^r$  es el vector de perturbaciones,  $z \in R^l$  es el vector de la salida virtual y  $y \in R^p$  es el vector de salida de la planta. Las matrices  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}$  y  $D_{21}$  son conocidas y de dimensiones apropiadas.

Las suposiciones que debe cumplir el sistema (4.10) son:

- i)  $(A, B_1)$  es controlable y  $(C_1, A)$  es observable.
- ii)  $(A, B_2)$  es estabilizable y  $(C_2, A)$  es detectable.
- iii)  $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$
- iv)  $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

## 4.2 Control $H_\infty$

---

El planteamiento del control  $H_\infty$  requiere de una ley de control por retroalimentación de estados de la forma:

$$i = \theta(x), \quad \theta \in R^m \quad (4.11)$$

Tal que si las perturbaciones son cero ( $w = 0$ ), el origen del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en forma local. El objetivo de control  $H_\infty$  consiste en diseñar un controlador admisible, tal que si existe  $\|T_{ZW}\|_\infty$  y con el sistema inicializado en el punto de equilibrio, encontrar un número real  $\Upsilon \geq 0$  de tal manera que la siguiente desigualdad (4.12) se cumpla, para un valor de  $w \neq 0$ , según (Zhou, 1999).

$$\int_0^t \|z\|^2 dt < \Upsilon^2 \int_0^t \|w\|^2 dt \quad (4.12)$$

Para encontrar la solución del problema del control  $H_\infty$  en forma local para el sistema de levitación magnética se debe de cumplir las siguientes suposiciones.

- Existe una solución positiva definida de la ecuación algebraica de Riccati.

$$KA + A^T K + C_1^T C_1 + K \left[ \frac{1}{\Upsilon^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] K = 0 \quad (4.13)$$

tal que el sistema

$$\dot{\bar{x}} = [A - (B_2 B_2^T - \Upsilon^2 B_1 B_1^T) K] \bar{x} \quad (4.14)$$

sea exponencialmente estable.

- Si la suposición anterior se cumple entonces existe un controlador admisible que resuelve el problema del control  $H_\infty$  en su forma local.

### 4.3 Resultados experimentales

---

$$i = -B_2^T K \bar{x} \quad (4.15)$$

#### 4.2.2. Diseño de control $H_\infty$

Utilizando el sistema ya linealizado (2.28) y la estructura del sistema para trabajar en  $H_\infty$  queda como se muestra:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 613.125 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -52.36 \end{bmatrix} i \quad (4.16)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} i \quad (4.17)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Se resuelve la ecuación algebraica de Riccati para el sistema (4.16), (4.17) y (4.18), empleando una  $\Upsilon = 0.1$  y utilizando el comando 'are()' de Matlab para obtener la matriz definida positiva  $K$ .

$$K = \begin{bmatrix} 16.6506 & 0.4658 \\ 0.4658 & 0.0271 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

### 4.3. Resultados experimentales

El experimento se realizó en el módulo didáctico *Magnetic levitation-33-942S*, de *Feedback Instruments Ltd.*, integrado por el levitador magnético 33-210, la interfaz de

### 4.3 Resultados experimentales

---

control analógico 33-301, la interfaz de conexión 33-942 y la tarjeta de adquisición de datos PCI 1711 de Advantech, una PC Pentium con MatLab 2006. Es importante aclarar que en la etapa experimental que el estado  $x_1$  es medido directamente de la planta, por medio de la tarjeta de adquisición de datos PCI 1711 de Advantech y el estado  $x_2$  se obtiene de la derivada de  $x_1$  por medio del comando *derivative* de Matlab-Simulink, además se considera que el sistema de levitación magnética en su etapa de potencia contiene un control interno que entrega una corriente proporcional al voltaje de entrada de control ( $u$ ) más un corrimiento, de la siguiente forma:

$$i(t) = 0.015u(t) + i_0, \quad (4.20)$$

donde  $u(t) \in R^1$  es la señal de control en voltaje ((Fallaha, 2005))

