

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería



**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL
UTILIZANDO UN MÉTODO NUMÉRICO PARA SIMULAR UNA
SEÑAL ELECTROMAGNÉTICA PROPAGÁNDOSE A TRAVÉS
DE UN MEDIO.**

Tesis profesional

que para obtener el Título de

INGENIERO EN ELECTRÓNICA

Presenta

Dania Covarrubias Martínez

Ensenada, B.C., México, Noviembre del 2004

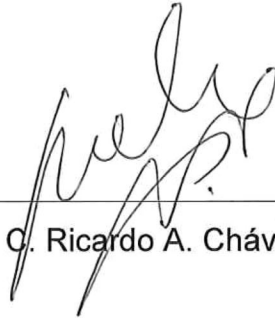
**Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ingeniería**

**“SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL
UTILIZANDO UN MÉTODO NUMÉRICO PARA SIMULAR UNA
SEÑAL ELECTROMAGNÉTICA PROPAGÁNDOSE A TRAVÉS
DE UN MEDIO”.**

TESIS PROFESIONAL
Que presenta

Dania Covarrubias Martínez

Aprobado por:



M. C. Ricardo A. Chávez Pérez



M. C. Everardo Inzunza González.



Dr. Horacio Martínez Reyes

DEDICATORIA:

A Dios

Por la familia tan hermosa que me regaló, y sus bendiciones recibidas cada día. Jehová es mi pastor y nada me faltará. *Sal 23:1.*

DAVID H. COVARRUBIAS ROSALES y MA. TERESA MARTÍNEZ DE COVARRUBIAS

Mis papis, gracias por darme tanto amor, por apoyarme siempre, en mi vida personal y académica, sus correcciones a tiempo, que me han enseñado a ser mejor cada día, por su ejemplo a seguir, por estar conmigo en todos mis momentos difíciles y en mis logros.

DAVID y DIEGO

Mis hermanos, gracias por mostrarme su cariño siempre. Ha sido un privilegio crecer junto a ustedes.

MA. ELENA MARTÍNEZ, MA. TERESA FLORES

Mi Tía y Abuelita, sus vidas son ejemplo para mí, sus oraciones oportunas, me han cuidado en todo tiempo.

ANDRÉS ZÁRATE DE LANDA

Gracias por estar a mi lado incondicionalmente, compartiendo cada momento, dándome todo tu cariño, apoyo, comprensión y una incomparable amistad.

DIANA, MARYLIN, PALOMA, NACHO, MIKE, BÁRBARA, MELI, TERE

Mis amigos, por su amistad sincera e incondicional, a través de estos años, son una bendición en mi vida. Gracias por tantos buenos recuerdos.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de Tesis, Ricardo Chávez Pérez, por guiarme y animarme a realizar este trabajo de tesis, por todas sus recomendaciones y consejos, que me ayudaron en la realización de esta tesis, por brindarme todos los recursos necesarios para desarrollar y concluir satisfactoriamente este trabajo.

A los miembros de mi comité de tesis: M.C. Everardo Inzunza González y Dr. Horacio Martínez Reyes, por que durante el desarrollo de este trabajo de tesis, sus consejos y recomendaciones fueron de gran ayuda.

Al Ing. Gabriel García, a la Dr. Carmen Maya y en especial al M.C. Eleazar Zúñiga, por su ayuda en la realización de los últimos detalles de este trabajo de tesis.

A todos mis maestros de la Facultad de Ingeniería, que son parte de mi formación como profesionista.

RESUMEN

Gracias a que la tecnología avanza constantemente, se han podido generar computadoras con procesadores muy potentes, los cuales son de gran utilidad para la solución de métodos numéricos, ya que ahorran tiempo y esfuerzo en la realización de los cálculos numéricos. Gracias a ello, es posible encontrar ahora nuevas aplicaciones a las Ecuaciones de Maxwell para el rotacional, resolviendo así la naturaleza compleja de su solución.

Los métodos analíticos se obtienen utilizando ecuaciones algebraicas, las cuales proporcionan soluciones exactas. Sin embargo en problemas electromagnéticos en donde existe un medio de propagación complejo (por ejemplo dos medios de propagación diferente) no es posible obtener una solución analítica, por lo que el problema electromagnético se puede resolver mediante métodos numéricos. Siempre que un problema con tal complejidad aparezca, se deben utilizar soluciones numéricas. Existen varios métodos numéricos disponibles para resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En esta tesis se ha seleccionado el Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT), debido a que es uno de los métodos mejor documentados y fácil de implementar en la computadora. El principal esfuerzo en este trabajo de tesis, se ha enfocado en elaborar un algoritmo en MATLAB que nos permita resolver las ecuaciones diferenciales parciales de Maxwell para el rotacional, mediante la técnica de diferencias finitas en el dominio del tiempo, con el propósito de observar físicamente el comportamiento de los campos electromagnéticos (EM) al propagarse libremente a través de un medio en una dimensión.

Lo anterior es utilizado para poder realizar un simulador electromagnético, el cual se convierte en un laboratorio virtual para el estudio de los campos electromagnéticos, de fácil entendimiento, manipulación y alcance de la persona interesada en esta área de estudio.

ÍNDICE

	Página
Capítulo 1	
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivo	4
1.3. Justificación del Trabajo	4
1.4. Estructuración del Trabajo	5
Capítulo 2	
ECUACIONES DE MAXWELL	
2.1. Introducción	7
2.2. Campos Electrostáticos	8
2.3. Campos Magnéticos	10
2.4. Campos Variantes en el Tiempo	11
2.5. Ecuaciones de Maxwell en forma integral	13
2.6. Condiciones de Frontera	16
2.7. Ecuaciones de Onda	18
2.8. Potenciales Variantes en el Tiempo	19
2.9. Campos Armónicos de Tiempo	21
Capítulo 3	
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO (DFDT)	
3.1. Antecedentes	24
3.2. Introducción al método de DFDT	25
3.3. Descripción del método DFDT	26
3.4. Esquemas de Diferencias Finitas	28
Capítulo 4	
IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS POR EL MÉTODO DFDT EN MATLAB	
4.1. Introducción	31
4.2. Obtención de tres dimensiones	33
4.3. Reducción a dos dimensiones	35
4.4. Reducción a una dimensión	37
4.5. Derivación de la ecuación de onda en una dimensión	39
4.6. Implementación de los algoritmos en MATLAB	42
Capítulo 5	
RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
5.1. Resultado de la simulación de un pulso Gaussiano	47
5.2. Resultado de la simulación de una señal senoidal con condiciones de frontera	49
5.3. Descripción de la Interfaz gráfica	52
5.4. Conclusiones	58

	Página
Referencias	60
Apéndice A Desarrollo de la ecuación diferencial parcial de Poisson y la ecuación de Laplace a partir de la primera ecuación de Maxwell	62
Apéndice B Ecuación de Onda para el campo Eléctrico y para el campo Magnético	64
Apéndice C Derivación del Potencial escalar eléctrico y el Potencial vectorial magnético basada en dos identidades vectoriales fundamentales	66
Apéndice D Aproximación de diferencias finitas utilizando series de Taylor	68

LISTA DE FIGURAS

	Página
FIGURA 1 Interface entre dos medios.	16
FIGURA 2 Rejillas o mallas más comunes.	27
FIGURA 3 Esquema de diferencias finitas.	28
FIGURA 4 Propagación en una dimensión.	42
FIGURA 5 Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión.	47
FIGURA 6 Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión con condiciones de frontera para 225 pasos.	48
FIGURA 7 Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión con condiciones de frontera para 250 pasos.	49
FIGURA 8 Propagación de una onda senoidal de 500 MHz de frecuencia.	50
FIGURA 9 Propagación de una onda senoidal de 1 GHz de frecuencia.	51
FIGURA 10 Propagación de una onda senoidal de 1.5 GHz de frecuencia.	51
FIGURA 11 Ventana Principal del Simulador Electromagnético.	53
FIGURA 12 Ventana principal mostrando las opciones de simulación.	54

	Página
FIGURA 13 Seleccionando <i>INFO</i> .	54
FIGURA 14 Simulador de un pulso Gaussiano.	55
FIGURA 15 Seleccionando <i>Ayuda</i> .	56
FIGURA 16 Simulador de una onda senoidal.	56
FIGURA 17 Seleccionando <i>Ayuda</i> .	57

LISTA DE TABLAS

Página

TABLA 1

Argumentos por los cuales la solución analítica de un problema electromagnético falla

3

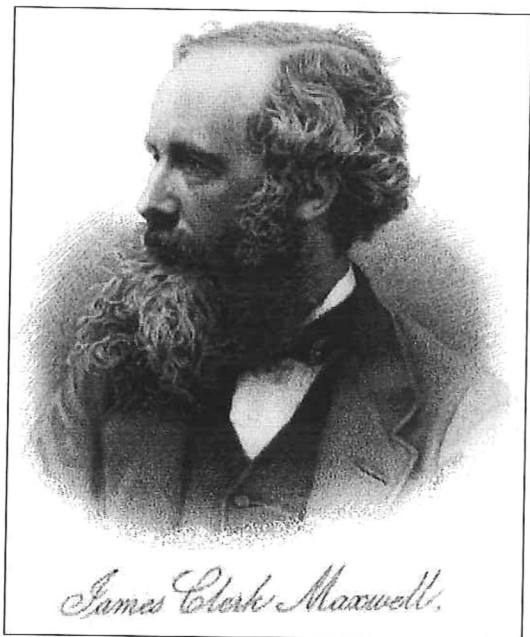
CAPÍTULO 1.

1.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Maxwell tienen gran cantidad de aplicaciones en muchas áreas de estudio como lo es en ondas electromagnéticas (EM) para la propagación de ondas de radio y señales de televisión, en electrónica, comunicaciones, entre otros, pero por la complejidad de las ecuaciones de Maxwell, hasta hace poco tiempo fue posible resolverlas de una manera más sencilla para de esta forma poder encontrar nuevas aplicaciones, esto es ahora posible gracias a computadoras las cuales facilitan cualquier desarrollo matemático con la ayuda de los diferentes métodos numéricos los cuales se pueden aplicar a programas de computadoras.

James Clerk Maxwell, (13 de Junio 1831 - 5 de Noviembre 1879), físico escocés, vivió en Edimburgo donde estudio la universidad, también estudio en la universidad de Cambridge. En 1871 cuando trabajaba como profesor de física en Cambridge, desarrolló lo que seria su trabajo más importante. [3]

Maxwell estudio y continuó el trabajo realizado por Faraday, Ampere y Gauss para los campos electromagnéticos, demostrando la relación matemática entre los campos eléctricos y magnéticos, demostró que las fuerzas eléctricas y magnéticas son dos aspectos complementarios del electromagnetismo y que los campos eléctricos y magnéticos viajan a través del espacio , en la forma de ondas, con una velocidad constante. Maxwell también propuso que la luz era una forma de radiación electromagnética .



Entre los años de 1864 y 1873 , Maxwell investigó y demostró las ecuaciones que explican el comportamiento sobre campos electromagnéticos y de su naturaleza

correlacionada, una de las contribuciones mas importantes de Maxwell para la teoría electromagnética fue el término conocido como *densidad de corriente de desplazamiento* aplicado a la ecuación 1.4, la cual permite la propagación de las ondas electromagnéticas. [13]

El primer documento que Maxwell escribió fue una posible teoría física admisible del electromagnetismo, en un comunicado a la sociedad real en 1867. Pero la primera teoría, en una forma completamente desarrollada, apareció en 1873 en su obra mas importante “*Treatise on Electricity and Magnetism*” (*Tratado sobre electricidad y magnetismo*). [3]

Maxwell desarrolló muchas otras investigaciones para otros campos de estudio. Este trabajo de tesis se enfocará en las 4 ecuaciones principales que desarrolló y en sus 2 ecuaciones constitutivas, que en su honor hoy se conocen como “Las ecuaciones de Maxwell”. [13]

□ Ecuaciones de Maxwell en forma general

$$\nabla \cdot D = \rho_v \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (1.4)$$

□ Ecuaciones de Maxwell constitutivas dependientes del medio

$$D = \epsilon E \quad (1.5)$$

$$B = \mu H \quad (1.6)$$

El conjunto de ecuaciones presentadas de (1.1) a (1.6), se describirán a detalle más adelante, en el Capítulo 2.

En esta tesis, se trabajará con las ecuaciones (1.3) y (1.4), las cuales corresponden al rotacional del campo magnético y al rotacional del campo eléctrico. Estas ecuaciones, son ecuaciones diferenciales parciales, las cuales se pueden resolver analíticamente.

Los métodos analíticos se obtienen utilizando ecuaciones algebraicas, las cuales proporcionan soluciones exactas. Sin embargo en problemas electromagnéticos en donde existe un medio de propagación complejo (por ejemplo dos medios de propagación diferente) no es posible obtener una solución analítica, por lo que el problema electromagnético se puede resolver mediante métodos numéricos.

En la tabla 1, se presentan los argumentos por los cuales la solución analítica de un problema electromagnético falla:

TABLA 1

<input type="checkbox"/> La ecuación diferencial parcial no sea lineal, y no se pueda linealizar sin afectar el resultado.
<input type="checkbox"/> La región solución sea compleja.
<input type="checkbox"/> Que las condiciones de frontera consideren diferentes medios de permitividad o constante dieléctrica diferente.
<input type="checkbox"/> Las condiciones de frontera sean dependientes del tiempo.
<input type="checkbox"/> El medio de propagación sea inhomogéneo o anisotrópico.

