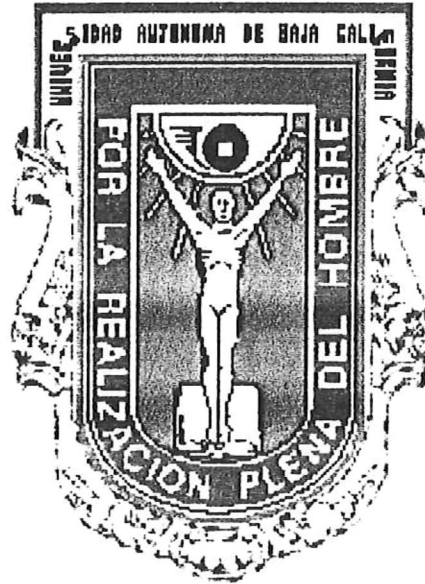


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



**AUTÓMATAS CELULARES: LA REGLA 150**

TESIS

Que para obtener el título de

**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

presenta:

**Aurora Espinoza Valdez**

Ensenada, Baja California, México. Diciembre de 2002

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS

AUTÓMATAS CELULARES: LA REGLA 150

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

AURORA ESPINOZA VALDEZ

APROBADO POR:



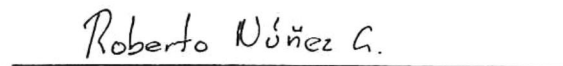
DR. ALVARO ALVAREZ PARRILLA

Presidente del Jurado



LIC. JESÚS MENDÍVIL LEÓN

SECRETARIO



M.C. ROBERTO NÚÑEZ GONZÁLEZ

1er. VOCAL

## DEDICATORIA

Con amor a mi hermana Lorena...

Por ser una persona especial.

Dios te bendiga ahora y siempre...

## AGRADECIMIENTOS

De manera especial a *Dios*, porque siempre ha prestado atención cuando mi voz lo llama...

Con profunda admiración y respeto a mis padres *Leopoldo Espinosa y Aurora Valdez*, por su amor infinito, por darme la educación que hoy tengo y más aún, lejos de casa...

Al Dr. Alvaro Alvarez Parrilla, por despertar mi interés en los autómatas celulares, por permitirme trabajar con el y soportarme todo este tiempo...

A las familias *Saldaña Espinoza, Saldaña Espinosa, Escamilla Espinoza, Villavicencio Espinoza, Cota Espinoza, Espinoza Valdez, Trejo Espinoza y Campos Balandrán*, por su constante apoyo, por aceptarme tal como soy y darme su amor desinteresadamente.

Al Dr. Eligio M. Manzano Sosa, por librar del llanto los ojos míos y evitar que mi pies tropiecen por el camino....

A todos mi amigos Computólogos, Físicos y no podían faltar los Matemáticos, por compartir conmigo preocupaciones (tareas), sufrimientos (exámenes) y alegrías (partys) y tantas otras cosas...

A mi deporte favorito el *Tae Kwon Do* y ¿porqué no?... a *Risos*.

# Contenido

<b>1</b>	<b>PERSPECTIVA HISTORICA</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
2.1	Comportamiento de Autómatas Celulares . . . . .	5
<b>3</b>	<b>ANTECEDENTES</b>	<b>10</b>
3.1	Antecedentes Matemáticos . . . . .	10
3.1.1	La regla 90 . . . . .	18
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>CONCEPTOS DE ÁLGEBRA MODERNA</b>	<b>44</b>
A.1	El Algoritmo de la División . . . . .	45
A.2	Polinomio Ciclotómico . . . . .	45
<b>B</b>	<b>PROGRAMA EN MATHEMATICA</b>	<b>46</b>

# Figuras

2.1	Autómata Celular de clase 1 . . . . .	5
2.2	Autómata Celular de clase 2 . . . . .	6
2.3	Autómata Celular de clase 3 . . . . .	6
2.4	Autómata Celular de clase 4 . . . . .	6
3.1	Regla 90 . . . . .	12
3.2	Árbol de configuraciones . . . . .	13
3.3	Ejemplo 3.1.1 . . . . .	16
3.4	Ejemplo 3.1.3 . . . . .	17
4.1	Sitios impares con valor 1, Teorema 4.0.5. . . . .	25
4.2	Ejemplo 4.0.5 . . . . .	29
4.3	Ejemplo 4.0.6 . . . . .	29
4.4	Autómata Celular con $\Pi_N = 1$ , Teorema 4.0.9 . . . . .	37
B.1	Ejemplo de la regla 90 con $N=301$ . . . . .	47

# Tablas

I	La regla 90: $01011010_2 = 90_{10}$ . . . . .	12
I	La regla 150: $10010110_2 = 150_{10}$ . . . . .	21
II	La longitud máxima $\Pi_N$ para $k = 2$ . . . . .	40

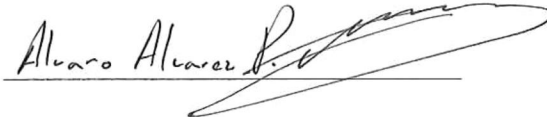
RESUMEN de la Tesis de Aurora Espinoza Valdez presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, diciembre del 2002.

### Autómatas Celulares: la regla 150

Se presenta un estudio de los *autómatas celulares unidimensionales*, los cuales se pueden considerar como una secuencia de valores que evolucionan en tiempos discretos de acuerdo a reglas predeterminadas. Introducimos un método algebraico para la regla 90 atribuido a *Wolfram*, basado en dipolinomios, con valores en el campo finito de dos elementos y con condiciones de frontera periódicas. Realizamos un estudio de la regla 150 para *autómatas celulares unidimensionales*, debido a que también satisface la propiedad de *aditividad*, lo que permite aplicar el método algebraico mencionado anteriormente.

Los resultados muestran que, apesar de que estas dos reglas son aditivas, existen diferencias importantes entre ellas. Fue posible realizar el estudio de la regla 150, ya que cuenta con representaciones gráficas y algebraicas, lo que nos permite entender mejor lo que sucede.

Resumen aprobado:

A handwritten signature in black ink, reading "Alvaro Alvarez Parrilla", written over a horizontal line.

Dr. Alvaro Alvarez Parrilla

# Capítulo 1

## PERSPECTIVA HISTORICA

Los autómatas celulares fueron introducidos a finales de los años 40 por *John Von Neumann* con el objetivo de crear un modelo real del comportamiento de sistemas extensos y complejos. A pesar de que *Von Neumann* era un físico y matemático excepcional, en su trabajo original hay una falta de consideraciones físicas; su interés estaba dirigido principalmente a dar una explicación reduccionista de ciertos aspectos de la biología. En el describe un primer autómata autorreproductor que llegó a ser conocido como el modelo cinemático. Aunque su proceso para crear progenie fue lógicamente coherente, el modelo cinemático sufría de una debilidad de construcción más general, pues contaba con demasiadas cajas negras[9].

Cuando *Stanislaw Ulam* se confrontó con el problema planteado por el número excesivo de cajas negras del autómata cinemático de *Von Neumann*, sugirió olvidar el medio ambiente en el cual realizó parte de su trabajo, o sea el lago sin límites. En su lugar, desarrolló un medio ambiente diferente: una red infinita, desplegada como un

tablero de damas, donde cada cuadro de la red podría ser visto como una “célula”. Cada célula de la red se podía considerar como una máquina separada de estados finitos que actuaría de acuerdo con un conjunto compartido de reglas. La configuración de la red cambiaría a medida que ocurrieran pasos de tiempo discretos[8].

A partir de las ideas surgidas en la red infinita de *Stanislaw Ulam*, *Von Neumann* hizo un replanteamiento de su autómata autorreproductor para lograr el concepto de lo que sería el primer autómata celular. Los mecanismos que propuso para alcanzar estructuras autorreproductoras, como se descubrió posteriormente, se semejan bastante a los organismos vivos[9].

De forma paralela a *Von Neumann*, el ingeniero alemán *Konrad Zuse* desarrolló el concepto de autómatas celulares. *Zuse* estaba interesado en la construcción de modelos digitales de la mecánica donde los conceptos físicos tienen un papel preponderante, sin embargo sus trabajos no tuvieron tanto impacto como los de *Von Neumann*[5].

En los años 60, *John Holland* comenzó a aplicar los autómatas celulares en problemas de optimización y adaptación. Al mismo tiempo un gran número de matemáticos dirigían su atención hacia las transformaciones iterativas que actúan sobre estructuras espacialmente expandidas y con un conjunto discreto de estados, o sea autómatas celulares. Cuestiones importantes sobre computabilidad y reversibilidad se han estudiado por *Alvy Smith*, *Serafino Amoroso* y *Victor Aladyev*, entre otros[5].

En los años 70, el Juego de la Vida de *John Conway* tuvo gran impacto, gracias a *Martin Gardner* que lo popularizó, y se convirtió en un objeto de culto para una ge-

neración de jóvenes científicos. Se trata de un autómata celular bidimensional donde las células pueden estar en dos estados vivas (1) o muertas (0). Partiendo de cierta configuración inicial, los estados de las células evolucionan en el tiempo. Algunos grupos de células forman agregados impredecibles y extraños objetos aparecen, se mueven por todo el plano y desaparecen[1].