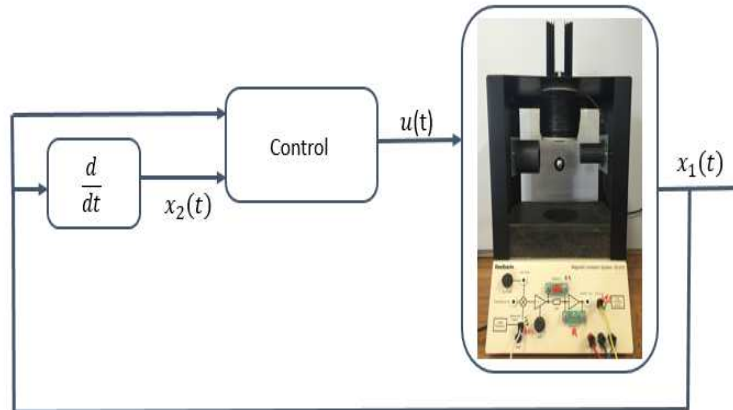


Fig. 4.3: Diagrama de bloques del sistema a lazo cerrado

Además, el sensor de posición entrega un voltaje proporcional a la distancia de la esfera al núcleo magnético, de la forma:

$$x_1(t) = \frac{V_s(t)}{120} + x_0. \quad (4.21)$$

### 4.3 Resultados experimentales

donde  $V_s(t)$  es el voltaje del fototransistor.

Las perturbaciones acopladas las consideramos como incertidumbre en el modelo y disturbios externos del sistema debido a que en el modelo (2.20) no se consideran los parámetros de la planta, el ruido en la medición de  $x_1$  es consecuencia del efecto del campo magnético sobre el fototransistor y el ruido en  $x_2$  se debe en parte al ruido inducido por el campo magnético sobre  $x_1(t)$  y al desempeño numérico del comando *derivative* de Matlab/simulink, este último se mejoraría al observar el estado  $x_2(t)$ .

El experimento se realiza en dos secciones, en la primera se estabilizó el levitador magnético con el control por modo deslizante y en el segundo experimento el levitador se estabilizó con el control  $H_\infty$ .

#### 4.3.1. Rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante

En las siguientes figuras se presenta la respuesta en lazo cerrado de la posición de la esfera y la señal de control en función de la corriente partiendo de la condición inicial de  $x_1(0) = 0.046$ , una ganancia de control discontinuo  $M = 1$  y la ganancia de la superficie deslizante  $c = 1$ .

El diseño del controlador por modos deslizantes es programado en Matlab/simulink.