Siempre que un problema con tal complejidad aparezca, se deben utilizar soluciones numéricas. Existen varios métodos numéricos disponibles para resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En esta tesis se ha seleccionado el Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT), debido a que es uno de los métodos mejor documentados y fácil de implementar en la computadora. [4]-[7]

1.2 OBJETIVO

El objetivo de este trabajo de tesis, consiste en elaborar un algoritmo en MATLAB que nos permita resolver las ecuaciones diferenciales parciales de Maxwell para el rotacional, mediante la técnica de diferencias finitas en el dominio del tiempo, con el propósito de observar físicamente el comportamiento de los campos electromagnéticos (EM) al propagarse libremente a través de un medio en una dimensión.

1.3. JUSTIFICACION DEL TRABAJO

Los simuladores electromagnéticos comerciales son herramientas de análisis muy poderosas pero sus costos son elevados. Por ejemplo el costo del simulador electromagnético Empower de la compañía Eagleware es de 20 mil dólares [1], mientras que el programa Momentum que viene en el paquete informático ADS (advanced design system) [2], oscila alrededor de los 60 mil dólares. Resulta difícil que herramientas informáticas como las anteriores se encuentren en nuestros laboratorios a disposición de estudiantes de ingeniería.

Por lo que, motivados por los altos costos y lo conveniente de contar con una herramienta de análisis como lo es un simulador EM, se ha emprendido la tarea en desarrollar un programa informático que se encuentre al alcance de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería así como también del personal académico interesados en estudiar esta disciplina. Este trabajo servirá como punto de partida para trabajos futuros en los cuales se obtendrá el simulador EM en dos y tres dimensiones, este simulador utilizará las mismas técnicas numéricas de diferencias finitas en el dominio del tiempo, empleadas en esta tesis.

1.4 ESTRUCTURACIÓN DEL TRABAJO

Capítulo 1.

En este capítulo se presenta el objetivo de la realización de este trabajo de tesis, también se da una breve introducción del trabajo realizado por James Clerk Maxwell, quien es considerado el padre de la teoría EM moderna, además, se presenta la importancia de la utilización de los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de Maxwell.

Capítulo 2.

En este capítulo, se presenta la derivación de las ecuaciones de Maxwell, las cuales se muestran en su forma diferencial, integral y fasorial, para los campos estáticos, así como para los campos variantes en el tiempo. Además de lo mencionado anteriormente, se presenta el análisis de los campos electromagnéticos con condiciones de frontera.

Capítulo 3.

En este capítulo se muestra en detalle la teoría de la técnica del método numérico de diferencias finitas en el dominio del tiempo, para su aplicación en la solución de las ecuaciones de Maxwell.

Capítulo 4.

En este capítulo se aplica el método numérico para resolver las ecuaciones de Maxwell del rotacional, desarrollando dos algoritmos en MATLAB los cuales permiten simular un pulso Gaussiano y una onda senoidal en medios con condiciones de frontera.

Capítulo 5.

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas. Se presenta la interfaz gráfica que se generó para los algoritmos realizados, explicando el contenido de cada ventana generada de la interfaz, así como también, la discusión de resultados, observaciones y conclusiones de este trabajo de tesis.

CAPÍTULO 2.

ECUACIONES DE MAXWELL

2.1 INTRODUCCIÓN

Toda la teoría electromagnética se encuentra condensada en cuatro ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos. Las ecuaciones de Maxwell pueden ser utilizadas en su forma integral o diferencial dependiendo del tipo de problema que se desee resolver.

Partiendo del *teorema de la divergencia* (ecuación 2.1) que dice que la integral de superficie cerrada de la componente de cualquier vector es igual a la integral de volumen cerrada de la divergencia de dicho vector.

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv \quad (2.1)$$

donde:

$$\mathbf{F} = \text{vector} = Fx_i + Fy_j + Fz_k$$

$$\nabla = \text{Operador diferencial nabla o del} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

por lo que la operación $(\nabla \cdot \mathbf{F})$ que es llamada divergencia, será igual a:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z}$$

Ahora del *teorema de Stokes* (ecuación 2.2) tenemos que la integral de línea cerrada de la componente de cualquier vector es igual a la integral de superficie cerrada del rotacional de dicho vector.

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{F}) ds \quad (2.2)$$

donde la operación $(\nabla \times F)$ es llamada rotacional, la cual es igual a:

$$(\nabla \times F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) k$$

La mejor manera de revisar la teoría electromagnética, es utilizar el concepto fundamental de carga eléctrica. La teoría electromagnética puede ser tratada como el estudio de los campos producidos por cargas eléctricas en reposo y en movimiento.

Los campos electrostáticos son producidos por cargas eléctricas estáticas, mientras que los campos magnetostáticos son debido al movimiento de las cargas con velocidad uniforme (cd). Los campos dinámicos variantes en el tiempo son producidos por cargas aceleradas o corrientes variantes en el tiempo. [12]

2.2 CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

Las leyes que gobiernan los campos electrostáticos son la ley de Gauss, la cual permite encontrar de manera fácil el campo eléctrico.

La ecuación 2.3 es la forma integral de la ley de Gauss, la cual dice que la integral de superficie cerrada de la densidad de flujo eléctrico es igual a la integral de volumen cerrada de la densidad de carga volumétrica que a su vez es igual a la carga encerrada en dicha superficie.

$$\oint_S D \cdot ds = \oint_V \rho_v dv = Q \quad (2.3)$$

Lo cuál es una consecuencia directa de la ley de Coulomb, y la ley que describe los campos electrostáticos como conservativos:

$$\int_L E \cdot dL = 0 \quad (2.4)$$

donde las variables de (2.3) y (2.4):

- \mathbf{D} = Densidad de Flujo eléctrico (C/m^2)
- ρ_v = Densidad de carga volumétrica (C/m^3)
- Q = Carga eléctrica (C)
- \mathbf{E} = Intensidad de campo eléctrico (V/m)
- ϵ = Permitividad dieléctrica del medio (F/m)

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) se pueden expresar en forma diferencial aplicando (2.1) a (2.3).

$$\oint_S D \cdot dS = \oint_V (\nabla \cdot D) dv = \rho_v$$

$\nabla \cdot D = \rho_v$

(2.5)

La ecuación 2.5 es la primera ecuación de Maxwell en su forma diferencial, que también es conocida como la ecuación puntal de la ley de Gauss.

Para expresar (2.4) en forma diferencial aplicamos (2.2) a (2.4)

$$\oint_L E \cdot dL = \oint_S (\nabla \times E) ds$$

Reduciendo la expresión anterior obtenemos la ecuación (2.6), la cual se conoce como la ecuación de Maxwell para campos electrostáticos, la cual podrá ser transformada a la tercera ecuación de Maxwell al aplicarle la ley de Inducción de Faraday lo cual se muestra en la ecuación (2.22c).

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.6)$$

En el *apéndice A*, se desarrolla la ecuación diferencial parcial de Poisson y la ecuación de Laplace, a partir de la primera ecuación de Maxwell.

2.3 CAMPOS MAGNÉTICOS

Las leyes básicas de la magnetostática son la ley *de Ampere*, la cual describe la relación básica entre la electricidad y el magnetismo, desarrollada a través de afirmaciones cuantitativas sobre la relación de un campo magnético con la corriente eléctrica o las variaciones de los campos eléctricos que lo producen como se muestra en la ecuación (2.7).

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J}_e \cdot d\mathbf{s} = I \quad (2.7)$$

La cual se relaciona a la ley de Biot-Savart, y la ley de conservación del flujo magnético (también llamada ley de Gauss de la magnetostática).

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.8)$$

donde:

\mathbf{H} = Intensidad del campo magnético (Amp/m)

\mathbf{J}_e = Densidad de corriente eléctrica (Amp/m²)

\mathbf{B} = Densidad de Flujo magnético (Teslas), (Wb/m²)

Aplicando el teorema de Stokes a la ecuación (2.7) y el teorema de la divergencia a (2.8) tendremos la representación diferencial.

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J}_e \cdot d\mathbf{s} = I$$

Si reducimos la expresión obtenemos la ecuación (2.9) que se conoce como la ecuación de Maxwell para campos Magnetostáticos, y como se vera mas adelante al

incorporarle el termino de corriente de desplazamiento se podrá obtener la cuarta ecuación de Maxwell como se muestra en la ecuación (2.22d).

$$\nabla \times H = J_e \quad (2.9)$$

$$\oint_S F \cdot dS = \oint_V (\nabla \cdot F) dv \quad (\text{Teorema de divergencia})$$

$$\oint_S B \cdot dS = \oint_V (\nabla \cdot B) dv$$

$$\therefore \boxed{\nabla \cdot B = 0} \quad (2.10)$$

En la ecuación (2.10) obtenemos la segunda ecuación de Maxwell en espacio libre.

donde:

\mathbf{B} = a la densidad del flujo magnético, también llamada inducción magnética.

2.4 CAMPOS VARIANTES EN EL TIEMPO

En este caso, los campos E y H existen simultáneamente, las ecuaciones (2.5) y (2.10) son las mismas, mientras que las ecuaciones (2.6) y (2.9), necesitan una modificación para campos dinámicos como se había mencionado anteriormente.

Por lo que al incorporar a la ecuación (2.6) la ley de inducción de Faraday la cual nos dice que la Fem (fuerza electromotriz) inducida en un circuito es igual a la rapidez del cambio

del flujo a través del circuito excepto por un signo negativo, obtenemos (2.11c), y en la ecuación (2.9) se debe incluir la corriente de desplazamiento y encontramos (2.11d).

Los campos electromagnéticos variantes en el tiempo se gobiernan por las siguientes expresiones, las cuales son llamadas *ecuaciones de Maxwell en forma general*. Las cuales son ecuaciones diferenciales lineales acopladas de primer orden que relacionan las cantidades vectoriales de campo unas con otras.

□ Primera Ecuación de Maxwell

La divergencia de la densidad del flujo eléctrico es igual a la densidad de carga volumétrica. Esta ecuación también se le conoce como la ecuación de Gauss en forma puntal.

$$\nabla \cdot D = \rho_v \quad (2.11a)$$

□ Segunda Ecuación de Maxwell

La divergencia de la densidad del flujo magnético es igual a cero.

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.11b)$$

□ Tercera Ecuación de Maxwell

El rotacional del campo eléctrico esta asociado con la variación de la densidad de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m \quad (2.11c)$$

donde:

$\mathbf{J}_m = \sigma^* \mathbf{H}$, es la densidad de corriente magnética de conducción (Volts/m²).

σ^* , es la resistividad magnética (ohms/m).

□ Cuarta Ecuación de Maxwell

El rotacional del campo magnético esta asociado con la variación de la densidad de corriente de desplazamiento, y con la densidad de corriente de conducción. La densidad de corriente de desplazamiento se conoce como la aportación mas importante de Maxwell para la teoría electromagnética ya que este término hace posible la propagación de ondas electromagnéticas.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.11d)$$

2.5 ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL

Las ecuaciones (2.11) son las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, pero para obtener este conjunto de ecuaciones en su forma integral, se realiza el siguiente procedimiento. Para el caso de las ecuaciones de la divergencia, se toma en ambos lados de las ecuaciones la integral de volumen, sobre un volumen V encerrado por una superficie cerrada S y se aplica el teorema de la divergencia.

Ahora para las ecuaciones del rotacional se toma en ambos lados de las ecuaciones, la integral de superficie, sobre una superficie abierta S encerrada por un contorno C y se aplica el teorema de Stokes.

Lo cual, resumiendo, nos genera el conjunto de ecuaciones (2.12), que son las ecuaciones de Maxwell en forma integral.

$$\oint_S D \cdot ds = \int_V \rho_V dv \quad (2.12a)$$

$$\oint_S B \cdot ds = 0 \quad (2.12b)$$

$$\oint_L E \cdot dL = - \int_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} + J_m \right) \cdot ds \quad (2.12c)$$

$$\oint_L H \cdot dL = - \int_S \left(J_e + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot ds \quad (2.12d)$$

En suma a estas ecuaciones de Maxwell, existen otras cuatro ecuaciones dependientes del medio, que son llamadas ecuaciones constitutivas para el medio en el cual el campo existe, las cuales son:

$$D = \varepsilon E \quad (2.13a)$$

$$B = \mu H \quad (2.13b)$$

$$J_e = \sigma E \quad (2.13c)$$

$$J_m = \sigma^* M \quad (2.13d)$$

Para (2.13a) y (2.13b) la permitividad y la permeabilidad magnética expresan en las ecuaciones de la electrodinámica las características de los medios que se determinan por medidas experimentales, y relacionan las intensidades de campo con sus densidades de flujo.

La ecuación (2.13c) expresa la relación debida a la electroconductividad del medio si es isótropico puede introducirse un coeficiente escalar, denominado *conductividad*, la cual representa la *ley de Ohm generalizada*, que equivale a decir que la velocidad media de los portadores de carga es proporcional a la intensidad de campo eléctrico.

Las ecuaciones (2.11) y (2.13) forman los ocho postulados de la teoría electromagnética. Se debe notar que en la región donde los campos Maxwellianos existen, los campos son considerados que tienen:

- a. Un solo valor
- b. Que están confinados
- c. Que tienen funciones continuas de espacio y tiempo con derivadas continuas.

Es importante mencionar otras dos ecuaciones fundamentales que van de la mano con las ecuaciones de Maxwell.

- La ley de Fuerza de Lorentz, en la cual la ecuación es un lazo entre el electromagnetismo y la mecánica.

$$F = Q(E + u \times B) \quad (2.14)$$

donde:

F , es la fuerza que experimenta la partícula con carga Q moviéndose a velocidad u en un campo EM.

- La ecuación de continuidad en la que se expresa la conservación de la carga o la indestructibilidad de ella.