La pregunta de que si los autómatas celulares pueden modelar solo aspectos fenomenológicos o si en cambio pueden servir para modelar las propias leyes físicas fue estudiada por *Edward Fredkin* y *Tommaso Toffoli* en los años ochenta[7].

Entre las ramas de la matemática y física que más se están desarrollando, los sistemas dinámicos destacan debido a que pueden explicar la aparición de fenómenos colectivos, la turbulencia, el caos y la fractalidad. En particular los autómatas celulares dan una rica y creciente colección de ejemplos representativos de estos fenómenos y pueden ser modelados de forma sencilla. El uso sistemático de los autómatas celulares en este campo fue iniciado por *Stephen Wolfram* a mediados de los años ochenta[6, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

En conclusión podemos decir que los autómatas celulares han encontrado un papel permanente como modelos conceptuales y prácticos de sistemas dinámicos espacialmente distribuidos, de los que los sistemas físicos son los principales prototipos. Actualmente existen varios artículos en los cuales se encuentran aplicaciones de autómatas celulares como por ejemplo: simulación de tráfico automotor, bacterias y modelación de tiempos de sequias, entre otros.

## Capítulo 2

# INTRODUCCIÓN

Existen muchos sistemas naturales cotidianos cuya conducta y estructura compleja ha desafiado hasta ahora incluso el análisis cualitativo. En algunos casos esta conducta puede simularse numéricamente con solo unas variables; pero en la mayoría de los casos la simulación comprende demasiados factores y hace falta un mayor acercamiento al problema.

Para descubrir y analizar la base matemática de la complejidad, uno debe identificar sistemas matemáticos que capturen el ser del proceso. Los autómatas celulares son un posible candidato de tales sistemas, ya que éstos pueden emplearse en una gran variedad de campos, por ejemplo en *física, matemáticas, biología y sistemas de cómputo*[4, 6, 13, 14].

Un *autómata celular unidimensional* consiste en una sucesión o secuencia de sitios (una configuración o estado), donde cada sitio o celda lleva un valor numérico y los valores de los sitios evolucionan en pasos de tiempo discretos según reglas deter-

minísticas.

## 2.1 Comportamiento de Automatas Celulares

Una característica esencial de los autómatas celulares es la regla que rige la evolución del mismo. Una familia de reglas se obtiene a través de funciones cuyo valor en un sitio determinado se obtiene de los valores del propio sitio y de sus vecinos más cercanos en el paso de tiempo anterior.

Cada regla lleva a modelos que difieren en detalles, sin embargo parece que entran en solo cuatro clases cualitativas, las cuales *Wolfram* las caracteriza de la siguiente manera[11, 15]:

- Clase 1: la evolución lleva a un estado homogéneo.

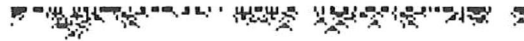


Figura 2.1: Automata Celular de clase 1

- Clase 2: la evolución lleva a estructuras periódicas que están separadas (temporalmente) y son simples.

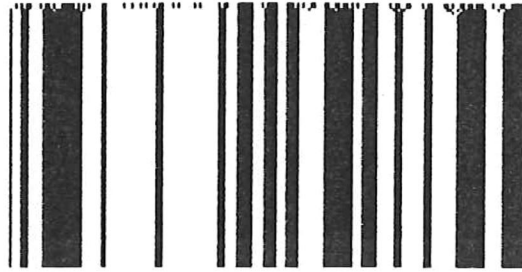


Figura 2.2: Autómata Celular de clase 2

- Clase 3: la evolución lleva a estructuras que siguen un modelo *caótico*.

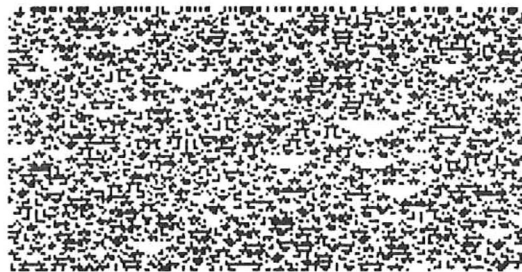


Figura 2.3: Autómata Celular de clase 3

- Clase 4: la evolución lleva a estructuras complejas, que no se explican por las anteriores.

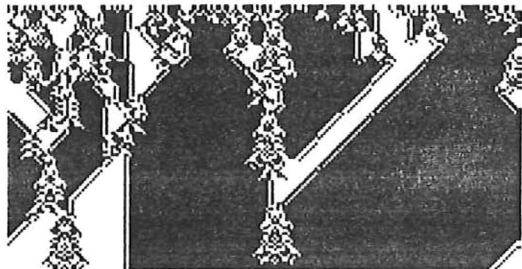


Figura 2.4: Autómata Celular de clase 4

Basados en el trabajo de *Wolfram, John T. Baldwin y Saharon Shelah* realizaron otras contribuciones a esta área. Inicialmente se plantearon dos preguntas, ¿puede uno clasificar la acción de un autómata celular basándose en una configuración inicial  $x$ ?, ¿puede ser esto extendido a la clasificación de autómatas, es decir en el comportamiento promedio del autómata en sus configuraciones iniciales? el resultado de su trabajo argumenta que una de las clasificaciones de la conjetura falla. Esto no parece invalidar a las otras clasificaciones[2]. Posteriormente otros autores han redefinido esta clasificación extendiendo el número de clases a seis[10].

La conjetura de las cuatro clases cualitativas sugieren la universalidad en la conducta del autómata celular; muchos rasgos del autómata celular solo dependen de la clase a la que pertenecen y no de los detalles precisos de su evolución.

Así por ejemplo, los efectos de cambios en los sitios dependen de la clase de conducta de la regla: para la clase 1 el sistema evoluciona siempre a un único estado homogéneo sin tener en cuenta el estado inicial; para la clase 2 los efectos de las reglas tienen un rango finito, así un cambio en el valor de un solo sitio afecta solo una región finita de sitios alrededor de el, incluso después de un número infinito de pasos de tiempo; para la clase 3 los efectos de las reglas se propagan indefinidamente a los sitios vecinos a una velocidad fija, si el estado inicial se desordena, esta dependencia puede llevar a una sucesión aparentemente caótica de valores para un sitio particular; y para la clase 4 los efectos de las reglas también se propagan indefinidamente a los sitios vecinos a varias velocidades[11].

Las tres primeras clases de conducta del autómata celular mencionadas hasta

ahora son análogas a tres clases de conducta encontradas en sistemas dinámicos continuos. La clase 1 es análoga a las soluciones en sistemas dinámicos continuos para un punto fijo. La clase 2 es análoga a órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos. Finalmente la clase 3 es análoga a sistemas dinámicos que tienen dependencia sensible a las condiciones iniciales (sistemas dinámicos caóticos). Ninguna conducta análoga a las de clase 4 se ha encontrado todavía en un sistema dinámico continuo[11].

Al contrario de las estructuras periódicas de la clase 1 y de la clase 2, las estructuras de las clase 3 y 4 no tienen ningún modelo simple. Además en la clase 4 las estructuras propagadas permiten que el valor de un sitio afecte a sitios arbitrariamente distantes después de un tiempo suficientemente largo. La complejidad de esta conducta nos hace pensar en la conjetura de que estos sistemas pueden representar máquinas de cómputo universal[11, 16].

Si un autómata celular es una computadora universal, entonces con una regla fija para su evolución temporal cada configuración inicial puede codificar cualquier algoritmo de tiempo finito. En general la conducta de una computadora universal no puede predecirse; si los autómatas celulares de clase 4 son computadoras universales, entonces su conducta puede considerarse completamente impredecible. La primera observación crucial declara simplemente que un autómata celular puede comportarse como otro. Un solo sitio con un valor particular en un autómata celular puede simularse por un bloque de sitios fijos en otro. Si un autómata celular es una computadora universal, entonces con una codificación suficientemente larga debe poder simular cualquier otro autómata celular[11, 15].

Otra diferencia fundamental es que a diferencia de otros sistemas dinámicos reversibles, los autómatas celulares son, en general, *irreversibles* (dicho de otra manera la regla que describe el cambio de una configuración a otra, no es una función inyectiva) y por tanto contradice la segunda ley de termodinámica[11].

# Capítulo 3

## ANTECEDENTES

### 3.1 Antecedentes Matemáticos

Esta sección introduce técnicas algebraicas para el análisis del autómata celular en el caso de que satisface el principio de superposición aditiva, ya que las propiedades globales de este autómata celular son determinadas por las propiedades algebraicas de los polinomios característicos. Si no satisface este principio entonces solo se pueden utilizar parte de estas técnicas (vease [16]). En el presente trabajo nos limitaremos a autómatas celulares unidimensionales con valores en un anillo finito  $Z_k$  de  $k$  elementos, con  $N$  sitios y con *condiciones de frontera periódicas*. Esto es, los autómatas celulares en cuestión consistirán de una secuencia de  $N$  sitios, donde cada uno lleva un valor entero de 0 a  $k - 1$ . Así pues un autómata celular finito con  $N$  sitios tiene  $k^N$  posibles estados o configuraciones distintas.