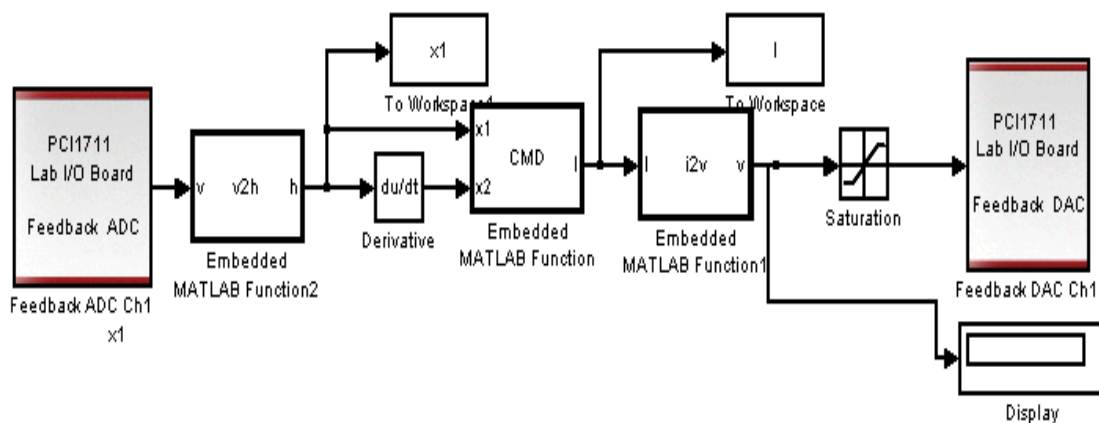
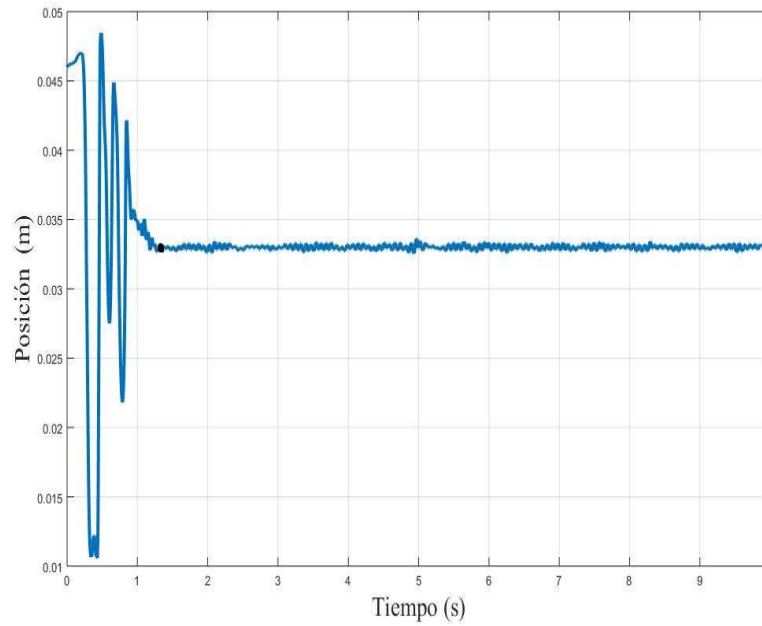


Fig. 4.4: Diagrama de simulación en MATLAB de control por modo deslizante

### 4.3 Resultados experimentales

---

Obteniéndose las siguientes gráficas resultantes.



*Fig. 4.5:* Desempeño del posicionamiento del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante

### 4.3 Resultados experimentales

---

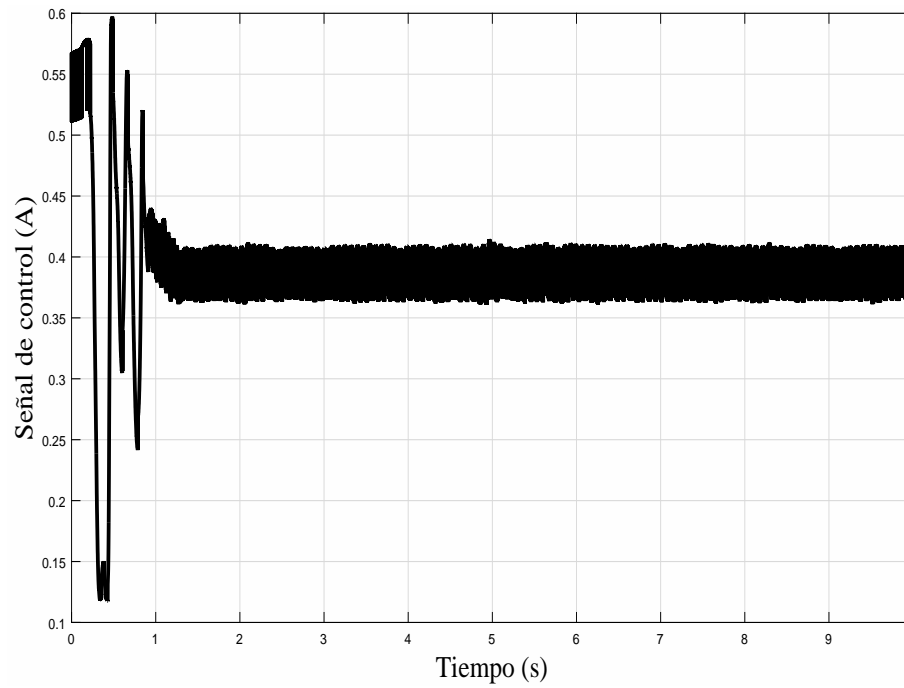


Fig. 4.6: Desempeño de la entrada de control del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante

En la fig. 4.5 se observa que la trayectoria del estado  $x_1(t)$  converge a una región próxima al punto de equilibrio, en un tiempo aproximado de  $1.2\text{seg.}$  presentando una respuesta subamortiguados y un consumo máximo de corriente de  $0.125\text{A}$  (ver fig. 4.6). En la fig. 4.7 se muestra el plano de fase de los estados  $x_1$  y  $x_2$  del sistema en lazo cerrado y se aprecia la manera en que las trayectorias convergen al punto de equilibrio partiendo de la condición inicial,

### 4.3 Resultados experimentales

---

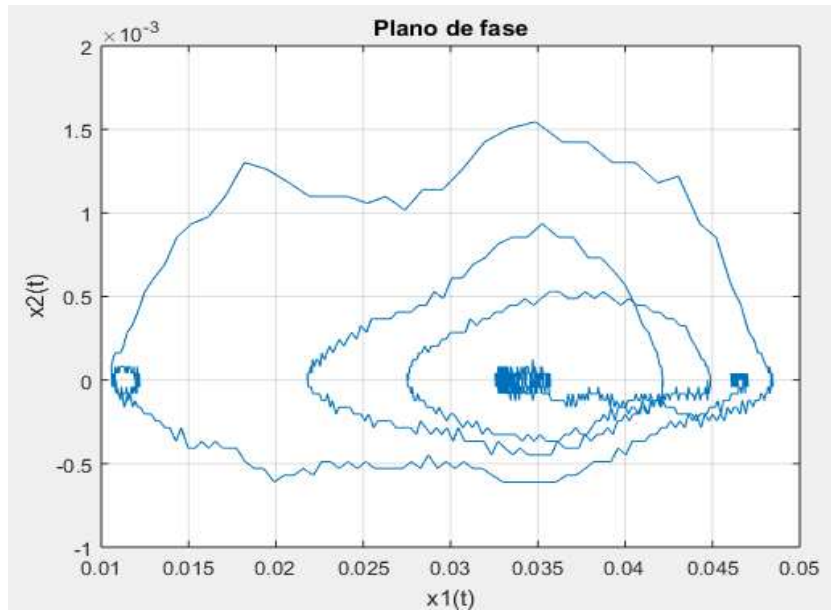


Fig. 4.7: Plano de fase del sistema en lazo cerrado con el control por modo deslizante

por lo tanto, se concluye que el sistema en lazo cerrado es estable.

#### 4.3.2. Rendimiento del sistema en lazo cerrado con el control $H_\infty$

Continuado con los datos del desempeño del sistema en lazo cerrado ahora en función del control  $H_\infty$  el cual se implementó mediante la plataforma de Matlab/simulink como se muestra en el siguiente diagrama:

### 4.3 Resultados experimentales

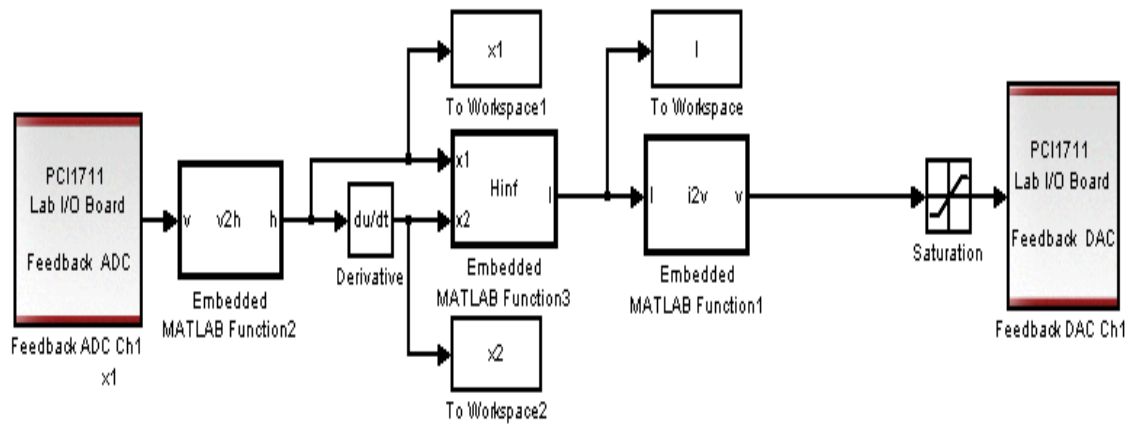


Fig. 4.8: Diagrama de simulación en MATLAB de control  $H_\infty$

En las siguientes gráficas se muestran la posición y la señal de control  $H_\infty$ .

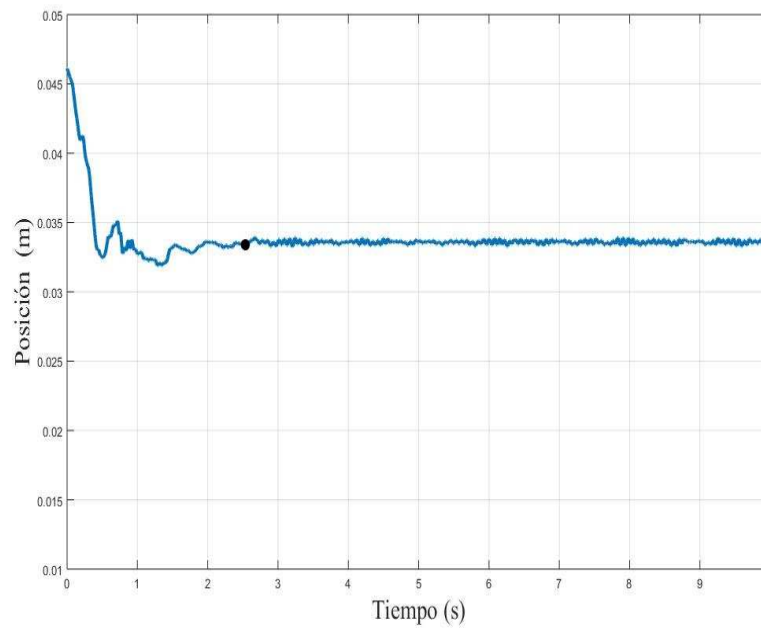


Fig. 4.9: Desempeño del posicionamiento del sistema en lazo cerrado con el control  $H_\infty$