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \quad (2.15)$$

2.6 CONDICIONES DE FRONTERA

El medio material en el cual un campo EM existe es generalmente caracterizado por sus parámetros constitutivos σ , ϵ , y μ (conductividad, permitividad y la permeabilidad).

- El medio se dice que es lineal si σ , ϵ , y μ son independientes del E y del H o no lineal en caso contrario.
- Es homogéneo si σ , ϵ , y μ no son funciones de variables del espacio (x , y , y z) o inhomogéneo en caso contrario.
- Es isotrópico si σ , ϵ , y μ son independientes de la dirección (escalares) o anisotrópico en caso contrario.

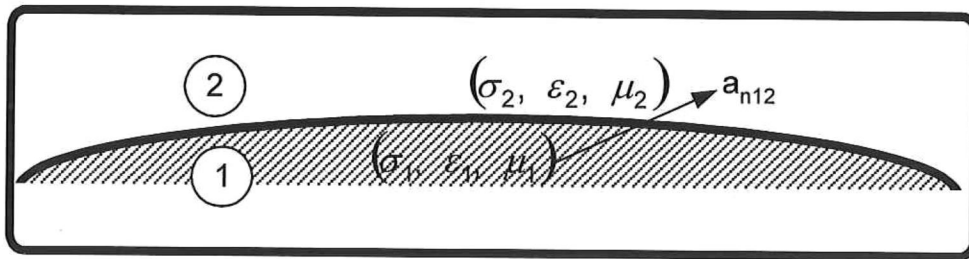


Figura 1. Interface (Frontera) entre dos medios

Las condiciones de frontera en la interface de separación entre dos medios 1 y 2, con parámetros $(\sigma_1, \epsilon_1, \text{ y } \mu_1)$ y $(\sigma_2, \epsilon_2, \text{ y } \mu_2)$ como se muestra en la figura 1, son fácilmente derivados de las ecuaciones de Maxwell en su forma integral, y son:

$$E_1 t = E_2 t \quad \circ \quad (E_1 - E_2) \times a_{n12} = 0 \quad (2.16a)$$

$$H_1 t - H_2 t = K \quad \circ \quad (H_1 - H_2) \times a_{n12} = K \quad (2.16b)$$

$$D_1 n = D_2 n = \rho_S \quad \circ \quad (D_1 - D_2) \bullet a_{n12} = \rho_S \quad (2.16c)$$

$$B_1 n - B_2 n = 0 \quad \circ \quad (B_2 - B_1) \bullet a_{n12} = 0 \quad (2.16d)$$

donde:

a_{n12} , es el vector unitario normal que va del medio 1 al 2, los subíndices 1 y 2 denotan los campos en las regiones 1 y 2, y los subíndices n y t denotan las componentes normales y tangenciales de los campos.

Las ecuaciones (2.16a) y (2.16d) establecen que las componentes tangenciales del E y las componentes normales del campo B son continuas en la frontera. La ecuación (2.16b) establece que la componente tangencial del campo H es discontinua por la densidad de corriente superficial K sobre la frontera. La ecuación (2.16c) establece que la discontinuidad en la componente normal de D es la misma que la densidad de carga superficial ρ_s sobre la frontera.

Para resolver problemas electromagnéticos que comprendan regiones continuas con parámetros constitutivos diferentes es necesario conocer las *condiciones en la frontera* que deben satisfacer las cantidades de campo de nuestro modelo electromagnético en las superficies de separación de los medios. Estas superficies se pueden considerar como finas capas intermedias en cuyo interior las propiedades del medio varían suavemente.

El empleo de las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial para los puntos de la superficie de separación de los medios es difícil, por lo que las condiciones de frontera se obtienen aplicando las ecuaciones de Maxwell en su forma integral a una pequeña región de la superficie de separación de los dos medios, suponiendo la validez de dichas ecuaciones cuando se tienen regiones con medios discontinuos.

En la práctica, solamente dos ecuaciones de Maxwell son utilizadas [(2.11c) y (2.11d)] cuando un medio es libre de fuentes ($J=0$, $\rho_V = 0$).

2.7 ECUACIONES DE ONDA

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden acopladas, las cuales son difíciles de aplicar cuando se resuelven problemas con valores en las fronteras. La dificultad se supera desacoplando las ecuaciones de primer orden, con ello se obtiene la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial de segundo orden la cual es útil para resolver problemas EM.

Para obtener la ecuación de onda de un medio, lineal, isotrópico, homogéneo y libre de fuentes ($J=0$, $\rho_V = 0$), tomamos el rotacional en los dos lados de la ecuación (2.11c) cuyo desarrollo matemático se encuentra en el *apéndice B*, lo cual nos lleva a la ecuación:

$$\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

La cual es la ecuación vectorial de Helmholtz dependiente del tiempo o simplemente ecuación de onda. Si hubiéramos iniciado la derivación con la ecuación (2.11d) (cuyo desarrollo matemático se encuentra expresado también en el *apéndice B*), hubiéramos obtenido la ecuación de onda para H, como se expresa en ecuación (2.18)

$$\nabla^2 H - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) son las ecuaciones de movimiento de las ondas EM en el medio bajo consideración. La velocidad en (m/s) de la propagación de onda es:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

donde:

$$\mathbf{u} = \mathbf{c} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \text{ en el espacio libre}$$

Como cada uno de los vectores en las ecuaciones (2.17) y (2.18) tienen tres componentes, juntas tendrán las seis ecuaciones para E_x , E_y , E_z , H_x , H_y y H_z . Así que cada una de las componentes de la ecuación de onda tendrán la siguiente forma.

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

que es la *ecuación de onda escalar*.

2.8 POTENCIALES VARIANTES EN EL TIEMPO

Aunque a menudo estamos interesados en la intensidad del campo E y H , que son cantidades medibles físicamente, es conveniente en algunos casos utilizar funciones auxiliares para analizar el campo EM.

Estas funciones auxiliares son el potencial escalar eléctrico V y el Potencial vectorial magnético A . Aunque estas funciones son arbitrarias, ellas se requieren para satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Su derivación esta basada en dos identidades vectoriales fundamentales:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.20)$$

y

$$\nabla \cdot \nabla \times F = 0 \quad (2.21)$$

donde:

ϕ , es un campo escalar.

F , es un campo vectorial arbitrario.

Nuevamente el proceso matemático se encuentra desarrollado en el *apéndice C*. Lo cual nos genera las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \quad (2.22)$$

y

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \quad (2.23)$$

Las cuales representan las ecuaciones de onda de un medio inhomogeneo. La solución integral de (2.22) y (2.23) se llaman los potenciales retardados.

$$A = \int \frac{\mu [J] dv}{4\pi R} \quad (2.24)$$

y

$$V = \int \frac{[\rho_V] dv}{4\pi R} \quad (2.25)$$

donde:

R , es la distancia de la fuente al punto donde se desea determinar el campo.

Las cantidades en corchetes, denotan a ρ_V (densidad de carga volumétrica) y J (densidad de corriente) especificados al tiempo $R(\mu\varepsilon)^{1/2}$ anterior para el cual A o V están siendo determinados.

2.9 CAMPOS ARMÓNICOS DE TIEMPO

Hasta este punto hemos considerado el caso general de variación arbitraria del tiempo de los campos eléctricos y magnéticos. En muchas situaciones prácticas especialmente a bajas frecuencias, es suficiente tratar con soluciones del campo EM en estado estacionario o (equilibrio) cuando son producidos por corrientes senoidales. Tales campos se dicen ser senoidales variantes en el tiempo, o armónicos del tiempo, esto es, los campos varían a una frecuencia angular ω . Un campo arbitrario dependiente del tiempo $F(x, y, z, t)$ o $F(r, t)$ puede expresarse por:

$$F(r, t) = \text{Re} \left[F_s(r) e^{j\omega t} \right] \quad (2.26)$$

donde:

$F(r) = F_s(x, y, z, t)$, es la forma fasorial de $F(r, t)$ y es general complejo.

Re , indica “tomando la parte real de” la cantidad en el corchete.

ω , es la frecuencia angular en (rad/seg) de la excitación senoidal.

Los campos electromagnéticos pueden ser representados en notación fasorial como:

$$\begin{bmatrix} E(r, t) \\ D(r, t) \\ H(r, t) \\ B(r, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s(r) \\ D_s(r) \\ H_s(r) \\ B_s(r) \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (2.27)$$

Utilizando la representación fasorial nos permite reemplazar las derivadas respecto del tiempo $\frac{\partial}{\partial t}$ por $j\omega$, así que

$$\frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega e^{j\omega t}$$

Por lo que las ecuaciones de Maxwell, en estado estacionario senoidal, son:

$$\nabla \cdot D_s = \rho_{VS} \quad (2.28a)$$

$$\nabla \cdot B_s = 0 \quad (2.28b)$$

$$\nabla \times E_s = -j\omega B_s - J_{ms} \quad (2.28c)$$

$$\nabla \times H_s = J_{es} + j\omega D_s \quad (2.28d)$$

Podemos observar que el efecto de considerar el tiempo armónico, es para eliminar la dependencia del tiempo en las ecuaciones de Maxwell, con ello reducir la dependencia espacio-tiempo a una dependencia de espacio solamente. Esta simplificación no excluye a campos variantes en el tiempo más generales. Un campo no senoidal se puede representar como:

$$F(r, t) = \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_s(r, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \quad (2.29)$$

Así que la solución a las ecuaciones de Maxwell para campos no senoidales se pueden obtener por la suma de todas las componentes de Fourier $F_s(r, \omega)$ sobre ω . De aquí en adelante, ya no escribiremos el subíndice s que denota cantidad fasorial para evitar confusiones.

Reemplazando las derivadas del tiempo en la ecuación (2.19) por $(j\omega)^2$ nos permiten obtener la ecuación de onda escalar en forma fasorial.

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.30)$$

donde:

k = a la constante de propagación en (rad/m) y dada por:

$$k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.31)$$

Recordando que las ecuaciones (2.17) a (2.19) fueron obtenidas considerando que $\rho_V = 0 = J$. Si $\rho_V \neq 0 \neq J$ la ecuación (2.30) puede tener la forma general:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = g \quad (2.32)$$

Observamos que esta ecuación de Helmholtz se reduce a:

(1) La ecuación de Poisson (desarrollo en el apéndice A)

$$\nabla^2 \psi = g \quad (2.33)$$

cuando $k=0$ (por ejemplo, $\omega = 0$ para caso estático)

(2) Ecuación de Laplace (desarrollo en el apéndice A)

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.34)$$

cuando $k=0=g$

Por lo que, las ecuaciones de Poisson y de Laplace son casos especiales de la ecuación de Helmholtz o ecuación de onda. Observe que la función ψ se dice ser armónica si satisface la ecuación de Laplace.

CAPÍTULO 3.

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO (DFDT)

3.1 ANTECEDENTES

Cuando la solución analítica no se puede llevar a cabo debido a la complejidad de las fórmulas teóricas se recurre a otro tipo de solución, como por ejemplo los métodos gráficos, los métodos experimentales, los métodos analógicos y los métodos numéricos.

En los últimos años los métodos numéricos para el estudio de sistemas dinámicos han tenido gran auge, debido al acceso a computadoras muy eficientes, poderosas y con un costo aceptable, lo que nos ayuda a la solución de problemas con un alto grado de complejidad. También los métodos numéricos son a veces la única solución a problemas no lineales los cuales en algunas ocasiones es imposible resolver analíticamente.

Así que para resolver las ecuaciones de Maxwell es sumamente importante utilizar un método numérico, debido a que simplifican el trabajo y el tiempo invertido para la solución de estas. Existen varios métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Maxwell, como lo son:

- ❑ Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT) [4]-[7]
- ❑ Método de Elementos Finitos [7], [10]
- ❑ Método de Líneas [7], [8]
- ❑ Método de Línea de Transmisión [7], [9]
- ❑ Método de la Ecuación Integral [11]
- ❑ Método de Momentos [7], [8]
- ❑ Método de la Matriz de Dispersión Generalizada [8]
- ❑ Método de la Resonancia Transversal [8]

De todos estos métodos se escogió el método DFDT, por tratarse de un método sencillo y fácil de implementar en computadora. Además esta técnica constituye un mecanismo idóneo para la solución de problemas electromagnéticos.

3.2 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE DFDT

En 1966 K. Yee describió este método, el cual tiene muchas aplicaciones en radiación y dispersión electromagnética, entre otros, ha avanzado conforme avanza la tecnología en velocidad de procesamiento en las computadoras.

El método de Diferencias Finitas es una técnica numérica simple que se emplea para resolver ecuaciones diferenciales parciales como las que se utilizan analíticamente, definidas en regiones finitas, además esta técnica es útil y poderosa debido a que:

- a. Por la simplicidad del método las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son discretizadas en espacio y tiempo en una forma directa.
- b. Es un método que cuenta con una gran flexibilidad geométrica.
- c. Esta basado en aproximaciones que permiten reemplazar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones de diferencias finitas que son algebraicas definidas en una región con condiciones de frontera y condiciones iniciales que marcarán el lugar de inicio para realizar la solución de dicho problema.

3.3 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DFDT

La solución con diferencias finitas involucra los siguientes pasos:

1. Dividir la región solución en una rejilla o malla de nodos.

Para poder aplicar este método, primero hay que definir la región solución donde ha de calcularse el valor de la función incógnita a resolver. Dicha región solución, se discretiza en un número variable de puntos formando una malla o nodos de forma rectangular, rombo o circular, dependiendo de la estructura que se utilice, en la figura 2 se muestran las mallas o nodos mas comunes. La aplicación del Método de Diferencias Finitas sobre la región solución dará como resultado conocer el valor de la función incógnita en cada uno de esos nodos o mallas. El número y disposición de los mismos depende de la exactitud que se desea en las soluciones.