La configuración completa de un autómata celular se especifica por los valores de

sus  $N$  sitios, y puede representarse por un polinomio característico

$$A^{(t)}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(t)x^i, \quad (3.1.1)$$

donde el valor del sitio  $i$  en el instante  $t$  está representado por el valor del coeficiente  $a_i(t)$ . Los valores de los sitios evolucionan en los pasos de tiempos discretos según reglas determinísticas.

La evolución de un autómata celular varia según la regla aplicada y los valores tanto de  $k$  como del número  $r$  de vecinos que la regla toma en cuenta. Los sitios asumen los posibles valores del anillo  $Z_k = \{0, 1, 2, 3, \dots, k-1\}$ , y el valor de una celda depende de los valores de los  $r$  sitios distantes en ambos lados en el paso de tiempo anterior. Un ejemplo muy sencillo y bien conocido, pues da como resultado el triángulo de *Sierpinski*, es la regla dada por

$$a_i(t+1) = a_{i-1}(t) + a_{i+1}(t) \pmod{2}, \quad (3.1.2)$$

con  $r = 1$ . Para esta regla, el valor de un sitio a un paso de tiempo particular es la suma módulo dos de los valores de sus dos vecinos más cercanos en el paso de tiempo anterior.

El número de reglas diferentes con  $k$  y  $r$  dados está dado por  $k^{k^{2r+1}}$  y por consiguiente tiende a aumentar para  $k$  y  $r$  bastante pequeños.

Así pues, en el caso en que  $k = 2$  y  $r = 1$  existen  $2^{2^{2 \cdot 1 + 1}} = 256$  reglas distintas, las cuales se pueden clasificar de la siguiente manera: Los valores de las ocho posibles

Tabla I: La regla 90:  $01011010_2 = 90_{10}$ 

Valores de los 3 vecinos en el tiempo $t - 1$	111	110	101	100	011	010	001	000
Valor en el tiempo $t$	0	1	0	1	1	0	1	0

combinaciones de los tres sitios anteriores forman un número binario que se cita como entero decimal; es importante acomodarlos como se muestra en la tabla I. El ejemplo que en ella se muestra es para la regla dada por la ecuación (3.1.2) con aritmética módulo 2. Esto nos da el número binario  $01011010_2$  que en base decimal es  $90_{10}$ . Es claro que este proceso etiqueta a las 256 distintas reglas.

La figura 3.1 muestra configuraciones a los pasos de tiempo sucesivos como líneas sucesivas en base a la regla 90 de un estado inicial que contiene un solo sitio diferente de cero.

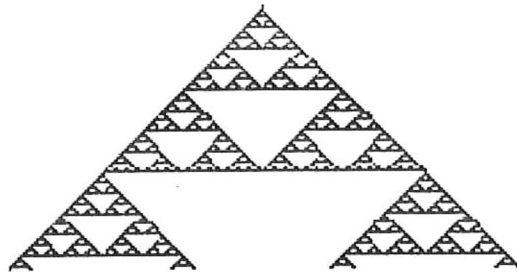


Figura 3.1: Regla 90

Incluso con un estado inicial en que los valores de los sitios son escogidos al azar, o sea en el que cada sitio asume el valor 0 o 1 con la probabilidad igual a  $\frac{1}{2}$ , independientemente de los valores de los otros sitios, la evolución del autómata celular genera estructuras espontáneas con el tiempo. La evolución global de semejante autómata celular puede describirse por un gráfico de transición de estados.

Cada nodo en los gráficos representa una de las  $2^N$  posibles configuraciones de  $N$



entonces la regla  $T(x)$  es *aditiva* si es lineal:

$$T(x)(A^{(0)}(x) + B^{(0)}(x)) = T(x)A^{(0)}(x) + T(x)B^{(0)}(x).$$

Este principio permite una descripción de la evolución de las configuraciones por polinomios característicos. *Las propiedades globales de los autómatas celulares son entonces determinadas por las propiedades algebraicas de estos polinomios.*

Es conveniente considerar “polinomios” generados que contienen exponentes positivos y negativos. Por definición  $H(x)$  es un *dipolinomio* si existe un entero  $m$  tal que  $x^m H(x)$  es un polinomio ordinario de  $x$ . Los dipolinomios poseen propiedades de divisibilidad y propiedades de congruencia análoga a aquellos de polinomios ordinarios[3].

La multiplicación de un polinomio característico  $A(x)$  por  $x^{\pm j}$ , representa una configuración en que el valor de cada sitio se ha transferido (movido) a un sitio  $j$  lugares a su derecha o izquierda, dependiendo del signo. Nótese que cualquier dipolinomio es congruente a un polinomio de grado menor que  $N$ . En otras palabras un dipoinomio es un elemento del anillo  $Z_2[x]/(x^N - 1)$ .

De esta manera, la evolución que corresponde a la regla 90 mencionada anteriormente, se representa por el dipolinomio

$$T(x) = x + x^{-1}. \quad (3.1.3)$$

Por lo que se refiere a los polinomios característicos, la evolución del autómata

celular de la ecuación toma una forma particular simple:

$$A^{(t+1)}(x) = T(x)A^{(t)}(x) \pmod{(x^N - 1)},$$

donde toda la aritmética en los coeficientes polinómicos se ha realizado módulo 2, también es importante recordar que en cada paso de tiempo, los polinomios característicos son reducidos módulo  $(x^N - 1)$ .

**Ejemplo 3.1.1.** Una configuración en el autómata celular simple, con  $k = 2$ ,  $r = 1$  y  $N = 10$  consiste en un estado de 10 sitios con los valores 0 o 1. Los sitios con valor 1 son representados con el color azul y aquellos de valor 0 con el color amarillo.

Aplicaremos la regla 90, para obtener en el siguiente paso de tiempo la configuración correspondiente. La regla se lleva a cabo simultáneamente a cada sitio, obteniendo así la siguiente configuración.

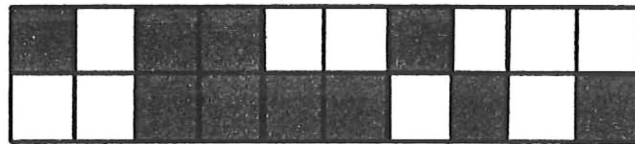


Figura 3.3: Ejemplo 3.1.1

**Ejemplo 3.1.2.** Considérese la configuración inicial del ejemplo anterior, y escribámosla en forma de polinomio, obteniendo así  $A^{(0)}(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6$ , para  $N = 10$ .

Para obtener  $A^{(1)}(x)$ , es necesario multiplicar  $A^{(0)}(x)$  por  $T(x)$  y utilizando aritmética módulo  $(x^{10} - 1)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 A^{(1)}(x) &= T(x)A^{(0)}(x) \\
 &= (x + x^{-1})(1 + x^2 + x^3 + x^6) \\
 &= x^{-1} + 2x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 \\
 &= 2x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^9 \pmod{(x^{10} - 1)} \\
 &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7 + x^9 \pmod{2}.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.3.** Para un autómata celular de tamaño  $N = 12$ ,  $k = 2$  y  $r = 1$ , considérese la siguiente configuración inicial con las celdas 2, 5, 6, 10 y 12 ocupadas, realizando el mismo procedimiento que en el ejemplo 3.1.1, obtenemos que su evolución esta dada por:

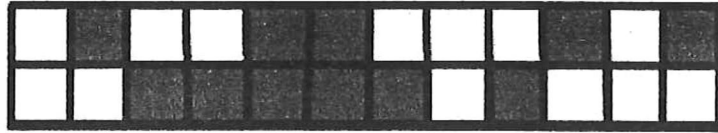


Figura 3.4: Ejemplo 3.1.3

**Ejemplo 3.1.4.** Sean  $A^{(0)}(x) = x + x^4 + x^5 + x^9 + x^{11}$ ,  $N = 12$ ,  $k = 2$  y  $r = 1$ , al realizar el siguiente paso de tiempo, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 A^{(1)}(x) &= T(x)A^{(0)}(x) \\
 &= (x + x^{-1})(x + x^4 + x^5 + x^9 + x^{11}) \\
 &= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + 2x^{10} + x^{12} \\
 &= 2 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + 2x^{10} \pmod{(x^{12} - 1)} \\
 &= x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \pmod{2}.
 \end{aligned}$$

$A^{(0)}(x)$  y  $A^{(1)}(x)$  corresponden a las configuraciones consideradas en el ejemplo anterior.

La regla 90 de autómatas celulares es particularmente simple y admite un análisis matemático bastante completo, el cual se estudia en [16], en donde se ve como las configuraciones y su evolución temporal se pueden visualizar por medio de polinomios sobre un campo finito.

A continuación presentamos un breve resumen de algunos resultados obtenidos por *Stephen Wolfram*[16] para la regla 90.