### 4.3 Resultados experimentales

---

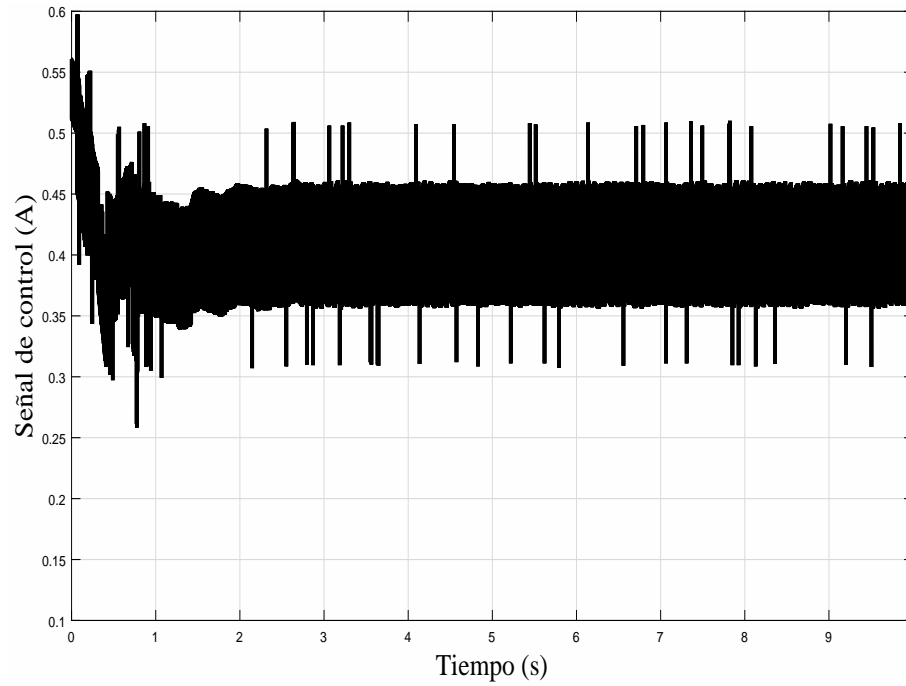


Fig. 4.10: Desempeño de la entrada de control del sistema en lazo cerrado con el control  $H_\infty$

La condición inicial de  $x_1(0) = 0.046$  y la trayectoria del estado  $x_1(t)$  convergen de forma suave a una región próxima al punto de equilibrio logrando estabilizarse en un tiempo de  $2.5s$  (ver fig. 4.9) respecto al desempeño en la entrada de control se observa que el consumo de corriente oscila en un rango de  $0.036A$  a  $0.45A$  con picos esporádicos de  $0.5A$ .

## 5. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE RESULTADOS

La estadística estudia métodos científicos para recoger, organizar, resumir y analizar datos así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables es por ello que para un mejor análisis de resultados se realizaron dos estadísticos a las señales de posición de sistema en lazo cerrado tanto con el control por modos deslizantes como  $H_\infty$ .

### 5.1. *Error cuadrático Medio (ECM) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado*

El error cuadrático medio es la diferencia entre el estimador y lo que se estima. El ECM es una función de riesgo, correspondiente al valor esperado de la pérdida del error al cuadrado o pérdida cuadrática.

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2, \quad (5.1)$$

donde  $n$  es el número de datos,  $x_i$  es el  $i$ -ésimo dato de posición a comparar y  $x_0$  es la posición deseada.

Al aplicar el ECM con respecto al punto de equilibrio, el análisis considera 10000 datos en un tiempo de 10seg provenientes de las gráficas 4.9 y 4.5 obteniéndose los siguientes resultados:

El error cuadrático medio del control por modo deslizante es mayor que el error cuadrático medio del control  $H_\infty$ , lo que significa que la trayectoria  $x_1(t)$  resultado de

## 5.2 Desviación estándar (s) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado

---

Tab. 5.1: Análisis del error cuadrático medio de la trayectoria del estado  $x_1(t)$  con respecto a  $x_0$ .

Control	ECM
MD	$16.037x10^{-6}$
$H_\infty$	$6.0013x10^{-6}$

la acción del control  $H_\infty$  se aproxima más al punto de equilibrio que la trayectoria  $x_1(t)$  del control por modo deslizante.

### 5.2. Desviación estándar (s) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado

La desviación estándar es la variación esperada con respecto a la media aritmética, definida como:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.2)$$

donde  $n$  es el número de datos,  $x_i$  es el  $i$ -ésimo dato de posición a comparar y  $\bar{x}$  es la media aritmética de la posición.

Y los resultados obtenidos para la posición de salida de los sistemas retroalimentados que considera 10000 datos en un tiempo de 10seg provenientes de las gráficas 4.9 y 4.5 son:

Tab. 5.2: Análisis de la desviación estándar de la trayectoria del estado  $x_1(t)$ .