2. Se aproxima la ecuación diferencial dada por una ecuación equivalente de diferencias finitas.

Esta ecuación equivalente deberá relacionar la variable dependiente en un punto en la región con sus valores en los puntos vecinos. El método aproxima la función incógnita en cada nodo por su desarrollo en serie de Taylor.

3. Resolver las ecuaciones de diferencias finitas sujetas a las condiciones de frontera preescritas y/o a las condiciones iniciales.

El número de términos del desarrollo, que se tendrán en cuenta, será el suficiente para que junto con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, sea posible eliminar las derivadas y obtener, de este modo, una ecuación que nos permita conocer el valor de la función en cada nodo. Dicha ecuación, relaciona el valor de la función en un nodo con el valor de la función en los nodos adyacentes.

Este proceso se repite para cada uno de los nodos, obteniéndose un sistema de ecuaciones, que al resolverlas, conduce a la obtención de la solución aproximada que se estaba buscando. El curso de la acción tomada en los 3 pasos anteriores es dictado por la naturaleza del problema a ser resuelto, la región solución, y las condiciones de frontera.

Los patrones siguientes mostrados en la Figura 2, ilustran los patrones de las mallas o rejillas más comunes, que son utilizadas en el método de diferencias finitas.

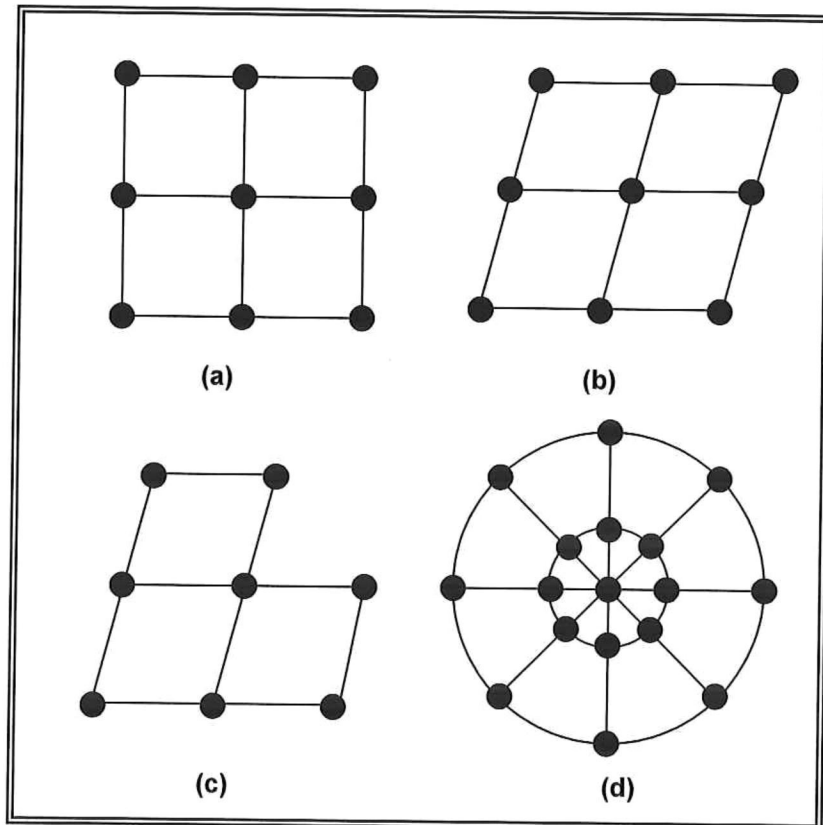


Figura 2. Rejillas o mallas más comunes

Estas mallas o rejillas son utilizadas para el caso de la figura (2a) en estructuras para guías de ondas, guías de ondas coplanares y guías de microcinta, las mallas (2b) y (2c) son aplicadas a estructuras complejas, y por ultimo la figura (2d) se utiliza para cables coaxiales.

3.4 ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS

Antes de encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) con el método de diferencias finitas, se demostrará como se construye la aproximación de diferencias finitas de una ecuación diferencial dada. Esto esencialmente involucra calcular derivadas numéricamente.

Dada una función $f(x)$ en dos dimensiones, como se muestra en la figura 3.

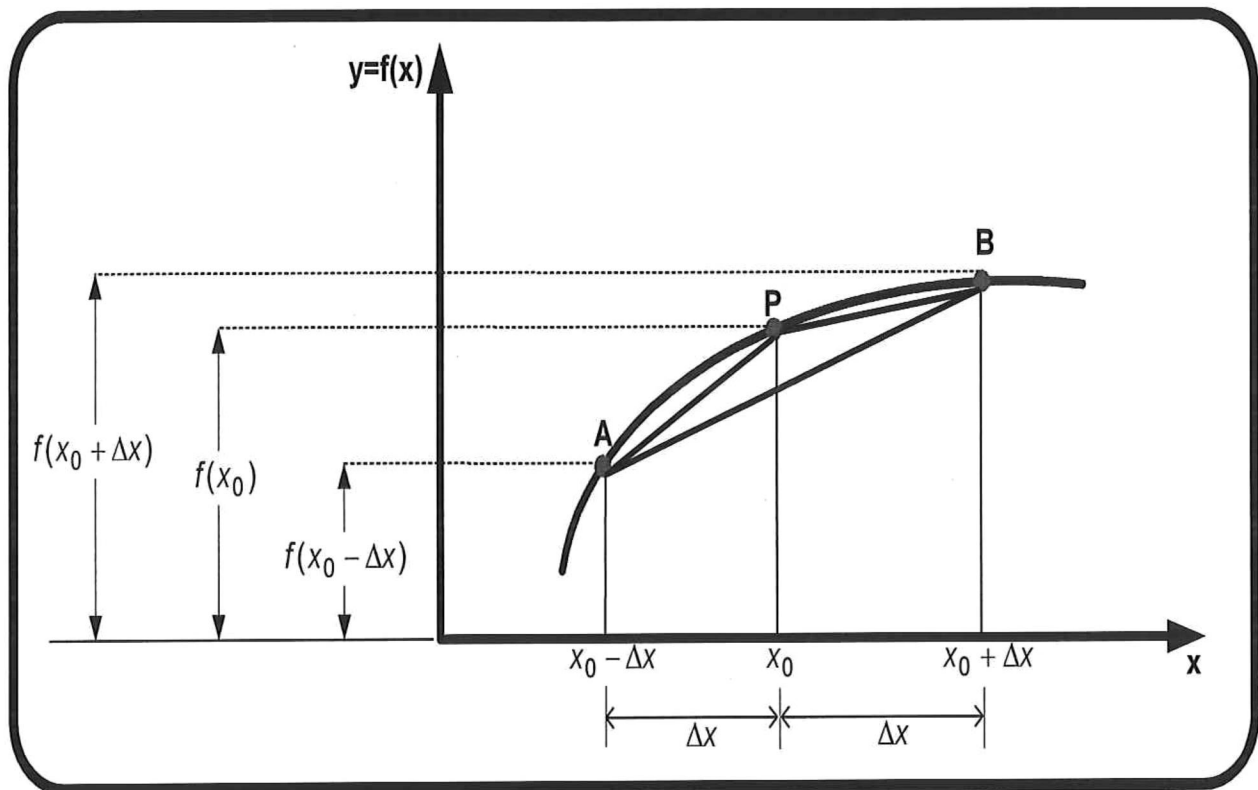


Figura 3. Esquema de diferencias finitas

Se puede aproximar su derivada o pendiente o tangente tomando el arco PB, su pendiente nos proporciona la fórmula de diferencia directa en el punto P.

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Tomando la pendiente del arco AP, nos permite obtener la fórmula de diferencia hacia atrás.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

o bien tomando la pendiente del arco AB, resulta la fórmula de diferencia central.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.3)$$

Cualquier aproximación de una derivada en términos de valores de un conjunto discreto de puntos es llamada *Aproximación de diferencias finitas*.

Una comprobación de la ecuación anterior es la que se obtiene utilizando series de Taylor. La cual se desarrolló en el *apéndice D*, tanto para la primera como para la segunda derivada parcial de la función $f(x)$ en el punto P.

De manera similar, las fórmulas de diferencias finitas (3.1) y (3.2) tienen errores de truncamiento de $O(\Delta x)$. Las aproximaciones de diferencias finitas de alto grado pueden obtenerse tomando más términos en series de Taylor. Si la serie infinita de Taylor fuera obtenida (retenida), una solución exacta podría ser realizada para el problema dado. Sin embargo, por razones prácticas, la serie infinita es normalmente truncada después del término de segundo orden. Esto impone un error el cuál existe en todas las soluciones de diferencias finitas. Este error puede reducirse de dos formas: [4]

1. *Utilizando una malla más tupida.*

Entre mas fina sea la malla más exacto será el resultado que obtendremos, aunque el tiempo de cómputo será mas largo. Para decidir cual es el número de iteraciones se debe de tomar en cuenta la capacidad del procesador de la computadora debido a que si es muy grande el número y el procesador no es muy potente, se puede bloquear la computadora o se tardara mucho tiempo en realizar todas las iteraciones.

2. *Tomando en consideración más términos del desarrollo, lo que obliga a considerar más nodos para eliminar las derivadas.*

A este aspecto conviene resaltar que la combinación de nodos utilizada tiene la propiedad de cancelar, por causa de su simetría, los términos con derivadas de orden impar o con derivadas cruzadas. Si se utilizan nodos sin estas simetrías el error aumentaría.

La exactitud de los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas depende de:

- El número de divisiones de la cuadrícula.

CAPÍTULO 4.

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS POR EL MÉTODO DFDT EN MATLAB

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se utilizarán las ecuaciones de Maxwell del rotacional para plantear su solución mediante un algoritmo utilizando el método de diferencias finitas. Derivaremos la solución general de las 2 ecuaciones de rotacional e iniciaremos la simplificación para llevarlas hasta su representación en una sola dimensión, pasando de tres dimensiones a una dimensión. Demostraremos como se puede derivar la ecuación de onda de una manera sencilla utilizando principios básicos.

Solución:

Partiendo del conocimiento que la ley de Faraday es:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E - M \quad (4.1)$$

y la ley de Ampere

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times H - J \quad (4.2)$$

con

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E, \quad B = \mu H = \mu \bullet \mu_r H \quad (4.3)$$

y también

$$J = J_S + \sigma E, \quad M = M_S + \sigma^* H \quad (4.4)$$

donde como ya se había descrito en el capítulo 3:

B = Densidad de Flujo magnético (Wb/m^2)

E = Intensidad del campo eléctrico (V/m)

D = Densidad de Flujo eléctrico (C/m^2)

H = Intensidad del campo magnético (A/m)

ϵ = Permitividad eléctrica (F/m)

ϵ_r = Permitividad relativa (escalar)

ϵ_0 = Permitividad del espacio libre ($8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

μ = Permeabilidad magnética (Henrys/m)

μ_r = Permeabilidad relativa (sin dimensiones, escalar)

μ_0 = Permeabilidad del espacio libre ($4 \pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$)

σ = Conductividad eléctrica (S/m)

σ^* = Pérdidas magnéticas (Ω/m)

J = Densidad de corriente eléctrica (A/m^2)

M = Densidad de corriente magnética (V/m^2)

Combinando (4.1) con (4.3)

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times E - M$$

y (4.4) se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E - \frac{1}{\mu} (M_S + \sigma^* H) \quad (4.5)$$

Ahora para ecuación (4.2) combinamos con (4.3)

$$\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times H - J$$

A la ecuación anterior sustituimos (4.4) y obtenemos

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times H - \frac{1}{\varepsilon} (J_S + \sigma E) \quad (4.6)$$

(4.5) y (4.6) representan las ecuaciones de Maxwell para materiales *lineales, isotrópicos y no dispersivos con pérdidas*.

4.2 ECUACIONES DE MAXWELL EN TRES DIMENSIONES

Como H y E tienen componentes en (x, y, z)

$$H = H_x i + H_y j + H_z k \quad \text{y} \quad E = E_x i + E_y j + E_z k \quad (4.7)$$

Por lo que se desarrollaran las ecuaciones (4.5) y (4.6) para cada componente. Así que comenzando el desarrollo para la ecuación (4.5) obtenemos:

$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) k$$

$$\nabla \times E = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) k \quad (4.8)$$

Sustituyendo en (4.5) para cada componente de H se tiene:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} (M_S + \sigma^* H) \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial H_Y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_Z}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} (M_S + \sigma^* H) \quad (4.9b)$$

$$\frac{\partial H_Z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_Y}{\partial x} - \frac{\partial E_X}{\partial y} \right) - \frac{1}{\mu} (M_S + \sigma^* H) \quad (4.9c)$$

Ahora realizamos el mismo desarrollo para ecuación (4.6) y obtenemos:

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{\partial H_Y}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial H_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial H_Y}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial y} \right) k$$

$$\nabla \times H = \left(\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{\partial H_Y}{\partial z} \right) i - \left(\frac{\partial H_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial H_Y}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial y} \right) k \quad (4.10)$$

Sustituyendo en (4.6) para cada componente de E se tiene:

$$\frac{\partial E_X}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_Z}{\partial y} - \frac{\partial H_Y}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon} (J_S + \sigma E) \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial E_Y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_Z}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon} (J_S + \sigma E) \quad (4.11b)$$

$$\frac{\partial E_Z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_Y}{\partial x} - \frac{\partial H_X}{\partial y} \right) - \frac{1}{\varepsilon} (J_S + \sigma E) \quad (4.11c)$$

Las ecuaciones (5.9) y (5.11) constituyen en *las ecuaciones básicas del algoritmo numérico DFDT, en tres dimensiones.*

4.3 ECUACIONES DE MAXWELL EN DOS DIMENSIONES

Considerando que la estructura a modelar se extiende al infinito en la dirección de “z” sin cambiar de forma ni de sección transversal. Si la onda incidente es también uniforme en la dirección “z”, entonces todas las derivadas parciales del campo respecto de “z” se hacen cero. Bajo estas condiciones el juego completo de ecuaciones de Maxwell del rotacional (4.9) y (4.11) se reducen a:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_s + \sigma^* H_x) \right] \quad (4.12a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_s + \sigma^* H_y) \right] \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_s + \sigma^* H_z) \right] \quad (4.12c)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - (J_s + \sigma E_x) \right] \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_s + \sigma E_y) \right] \quad (4.13b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_s + \sigma E_z) \right] \quad (4.13c)$$

□ **MODO DE PROPAGACIÓN TRANSVERSAL MAGNÉTICO CON RESPECTO A “Z” (TMZ)**

Considerando el grupo de ecuaciones (4.12) y (4.13), y agrupando las ecuaciones (4.12a), (4.12b) y (4.13c) en las que interviene solamente H_x , H_y y E_z , se forma el conjunto de componentes de campo denominadas TMZ en dos dimensiones:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_{S_x} + \sigma^* H_x) \right] \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_s + \sigma^* H_y) \right] \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_s + \sigma E_z) \right] \quad (4.14c)$$

□ **MODO DE PROPAGACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICO CON RESPECTO A “Z” (TEZ)**

El siguiente grupo será formado por las ecuaciones (4.3a), (4.13b), y (4.12c), en las cuales intervienen solamente E_x , E_y y H_z , que es el conjunto TEZ en dos dimensiones:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - (J_s + \sigma E_x) \right] \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_s + \sigma E_y) \right] \quad (4.15b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_s + \sigma^* H_z) \right] \quad (4.15c)$$

En el conjunto de ecuaciones (4.14) y (4.15) se observa que los modos TMz y TEz no contienen componentes vectoriales comunes. Así que, estos modos pueden existir simultáneamente sin que interactúe uno con otro, en estructuras compuestas de materiales anisotrópicos o isotrópicos, sin componentes de tensores constitutivos.

4.4 ECUACIONES DE MAXWELL EN UNA DIMENSIÓN

□ ONDA DIRIGIDA EN X POLARIZADA EN “Z”, MODO TEM

Considerando que no existe variación del campo electromagnético (señal simulada) y tampoco de la estructura modelada en la dirección “y”. Esto es, considerando que las derivadas parciales con respecto a “y” y “z” son iguales a cero, y que la estructura consiste de un espacio infinito. Entonces las ecuaciones de Maxwell en dos dimensiones en modo TMz en coordenadas rectangulares dadas en (4.14) se reducen a:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} [M_{S_x} + \sigma^* H_x] \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{S_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (4.16b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - (J_{S_z} + \sigma E_z) \right] \quad (4.16c)$$

considerando que $M_{S_x} = 0$ todo el tiempo y que $H_x = 0$ en $t = 0$ entonces:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

y las 3 ecuaciones anteriores se reducen solo a dos:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{sy} + \sigma^* H_y) \right] \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - (J_{sz} + \sigma^* E_z) \right] \quad (4.17b)$$

□ ONDA DIRIGIDA EN “X”, Y POLARIZADA EN “Y” MODO TEM

De manera similar, considerando que las derivadas parciales con respecto a “y” son iguales a cero, y aplicando lo anterior en las ecuaciones de Maxwell de modo TE_Z se tiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} (J_{sx} + \sigma E_x) \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} [J_{sy} + \sigma E_y] \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} + (M_{sz} + \sigma^* H_z) \right] \quad (4.18c)$$

ahora considerando que $J_{sx} = 0$ todo el tiempo y que $E_x = 0$ en $t = 0$, entonces la ecuación (4.18a):

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

y el conjunto anterior se transforma a:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \left[(J_{S_y} + \sigma E_y) \right] \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E}{\partial x} - (M_{S_z} + \sigma^* H) \right] \quad (4.19b)$$

El conjunto de ecuaciones (4.17a) y (4.17b) definen una *onda transversal electromagnética* TEM, que va dirigida en dirección “x” y polarizada en “z”.

Similarmente las ecuaciones (4.19a) y (4.19b) definen a una onda transversal electromagnética TEM, en una dirección viajando en dirección “x” y polarizada en “y”.

4.5 DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA EN UNA DIMENSIÓN

Consideremos las ecuaciones que definen la onda TEM en una dimensión (4.17a) y (4.17b). De estas ecuaciones, vamos ahora a derivar una ecuación de onda escalar en una dimensión para H_y , homogénea y sin pérdidas; considerando que:

$$M_{S_y} = J_{S_z} = 0 \quad y \quad \sigma^* = \sigma = 0$$

y derivando (4.17a) con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \bullet \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \bullet \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} \quad (4.20a)$$

derivando ahora (4.17b) respecto a “x”

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (4.20b)$$

Como el sistema es lineal, el orden de la derivación parcial es irrelevante, podemos sustituir las derivadas de E_z respecto de (“x” y “t”) de la ecuación (4.20b) en (4.10a) y tendremos:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (4.21)$$

donde:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ que es la velocidad de la luz } = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

La ecuación (4.21) en la ecuación de onda escalar en una dimensión para H_y . Esta ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.22)$$

De igual manera podemos proceder para obtener la ecuación de onda para E_z . Así que derivando (4.17b) respecto a “t” se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial Ez}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \bullet \frac{\partial Hy}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 Ez}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \bullet \frac{\partial^2 Hy}{\partial t \partial x} \quad (4.23a)$$

ahora derivando (4.17a) con respecto de "x":

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Hy}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \bullet \frac{\partial Ez}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 Hy}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\mu} \bullet \frac{\partial^2 Ez}{\partial x^2} \quad (4.23b)$$

Sustituyendo las derivadas de Hy respecto de "x" y "t" de (4.23a) y (4.23b)

$$\frac{\partial^2 Ez}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 Ez}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 Ez}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Ez}{\partial x^2} \quad (4.24)$$

4.6 IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS EN MATLAB

En los siguiente algoritmos se aplicará el método Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (DFDT) descrito en el capítulo 3. En los resultados de las simulaciones se podrá observar como las componentes del campo magnético se encuentran en medio del campo eléctrico en una distancia Δt tal como se ilustran en la figura 4.

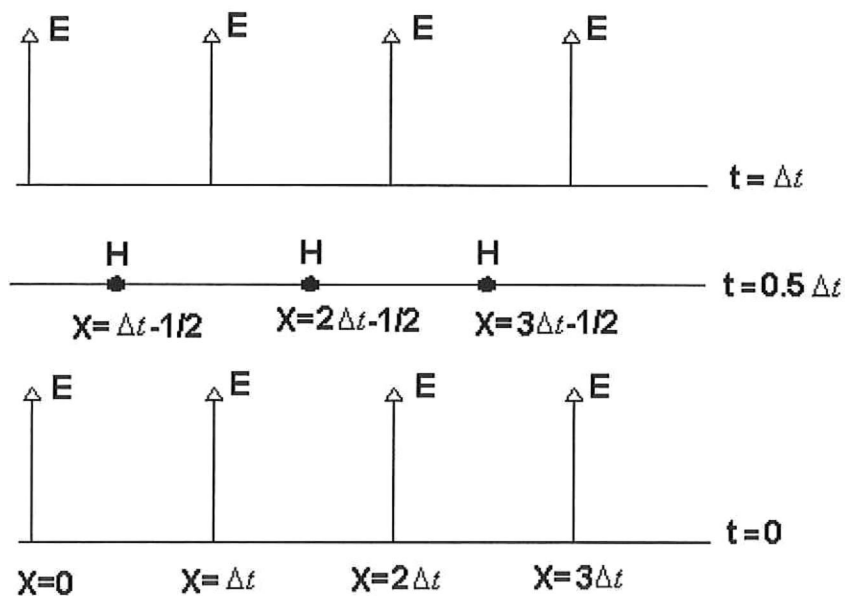


FIGURA 4. Propagación en una dimensión.

Por lo que se dice que las componentes forman saltos y nuestro método DFDT completa y almacena las componentes del campo eléctrico en memoria para un tiempo Δt utilizando datos del campo magnético almacenados un tiempo $\Delta t - 1/2$. Y para calcular el campo magnético se toman los valores en memoria calculados anteriormente por el campo eléctrico y así continuara hasta los pasos de tiempo deseados.

NOTA IMPORTANTE:

A continuación se presentan los códigos originales realizados en MATLAB, los cuales se añaden a la interfaz gráfica del Simulador Electromagnético, generado en MATLAB con la opción GUIDE. Al realizar el ambiente gráfico, primero hay que generar las ventanas de nuestro simulador electromagnético, en donde MATLAB de manera automática genera un código, donde es agregado el algoritmo correspondiente, ya sea a la ventana para la simulación de un pulso Gaussiano o a la ventana para la simulación de una onda senoidal. En la sección 5.3 se presentan las ventanas del Simulador Electromagnético.

□ ALGORITMO PARA LA SIMULACIÓN DE UN PULSO GAUSSIANO.

Este primer algoritmo es el ejemplo tomado de [6] (página 13), el cual se implementó a MATLAB y genera la simulación de un pulso gaussiano en el espacio libre en una dimensión.

Declaración de variables.

KE=200;	%número de celdas que se utilizaran para la región solución
kc=KE/2;	%centro del problema de espacio
t0=40;	%centro del pulso incidente
spread=12;	%ancho del pulso incidente
T=0;	
NS=100;	%número de veces que se repetirá el cálculo de los campos EM

Desarrollo del ciclo el cual genera el pulso Gaussiano en el campo eléctrico y en el campo magnético.

for k=1:1:KE	%inicio
ex(k)=0;	%campo eléctrico en cero
hy(k)=0;	%campo magnético en cero
end	
for n=1:1:NS	
T=T+1;	
ex(1)=ex(k)+0.5*(0-hy(k));	
for k=2:1:KE	
ex(k)=ex(k)+0.5*(hy(k-1)-hy(k));	%cálculo del campo eléctrico de acuerdo a (1.9a) de [4]
end	
pulse= exp(-0.5*((t0-T)/spread)^2);	%pulso Gaussiano

```

ex(kc)=pulse;

for k=1:1:KE-1
    hy(k)=hy(k)+0.5*(ex(k)-ex(k+1));    %cálculo del campo magnético de acuerdo a (1.9b) de [4]
end
end

```

Se genera la visualización de los campos electromagnéticos

```

figure;                                %crea una nueva ventana
subplot(2,1,1)                          %crea ejes, en la opción seleccionada
plot(ex,'r')                             %grafica el campo eléctrico, 'r' indica el color de la línea
axis([0 200 -1 1]);                     %controla la escala de los ejes
title('SIMULACION EN EL ESPACIO LIBRE DEL METODO DFDT EN UNA DIMENSION');
ylabel('Ex');                             %nombre del eje Y de la primera gráfica
subplot(2,1,2);
plot(hy,'b');                             %grafica el campo eléctrico,
axis([0 200 -1 1]);
xlabel('NUMERO DE CELDAS');              %nombre del eje X de la segunda gráfica
ylabel('Hy');

```

❑ ALGORITMO PARA GENERAR LA SIMULACIÓN DE UNA SEÑAL SENOIDAL CON CONDICIONES DE FRONTERA.

En el siguiente algoritmo se implementa la solución de las ecuaciones de Maxwell para el rotacional, a través de una malla o rejilla comprimida de celdas en una dimensión.

Primero se declaran las constantes fundamentales tomadas de [10].

```

c=3e8;                                %velocidad de la luz en el espacio libre. Unidades [m/s]
muz=4.0*pi*1.0e-7;                    %permeabilidad del espacio libre. Unidades [H/m]
epsz=1.0/((c^2)*muz);                 %permitividad del espacio libre. Unidades [F/m]
freq=1e+9;                             %frecuencia de la Señal investigada. Unidades [Hz]. En la Interfaz Gráfica
                                        %se pueden seleccionar otra frecuencia.
lambda=c/freq;                         %longitud de la fuente de excitación
omega=2.0*pi*freq;                     % frecuencia angular

```

Se especifican parámetros de la malla o rejilla y del material los cuales se tomaron de [10].

```

ie=200;                                %número de celdas en dirección x, o el número de celdas que se desea
                                        % dividir nuestro medio. En Interfaz Gráfica, es una opción a modificar
ib=ie+1;
dx=lambda/20.0;                         %incremento espacial de x en 1-D

```

<code>dt=dx/c;</code>	%incremento del paso de tiempo
<code>omegad=omega*dt;</code>	%de la frecuencia angular
<code>T=1/freq;</code>	%periodo de la señal
<code>nmax=round(T*10 /dt);</code>	%número total de pasos de tiempo, el periodo al multiplicarse por 10 indica %que la simulación mostrara 10 periodos de la señal.
	%en la interfaz gráfica, la permitividad y conductividad tienen diferentes %valores a elegir.
<code>eps=1.0;</code>	%constante dieléctrica o permitividad del material en este caso es el aire,
<code>sig=5.0e-3;</code>	%conductividad del material, el cual es la arcilla

Actualización de los coeficientes para la región espacial con medio no permeable. Consultando [4] se podrá observar que el factor de estabilidad y los coeficientes de relajación están expresados de una forma diferente, lo cual hace que la frecuencia de nuestra simulación sea menor y la amplitud sea mayor y la propagación del campo eléctrico y magnético no pueden apreciarse correctamente.

<code>s=dt/muz/dx;</code>	% Factor de estabilidad
	%coeficientes de actualización de las componentes del campo eléctrico
<code>ca=(1-(sig*dt)/(2*eps*epsz))/(1+(sig*dt)/(2*eps*epsz));</code>	
<code>cb=s*(dt/epsz/eps/dx)/(1+(sig*dt)/(2*eps*epsz));</code>	

Arreglo de los Campos Eléctrico y Magnético.

<code>ez(1:ib)=0.0;</code>
<code>hy(1:ie)=0.0;</code>

Se genera animación para la propagación de los campos eléctricos y magnéticos.

<code>x=linspace(dx,ie*dx,ie);</code>
<code>rect=get(gcf,'Position');</code>
<code>rect(1:2)=[0 0];</code>
<code>M=moviein(nmax/2,gcf,rect);</code>

Empieza el lazo de pasos de tiempo que esta dado por *nmax* y actualización del campo eléctrico y del campo magnético.

<code>for n=1:nmax</code>
<code>ez(1)=s*sin(omegad*n);</code>
<code>rbc=ez(ie);</code>
<code>ez(2:ie)=ca*ez(2:ie)+cb*(hy(2:ie)-hy(1:ie-1));</code>
<code>ez(ib)=rbc;</code>
<code>hy(1:ie)=hy(1:ie)+ez(2:ie)-ez(1:ie);</code>

Visualización de los campos EM y termina el laso de pasos de tiempo.

```
if mod(n,2)==0;
rtime=num2str(round(n*dt/1.0e-9));
subplot(2,1,1);
plot(x,ez(1:ie)/s,'k');
axis([0 3 -1 1]);
title(['TIEMPO = ',rtime,' ns']);
xlabel('x (metros)');
ylabel(' Campo Electrico, Ez (V/m) ');
subplot(2,1,2);
plot(x,hy(1:ie)/s,'k');
axis([0 3 -1 1]);
xlabel('x (metros)');
ylabel(' Campo Magnetico, HY (A/m) ');
M(:,n/2)=getframe(gcf,rect);
end
end
movie(gcf,M,0,10,rect);
```

CAPÍTULO 5.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación, se presentan algunas simulaciones realizadas con los códigos originales de MATLAB, sin la implementación del ambiente gráfico, se deja a la persona interesada en utilizar el Simulador Electromagnético, observar el comportamiento de los campos electromagnéticos, modificando las diferentes opciones generadas en el ambiente grafico, y comparar con los resultados que se han elegido. Una explicación más amplia de lo anterior, se presenta a continuación en las secciones 5.1 y 5.2.

5.1 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DE UN PULSO GAUSSIANO EN UNA DIMENSIÓN

En el primer algoritmo se simula un pulso Gaussiano para el campo eléctrico y magnético, el cual se está propagando libremente en un medio homogéneo y sin pérdidas. El pulso es colocado en el centro y se propaga en las dos direcciones como se muestra en la Figura 5.

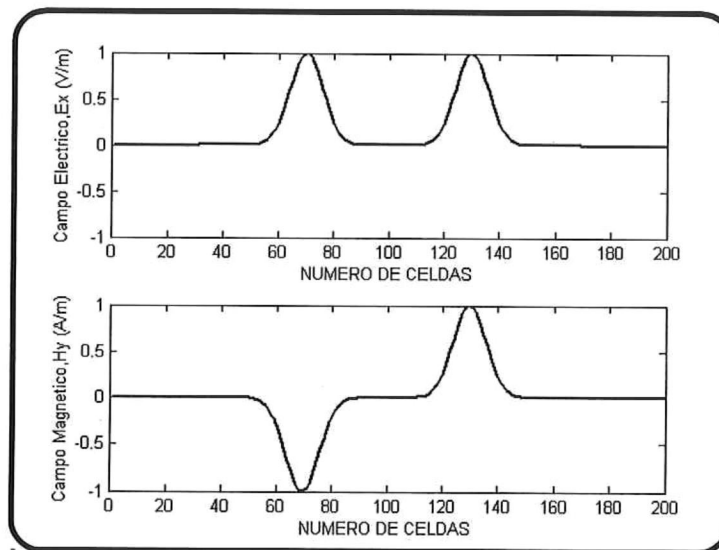


Figura 5. Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión.

El campo eléctrico E_x presenta valores positivos en ambas direcciones mientras que el campo magnético H_y tiene valores negativos en la dirección negativa. Las magnitudes de los campos eléctrico y magnético (E_x y H_y) se mantienen constantes.

En este algoritmo se puede simular cualquier otra excitación electromagnética de manera sencilla modificando la línea del pulso y la variable de NS, los resultados obtenidos con estas modificaciones se presentan a continuación en las Figuras 6 y 7.

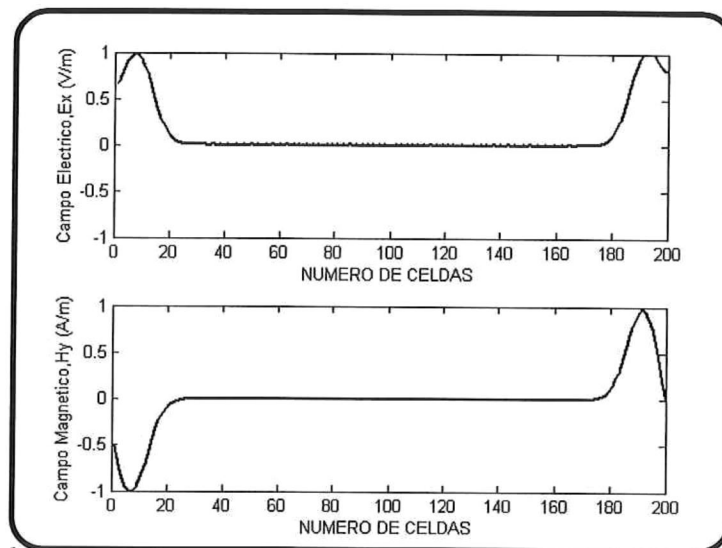


Figura 6. Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión, con condiciones de frontera para 225 pasos.

En la Figura 6, se puede observar como el pulso Gaussiano para el campo eléctrico E_x y para el campo magnético H_y se propagan alejándose uno del otro hasta desaparecer del rango que se tiene originalmente, además se puede observar que las magnitudes del campo eléctrico E_x y el campo magnético H_y quedan igual que la Figura 5.

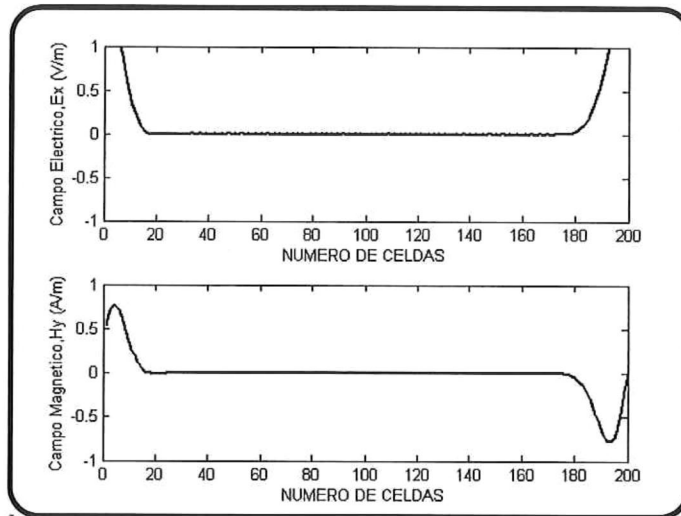


Figura 7. Propagación de un pulso Gaussiano en el espacio libre en una dimensión, con condiciones de frontera para 250 pasos.

Para la simulación de la propagación de la Figura 7, se puede apreciar que los pulsos para el campo eléctrico E_x y campo magnético H_y no están alejándose, pero se observa como la magnitud del campo eléctrico E_x aumenta, aunque para el campo magnético H_y , vemos como las direcciones de los pulsos se invierten además que las magnitudes para este campo disminuyen con respecto a las simulaciones de las propagaciones de las Figuras 5 y 6.

5.2 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DE UNA SEÑAL SENOIDAL CON CONDICIONES DE FRONTERA

El algoritmo desarrollado en MATLAB, nos permite observar la propagación de una señal cuando ésta se propaga a través de un medio homogéneo. Las Figuras 8, 9 y 10 ilustran la manera en como estas señales se van atenuando al variar los campos en el espacio y el tiempo.

Por otra parte, el programa permite además observar la animación de las señales simuladas, con lo cual el observador obtiene una mejor idea de cómo los campos

electromagnéticos se propagan a través de los medios. Este programa en conjunto con el anterior resultan útiles para observar las dos condiciones de propagación en medio con y sin pérdidas.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la simulación de varias señales a diferentes frecuencias, utilizando el número de celdas, permitividad del material y conductividad del material, que se declaró en el algoritmo presentado en el capítulo anterior, para generar esta simulación.

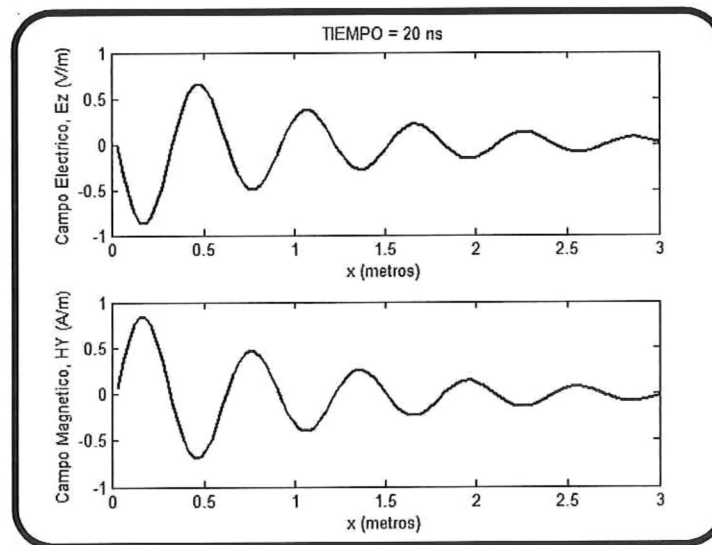


Figura 8. Propagación de una onda senoidal de 500 MHz de frecuencia

Utilizando una frecuencia de 500 MHz para nuestra señal, en la Figura 8, se puede observar claramente que la intensidad del campo eléctrico y magnético en el tiempo $t=0$ y en $x=0$, es más intenso que para un tiempo y distancia $t>0$ y para $x>0$. La señal se propaga a través del medio en un lapso de 20 ns .

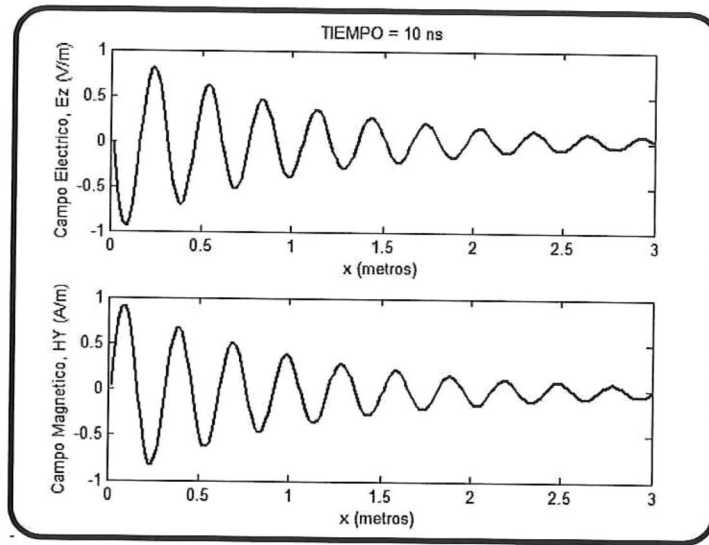


Figura 9. Propagación de una onda senoidal de 1 GHz de frecuencia

En la Figura 9, tenemos la simulación de nuestra onda senoidal con la modificación de 1GHz de frecuencia, que igual que la simulación para la Figura 8, nuestra onda senoidal está propagándose en un medio no permeable con pérdidas, en la cual podemos observar de nuevo, la intensidad del campo eléctrico y magnético en el tiempo $t=0$ y en $x=0$, es mayor que para un tiempo y distancia $t>0$ y para $x>0$, lo anterior transcurre en un lapso de 10ns, debido al aumento de la frecuencia, la señal se propaga más rápido y en menos tiempo.

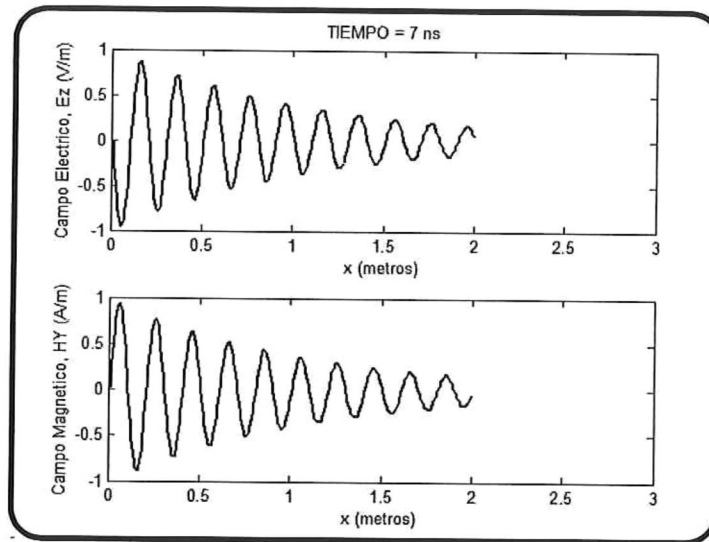


Figura 10. Propagación de una onda senoidal de 1.5 GHz de frecuencia

Para la simulación de la Figura 10, nuevamente variamos la frecuencia, la cual se aumento a 1.5GHz, por lo que ahora vemos como nuestra onda senoidal se propaga con mayor velocidad, debido al aumento de la frecuencia, manteniendo las mismas intensidades para los campos eléctricos y magnéticos, pero por una distancia y tiempo menor con respecto a las propagaciones de las simulaciones presentadas en las Figuras 8 y 9,

5.3 DESCRIPCIÓN DE LA INTERFAZ GRÁFICA

Los algoritmos presentados anteriormente, fueron realizado en la versión MATLAB 6.1, por lo que el usuario interesado en observar el comportamientos de los campos electromagnéticos en una dimensión necesita tener en su computadora el programa MATLAB versión 6.1 en adelante.

Además, los algoritmos sólo generan la simulación con los datos grabados en el código, para modificarlos, y obtener las simulaciones presentadas aquí, o cualquier otra que se quisiera observar, entonces, seria necesario que el usuario desplegara el programa, para así modificar lo que desee, lo cual podría ocasionar que accidentalmente se cambie alguna línea del programa, la cual, no permitirá funcionar correctamente el algoritmo.

Para evitar este inconveniente, se generó la interfaz gráfica, utilizando el ambiente de diseño GUI (graphical user interface) de MATLAB, la cual permite al usuario interesado en esta área de estudio, observe el comportamiento de los campos eléctricos y los campos magnéticos modificando las opciones ahí presentadas.

Este ambiente gráfico, se presenta en un archivo ejecutable, para que la persona que quiera hacer uso de este simulador, pueda hacerlo desde cualquier computadora, sin necesidad de tener el programa MATLAB instalado.

A continuación, se muestran las ventanas que despliega el ambiente gráfico del simulador electromagnético.

En la Figura 11, como se puede observar, se presenta la ventana principal del simulador electromagnético.

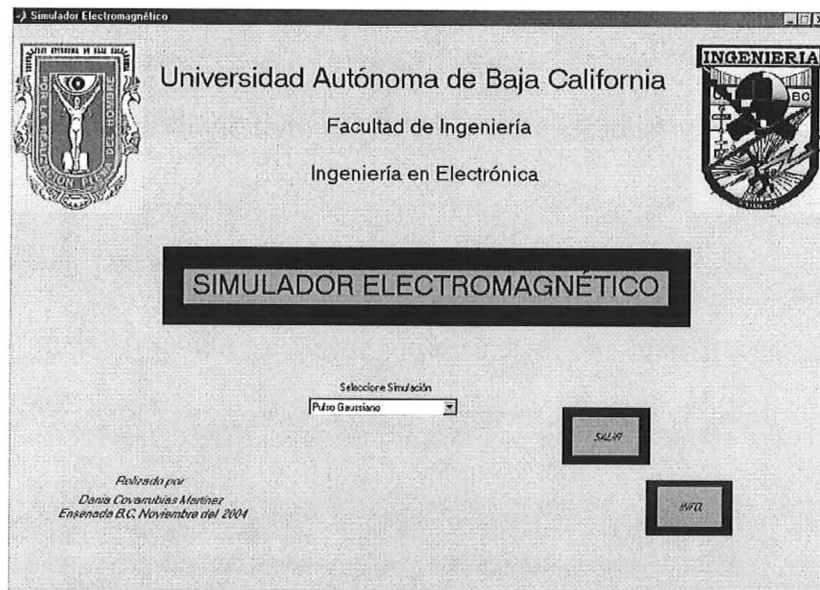


Figura 11. Ventana Principal del Simulador Electromagnético

En esta ventana, se encuentra la opción de seleccionar la simulación que se desea realizar. Simulación de un pulso Gaussiano en una dimensión, o la simulación de una onda senoidal en una dimensión como se muestra en la Figura 12.

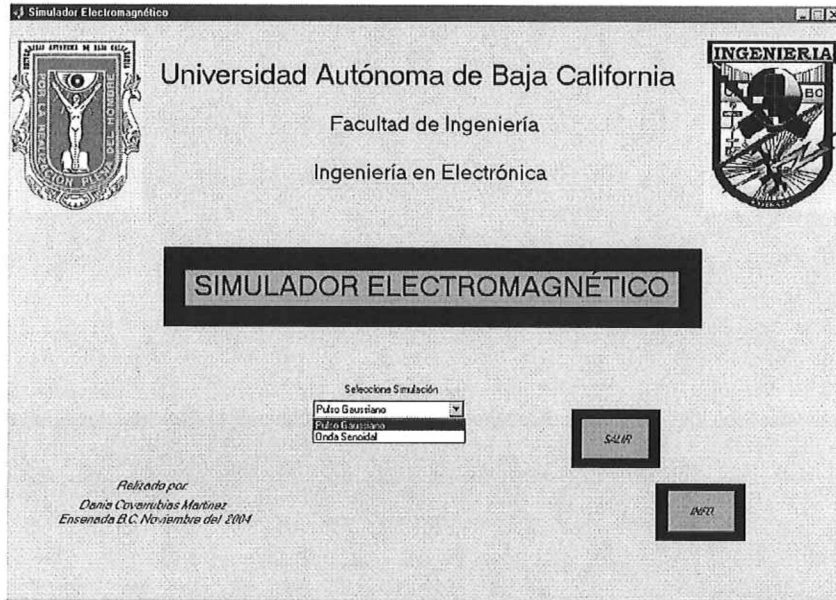


Figura 12. Ventana principal mostrando las opciones de simulación.

Ahora, si el usuario está interesado en saber un poco más sobre este simulador electromagnético, solo tiene que presionar el botón “*INFO*”, y se desplegará una pequeña pantalla con esta información, tal como se muestra en la Figura 13, en donde la persona interesada, podrá informarse cuál es la técnica numérica en la que se basa el Simulador Electromagnético, y una breve explicación de lo que el usuario observará al seleccionar alguna de las simulaciones establecidas.

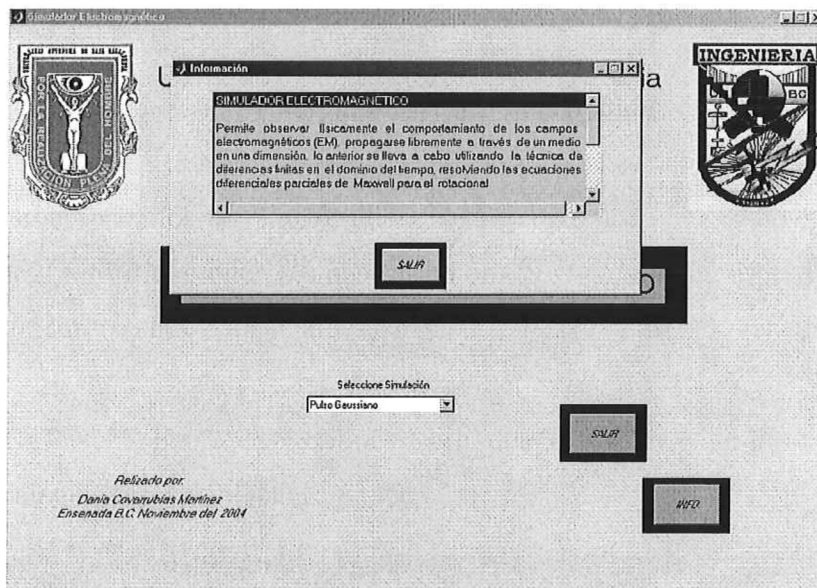


Figura 13. Seleccionando *INFO*.

❑ Seleccionando la opción de Pulso Gaussiano

Se despliega la ventana de la Figura 14, al presionar “SIMULAR”, se observará lo que se mencionó en la sección 5.1, como el pulso es colocado en el centro y se propaga en las dos direcciones, pero con las opciones de seleccionar el ancho que tendrá el pulso Gaussiano, el número de celdas o rejillas en la cual se dividirá nuestra región solución, y el número de pasos en el tiempo que se repetirá el cálculo de los campos eléctricos y los campos magnéticos.

Además, si no se quieren utilizar cualquiera de los valores predeterminados, tiene la opción de poder introducir cualquier otro valor, para observar el comportamiento de los campos electromagnéticos deseados.

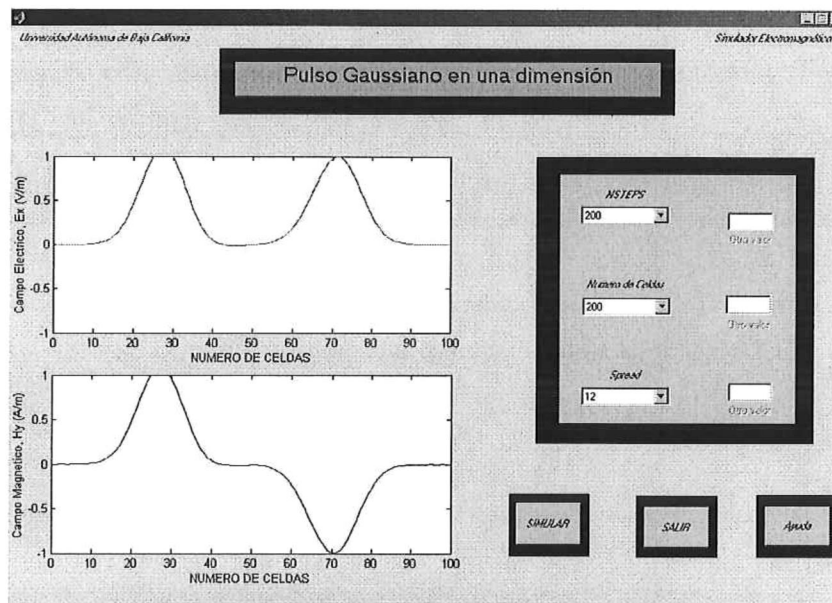


Figura 14. Simulador de un pulso Gaussiano.

Al presionar “Ayuda”, aparece una pequeña pantalla, como se muestra en la Figura 15, la cual contiene información del significado de cada una de las opciones a modificar, al igual que una breve explicación de lo que sucederá al ejecutar esta simulación.

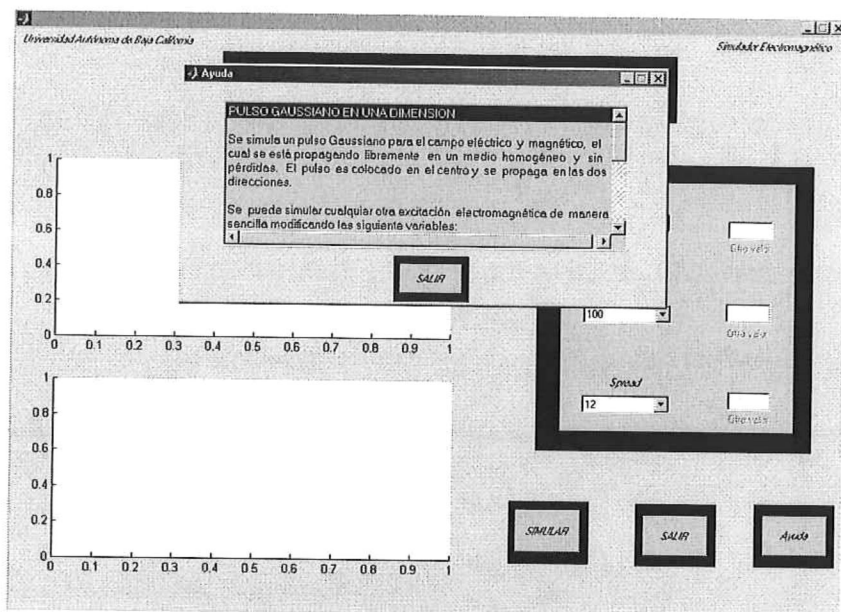


Figura 15. Seleccionado *Ayuda*.

❑ Seleccionando la opción de Onda Senoidal.

Al seleccionar esta opción, se despliega una ventana como la Figura 16, la simulación se presenta con una animación de 12ns, en donde se observa a los campos electromagnéticos propagándose a través del medio en una dimensión.

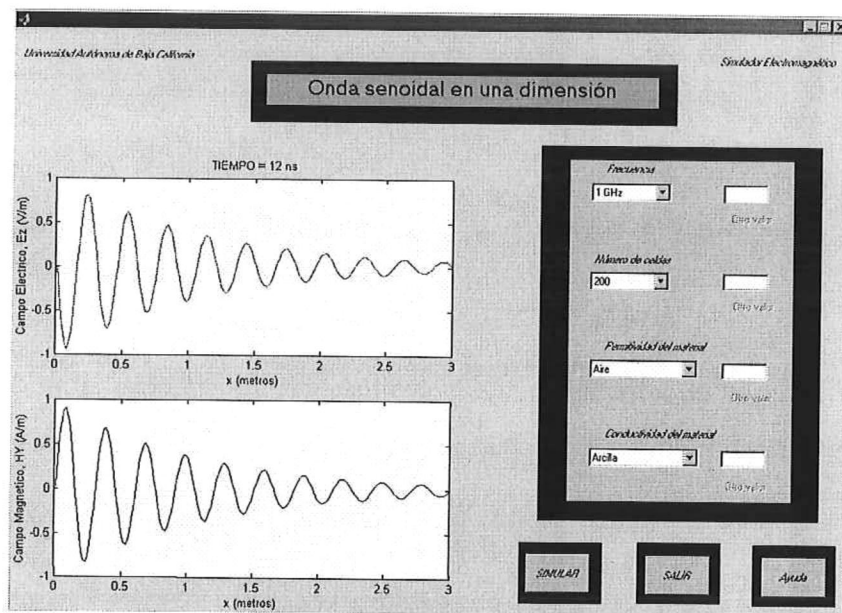


Figura 16. Simulador de una onda senoidal.

Como se puede apreciar, tiene las opciones de elegir cualquiera de los valores ya predeterminados para la frecuencia, número de celdas, permitividad o conductividad del material.

Al igual que para la ventana de la simulación anterior, el programa tiene la opción de poder introducir cualquier otro valor, que no se encuentre dentro de los valores predeterminados, para cualquiera de las variables a modificar.

Si el usuario quiere tener información sobre las variables que esta modificando, o una breve explicación de la simulación que observará, también cuenta con “Ayuda”, que al presionar aparece la pantalla como puede apreciarse en Figura 17.

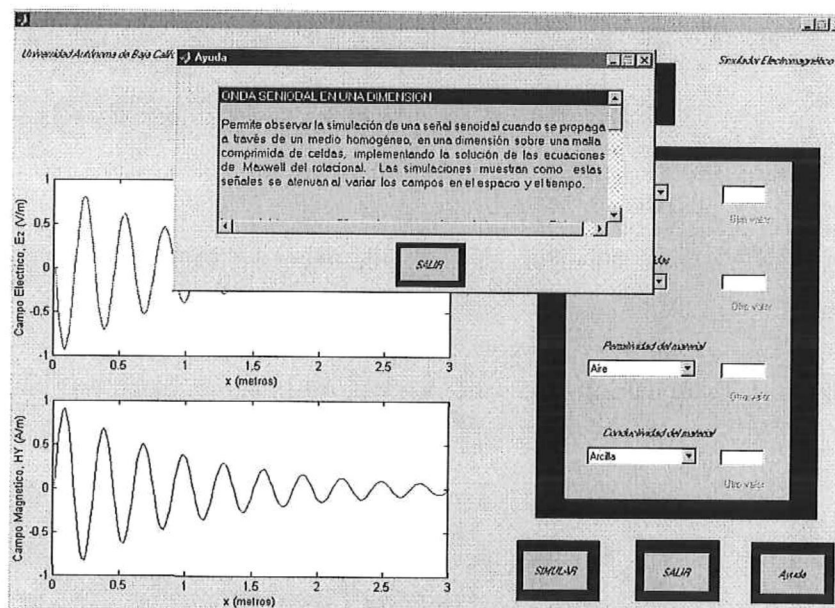


Figura 17. Seleccionado Ayuda.

5.4 CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se han resuelto las ecuaciones diferenciales parciales de Maxwell para el rotacional del campo eléctrico E_x y magnético H_y mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo.

Las ecuaciones resultantes se utilizaron para realizar algoritmos que permiten simular señales electromagnéticas. El primer algoritmo fue para un medio sin pérdidas, de un pulso Gaussiano. El algoritmo para una señal senoidal se considera un caso más general (medio con pérdidas y condiciones de frontera), en donde se observó como las ondas senoidales para diferentes frecuencias varían al propagarse en un medio con pérdidas, y como la señal se va atenuando conforme pasa el tiempo.

Durante la realización de este trabajo, se obtuvo un mejor entendimiento de las ecuaciones de Maxwell, las cuales se representaron en sus diferentes modalidades. Se obtuvo el conocimiento de una nueva herramienta matemática (método de diferencias finitas en el dominio del tiempo) que facilitó la solución de las ecuaciones de Maxwell para su planteamiento en los algoritmos presentados.

Los algoritmos realizados representan un primer paso en nuestro laboratorio electromagnético virtual, en donde los estudiantes podrán observar de manera física la propagación de señales electromagnéticas a través de diferentes medios, con la ayuda de el ambiente gráfico generado, el cual nos acerca un poco a los simuladores electromagnéticos comerciales de alto costo.

El usuario interesado en analizar el comportamiento del campo eléctrico y el campo magnético, puede familiarizarse fácilmente con en el manejo de este simulador, debido a que toda la información se presenta de manera sencilla y práctica, para comodidad del usuario.

Las aportaciones más importantes de este trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. Aplicación del método de diferencias finitas a la solución de las ecuaciones de Maxwell para rotacional.
2. Aplicación de dicho método al algoritmo realizado para la simulación de un pulso Gaussiano y al algoritmo realizado para simular una onda senoidal propagándose en un medio con pérdidas.
3. Diseño de un simulador electromagnético como base de la creación de un laboratorio virtual aplicado al estudio del electromagnetismo.
4. Diseño de una interfaz gráfica que permite el fácil manejo del simulador a través de la elección de los siguientes parámetros de entrada:
 - Número de pasos en el tiempo que se repetirá el cálculo de los campos eléctricos y los campos magnéticos en región solución seleccionada.
 - Número de celdas, o la cantidad de divisiones que tendrá la región solución.
 - Ancho de pulso gaussiano.
 - Frecuencia de la señal.
 - Conductividad y permitividad del material.

Entregando como resultado, en cada caso, la representación gráfica de las simulaciones para obtener una interpretación sencilla y directa.

Referencias

- [1] Programa Genesys de la cia EAGLEWARE

- [2] Programa ADS (Advance Desing System) de la cia Agilent.

- [3] <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/2970/Max.html>
http://www.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell
<http://www.-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html>
<http://sirius.phy.hr/~dpaar/fizicari/index.html>
http://www.Astrocosmo.cl/biografi/b-a_ampere.html

- [4] Allen Taflove, Susan C. Hagness, “Computational Electrodynamics”, Second Edition, Artech House, 2000.

- [5] Andrew F. Peterson, Scott L. Ray, Raj Mittra, “Computacional Methods for Electromagnetics”, IEEE PRESS, 1998. Capítulo 12, páginas 495-552.

- [6] Sullivan Dennis M., “Electromagnetic Simulation Using The FDTD Method”, IEEE Press Series on RF and Microwave Technology, New York, 2000.

- [7] Sadiku Matthew N.O., “Numerical Techniques in Electromagnetic”, CRS Press, 2001. Capítulo 5, 6, 7, páginas 285-529, Capítulo 9, páginas 597-635.

- [8] Tatsuo Itoh, “Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures”, John Wiley and Sons, 1988. Capítulo 6, páginas 381-444, Capítulo 10, 11, páginas 622-693.

- [9] Christos Christopoulos, “The transmission Line Modeling Method TLM”, IEEE Press, The IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory, New York, N.Y., 1995.

- [10] Tatsuo Itoh, Giuseppe Pelosi, Peter P. Silvester, “Finite Elements Software for Microwave Engineering”, Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, John Wiley and Sons, 1996.

- [11] William F. Ames, "Numerical Methods for Partial Differential Equations", third edition, Academic Press, 1992.
- [12] William H. Hayt, "Teoría Electromagnética, 5ta.Ed., McGraw-Hill.
- [13] Sadiku Matthew N.O., "Elementos de Electromagnetismo" Segunda edición, CECSA, 2004.
- [14] M.C. Ricardo A. Chávez Pérez, "Simulación Electromagnética, Apuntes"

APÉNDICE A

Desarrollo de la ecuación diferencial parcial de Poisson y la ecuación de Laplace, a partir de la primera ecuación de Maxwell.

La ecuación (2.13a) es una de las ecuaciones de Maxwell constitutivas dependientes del medio.

$$D = \varepsilon E \quad (2.13a)$$

En términos del *potencial eléctrico* [V] que se define como el trabajo realizado para trasladar una carga positiva unitaria q de un punto a otro punto y dentro de un campo E , se expresa como:

$$E = -\nabla V \quad (A.1)$$

o

$$V = -\int E \cdot dL \quad (A.2)$$

Al sustituir la ecuación (2.13a) en ecuación (2.5), y al resultado sustituirle la ecuación (A.1) obtenemos la ecuación diferencial parcial de Poisson.

$$-\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho_v \quad (A.3)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (A.4)$$

Si el medio de propagación, es libre de fuentes y de cargas, $\mathbf{J}=\mathbf{0}$ y $\rho_v = 0$, entonces la ecuación (A.4) se convierte en la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (A.5)$$

Los componentes vectoriales B y H están relacionados entre si a través de la permeabilidad μ (Henries/m) del medio por la siguiente Ecuación de Maxwell constitutiva dependiente del medio.

$$B = \mu H \quad (2.13b)$$

También, J_e está relacionada con E a través de la conductividad σ (mhos/m) del medio como

$$J = \sigma E \quad (2.13c)$$

La ecuación anterior, es referida como la forma puntual de la ley de Ohm. En términos del potencial vectorial magnético A (Wb/m), el campo B se puede expresar como

$$B = \nabla \times A \quad (A.6)$$

aplicando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$$

a las ecuaciones (2.9) y (A.6) y considerando la condición de medida de Coulomb ($\nabla \cdot A = 0$) conduce a la ecuación de Poisson para campos magnéticos estáticos.

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (A.7)$$

Cuando el medio es libre de fuentes y de carga, $J=0$ y $\rho_v = 0$, la ecuación (A.7) se transforma en la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 A = 0 \quad (A.8)$$

APÉNDICE B

Ecuación de Onda para el campo Eléctrico y para el campo Magnético

Para obtener la ecuación de onda de un medio, lineal, isotrópico, homogéneo y libre de fuentes ($J=0$, $\rho_V = 0$), tomamos el rotacional en los dos lados de la ecuación (2.11c), en la cual se sustituyó antes la ecuación (2.13b) por lo que obtenemos:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) \quad (\text{B.1})$$

de (2.11d)

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

como $J=0$, la ecuación (B.1) se hace

$$\nabla \times \nabla \times E = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

aplicando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

en ecuación (B.2)tenemos

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{B.3})$$

como $\rho_V = 0$, $\nabla \cdot E = 0$ de la ecuación (2.11a), y de aquí obtenemos

$$\nabla^2 E - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{2.17})$$

La cual es la ecuación vectorial de Helmholtz dependiente del tiempo o simplemente ecuación de onda. Si hubiéramos iniciado la derivación con la ecuación (2.11d), hubiéramos obtenido la ecuación de onda para H.

$$\nabla \times \nabla \times H = J + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) \quad (\text{B.4})$$

de (2.11c)

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

como $J=0$, la ecuación (B.4) se hace

$$\nabla \times \nabla \times H = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{B.5})$$

aplicando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H$$

en ecuación (B.5)tenemos

$$\nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{B.6})$$

como $\rho_V = 0$, $\nabla \cdot H = 0$ de la ecuación (2.11a), y de aquí obtenemos

$$\nabla^2 H - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{2.18})$$

APÉNDICE C

Derivación del Potencial escalar eléctrico y el Potencial vectorial magnético basada en dos identidades vectoriales fundamentales

La ecuación de Maxwell (2.11b) junto con (2.21) se satisface, si definimos A tal que

$$B = \nabla \times A \quad (\text{C.1})$$

sustituyendo en (2.11c) tendremos

$$-\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

Como esta ecuación debe ser compatible con la ecuación (3.35), podemos escoger el campo escalar V tal que

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla V$$

o

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{C.2})$$

Así que, si conocemos las funciones potenciales V y A , los campos E y B pueden ser obtenidos de las ecuaciones (A.3.1) y (A.3.2). Sin embargo, necesitamos encontrar la solución para las funciones potenciales. Substituyendo las ecuaciones (A.3.1) y (A.3.2) en la ecuación (2.11d) y considerando un medio lineal, homogéneo.

$$\nabla \times \nabla \times A = \mu J + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

aplicando la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

se obtiene:

$$\nabla^2 A - \nabla(\nabla \cdot A) = -\mu J + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu\varepsilon \nabla \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{C.3})$$

Sustituyendo la ecuación (C.2) en la ecuación (2.11a) tenemos

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla \cdot A)}{\partial t}$$

o

$$\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = \frac{\rho_V}{\varepsilon} \quad (\text{C.4})$$

De acuerdo al teorema de Helmholtz del análisis vectorial, un vector está únicamente definido si y solo si ambos, su rotacional y divergencia son especificados. Hemos especificado solamente el rotacional de A en ecuación (C.1); podemos elegir la divergencia de A, así que las ecuaciones diferenciales (C.3) y (C.4) adquieren las formas simples. Se puede ver lo anterior, en la llamada condición de Lorentz.

$$\nabla \cdot A = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{C.5})$$

incorporando esta condición en (C.3) y (C.4) resulta

$$\nabla^2 A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \quad (2.22)$$

y

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \quad (2.23)$$

Así que las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales V y A se reducen a las ecuaciones (C.5), (2.22) y (2.23). En otras palabras, las tres ecuaciones son equivalentes a la forma ordinaria de Maxwell para E y B cuando se usan con (C.1) y (C.2).

APÉNDICE D

Aproximación de diferencias finitas utilizando series de Taylor

La segunda derivada parcial de $f(x)$ en P de la ecuación (3.3) es:

$$f''(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right]$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{D.1})$$

Una aproximación más general es la que se obtiene utilizando series de Taylor. De acuerdo a la expansión:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (\text{D.2})$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (\text{D.3})$$

Sumando (D.2) y (D.3)

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + 0(\Delta x)^4 \quad (\text{D.4})$$

Donde $O(\Delta x)^4$ es el error introducido por truncamiento de las series. Decimos que este error es del orden $(\Delta x)^4$ representa términos que no son mayores de $(\Delta x)^4$. Considerando que estos términos son despreciables:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{D.5})$$

Restando (D.3) y (D.2) y despreciando los términos $(\Delta x)^3$ orden, obtenemos:

$$\boxed{f(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}} \quad (3.3)$$

Esto muestra que los errores en (D.5) y (3.3) son del orden $(\Delta x)^2$.