### 3.1.1 La regla 90

Considérese un autómata celular de  $N$  sitios con condiciones periódicas, donde cada sitio tiene el valor 0 o 1. Los sitios evolucionan para que a cada paso de tiempo el valor de un sitio sea la suma módulo dos de los valores de sus dos vecinos más cercanos en el paso de tiempo anterior. Esto es la evolución esta dada por la regla 90 mencionada anteriormente, vease (3.1.2).

**Lema 1.** *En la evolución de un autómata celular definido por la regla 90, nunca pueden generarse configuraciones que contengan un número impar de sitios con valor 1, osea las configuraciones que contienen un número impar de sitios con valor 1 solamente pueden ocurrir como condiciones iniciales.*

**Teorema 3.1.1.** *Un autómata celular de tamaño  $N$ , tiene  $2^N$  posibles configuraciones, de las cuales la mitad para  $N$  impar y  $\frac{3}{4}$  partes para  $N$  par no son alcanzadas en la evolución del autómata celular y solo pueden ocurrir como condición inicial.*

**Lema 2.** *Dos configuraciones  $A^{(0)}(x)$  y  $B^{(0)}(x)$  evolucionan a una misma configuración  $C(x) \equiv T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x)$  después de un paso de tiempo en la*

evolución del autómata celular si y solo si  $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x)Q(x)$ , donde  $T(x)Q(x) = 0$ .

**Teorema 3.1.2.** *Las configuraciones  $Q(x)$  del lema anterior, en el autómata celular definido por la regla 90, evolucionan a la configuración nula después de un paso de tiempo. Para  $N$  impar, solo las configuraciones  $0$  y  $1 + x + \dots + x^{N-1}$  tienen esta propiedad. Para  $N$  par, las posibles formas de  $Q(x)$  son  $0$ ,  $1 + x^2 + \dots + x^{N-2}$ ,  $x + x^3 + \dots + x^{N-1}$  y  $1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1}$ .*

Dicho de otra manera, para  $N$  impar existen exactamente dos predecesores y para  $N$  par exactamente cuatro predecesores.

Un *árbol arraigado* es un árbol (grafo acíclico conexo) en el cual un nodo en particular se designa como raíz.

**Lema 3.** *Todos los árboles arraigados a los nodos de todos los ciclos del gráfico de transición de estados para el autómata celular definido por la regla 90 son idénticos.*

El lema anterior nos dice que en la evolución de un autómata celular siempre se llega a un ciclo de configuraciones que se repiten, el número de predecesores de una configuración que se encuentre en el ciclo, y que no sean elementos del ciclo, siempre es el mismo.

Otro resultado interesante es que la longitud del ciclo máxima  $\Pi_N$  tiene la propiedad de que cualquier otra longitud del ciclo es divisor de esta.

**Lema 4.** *Las longitudes de todos los ciclos en un autómata celular de tamaño  $N$*

definido por la regla 90, dividen la longitud  $\Pi_N$  del ciclo obtenido con una configuración inicial que solo contiene un sitio con valor 1.

**Lema 5.** Para un autómata celular definido por la regla 90, con  $N$  de la forma  $2^j$ ,  $\Pi_N = 1$ . Cualquier configuración inicial con un solo sitio diferente de cero evoluciona después de  $2^j$  pasos de tiempo a la configuración nula.

**Lema 6.** Para el autómata celular definido por la regla 90, con  $N$  par pero no de la forma  $2^j$ ,  $\Pi_N = 2\Pi_{\frac{N}{2}}$ .

**Lema 7.** Un autómata celular definido con la regla 90, con  $N = 3l$  tiene cuatro puntos fijos distintos (ciclos de longitud uno) o configuraciones estacionarias que son 000...(configuración nula), 011011011..., 10110110... y 110110110... . Si  $N \neq 3l$  el único punto fijo es la configuración nula.

**Teorema 3.1.3.** Una configuración  $A(x)$  es alcanzable en la evolución de un autómata celular aditivo de tamaño  $N$  sobre  $Z_k$ , descrito por  $T(x)$  si y solo si  $A(x)$  es divisible por  $A_1(x) = (x^N - 1, T(x))$ , recordemos que esta notación es para el máximo común divisor.

# Capítulo 4

## RESULTADOS

Recordemos que estamos trabajando con autómatas celulares unidimensionales de  $N$  sitios, con valores en un anillo finito  $Z_k$ , para  $k = 2$ ,  $r = 1$  y con condiciones de frontera periódicas. Así pues, la única regla que satisface el *principio de superposición aditiva*, aparte de la regla 90, es la regla que asigna el valor de un sitio a un paso de tiempo particular, de modo que este sea la suma módulo dos de los valores de sus tres vecinos más cercanos en el paso de tiempo anterior:

$$a_i(t + 1) = a_{i-1}(t) + a_i(t) + a_{i+1}(t) \pmod{2}. \quad (4.0.1)$$

En la tabla I, se puede observar como se representa en número binario la regla dada por la ecuación (4.0.1), o sea  $10010110_2$ , que en base decimal es  $150_{10}$ . De esta

Tabla I: La regla 150:  $10010110_2 = 150_{10}$

Valores de los 3 vecinos en el tiempo $t - 1$	111	110	101	100	011	010	001	000
Valor en el tiempo $t$	1	0	0	1	0	1	1	0

manera, la evolución que corresponde a la regla 150, se representa por el dipolinomio:

$$T(x) = x + 1 + x^{-1}. \quad (4.0.2)$$

De nueva cuenta la evolución de los polinomios característicos toma una forma particular simple:

$$A^{(t+1)}(x) = T(x)A^{(t)}(x) \pmod{(x^N - 1)},$$

donde toda la aritmética en los coeficientes polinómicos se ha realizado módulo 2, también es importante recordar que en cada paso de tiempo, los polinomios característicos son reducidos módulo  $(x^N - 1)$ .

A continuación se presentan los resultados obtenidos al realizar un estudio de la regla 150 de acuerdo al procedimiento algebraico con que se atacó la regla 90[16].

Como primer punto podemos notar que el teorema 3.1.3 de *Wolfram* se aplica a nuestra situación, por lo que obtenemos:

**Teorema 4.0.4.** *Una configuración  $A(x)$  es alcanzable en una evolución de un autómata celular de tamaño  $N$ , descrito por  $T(x)$ , si y solo si  $A(x)$  es divisible por  $A_1(x) = (x^N - 1, T(x))$ , recordando que esta notación es para el máximo común*

*divisor. Notese que  $A_1(x) = (x^N - 1, T(x)) = \begin{cases} T(x) & \text{si } N = 3l \\ 1 & \text{si } N \neq 3l \end{cases}$*

*Demostración.* Sea  $P(x)$  un polinomio tal que  $P(x)|x^N - 1$  y  $P(x)|x^2 + x + 1$  entonces existe  $Q(x)$  y  $H(x)$  tales que  $P(x)Q(x) = x^N - 1$  y  $P(x)Q(x) = x^2 + x + 1$ .

Ahora bien  $P(x)$  puede ser de las siguientes dos formas:  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , o

$P(x) = a$ , donde  $a, b$  y  $c$  son constantes y solamente pueden tomar los valores 0 o 1.

Sustituyendo  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , obtenemos que:

$(ax^2 + bx + c)H(x) = x^2 + x + 1$ , donde  $H(x)$  es una cte. de valor 0 o 1.

$(ax^2 + bx + c)d = x^2 + x + 1$ .

Por lo tanto  $P(x) = x^2 + x + 1$  o  $P(x) = 1$  con  $H(x) = x^2 + x + 1$ .

Por otro lado sabemos que:

$$x^N - 1 = \sum_{i=0}^{N-1} x^i(x-1) = \sum_{i=0}^{N-1} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{N-1} x^i.$$

Si  $N = 3l$ , con  $Q(x) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{N-(3i+2)} - \sum_{i=1}^{N-1} x^{N-3i}$ , obtenemos que  $Q(x)(x^2 + x + 1) = x^N - 1$

Por lo tanto  $P(x) = x^2 + x + 1$ .

En general  $x^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d(x)$  donde  $\Phi_d(x)$  es el polinomio ciclotómico de orden  $d$ .

Enumeremos los primeros polinomios ciclotómicos:

$$\Phi_1(x) = x - 1, \Phi_2(x) = x + 1, \Phi_3(x) = x^2 + x + 1, \Phi_4(x) = x^2 + 1, \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \Phi_6(x) = x^2 + x + 1, \dots$$

Así pues,  $\Phi_d(x)$  es un polinomio mónico con coeficientes enteros para  $d|N$ ,  $d \neq N$ .

De modo que si  $N \neq 3l$  ningún  $\Phi_d(x) = x^2 + x + 1$ , o sea  $x^N - 1 \neq (x^2 + x + 1)Q(x)$ , por lo tanto  $P(x) = 1$ . □

Podemos concluir entonces de este teorema que si  $N \neq 3l$  todas las  $2^N$  configuraciones son alcanzables y si  $N = 3l$ ,  $A(x)$  es alcanzable si y solo si  $x^2 + x + 1 | A(x)$ . Esto en contraste con lo que ocurre con la regla 90, donde se tiene que si  $N$  es par  $\frac{3}{4}$  de todas las configuraciones posibles no son alcanzables; y si  $N$  es impar exactamente

la mitad de todas las configuraciones son alcanzables.

**Corolario 1.** *Para  $N \neq 3l$  todas las  $2^N$  configuraciones son alcanzables y si  $N = 3l$ ,  $A(x)$  es alcanzable si y solo si  $x^2 + x + 1 | A(x)$ .*

**Teorema 4.0.5.** *Al contrario de los autómatas celulares de la regla 90, en la evolución de los autómatas celulares definidos por la regla 150 si pueden generarse configuraciones que contienen un número impar de sitios con valor uno y no solo pueden ocurrir como condiciones iniciales.*

*Demostración.* De manera similar el lema 1 de wolfram se aplica en nuestro caso por lo que tenemos que: Sea  $A^{(0)}(x) = 1$  la configuración inicial, que tiene como sucesor la configuración:

$$\begin{aligned} A^{(1)}(x) &= T(x)A^{(0)}(x) \\ &= (x + 1 + x^{-1})1 \\ &= 1 + x + x^{N-1}, \quad \text{mod } (x^N - 1). \end{aligned}$$

Para  $N = 1$ ,  $A^{(1)}(x) = 1 \pmod{2}$ ; para  $N = 2$ ,  $A^{(1)}(x) = 1 \pmod{2}$  y para  $N > 2$ ,  $A^{(1)}(x) = 1 + x + x^{N-1} \pmod{2}$ . □

Como se puede observar en la figura 4.1, en la evolución del autómata celular si se generan sitios impares con valor uno.

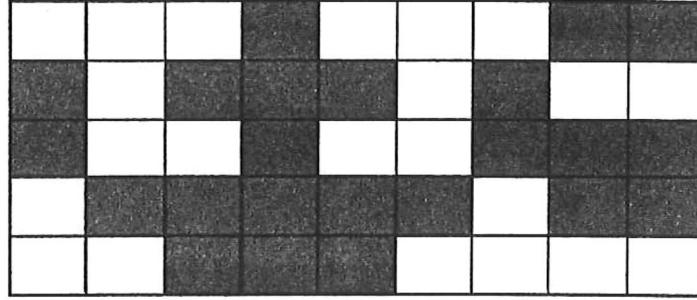


Figura 4.1: Sitios impares con valor 1, Teorema 4.0.5.

**Lema 8.** *Dos configuraciones  $A^{(0)}(x)$  y  $B^{(0)}(x)$  evolucionan a una misma configuración  $C(x) \equiv T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x)$  después de un paso de tiempo en la evolución del autómata celular si y solo si  $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x) + Q(x)$ , donde  $T(x)Q(x) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $A^{(0)}(x)$  y  $B^{(0)}(x)$  dos configuraciones cualesquiera, decimos que  $T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x)$  si y solo si  $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x) + Q(x)$ , donde  $T(x)Q(x) = 0$ . Sea  $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x) + Q(x)$ , si multiplicamos por  $T(x)$ , entonces  $T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x) + T(x)Q(x)$ . Sabemos que  $T(x)Q(x) = 0$ , entonces  $T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x)$ .

Supongamos que  $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x) + Q(x)$ , con  $T(x)Q(x) \neq 0$ ,

entonces  $T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x) + T(x)Q(x)$ ,

$T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x) + T(x)Q(x) \pmod{(x^N - 1)}$ ; para que evolucionen a la misma configuración  $T(x)Q(x) = 0$ , lo cual implica una contradicción debido a que por construcción  $T(x)Q(x) \neq 0$ . Por lo tanto la otra mitad del teorema queda probada. □

Este lema nos da la posibilidad de reconocer cuando es que dos configuraciones tienen el mismo sucesor. Lo que nos da pie para obtener el siguiente,

**Teorema 4.0.6.** *Las configuraciones en el autómata celular que tiene por lo menos un predecesor, tiene un predecesor exactamente para  $N \neq 3l$  y exactamente cuatro para  $N = 3l$ .*

*Demostración.* En este teorema se hace uso del lema anterior, se demuestra que  $Q(x)$  evoluciona a la configuración nula después de un paso de tiempo.

Sea  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , con  $n = N - 1$ .

Queremos un  $Q(x)$  tal que  $T(x)Q(x) = 0$ , sustituyendo obtenemos

$$(x + 1 + x^{-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ + \cdots + a_nx^n + a_0x^{-1} + a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_n + a_0 + a_1 + x(a_0 + a_1 + a_2) + x^2(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots \\ + x^{n-1}(a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) + x^n(a_{n-1} + a_n + a_0) = 0 \pmod{(x^N - 1)}. \end{aligned}$$

Para que se pueda cumplir la igualdad se tiene que cumplir que los coeficientes sean igual a cero, osea

$$a_n + a_0 + a_1 = 0$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} + a_n + a_0 = 0$$

Por lo tanto, la relación general determina todos los coeficientes, en términos de  $a_0$  y  $a_1$ ; donde  $a_0$  y  $a_1$  pueden tomar el valor de 0 o 1. Al realizar las posibles combinaciones obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia:

$$a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$$

$$a_n = a_0 + a_1$$

$$a_{n-1} = a_n + a_0$$

$$a_{3i} = a_0$$

$$a_{3i+1} = a_1$$

$$a_{3i+2} = a_2$$

de donde obtenemos cuatro casos:

1)  $a_0 = a_1 = 0$ , entonces  $a_i = 0$ , para todo  $i$ .

2)  $a_0 = a_1 = 1$ , entonces  $a_n = 0$ , para  $n = 2 + 3i$ .

3)  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ , entonces  $a_n = 1$ , para  $n = 2 + 3i$ .

4)  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 0$ , entonces  $a_n = 1$ , para  $n = 2 + 3i$ .

Nótese que los casos 2, 3 y 4 son validos para  $n = 2 + 3i$ , pero inicialmente dijimos que  $n = N - 1$ , entonces es valido siempre y cuando  $N = 3l$ .

Entonces podemos concluir que si  $N \neq 3l$  solo la configuración nula tiene esta propiedad y si  $N = 3l$  son cuatro las posibles formas de  $Q(x)$ :

$$\begin{aligned}
 1) & \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i+1} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i} \\
 2) & \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i+2} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i+1} \\
 3) & \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i+2} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{3}} x^{3i} \\
 4) & 0.
 \end{aligned}$$

Aplicandole la regla 150 a cualquiera de las configuraciones anteriores obtendremos la configuración nula.  $\square$

Analizando un poco este lema nos podemos dar cuenta que la configuración nula tiene tres posibles predecesores para  $N = 3l$ , mientras que para  $N \neq 3l$  solo existe una.

Es interesante hacer notar que los puntos fijos para la regla 90, en nuestro caso son predecesores para  $N = 3l$ .

**Corolario 2.** Para  $N \neq 3l$ , el único predecesor de la configuración nula es ella misma.

**Ejemplo 4.0.5.** Sea  $A^{(0)}(x) = x^5 + x^9$  la configuración inicial para  $N = 12$ ,  $K = 2$  y  $r = 1$ . Verifiquemos que al aplicarle la regla unos pasos de tiempo podemos obtener una de las configuraciones  $Q(x)$ .

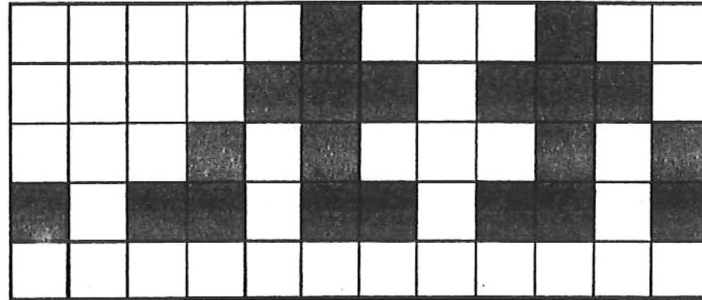


Figura 4.2: Ejemplo 4.0.5

**Ejemplo 4.0.6.** Sea  $A^{(0)}(x) = x + x^2$  la configuración inicial para  $N = 8$ ,  $K = 2$  y  $r = 1$ . Verifiquemos que al aplicarle la regla unos pasos de tiempo no podemos obtener una de las configuraciones  $Q(x)$ .

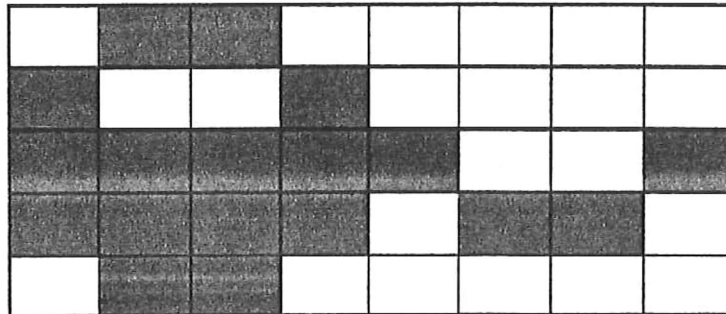


Figura 4.3: Ejemplo 4.0.6

Podemos observar que conforme transcurre el tiempo se entra en un ciclo con la configuración inicial dada.

**Teorema 4.0.7.** *No se puede obtener la configuración nula después de un paso de tiempo, para cualquier configuración inicial con un solo sitio con valor 1 en cualquiera de sus sitios.*

*Demostración.* Sea  $A^{(0)}(x) = 1$  la configuración inicial.

Para  $N = 1$ , se tiene que  $T(x)A^{(0)}(x) = x + 1 + x^{-1} = 1 \pmod{(x^1 - 1)}$ ,  $\pmod{2}$ .

Para  $N = 2$ , se tiene que  $T(x)A^{(0)}(x) = x + 1 + x^{-1} = 1 \pmod{(x^2 - 1)}$ ,  $\pmod{2}$ .

Para  $N = 3$ , se tiene que  $T(x)A^{(0)}(x) = x + 1 + x^{-1} = 1 + x + x^2 \pmod{(x^3 - 1)}$ .

Para  $N > 3$ , se tiene que  $T(x)A^{(0)}(x) = x + 1 + x^{-1} = 1 + x + x^{N-1} \pmod{(x^N - 1)}$ .

□

**Lema 9.** *Todos los árboles arraigados a los nodos en todos los ciclos del gráfico de transición de estados para el autómata celular definido por la regla 150 son idénticos.*

*Demostración.* Este resultado se demuestra refugiándonos en un árbol arraigado, el cual en todos los ciclos es idéntico al árbol arraigado a la configuración nula.

Sea  $A(x)$  una configuración que evoluciona exactamente a la configuración nula después de  $t$  pasos de tiempo, de manera que

$$T(x)^t A(x) = 0 \pmod{(x^N - 1)}.$$

Sea  $R(x)$  una configuración en un ciclo y  $R^{-t}(x)$  otra configuración en el mismo ciclo tal que

$$T(x)^t R^{-t}(x) = R(x) \pmod{(x^N - 1)}.$$

Definamos  $\Psi_{R(x)}[A(x)] = A(x) + R^{-t}(x)$ , entonces  $\Psi_{R(x)} : A(x) \longrightarrow A(x) + R^{-t}(x)$ .

Después de  $t$  pasos de tiempo en la configuración  $\Psi_{R(x)}$ , obtenemos

$$T(x)^t \Psi_{R(x)}[A(x)] = T(x)^t A(x) + T(x)^t R^{-t}(x) = R(x) \pmod{(x^N - 1)},$$

esta claro que todas las configuraciones  $\Psi_{R(x)}[A(x)]$  evolucionan después de  $t$  pasos de tiempo a  $R(x)$ .

Para mostrar que estas configuraciones quedan en un árbol arraigado a  $R(x)$ , uno debe mostrar que su evolución no alcanza ninguna otra configuración del ciclo para cualquier  $b < t$ .

Asumamos que es falsa esta suposición. Para que exista algún  $m \neq 0$  tal que

$$T(x)^b \Psi_{R(x)}[A(x)] = T(x)^b A(x) + T(x)^b R^{-b}(x) = R^{-m}(x)$$

es necesario que  $R^{-m}(x) = T(x)^b A(x) + R(x)^b R^{-b}(x) R^{-m}(x)$ . Sea  $t = m + b$  entonces,  $R^{-m}(x) = T(x)^b A(x) + R^{(b-t)}(x)$ .

Subsecuentemente  $T(x)^t A(x) = 0 \pmod{(x^N - 1)}$ , esto implicaría que  $R^{-m}(x) = R^{(b-t)}(x)$ . Pero  $R^{-m}(x) - R^{(b-t)}(x) = T(x)^t A(x)$ , y por la construcción  $T(x)^b A(x) \neq 0$  para cualquier  $b < t$ , obteniéndose una contradicción. De manera que en la evolución no se alcanza ninguna otra configuración del ciclo para cualquier  $b < t$ .

Sean  $A(x)$  y  $B(x)$  dos polinomios,

$$\Psi_{R(x)}[A(x)] = A(x) + R^{-t}(x) \text{ y } \Psi_{R(x)}[B(x)] = B(x) + R^{-t}(x),$$

donde después de  $t$  pasos de tiempo,  $\Psi_{R(x)}[A(x)] = \Psi_{R(x)}[B(x)]$ ,

entonces  $A(x) + R^{-t}(x) = B(x) + R^{-t}(x)$  de lo cual se obtiene que  $A(x) = B(x)$ , por tanto  $\Psi_{R(x)}$  es uno a uno.

Finalmente si  $T(x)A^{(0)}(x) = A^{(1)}(x)$ ,

entonces  $T(x)\Psi_{R(x)}[A^{(0)}(x)] = \Psi_{R(x)}[A^{(1)}(x)]$ , lo cual se sigue inmediatamente de la definición de  $\Psi$ . Así  $\Psi$  es un isomorfismo, por lo que los árboles arraigados en todas las configuraciones son isomorfas al árbol arraigado que contiene la configuración nula.  $\square$

Este resultado nos indica varias cosas entre las que destacan: en la evolución de un autómata celular bajo la regla 150 se tiene siempre una etapa de transientes para luego llegar a un ciclo de configuraciones que se repiten. Además el número de predecesores de una configuración que se encuentre en un ciclo, y que no sean elementos del ciclo, siempre es el mismo. Llamemos *punto fijo* a un ciclo de longitud uno. Entonces tenemos el siguiente

**Teorema 4.0.8.** *Para un autómata celular definido con la regla 150, para  $N \neq 2l$  existen exactamente dos puntos fijos distintos y para  $N = 2l$  exactamente cuatro puntos fijos distintos.*

*Demostración.* Sea  $A^{(0)}(x)$  un punto fijo, esto significa que  $T(x)A^{(0)}(x) = A^{(0)}(x)$ .

Para demostrar que son los únicos puntos fijos realizamos lo siguiente:

Sea  $A^{(0)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , con  $n = N - 1$ , un punto fijo, entonces  $T(x)A^{(0)}(x) = A^{(0)}(x)$ .

Sustituyendo obtenemos,

$$(x + 1 + x^{-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

entonces

$$\begin{aligned} a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ + a_0x^{-1} + a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_n + a_0 + a_1 + x(a_0 + a_1 + a_2) + x^2(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + x^{n-1}(a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \\ + x^n(a_{n-1} + a_n + a_0) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \pmod{(x^N - 1)}. \end{aligned}$$

Para que se pueda cumplir la igualdad se tienen que cumplir las relaciones entre los coeficientes, igualando término a término se ve que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_2 \\
 &\vdots \\
 a_{i-1} &= a_{i+1} \\
 &\vdots \\
 a_{n-1} &= a_0 \\
 a_n &= a_1.
 \end{aligned}$$

Recordemos que estamos trabajando en  $Z_2$ , entonces los valores de los coeficientes solo pueden ser 0 o 1. Por lo tanto, al realizar las posibles combinaciones obtenemos cuatro casos:

- 1) 00000..., para todo  $i$ .
- 2) 11111..., para todo  $i$ .
- 3) 101010..., para  $n = 2i - 1$ .
- 4) 010101..., para  $n = 2i - 1$ .

Notemos que los casos 3 y 4 se cumplen solamente para  $n = 2i - 1$ , recordando que inicialmente dijimos que  $n = N - 1$ , obtenemos que en realidad son validos para  $N = 2l$ .

Si  $N \neq 2l$ , los dos únicos puntos fijos distintos son las configuraciones 00000... y 11111..., con demostración trivial. Para  $N = 2l$  los únicos puntos fijos distintos son las configuraciones 00000..., 11111..., 101010... y 010101... □

Al aplicar la regla 150 a estas configuraciones inmediatamente se puede observar que se preserva la misma estructura del autómata celular conforme transcurre el tiempo.

**Lema 10.** *Las longitudes de cada ciclo, de un autómata celular de tamaño  $N$  definido por la regla 150, divide la longitud  $\Pi_N$  del ciclo obtenido con una configuración inicial que contiene un solo sitio con valor uno.*

*Demostración.* Sea  $A^{(0)}(x) = \sum a_i x^i$ , para  $0 \leq i$  y sea  $\Pi_N$  como en el enunciado.

Consideremos la configuración inicial  $A^{(0)}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ , con  $n = N - 1$ . Para obtener la longitud de ciclo de esta configuración en la evolución del autómata celular, podemos hacer una superposición de la configuración con un solo sitio con valor uno.

Sabemos que  $0 \leq \Pi_B \leq \Pi_N$ , donde  $\Pi_B$  es la configuración con un solo sitio con valor uno. Ahora bien supongamos que  $\Pi_B$  no divide a  $\Pi_N$ , entonces  $\Pi_B > 1$ . Si  $\Pi_B$  no divide a  $\Pi_N$ , entonces después de  $\Pi_N$  pasos de tiempo en la evolución del autómata celular se llega a la conclusión de que todas las configuraciones en el ciclo son iguales, teniendo así un ciclo de longitud uno, de lo que concluimos que  $\Pi_B = 1$ . Por lo tanto la suposición de que  $\Pi_B$  no divide a  $\Pi_N$  es incorrecta.  $\square$

Cuando se generen las configuraciones de los *puntos fijos*, en la evolución del autómata celular, estos son los únicos que tienen longitud igual a uno.

**Teorema 4.0.9.** *Para un autómata celular definido con la regla 150, con  $N = 3 \cdot 2^j$ , la longitud del ciclo obtenida a partir de la configuración  $(1 + x^{2^j})$  es 1.*

*Demostración.* En este caso se evoluciona finalmente a un punto fijo que consiste en una configuración nula.

Desarrollando obtenemos que:

$$(x + 1 + x^{-1})^{3 \cdot 2^j} (1 + x^{2^j}) = [(x + 1 + x^{-1})^{2^j}]^3 (1 + x^{2^j}),$$

Sabemos que  $(x + 1 + x^{-1})^{2^j} = x^{2^j} + 1 + x^{-2^j} \pmod{2}$ , ya que  $(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n} \pmod{p}$ ,  $n \geq 0$ , donde  $a$  y  $b \in \mathbb{Z}_p$ ,  $p = \text{primo}$ . Entonces

$$\begin{aligned} [x^{2^j} + 1 + x^{-2^j}]^3 (1 + x^{2^j}) &= (x^{-3 \cdot 2^j} + 6x^{-2^j} + 7 + 6x^{2^j} + 3x^{3 \cdot 2^j} + 3x^{-2^j+1} + x^{2^j+1})(1 + x^{2^j}) \\ &= (1 + x^{-2^j+1} + x^{2^j+1})(1 + x^{2^j}) \pmod{(x^{3 \cdot 2^j} - 1)} \\ &= 1 + x^{-2^j+1} + x^{2^j+1} + x^{2^j} + x^{-2^j} + x^{3 \cdot 2^j} \\ &= 2 + 2x^{2^j} + 2x^{2^j+1} \\ &= 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto para un autómata celular definido por la regla 150, de tamaño  $N = 3 \cdot 2^j$ , y con configuración inicial  $(1 + x^{2^j})$ , esta evoluciona después de  $N$  pasos de tiempo a la configuración nula, vease el ejemplo de la figura 4.4

**Teorema 4.0.10.** *Dada una configuración inicial cualquiera para  $N = 2^j$ , después de  $2^{j-1}$  pasos de tiempo se vuelve a obtener la configuración inicial.*

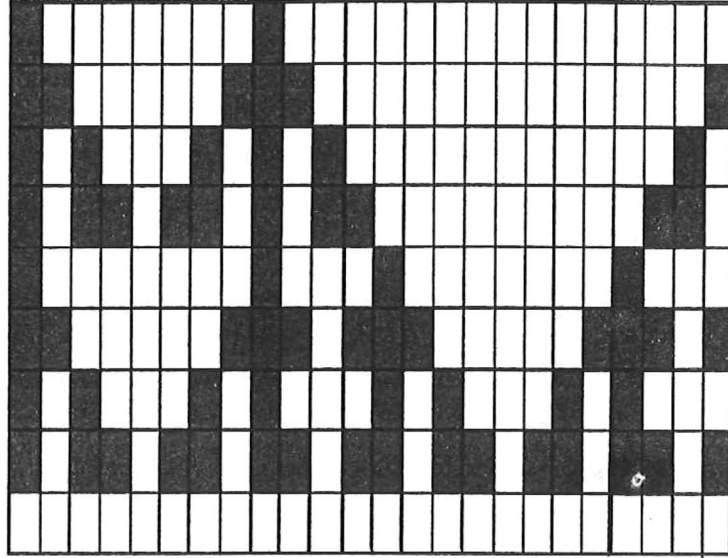


Figura 4.4: Autómata Celular con  $\Pi_N = 1$ , Teorema 4.0.9

*Demostración.* Sea  $A^{(0)} = 1$  la configuración inicial.

Sustituyendo el valor de  $A^{(0)}$  y aplicando la regla  $2^{j-1}$  veces, obtenemos lo siguiente:

$$T(x)^N \cdot A^{(0)} = (x + 1 + x^{-1})^{2^{j-1}}(1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} (x^{2^{j-1}} + 1 + x^{-2^{j-1}})(1) &= (x^{2^{j-1}} + 1 + x^{-2^{j-1}}) \\ &= 1 + 2x^{2^{j-1}} \pmod{(x^{2^j} - 1)} \\ &= 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Por la propiedad de aditividad, cualquier configuración puede ser considerada como una superposición de configuraciones inicial con un solo sitio diferente de cero, por lo tanto este teorema es válido para cualquier configuración inicial.  $\square$

Con este teorema nos podemos dar cuenta que dada la configuración inicial, después de  $2^{j-1}$  pasos de tiempo esta en un ciclo repetitivo conforme transcurra el tiempo, como sucede en la figura 4.0.6.

También es importante mencionar que la longitud de cualquier ciclo divide a  $2^{j-1}$ , por lo tanto  $\Pi_N | 2^{j-1}$ .

**Corolario 3.** *Nunca puede generarse la configuración nula en la evolución del autómata celular para  $N = 2^j$  y solo puede ocurrir como condición inicial.*

Sabemos que para  $N = 2^j$  uno de los predecesores es la configuración nula y que el único predecesor de la configuración nula es ella misma. Por lo tanto si el único predecesor de la configuración nula es ella misma, entonces en la evolución del autómata celular no se puede generar esta y solo puede ocurrir como configuración inicial. Sucede la mismo para la configuración 1111...

Un *ciclo puro* es aquel en el cual la  $\Pi_N$  del ciclo de autómatas celulares es uno.

La configuración nula  $A(x)$  entra a un ciclo puro si el árbol arraigado que la genera es nulo, por el lema 9.

**Corolario 4.** *Para un autómata celular que evoluciona en base a la regla 150, con  $N = 2^j$  todos los ciclos son ciclos puros.*

**Conjetura 1.** Para el autómata celular definido por la regla 150, para todo  $N$ , la longitud del ciclo de la longitud máxima satisface:  $\Pi_N = 2\Pi_{\frac{N}{2}}$ , siempre y cuando  $N|2$ .

Este resultado, aunque no se ha demostrado formalmente, tiene como base la

tabla II, ya que en ella se puede observar que si se sigue un patrón para  $\Pi_N$  entre las longitudes de los ciclos para varios valores de  $N$  y llegar a la conclusión de que para la regla 150,  $\Pi_N = 2\Pi_{\frac{N}{2}}$ , siempre y cuando  $N|2$ . Para obtener este resultado se hizo uso de un programa en Mathematica, vease el apéndice.

Tabla II: La longitud máxima  $\Pi_N$  para  $k = 2$ 

$N$	$x + x^{-1}$	$x + 1 + x^{-1}$
3	1	1
4	1	2
5	3	3
6	2	1
7	7	7
8	1	4
9	7	7
10	6	6
11	31	31
12	4	2
13	63	21
14	14	14
15	15	15
16	1	8
17	15	15
18	14	14
19	511	511
20	12	12
21	63	63
22	62	62
23	2047	2047
24	8	4
25	1023	1023
26	126	126
27	511	511
28	28	28
29	16383	16383
30	30	30
31	31	31
32	1	16
33	31	31
34	30	30
35	4095	4095
36	28	28
37	87381	87381
38	1022	1022
39	4095	4095
40	24	24

## Capítulo 5

# CONCLUSIONES

Se ha utilizado un formalismo apropiado para comenzar a estudiar la evolución de autómatas celulares unidimensionales sobre  $Z_2$  y con condiciones de frontera periódicas. Los resultados preliminares muestran que a pesar de que tanto la regla 90 como la regla 150 son *aditivas*, existen diferencias importantes entre ellas.

Se puede observar que existe una gran diferencia en como son alcanzadas ciertas configuraciones en la evolución del autómata celular. Para el caso de la regla 150 si  $N \neq 3l$  todas las  $2^N$  configuraciones son alcanzables y si  $N = 3l$ , la configuración  $A(x)$  es alcanzable si y solo si  $x^2 + x + 1 \mid A(x)$ . Esto en contraste con lo que ocurre con la regla 90, donde se tiene que si  $N$  es par solo  $\frac{1}{4}$  de todas las configuraciones posibles son alcanzables; y si  $N$  es impar exactamente la mitad de todas las configuraciones son alcanzables.

En la evolución de los autómatas celulares definidos en base a la regla 150 si pueden generarse configuraciones que contengan un número impar de sitios con valor

uno y no solo pueden ocurrir como condiciones iniciales, como sucede para la regla 90.

El lema 8 nos da la posibilidad de reconocer cuando es que dos configuraciones tienen el mismo sucesor. Esto nos da pie para obtener los predecesores de la regla 150 y así sabemos que existen exactamente un predecesor cuando  $N \neq 3l$  y cuatro cuando  $N = 3l$ . Mientras que para la regla 90 existen exactamente dos predecesores cuando  $N$  es impar y cuatro cuando  $N$  es par. Cabe mencionar que el único predecesor de  $N \neq 3l$  para la regla 150, es la configuración nula y que el predecesor de esta, es ella misma. Al realizar este estudio nos dimos cuenta de que los puntos fijos para la regla 90, en el caso de la regla 150 son predecesores para  $N = 3l$ .

Una ventaja de estudiar autómatas celulares, es que tienen representaciones gráficas y algebraicas, lo que nos permite demostrar y entender mejor lo que sucede. El teorema 8 nos indica varias cosas entre las que destacan: en la evolución de un autómata celular bajo la regla 150 se tiene siempre una etapa de transientes para luego llegar a un ciclo de configuraciones que se repiten. Además el número de predecesores de una configuración que se encuentre en un ciclo, y que no sean elementos del ciclo, siempre es el mismo.

Para un autómata celular definido con la regla 150, para  $N \neq 2l$  existen exactamente dos puntos fijos distintos y para  $N = 2l$  exactamente cuatro puntos fijos distintos.

Las longitudes de todos los ciclos de un autómata celular de tamaño  $N$  definido por la regla 150 divide a  $\Pi_N$ , la longitud del ciclo obtenido con una configuración

inicial que contiene un solo sitio con valor uno.

Para un autómata celular definido con la regla 150, para  $N = 3 \cdot 2^j$ , la longitud del ciclo obtenida a partir de la configuración inicial  $(1 + x^{2^j})$  es 1, lo cual nos dice que después de  $N$  pasos de tiempo evoluciona a la configuración nula. En el caso en que  $N = 2^l$  dada la configuración inicial, después de  $2^{j-1}$  pasos de tiempo esta en un ciclo repetitivo conforme transcurre el tiempo, es importante mencionar que la longitud de cualquier ciclo divide a  $2^{j-1}$ , por lo tanto  $\Pi_N | 2^{j-1}$ .

No se puede obtener la configuración nula después de un paso de tiempo, para cualquier configuración inicial con un solo sitio con valor 1 en cualquiera de sus sitios. Sabemos que para  $N = 2^j$  uno de los predecesores es la configuración nula y que el único predecesor de la configuración nula es ella misma. Por lo tanto si el único predecesor de la configuración nula es ella misma, entonces en la evolución del autómata celular no se puede generar esta y solo puede ocurrir como configuración inicial. Sucede lo mismo para la configuración  $1111\dots$ .

El resultado, de que para  $N = 2^j$  se satisface que  $\Pi_N = 2\Pi_{\frac{N}{2}}$ . Aunque no se ha demostrado formalmente, se puede observar en la tabla que si se sigue un patrón para  $\Pi_N$ . En este resultado se hizo uso de un programa en Mathematica.

## Apéndice A

# CONCEPTOS DE ÁLGEBRA

## MODERNA

Un *polinomio* en un campo  $F$  es una suma de la forma:  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , en donde  $n$  es un entero no negativo y cada coeficiente  $a_k$  es un número real. Si  $a_n \neq 0$ , se dice que el polinomio tiene grado  $n$ .

Definamos un *anillo de polinomios* sobre  $F$  (siendo  $F$  un campo) en la indeterminada  $x$ , representaremos por  $F[x]$ , al conjunto de todos los símbolos  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , donde  $n$  puede ser cualquier entero no negativo y donde los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$  están todos en  $F$ . Para que  $F[x]$  sea un anillo debe cumplir con los axiomas definidos de un anillo de  $F[x]$ .

## A.1 El Algoritmo de la División

**Lema 11.** (EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN) *Dados dos polinomios  $f(x)$  y  $g(x)$  de  $F[x]$  con  $g(x) \neq 0$ , existen entonces dos polinomios  $t(x)$  y  $r(x)$  en  $F[x]$  tales que  $f(x) = t(x)g(x) + r(x)$ , donde  $r(x) = 0$  o  $\deg r(x) < \deg g(x)$ .*

## A.2 Polinomio Ciclotómico

Sea  $\Phi_n(x) = \prod(x - \vartheta)$ , donde este producto se toma sobre todas las raíces  $n$ -ésimas primitivas de la unidad. Este polinomio se llama *polinomio ciclotómico*. Enumeramos los primeros polinomios ciclotómicos:  $\Phi_1(x) = x-1$ ,  $\Phi_2(x) = x+1$ ,  $\Phi_3(x) = x^2+x+1$ ,  $\Phi_4(x) = x^2+1$ ,  $\Phi_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$ ,  $\Phi_6(x) = x^2+x+1, \dots$ . Entonces  $x^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d(x)$ ,  $\Phi_d$ . Nótese que todos ellos son polinomios mónicos con coeficientes enteros para  $d|N$ .

Un número complejo  $\vartheta$  se dice que es una raíz primitiva  $n$ -ésima de la unidad si  $\vartheta^n = 1$  pero  $\vartheta^m \neq 1$  para cualquier entero positivo  $m < n$ .  $\vartheta = e^{2\pi i/n}$ .

## Apéndice B

# PROGRAMA EN MATHEMATICA

```
In[1]:= RandomList[n_] := Table[Random[Integer], {n}]

In[2]:= RandomList[n_, k_] :=
  Table[Random[Integer, {0, k - 1}], {n}]

In[3]:= CenterList[n_Integer, a_List] :=
  With[{len =  $\frac{n - \text{Length}[a]}{2}$ },
    Join[Table[0, {len}], a, Table[0, {len}]]] E

In[4]:= CAEvolveList[ElementaryRule[num_Integer], init_List,
  t_Integer] := With[{rbits = IntegerDigits[num, 2, 8]},
  NestList[ElementaryCASStep[rbits, #1] &, init, t]]

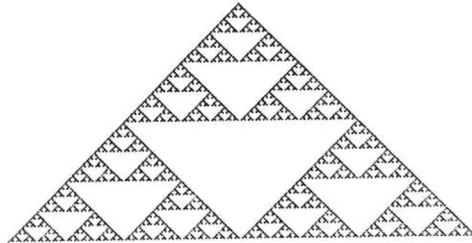
In[5]:= ElementaryCASStep[rbits_List, a_List] :=
  rbitsP8 - (RotateLeft[a] + 2(a + 2 RotateRight[a])) T

In[6]:= ElementaryCASStep =
  Compile[{{rbits, _Integer, 1}, {a, _Integer, 1}},
  rbitsP8 - (RotateLeft[a] + 2(a + 2 RotateRight[a])) T];

In[7]:= CAEvolveList[GeneralRule[rules_, r_Integer],
  init_List, t_Integer] :=
  With[{dr = Dispatch[rules]},
  NestList[GeneralCASStep[dr, r, #1] &, init, t]]

In[8]:= GeneralCASStep[dr_, r_Integer, a_List] :=
  Replace[#, dr] &/@
  Partition[Join[Take[a, -r], a, Take[a, r]], 2r + 1, 1]
```

```
In[9]:= CAGraphics[history_List] :=  
Graphics[Raster[1-Reverse[history]],  
AspectRatio fi Automatic]  
  
In[10]:= Show[CAGraphics[CAEvolveList[ElementaryRule[90],  
CenterList[301,{1}],128]]];
```



# Bibliografía

- [1] GARDNER, M. The fantastic combinations of john conway's new game of life. *Scientific American* (1970), 100.
- [2] JONH T. BALDWIN, S. S. On the classifiability of cellular automata. *arXv:math.LO/9801152* (january, 15 1998).
- [3] MACWILLIAMS, F. J., AND SLOANE, N. *The theory of error-correcting codes*. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- [4] MOORE, E. Machine models of self-reproduction. In *Proc. Symp. Appl. Math.* 14, 17 (1962) reprinted in: *Essays on cellular automata*, A. W. Burks. Univ. of Illinois Press (1966).
- [5] MORALES, F. J. Automatas celulares y vida artificial.
- [6] PACKARD, N. H., AND WOLFRAM, S. *Journal of statistical Physics* 38 (March 1985), 901–946.
- [7] TOFFOLI, T. Cellular Automata: A new enuironmet for modelig. *MIT Press cambridge* (1987).

- [8] ULAM, S. *Some ideas and prospects in biomathematics*. Ann. Rev. Bio., 1974.
- [9] VON NEUMANN, J. *The Theory of self-reproducing Automata*. A.W. Burks, ed., Univ. of Illinois Press, Urbana and London, 1965.
- [10] WENTION, L. PARCKARD, N. Transition phenomena in Cellular Automata rule space. *Physica D*. 45 (1990), 77-94.
- [11] WOLFRAM, S. Cellular Automata. 2-21.
- [12] WOLFRAM, S. Geometry of binomial coefficients. *Amer. Math. Monthly* 91 (1984), 566-571.
- [13] WOLFRAM, S. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore, 1986.
- [14] WOLFRAM, S. Emerging syntheses in science. In *Proceedings of the Founding Workshops of the Santa Fe Institute* ((Addison Wesley, 1988)).
- [15] WOLFRAM, S. Universality and Complexity in Cellular Automata. *Physica D* 10 (January 1984), 1-35.
- [16] WOLFRAM, S., MARTIN, O., AND ODLYZKO, A. Algebraic Properties of Cellular Automata. *Communications in Mathematical Physics* 93 (March 1984), 219-258.