Control	s
MD	0.0038
$H_\infty$	0.0017

## 5.2 Desviación estándar (s) de las trayectorias del sistema a lazo cerrado

---

La desviación estándar nos presenta que la señal de la trayectoria  $x_1(t)$  resultado de la acción del control por modo deslizante se dispersa más en comparación con la trayectoria  $x_1(t)$  resultado de la acción del control  $H_\infty$ .

## 6. CONCLUSIONES

La planta tiene una región de operación establecida por el sensor infrarrojo, donde el punto de equilibrio  $(x_0, 0)$  está incluido y ambos controles están confinados a esta región.

El control  $H_\infty$  se diseña linealizando la planta alrededor del punto de equilibrio, concluyendo que la región del sistema linealizado es similar a la región establecida por el ángulo de visión del diodo infrarrojo, es por eso, que el sistema en lazo cerrado con el control local  $H_\infty$  obtuvo mejor desempeño en comparación con el control global por modos deslizantes confirmándose la hipótesis nula ( $H_0$ ) tal como se muestra en las tablas 5.1 y 5.2, así como en las figuras 4.5, 4.6, 4.9 y 4.10. El control  $H_\infty$  atenúa las perturbaciones tales como: incertidumbre en el modelo y ruido en los sensores mejor que el control por modos deslizantes bajo la misma condición inicial, el control por modos deslizantes está operando en forma local debido al diámetro de 40 mm del cilindro de visión donde está instalado el fototransistor utilizado para detectar la posición.

Se concluye que la aportación principal de este trabajo de tesis fue realizar la comparación de desempeño de dos controles robustos, uno con alcance local y otro global dando como resultado que el control  $H_\infty$  presentó mejor desempeño.

## Bibliografía

- UTKIN, V., J. GULDNER y J. SHI. (2009). *Sliding Modes Control in Electromechanical Mechanical Systems*. Segunda edición. CRC Press Taylor and Francis Group.
- FRIDMAN, L., A. POZNYAK y F. BEJARANO. (2014). *Robust Output LQ Optimal Control via Integral Sliding Modes*. Birkhauser.
- XIAO-HENG CHANG. (2014). *Robust Output Feedback  $H$  infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems*. Springer.
- ISIDORI, A. y A. ASTOLFI. (1992). *Disturbance attenuation and  $H$  infinity control via measurement feedback in nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control. Volumen 37.
- ALIYU, M.D.S.. (2011). *Nonlinear  $H$  infinity control, Hamiltonian Systems and Hamilton Jacobi Equations*. CRC Press Taylor and Francis Group.
- ORLOV, Y.V. y L.T. AGUILAR. (2014). *Advanced  $H$  infinity control*. Birkhauser.
- ASTROM, K. J.. (2008). *Adaptive Control*. Adisson-Wesley Publishing Company. Segunda edición.
- FREEMAN, R.A. y P.V. KOKOTOVIC. (2009). *Robust nonlinear control design*. Birkhauser.
- KHALIL, H.K.. (2015). *Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- KELLY, R., V. SANTIBAÑEZ y A. LORIA. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer.

## **BIBLIOGRAFÍA**

---

- NAUMOVIEĆ, M.B.. (2003). *Modelingn of a didactic Magnetic Levitation System for Control Education*. Telsiks.
- KUO, G.. (2007). *Automatic Control Systems*. Wiley India Pvt.
- SERWAY, R. A.. (2005). *Electricidad y Magnetismo*. Thomson.
- FALLAHA, C., H. KANAAN y M. SAAD. (2005). *Real time implementation of a sliding mode regulator for current controlled magnetic levitation system*. Mediterranean Conference on Control and Automation.
- UTKIN, V. I... (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- FRIDMAN, L., J. BARBO, F. PLESTANT. (2016). *Resent Trends in Sliding Mode Control*. IET.
- ZHOU, K. y J.C. DOYLE. (1999). *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall.