

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería Mexicali

Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería (MyDCI)



**Análisis y optimización del control semi-activo de vibraciones
por rigidez conmutada en sistemas mecánicos utilizando la
teoría de sistemas periódicos**

Ing.: Sugey Marilyn Diarte Acosta

Asesor: Dr. Luis Omar Moreno Ahedo

Mexicali, Baja California. Noviembre de 2018

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Descripción del problema	9
1.2. Contexto del análisis	10
1.3. Hipótesis	10
1.4. Justificación del tema	11
1.5. Objetivo de la investigación	11
2. Control semi-activo por rigidez conmutada: vibración libre	13
2.1. Sistema lineal sometido a una ley de control semi-activo	13
2.2. Fenómenos de amortiguamiento	16
2.2.1. Amortiguamiento estructural	16
2.2.2. Amortiguamiento viscoso	18
2.2.3. Amortiguamiento de Coulomb	18
2.3. Definición del modelo de Reid	19
2.3.1. Existencia y unicidad del oscilador de Reid	20
2.4. Análisis en el tiempo del modelo de Reid	21
2.5. Dispositivos de control semi-activo	22
2.5.1. Análisis previos de sistemas lineales con dispositivos de rigidez variable	23
3. Teoría de Floquet-Lyapunov	25
3.1. Teoría de estabilidad de Lyapunov	25
3.1.1. Método directo de Lyapunov	29
3.2. Teoría básica de Floquet	30
3.2.1. Versión alternativa del teorema de Floquet	37
3.3. Teoría de Floquet-Lyapunov	37
3.3.1. Análisis de estabilidad	39
3.3.1.1. Naturaleza dual de los sistemas lineales periódicos en el tiempo	40
3.3.1.2. Controlabilidad	40

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
3.3.1.3. Factores reales de Floquet	41
3.3.1.4. Método de dos etapas	42
3.3.1.5. Derivación directa	42
3.3.1.6. Formulación del problema del valor en la frontera (BVP)	43
3.4. Matriz de monodromía	44
4. Análisis del oscilador de Reid con teoría de Floquet	45
4.1. El oscilador de Reid	46
4.2. Análisis de estabilidad	47
4.3. Oscilador periodico de Reid	47
4.3.1. Instantes de conmutación	48
4.3.1.1. Problema de posición inicial	48
4.3.1.2. Problema de velocidad inicial	50
4.4. Análisis por la teoría de Floquet	53
4.4.1. Criterio de estabilidad	57
4.5. Optimización por análisis sensitivo	57
4.6. Análisis de disipación de energía	58
4.6.1. Problema de velocidad inicial	58
4.6.2. Problema de posición inicial	60
5. Análisis no lineal del oscilador de Reid	62
5.1. Transformada de Lyapunov	62
5.1.1. Criterio de Lyapunov	64
5.2. Aproximación lineal	64
5.3. Método de variación de parámetros	66
5.3.1. Cálculo de la solución del oscilador de Reid por el método de variación de parámetros	69
5.4. Amortiguamiento inducido	71
5.4.1. Amortiguamiento viscoso equivalente mediante la técnica del decremento logarítmico	72
5.5. Amortiguamiento óptimo inducido	75
6. Resultados, conclusiones y trabajo futuro	76
6.1. Resultados	80
6.1.1. Publicaciones derivadas de esta investigación	81
6.2. Trabajo futuro	81
A. Preliminares: control semi-activo	82

Índice de figuras

2.1. Sistema masa-resorte.	14
2.2. Lazo de histéresis	17
2.3. Solución numérica del oscilador de Reid	21
4.1. Sistema masa-resorte	46
4.2. Solución del oscilador de Reid para posición y velocidad inicial	48
4.3. Comparación de soluciones del oscilador de Reid para distintos métodos	58
4.4. Decaimiento de la energía total para distintos valores de ϵ	61
5.1. La variación de a, β y u con t para $a(0) = 1.5, \beta(0) = 0.0$ y $\epsilon = 0.05$	69
5.2. Solución de los parámetros del sistema contra aproximaciones lineales	71
5.3. Solución del oscilador de Reid para el valor óptimo de ϵ	73

Agradecimientos:

Al Dr. Luis Omar Moreno Ahedo , mi director de tesis, a quien agradezco la confianza depositada en mí para realizar este trabajo y el tiempo que dedicó en guiarme para poder concluirlo.

A los miembros del comité de tesis, Dr. Raúl Rascón y Dr. David Rosas, por su dedicación en la lectura de avances y sus observaciones tan acertadas.

A la Facultad de Ingeniería Mexicali que fué mi casa durante todo este período de investigación.

A CONACYT por apoyarme en la realización de esta maestría que ha contribuido a fortalecer mi experiencia y preparación académica.

Y finalmente agradecer a mi familia, sin cuyo apoyo y cariño no hubiera sido posible la conclusión de este trabajo.

Resumen:

El modelo de Reid es usado para describir la dinámica del control semi-activo de vibración de un sistema masa-resorte, donde el resorte semi-activo conmuta entre un valor máximo y mínimo de rigidez de acuerdo a una ley de control heurística dependiente de los estados del sistema, y su desempeño esta caracterizado por un parámetro del sistema; tal dispositivo semi-activo induce un fenómeno de amortiguamiento histerético. En este estudio, un enfoque novedoso basado en la teoría de Floquet es aplicado para el análisis del modelo de Reid. Para tal fin, el modelo de Reid es escrito como una ecuación diferencial periódica al convertir la ley de control dependiente de los estados en una ley periódica en el tiempo. La aplicación de la teoría permite obtener los multiplicadores de Floquet que yacen dentro del círculo unitario, además, los exponentes de Floquet son usados para establecer un problema de optimización en términos de un parámetro del sistema, el problema es resuelto aplicando un análisis sensitivo a los exponentes. Los resultados son validados analizando el modelo de Reid con técnicas no-lineales.

Abstract:

The Reid model is used to describe the dynamics of the semi-active vibration control of a mass-spring system, where the semi-active spring commutes between a maximum and minimum stiffness value according to a heuristic state-dependent control law, and its performance is characterized by a system's parameter, such semi-active device induces a hysteretic damping phenomenon. In this study, a novel approach based on the Floquet theory is applied for the analysis of Reid model. In order to that, the Reid model is written as a periodic differential equation by converting the state-dependent control law to a time-periodic one. The application of the theory allows obtaining the Floquet multipliers which lie inside the unitary circle, in addition, the Floquet exponents are used to establish an optimization problem in terms of a system's parameter, the problem is solved by applying a sensitivity analysis to the exponents. The results are validated analyzing the Reid model using nonlinear analysis techniques.

Capítulo 1

Introducción

El estudio realizado en esta tesis se centró en el control semi-activo de vibraciones libres de un sistema mecánico masa-resorte, mediante un resorte semi-activo sometido a una ley de control conmutada, la cual varía el resorte entre un valor mínimo y un valor máximo de rigidez. El modelo matemático del sistema se redujo a una ecuación diferencial no-lineal conocida como el modelo de Reid u oscilador de Reid. El propósito principal consistió en inducir amortiguamiento al sistema y lograr mitigar las oscilaciones para el caso de vibraciones libres. Al investigar en la literatura disponible los trabajos realizados en relación al control semi-activo y específicamente del control por conmutación de rigidez, se observó que se había estudiado el problema de forma cuantitativa y solamente para realizar comparaciones con otros esquemas de control semi-activo, sin embargo, no existía un estudio que buscara una explicación tanto cuantitativa como cualitativa del por qué siempre se obtiene el mismo valor de relación de los valores de rigidez entre los que se conmuta. Al obtener la solución numérica del modelo matemático del sistema se descubrió que el comportamiento de la ley de control era periódico, lo que abrió la posibilidad de analizar el sistema de una forma diferente empleando la teoría de sistemas periódicos en particular la teoría de Floquet-Lyapunov. Por todo lo anterior se inició este análisis, con la finalidad de brindar un nuevo enfoque para analizar este tipo de sistemas y aportar un poco más de conocimiento al tema del control semi-activo que pueda servir como base para futuros estudios de otros sistemas similares al aquí presentado.

En este primer capítulo se describe la problemática y objetivo de la tesis. En los siguientes capítulos se describe lo necesario para entender el origen que llevó a desarrollar la presente investigación, se muestra el estado del arte del tema, para poder establecer una comparación con los trabajos hechos hasta el día de hoy y poder así resaltar la innovación e importancia que representan los resultados aquí obtenidos. En un capítulo posterior se detallan las bases matemáticas y los instrumentos que se utilizaron y sobre los que se sustenta el desarrollo y que permite entender el enfoque propuesto para el estudio de sistemas similares al aquí analizado. Una vez repasados los fundamentos teóricos se detalla el desarrollo de la aplicación de las teorías al análisis del control de vibración semi-activo

sobre un sistema masa-resorte, donde se aplicó una ley de control semi-activo por conmutación de rigidez. Posteriormente, se describen también los resultados a los que condujo el estudio y se resaltan las aportaciones y oportunidades que conlleva para extender un trabajo futuro.

1.1. Descripción del problema

En general los mecanismos están expuestos a perturbaciones del ambiente, que inducen vibraciones en los mismos. Dichas vibraciones afectan el funcionamiento normal de los mecanismos, e incluso pueden causar daños cuando no se aplican técnicas de control de vibración capaces de eliminar o disminuir los efectos de las oscilaciones sobre éstos.

Existen técnicas y dispositivos de control semi-activo de vibraciones que han sido desarrollados con el objetivo de mitigar las vibraciones que afectan a los mecanismos. Tales esquemas de control semi-activos utilizan dispositivos de control pasivos que poseen la propiedad de cambiar alguna propiedad mecánica del sistema como es la rigidez, el amortiguamiento o la inercia.

Se ha investigado y desarrollado en las últimas décadas una gran cantidad de dispositivos semi-activos, de los cuales se hace un repaso en un capítulo posterior. En particular dentro de estos dispositivos se encuentran los de rigidez variable, que poseen la característica de contrarrestar los efectos de las vibraciones variando su rigidez, como por ejemplo, los piezoeléctricos, los de efecto térmico de memoria, electromagnéticos y los dispositivos de configuración mecánica.

Se estudió a lo largo del desarrollo de esta tesis, un sistema mecánico masa-resorte, sobre el cual se aplicó una técnica de variación de rigidez que introdujo amortiguamiento y consecuentemente disipó la energía producto de las vibraciones libres. Se eligió variar la rigidez del sistema, ya que a diferencia de las técnicas para variar amortiguamiento, con la variación de rigidez se logra ajustar la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento del sistema al mismo tiempo.

En el presente trabajo se llevó a cabo el análisis del control de vibración semi-activo de un sistema masa-resorte de un grado de libertad, donde el dispositivo de rigidez variable estaba sujeto a una ley de control conmutada basada en la retroalimentación del producto de los estados. Dicha regla de conmutación es capaz de cambiar la rigidez del resorte entre un valor mínimo y un valor máximo. El modelo matemático que describe la dinámica del sistema corresponde a la ecuación diferencial no lineal del Oscilador de Reid, el cual fue analizado utilizando la teoría de sistemas periódicos. Se observó que el modelo de Reid se vuelve integrable durante los instantes de conmutación del sistema, permitiendo calcular la matriz de monodromía y por consiguiente obtener los exponentes de Floquet en términos de los parámetros del sistema, lo que permitió determinar la estabilidad y el llevar a cabo un análisis sensitivo para propósitos de optimización de uno de los parámetros, que se explicará con detalle más adelante. Los resultados producidos son verificados considerando que el oscilador de Reid se comporta como un modelo de amortiguamiento viscoso lineal equivalente, y utilizando la técnica del decremento logarítmico en conjunto con un proceso de aproximación. Se presenta con este estudio un enfoque novedoso, que a través de los exponentes de Floquet, provee una explicación cualitativa y

cuantitativa acerca del fenómeno de amortiguamiento inducido por la regla de rigidez conmutable. Se verá después que dicho enfoque puede ser extendido y aplicado para estudiar los casos del problema de vibración forzada de un grado de libertad, y los casos de vibración de sistemas de múltiples grados de libertad libre y forzado.

1.2. Contexto del análisis

En el estado del arte que se presenta más adelante, se hace un repaso de las principales técnicas o enfoques de control semi-activo estudiadas a lo largo de la segunda mitad del siglo XX y lo que ha transcurrido del presente siglo, que se han publicado en la literatura científica. Se presentan en forma cronológica, divididos de acuerdo a la clasificación de las técnicas semi-activas, las investigaciones y aportaciones realizadas en el campo del control de vibraciones; se repasan todas las técnicas y se resaltan las aplicaciones para las que fueron enfocadas cada uno de los artículos e investigaciones. Se hace especial incapié en la sección de control semi-activo con dispositivos de rigidez variable, también se subrayan las diferencias principales que existen entre los trabajos presentados y el análisis y resultados aquí descritos.

Con base en las aportaciones y resultados a los que se ha llegado en los estudios mencionados en el estado del arte referentes a los dispositivos de rigidez variable, principalmente refiriéndome a los trabajos de Ramaratnam [4] y Winthrop [93], en los que se ha tratado el tema del control de rigidez conmutable y la búsqueda de una explicación o base que fundamente el valor óptimo del parámetro epsilon (ϵ , el cual representa la razón entre el valor máximo de rigidez (k_M) y el valor mínimo (k_m) del resorte) obtenido numéricamente ($\epsilon = 0.877$); por lo anterior y partiendo de la observación de las gráficas obtenidas al simular la respuesta numérica del oscilador de Reid con el software Matlab[®], para el problema de posición y velocidad inicial, de que el control de conmutación de rigidez parecía tener un comportamiento periódico, dio inicio a una investigación donde se buscaba demostrar que con la teoría de sistemas periódicos era posible desarrollar una explicación cuantitativa utilizando los multiplicadores de Floquet y la matriz de monodromía, y una explicación cualitativa de la respuesta del sistema al hallar y sustentar el valor óptimo de ϵ , así como justificar el porqué del amortiguamiento inducido por el mismo control.

1.3. Hipótesis

El análisis de un sistema de control semi-activo de un sistema lineal mediante la teoría de Floquet brinda una explicación cualitativa y cuantitativa del fenómeno de amortiguamiento inducido por la conmutación de rigidez.

1.4. Justificación del tema

En la actualidad el diseño de estructuras dentro de los campos de la ingeniería civil, la robótica móvil, la industria automotriz y la industria aeroespacial busca constantemente innovar y mejorar el diseño de los sistemas de control. Se busca aumentar la estabilidad de la respuesta de los sistemas y estructuras frente a diversas perturbaciones externas o generadas por la operación de los mismos elementos de los sistemas.

El avance de la tecnología ha permitido el uso de materiales que aportan a las estructuras mayor ligereza y flexibilidad. Sin embargo, esto aumenta la importancia de lograr controlar la respuesta dinámica que tendrán cuando se apliquen cargas indeterminadas o extraordinarias, tales como el impacto de objetos, sismos, la fuerza del viento, las oscilaciones originadas por el movimiento de elementos rotativos, entre otras.

El diseño de la mayoría de las estructuras está enfocado principalmente en soportar elementos dentro del sistema en el que están construidas, y por lo general se utilizan para ello materiales con una baja capacidad de amortiguamiento, provocando que dependan completamente de la rigidez de los materiales para soportar dichas cargas, lo que deriva en que no sean capaces de disipar adecuadamente la energía y adaptarse a los cambios inesperados que podrían hacer colapsar las estructuras.

De las limitaciones antes mencionadas en los materiales o el diseño de las estructuras, nace la necesidad de implementar alternativas que puedan compensar de forma automática y efectiva las perturbaciones no deseadas. Por lo tanto, para lograr el funcionamiento seguro de las estructuras, se requiere el desarrollo y la implementación de un sistema de control de vibraciones eficaz que reduzca la respuesta a la vibración frente a las cargas ambientales y pueda extraer y disipar la energía de las oscilaciones.

Se ha optado por analizar un sistema con un dispositivo de rigidez variable, ya que son parte de las estrategias del control semi-activo, para aplicar una regla de conmutación de estados sobre un sistema masa-resorte de 1GDL, inducir amortiguamiento para disipar la energía del sistema y utilizar los exponentes de Floquet, en conjunto con la teoría de sistemas periódicos, para hallar la respuesta del sistema y sustentar cualitativa y cuantitativamente el valor óptimo del parámetro ϵ .

1.5. Objetivo de la investigación

Con el desarrollo de esta tesis se pretende fundamentar que, mediante la teoría de sistemas periódicos y la teoría de Floquet, se obtiene una explicación cualitativa y cuantitativa de la estabilidad lograda con el control de conmutación de rigidez, aplicado sobre el sistema masa-resorte lineal de un grado de libertad (1GDL).

El objetivo del análisis llevado a cabo sobre el sistema masa-resorte de 1GDL consistía en mostrar que la reducción de la solución no lineal del oscilador de Reid en una solución lineal equivalente del sistema como una manera de optimizar la razón de decaimiento de energía, resulta complicado, aunado

a que las consideraciones y aproximaciones empleadas conllevan inexactitudes numéricas. Incluso cuando el análisis de Lyapunov brinda una explicación cualitativa del fenómeno de amortiguamiento, demostrando la estabilidad asintótica, y el valor óptimo ϵ_{opt} puede ser cuantitativamente aproximado mediante la reducción a un sistema lineal equivalente, existía una falta de explicación acerca de la naturaleza del valor óptimo ϵ_{opt} y su relación con la estabilidad del sistema. Este trabajo propone un enfoque novedoso del análisis de estabilidad del modelo del oscilador de Reid, basado en la teoría de un sistema periódico [107], este análisis permite explicar cualitativamente por qué se produce el fenómeno de amortiguamiento inducido, además brinda un análisis cuantitativo del parámetro ϵ_{opt} y su relación con la estabilidad del sistema. La principal contribución de este trabajo consiste en presentar un enfoque alternativo para analizar el control semi-activo de vibraciones mediante la implementación de una regla de variación de rigidez por conmutación de estado, evitando utilizar aproximaciones lineales o suposiciones que conllevan pérdida de precisión en nuestros resultados numéricos.

Capítulo 2

Control semi-activo por rigidez conmutada: caso vibraciones libres

En este segundo capítulo se describe el fenómeno de amortiguamiento que se presenta en el sistema una vez se aplica sobre éste la ley de control semi-activo de conmutación de rigidez, que ayuda a mitigar las oscilaciones mecánicas del sistema masa-resorte.

En las secciones siguientes se define matemáticamente la representación del modelo de Reid para el caso de vibración libre empleado para la representación del sistema masa-resorte sobre el que se basa este estudio. También se describe con mayor detalle el sistema mecánico lineal y la relación entre el amortiguamiento histerético y la conmutación de rigidez

La problemática que motivó el desarrollo de este trabajo fue la de hallar (o mejor dicho desarrollar) una explicación cualitativa que complementa los trabajos cuantitativos llevados a cabo por otros autores ([93], [115]) acerca de la aplicación de técnicas de control de vibración semi-activo sobre sistemas lineales empleando la conmutación de rigidez variable en combinación con la teoría de sistemas periódicos y hallar un parámetro óptimo para la relación de rigidez mínima y máxima del sistema, que a su vez induce amortiguamiento y disipa la energía oscilatoria.

2.1. Sistema lineal sometido a una ley de control semi-activo

El sistema en el que se centra este trabajo está compuesto por una masa y un resorte semi-activo, como se muestra en la figura 2.1; la rigidez del resorte del sistema es variada entre dos valores extremos, un valor de rigidez máxima k_M y un valor de rigidez mínima k_m , mediante una ley de control semi-activo heurística que se conoce como ley de control de vibraciones por rigidez conmutada, así el resorte se comporta como un dispositivo de rigidez variable. La mencionada ley de control fue propuesta por Chen y Onoda [25], [103].

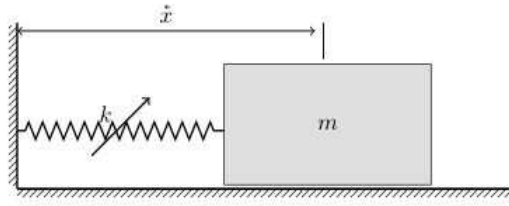


Figura 2.1: Sistema masa-resorte.

El modelo matemático del sistema masa-resorte de la figura 2.1 es descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$m\ddot{x}(\tau) + k\dot{x}(\tau) = 0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \quad (2.1)$$

donde m representa la masa que se desliza sin fricción sobre la superficie, k es la rigidez del resorte, \dot{x} representa la posición, la prima denota diferenciación con respecto al tiempo τ , y las condiciones iniciales son diferentes a cero.

El resorte actúa como un dispositivo de rigidez conmutada $k(\tau)$, y responde a la ley empírica de control dada por la siguiente regla:

$$k(\tau) = \begin{cases} k_M & \dot{x}\dot{x}' > 0 \\ k_m & \dot{x}\dot{x}' < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

se asume que cuando el resorte alcanza uno de sus valores extremos de rigidez actúa como un resorte lineal. Por lo anterior el dispositivo de rigidez debe considerarse como una función dependiente de los estados definida por la relación

$$k(\dot{x}\dot{x}') = \frac{1}{2} [k_M + k_m + (k_M - k_m) \text{Sgn}(\dot{x}\dot{x}')] \quad (2.3)$$

La relación entre los dos valores de rigidez entre los que se conmuta el sistema esta dada por el valor ϵ , dado por la ecuación siguiente

$$\epsilon = \frac{k_M - k_m}{k_M + k_m} \quad (2.4)$$

cabe resaltar que $0 < \epsilon < 1$ pues $k_M > k_m$.

Para el análisis se consideran dos conjuntos de condiciones iniciales, es decir, condiciones de velocidad inicial

$$\left(\dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0' \right) \quad (2.5)$$

y condiciones de posición inicial

$$\left(\hat{x}(0) = \hat{x}_0, \hat{x}'(0) = 0 \right) \quad (2.6)$$

Si se define $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_M + k_m}{2m}}$ como la frecuencia natural promedio de la ecuación (2.1), y para cada conjunto de condiciones iniciales se define, $l = \frac{\hat{x}}{\omega_0}$ para las condiciones de velocidad inicial y $l = \hat{x}_0$ para las condiciones de posición inicial, entonces la escala de tiempo $t = \tau\omega_0$ y el cambio de variable $x = \frac{\hat{x}}{l}$, además de la incorporación del parámetro ϵ , reducen la ecuación (2.1) a la expresión:

$$\ddot{x} + (1 + \epsilon Sgn(x\dot{x}))x = 0 \quad (2.7)$$

donde la ley de rigidez conmutada esta representada por la función signo del producto de la posición y la velocidad del sistema, dada por la siguiente expresión matemática

$$Sgn(x\dot{x}) = \begin{cases} 1 & x\dot{x} > 0 \\ 0 & x\dot{x} = 0 \\ -1 & x\dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

y los puntos representan diferenciación respecto al tiempo t .

La representación matemática de la ec. (2.7) anterior corresponde a la ecuación no lineal de Reid [116], también conocida como oscilador de Reid, pues se deriva de una transformación de la ecuación (2.7).

En el oscilador de Reid (2.7) escrito como

$$\ddot{x} + \tilde{k}(t)x = 0 \quad (2.9)$$

el término

$$\tilde{k}(t) = 1 + \epsilon Sgn(x\dot{x}) \quad (2.10)$$

se conoce como el resorte de Reid [27],[143].

La ecuación (2.1) en conjunto con las condiciones iniciales no dimensionalizadas antes descritas, definen dos conjuntos de problemas de valor inicial, a saber: el problema de velocidad inicial

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \quad (2.11)$$

y el problema de posición inicial

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.12)$$

En este punto es conveniente introducir los conceptos de amortiguamiento histerético (estructural) y la relación con el modelo de Reid, como se describen en las siguientes secciones.

2.2. Fenómenos de amortiguamiento

Antes de abordar el tema de las ecuaciones del modelo de Reid, es conveniente brindar la definición del amortiguamiento estructural y mencionar los tipos de amortiguamiento que existen.

2.2.1. Amortiguamiento estructural

Un sistema mecánico que posee amortiguamiento es un sistema no conservativo, y la energía es disipada. Debido a que esta disipación de energía debe ser igual al trabajo aplicado por la entrada del sistema, se puede escribir la expresión para la energía disipada en cada ciclo de la vibración en la forma:

$$\Delta E_{cyc} = \int_{cyc} F dx = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F \dot{x} dt \quad (2.13)$$

donde solo las partes reales de F y \dot{x} deben ser consideradas. Si se insertan las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = i\omega A |G(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x(t) \quad (2.14)$$

y

$$F(t) = A k e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

en la ecuación (2.13), se obtiene

$$\Delta E_{cyc} = -k A^2 |G(i\omega)| \omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \sin(\omega t - \phi) dt = m \omega_n^2 A^2 |G(i\omega)| \pi \sin \phi \quad (2.16)$$

Si se consideran las ecuaciones

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2.17)$$

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\left\{ \left[1 - (\omega/\omega_n)^2 \right]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.18)$$

puede notarse que la expresión $\sin \phi$ esta dada por:

$$\sin \phi = 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} |G(i\omega)| = \frac{c\omega}{m\omega_n^2} |G(i\omega)| \quad (2.19)$$

donde $\zeta = c/2m\omega_n$. Al insertar la ecuación de la amplitud del desplazamiento

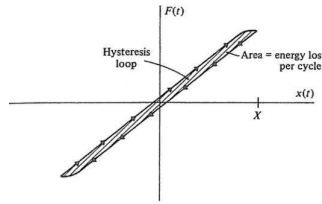


Figura 2.2: Lazo de histéresis

$$X = A |G(i\omega)| \quad (2.20)$$

y la ecuación (2.19) en la ecuación (2.16) se obtiene la expresión

$$\Delta E_{cyc} = c\pi\omega X^2 \quad (2.21)$$

de la cual sigue que la energía disipada por ciclo es directamente proporcional al coeficiente de amortiguamiento c , la frecuencia ω , y el cuadrado de la amplitud de la respuesta X .

La energía es disipada en todos los sistemas reales, incluso en aquellos sistemas en los que el modelo matemático no hace una referencia específica del amortiguamiento. Por ejemplo, la energía es disipada en los resortes reales a causa de la fricción interna. En contraste con el amortiguamiento viscoso, que se mencionará en la siguiente sección, el amortiguamiento debido a la fricción no depende de la velocidad. Ha sido observado en diversos estudios que la pérdida de energía por ciclo debida a la fricción interna es aproximadamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la respuesta X , es decir

$$\Delta E_{cyc} = \alpha X^2 \quad (2.22)$$

donde α es una constante independiente de la frecuencia de la oscilación armónica. Este tipo de amortiguamiento, llamado amortiguamiento estructural o histerético [91], se atribuye al fenómeno de histéresis asociado con esfuerzo cíclico en materiales elásticos. La pérdida de energía en cada ciclo de esfuerzo es igual al área dentro del lazo de histéresis mostrado en la figura 2.2. Por lo tanto, comparando las ecuaciones (2.21) y (2.22), se puede concluir que los sistemas que poseen amortiguamiento estructural y que están sujetos a excitación armónica pueden ser tratados como si estuvieran sometidos a amortiguamiento viscoso con el coeficiente equivalente

$$c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi\omega} \quad (2.23)$$

En contraste con el amortiguamiento viscoso, para el amortiguamiento estructural la máxima amplitud se obtiene exactamente para $\omega = \omega_n$.

Es importante remarcar que, la analogía entre el amortiguamiento estructural y viscoso sólo es válida para excitación armónica, porque la respuesta de un sistema a la excitación armónica con la frecuencia ω esta implícita en el desarrollo anterior.

2.2.2. Amortiguamiento viscoso

El segundo tipo de amortiguamiento que se debe conocer es el llamado amortiguamiento viscoso, cuya definición se da a continuación.

En ausencia de fuerza externas, $F(t) = 0$, una ecuación de movimiento de un sistema de segundo orden como

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.24)$$

se reduce a una ecuación diferencial homogénea. Es conveniente expresar la solución de dicha ecuación homogénea en términos de ciertos parámetros adimensionales. Para este fin, sea $F(t) = 0$ en la ecuación (2.24), se divide el resultado entre m y se obtiene la ecuación diferencial homogénea

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (2.25)$$

donde ω_n es la frecuencia natural de la oscilación no amortiguada, y esta dada por $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, y

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.26)$$

es una cantidad adimensional conocida como el factor de amortiguamiento viscoso [91].

2.2.3. Amortiguamiento de Coulomb

Otro tipo de amortiguamiento que es importante mencionar es el llamado amortiguamiento de Coulomb o seco, éste se presenta cuando los cuerpos se deslizan sobre superficies secas[91]. Para que empiece el movimiento, debe haber una fuerza actuando sobre el cuerpo que supere la resistencia al movimiento causada por la fricción. La fuerza de fricción seca es paralela a la superficie y proporcional y a la fuerza normal de la superficie, donde la última es igual al peso W del cuerpo (de la masa en un sistema masa-resorte-amortiguador). La constante de proporcionalidad es el coeficiente de fricción estática μ_s , un número que varía entre 0 y 1 y depende del material de la superficie. Una vez que se ha iniciado el movimiento, la fuerza cae a $\mu_k W$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, cuyo valor generalmente es menor que el de μ_s . La fuerza de fricción está en dirección opuesta a la velocidad, y permanece constante en magnitud mientras que las fuerzas que actúan sobre la masa m , sean, la fuerza de inercia y la fuerza de restauración debida al resorte, son suficientes para superar la fricción seca.

Cuando las fuerzas se vuelven insuficientes, el movimiento simplemente se detiene.

Utilizando F_d para denotar la magnitud de la fuerza de amortiguamiento, donde $F_d = \mu_k W$, la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador puede escribirse en la forma:

$$m\ddot{x} + F_d Sgn(\dot{x}) + kx = 0 \quad (2.27)$$

donde el símbolo Sgn denota 'el signo de' y representa una función que tiene el valor +1 si su argumento \dot{x} es positivo y el valor -1 si su argumento es negativo. Matemáticamente la función puede escribirse como sigue

$$Sgn(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.28)$$

2.3. Definición del modelo de Reid

En esta sección se aborda el tema del modelo de Reid no lineal [116], donde se representa un sistema con amortiguamiento estructural o histerético, es decir, aquel que se presenta cuando un elemento es sometido a inversiones en el sentido de la carga aplicada cuando el material del elemento esta en el rango no lineal. La curva de aumento de carga es distinta a la curva de disminución de la carga sobre el elemento, por lo que la energía de deformación del elemento se convierte en energía cinética durante el ciclo de disminución de la carga. La ecuación de Reid tiene tres representaciones, como se verá a continuación.

Si se acepta la definición de que el amortiguamiento histerético es proporcional al desplazamiento pero en fase con la velocidad, entonces la vibración libre de un oscilador simple puede ser tratada utilizando este concepto. Surge entonces una aparente anomalía a través de la confusión de cuatro posibles representaciones matemáticas del amortiguamiento estructural, en términos de la ecuación diferencial para vibración libre, pueden escribirse como sigue:

- a) Un sistema con amortiguamiento histerético

$$m\ddot{x} + b \left| \frac{x}{\dot{x}} \right| \dot{x} + kx = 0 \quad (2.29)$$

donde b es una constante dada por

$$b = \pi c \omega / \pi \quad (2.30)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso. m es la masa y k es la rigidez del resorte.

- b) Sistema con rigidez compleja

$$m\ddot{x} + (k + ib)x = 0 \quad (2.31)$$

c) Un sistema con fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad dividida por la "frecuencia" y en fase con la velocidad

$$m\ddot{x} + \frac{b}{\omega}\dot{x} + kx = 0 \quad (2.32)$$

d) Un sistema con coeficientes complejos y con solución exponencial compleja

$$m\ddot{x} + C_1 e^{im} x = 0 \quad (2.33)$$

donde C_1 es una constante.

Las condiciones de frontera están implicadas de forma tal que las ecuaciones anteriores representan un sistema oscilatorio. En la ecuación (2.32), la “frecuencia” ω debe ser definida adecuadamente.

La velocidad y el desplazamiento de una vibración libre amortiguada no están $\frac{\pi}{2}$ radianes fuera de fase. Sea η radianes el ángulo de fase entre tal velocidad y desplazamiento.

2.3.1. Existencia y unicidad del oscilador de Reid

Una vez establecidos los conceptos y las ecuaciones del modelo de Reid puede establecerse que la ecuación (2.7) en el espacio de estados está dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{k}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \end{bmatrix}$.

Cabe mencionar que $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es acotada y continua en partes en (t, \mathbf{x}) y que admite un número finito de discontinuidades, entonces $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es Lipschitz. Por lo tanto, para el oscilador de Reid (2.7) la existencia y unicidad de las soluciones está garantizada [73].

En contraste con otras representaciones en el dominio de la frecuencia, el modelo de Reid nos permite establecer un problema matemático bien planteado para los problemas de vibración libre y vibración forzada.

En el modelo matemático presenta un fenómeno de disipación que es inducido por la rigidez conmutada, este hecho lleva al concepto de variación de rigidez para la mitigación de vibraciones como lo introdujo Caughey [128] y fue después desarrollado por Chen [25]. Para el control de vibraciones se debe inducir artificialmente un amortiguamiento histerético significativo mediante dispositivos de rigidez semi-activos.

En el oscilador de Reid se puede observar que el coeficiente de rigidez varía con el tiempo, $k(t)$, por lo tanto el oscilador de Reid pertenece a la clase de sistemas paraméricamente excitados (PE), donde es conocido que el fenómeno de resonancia paramétrica puede ocurrir y conducir a un comportamiento perjudicial del sistema. Sin embargo, se ha observado también que la excitación paramétrica puede ser utilizada para propósitos de estabilización, tal enfoque se conoce como estabilización dinámica.

Otro hecho importante del oscilador de Reid consiste en que el coeficiente de rigidez variante en el tiempo actúa como un controlador dependiente de los estados, pero para que sea posible aplicar el

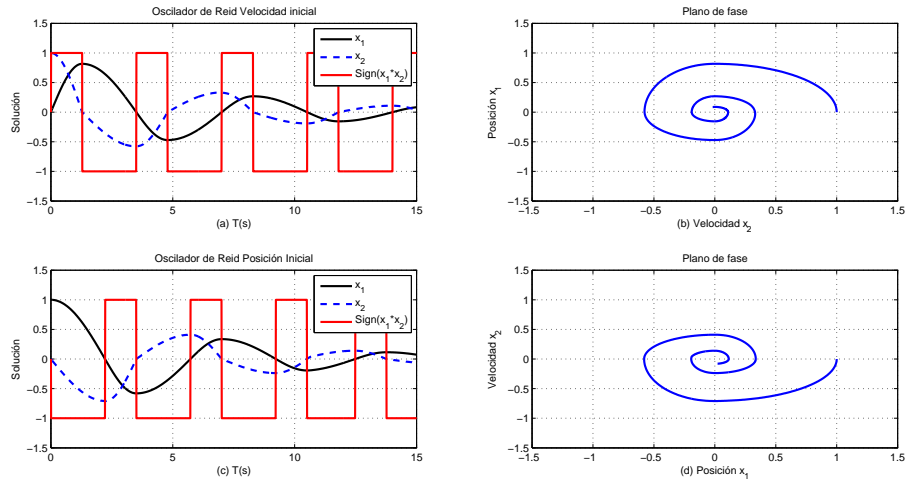


Figura 2.3: (a) Solución numérica del oscilador de Reid para el problema de velocidad inicial x_2 , (b) Plano de fase de la solución para velocidad inicial. (c) Solución numérica del oscilador de Reid para el problema de posición inicial x_1 , (d) Plano de fase de la solución para posición inicial

enfoque de la teoría de sistemas periódicos el controlador debe exhibir un comportamiento periódico en el tiempo en lazo abierto. La idea clave de este estudio para aplicar la teoría de sistemas periódicos al oscilador de Reid consiste en comprender que el controlador dependiente de los estados puede ser de hecho convertido en un controlador periódico en el tiempo, como se verá a continuación.

2.4. Análisis en el tiempo del modelo de Reid

El análisis inicial que se llevó a cabo sobre la ecuación del oscilador de Reid consistió en obtener la solución numérica de dicha ecuación aplicando el método de Runge-Kutta con la ayuda del software Matlab de MathWorks, para condiciones iniciales estándar de posición y velocidad ((1, 0) para posición inicial ec. (2.6), y (0, 1) para velocidad inicial ec. (2.5)) para un valor de $\epsilon = 0.5$.

Al analizar la gráfica de la solución numérica es posible observar que el origen es asintóticamente estable (concepto que se explica en el capítulo siguiente) en ambos casos; en la misma gráfica también se puede observar que la técnica de control basada en la conmutación de la rigidez del propio sistema, representada matemáticamente por la función $Sgn(x\dot{x})$, revela un comportamiento periódico, como puede notarse observando la gráfica de la figura 2.3 (a) y (c).

A partir de la observación de la periodicidad de la técnica semi-activa de conmutación de rigidez, el término puede ser considerado como una función periódica en el tiempo $q(t) = q(t + T)$ donde T es el periodo fundamental.

Debido al hecho anterior fue posible utilizar métodos de análisis en los instantes de conmutación

de la solución numérica, es decir, T_i los instantes en los que la función $Sgn(\dot{x})$ cruza los ejes del plano de fase para hallar una expresión analítica para $q(t)$.

Antes de llevar a cabo un análisis con la teoría de Floquet, haremos una revisión de los dispositivos de rigidez variable hallados en la literatura y que han servido como base del análisis aquí presentado; también se presentarán algunos conceptos importantes referentes al control, específicamente el control semi-activo.

2.5. Dispositivos de control semi-activo

Para lograr una comprensión más completa de los dispositivos de rigidez variable, se requiere profundizar en el conocimiento de los conceptos relacionados con dichos dispositivos, para tal propósito en esta sección se definen brevemente y se muestra un corto resumen de los dispositivos semi-activos de control de vibraciones, mientras que más adelante en el Apéndice **A** se proporciona más información acerca de estos dispositivos y una extensa búsqueda en la literatura para mostrar las aplicaciones y avances logrados en diferentes campos del control de vibraciones.

En secciones anteriores se ha introducido al sistema lineal masa-resorte sobre el que esta basado este análisis, sin embargo, es imprescindible hacer mención de algunos de los conceptos elementales para alcanzar una mayor comprensión de este tipo de sistemas, y sobre todo, de las técnicas y/o dispositivos semi-activos de control de rigidez; para ello se definen a continuación de forma breve los tópicos y se mencionan las clasificaciones que existen de los mencionados dispositivos semi-activos.

El primer concepto que debe ser comprendido es el de vibración mecánica, definido por [47] como el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. Las vibraciones mecánicas son un efecto indeseable que se debe mitigar debido a que producen un incremento del esfuerzo y pérdida de energía en las máquinas o estructuras.

De la necesidad por eliminar las vibraciones ha surgido una rama de la ciencia conocida como control de vibraciones, que se refiere al conjunto de técnicas o métodos utilizados para limitar o alterar la respuesta a las vibraciones de los sistemas mecánicos [68]. Los sistemas de control de vibraciones pueden clasificarse en tres categorías dependiendo de la cantidad de energía externa que requiera el sistema para realizar su función [68, 69]:

- Sistema de control de vibraciones pasivo: utiliza el movimiento de la estructura para proveer las fuerzas de control, sin requerir una fuente de energía externa.

- Sistema de control de vibraciones activo: provee fuerzas de control a la estructura para contrarrestar las perturbaciones, requiriendo una gran cantidad de energía para llevar a cabo su función [101].

- Sistema de control de vibraciones semi-activo: requiere una pequeña fuente de energía externa para operar y utiliza el movimiento de la estructura para proveer las fuerzas de control, cuya magnitud es ajustada mediante la energía externa.

Este estudio se centra en analizar un sistema mediante una técnica de control semi-activo, ya que combina la confiabilidad de un sistema de control pasivo, que no requiere grandes cantidades de energía para funcionar, con la mayor ventaja que ofrecen los sistemas de control activo, es decir, que permite ajustar las variables de la estructura (como el amortiguamiento, la rigidez o la masa) para llevar a cabo el control [68]. Generalmente, los sistemas de control semi-activo se originan a partir de un sistema de control pasivo que se ha modificado para lograr variar o ajustar las propiedades mecánicas del mismo [69].

El análisis emplea una ley de control de rigidez conmutada, es por ello que es importante mencionar aquí en qué consiste el control de vibraciones con rigidez conmutada y los tipos de dispositivos que emplea.

El control de vibraciones con elementos de rigidez variable fue propuesto por primera vez por Chen en 1984, en donde, mediante el ejemplo de control de vibraciones en el problema de la cuerda, propone diversas leyes de control sobre el elemento de rigidez variable en el tiempo, este le permitió validar el concepto de rigidez variable aplicado a estructuras aeroespaciales de gran envergadura. Posteriormente Onoda [103] basándose en Chen implementa un dispositivo piezoeléctrico de rigidez variable para el control de vibraciones en un sistema masa-resorte, en general Onoda estudia dos leyes de control, los hallazgos son validados experimentalmente. Por otro lado dada la complejidad de diseñar dispositivos de rigidez variable, hasta ahora se han diseñado haciendo uso de materiales compuestos como son los piezoeléctricos [28] y materiales de efecto térmico de memoria [38], otro de estos dispositivos de implementación fácil es el resorte desarrollado por Ramaratman en 2006, por citar algunos.

No fue hasta el trabajo de [93] donde se realizó una clasificación pormenorizada de los dispositivos y materiales de rigidez variable, además se definieron un conjunto de parámetros medibles y estandarizados para dispositivos de rigidez variable.

Los cinco tipos o categorías en las que se clasifican los dispositivos semi-activos de rigidez variable son: los construidos con materiales de efecto térmico de memoria, los de tipo electromagnético, los piezoeléctricos, los magnetorreológicos y los de configuración mecánica. En el Apéndice A se brinda una extensa revisión de los estudios realizados con cada tipo de dispositivo, así como los aportes que se han obtenido.

2.5.1. Análisis previos de sistemas lineales con dispositivos de rigidez variable

Dentro de los numerosos estudios de los que se hace un repaso en el Apéndice A, es posible observar que han seguido dos vertientes: la primera en la que la investigación se ha centrado en desarrollar e implementar dispositivos semi-activos de rigidez variable para verificar experimentalmente los efectos de la conmutación de rigidez, por ejemplo en el trabajo de Onoda et al. [103] implementaron un actuador piezoeléctrico, mientras que en el trabajo de Ramaratnam en 2005 [4] se empleó un resorte

*CAPÍTULO 2. CONTROL SEMI-ACTIVO POR RIGIDEZ CONMUTADA: VIBRACIÓN LIBRE*²⁴

acoplado a un arreglo mecánico para conmutar la rigidez.

La segunda vertiente de investigación se ha enfocado en complementar los aspectos teóricos, por ejemplo, en el trabajo hecho por Caughey y Vijayaraghavan [128] la solución del oscilador de Reid se aproximó mediante la técnica del balance armónico y su estabilidad fue determinada por la ecuación variacional, un análisis extendido fue hecho en el trabajo de Caughey [22] utilizando técnicas de perturbación; también un caso de múltiples grados de libertad fue estudiado posteriormente por Caughey y Vijayaraghavan en 1977 [23]. Mientras que en los trabajos de Inaudi [65] y de Zhang e Iwan [143] fue llevado a cabo un enfoque analítico por partes, mientras que en el estudio de Liu en 2006 [84] el método del plano de fase se desarrolló y aplicó.

Es importante destacar que en los trabajos citados se aplicaron algunas técnicas de análisis no lineal, sin embargo, no se dieron a la tarea de proponer un análisis con sistemas periódicos que proporcione una solución de la ecuación no lineal de Reid sin caer en aproximaciones que propician pérdidas de exactitud en los resultados.

La herramienta matemática principal utilizada para el análisis de sistemas periódicos se conoce como teoría de Floquet-Lyapunov, que se explica a profundidad en el capítulo siguiente. En las secciones siguientes se muestran definiciones y conceptos que constituyen las bases teóricas sobre las que se sustenta el desarrollo de este trabajo, desde la descripción de las definiciones de estabilidad hasta la teoría de Floquet-Lyapunov.

Capítulo 3

Teoría de Floquet-Lyapunov

Este capítulo tiene la finalidad de hacer un repaso por las teorías e instrumentos matemáticos que se emplearon para el análisis y desarrollo de esta tesis.

Comienza describiendo las definiciones básicas para entender la estabilidad en el sentido de Lyapunov y los métodos que se emplean; luego se profundiza en explicar en qué consiste la teoría de Floquet, sobre la que se fundamentan los resultados de este trabajo.

3.1. Teoría de estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos [71] descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.1)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (3.1) y $x(0) \in \mathbb{R}^n$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y $x(t)$, y se supone que es tal que:

- La ecuación (3.1) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial de $x(0)$.
- Si $x(t)$ es la solución de (3.1) correspondiente a la condición inicial $x(0)$, entonces $x(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $x(0)$.

Si la función f no depende explícitamente del tiempo, es decir, $f(t, x(t)) = f(x(t))$, luego la ecuación (3.1) se denomina autónoma. Si $f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t)$, donde $A(t)$ es una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $A(t)$ y $u(t)$ funciones únicamente de t , o constantes, entonces la ecuación (3.1) es lineal. En caso contrario no es lineal.

Definición 1. Equilibrio

Un vector constante $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (3.1) si

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Si la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ es justamente un equilibrio ($x(0) = x_e \in \mathbb{R}^n$), entonces se satisface:

- $x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado \mathbb{R}^n , esto es $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, es un equilibrio de (3.1). Si ésto no se cumple, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (3.1) puede ser trasladado al origen del espacio de estado.

Una ecuación diferencial puede tener más de un equilibrio, inclusive un número infinito de ellos. Sin embargo, también puede ocurrir que una ecuación no posea equilibrio alguno.

Definición 2. Estabilidad

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la ecuación (3.1) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

En la definición anterior la constante $\delta (\leq \varepsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisfaga la condición de la definición, entonces cualquier $\alpha\delta$ con $\alpha \leq 1$ también la satisface.

Debe tenerse claro que la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$.

Definición 3. Estabilidad asintótica

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable de (3.1) si:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta' \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Definición 4. Estabilidad asintótica global

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de la ecuación (3.1) si:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo globalmente, es decir,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso.

Definición 5. Estabilidad exponencial global

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global de (3.1) si existen constantes positivas α y β tales que:

$$\|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, un equilibrio exponencialmente estable en forma global es también un equilibrio asintóticamente estable en forma global. Lo contrario, sin embargo, no es necesariamente verdadero.

Definición 6. Inestabilidad

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio inestable de la ecuación (3.1) si éste no es estable.

El concepto de equilibrio (origen) inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

si existe al menos un $\varepsilon > 0$, el cual se desea que acote la norma de la solución $\|x(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $x(0) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ cuya solución $x(t)$ lo satisfaga ($\|x(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable.

Definición 7. Función definida positiva localmente y función definida positiva

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función definida positiva localmente si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ pero con $\|x\|$ pequeña.

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función definida positiva si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

De acuerdo con la definición anterior se observa que una función definida positiva es también una función definida positiva localmente.

Si $W(x)$ es una función definida positiva, entonces a $-W(x)$ se le llamará función definida negativa.

Definición 8. Función radialmente desacotada y función menguante

Una función continua $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función radialmente desacotada si:

- $W(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función menguante (globalmente), si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$V(t, x) \leq W(x) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Naturalmente, si $V(t, x)$ es una función definida positiva independiente de t , es decir, $V(t, x) = V(x)$, entonces $V(x)$ es trivialmente una función menguante.

También se dirá que $V(t, x)$ es radialmente desacotada si $W(x)$ lo es.

Definición 9. Función candidata de Lyapunov

Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ si:

- $V(t, x)$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y x .
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a t y x .

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de $\dot{x} = f(t, x)$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable, es decir, con derivadas parciales continuas.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel clave en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales.

Definición 10. Derivada de una función candidata de Lyapunov

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (3.1). La derivada de $V(t, x)$ a lo largo de las trayectorias de (3.1), denotada por $\dot{V}(t, x)$ estará dada por:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt}V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x).$$

Cabe resaltar de la definición anterior, que si $V(x)$ no depende explícitamente del tiempo, y la ecuación (3.1) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

la cual tampoco depende del tiempo.

Definición 11. Función de Lyapunov

Una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ para la ecuación (3.1) es una función de Lyapunov para (3.1) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (3.1) satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

al menos para $\|x\|$ pequeña.

3.1.1. Método directo de Lyapunov

Ahora se presentan los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 12. Estabilidad

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (3.1), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

al menos para $\|x\|$ pequeña.

El teorema anterior da condiciones suficientes para estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. La conclusión del teorema se mantiene obviamente si $\dot{V}(t, x) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ es una función definida positiva (globalmente) en lugar de ser definida positiva localmente.

Teorema 13. Estabilidad y acotamiento de las soluciones

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio estable, y las soluciones $x(t)$ están acotadas para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, si existe una función candidata de Lyapunov que sea definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, $V(t, x)$, tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. En vista de que $V(t, x)$ es una función candidata de Lyapunov y satisface $\dot{V}(t, x) \leq 0$, del Teorema 1 se concluye estabilidad del origen. \square

Por otro lado, como $V(t, x)$ es una función definida positiva y $\dot{V}(t, x) \leq 0$ entonces:

$$0 \leq V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) \quad \forall t \geq 0$$

es decir, $V(t, x)$ es una función acotada para todo $t \geq 0$. Usando adicionalmente el hecho de que $V(t, x)$ sea una función radialmente desacotada, se concluye que x está acotada.

Teorema 14. Estabilidad asintótica global

El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (3.1), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, y menguante, tal que su derivada satisfaga:

- $\dot{V}(t, x) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, x) < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$

La condición impuesta por el teorema anterior sobre $\dot{V}(t, x)$ equivale a requerir que $\dot{V}(t, x)$ sea una función definida negativa (globalmente).

En el caso de que la ecuación (3.1) sea autónoma, la función candidata de Lyapunov no suele depender explícitamente del tiempo, por lo que es trivialmente menguante, de modo que para que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global es suficiente que la función candidata de Lyapunov $V(x)$ sea definida positiva (globalmente), y radialmente desacotada, a la vez que su derivada $\dot{V}(x)$ sea una función definida negativa (globalmente).

3.2. Teoría básica de Floquet

La teoría de Floquet se deriva de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias referente a las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos, sistemas con excitaciones que aparecen como coeficientes en las ecuaciones gobernantes, tales excitaciones son llamadas excitaciones paramétricas [99]. La ecuación más simple que puede describir las excitaciones paramétricas de un sistema de un solo grado de libertad es la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + (\delta^* + \epsilon^* \cos \omega^* t^*) u^* = 0 \tag{3.2}$$

Se introducen cantidades adimensionales, como es

$$u = \frac{u^*}{u_0^*} \quad t = \frac{1}{2}\omega^* t^*$$

donde u_0^* es un valor representativo de u^* . Entonces la ecuación (3.2) queda en la forma estandar

$$\ddot{u} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t) u = 0 \quad (3.3)$$

donde

$$\delta = \frac{4\delta^*}{\omega^{*2}} \quad \epsilon = \frac{4\epsilon^*}{\omega^{*2}}$$

Dado que la ecuación (3.3) es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, posee dos soluciones linealmente independientes $u_1(t)$ y $u_2(t)$ que satisfacen las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1 & \dot{u}_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 0 & \dot{u}_2(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

porque el determinante de la matriz Wronskiana es diferente de cero. Si $u_1(t)$ es una solución de (3.3), entonces $u_1(t + \pi)$ es también una solución de (3.3). Para este propósito, cambiamos la variable independiente de t a $z = t + \pi$. Entonces, la ecuación (3.3) se convierte en

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [\delta + 2\epsilon \cos(2z - 2\pi)] u = 0$$

o

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [\delta + 2\epsilon \cos(2z)] u = 0 \quad (3.5)$$

dado que $\cos(2z - 2\pi) = \cos(2z)$. Pero (3.5) tiene la misma forma que (3.3); por lo tanto, si $u_1(t)$ es una solución de (3.3), entonces $u_1(z) = u_1(t + \pi)$ es también una solución de (3.5), es decir, de (3.3).

De lo anterior, se deduce que, si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones cualquiera de (3.3), entonces $u_1(t + \pi)$ y $u_2(t + \pi)$ son soluciones de (3.3). Además, si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son linealmente independientes, entonces $u_1(t + \pi)$ debe ser linealmente dependiente en $u_1(t)$ y $u_2(t)$, porque una ecuación de segundo orden solo tiene dos soluciones linealmente independientes. Por consiguiente, existen dos constantes a_{11} y a_{12} ; ambas no se desvanecen simultáneamente, tal que

$$u_1(t + \pi) = a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) \quad (3.6)$$

de manera similar, existen dos constantes a_{21} y a_{22} ; que no se desvanecen simultáneamente, tal que

$$u_2(t + \pi) = a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t) \quad (3.7)$$

porque $u_2(t + \pi)$ debe ser linealmente dependiente en $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Para las condiciones iniciales (3.4), se obtiene de (3.6) y (3.7) que

$$a_{11} = u_1(\pi) \quad a_{21} = u_2(\pi) \quad (3.8)$$

diferenciando (3.6) y (3.7) con respecto a t resulta

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t + \pi) &= a_{11}\dot{u}_1(t) + a_{12}\dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_2(t + \pi) &= a_{21}\dot{u}_1(t) + a_{22}\dot{u}_2(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

al sustituir (3.4) en (3.9), obtenemos

$$a_{12} = \dot{u}_1(\pi) \quad a_{22} = \dot{u}_2(\pi) \quad (3.10)$$

así, una vez que se conocen $u_1(t)$ y $u_2(t)$, los coeficientes a_{ij} en (3.6) y (3.7) pueden ser únicamente determinados como en (3.8) y (3.10).

Retomamos (3.6) y (3.7) y se escriben en notación matricial como

$$u(t + \pi) = Au(t) \quad (3.11)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

luego se investiga el efecto de transformar linealmente $u(t)$ a $v(t)$. Así, sea

$$v(t) = Pu(t) \quad (3.13)$$

donde P es una matriz constante de 2×2 no singular. En notación escalar, (3.13) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \nu_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 \\ \nu_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se deduce de (3.13) que

$$u(t) = P^{-1}v(t) \quad (3.15)$$

donde P^{-1} es el inverso de P ; es decir,

$$PP^{-1} = I \quad (3.16)$$

donde I es la matriz identidad $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Al sustituir (3.15) en (3.11) se obtiene

$$P^{-1}v(t + \pi) = AP^{-1}v(t) \quad (3.17)$$

al multiplicar (3.17) por la izquierda por la matriz P y usando (3.16), se obtiene

$$v(t + \pi) = PAP^{-1}v(t) \quad (3.18)$$

o

$$v(t + \pi) = Bv(t) \quad (3.19)$$

donde

$$B = PAP^{-1} \quad (3.20)$$

las matrices A y B son llamadas “matrices similares” porque poseen los mismo valores propios. Para demostrarlo, observamos que

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |PAP^{-1} - \lambda PP^{-1}| = |P(A - \lambda I)P^{-1}| \\ &= |P||A - \lambda I||P^{-1}| = |A - \lambda I| \end{aligned} \quad (3.21)$$

porque $|P||P^{-1}| = 1$.

Los valores propios de A y de B estan dados por

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

o

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

por lo tanto,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.22)$$

pero

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = u_1(\pi)\dot{u}_2(\pi) - u_2(\pi)\dot{u}_1(\pi) = 1$$

de acuerdo a (3.8) y (3.10) y el hecho de que el Wronskiano es la unidad. Entonces, (3.22) se convierte en

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0 \quad (3.23)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}[u_1(\pi) + \dot{u}_2(\pi)]$$

las soluciones de (3.23) son

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (3.24)$$

si $\alpha \neq 1$, (3.24) produce los dos valores propios distintos

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad \lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (3.25)$$

y B tiene la forma diagonal

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

si $\alpha = \pm 1$, (3.24) produce solo un valor propio, esto es $\lambda = \alpha = \pm 1$, y B tiene ya sea la forma

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

o la forma

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 1 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

cuando B tiene ya sea la forma (3.26) o (3.27), (3.19) puede reescribirse en forma escalar como

$$\begin{aligned} \nu_1(t + \pi) &= \lambda_1 \nu_1(t) \\ \nu_2(t + \pi) &= \lambda_2 \nu_2(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ cuando B tiene la forma (3.27). Se deduce de (3.29) que

$$\begin{aligned}
\nu_1(t + 2\pi) &= \lambda_1 \nu_1(t + \pi) = \lambda_1^2 \nu_1(t) \\
\nu_1(t + 3\pi) &= \lambda_1 \nu_1(t + 2\pi) = \lambda_1^3 \nu_1(t) \\
\nu_1(t + 4\pi) &= \lambda_1 \nu_1(t + 3\pi) = \lambda_1^4 \nu_1(t) \\
\nu_1(t + n\pi) &= \lambda_1^n \nu_1(t)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde n es un entero. De manera similar,

$$\nu_2(t + n\pi) = \lambda_2^n \nu_2(t) \tag{3.31}$$

consecuentemente, conforme $t \rightarrow \infty$ (i.e., $n \rightarrow \infty$)

$$\nu_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{if } |\lambda_i| < 1 \\ \infty & \text{if } |\lambda_i| > 1 \end{cases} \tag{3.32}$$

y la solución se vuelve ilimitada con el tiempo si el valor absoluto de cualquier λ_i es mayor a la unidad. Cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, (3.29) muestra que ν_1 es periódica con periodo π . Cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

$$\begin{aligned}
\nu_i(t + \pi) &= -\nu_i(t) \\
\nu_i(t + 2\pi) &= -\nu_i(t + \pi) = \nu_i(t)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

de modo que ν_i es periódica con periodo 2π . Así, los casos $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, separan la solución estable y la inestable y son generalmente llamadas “valores de transición”.

Las ecuaciones (3.29) pueden ser usadas para expresar las $\nu_i(t)$ en la llamada forma normal o forma de Floquet.

Teorema 15. Teorema de Floquet

Sea

$$\dot{x}P(t)x$$

donde

$$P(t) = P(t + T)$$

por lo tanto, P es periódica con periodo T . Entonces

$$x(t + T) = \mu x(t)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y es una constante por determinar llamada multiplicador de Floquet.

Cuando $t = 0$,

$$x(T) = \mu x(0)$$

cuando $t = T$,

$$x(2T) = \mu x(T) = \mu^2 x(0)$$

cuando $t = 2T$,

$$x(3T) = \mu^3 x(0).$$

El valor del multiplicador de Floquet determina si la solución es incremental o decremental. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental

$$\dot{\Phi}(t) = P(t)\Phi(t)$$

cumple con

$$\dot{\Phi}(t+T) = P(t+T)\Phi(t+T)$$

entonces $\Phi(t+T)$ también es una solución del sistema, y

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)x_0$$

es una combinación lineal. Existen constantes tales que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)E$$

donde E es una matriz de constantes, formada por las combinaciones lineales que producen $\Phi(t+T)$.

Si $t = 0$

$$\Phi(T) = \Phi(0)E$$

por lo tanto,

$$E = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$$

es la matriz de monodromía del sistema.

$$\det \Phi(t+T) = \det \Phi(t) \cdot \det E$$

por consiguiente $\det E \neq 0$.

Sean μ_i los valores propios de E , es decir se obtienen de la expresión

$$\det(\mu_i I - E) = 0$$

y sea S su vector propio

$$E \cdot S = \mu \cdot S$$

entonces $E \doteq \Phi(T)$.

Una solución del sistema es

$$x(t) = \Phi(t)S$$

donde S es constante. En el periodo $t + T$

$$x(t + T) = \Phi(t + T)S = \Phi(t)E \cdot S = \mu\Phi(t)S \Rightarrow x(t + T) = \mu x(t)$$

3.2.1. Versión alternativa del teorema de Floquet

Dada

$$\dot{x}(t) = P(t)x$$

donde $P(t + T) = P(t)$ es una matriz periodica no singular.

Entonces,

$$x(t) = F(t)e^{Rt}$$

donde $F(t + T) = F(t)$, y $e^{Rt} = E = \Phi(T)$.

Los exponentes de Floquet estan dados por R_i

$$R_i = \frac{1}{T} \ln \mu_i$$

Si $\mu = 1$ entonces $R = 0$ y $x(t) = x(t + T)$.

Si $0 < \mu < 1$ entonces $R < 0$ y $x(t) \rightarrow 0$.

3.3. Teoría de Floquet-Lyapunov

La teoría de Floquet parte de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias para la clase de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde $A(t)$ es una función periódica continua en partes con periodo T y que define el estado de la estabilidad de las soluciones.

Se definen dos conjuntos de matrices [107]:

- A_{T_A} es el conjunto real, continuo a trozos, principalmente periódico de matrices $A(\cdot)$ de dimensión $n \times n$.
- $\mathcal{L}_{T_A}^K$ es el conjunto de matrices $L(\cdot)$ de dimensión $n \times n$ de $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, donde las $L(t)$ son periódicas, no singulares para todo t , continuas con derivada continua a trozos, y tal que $L(0) = 1$.

Si $A(\cdot) \in A_{T_A}$, entonces la matriz de transición de estado $\Phi(\cdot, 0)$ del sistema

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.34)$$

satisface

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(t + T_A, 0) = \Phi(t, 0)\Phi(T_A, 0) \quad (3.35)$$

De manera inversa, sea $X(\cdot)$, tal que $X(0) = 1$, sea una función matriz del tiempo, continua, $n \times n$, no singular con una derivada continua a trozos. Si T_A es el menor número para el cual $X(\cdot)$ satisfaga la ecuación (3.35), entonces $X(\cdot)$ es la matriz de transición de estado de algún sistema de la forma (3.34) donde $A(\cdot)$ es una función periódica del tiempo cuyo principal periodo es T_A .

Nota 1: La matriz de transición de estado $\Phi(\cdot, 0)$, de un sistema lineal periódico en el tiempo, es usualmente no periódica, pero es evidente que

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Phi(t + kT_A, u + T_A) = \Phi(t, u).$$

Nota 2: Por transitividad, la ecuación (3.35) puede ser generalizada a

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(t + kT_A, 0) = \Phi(t, 0)\Phi^k(T_A, 0). \quad (3.36)$$

Teorema 16. Representación de Floquet

La matriz de transición de estado $\Phi(\cdot, 0)$ de la ecuación (3.34) se puede factorizar como

$$\Phi(t, 0) \triangleq L(t) \exp(tF) \quad (3.37)$$

donde $L(\cdot) \in \mathcal{L}_{T_A}^{\mathbb{C}}$ y $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$. De forma inversa, dada $L(\cdot) \in \mathcal{L}_{T_A}^{\mathbb{C}}$ y una $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ arbitraria, la matriz $\Phi(\cdot, 0)$ definida por (3.37) es la matriz de transición de estado de algún sistema (3.34) con $A(\cdot) \in A_{T_A}$.

En este punto es importante destacar que la matriz de transición de estado de una matriz real $A(\cdot)$ generalmente tendrá factores complejos de Floquet $L(\cdot)$ y F .

Corolario 17. Factores reales de Floquet

Si $A(\cdot) \in A_{T_A}$, entonces siempre es posible obtener un par de factores reales de Floquet considerando $A(\cdot) \in A_{T_R}$, donde $T_R = 2T_A$.

Nota 3: Como aplicamos ahora el teorema 2 con $A(\cdot) \in A_{T_R}$, $L(t, 0)$ solo puede suponerse que es T_R periodico

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad L_{2T_A}(t + 2T_A) = L_{2T_A}(t), \quad L(0) = 1.$$

En otras palabras, el sistema real T_A periodico de (3.34) siempre admite al menos un par de factores reales de Floquet $\{L_{2T_A}(\cdot), F\} \in \mathcal{L}_{2T_A}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{n \times n}$.

Teorema 18. Reducibilidad de Lyapunov

Sean $L(\cdot)$ y F los mismo factores de Floquet del Teorema 2. La sustitución

$$x(t) = L(t)z(t) \tag{3.38}$$

transforma el sistema lineal periodico en el tiempo (3.34) en el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{z}(t) = Fz(t) \tag{3.39}$$

Nota 4: En el caso de un sistema lineal periodico en el tiempo general, no homogéneo como el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \tag{3.40}$$

el cambio de variable definido en (3.38) transformará las ecuaciones del sistema como se muestra:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + L^{-1}B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)L(t)z(t). \end{aligned}$$

3.3.1. Análisis de estabilidad
Definición 19. Matriz de monodromía

El valor de la matriz de transición de estado del sistema homogéneo (3.34) después de un periodo, $\Phi(T_A, 0)$, se conoce como la *matriz de monodromía*. Los valores propios de la matriz de monodromía son llamados los *multiplicadores de Floquet* (también conocidos como multiplicadores de Poincaré, multiplicadores característicos, o raíces características) del sistema.

Los valores propios de F en el Teorema 2, son llamados los *exponentes de Floquet* (también conocidos como exponentes de Poincaré o exponentes característicos) del sistema.

Teorema 20. *Exponentes de Floquet*

Los multiplicadores de Floquet de un sistema lineal periódico en el tiempo son únicos, mientras que sus exponentes de Floquet no lo son. Además, un sistema lineal periódico en el tiempo es asintóticamente estable si y solo si todos sus multiplicadores de Floquet están dentro del círculo unitario; esto es equivalente a que sus exponentes de Floquet tengan parte real negativa.

3.3.1.1. Naturaleza dual de los sistemas lineales periódicos en el tiempo

Los resultados de las secciones anteriores ilustran la naturaleza dual de los sistemas lineales periódicos en el tiempo: pueden ser interpretados ya sea desde el punto de vista discreto o desde el punto de vista continuo en el tiempo:

- En el tiempo $t = kT_A$, la ecuación (3.36) se convierte en

$$\Phi(kT_A, 0) = \Phi^k(T_A, 0)$$

y cualquier solución de (3.34) satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} x(k+1)T_A &= \Phi^{k+1}(T_A, 0)x(0) \\ &= \Phi(T_A, 0)\Phi^k(T_A, 0)x(0) \\ &= \Phi(T_A, 0)x(kT_A) \end{aligned}$$

debido a esta correspondencia con un sistema discreto invariante en el tiempo, $\Phi(T_A, 0)$ es a veces llamada la *matriz de transición discreta*. El sistema es entonces descrito en el plano z y el criterio de estabilidad de los multiplicadores de Floquet estando dentro del círculo unitario corresponde a sistemas LTI (lineales invariantes en el tiempo, por sus siglas en inglés) discretos.

- De manera análoga, el sistema transformado de (3.39) provee una descripción del sistema en el plano s y el criterio de estabilidad (exponentes con parte real negativa) es similar a la teoría de sistemas LTI continuos.

3.3.1.2. Controlabilidad

La noción clásica de controlabilidad de Kalman se ha ido perfeccionando a los largo de los años específicamente en el marco de sistemas lineales periódicos en el tiempo.

Definición 21. Gramiano de controlabilidad

El Gramiano de controlabilidad $W_C(t_2, t_1)$ y el *Gramiano de alcanzabilidad* $W_R(t_2, t_1)$ en el intervalo $[t_2, t_1]$ son

$$W_C(t_2, t_1) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau$$

y

$$W_R(t_2, t_1) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_2, \tau) d\tau$$

En los resultados posteriores, $W(t_2, t_1)$ se considera de forma indistinta para $W_C(t_2, t_1)$ o $W_R(t_2, t_1)$.

Teorema 22. *Sistema definido positivo y controlable*

Considerando el sistema (3.40) de orden n , su correspondiente matriz de monodromía $\Phi(T_A, 0)$, y su Gramiano $W(T_A, 0)$ en $t = T_A$. Además, sea ν el índice de controlabilidad del par $\{\Phi(T_A, 0), W(T_A, 0)\}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- El sistema (3.40) es controlable.
- El par $\{\Phi(T_A, 0), W(T_A, 0)\}$ es controlable.
- El sistema (3.40) es controlable sobre $(0, \nu T_A)$.
- $W(\nu T_A, 0)$ es definido positivo.

Teorema 23. *De los valores propios de la matriz de monodromía*

Un sistema lineal periódico en el tiempo es controlable si y solo si existe una matriz $K(\cdot)$ T_A -periódica de dimensión $r \times n$, que pueda asignar los valores propios de la matriz de monodromía de forma tal que aparezcan como pares complejos conjugados, y su producto sea positivo.

Nota 5: Resaltando la dualidad entre controlabilidad y observabilidad, establecida por Chen [25], en el Teorema 6 todos los resultados se mantienen si se reemplaza la palabra “controlable” por “observable”, y si $W(t_2, t_1)$ se reemplaza por el Gramiano de observabilidad

$$W_O(t_2, t_1) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} \Phi^T(t, t_1) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(t, t_1) dt$$

3.3.1.3. Factores reales de Floquet

Como se mencionó previamente, la matriz de transición de estado de un sistema lineal periódico en el tiempo es única, pero sus factores de Floquet no lo son. Se señaló que el periodo de $L(\cdot)$ solo puede ser asumido como $2T_A$. Esto conlleva a una pérdida de información en su periodicidad primaria, lo establecido en el Corolario 1 resulta útil para probar la existencia de factorizaciones reales, pero falla en proveer toda la información relativa a la periodicidad de los factores de Floquet. Para mantener la coherencia con los factores complejos de Floquet y otras propiedades generales de los sistemas lineales periódicos en el tiempo, un nuevo resultado debería estar basado en $\Phi(T_A, 0)$, antes que en $\Phi(2T_A, 0)$. Tal resultado debe ser capaz de indicar *a priori* la periodicidad de $L(\cdot)$. Por otro lado, observamos que a una $L_{F_1}(\cdot)$ $2T_A$ -periódica le corresponde un sistema T_A -periódico, donde solo se esperaría una $A(\cdot)$ $2T_A$ -periódica.

Los métodos existentes para obtener los factores de Floquet son indirectos, en el sentido de que consisten en dos etapas: el cálculo inicial de la matriz de transición de estado seguida por la derivación de sus factores de Floquet.

3.3.1.4. Método de dos etapas

Con la matriz de transición de estado conocida, se puede obtener una matriz constante F , $L(\cdot)$ se obtiene de

$$L(t) \triangleq \Phi(t, 0) \exp(-tF)$$

$\Phi(\cdot, 0)$ se conoce en forma cerrada únicamente en casos específicos, por ejemplo, cuando el producto de A de (3.34) y $\exp\left[\int_0^t A(\tau) d\tau\right]$ conmutan, la matriz de transición de estado toma una forma simbólica simple. De forma general, la matriz de transición de estado debe ser calculada numéricamente. El conocimiento de $\Phi(\cdot, 0)$ solo se requiere sobre el intervalo $(0, T_A)$, ya que otros valores pueden obtenerse de (3.36).

Una técnica popular consiste en la integración numérica directa de (3.34) para n condiciones iniciales diferentes

$$x_k(0) = e_k \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

donde $e_k = [\delta_{ki}]$ es la k -ésima columna de 1. Sea $x_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ las n soluciones independientes obtenidas para cada condición inicial. Entonces, la matriz de transición de estado es

$$\Phi(t, 0) \triangleq [x_1(t) | x_2(t) | \dots | x_n(t)]$$

una alternativa a los esquemas de integración numérica directa consiste en calcular la expansión de la matriz de transición de estado en un base espectral $\sigma(\cdot)$ de orden m

$$\sigma(\cdot) = \left[\sigma_0(\cdot) \quad \sigma_1(\cdot) \quad \dots \quad \sigma_{m-1}(\cdot) \right]^T$$

la cual podría ser una base de Fourier o una base polinomial. La expansión C_Φ de la matriz de transición de estado es obtenida del sistema lineal

$$MC_\Phi = N$$

donde M y N son matrices constantes conocidas basadas en la expansión espectral de $A(\cdot)$.

3.3.1.5. Derivación directa

El método anterior esta basado en una formulación del problema del valor inicial (IVP, por sus siglas en inglés). No existe una garantía de que las soluciones $x_i(t)$ permanecerán independientes

después de la integración numérica. Por otro lado, es bien sabido que la solución a un problema del valor en la frontera (BVP, por las siglas en inglés de *Boundary-Value Problem*) puede ser mejor condición que la solución de un IVP.

3.3.1.6. Formulación del problema del valor en la frontera (BVP)

Puede observarse que $L(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial matricial de primer orden

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \dot{L}(t) = A(t)L(t) - L(t)F \quad (3.41)$$

sin embargo, se pueden agregar dos condiciones de frontera:

$$L(0) = L(2T_A) = 1. \quad (3.42)$$

El sistema en su estado actual posee dos veces más condiciones de frontera que las ecuaciones diferenciales. No obstante, notando que F es constante, podemos agregar la ecuación

$$\dot{F} = 0,$$

con 0 denotando la matriz cero $n \times n$, entonces el problema está bien definido.

Nota 6: Debido a que (3.41) es no lineal, una solución numérica requiere una estimación inicial. Tal estimación inicial se puede producir con un algoritmo similar a un *hold* de orden cero, donde el periodo es discretizado en una secuencia de intervalos y el sistema inicial lineal periódico en el tiempo es aproximado por un sistema lineal invariante en el tiempo en cada intervalo.

Nota 7: Una condición de frontera en $t = T_A$ antes que $t = 2T_A$ puede ser derivada usando una matriz Y de Yakubovich, una matriz real tal que $Y^2 = 1$, $FY = YF$; la ecuación (3.42) se convierte en

$$L(0) = 1, \quad L(T_A) = Y^{-1}$$

independientemente de su periodicidad, los valores de $L(\cdot)$ fuera de $(0, T_A)$ se obtienen mediante $\forall (t, k) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^{+*}$

$$L(t + kT_A) = L(t) \exp(tF) \Phi^{k-1}(T_A, 0) \times L(T_A) \exp[-((k-1)T_A + t)F]$$

La matriz $L^{-1}(\cdot)$ juega un papel importante en las aplicaciones de la teoría. Invertir $L(\cdot)$ en cada valor deseado puede ser costoso desde el punto de vista computacional y puede dar lugar a errores. Un mejor enfoque consiste en considerar una formulación de BVP para $L^{-1}(\cdot)$ que refleja (3.42). Utilizando la expresión de $L(\cdot)$ dada en (3.41) y la fórmula para la derivada de la inversa de una matriz, se puede definir un nuevo BVP: $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{d}{dt} [L^{-1}(t)] = -L^{-1}(t) A(t) + FL^{-1}(t) \quad (3.43)$$

$$\dot{F} = 0 \quad (3.44)$$

$$L^{-1}(0) = 1, \quad L^{-1}(T_A) = Y \quad (3.45)$$

3.4. Matriz de monodromía

Dado un sistema representado en espacio de estados por la ecuación

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.46)$$

puede considerarse como matriz de monodromía a la matriz de transición durante un periodo:

$$\text{Matriz de transición } \Phi_A(t, \tau) = \begin{cases} I & t = \tau \\ A(t)A(t-1)\cdots A(\tau) & t > \tau \end{cases} \quad (3.47)$$

Matriz de monodromía $\Psi_A(t) = \Phi_A(t+T, t)$.

Los valores propios de la matriz de monodromía en el tiempo t son llamados multiplicadores característicos en t [16].

La matriz de transición gobierna el comportamiento de la solución de $\dot{x} = A(t)x(t)$

$$x(t) = \Phi_A(t, \tau)x(\tau), \quad t \geq \tau,$$

y es biperiódica, es decir

$$\Phi_A(t+T, \tau+T) = \Phi_A(t, \tau), \quad \forall t \geq \tau.$$

La matriz de monodromía $\Psi_A(t)$ es periódica

$$\Psi_A(t+T) = \Psi_A(t),$$

y brinda la solución de $\dot{x} = A(t)x(t)$

$$x(t+kT) = \Psi_A(t)^k x(t), \quad t \in [0, T-1], \quad (3.48)$$

donde k es un entero positivo.

Capítulo 4

Análisis del oscilador de Reid con teoría de Floquet

En este capítulo se aborda el desarrollo del análisis del sistema lineal compuesto por una masa y un resorte, que conforman un sistema de 1 GDL sometido a una ley heurística de control por conmutación de la rigidez del sistema. Dicha ley de control es representada matemáticamente por la función signo de la posición multiplicada por la velocidad del sistema.

El primer paso del desarrollo consistió en obtener la solución numérica del sistema utilizando para su representación el modelo matemático del oscilador de Reid no lineal, cuya gráfica mostró que la ley de control por conmutación de rigidez presentaba un comportamiento periódico en el tiempo, tal descubrimiento permitió realizar el análisis empleando la teoría de sistemas periódicos. A partir de la gráfica y el plano de fase de la solución numérica se llevó a cabo un análisis en los instantes de conmutación de los estados, es decir, en aquellos instantes de tiempo en los que los estados atraviesan los ejes del plano de fase; dicho análisis se llevó a cabo tanto para el caso del problema posición inicial como para el caso del problema de velocidad inicial. En ambos casos del análisis se obtuvieron los periodos de tiempo entre cada instante y se observó que en el último instante de conmutación, es decir, el instante donde el estado regresa al eje de la condición inicial, resultaron iguales tanto para posición como para velocidad inicial.

Lo anterior permitió obtener la matriz de monodromía del sistema en el último instante de conmutación, ya que debido a la propiedad de periodicidad de la solución, no se requirió conocer la solución para obtener dicha matriz.

A partir de la matriz de monodromía se hallaron los exponentes de Floquet, que se utilizaron para establecer un problema de optimización en términos de los parámetros del sistema.

En las secciones siguientes se describe a detalle el procedimiento que se siguió y los resultados obtenidos y la validación que tuvieron.

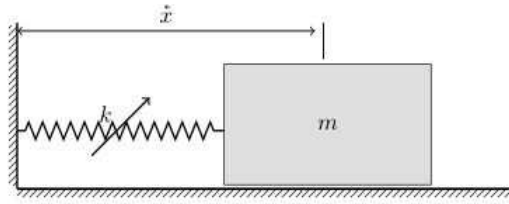


Figura 4.1: Sistema masa-resorte

4.1. El oscilador de Reid

Considere el sistema masa-resorte mostrado en la figura 4.1, cuyo modelo matemático es descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$m \ddot{x}^*(\tau) + k x^*(\tau) = 0 \quad x^*(0) = x_0, \quad \dot{x}^*(0) = \dot{x}_0 \quad (4.1)$$

donde m es una masa que se desliza sin fricción sobre la superficie, x es el desplazamiento (posición) de la masa, k es la rigidez del resorte, la comilla denota diferenciación respecto al tiempo τ y las condiciones iniciales son diferentes a cero.

El resorte k se comporta como un dispositivo de rigidez variable $k(t)$ cuya respuesta ante la ley de control empírica definida por la siguiente regla:

$$k = \begin{cases} k_M & \dot{x} \dot{x} \geq 0 \\ k_m & \dot{x} \dot{x} \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

donde $k_M > k_m$, es decir, el dispositivo de rigidez variable presenta su máximo valor k_M cuando $\dot{x} \dot{x} \geq 0$ y su valor mínimo k_m cuando $\dot{x} \dot{x} \leq 0$. Cabe destacar que cuando el dispositivo de rigidez alcanza cualquiera de sus valores extremos de rigidez, éste se comporta como un resorte lineal. Por lo tanto, se trata de un dispositivo de rigidez que depende de los estados del sistema, y cuya función se define por la relación $k(\dot{x} \dot{x}) = \frac{1}{2}[k_M + k_m + (k_M - k_m) \text{sgn}(\dot{x} \dot{x})]$.

Para un análisis posterior en este escrito, el problema del valor inicial establecido en 4.1 se divide en dos conjuntos que agrupan las condiciones iniciales en su forma estandar, sean: las condiciones de velocidad inicial ($\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}^*(0) = \dot{x}_0$) y las condiciones de posición inicial ($\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{x}^*(0) = 0$).

Sea $\omega_0 = \sqrt{(k_M + k_m)/2m}$ la frecuencia natural promedio del sistema 4.1, además, para cada conjunto de condiciones iniciales se define $l = \frac{\dot{x}}{\omega_0}$ para las condiciones de velocidad inicial, y $l = \frac{x}{\omega_0}$ para las condiciones de posición inicial, entonces la escala de tiempo $t = \tau \omega_0$ y el cambio de variable $x = \frac{x}{l}$ reducen la 4.1 a la siguiente expresión:

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon \text{Sgn}(x \dot{x}))x = 0 \quad (4.3)$$

donde el parámetro ε es definido como $\varepsilon = (k_M - k_m) / (k_M + k_m)$ y los puntos sobre x denotan diferenciación respecto al tiempo t . Es importante resaltar que el valor de ε debe estar delimitado por $0 < \varepsilon < 1$. En el oscilador de Reid expresado como $\ddot{x} + \tilde{k}(t)x = 0$, el término $\tilde{k}(t) = 1 + \varepsilon Sgn(x\dot{x})$ se conoce como el resorte de Reid [27], [143].

La ecuación (4.1) en conjunto con las condiciones iniciales no dimensionalizadas, dadas anteriormente, definen dos conjuntos de problemas de valor inicial, llamados: problema de velocidad inicial

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \tag{4.4}$$

y el problema de posición inicial

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{4.5}$$

En el espacio de estados el sistema de la (4.3) se expresa como sigue

$$\dot{x} = f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{k}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

donde $x = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}$. Y la función $f(t, x)$ está delimitada y es continua a trozos en (t, x) y solo admite un número limitado de discontinuidades finitas, por lo tanto, (t, x) es Lipschitz. Además, para el oscilador de Reid la existencia y unicidad de las soluciones es garantizada [73].

4.2. Análisis de estabilidad

El oscilador de Reid (4.3), para el conjunto de condiciones iniciales (4.4)-(4.5), se resolvió utilizando el clásico método Runge-Kutta para un valor de $\varepsilon = 0.5$, las soluciones para velocidad y posición inicial se denotan como x_v y x_p , respectivamente, y la gráfica respecto al tiempo de las soluciones y el retrato de fase para cada una de ellas son mostrados en la figura 4.2.

Puede observarse que el origen es asintóticamente estable en ambos casos.

4.3. Oscilador periodico de Reid

La figura 4.2(a)-(c) muestra la gráfica de la solución del oscilador de Reid, donde el término de la gráfica $Sgn(x\dot{x})$ revela que la función de conmutación oscila periódicamente en el tiempo, por lo tanto, puede ser tratada como una función periódica en el tiempo $q(t) = q(t + T)$, donde T es el periodo fundamental. En este notable hecho se basa el presente enfoque.

Considerando las condiciones iniciales estandar definidas en (4.4)-(4.5) se puede hallar una expresión analítica para $q(t)$ al calcular los instantes T_i , durante los cuales cambia el término $Sgn(x\dot{x})$. El periodo T corresponde al instante de tiempo cuando la trayectoria de (4.3), en el retrato de fase

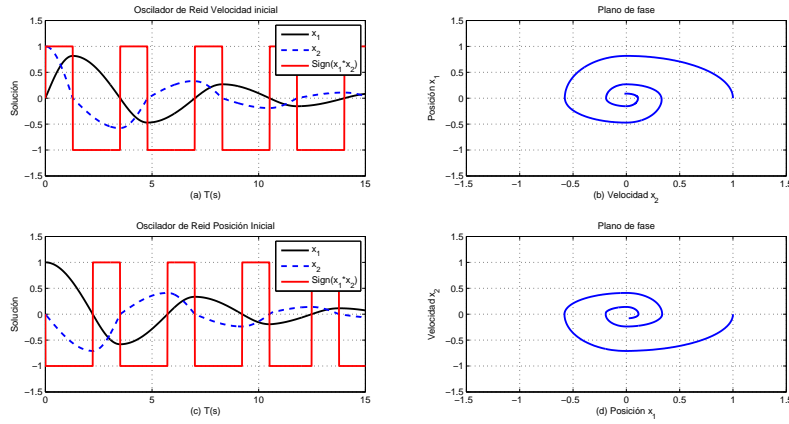


Figura 4.2: Solución numérica del Oscilador de Reid (4.3) para las condiciones iniciales de velocidad (4.4) y posición (4.5) cuando $\epsilon = 0.5$

$x - \dot{x}$, regresa al eje donde comenzó, ver figura 4.2(b) y figura 4.2(d), respectivamente. En la siguiente sección se realiza el cálculo de los instantes de tiempo.

4.3.1. Instantes de conmutación

En el plano de fase $x - \dot{x}$, durante el movimiento de la trayectoria en cada cuadrante el valor del término $Sgn(x\dot{x})$ está bien definido, así, la ecuación (4.3) se vuelve integrable, esto nos permite determinar una solución analítica de (4.3) en cada cuadrante (cabe resaltar que $Sgn(0) = 0$). Los instantes de conmutación T_i dependen del signo que adopte el término $Sgn(x\dot{x})$, y se pueden hallar considerando como condiciones de frontera los puntos donde la trayectoria cruza los ejes del plano de fase, así los instantes de conmutación se determinan evaluando la solución analítica en las fronteras como sigue.

4.3.1.1. Problema de posición inicial

Para el problema de posición inicial (4.5), el comportamiento de la función $Sgn(x\dot{x})$ de la ec. (4.3) puede ser analizado en cada cuadrante (de acuerdo a la convención de enumerar los cuadrantes en orden ascendente en sentido antihorario) del plano de fase $x - \dot{x}$, cuyos instantes de conmutación, T_i , están indicados en la figura 4.2(b).

La solución de la ec. (4.3) se analiza en cada cuadrante como se muestra a continuación:

- Cuadrante IV: en este cuadrante $x > 0$ y $\dot{x} < 0$, por lo tanto $Sgn(x\dot{x}) < 0$, entonces (4.3) se reduce a:

$$\ddot{x} + (1 - \epsilon)x = 0, \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$$

donde la solución $(x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi))$, $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}}$, $\phi = \arctan(\omega_n x_0 / \dot{x}_0)$, consultar ([72])) y la primera derivada están dadas por:

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\sqrt{1-\varepsilon} \sin(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

el primer instante de conmutación T_1 puede hallarse al aplicar las condiciones de frontera $x_1(t_1) = 0$ y $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t_1)$. Entonces $x_1(t) = \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t) = 0 \Rightarrow T_1 \doteq t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$ y las nuevas condiciones de frontera resultan como: $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t_1) = -\sqrt{1-\varepsilon}$.

- Cuadrante III: en este cuadrante la trayectoria obedece $x < 0$ y $\dot{x} < 0$, por lo tanto $Sgn(x\dot{x}) > 0$ y el sistema (4.3) resulta:

$$\ddot{x} + (1+\varepsilon)x = 0, \quad x_1(t_1) = 0 \quad \dot{x}_1(t_1) = -\sqrt{1-\varepsilon}$$

cuya solución es dada por:

$$x_2(t) = \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sin(\sqrt{1+\varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\sqrt{1-\varepsilon} \cos(\sqrt{1+\varepsilon}t)$$

aplicando las nuevas condiciones de frontera podemos hallar el segundo instante de conmutación T_2 , $x_2 = x_2(t_2)$ y $\dot{x}_2 = 0$. Por lo tanto $\dot{x}_2(t) = -\sqrt{1-\varepsilon} \cos(\sqrt{1+\varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$ pero $t_2 = T_2 - T_1$, así el instante de conmutación $T_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$ y el nuevo valor de frontera es $x_2 = x_2(t_2) = \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

- Cuadrante II: la trayectoria sigue $x < 0$ y $\dot{x} > 0$, entonces (4.3) se reduce a:

$$\ddot{x} + (1-\varepsilon)x = 0, \quad x_2(t_2) = \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \quad \dot{x}_2(t_2) = 0$$

y su solución resulta de la siguiente manera:

$$x_3(t) = \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sin(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

utilizando las condiciones de frontera el tercer instante de conmutación, T_3 , puede calcularse; si $x_3 = 0$ y $\dot{x}_3 = \dot{x}_3(t_3)$, entonces: $x_3(t) = \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$ y $t_3 = T_3 - T_2$ así el tercer instante de conmutación $T_3 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$ y la nueva condición de frontera resulta $\dot{x}_3 = \dot{x}_3(t_3) = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

- Cuadrante I: en este cuadrante $x > 0$ y $\dot{x} > 0$, por lo tanto la ec. (4.3) resulta:

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0, \quad x_3(t_3) = 0 \quad \dot{x}_3(t_3) = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$$

cuya solución esta dada por:

$$x_4(t) = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sin(\sqrt{1 + \varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{(1 - \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon}}{1 + \varepsilon} \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}t)$$

se aplican las condiciones de frontera para hallar el último instante de conmutación T_4 , $x_4 = x_4(t_4)$ y $\dot{x}_4 = 0$, entonces $\dot{x}_4(t) = \frac{(1 - \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon}}{1 + \varepsilon} \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_4 = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}$ y $t_4 = T_4 - T_3$, así el cuarto instante de conmutación resulta como $T_4 = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$ y el valor de frontera igual a $x_4 = x_4(t_4) = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$.

Del análisis anterior el término $Sgn(x\dot{x})$ puede escribirse como la función periodica $q_p(t) = q_p(t + T(\varepsilon))$ dada por:

$$q_p(T(\varepsilon)) = \begin{cases} -1 & t \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}}\right) \\ 1 & t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}}, \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}\right) \\ -1 & t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}\right) \\ 1 & t \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1 + \varepsilon}}\right) \end{cases} \quad (4.7)$$

donde el periodo esta dada por:

$$T(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \quad (4.8)$$

que depende del valor del parámetro ε , $0 < \varepsilon < 1$.

La matriz de transición evaluada en el periodo $T(\varepsilon)$, usando solo el último instante de conmutación T_4 para ambos casos (problema de posición y velocidad inicial) resulta:

$$\Phi(T(\varepsilon)) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{bmatrix}$$

4.3.1.2. Problema de velocidad inicial

Para el problema de velocidad inicial definido en (4.4) el término $Sgn(x\dot{x})$ tiene diferentes instantes de conmutación, ver figura 4.2(c), por lo tanto la correspondiente función periodica $q_v(t) = q_v(t + T(\varepsilon))$, la cual describe la periodicidad del término $Sgn(x\dot{x})$, no puede ser la misma que la del problema de posición inicial. Por tal razón, a continuación se desarrolla el mismo análisis para las condiciones iniciales de (4.4).

La solución de (4.3) se analiza en cada cuadrante, como sigue.

- Cuadrante I: en este cuadrante la trayectoria comienza su movimiento y satisface $x > 0$ y $\dot{x} > 0$, por lo tanto $Sgn(x\dot{x}) > 0$, entonces (4.3) se reduce a:

$$\ddot{x}_1 + (1 + \varepsilon)x_1 = 0, \quad x_0(0) = 0 \quad \dot{x}_0(0) = 1$$

donde la solución (ver ([72])) esta dada por:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \sin(\sqrt{1 + \varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}t)$$

aplicando las condiciones de frontera $x_1(t_1) = x_1^0$ y $\dot{x}_1(t_1) = 0$, el primer instante de conmutación se determina, es decir $\dot{x}_1(t) = \cos(\sqrt{1 + \varepsilon}t) = 0 \Rightarrow T_1 \doteq t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}$. La solución en la frontera resulta como: $x_1^0 = x_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$.

- Cuadrante II: la trayectoria obedece $x > 0$ y $\dot{x} < 0$, por lo tanto $Sgn(x\dot{x}) < 0$ y el sistema (4.3) resulta:

$$\ddot{x}_2 + (1 - \varepsilon)x_2 = 0, \quad x_1(t_1) = x_1^0 \quad \dot{x}_1(t_1) = 0$$

cuya solución $x_2(t)$ es dada por:

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon}t)$$

aplicando las nuevas condiciones de frontera se determina el segundo instante de conmutación T_2 , $x_2(t_2) = 0$ y $\dot{x}_2 = \dot{x}_2^0(t_2)$. Por lo tanto $x_2(t_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}}$ pero $t_2 = T_2 - T_1$, así el instante de conmutación $T_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}$ y el nuevo valor de frontera es $\dot{x}_2^0(t_2) = x_2(t_2) = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$.

- Cuadrante III: en este cuadrante $x < 0$ y $\dot{x} < 0 \Rightarrow Sgn(x\dot{x}) > 0$, entonces (4.3) se reduce a:

$$\ddot{x}_3 + (1 + \varepsilon)x_3 = 0, \quad x_2(t_2) = 0 \quad \dot{x}_2(t_2) = \dot{x}_2^0$$

y su solución resulta de la siguiente manera:

$$x_3(t) = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{1 + \varepsilon} \sin(\sqrt{1 + \varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos(\sqrt{1+\varepsilon}t)$$

utilizando las condiciones de frontera el tercer instante de conmutación, T_3 , puede calcularse; si $x_3(t_3) = x_3^0(t_3)$ y $\dot{x}_3(t_3) = 0$, entonces: $\dot{x}_3(t_3) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cos(\sqrt{1+\varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$ y $t_3 = T_3 - T_2$ así el tercer instante de conmutación $T_3 = \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$, y la nueva condición de frontera resulta $x_3^0(t_3) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon}$.

- Cuadrante IV: en este cuadrante $x < 0$ y $\dot{x} > 0 \Rightarrow Sgn(x\dot{x}) < 0$, por lo tanto la ec. (4.3) se reduce a:

$$\ddot{x}_4 + (1-\varepsilon)x_4 = 0, \quad x_3^0(t_3) = x_3^0 \dot{x}_3(t_3) = 0$$

cuya solución esta dada por:

$$x_4(t) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon} \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \sin(\sqrt{1-\varepsilon}t)$$

se aplican las condiciones de frontera para hallar el último instante de conmutación T_4 , $x_4(t_4) = 0$ y $\dot{x}_4(t_4) = \dot{x}_4(t_4)$, entonces $x_4(t_4) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon} \cos(\sqrt{1-\varepsilon}t) = 0 \Rightarrow t_4 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$ pero $t_4 = T_4 - T_3$, así el cuarto instante de conmutación resulta como $T_4 = \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ y el valor de frontera igual a $\dot{x}_4(t_4) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

La función periodica $q_v(t) = q_v(t + T(\varepsilon))$ para el problema de velocidad inicial es de la forma:

$$q_v(T(\varepsilon)) = \begin{cases} 1 & t \in \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \\ -1 & t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}, \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \\ 1 & t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}, \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \\ -1 & t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right) \end{cases} \quad (4.9)$$

y el periodo $T(\varepsilon)$ esta dado por la ec. (4.8).

A partir del análisis anterior, el término $Sgn(x\dot{x})$ se puede expresar como una función continua a trozos periodica en el tiempo definida para el problema de posición y velocidad inicial por las expresiones (4.7) y (4.9), respectivamente. En la Tabla 4.1 se resumen los instantes de conmutación T_i , y los valores de la solución $(x(t), \dot{x}(t))$ en T_i .

De la Tabla 4.1 se puede deducir que:

$$q(t) := q_p\left(t + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}\right) = q_v(t).$$

Incluso cuando el valor de las funciones periódicas q_p y q_v depende de condiciones iniciales prescritas, su periodicidad se mantiene inalterada, es decir, para ambas condiciones iniciales (4.4) y (4.5) el

i	$q_v(t)$	T_i	(x, \dot{x})	$q_p(t)$	T_i	(x, \dot{x})
0	1	0	$(0, 1)$	-1	0	$(1, 0)$
1	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, 0\right)$	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$	$(0, -\sqrt{1-\varepsilon})$
2	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(0, -\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(-\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}, 0\right)$
3	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(-\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon}, 0\right)$	1	$\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(0, \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)$
4	1	$\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(0, \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$	-1	$\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	$\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, 0\right)$

Cuadro 4.1: Instantes de conmutación T_i del término $Sgn(x\dot{x})$ de la ec. (4.3) para las condiciones iniciales (4.4) y (4.5).

periodo $T(\varepsilon)$ resulta igual. Este notable hecho permite calcular la matriz de monodromía para llevar a cabo el análisis de estabilidad sin conocer una expresión para la solución de (4.3).

Teorema 24. *Ecuación de Reid periódica*

El oscilador de Reid (4.3) puede ser escrito como la ecuación diferencial lineal periódica:

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon q(t))x = 0 \quad (4.10)$$

donde la función $q(t) := q_p(t + T(\varepsilon))$ con periodo $T(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ esta dado por cualquiera de las funciones $q_p(t)$ o $q_v(t)$ definidas en las ecuaciones (4.7) y (4.9), respectivamente.

La ecuación (4.10) puede considerarse como una ecuación de tipo Hill [89], con la propiedad especial de que su periodo depende de los parámetros del sistema. La ecuación (4.10) se ha nombrado como Oscilador Periódico de Reid.

4.4. Análisis por la teoría de Floquet

En esta sección se establece brevemente la principal herramienta matemática utilizada para el análisis de sistemas periódicos, el teorema de Floquet-Lyapunov [129].

Considere el sistema:

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $A(t) = A(t + T) \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall t$ es una función matriz periódica funcional continua a trozos y $T > 0$ es el periodo.

La matriz $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface la ec. (4.11) y $\Phi(0) = I$ es llamada el *matrizante*, donde I denota la matriz identidad, es decir, el matrizante es una matriz fundamental de (4.11) ya que sus vectores columna satisfacen el sistema (4.11). Además, cualquier solución de (4.11) se puede escribir como $x(t) = \Phi(t)x(0)$. Por otro lado, el matrizante satisface la relación $\Phi(t + T) = \Phi(t)\Phi(T)$, que también

es una solución del sistema (4.11). El matrizante $\Phi(t)$ en T , es decir, la expresión $\Phi(T)$ es denominada la *matriz de monodromía* y sus valores propios ρ , los multiplicadores del sistema (4.11), esto es, ρ_i son las raíces de la ecuación característica $\det[\Phi(T) - \rho I] = 0$; puede probarse que los multiplicadores son únicos.

Sea u el vector propio asociado al valor propio ρ , es decir, $\Phi(T)u = \rho u$. Considere que $x(0) = u$ entonces la solución $x(t)$ se puede escribir como $x(t) = \Phi(t)u$, tomando un periodo adelante la solución resulta $x(t+T) = \Phi(t+T)u = \Phi(t)\Phi(T)u = \rho\Phi(t)u$, es decir, cada multiplicador ρ_i satisface la relación:

$$x(t+T) = \rho x(t) \tag{4.12}$$

la solución en $2T$ resulta $x(t+2T) = \rho x(t+T) = \rho^2 x(t)$ y así sucesivamente. Así, dependiendo de la naturaleza del multiplicador, la solución x puede converger o diverger.

En términos generales, del análisis de los instantes de conmutación de la sección anterior, el oscilador de Reid (4.3) se puede reescribir como una ecuación diferencial lineal periódica en el tiempo:

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon q(t))x = 0 \tag{4.13}$$

donde $q(t) = q(t + T(\varepsilon))$ y el periodo T es:

$$T(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

donde $0 < \varepsilon < 1$. Para el oscilador de Reid periódico en el tiempo descrito en (4.13) los valores definidos de la función periódica $q(t)$ dependen de un conjunto de condiciones iniciales prescritas, sin embargo, para el presente enfoque tales valores son irrelevantes, ya que el periodo $T(\varepsilon)$ permanece igual para ambas condiciones iniciales (4.4)-(4.5).

La ecuación (4.13) se puede considerar como una ecuación de tipo Hill, consultar [134]. Sin embargo, cabe notar que su periodo depende del parámetro del sistema ε .

El análisis de estabilidad del oscilador de Reid (4.3) visto como un sistema periódico (4.13) esta basado en la matriz de monodromía, para proceder con el cálculo de la misma la ecuación (4.13) se escribe en el espacio de estados:

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \varepsilon q(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Sea $\Phi(t, 0)$ la matriz fundamental de (4.14). Considere el conjunto de soluciones linealmente independientes $\{x_p, x_v\}$ para las condiciones dadas de posición y velocidad, entonces la matriz Wronskiana esta dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) & x_v(t) \\ \dot{x}_p(t) & \dot{x}_v(t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

La matriz de monodromía en términos de la matriz Wronskiana es $\Phi(T, 0) = W^{-1}(0)W(T)$, donde los elementos de los vectores columna $[x_p(T) \ \dot{x}_p(T)]^\top$ y $[x_v(T) \ \dot{x}_v(T)]^\top$ están dados en la Tabla 4.1, así:

$$\Phi(T, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Corolario 25. *Solución asintóticamente estable*

La solución trivial del oscilador periódico de Reid (4.13) es asintóticamente estable.

Demostración. Los multiplicadores del sistema son los valores propios de la matriz de monodromía (4.16), es decir, el valor propio corresponde a un multiplicador doble $\rho(\varepsilon)$: \square

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (4.17)$$

el cual es semi-simple ya que los vectores propios correspondientes u_i son linealmente independientes ([92]), es decir, $u_1 = [0 \ 1]^\top$ y $u_2 = [1 \ 0]^\top$ respectivamente.

El multiplicador (4.17) satisface $\rho(\varepsilon) < 1 \ \forall 0 < \varepsilon < 1$, por consiguiente la solución trivial de la ecuación (4.13) es asintóticamente estable por el teorema de Floquet, este resultado también fue demostrado por el análisis de estabilidad de Lyapunov.

En este punto, es importante notar que los multiplicadores corresponden a un conjunto de valores propios llamados modos de Brillouin, ver [118].

El exponente de Floquet del sistema periódico (4.13) está dado por:

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{T} \ln \rho = \frac{1}{T(\varepsilon)} \ln \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{T(\varepsilon)} \ln \alpha(\varepsilon) \quad (4.18)$$

y corresponde a una raíz doble de la ecuación característica $\det [K(\varepsilon) - \lambda I] = 0$, donde la matriz K está dada por:

$$K = \frac{1}{T} \ln \Phi(T, 0) = \begin{bmatrix} \lambda(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \lambda(\varepsilon) \end{bmatrix} = \lambda(\varepsilon) I \quad (4.19)$$

Con base en la argumentación anterior, puede formularse el siguiente corolario.

Corolario 26. *Factores de Floquet*

El matrizante $\Phi(t)$ del sistema (4.13) posee la factorización

$$\Phi(t) = F(t)e^{\lambda(\epsilon)t} \quad (4.20)$$

donde λ es una el exponente de Floquet (4.18) y corresponde al doble valor propio semi-simple de la matriz (4.19) [129].

Demostración. Recordemos que los multiplicadores satisfacen $\rho(\epsilon) < 1$ entonces de (4.18) el exponente de Floquet es $\lambda(\epsilon) < 0 \forall \epsilon \in (0, 1)$. Por consiguiente, la matriz logaritmica $K(\epsilon)$ es real, esto es, la factorización de Floquet corresponde a una factorización real dada por $\Phi(t) = F(t)e^{tK}$, donde $e^{tK} = e^{\lambda(\epsilon)t}I$. \square

Finalmente, por el teorema de reducibilidad de Lyapunov:

Corolario 27. *Transformación del oscilador de Reid*

Sea $F(t) \in \mathbb{C}^1(a, b)$ una función matriz continua no singular con periodo $T(\epsilon)$, entonces el cambio de variable

$$x = \mathbf{F}(t)y \quad (4.21)$$

transforma el sistema (4.13) en un sistema lineal con coeficientes constantes

$$\dot{y} = K(\epsilon)y(t) \quad (4.22)$$

donde la matriz K y la función matriz $F(t)$ se relacionan mediante $\Phi(t) = F(t)e^{tK}$, y cuya solución está dada por $y(t) = e^{\lambda(\epsilon)t}y(0)$.

Demostración. El sistema periódico (4.13) con la transformación $x = \mathbf{F}(t)y$, donde \mathbf{F} esta dada por la ecuación (4.20), se reduce a la ecuación (4.22), y por la relación (4.19) la solución $y(t)$ es hallada. \square

La transformación (4.21) se denomina *transformación de Lyapunov* del sistema (4.13). Ya que la transformación existe y es brindada por el teorema de Floquet, entonces se dice que el sistema (4.13) es *reducible* a (4.22), además la matriz $A(t)$ es *cinemáticamente similar* a la matriz K , ver ([59]).

La matriz fundamental de (4.11) también se puede escribir en términos del Wronskiano como sigue. Sea x_i un conjunto de soluciones de variables de estado linealmente independientes de (4.11) y el Wronskiano definido por $W(t) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$. Por consiguiente, cualquier matriz fundamental $\Phi(t, 0)$ se puede escribir como $\Phi(t, 0) = W(t)W^{-1}(0)$, ver ([37]).

Propiedad de la solución x	Multiplicadores ρ_i
$\ x\ \rightarrow 0$	$ \rho_i < 1 \forall i$
$\ x\ \leq M$	$ \rho_i \leq 1$ y aquellos con $ \rho_k = 1$ poseen simples divisores elementales.
$\ x\ \rightarrow \infty$	$ \rho_i \geq 1$ y aquellos con $ \rho_k = 1$ poseen múltiples divisores elementales.

Cuadro 4.2: Criterio de estabilidad para el sistema (4.13).

4.4.1. Criterio de estabilidad

Considerando $x(t) = F(t)e^{tK}x(0)$. La Tabla 4.2 relaciona el comportamiento de tal solución con los exponentes característicos y los multiplicadores del sistema (4.11):

Cabe resaltar que la matriz logarítmica (4.19) existe y puede ser compleja, ver [34]. El teorema de Floquet establece que la matriz de transición tiene como factorización el producto $\Phi(t) = F(t)e^{tK}$, pero, la matriz $K(\epsilon)$ puede ser compleja, entonces tal factorización no sería real. Para casos prácticos, es deseable contar con factores de Floquet reales [107].

4.5. Optimización por análisis sensitivo

En el sistema (4.13) el valor óptimo ϵ para el cual el máximo amortiguamiento ocurre cuando los valores propios (4.18) (exponentes de Floquet) del sistema lineal invariante en el tiempo (4.22) (sistema reducido) alcanzan su máximo, es decir, cuando $\lambda(\epsilon)$ es máximo.

Por consiguiente, se requiere calcular la derivada de un valor propio en términos de su parámetro, es decir, se requiere calcular $\frac{d\lambda(\epsilon)}{d\epsilon}$. El cálculo de la derivada de valores propios corresponde a un análisis sensitivo [49]. Cabe resaltar que el valor propio bajo estudio (4.18) corresponde a un doble valor propio del sistema (4.22), en general su análisis sensitivo, puede ser un problema difícil de resolver, consultar [50]. Sin embargo, en este caso, el índice de Riesz de la matriz (4.19) es igual a uno [51], es decir, el doble valor propio es semi-simple, entonces la derivada del valor propio respecto a los parámetros esta bien definida [126] y corresponde a una derivada de Frechet [45],[61].

El valor óptimo ϵ_{opt} ocurre cuando el exponente de Floquet $\lambda(\epsilon)$ es máximo:

$$\frac{d\lambda(\epsilon)}{d\epsilon} = 4 + 4\sqrt{1 - \epsilon^2} + \epsilon \left(2 + \sqrt{1 - \epsilon^2} \right) \ln \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} = 0 \quad (4.23)$$

la ecuación anterior se resuelve numéricamente para ϵ aplicando el método de Newton-Raphson, el valor óptimo resultó como sigue:

$$\epsilon_{opt} \approx 0.87677 \quad (4.24)$$

para determinar la naturaleza del extremo $\lambda(\epsilon_{opt})$, se calcula la segunda derivada $\frac{d^2\lambda(\epsilon)}{d\epsilon^2}$ y se evalúa en ϵ_{opt} :

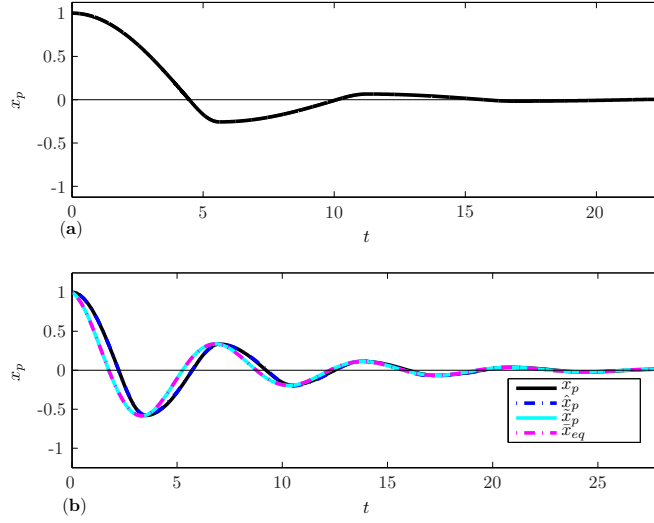


Figura 4.3: (a) Solución numérica del oscilador de Reid x_p para el valor óptimo $\varepsilon_{opt} = 0.8768$. (b) Comparación de la solución numérica del oscilador de Reid x_p , la solución \hat{x}_p por el método de variación de parámetros, la solución por aproximación lineal \tilde{x}_p y la solución lineal equivalente \bar{x}_p .

$$\frac{d^2\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = -\frac{8\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} + (1 + 5\sqrt{1-\varepsilon^2} + \varepsilon^2(3 + \sqrt{1-\varepsilon^2})) \ln\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right]}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}(\sqrt{1-\varepsilon} + \sqrt{1+\varepsilon})^3 \pi} \Big|_{\varepsilon_{opt}} > 0 \quad (4.25)$$

entonces $\lambda(\varepsilon_{opt})$ es un máximo.

Incluso cuando un valor aproximado ε_{opt} se halló con la técnica del amortiguamiento viscoso equivalente, el análisis anterior asegura una explicación cuantitativa y cualitativa.

El valor numérico (4.24) esta en acuerdo con la aproximación obtenida en las referencias [25], [93], [105], [41] donde se emplearon diferentes enfoques para calcularlo. La correspondiente solución numérica del oscilador de Reid x_p para el valor óptimo ε_{opt} se muestra en la figura 4.3(a).

4.6. Análisis de disipación de energía

El oscilador de Reid $\ddot{x} + \tilde{k}(t)x = 0$ aplicando $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}\dot{x}$ puede expresarse como $\dot{x}d\dot{x} + \tilde{k}(t)x dx = 0$, cuya integración respecto a x resulta como $E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}\tilde{k}(t)x^2(t)$, es decir, la energía total $E(t)$ es la suma de la energía cinética y potencial, respectivamente.

4.6.1. Problema de velocidad inicial

Utilizando el plano de fase para el problema de velocidad inicial mostrado en la figura 4.2(b) y los valores de frontera calculados en la sección anterior, es posible analizar la energía disipada en el

movimiento del sistema masa-resorte.

En el primer cuadrante tenemos que $x > 0$ y $\ddot{x} > 0$, por lo tanto la ecuación (4.3) resulta como $\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0$, y la energía total ($E(t) = E.T.$) en el sistema esta dada por la expresión:

$$E(t) = T - V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) x^2$$

donde T y V representan la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente.

Ahora se evalúa la ecuación anterior en cada instante en el que el sistema cruza los ejes del plano de fase, comenzando en el punto de condición inicial $(0,1)$ con instante de conmutación T_0 .

- En T_0 $E.T. (0, 1) = \frac{1}{2}; \left\{ \begin{array}{l} T_{max} \\ V = 0 \end{array} \right\}$.
- En T_1 $E.T. \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, 0 \right) = \frac{1}{2}; \left\{ \begin{array}{l} T = 0 \\ V_{max} \end{array} \right\}$.

Cuando el sistema pasa el punto en T_1 y la energía potencial V alcanza su máximo valor, $x > 0$ y $\dot{x} < 0$ entonces la ec. (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 - \varepsilon)x = 0$ afectando la energía potencial, que cambia a $V = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)$; y el resorte es bloqueado con el mecanismo para reducir el número de vueltas, y así la energía almacenada en el resorte es dada por:

$$dV = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)$$

- En T_2 $E.T. \left(0, \frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) : \left\{ \begin{array}{l} T_{max} \\ V = 0 \end{array} \right\}$.

Después del punto en T_2 la ecuación (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0$, pero esto no cambia el valor de la energía cinética.

- En T_3 $E.T. \left(\frac{-\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon}, 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) : \left\{ \begin{array}{l} T = 0 \\ V_{max} \end{array} \right\}$.

Cuando el sistema pasa el punto en T_3 ec. (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 - \varepsilon)x = 0$ afectando el valor de la energía potencial, lo que resulta en lo siguiente: $V = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} \right)$, la energía potencial almacenada en el resorte en este punto esta dada por:

$$dV = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 + \varepsilon)^2} \right)$$

- En T_4 $E.T. \left(0, \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} \right) : \left\{ \begin{array}{l} T_{max} \\ V = 0 \end{array} \right\}$.

4.6.2. Problema de posición inicial

En esta sección el análisis de disipación de energía inicia con las condiciones iniciales para el problema de posición inicial.

En el primer cuadrante tenemos que $x > 0$ y $\ddot{x} < 0$ entonces la ecuación (4.3) resulta en la forma $\ddot{x} + (1 - \varepsilon)x = 0$, y la energía total (E.T.) en el sistema es dada por la expresión:

$$\text{Energía total}(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) x^2$$

Ahora evaluamos la ecuación anterior en cada instante de conmutación del sistema, comenzando en el punto de condiciones iniciales (1,0) con el instante de conmutación T_0 .

- En T_0 E.T. (1,0) = $\frac{1}{2} (1 - \varepsilon)$; $\left\{ \begin{array}{l} V_{max} \\ T = 0 \end{array} \right\}$.
- En T_1 E.T. (0, $-\sqrt{1 - \varepsilon}$) = $\frac{1}{2} (1 - \varepsilon)$; $\left\{ \begin{array}{l} V = 0 \\ T_{max} \end{array} \right\}$.

Cuando el sistema pasa por el punto en T_1 , $x < 0$ y $\dot{x} < 0$ entonces la ecuación (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0$ pero no hay un cambio en la energía potencial.

- En T_2 E.T. $\left(\frac{-\sqrt{1 - \varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon}}, 0 \right) = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)$; $\left\{ \begin{array}{l} V_{max} \\ T = 0 \end{array} \right\}$.

Después de pasar el punto en T_2 la ec. (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 - \varepsilon)x = 0$, afectando el valor de la energía potencial a $V = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} \right)$ resultando en un diferencial de la energía potencial dada por la ecuación:

$$dV = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) - \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} \right)$$

- En T_3 E.T. $\left(0, \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} \right)$; $\left\{ \begin{array}{l} V = 0 \\ T_{max} \end{array} \right\}$.

Cuando el sistema pasa el punto en T_3 la ecuación (4.3) cambia a la forma $\ddot{x} + (1 + \varepsilon)x = 0$ pero no afecta el valor de la energía potencial.

- En T_4 T.E. $\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}, 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} \right)$; $\left\{ \begin{array}{l} V_{max} \\ T = 0 \end{array} \right\}$.

La función de la energía total $E(t)$ se muestra en la gráfica de la figura 4.4 para diferentes valores de ε , considerando el problema de posición inicial, como puede observarse la energía total decrece en cada instante de conmutación, y las soluciones correspondientes $x_p - \dot{x}_p$ se muestran en la figura 4.4 (b)-(c). Basados en la función de la energía $E(t)$, la estabilidad de la solución trivial del oscilador de Reid se probó con el teorema de estabilidad de Lyapunov.

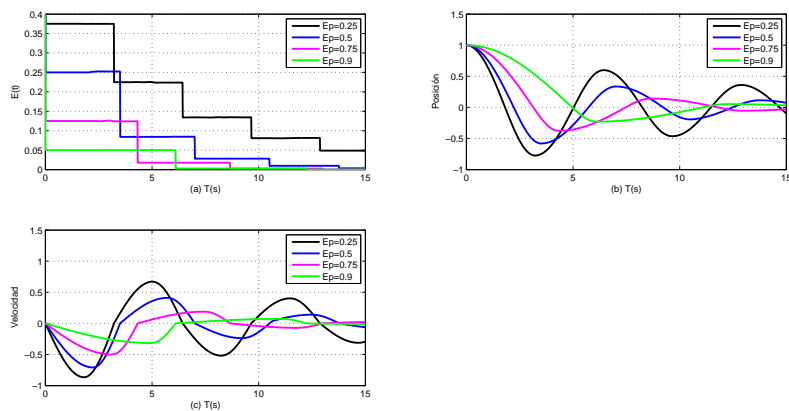


Figura 4.4: Decaimiento de la energía total para distintos valores de ε

Capítulo 5

Análisis no lineal del oscilador de Reid

Para comparar y validar los resultados a los que se llegó utilizando la teoría de sistemas periódicos en conjunto con la teoría de Floquet-Lyapunov, en este capítulo se estudia el oscilador de Reid empleando técnicas de análisis no lineal.

La estabilidad del oscilador de Reid (4.3) es analizada con la teoría de Lyapunov. Se considera la función candidata de Lyapunov como $V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$. La diferenciación de $V(x)$ respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de 4.3 da como resultado $\dot{V}(x) = -\varepsilon|x\dot{x}| \leq 0$, donde $\dot{V}(x)$ es semi-definida negativa, sin embargo, $\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, entonces, por el Teorema de Conjuntos Invariantes de Lyapunov [73], la solución trivial $x = 0$ es asintóticamente estable, es decir, $\|x\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Se presenta primero un poco de teoría acerca de las herramientas de análisis no lineal utilizadas para realizar la validación de resultados, a saber: el método de variación de parámetros y la transformada de Lyapunov.

5.1. Transformada de Lyapunov

Dado un cambio de coordenadas $x \Rightarrow T(x)$, es posible transformar el sistema lineal de la forma

$$\frac{df}{dx} = U(x)f, \quad (f = f(x) \in V) \quad (5.1)$$

en otro sistema lineal [19]. Se establecerá una relación de equivalencia entre el sistema lineal, bajo un cambio de coordenadas particular, conocida como la *Transformada de Lyapunov*.

Definición 28. Cambio de coordenadas

La ecuación definida por la expresión

$$\tilde{f}(x) = T(x)f(x) \quad (5.2)$$

es llamada una transformación de Lyapunov si la función C^∞ de $x \Rightarrow T(x) \in G^0$ satisface las siguientes condiciones:

- (i) $T(x)$ y $\frac{dT}{dx}$ son acotadas,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|T(x)\| < \infty \quad y \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dT}{dx}(x) \right\| < \infty \quad (5.3)$$

- (ii) Existe un número real m tal que $|\det T(x)| \geq m > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Cabe notar que la inversa de una transformación de Lyapunov es también una transformación de Lyapunov.

Si tenemos

$$|\det T(x)| \leq M < \infty. \quad (5.4)$$

Resulta

$$|\det T^{-1}(x)| = \frac{1}{|\det T(x)|} \geq \frac{1}{M}. \quad (5.5)$$

Y utilizando

$$T^{-1}(x) = \frac{1}{|\det T(x)|} [\Delta_{ij}], \quad (5.6)$$

de acuerdo a (i) y (ii) se obtiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|T^{-1}(x)\| < \infty \quad y \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dT^{-1}}{dx}(x) \right\| < \infty. \quad (5.7)$$

Definición 29. Dos sistemas lineales

$$\frac{df}{dx} = U(x)f \quad U(x) \in \mathfrak{g}, \|U(x)\| < \infty \quad (5.8)$$

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \tilde{U}(x)\tilde{f} \quad \tilde{U}(x) \in \mathfrak{g}, \|\tilde{U}(x)\| < \infty \quad (5.9)$$

son equivalentes, en el sentido de Lyapunov, si están relacionadas por una transformación de Lyapunov. Por lo tanto, la transformación de Lyapunov brinda una relación de equivalencia para sistemas de la forma de (5.12).

Definición 30. Un sistema lineal

$$\frac{df}{dx} = U(x)f, \quad U(x) \in \mathfrak{g} \quad (5.10)$$

es llamado sistema reducible si es equivalente a un sistema con coeficientes constantes

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = K\tilde{f}, \quad K \in \mathfrak{g} \quad (5.11)$$

5.1.1. Criterio de Lyapunov

Un sistema de la forma

$$\frac{df}{dx} = U(x)f, \quad f = f(x) \in \mathbb{F}^n \quad (5.12)$$

es reducible si y solo si su solución fundamental $\mathbf{F}(x, y)$ tiene una representación

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{T}(x) e^{x\mathbf{K}(y)} \quad (5.13)$$

donde \mathbf{T} es una transformación de Lyapunov y $\mathbf{K}(y) \in \mathfrak{g}$ no depende de x .

En las secciones siguientes se realiza el análisis del oscilador de Reid empleando técnicas y herramientas clásicas para el análisis no lineal, para llegar a la solución del sistema con ayuda de una aproximación lineal y la técnica del decremento logarítmico.

5.2. Aproximación lineal

Debido a que $\dot{\varphi}_p = d\varphi/dt = f(\varphi)$ entonces la ecuación (5.32) se puede integrar con respecto a φ :

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi)}$$

cabe notar que el término $\operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi)$ esta bien definido en los intervalos $[m\pi - (2m+1)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}(m+1)\pi]$ entonces:

$$t = \sum_{\varphi=0}^m \left(\int_{m\pi}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} + \int_{(2m+1)\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} \right) + \int_{(m+1)\pi}^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi)} \quad (5.14)$$

donde $m = \left\lfloor \frac{\varphi}{\pi} \right\rfloor - 1$ y $\lfloor \bullet \rfloor$ es la función piso. Con respecto a la suma en la ecuación (5.14), se hallan las integrales del primer y segundo término¹:

¹ $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \tan \frac{x}{2}$, ver [133].

$$\begin{aligned}
\int_{m\pi}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \arctan \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon}} \Big|_{m\pi}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \underbrace{\arctan \frac{\tan(2m+1)\pi/2}{\sqrt{1-\varepsilon}}}_{=\pi/2} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \underbrace{\arctan \frac{\tan m\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{(2m+1)\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \arctan \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1+\varepsilon}} \Big|_{(2m+1)\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \underbrace{\arctan \frac{\tan(m+1)\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}}_{=0} - \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \underbrace{\arctan \frac{\tan(2m+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}}_{=-\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}}
\end{aligned}$$

entonces la suma puede truncarse en pasos de m :

$$t \approx (m+1) \frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}} + (m+1) \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$$

sea m una aproximación igual a $m \approx \frac{\varphi}{\pi} - 1$ entonces:

$$t \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}} \right)$$

usando $\alpha = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ entonces:

$$\tilde{\varphi}_p(t) := \varphi(t) \approx \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}} t. \quad (5.15)$$

Por otro lado, considerando la ecuación (5.33) el término $\dot{a}_p = \frac{da}{dt}$ y utilizando $dt = \frac{d\varphi}{f(\varphi)}$ se escribe como:

$$\frac{da}{a} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{|\sin 2\varphi_p|}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi_p) \operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi_p)}$$

la integración considerando las condiciones iniciales correspondientes resulta:

$$\int_{a(0)=1}^{a(t)} \frac{da}{a} = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(t)} \frac{|\sin 2\varphi_p|}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi_p) \operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi_p)}$$

$$\log a = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^m \left(\int_{m\pi}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi_p}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} + \int_{(2m+1)\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\pi} \frac{-\sin 2\varphi_p}{1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)} - \frac{\varepsilon}{2} \int_{(m+1)\pi}^{\varphi} \frac{|\sin 2\varphi_p|}{1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi_p) \operatorname{Sgn}(\sin 2\varphi_p)} \right) \quad (5.16)$$

donde $m = \lfloor \frac{\varphi}{\pi} \rfloor - 1$. Las integrales en la suma son directamente:

$$\sum_{m=0}^m \left(-\frac{1}{2} \log(-2 + \varepsilon(1 + \cos 2\varphi)) \Big|_{m\pi}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \log(2 + \varepsilon(1 + \cos 2\varphi)) \Big|_{(2m+1)\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\pi} \right) = \sum_{m=0}^m \log \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

para una aproximación lineal el proceso de integración es llevado a cabo hasta m entonces la ecuación (5.16) se reduce a:

$$\log a \approx (m+1) \log \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

$$a \approx \alpha^{\frac{m+1}{2}}$$

ya que $m \approx \frac{\varphi}{\pi} - 1$ entonces $a \approx \alpha^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ pero $\varphi(t) \approx \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}} t$, es decir:

$$\tilde{a}(t) := a(t) \approx \alpha^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\pi(1+\sqrt{\alpha})} t} \quad (5.17)$$

las aproximaciones lineales $\tilde{\varphi}(t)$ y $\tilde{a}(t)$ de las ecuaciones (5.15) y (5.17) respectivamente, se muestran en la gráfica de la figura 5.2, entonces se puede establecer una aproximación lineal para la solución $x_p(t)$ como sigue:

$$\tilde{x}_p := x_p(t) \approx \alpha^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\pi(1+\sqrt{\alpha})} t} \cos \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}} t \quad (5.18)$$

5.3. Método de variación de parámetros

La técnica de variación de parámetros es un método general para hallar la solución particular de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, en el que se utiliza la solución general de la ecuación

lineal homogénea asociada al estado lineal, mediante la variación de los parámetros de la solución general de la ecuación lineal homogénea. Así, se describe a continuación el método de acuerdo a [99].

Las oscilaciones libres de muchos sistemas conservativos de un solo grado de libertad son gobernadas por una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_3 u^{*3} = 0 \quad (5.19)$$

donde $k_1 > 0$ y k_3 puede ser positiva o negativa [99]. Una buena práctica consiste en escribir las ecuaciones gobernantes en una forma adimensional antes de resolverlas. Para este fin, se elige una longitud característica U^* del movimiento y un tiempo característico T^* y se utilizan lo siguiente

$$t = \frac{t^*}{T^*} \quad u = \frac{u^*}{U^*}$$

utilizando la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{T^*} \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^{*2}} = \frac{1}{T^{*2}} \frac{d^2}{dt^2}$$

entonces, la ecuación (5.19) se convierte en

$$\ddot{u} + k_1 T^{*2} u + k_3 T^{*2} U^{*2} u^3 = 0. \quad (5.20)$$

Es conveniente elegir T^* de tal forma que $k_1 T^{*2} = 1$ y sea $\epsilon = k_3 T^{*2} U^{*2} = k_3 U^{*2} / k_1$. Por lo tanto, (5.20) puede reescribirse como

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0 \quad (5.21)$$

cuando $\epsilon = 0$, la solución de (5.21) puede ser escrita en la forma

$$u = a \cos(t + \beta) \quad (5.22)$$

donde a y β son constantes, y son llamados *parámetros*. Se deduce de (5.22) que

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) \quad (5.23)$$

cuando $\epsilon \neq 0$, se asume que la solución de (5.21) esta dada aún por la ecuación (5.22) pero con $a(t)$ y $\beta(t)$ variantes con el tiempo. Dicho de otra forma, se considera (5.22) como una transformación de $u(t)$ a $a(t)$ y $\beta(t)$. Por lo anterior este método es conocido como el *método de variación de parámetros*. Visto desde esta perspectiva, se tiene dos ecuaciones, a saber (5.21) y (5.22), para las tres incógnitas $u(t)$, $a(t)$ y $\beta(t)$. Por consiguiente, es posible imponer una tercera condición, es decir,

una tercera ecuación. Tal condición es arbitraria, excepto que debe ser independiente (5.21) y (5.22). Estas arbitrariedades pueden ser usadas como ventaja, a saber para producir una transformación simple y conveniente. De todas las condiciones posibles, se elige imponer la condición (5.23), de este modo asumiendo que tanto u como \dot{u} poseen la misma forma que el caso lineal. Esta condición conduce a una transformación conveniente porque lleva a un conjunto de ecuaciones de primer orden en lugar de a un conjunto de ecuaciones de segundo grado para $a(t)$ y $\beta(t)$.

Diferenciando (5.22) con respecto a t y recordando que $a(t)$ y $\beta(t)$ son funciones de t , se obtiene

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta). \quad (5.24)$$

Comparando (5.24) con (5.23), se puede concluir que

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0 \quad (5.25)$$

al diferenciar (5.23) con respecto a t , se obtiene

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) \quad (5.26)$$

Sustituyendo para u y \ddot{u} desde (5.22) y (5.26) en (5.21), resulta

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = \epsilon a^3 \cos^3(t + \beta). \quad (5.27)$$

Cabe notar que (5.25) y (5.27) constituyen un sistema de dos ecuaciones de primer orden para \dot{a} y $\dot{\beta}$, pueden simplificarse más. Para este fin, se multiplica (5.25) por $\cos(t + \beta)$ y (5.27) por $\sin(t + \beta)$, se suman los resultados y se obtiene

$$\dot{a} = \epsilon a^3 \sin(t + \beta) \cos^3(t + \beta) \quad (5.28)$$

sustituyendo para \dot{a} en (5.25) y resolviendo para $\dot{\beta}$, se obtiene

$$\dot{\beta} = \epsilon a^2 \cos^4(t + \beta) \quad (5.29)$$

si $a \neq 0$. Así, la ecuación de segundo orden original (5.21) para $u(t)$ ha sido reemplazada por las dos ecuaciones de primer orden (5.28) y (5.29) para $a(t)$ y $\beta(t)$. Cabe enfatizar que no se han hecho aproximaciones para llegar a las ecuaciones (5.28) y (5.29).

Al comparar las ecuaciones transformadas (5.28) y (5.29) con la ecuación original, se observa que las ecuaciones transformadas son más no lineales que la ecuación original. Entonces, surge la pregunta de cual es el valor de esta transformación. La respuesta a tal pregunta depende del valor de ϵ . Si ϵ es pequeña, las partes principales de a y β varían más lentamente que u con t como se muestra en la figura 5.1.

Este hecho puede ser una ventaja analítica y numérica. Numéricamente es ventajoso resolver las

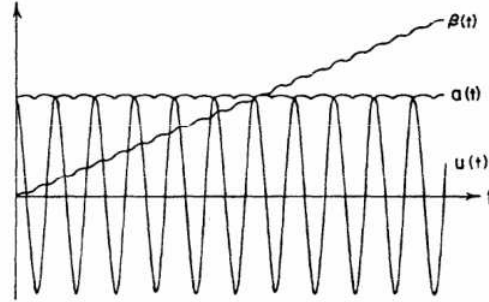


Figura 5.1: La variación de a , β y u con t para $a(0) = 1.5$, $\beta(0) = 0.0$ y $\epsilon = 0.05$.

ecuaciones transformadas en lugar de la ecuación original, debido a que puede utilizarse un tamaño grande de paso en la integración.

5.3.1. Cálculo de la solución del oscilador de Reid por el método de variación de parámetros

La matriz fundamental del sistema (4.3) se halla considerando sus soluciones definidas por el problema de posición y velocidad inicial, tales soluciones son aproximadas con la técnica de variación de parámetros [140].

Para las condiciones iniciales establecidas en (4.5) considere que la solución del oscilador de Reid (4.3) puede ser aproximada por $\hat{x} \approx a(t) \cos \varphi(t)$ donde la amplitud $a(t)$ y la frecuencia $\varphi(t) := t + \phi(t)$ son funciones del tiempo a ser determinadas.

Tomando la derivada de \hat{x} respecto al tiempo resulta:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -a(1 + \dot{\phi}) \sin \varphi + \dot{a} \cos \varphi = -a \sin \varphi - a\dot{\phi} \sin \varphi + \dot{a} \cos \varphi$$

donde $\dot{\varphi} = 1 + \dot{\phi}$.

Si se impone la siguiente condición:

$$-a\dot{\phi} \sin \varphi + \dot{a} \cos \varphi = 0 \tag{5.30}$$

entonces $\frac{d\hat{x}}{dt}$ se puede reescribir como $\frac{d\hat{x}}{dt} = -a(t) \sin \varphi(t)$, así $\frac{d^2\hat{x}}{dt^2}$ se reduce a $\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} = -a(1 + \dot{\phi}) \cos \varphi -$

$\dot{a} \sin \varphi$. De esta forma la ecuación (4.3) se puede reescribir en términos de a y de φ como sigue:

$$a\dot{\phi} \cos \varphi + \dot{a} \sin \varphi + \varepsilon a Sgn(\sin 2\varphi) \cos \varphi = 0 \quad (5.31)$$

donde la identidad $Sgn(-a^2 \cos \varphi \sin \varphi) = \frac{-a^2 \cos \varphi \sin \varphi}{|-a^2 \cos \varphi \sin \varphi|} = -Sgn(\sin 2\varphi)$ ha sido utilizada. Las ecuaciones (5.30) y (5.31) se pueden reescribir como una matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\dot{a} \sin \varphi \\ \sin \varphi & a \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon a Sgn(\sin 2\varphi) \cos \varphi \end{bmatrix} = 0$$

ya que $\det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\dot{a} \sin \varphi \\ \sin \varphi & a \cos \varphi \end{bmatrix} = a(t) \neq 0 \forall t$ entonces la ecuación matricial anterior se puede resolver, esto es:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a \cos \varphi & \dot{a} \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon a Sgn(\sin 2\varphi) \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

De la ecuación anterior la expresión para \dot{a} es:

$$\dot{a}_p := \dot{a} = -\varepsilon \frac{a_p}{2} |\sin 2\varphi_p|. \quad (5.32)$$

Y la solución para $\dot{\phi}$, usando $\dot{\phi} = \dot{\varphi} - 1$, es:

$$\dot{\varphi}_p := \dot{\phi} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} (1 + \cos 2\varphi_p) Sgn(\sin 2\varphi_p) = f(\varphi) \quad (5.33)$$

los subíndices a_p y φ_p se utilizan para denotar la solución de $x(t)$ para el problema de posición inicial.

Cabe notar que las ecuaciones (5.32) y (5.33) son ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas, por lo tanto se pueden resolver de manera independiente. Para resolver las ecuaciones es necesario hallar las condiciones iniciales apropiadas, utilizando las condiciones iniciales de (4.5), entonces $x(0) = 1 \Rightarrow x(0) = a_p(0) \cos \varphi_p(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(0) = -a_p(0) \sin \varphi_p(0) = 0$, esto es:

$$\begin{aligned} a_p^0 &:= a_p(0) = 1\varphi \\ \varphi_p^0 &= \varphi_p(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Resumiendo para el problema de posición inicial (4.5) la solución de la ecuación (4.3) es dada por $\hat{x}_p = a_p(t) \cos \varphi_p(t)$ donde las funciones $a_p(t)$ y $\varphi_p(t)$ son soluciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden (5.32) y (5.33) bajo las condiciones iniciales (5.34).

Cabe resaltar que las ecuaciones (5.32)-(5.33) solo pueden resolverse de forma implícita, ya que para calcular una expresión explícita para las funciones (a_p, φ_p) se requiere una aproximación lineal. La solución numérica de las ecuaciones (5.32)-(5.33) esta graficada en la figura 5.2, como se puede deducir de la figura una aproximación lineal es adecuada.

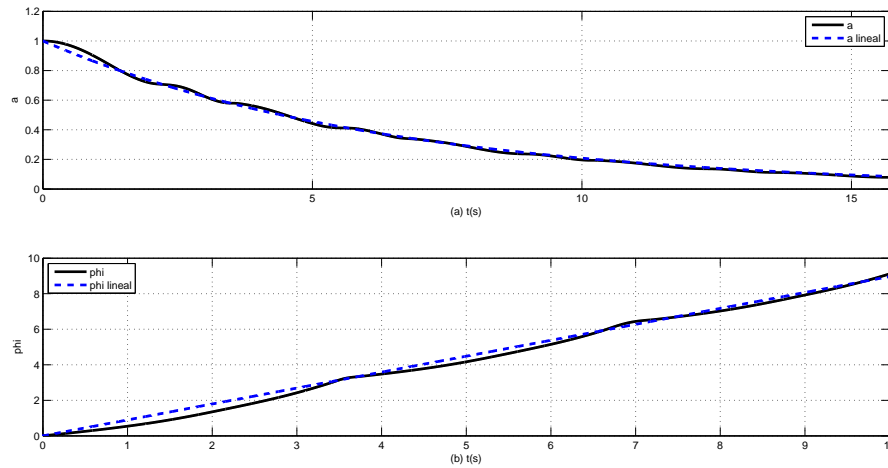


Figura 5.2: Comparación de la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden (5.32)-(5.33) contra sus aproximaciones lineales (5.15)-(5.17).

5.4. Amortiguamiento inducido

El análisis de estabilidad del oscilador de Reid muestra que la rigidez conmutada induce un fenómeno de disipación de energía, es decir, induce amortiguamiento en el sistema cuando $0 < \epsilon < 1$. No obstante, surge una pregunta interesante cuando se considera el rango permitido de valores de ϵ : ¿existe un valor óptimo para ϵ ? La respuesta depende del índice de rendimiento elegido para la optimización, las gráficas de la figura 4.4 sugieren varios criterios óptimos, como la energía que decae por ciclo, o la amplitud que decae por ciclo, etc. [41]

La inherente complejidad de los mecanismos de amortiguamiento requiere idear algún método de aproximación, aunque al realizarlo siempre conlleva alguna pérdida de exactitud en la representación del fenómeno de amortiguamiento físico, sin embargo, este enfoque provee manejabilidad matemática. Una aproximación comprobada consiste en considerar un modelo lineal con amortiguamiento viscoso [119] es decir, una forma común de tratar el fenómeno de amortiguamiento se basa en considerar que las fuerzas de amortiguamiento presentes en el sistema pueden ser aproximadas por un término de amortiguamiento viscoso de un sistema masa-resorte-amortiguador lineal. Además, bajo este punto de vista, debe existir un valor óptimo del parámetro ϵ_{opt} con el cual ocurra la mayor disipación viscosa, recordando que la disipación por amortiguamiento en un modelo lineal esta caracterizada por el coeficiente de amortiguamiento. Así, con base en un sistema lineal equivalente el análisis del fenómeno de disipación en el oscilador de Reid consiste en hallar un amortiguamiento viscoso equivalente.

5.4.1. Amortiguamiento viscoso equivalente mediante la técnica del decremento logarítmico

Una manera sencilla que permite calcular el amortiguamiento viscoso equivalente es la utilización de la técnica del decremento logarítmico [67]. Para aplicar dicha técnica, se debe considerar que la respuesta oscilatoria amortiguada del sistema 4.3 puede ser aproximada por la solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$m_{eq}\ddot{\bar{x}} + c_{eq}\dot{\bar{x}} + k_{eq}\bar{x} = 0 \quad (5.35)$$

bajo las condiciones iniciales $(\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0)$, la ec. (5.35) tiene una respuesta amortiguada de la forma:

$$\bar{x} = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \vartheta) \quad (5.36)$$

donde $\xi = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ y $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ representan el coeficiente de amortiguamiento, la frecuencia natural, la frecuencia amortiguada y el periodo, respectivamente. Así como las constantes de integración son $A = \frac{\sqrt{\bar{x}_0^2\omega_d^2 + (\dot{\bar{x}}_0 + \xi\omega_n\bar{x}_0)^2}}{\omega_d}$ y $\vartheta = \arctan\left(\frac{\dot{\bar{x}}_0 + \xi\omega_n\bar{x}_0}{\bar{x}_0\omega_d}\right)$.

El decremento logarítmico se define como el logaritmo natural de la razón de los picos de amplitudes sucesivas [67]:

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad (5.37)$$

donde $x_n = x(nT)$ es la respuesta del sistema analizado en el periodo de oscilación T y $n \in \mathbb{N}$. Para el sistema lineal equivalente (5.35) el decremento logarítmico se deduce como de (5.36):

$$\Delta_{eq} := 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.38)$$

Al aplicar la técnica al oscilador de Reid 4.3, los picos de amplitud x_n estan dados por su solución $x(t)$. Sin embargo, la ec. (4.3) no tiene una solución analítica completa, por lo tanto se requiere utilizar un esquema de aproximación. Para tal propósito, se aplica el método de variación de parámetros a la ec. (4.3); considerando el problema de posición inicial (4.5) y tomando en cuenta que la solución de (4.3) denotada por $x_p(t)$ puede ser aproximada por $\hat{x}_p := x_p \approx a_p(t) \cos \varphi_p(t)$ donde la amplitud $a_p(t)$ y $\varphi_p(t)$ son funciones que varían con el tiempo que deben determinarse. La aplicación del método de variación de parámetros a la ec. (4.3) resulta en las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{a}_p &= -\varepsilon \frac{a_p}{2} |\sin 2\varphi_p| \\ \dot{\varphi}_p &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} (1 + \cos 2\varphi_p) \text{Sgn}(\sin 2\varphi_p) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Resolviendo las ecuaciones no lineales desacopladas de (5.39) se obtienen soluciones implícitas de

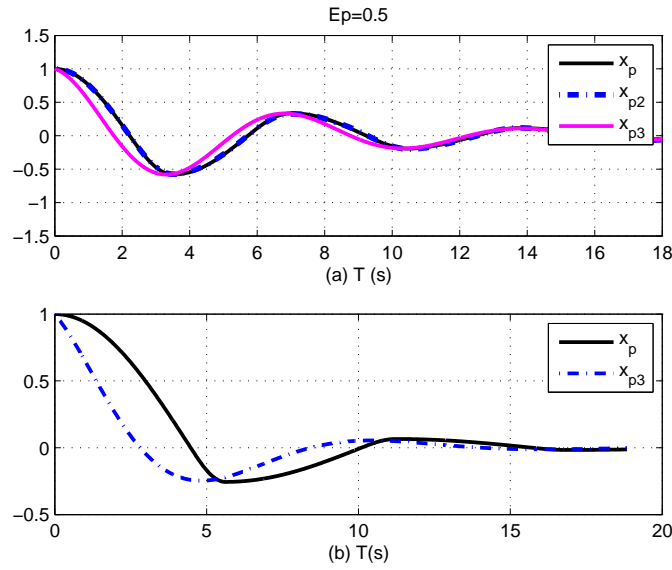


Figura 5.3: (a) Comparación de la solución numérica del oscilador de Reid x_p , la solución por variación de parámetros x_{p2} y la solución lineal equivalente x_{p3} . (b) Comparación de la solución numérica del oscilador de Reid x_p y su aproximación lineal equivalente x_{p3} cuando $\epsilon_{opt} = 0.8768$.

t en términos de (φ_p, a_p) , ver ecuaciones (5.14) y (5.16). Sin embargo, para hallar una expresión analítica se requiere utilizar una aproximación lineal. Sea \tilde{x}_p la aproximación lineal de \hat{x}_p , de las soluciones implícitas (5.14) y (5.16) se considera un número prescrito de periodos de integración $m \approx \varphi/\pi - 1$ entonces las aproximaciones lineales de las funciones de la amplitud y la fase están dadas por las ecuaciones (5.15) y (5.17) respectivamente, y la aproximación \tilde{x}_p resulta como sigue:

$$\tilde{x}_p(t) = \alpha^{\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\pi(\sqrt{\alpha}+1)}t} \cos \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}}t \quad (5.40)$$

donde cabe resaltar que el periodo de oscilación es $\tilde{T} = \frac{2\pi}{2\sqrt{1-\varepsilon}/1+\sqrt{\alpha}}$.

Para poder visualizar con claridad la diferencia entre la solución del oscilador de Reid x_p , la solución de variación de parámetros \hat{x}_p (x_{p2} en la figura 5.3) y su aproximación lineal \tilde{x}_p (x_{p3} en la figura), estas soluciones se graficaron en la figura 5.3(a) para un valor de $\varepsilon = 0.5$. La solución x_p fue calculada utilizando el método de Runge-Kutta, \hat{x}_p se encontró integrando numéricamente las ecuaciones (5.39) y combinando $\hat{x}_p = a_p(t) \cos \varphi_p(t)$, mientras que \tilde{x}_p se determinó con la relación (5.40); cabe resaltar que en la misma gráfica la solución de variación de parámetros \hat{x}_p se aproxima a x_p con bastante exactitud, mientras que la aproximación lineal \tilde{x}_p muestra una ligera discrepancia respecto a x_p .

La técnica del decremento logarítmico permite aproximar la solución no lineal del oscilador de

	$(\xi, \omega_d, \omega_n)$	(m_{eq}, c_{eq}, k_{eq})	$(\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0)$	$Q \approx \frac{1}{2\xi}$
$\varepsilon = 0.5$	(0.1749, 0.8966, 0.9106)	(1, 0.3184, 0.8292)	(1, -0.1592)	2.8596
$\varepsilon = 0.8768$	(0.4334, 0.5589, 0.6201)	(1, 0.5376, 0.3846)	(1, -0.2688)	1.1536
$\varepsilon = 0.99$	(0.8425, 0.1868, 0.3466)	(1, 0.5841, 0.1202)	(1, -0.2920)	0.5935

Cuadro 5.1: Valores de la respuesta y parámetros del sistema del modelo lineal equivalente (5.36).

Reid (4.3) con la solución lineal \bar{x} del sistema masa-resorte-amortiguador (5.35), es decir, $x_p \approx \bar{x}$ pero, $x_p \approx \hat{x}_p \approx \tilde{x}_p$ entonces $\tilde{x}_p \approx \bar{x}$. Además, la solución lineal \bar{x} debe tener el mismo periodo de oscilación que \tilde{x}_p , o sea $\bar{T} = \tilde{T}$, por lo tanto la frecuencia amortiguada en función de los parámetros (ε, α) es $\omega_d = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}}$. De la misma forma, las constantes de integración en \bar{x} deben satisfacer $A = 1$ y $\vartheta = 0$ para coincidir con \tilde{x}_p , al resolver para las condiciones iniciales resulta $(\bar{x}_0 = 1, \dot{\bar{x}}_0 = -\xi\omega_n)$ respectivamente, donde el coeficiente de amortiguamiento ξ es dado por el decremento logarítmico como se muestra a continuación.

El decremento logarítmico del oscilador de Reid Δ , dado por la ec. (5.37), se aproxima al calcular los valores $\tilde{x}_p(n\tilde{T})$, para tal fin se considera $n = 0$, entonces de la ec. (5.40) $x_0 \approx \tilde{x}_p(0) = 1$ y $x_1 \approx \tilde{x}_p(\tilde{T}) = \alpha$, por lo tanto, $\tilde{\Delta} := \Delta \approx \ln \frac{1}{\alpha}$. Debido a que $\tilde{x}_p \approx \bar{x}$ de la ec. (5.38), entonces la relación $\tilde{\Delta} \approx \Delta_{eq}$ se reduce a:

$$\ln \frac{1}{\alpha} \approx 2\pi \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi}} \quad (5.41)$$

para una respuesta amortiguada $\xi < 1$, entonces la ecuación anterior se puede resolver para ξ como sigue:

$$\xi \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\alpha} \quad (5.42)$$

dado ε , el coeficiente de amortiguamiento ξ puede hallarse con la expresión anterior, y consecuentemente la frecuencia natural amortiguada ω_d y la frecuencia natural ω_n pueden ser determinadas. El lugar geométrico del coeficiente de amortiguamiento contra ε se muestra en la figura 5.3(b).

Sin perder la generalidad, el sistema lineal masa-resorte-amortiguador equivalente (5.35) puede ser completamente caracterizado asumiendo que la masa es $m_{eq} = 1$, entonces los coeficientes de la rigidez del resorte y del amortiguamiento viscoso están dados por $k_{eq} = \omega_n^2$ y $c_{eq} = 2\xi\omega_n$, respectivamente. Además, dado ε los parámetros del sistema (m_{eq}, c_{eq}, k_{eq}) , las condiciones iniciales $(\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0)$ y los parámetros de la respuesta $(\xi, \omega_d, \omega_n)$ del sistema lineal equivalente (5.35) se pueden determinar completamente. Por ejemplo, dado $\varepsilon = 0.5$ los valores de los parámetros y la respuesta del sistema son mostrados en la Tabla 5.1. La solución numérica x_p y su solución lineal equivalente \bar{x}_p son graficadas en la figura 5.3(c), cabe notar que \bar{x}_p se aproxima a \tilde{x}_p con suficiente precisión.

5.5. Amortiguamiento óptimo inducido

En el oscilador de Reid, el valor óptimo de ε , que provee la respuesta amortiguada óptimo ocurre cuando en la respuesta lineal equivalente (5.36) la constante de tiempo $\xi\omega_n$ de la exponencial $e^{-\xi\omega_n t}$ es un máximo. La constante de tiempo es $\xi\omega_n = \omega_d \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ pero, $\xi < 1$ entonces $\xi\omega_n \approx \omega_d \xi = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\sqrt{\alpha}} \xi$ donde ξ es dada por la expresión (5.42), por lo tanto:

$$\xi\omega_n \approx \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\pi(1+\sqrt{\alpha})} \ln \frac{1}{\alpha} \quad (5.43)$$

el extremo ε_{opt} se calcula resolviendo numéricamente la ecuación no lineal $\frac{d(\xi\omega_n)}{d\varepsilon} = 0$ para ε . Para poder lograrlo se aplicó el método de Newton-Raphson, y el valor correspondiente de ε_{opt} hallado fue $\varepsilon_{opt} \approx 0.8768$, este valor también fue verificado en ([93],[41]).

El valor ε_{opt} es un máximo aislado debido a que $\frac{d^2(\xi\omega_n)}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon_{opt}} > 0$. La solución numérica del oscilador de Reid x_p y la respuesta lineal equivalente \bar{x} se evaluaron para ε_{opt} y su gráfica se muestra en la figura 5.3(b). Los parámetros correspondientes al sistema lineal equivalente para ε_{opt} se presentan en la Tabla 5.1.

En la Tabla 5.1 estan tabulados los valores de los parámetros del sistema lineal equivalente (5.35) y de su solución (5.36), cabe resaltar que para cada valor de ε presentado, los parámetros del sistema cambian, por lo tanto los valores para el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente $c_{eq} = 2\xi\omega_n$ no proporcionan una medida estandarizada para el amortiguamiento. Una medida estandar del amortiguamiento es el factor de calidad, Q , definido como $Q = 2\pi$ (energía almacenada/energía disipada en un solo periodo de oscilación) o el número de ciclos necesarios para alcanzar el estado estable, por practicidad se utiliza $Q \approx \frac{1}{2\xi}$, ver ([59] capítulo 37). Por ejemplo, comparemos el número de ciclos requeridos para alcanzar el estado estable cuando $\varepsilon = 0.5$ y cuando $\varepsilon_{opt} = 0.8768$, es decir, $Q \approx [2.9] = 3$ y $Q \approx [1.2] = 1$, las soluciones correspondientes son mostradas en la figura 5.3(a) y (c), respectivamente, y como se puede observar, el número de ciclos requerido se verifica para cada caso.

El análisis realizado en este capítulo tuvo como objetivo validar los resultados obtenidos del análisis del oscilador de Reid llevado a cabo con el enfoque de sistemas periódicos y teoría de Floquet-Lyapunov; se estudió utilizando técnicas clásicas de análisis no lineal. Por un lado, los teoremas de Lyapunov muestran cualitativamente el comportamiento asintótico de la solución trivial del oscilador de Reid, mientras que el fenómeno de amortiguamiento inducido por la rigidez conmutada es cuantificado empleando un modelo lineal de amortiguamiento viscoso equivalente.

Sin embargo, este enfoque no lineal conlleva aplicar aproximaciones lineales y realizar suposiciones que conducen a pérdidas de exactitud, además de que el proceso de cálculo es laborioso.

Capítulo 6

Resultados, conclusiones y trabajo futuro

Ahora que se ha finalizado el análisis del sistema, recapitularemos los contenidos presentados en los capítulos anteriores de este escrito para llegar a establecer las conclusiones a las que condujo este estudio.

Las estructuras o sistemas mecánicos están naturalmente expuestos a perturbaciones que inducen oscilaciones que pueden resultar perjudiciales para los componentes del propio sistema o que afectan su funcionamiento; tales perturbaciones pueden ser inherentes al sistema, por ejemplo, cuando el sistema posee partes rotativas o articuladas, o bien las perturbaciones pueden provenir del ambiente en el que el sistema realiza su operación. Sea cual sea la causa que origina las vibraciones, es un tema importante a considerar durante el diseño de la estructura y que representa hoy en día una rama importante del control, ha propiciado el desarrollo del control de vibraciones, una área ampliamente estudiada desde hace algunas décadas atrás y que aún presenta muchos retos y problemas por resolver.

De acuerdo a [69] existen tres tipos o categorías del control de vibraciones actual, a saber: el control pasivo, el control activo y el control semi-activo. El control pasivo utiliza solamente las propiedades de los elementos del propio sistema para mitigar las oscilaciones, como puede ser la rigidez, la inercia o el amortiguamiento, una de sus características principales es que no requiere fuentes de energía externa para funcionar y es altamente confiable, sin embargo, no garantiza que sea el más efectivo en todos los casos donde se aplique. El control de vibraciones activo se caracteriza por emplear elementos externos al sistema como actuadores para disipar la energía de las oscilaciones del sistema, por lo general requiere una fuente de energía externa para funcionar y conlleva agregar más elementos al sistema; este tipo de control suele ser muy efectivo en ciertas condiciones, pero tiene como desventaja la dependencia de una gran cantidad de energía externa para funcionar apropiadamente, por lo que puede resultar poco confiable en situaciones de emergencia donde no halla fuentes de energía

disponibles. Por su parte, el control de vibraciones semi-activo combina características de los dos tipos de control ya mencionados, utiliza a su favor las características de los propios elementos del sistema y las combina con el empleo de elementos o materiales activos para mejorar su efectividad; suele necesitar una pequeña fuente de energía externa o algún arreglo modificado del sistema original, se caracteriza por fusionar las ventajas de los otros tipos de control, la confiabilidad del control pasivo y la efectividad del control activo.

Debido a las ventajas que ofrece, el control semi-activo ha despertado el interés de los investigadores del área de control de vibraciones en las últimas décadas y se han logrado ya avances significativos en este ámbito; se han desarrollado dispositivos semi-activos que emplean para su fabricación materiales inteligentes, por ejemplo, los dispositivos de efecto térmico de memoria (ETM) que se construyen de materiales capaces de recuperar su forma después de haberse deformado con la presencia de calor. Otro ejemplo son los dispositivos que utilizan materiales piezoeléctricos, pues se aprovecha el efecto que poseen algunos materiales para deformarse ante la aplicación de carga eléctrica, o el efecto inverso de generar una carga eléctrica como consecuencia de la deformación mecánica. Otros dispositivos o técnicas de control semi-activo emplean elementos sencillos, es decir, que no utilizan materiales inteligentes, pero modifican la configuración de los sistemas mecánicos para lograr variar alguna de las propiedades del sistema, por ejemplo, variar la rigidez de un resorte al limitar el número de espirales que pueden deformarse.

Para realizar este estudio se eligió un sistema mecánico de un grado de libertad, compuesto por una masa y un resorte simples, pero que se someten a una ley de control semi-activo heurística. Dicha ley de control se conoce como control por conmutación de rigidez, ya que consigue variar la rigidez del sistema entre dos valores extremos, es decir, conmutar la rigidez de un valor mínimo a un valor máximo. En el trabajo llevado a cabo por Ramaratnam [115] se aplicó esta ley de control semi-activo sobre una estructura mecánica flexible (que puede modelarse como un conjunto de sistemas masa-resorte) utilizando elementos piezoeléctricos y observó que la conmutación de rigidez indujo amortiguamiento al sistema, logrando disipar la energía de las vibraciones y eliminar así las oscilaciones, llevando los estados del sistema a la estabilidad asintótica. Mientras que en el estudio realizado por Winthrop [93] se llevó a cabo un análisis comparativo entre diferentes dispositivos de rigidez variable disponibles en la literatura para proporcionar una herramienta que ayudara al diseño y selección de dichos dispositivos. Winthrop identificó dos parámetros para comparar el desempeño de cada dispositivo, el primero que relaciona los dos valores de frecuencia natural alcanzados por los dispositivos de rigidez variable, es decir, la frecuencia natural mínima entre la frecuencia natural máxima. Y el segundo parámetro ϵ , que relaciona los dos valores de rigidez alcanzados, a saber, k_0 y k_1 .

Winthrop resolvió de forma implícita exacta un problema de supresión de vibraciones de un sistema de 1 GDL con rigidez variable utilizando para ello el parámetro ϵ y la ley de control de conmutación de rigidez. Con dicho problema logró hallar el valor máximo de ϵ con el cual se alcanza el mayor coeficiente de amortiguamiento inducido en el sistema, y por consiguiente, el que logra disipar de forma efectiva la energía de las vibraciones. Tal valor resultó ser $\epsilon = 0.877$.

Sin embargo, aunque en el trabajo publicado por Winthrop llega al valor óptimo de ϵ mediante la solución explícita aproximada del sistema de 1 GDL empleando la solución implícita exacta, no brinda una explicación cualitativa de por qué ese es el valor que logra una mayor disipación de energía.

Los antecedentes vistos en la literatura, y en gran parte los resultados del trabajo de [93], motivaron la realización de estudio. El objetivo principal se enfocaba en analizar el sistema masa-resorte de 1 GDL con el modelo del oscilador de Reid aplicando la ley de control semi-activo de conmutación de rigidez y el parámetro ϵ para hallar la solución exacta del sistema empleando teoría de sistemas periódicos y la teoría de Floquet-Lyapunov para brindar una explicación sustentada matemáticamente del fenómeno de amortiguamiento inducido por la rigidez variable y de por qué se obtiene el valor óptimo $\epsilon = 0.877$.

Para la representación matemática del sistema masa-resorte de 1 GDL se empleó la ecuación diferencial no lineal del modelo del oscilador de Reid [116], tal ecuación incorpora en su representación el amortiguamiento histerético, que depende directamente del parámetro ϵ , que como ya se describió, esta dado por la relación de los dos valores de rigidez entre los que la ley de control conmuta al sistema. En el modelo matemático del sistema también se representa la ley de control por conmutación de rigidez, dada por la función signo del producto de la posición y la velocidad del sistema. Al tratarse de un sistema no lineal, resulta poco tratable matemáticamente o demasiado complicado sin utilizar algún tipo de transformación o métodos de aproximación, que aunque logran brindar resultados y obtener la solución en estado estable del sistema, conllevan una desviación de exactitud debida a las mismas aproximaciones utilizadas.

Una de las herramientas que se emplearon para obtener la solución del sistema, fue la teoría de sistemas periódicos. Como ya se ha mencionado anteriormente, la ley de control semi-activo de conmutación de rigidez muestra un comportamiento periódico, por lo tanto, se considera una función periódica en el tiempo $q(t) = q(t + T)$, donde T es el periodo fundamental; el enfoque propuesto en este trabajo se basó en este importante hecho.

Se definieron para el análisis un par de condiciones iniciales para dos problemas: el de posición y el de velocidad inicial, ambos con condiciones iniciales estándar (es decir, valor 1 y valor 0 para posición inicial; y valor 0 y 1 para el caso de velocidad inicial). Se definió entonces una expresión analítica para $q(t)$ al calcular los instantes de conmutación donde la ley de control por conmutación de rigidez ($sgn(x\dot{x})$) cambia o cruza los ejes del plano de fase mostrado en la figura 4.2.

Se demostró que para ambos casos, posición y velocidad inicial, el periodo $T(\epsilon)$ resultaba igual, demostrando que todas las soluciones para el conjunto de condiciones iniciales se aproximan asintóticamente a la solución trivial con el mismo periodo. Este resultado permitió reescribir la ecuación del oscilador de Reid como una ecuación diferencial lineal periódica, que se nombró ahora como el Oscilador Periódico de Reid.

En el Oscilador Periódico de Reid la función periódica que denota la ley de control semi-activo por conmutación de rigidez, depende de un conjunto de condiciones iniciales predeterminadas cuyos valores no eran relevantes para este enfoque debido a que el periodo permanecía igual para ambos

casos.

Utilizando el conjunto de soluciones linealmente independientes para posición y velocidad inicial se halló la matriz de monodromía del sistema $\Phi(T)$, dada por los valores de posición y velocidad de ambos conjuntos de soluciones en el instante $T(\epsilon)$. Una vez definida la matriz de monodromía del Oscilador Periódico de Reid, se determinó que la solución trivial del Oscilador Periódico de Reid era asintóticamente estable; la prueba de la afirmación anterior esta dada por el hecho de que los multiplicadores ρ del oscilador son los valores propios de la matriz de monodromía $\Phi(T)$, y definidos por el parámetro ϵ , a saber, $\rho(\epsilon) = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$, es un multiplicador doble.

Se utilizó entonces el teorema de Floquet para definir que la solución trivial del Oscilador Periódico de Reid es asintóticamente estable debido a que $\rho(\epsilon) < 1 \forall \epsilon \in (0, 1)$. Con los multiplicadores conocidos, fue posible definir o hallar los exponentes de Floquet $\lambda(\epsilon)$. Luego se demostró que los exponentes de Floquet cumple con $\lambda(\epsilon) < 0$ para todo $0 < \epsilon < 1$, y hallar una factorización de la matriz fundamental del Oscilador Periódico de Reid. Con estos elementos y utilizando el teorema de reducibilidad de Lyapunov, se transformó la ecuación del oscilador periódico en un sistema lineal invariante en el tiempo, y se halló la solución de la transformación.

El paso siguiente en la ejecución del análisis, consistió en llevar a cabo la optimización del valor del parámetro ϵ , puesto que se conocía que debía estar en el intervalo $(0, 1)$ pero no se sabía con certeza cual valor dentro de ese intervalo era el que proporcionaría el mayor coeficiente de decaimiento de energía en el sistema. Se determinó que el valor óptimo estaría dado por el valor de los exponentes de Floquet cuando éstos sean un máximo, por lo que fue necesario obtener la derivada del exponente de Floquet en términos de ϵ . Ya que los exponentes de Floquet corresponden a los valores propios, determinar su derivada corresponde a realizar un análisis sensitivo. Se obtuvo la derivada del exponente de Floquet, luego se resolvió numéricamente para hallar el valor óptimo $\epsilon \approx 0.87677$, prácticamente igual al valor al que llegó [93].

El análisis continuó tratando ahora el oscilador de Reid no lineal con métodos no lineales, para validar y comparar los resultados a los que se llegaron. Se analizó la estabilidad del oscilador empleando la teoría de Lyapunov, que se describió en el capítulo de preliminares; se propuso una función candidata de Lyapunov y mediante la obtención de su derivada se determinó que poseía estabilidad asintótica. Fue posible deducir entonces que la conmutación de rigidez inducía en el sistema un fenómeno de amortiguamiento, y para determinarlo fue necesario emplear un enfoque de aproximación para obtener al menos un modelo cuantitativo del amortiguamiento. Se consideró un sistema lineal con amortiguamiento viscoso, y se aplicó la técnica del decremento logarítmico para hallar una expresión del amortiguamiento viscoso equivalente. La aplicación de dicha técnica requirió el uso del método de variación de parámetros para aproximar la solución de la amplitud y fase del oscilador de Reid no lineal y así hallar dos picos de amplitud consecutivos de la solución del oscilador de Reid, ya que éste no tiene una solución cerrada.

Se obtuvo una solución aproximada del oscilador no lineal, a partir de la cual se obtuvo el valor óptimo de ϵ al calcular la derivada del amortiguamiento por la frecuencia natural, dando como

resultado $\epsilon_{opt} \approx 0.8768$, un valor practicamente igual al que se obtuvo con la teoría de Floquet.

Revisemos ahora cuáles han sido los resultados obtenidos en este trabajo.

6.1. Resultados

En este trabajo se desarrolló un enfoque novedoso basado en la teoría del sistema periódico para analizar el problema de control de vibraciones por rigidez conmutada de un sistema masa-resorte de un grado de libertad. El sistema dinámico es gobernado por el oscilador de Reid, que es representado por una ecuación diferencial no lineal, donde una etapa de no dimensionalización permitió definir el parámetro ϵ que relaciona ambos extremos de rigidez y $\epsilon \in (0, 1)$. Un hecho clave para aplicar la teoría del sistema periódico fue entender que la excitación paramétrica dependiente de los estados oscila periódicamente en el tiempo para el caso de vibración libre con condiciones iniciales estándar no dimensionalizadas, como se ha explicado con un poco más de detalle en la sección anterior.

Con el enfoque propuesto y las herramientas empleadas se logró definir al oscilador de Reid como una función periodica en el tiempo continua en partes, entonces durante los instantes de conmutación de la ley de control semi-activa, el oscilador de Reid se volvió integrable y la matriz de monodromía así como con los exponentes de Floquet se calcularon en términos del parámetro ϵ . La estabilidad asintótica del oscilador de Reid se demostró ya que los exponentes de Floquet no son positivos, este hecho dió una explicación cualitativa del fenómeno del amortiguamiento inducido por la conmutación de rigidez.

Por otro lado, para el rango dado de ϵ un problema de optimización se estableció, asumiendo como índice de desempeño el decaimiento del amortiguamiento, entonces la dependencia de los exponentes de Floquet en el parámetro permitió llevar a cabo un análisis sensitivo como medio de optimización, y tal proceso dió como resultado el valor óptimo $\epsilon_{opt} = 0.8767$, encontrado también en la literatura.

Para aclarar tal resultado, se utilizó un modelo de amortiguamiento viscoso equivalente en conjunto con la técnica del decremento logarítmico para hallar el amortiguamiento viscoso equivalente y llevar a cabo el proceso de optimización. Sin embargo, este enfoque mostró una pérdida de exactitud ya que se realizaron varias suposiciones y aproximaciones lineales, aunado a que el procedimiento resultó más difícil matemáticamente. No obstante, el enfoque del sistema periódico también provee conformidad cuantitativa.

En adelante, el nuevo enfoque aquí mostrado provee una nueva manera de analizar el problema de control semi-activo de vibraciones con rigidez conmutada de una forma natural y directa sin aproximaciones lineales ni suposiciones, y también brinda una visión cualitativa en el fenómeno de amortiguamiento y conformidad cuantitativa para propósitos de optimización.

Con los resultados obtenidos del análisis del sistema masa-resorte de 1 GDL sometido a la ley de control semi-activo de conmutación de rigidez, se logró demostrar completamente que el uso de la teoría de sistemas periódicos en conjunto con la teoría de Floquet-Lyapunov logra proveer de una explicación cualitativa y también cuantitativa del origen del amortiguamiento inducido en el sistema,

así como la obtención del valor óptimo ϵ para el cual se obtiene la mayor disipación de energía y por lo tanto se mitigan las oscilaciones, evitando caer en métodos de aproximación que derivan en pérdida de exactitud y errores; por lo que se puede concluir que se ha logrado probar la hipótesis propuesta al inicio de este escrito.

Otros resultados que es importante mencionar son las publicaciones derivadas de este trabajo, que son mostradas a continuación.

6.1.1. Publicaciones derivadas de esta investigación

Durante el periodo de desarrollo de este análisis se realizaron dos trabajos que fueron sometidos y/o presentados en revistas para su publicación.

El primer artículo titulado *Control semi-activo de vibraciones de una estructura via materiales piezoeléctricos: análisis de posición óptima del actuador PZT* fue presentado en el 2do Congreso Iberoamericano de Instrumentación y Ciencias Aplicadas-SOMI XXXI Congreso de Instrumentación, en la Ciudad de Guatemala, Guatemala en el periodo del 26 al 28 de octubre de 2016 y se publicó en la edición de ese mismo año de la revista del mismo congreso, con el número ISSN 2395-8499.

El segundo artículo fue publicado en versión *online* de la revista *Journal of Sound and Vibration* con el título *Stability analysis of linear systems with switchable stiffness using the Floquet theory*, que a la fecha de terminación de esta tesis se encuentra en espera para su publicación en la versión impresa de la misma revista.

Ambos artículos fueron sometidos en conjunto con mi asesor, el Dr. Luis Omar Moreno Ahedo como co-autor en el primero, y como autor principal en el segundo.

6.2. Trabajo futuro

La aportación del nuevo enfoque de análisis que aquí se desarrolló da pie a que se realicen futuras investigaciones sobre los sistemas lineales con rigidez variable, ya sea que se extienda el análisis para el caso de un sistema masa-resorte de múltiples grados de libertad con respuesta libre, o que se aplique en los casos de un grado de libertad (1GDL) o múltiples grados de libertad del oscilador de Reid con respuesta forzada a la vibración. En cualquiera que sea el panorama de análisis, es posible aplicar las teorías y técnicas explicadas en capítulos anteriores y hallar la solución del sistema evitando la pérdida de precisión al no recurrir a aproximaciones lineales.

Apéndice A

Preliminares: control semi-activo

En la sección 2.5 se mostró un breve resumen de los dispositivos semi-activos utilizados para el control de vibraciones, así como se definieron igualmente de forma breve algunos de los conceptos básicos o más relevantes que permitieron comprender los estudios llevados a cabo con tales dispositivos así como los avances y conclusiones a los que se había llegado hasta la fecha. En este apartado se extiende la definición de los conceptos, pero sobre todo, se presenta una extensa revisión por la literatura disponible, donde se detallan los avances en diseño y experimentación de diversos tipos de dispositivos semi-activos, como se verá a continuación.

El primer término que debe comprenderse es el de vibración mecánica, definido como el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio [47]. En la mayoría de los casos, las vibraciones mecánicas son un efecto indeseable que se debe eliminar o mitigar debido a que producen un incremento del esfuerzo y pérdida de energía en las máquinas o estructuras. Por lo anterior, recientemente se ha dado mayor importancia al análisis de vibraciones y se han desarrollado métodos de control aplicados al diseño de las estructuras, debido a la tendencia que existe de construir máquinas de alta velocidad o estructuras más ligeras y resistentes.

El control de vibraciones se refiere al conjunto de técnicas o métodos utilizados para limitar o alterar la respuesta a las vibraciones de los sistemas mecánicos [68]. Según Xu [69] existen tres clases de sistemas de control de vibraciones, dependiendo de la cantidad de energía externa que requiera el sistema para realizar su función[68]:

- Sistema de control de vibraciones pasivo: utiliza el movimiento de la estructura para proveer las fuerzas de control, sin requerir una fuente de energía externa.
- Sistema de control de vibraciones activo: provee fuerzas de control a la estructura para contrarrestar las perturbaciones, requiriendo una gran cantidad de energía para llevar a cabo su función [101].
- Sistema de control de vibraciones semi-activo: requiere una pequeña fuente de energía externa para operar y utiliza el movimiento de la estructura para proveer las fuerzas de control, cuya magnitud

es ajustada mediante la energía externa.

La selección adecuada del sistema de control óptimo para la estructura, requiere un análisis de las diferentes condiciones que envuelven a la misma; por ejemplo, para el sistema de control activo, se debe analizar si la fuente de energía externa será capaz de operar durante las perturbaciones (en caso de sismos u otros factores ambientales); o para el sistema de control pasivo, se debe comprobar si las fuerzas de control serán suficientes para contrarrestar las perturbaciones [69].

En este estudio se optó por analizar los sistemas de control semi-activo, ya que combinan la confiabilidad de un sistema de control pasivo, que no requiere grandes cantidades de energía para funcionar, con la mayor ventaja que ofrecen los sistemas de control activo, que permite ajustar las variables de la estructura (como el amortiguamiento, la rigidez o la masa) para llevar a cabo el control [68], además de la ventaja que ofrecen sus bajos requerimientos de energía y costo. Generalmente, los sistemas de control semi-activo se originan a partir de un sistema de control pasivo que se ha modificado para lograr variar o ajustar las propiedades mecánicas del mismo [69].

El control semi-activo, también llamado adaptivo-pasivo elimina las limitaciones que existen con el control pasivo y activo, ya que logra integrar de forma efectiva un esquema de control sintonizable con dispositivos pasivos ajustables [68].

Otro término clave que se debe comprender es el de rigidez, que se define como la resistencia a la deformación que presenta un cuerpo elástico sometido a la aplicación de fuerzas externas. También es esencial comprender el término resonancia mecánica, que de forma general, se define como un fenómeno en el cual un cuerpo sometido a las vibraciones de una fuente cercana que corresponden a la frecuencia natural de dicho cuerpo, comenzará a oscilar por sí mismo a la frecuencia de la fuente cercana aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento hasta alcanzar su punto máximo.

Los sistemas de control de vibraciones basados en control semi-activo que en esta investigación se utilizan, son los dispositivos de rigidez variable. Éstos son componentes que poseen la característica de variar su rigidez mediante diferentes algoritmos de control, utilizando materiales inteligentes (capaces de cambiar sus propiedades mecánicas con la aplicación de cargas térmicas o eléctricas [62]) para su construcción o mediante métodos mecánicos [93]. Los dispositivos de rigidez variable son utilizados en las aplicaciones de control de vibraciones debido a que pueden cambiar la adaptación óptima a distintas condiciones del sistema, además de que la rigidez influye de forma significativa en la operación óptima del sistema a controlar [68].

Este documento se enfoca en los cinco tipos distintos de dispositivos de rigidez variable, a saber: los contruidos con materiales de efecto térmico de memoria, los de tipo electromagnético, los piezoeléctricos, los de configuración mecánica y los magnetorreológicos.

Los dispositivos de rigidez variable de tipo efecto térmico de memoria (ETM) son materiales metálicos con una alta capacidad de amortiguamiento, que recuperan su forma original al aplicarles temperatura, cambiando de esa forma la rigidez de un sistema mecánico y consecuentemente cambian las regiones de resonancia; ciertos estudios indican que este efecto puede atenuar la amplitud de las

vibraciones en un rango de frecuencia crítica, lo que también permite cambiar los modos de vibración de la estructura. Los ETM tienen un comportamiento no-lineal lo que vuelve complejo obtener su modelo dinámico y la simulación numérica, ya que deben considerarse los cambios de parámetros como temperatura y frecuencia de excitación [62].

Existen también dispositivos de rigidez variable desarrollados a partir de configuraciones mecánicas, tal es el caso de un amortiguador de vibraciones que consiste en una masa adjunta a un resorte helicoidal con un divisor mecánico que secciona el resorte en dos partes. El divisor mecánico separa parte del resorte del resto del amortiguador, así el número de hilos usados en el amortiguador de vibraciones puede cambiarse rotando el resorte [93]. Otro dispositivo de rigidez variable basado en un arreglo mecánico es el que utiliza dos resortes colocados en sentido opuesto uno del otro, y utiliza un motor a pasos para incrementar la distancia de separación entre los dos resortes. De esa forma se logra variar el coeficiente de rigidez del sistema mecánico [93].

El tercer tipo de dispositivo de rigidez variable es el electromagnético, que consiste de un arreglo que utiliza dos imanes permanentes con un electroimán en medio de los primeros que generan campos magnéticos modulables para crear una rigidez periódica en el tiempo, pues aprovechan la propiedad que tienen los campos magnéticos de generar fuerzas repelentes cuando los polos iguales de dichos campos se aproximan[122]. La intensidad de las fuerzas repelentes resultantes dependerá de la distancia que exista entre los imanes y la intensidad del campo magnético[40]. La intensidad del campo magnético puede ser alterada aplicando una corriente al electroimán, provocando un cambio en la fuerza magnética y consecuentemente, resulta un cambio de la rigidez mecánica equivalente[40].

Otro tipo de dispositivos son los llamados dispositivos magnetorreológicos, tales dispositivos utilizan para su construcción fluidos o sólidos magnetorreológicos, los fluidos magnetorreológicos (FMR) son aquellos materiales que experimentan cambios reversibles instantáneos significativos en las características del material cuando están sujetos a los cambios de un campo magnético.

Por último, los dispositivos de rigidez variable piezoeléctricos son aquellos que aprovechan el fenómeno de piezoelectricidad que poseen algunos cristales que al ser sometidos a un campo eléctrico tienden a deformarse, y cuando se deja de someter el cristal al campo eléctrico éste recupera su forma original; de esa forma se logra variar la rigidez del dispositivo y utilizarlos como un actuador para mitigar oscilaciones en sistemas mecánicos. Y otro tipo de dispositivo recientemente utilizado se clasifica como dispositivos magnetorreológicos, que utilizan fluidos para variar la rigidez.

Veamos ahora una descripción de los avances realizados para cada una de las clasificaciones de dispositivos semi-activos empleados en control de vibraciones.

Dispositivos de control semi-activo por rigidez variable

En esta sección se hace un repaso de los dispositivos de control semi-activo basados en la rigidez conmutada u otros relacionados. El contenido presentado proviene de una revisión de la literatura disponible.

El control de vibraciones con elementos de rigidez variable fue propuesto por primera vez por Chen en 1984, en donde, mediante el ejemplo de control de vibraciones en el problema de la cuerda, propone diversas leyes de control sobre el elemento de rigidez variable en el tiempo, este le permitió validar el concepto de rigidez variable aplicado a estructuras aeroespaciales de gran envergadura. Posteriormente Onoda [103] basándose en Chen implementa un dispositivo piezoeléctrico de rigidez variable para el control de vibraciones en un sistema masa-resorte, en general Onoda estudia dos leyes de control, los hallazgos son validados experimentalmente. Por otro lado dada la complejidad de diseñar dispositivos de rigidez variable, hasta ahora se han diseñado haciendo uso de materiales compuestos como son los piezoeléctricos [28] y materiales de efecto térmico de memoria [38], otro de estos dispositivos de implementación fácil es el resorte desarrollado por Ramaratman en 2006, por citar algunos.

No fue hasta el trabajo de [93] donde se realizó una clasificación pormenorizada de los dispositivos y materiales de rigidez variable, además se definieron un conjunto de parámetros medibles y estandarizados para dispositivos de rigidez variable.

Dispositivos de rigidez variable de efecto térmico de memoria (ETM)

Los primeros dispositivos que se abordan en este repaso por la literatura son los de efecto térmico de memoria. Estos dispositivos están contruidos con un material inteligente cuya principal característica es que es capaz de recuperar su forma original después de haber sido deformados al aplicar un aumento de temperatura.

Los dispositivos de rigidez variable de efecto térmico de memoria (ETM) fueron utilizados por primera vez en un estudio de vibraciones por Baz en 1990 [1], donde demostró teórica y experimentalmente la factibilidad de utilizar actuadores de efecto térmico de memoria para el control de vibraciones en vigas en voladizo flexibles. Para dicho estudio, se obtuvo la dinámica del sistema haciendo el análisis del elemento finito para las vigas, combinado con las características térmicas y dinámicas de los actuadores ETM. Para el experimento, el actuador de efecto térmico de memoria se colocó de forma externa a la viga para mejorar el enfriamiento y la respuesta dinámica del actuador. El actuador utilizado consiste en un cable recto hecho de una aleación de níquel y titanio cuyo comportamiento es el siguiente: mientras el material está a una temperatura baja puede ser deformado si se estira, y al calentarlo recuperará su forma original mientras alcanza su temperatura de transformación. El estudio logró demostrar lo factible que resulta el uso de actuadores de efecto térmico de memoria en el control de vibraciones para estructuras flexibles.

Posteriormente, Gandhi y Wolons en 1999 [46] realizaron un estudio donde caracterizaron el comportamiento de amortiguación de elementos de efecto térmico de memoria hechos de una aleación de níquel y titanio (Ni-Ti) usando un enfoque de módulo complejo; su objetivo era obtener una caracterización de referencia para el uso de ETM como elementos de control pasivo de vibraciones.

Por su parte Lagoudas en 2001 [38] propuso utilizar un modelo simplificado de la respuesta

pseudoelástica de un ETM, adecuado para aislar las vibraciones de un sistema; dejando de lado la histéresis no lineal de otro modelo termodinámico constitutivo de un ETM. Los resultados del uso del modelo simplificado fueron comparados con la respuesta del modelo termodinámico, corroborando que ambos sistemas proporcionan una respuesta similar ante las vibraciones.

Khan en 2002 [87], desarrolló un estudio cuya finalidad fue observar el efecto de la pseudoelasticidad de los resortes de efecto térmico de memoria en los sistemas vibratorios. El trabajo realizado utilizó como base el modelo de histéresis de Preisach para predecir la respuesta pseudoelástica del resorte de ETM. La investigación se llevó a cabo solo de manera teórica con simulaciones y resultados numéricos, sin embargo, sentó la base para realizar experimentos posteriores para validar los resultados.

Posteriormente Masuda en 2002 [3] estudió el efecto de utilizar un dispositivo de efecto térmico de memoria pseudoelástico en un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento, el objetivo de su estudio fue hallar la relación básica que existe entre la forma del ciclo de histéresis del dispositivo ETM y su comportamiento como dispositivo amortiguador. Se lograron dos hallazgos con los resultados del estudio: el primero fue demostrar que para una amplitud de excitación dada, la escala del ciclo de histéresis necesita ajustarse para que alcance el bucle máximo sin que lo exceda; el segundo hallazgo que se fue que, la relación entre el área dentro del ciclo de histéresis y el área correspondiente a una envoltura de forma triangular debe ser tan grande como sea posible. Tales resultados fueron de utilidad para futuros estudios.

Dutta en 2005 [120] presentó un modelo matemático para el control de un actuador de ETM compuesto por un cable en forma de resorte, el funcionamiento del actuador estaba basado en diferentes fenómenos físicos como la convección de calor, transformación de fase, variación tensión-deformación, y la variación de la resistencia eléctrica de la transformación de fase; el modelo propuesto unía que representan los fenómenos por separado. El modelo matemático incluía un modelo de histéresis de temperatura, así como un modelo diferencial inverso de la histéresis que permitió obtener un modelo inverso de todo el sistema del ETM. El modelo de control propuesto consistía de un control en lazo cerrado que utilizaba el modelo inverso del sistema como compensación. El modelo se aplicó en forma de simulación donde se obtuvieron resultados que probaron la efectividad del modelo matemático y de control.

Por su parte Rustighi en 2005 [44] diseñó e implementó un absorbedor de vibraciones adaptivo utilizando elementos de efecto térmico de memoria, dicho dispositivo aprovechaba la cualidad de los elementos ETM de cambiar su módulo elástico con temperatura para construir un dispositivo sintonizable en todo momento. El absorbedor de vibraciones sintonizable (AVS) se construyó utilizando un diseño con vigas, para obtener un modelo de dos grados de libertad, el AVS se caracterizó experimentalmente. El resultado al realizar la experimentación con el AVS fue que el cambio en el módulo elástico fue de cerca de 47.5 %, al aplicar continuamente calor y frío al dispositivo ETM. Con base en los resultados Rustighi concluye que a pesar de tener una respuesta lenta el dispositivo AVS con ETM tiene un buen funcionamiento además de que se logró variar la rigidez del dispositivo de forma

exitosa.

En 2006 He [60] desarrolló un control de vibraciones para aplicar sobre un sistema de cojinetes rotativo utilizando elementos de ETM, el objetivo de tal estudio consistía en lograr que el sistema de cojinetes rotativo pasara por la velocidad crítica de forma segura controlando efectivamente la vibración generada; se propuso un sistema de soporte auto-optimizable basado en elemento de efecto térmico de memoria. En tal sistema de soporte se utilizaron resortes de ETM para construir un cojinete de pedestal para el sistema rotativo. El principio de un absorbedor es usado para calcular y cambiar la rigidez del cojinete de pedestal con ETM para que el eje del rotor pudiera pasar la velocidad crítica de rotación pasando por la anti-resonancia y poder controlar las vibraciones generadas. Resultados de experimentos numéricos probaron la efectividad del dispositivo de cojinete de pedestal con ETM para el control de vibraciones del sistema de cojinetes rotativo, y He concluye que dicho método puede ser utilizado para resolver una amplia variedad de problemas de control de vibraciones en máquinas rotativas.

Song [52] presentó en 2006 un estudio donde realizó una revisión de las aplicaciones de los materiales de ETM para el control pasivo, activo y semi-activo de vibraciones en estructuras civiles, dicho estudio contenía una descripción detallada de las características de los materiales ETM, así como sus propiedades principales (efecto térmico de memoria y pseudoelasticidad); además presentaba como se utilizan los materiales ETM como actuadores, disipadores pasivos de energía y amortiguadores en el control de estructuras civiles. También realizó una revisión de las investigaciones actuales de aquel entonces que aplicaban materiales de efecto térmico de memoria para el control pasivo, activo o semi-activo de vibraciones en estructuras. Además aportó una descripción de los mecanismos de operación, diseños y resultados experimentales de diversas investigaciones que utilizaron materiales ETM. El objetivo de Song fue probar la efectividad de la aplicación de los materiales de ETM mostrando diferentes ejemplos y sus resultados matemáticos y experimentales.

Posteriormente Zhang [142] en 2007 presentó un estudio donde proponía un amortiguador histérico basado en ETM para la mitigación de amenazas sísmicas, tal dispositivo utilizaba cables atados de Nitinol superelásticos para la disipación de energía. El amortiguador proveía características distintivas como un comportamiento histérico sintonizable y la capacidad para resistir varios terremotos a nivel de diseño. El dispositivo se denominaba amortiguador histérico reutilizable (AHR); ajustando los parámetros de diseño del AHR se logró modificar el comportamiento histérico para adaptarlo a las necesidades de las aplicaciones de control pasivo de estructuras. Los parámetros ajustables del dispositivo incluyen el ángulo de inclinación de los cables de Nitinol, el nivel de pre-tensión y el efecto de la fricción. El dispositivo se utilizó en un experimento con una estructura de metal de tres niveles donde se obtuvieron resultados que probaron la eficacia del AHR para reducir la respuesta de estructuras ante terremotos, y que además puede reutilizarse debido a la alta resistencia a la fatiga que proveen los cables de Nitinol.

Birman [15] en 2008 presentó una investigación donde utilizaba cables de ETM como base y soporte elásticos en el control de placas compuestas. En tal estudio se proponen dos métodos de

control de vibraciones, el primero utiliza cables pretensados de ETM incrustados en las mangas unidas a la superficie de la placa, el espacio entre los cables puede ser arbitrario y variable permitiendo el desarrollo de un sistema de soporte de ETM con control máximo y con un peso adicional mínimo. El segundo método propuesto utiliza cables de ETM que soportan la placa en puntos estratégicamente seleccionados. Los resultados numéricos obtenidos demostraron que es posible alcanzar una reducción significativa de la amplitud de las vibraciones en un amplio rango de frecuencias utilizando cualquiera de los dos métodos propuestos en el estudio.

Por su parte, Aguiar [7] en 2009 presentó una investigación donde realizó el modelado, simulación y análisis experimental de resortes helicoidales fabricados con materiales ETM. Utiliza un modelo de una sola dimensión para describir el comportamiento de corte termo-mecánico del material, y después modela resortes helicoidales por considerarlos un enfoque clásico. Los resultados de la experimentación fueron acordes con los resultados numéricos, probando la efectividad de los resortes construidos a partir de materiales de ETM.

En 2009 Sharabash [9] presentó una propuesta de un nuevo dispositivo pasivo de control sísmico para puentes atirantados utilizando materiales ETM, en el estudio se busca utilizar la superelasticidad y la capacidad de amortiguamiento de los materiales de efecto térmico de memoria para construir un dispositivo recentrado que funcione como un disipador de energía para los puentes atirantados. Para la realización de pruebas se utilizó un modelo de puente de tres dimensiones; los amortiguadores de ETM se utilizan en las conexiones del muelle de la cubierta y en las de la torre de la cubierta del puente, de esa forma es evaluada la efectividad de los amortiguadores de ETM para el control del desplazamiento de la cubierta y para limitar los momentos de corte y doblado de las torres del puente. Los resultados analíticos de este estudio demostraron que los amortiguadores de ETM son efectivos para el control del comportamiento sísmico del puente.

En 2010 Costanza [32] realizó un estudio donde investigó el efecto en un solo sentido de los resortes ETM fabricados con Nitinol, el objetivo de tal investigación fue definir una guía para el diseño de actuadores lineales para ciclos altos de trabajo pesado. Para el estudio se construyeron diferentes resortes hecho con materiales ETM y con acero de diferentes diámetros; se realizaron pruebas de diferentes números de ciclos aplicando cargas distintas a los resortes en cada prueba y haciendo pruebas termo-mecánicas (aplicando calor y frío al material), el comportamiento de los resortes ETM se analizó midiendo la longitud máxima que alcanzaban en cada prueba. Con tales resultados se logró caracterizar los resortes ETM, y pueden utilizarse para diseñar y construir un actuador lineal para ciclos altos de trabajo pesado.

Sado [36] publicó en 2010 un artículo donde mostraba el trabajo realizado de la dinámica no-lineal de un sistema autoparamétrico de tres grados de libertad con dos péndulos conectados por un resorte de ETM. El sistema consistía de una masa m_1 que cuelga de un resorte y un amortiguador, dos péndulos de longitud l y masas m_2 y m_3 montados sobre el cuerpo de la masa m_1 y unidos por un resorte ETM; se proponía el uso de un control adaptivo que aprovechara la característica de los materiales ETM de cambiar sus parámetros mediante una transición de temperatura reversible. Se

demonstró mediante métodos numéricos que al variar la temperatura del resorte ETM se logra cambiar el comportamiento del sistema autoparamétrico.

Khan [43] realizó en 2011 un diseño para la construcción de un actuador de resorte helicoidal de ETM con un nuevo enfoque; en tal diseño, a diferencia del tradicional, se reduce la transformación de tensión, ya que no solo se considera en las zonas lineales; además utiliza la transformación parcial de tensión para mejorar la capacidad del actuador ETM. El estudio provee una comparación entre el diseño tradicional y el nuevo enfoque propuesto y se analizan los efectos en el diseño y los parámetros que conlleva.

Por su parte Kumar [132] en 2011 realizó estudios experimentales con un absorbedor dinámico de vibraciones (ADV) utilizando resortes ETM de Nitinol como actuadores. El ADV se desarrolló para reducir las vibraciones inducidas en una viga en voladizo, el resorte ETM se utiliza con una masa acoplada; se varía dinámicamente la rigidez del resorte para atenuar las vibraciones. Utilizando un control PID se realizaron análisis simulado y experimental para comparar los resultados. Se demostró la efectividad del ADV para el control activo de vibraciones.

En 2011 Mirzaeifar [112] presentó un estudio enfocado en analizar la respuesta pseudoelástica de los resortes helicoidales hechos con materiales ETM, tal estudio se realizó de manera analítica, numérica y experimental. Para la solución analítica se redujo el modelo tridimensional de un resorte helicoidal a un modelo más simple de una sola dimensión para obtener la solución de la respuesta de torsión del sistema con la aplicación de carga y sin ella. Para el análisis numérico se implementaron las ecuaciones del sistema tridimensional y se simuló para obtener la solución; ambos resultados, analítico y numérico, coincidieron con bastante precisión. También se compararon los resultados con los de un análisis experimental realizado con un resorte helicoidal de Nitinol. Una de las aportaciones que brinda dicho estudio es conocer el efecto del cambio de las propiedades de los materiales y la temperatura ambiente en la respuesta carga-desplazamiento de los resortes helicoidales.

Aguilar [113] publicó en 2012 una investigación experimental sobre la reducción de vibraciones usando materiales ETM; el prototipo experimental utilizado consistía de carros de baja fricción montados con libre movimiento sobre un riel, un vibrador electrodinámico que provee fuerzas armónicas de excitación. El análisis mostró que los elementos ETM introducen parámetros complejos no lineales al sistema, y también se observó que los elementos ETM reducen considerablemente las vibraciones mediante la variación dinámica de la temperatura o con técnicas de absorción de vibraciones.

Doaré [102] en 2012 realizó un análisis experimental del comportamiento torsional dinámico y cuasi-estático de cables ETM bajo cargas cíclicas. Para el experimento se utilizó un péndulo torsional hecho con un cable de Nitinol. Los resultados del análisis muestran la capacidad de amortiguamiento del material ETM en función de la temperatura, la frecuencia y la amplitud de las cargas aplicadas. También se describe el comportamiento dinámico del sistema al medir la respuesta a la frecuencia.

Posteriormente en 2012, Follador [48] propuso un modelo general y las técnicas para la fabricación de resortes ETM que cumplan la función de actuadores en cualquier sistema. En el trabajo publicado se describen los pasos para el proceso de diseño, desde un modelo mecánico para optimizar las

características mecánicas para los requerimientos de fuerza y espacio, hasta un modelo térmico para estimar la energía eléctrica necesaria para activar el actuador. También se describe el procedimiento experimental para obtener los parámetros de ambos modelos. Se detalla el procedimiento de fabricación manual de un resorte para validar los modelos obtenidos; y se presentan dos soluciones para reducir el consumo de energía del dispositivo en funcionamiento.

Por su parte, Parulekar [108] en 2012 publicó un artículo donde describe una investigación sobre el uso de amortiguadores con elementos de efecto térmico de memoria de Nitinol para la atenuación de la respuesta sísmica de las estructuras; el amortiguador con elementos ETM es utilizado como un absorbedor pasivo de energía; se realizó el diseño, fabricación y pruebas de funcionamiento del mismo. También se realizó un análisis para validar el diseño y funcionamiento del amortiguador, utilizando un modelo termo-mecánico del dispositivo con elementos ETM. Con las pruebas se determinó la efectividad del dispositivo por su capacidad de absorción de energía de un terremoto simulado, demostrando lo conveniente de su uso como dispositivo mitigador de vibraciones.

Kim [74] en 2013 presentó una investigación donde realizó la estimación de medición del desplazamiento de la espiral de un resorte helicoidal de ETM para la retroalimentación del control, sin utilizar sensores; en su lugar propuso un nuevo método para usar la inductancia de la espiral del resorte ETM. Tal inductancia se estima midiendo el voltaje y la respuesta transitoria de la corriente. La inductancia tiene una relación directa con el desplazamiento y no se ve afectada por la carga aplicada. Los resultados comprobaron que es posible utilizar este método y estimar el desplazamiento con precisión, y que podría utilizarse en casos donde se requiera construir un controlador compacto sin sensores que demanden espacio; pero con la limitación de que la espiral del resorte sea suficientemente grande para tener una inductancia grande.

En 2013 Spaggiari [6] publicó un estudio donde realizó un modelado analítico y numérico de un resorte de fuerza constante de ETM que funciona como un elemento de un actuador de estado sólido. Para tal estudio se eligió un resorte de fuerza constante debido a su característica de requerir una fuerza casi constante para desenvolverlo en deflexiones teóricas infinitas muy extensas. Además de que la parte plana del resorte de fuerza constante mejora el ancho de banda comparado con utilizar solo cables ETM o resortes helicoidales ETM. Se muestra en el artículo el modelo matemático utilizado del resorte y se realiza la simulación para evaluar su desempeño como un elemento activo de fuerza constante y de largo alcance de un actuador. No se validó experimentalmente el modelo propuesto en esta publicación.

Posteriormente en 2013 Spaggiari [124] presentó otro artículo donde realizó la caracterización experimental del resorte de fuerza constante de ETM que anteriormente había modelado y simulado; el objetivo de este nuevo estudio fue demostrar la factibilidad de utilizar un actuador con elementos activos constituidos por resortes de fuerza constante ETM. Los resultados del experimento demostraron la efectividad de utilizar este tipo de actuadores para el control de vibraciones. Además de resultar en acuerdo con la simulación y análisis matemático antes realizados.

Yates [123] publicó en 2013 un estudio experimental para determinar cómo ciertos parámetros

afectan de forma independiente el alcance y los tiempos de transformación de los actuadores con resortes helicoidales de ETM. Tales parámetros son: el diámetro del cable ETM, el diámetro del resorte, la temperatura de transición, el número de vueltas, la fuerza de empuje y la magnitud de la corriente aplicada. En el estudio se realizaron pruebas para manipular cada parámetro, y se compararon los resultados con los de las predicciones obtenidas de un modelo dinámico unidimensional del sistema. Se encontró que cuatro de los seis parámetros afectan el tiempo de calentamiento del ETM, cuatro parámetros afectan el tiempo de enfriamiento mientras que los seis parámetros afectan el alcance del actuador. Éstos resultados servirán como guía para el diseño de resortes helicoidales considerando la medida en que afectan los parámetros mencionados.

En 2014 Holanda [63] presentó un estudio de la rigidez y el amortiguamiento de sistemas mecánicos vibratorios con resortes helicoidales ETM como actuadores. El sistema de un grado de libertad se excitó con una fuerza desbalanceada y un sistema de control de temperatura. El objetivo principal fue obtener una predicción del comportamiento del sistema bajo ciertos niveles de vibración, analizando los efectos de los parámetros de rigidez y amortiguamiento.

Por su parte Oliveira [64] en 2014, realizó un estudio sobre una característica particular de la respuesta dinámica de los materiales ETM, el fenómeno de salto. Tal fenómeno consiste en cambios abruptos en el comportamiento del sistema, y su análisis resulta importante para lograr un diseño apropiado de un dispositivo ETM. Para el estudio se utilizó un oscilador ETM de un grado de libertad que con comportamiento pseudoelástico y saltos dinámicos. El estudio se realizó con simulaciones numéricas cuyos resultados muestran los aspectos de el comportamiento ya mencionado de los ETM, resaltando la importancia que tiene considerarlo para comprender la dinámica no lineal de éstos sistemas.

Mientras que Spaggiari [5] en 2014 llevó a cabo la caracterización experimental y validación del modelo de un resorte negativo hecho de materiales de efecto térmico de memoria; un resorte negativo es aquél conformado por una tira metálica plana en forma de espiral, cuya característica principal consiste en que en reposo cada espiral se encuentra envuelta firmemente a la espiral siguiente, con una fuerza casi constante y una carrera muy larga, determinada por la longitud de la tira inicial de metal. El objetivo del trabajo publicado por [5] fue el de demostrar la confiabilidad de un actuador con las características mencionadas y demostrar el modelo analítico utilizado. Proponen el uso de este tipo de resorte negativo con ETM como una alternativa simple, económica y compacta de emplear un actuador.

Ahora, en la siguiente sección se examinan los avances logrados con otro tipo de dispositivos semi-activos, los piezoeléctricos.

Dispositivos con materiales piezoeléctricos

Un segundo tipo de dispositivos con aquellos fabricados a base de materiales piezoeléctricos; los materiales piezoeléctricos son minerales, cerámicas o algunos polímeros que poseen la propiedad de

producir una carga eléctrica como respuesta ante un esfuerzo mecánico, y también se presenta el efecto inverso, donde los materiales sufren deformación mecánica por la aplicación de carga eléctrica.

El primer estudio que utilizó un dispositivo fabricado con materiales piezoeléctricos para el control semi-activo de vibraciones fue Clark [29] en 1999, con un experimento cuyo objetivo fue medir la efectividad de un actuador piezoeléctrico para suprimir el movimiento oscilatorio de una estructura mecánica. Para variar la rigidez del actuador piezoeléctrico, se conmutó el circuito de derivación eléctrica, entre circuito abierto y corto-circuito, para disipar energía en un sistema mecánico.

Por su parte, Davis y Lesieutre [28] en el año 2000 realizaron un experimento donde utilizaron un absorbedor de vibraciones hecho con materiales piezoeléctricos en el que podían sintonizar los parámetros de frecuencia de resonancia del dispositivo, utilizando un método de control activo; tal absorbedor de vibraciones consistía de elementos cerámicos piezoeléctricos capaces de variar su rigidez conforme varía un circuito capacitivo de derivación del estado de circuito abierto a corto circuito.

En el año 2004 Ramaratnam [115] presentó un trabajo donde empleó un sistema semi-activo de control de vibraciones por variación de rigidez mediante elementos piezoeléctricos; el objetivo del sistema consistía en mitigar vibraciones en estructuras mecánicas flexibles mediante una lógica de control simple basada en la posición y velocidad (observada) de la punta de la viga. Utilizó un sistema de un grado de libertad de una viga flexible con base móvil, a la que acopló un actuador piezoeléctrico que era conmutado entre corto circuito y circuito abierto, para lograr así introducir un cambio de la rigidez del sistema, que puede disipar energía al afectar la energía potencial almacenada en la viga.

Luego en 2006 Duigou [42] desarrolló un estudio donde utilizó vigas con material piezoeléctrico con el objetivo de definir sus propiedades de amortiguamiento mediante un nuevo enfoque. En la constitución de las vigas se emplearon capas de material piezoeléctrico para cumplir la función de sensores y actuadores, aprovechando los efectos piezoeléctricos directo e inverso, respectivamente. El objetivo del análisis consistía en obtener la rigidez equivalente del sistema, por lo que desarrolló dos leyes de control de retroalimentación, capaces de modificar la rigidez del sistema y de inducir un poco de amortiguamiento.

Posteriormente Jansson [2] en 2008 realizó un estudio del amortiguamiento de ondas de deformación elástica en una barra de aluminio donde utilizaba un par de elementos piezoeléctricos sobre la barra para fines de amortiguación, accionados por un circuito RL externo. En dicho estudio se presentaron pérdidas de energía que resultaron en un menor porcentaje del rendimiento del dispositivo experimental frente al modelo analítico lineal utilizado.

También en 2008, Wang [66] utilizó un enfoque alternativo para excitar una estructura unidimensional con discontinuidades empleando un actuador piezoeléctrico. En lugar de montar el actuador piezoeléctrico sobre todo un lado uniforme de la viga, se montó de forma tal que abarcara dos discontinuidades de ésta, así el actuador genera una fuerza exéntrica en la estructura, induciendo movimiento axial y transversal. El objetivo del estudio consistió en modelar la respuesta axial y transversal de la estructura causadas por el actuador.

Por otro lado, Wu [95] llevó a cabo en 2010 un análisis de vibración de una superficie circular

de substrato metálico unido a una capa de material piezoeléctrico con circuito abierto. Presentó por primera vez una solución al potencial eléctrico presente en el espesor de la capa piezoeléctrica y desarrolló el modelo mecánico con el que presentó la solución para la vibración libre del sistema.

En el año 2010 Chtiba [26] realizó un trabajo donde propone el uso de absorbedores para el confinamiento de vibraciones y dispositivos piezoeléctricos para la recolección de energía (en forma de energía eléctrica) en una estructura flexible. El objetivo de tal trabajo consistía en optimizar los parámetros del conjunto de absorbedores y dispositivos piezoeléctricos para minimizar la energía total de la estructura original.

Posteriormente en el año 2012 Collinger et al. [30] desarrollaron una investigación sobre la utilización de dos elementos piezoeléctricos como método para controlar vibraciones en un sistema compuesto por una viga de acero en voladizo. Los elementos piezoeléctricos se montaban a la viga mediante imanes permanentes, aprovechando la atracción magnética entre éstos y la superficie de la viga de acero. Para medir la efectividad del arreglo de elementos piezoeléctricos y magnéticos, se llevaron a cabo pruebas con simulaciones y experimentales sobre la viga, induciendo excitación en la base de ésta y midiendo la velocidad del extremo suelto de la viga; los resultados mostraron que el arreglo de control magnético-piezoeléctrico logró reducir significativamente la velocidad del extremo de la viga, igualando la efectividad de aquellos elementos piezoeléctricos montados mediante resina epoxi, pero con la ventaja de que hacen posible reconfigurar el arreglo de los actuadores piezoeléctricos de una forma más sencilla.

Mientras que Yamada [70] en 2012 presentó dos métodos para medir el coeficiente de rigidez equivalente y los coeficientes de acoplamiento electromecánico de elementos piezoeléctricos adjuntos a una estructura tipo viga. El objetivo principal de este trabajo consistía en determinar el diseño óptimo de sistemas de control activo y supresión pasiva de vibraciones; la validez de los métodos propuestos se corroboró mediante análisis teórico y experimentación, cuyos resultados estuvieron encima de los brindados por métodos convencionales.

Por su parte, Ding [77] presentó en 2013 un trabajo donde investigaba la propagación de onda en un sistema compuesto por una viga periódica de flexión axial acoplada con parches piezoeléctricos elásticos, utilizando vigas de diferentes materiales para evaluar sus distintas características. Su objetivo principal consistía en proporcionar una guía para el diseño e implementación de estructuras periódicas laminadas de piezoeléctricos elásticos para lograr características de filtrado adecuadas; lo cual logró vía análisis numérico.

A su vez, Li [80] realizó en 2015 una investigación acerca del comportamiento de las frecuencias resonantes de vibración no lineal de películas de Grafeno/Piezoeléctrico/Grafeno (GPG) bajo cargas eléctricas, basado en la teoría elástica no local. Los resultados que se obtuvieron mostraron, entre otros aspectos, que la carga eléctrica mejora la frecuencia resonante no lineal de las películas de GPG cuando otros parámetros están fijos.

También en 2015 Piñeirua [88] desarrolló un trabajo donde utilizaba placas de material piezoeléctrico para convertir la deformación mecánica de éstas, al someterse al flujo de un fluido, en energía

eléctrica en un circuito de salida. Su principal objetivo consistía en investigar la influencia que la posición de los electrodos piezoeléctricos a lo largo de la superficie de las placas tienen sobre la eficiencia de la recolección de energía del sistema, lo cual llevó a cabo con análisis experimental y simulaciones numéricas. Luego utilizó simulaciones numéricas para optimizar la posición, dimensión y cantidad de los electrodos piezoeléctricos mencionados, para lograr el mejor rendimiento del sistema de recolección de energía.

Yamada [144] presentó en 2015 un nuevo método basado en acoplamiento de impedancia mecánica para mejorar la eficiencia de elementos piezoeléctricos adjuntos a una viga, que en comparación con los métodos de optimización que buscan aumentar la eficiencia cambiando la posición o el número de elementos piezoeléctricos, éste nuevo método demostró que la máxima razón de rigidez equivalente (parámetro que determina el rendimiento de la supresión pasiva de vibraciones) resulta independiente del ancho y grosor de los elementos piezoeléctricos, incluso independiente de la longitud de éstos al utilizar espaciadores en la dirección de la longitud de la viga.

En el año 2016 Wang [21] llevó a cabo una investigación sobre el aislamiento activo de microvibraciones en una plataforma Stewart con actuadores piezoeléctricos. Una plataforma Stewart es un robot paralelo que consiste de seis actuadores colocados en tres puntos de la placa superior de la estructura, y que posee seis grados de libertad (x , y , z , *pitch*, *roll* y *yaw*). Para probar que el sistema realiza la supresión de las vibraciones realizó simulaciones numéricas con un esquema de lazo de control de retroalimentación directa, bajo perturbaciones periódicas y aleatorias. Mientras que con resultados experimentales demostró que la plataforma Stewart compuesta por actuadores piezoeléctricos logra atenuar las vibraciones hasta 30 dB con perturbaciones periódicas y entre 10 y 20 dB para perturbaciones aleatorias, esto gracias al diseño adecuado de la longitud de carrera de los actuadores.

También en 2016, Yamada [145] desarrolló una técnica donde utilizó un elemento piezoeléctrico de múltiples capas (para aumentar su capacitancia), una bobina y una resistencia para la supresión pasiva de vibraciones en estructuras flexibles, cuya efectividad y confiabilidad fue evaluada mediante análisis numérico y experimentos.

En 2017 Casagrande [35] presentó un estudio de simulación de un sistema de control de bajas y medias frecuencias de las vibraciones de flexión de un panel ligeramente amortiguado al que se acoplaron cinco parches piezoeléctricos como absorbedores de oscilaciones, los cuales se conectaban a circuitos de derivación Resistencia-Inductor (RL) variante en el tiempo. El objetivo de tal trabajo consistía en evaluar el desempeño del sistema para el control de las vibraciones al utilizar primero uno de los absorbedores y después el arreglo de los cinco absorbedores; los resultados mostraron que el arreglo de cinco absorbedores piezoeléctricos logra un mayor efecto en la supresión de vibraciones tanto a bajas frecuencias como a frecuencias medias, en el panel.

En el mismo año Gardonio [106] realizó un estudio acerca de los efectos de control de vibraciones sobre una estructura delgada de dos dimensiones con un parche piezoeléctrico conmutado eléctricamente con sintonización como absorbedor de vibraciones. El objetivo principal de tal trabajo radicaba

en establecer la influencia que las propiedades electromecánicas, capacitivas, de rigidez o de inercia, inherentes de los parches piezoeléctricos inducen en la sintonización del circuito eléctrico de derivación y consecuentemente sobre el control de vibraciones. Los resultados indicaron que el enfoque clásico en el que se considera un modelo simplificado de dos grados de libertad de la estructura, no es suficiente para determinar los parámetros de sintonización; además provee un estudio paramétrico que sirve como una guía para el diseño y dimensionamiento del parche piezoeléctrico y el curcuito eléctrico para maximizar la respuesta a la flexión de la estructura de dos dimensiones.

Posteriormente, Li [81] desarrolló en 2017 una investigación en la que utilizó parches piezoeléctricos como sensores/actuadores distribuidos periódicamente sobre vigas flexibles para sintonizar activamente la vibración y propagación de onda en las mismas. Controló el sistema con el diseño de un control proporcional de retroalimentación negativa que agrega rigidez activa a la viga elástica; se analizó la respuesta ante distintas ganancias de control, los resultados teóricos y numéricos mostraron que al ejercer voltajes de control externos sobre los actuadores piezoeléctricos, las vibraciones y la propagación de onda de la viga flexible se puede sintonizar activamente.

Dispositivos de rigidez variable de configuración mecánica

Ahora, el siguiente tipo de dispositivos que se describen con los que emplean algún mecanismo o configuración mecánica, sin utilizar necesariamente materiales inteligentes para lograr disipar la energía de las vibraciones.

En 1991 Onoda [103] fue uno de los primero en proponer el uso de elementos capaces de variar la rigidez para suprimir de forma activa las vibraciones mecánicas, en análisis y el experimento que realizó proponía e investigaba el uso de un dispositivo nuevo de rigidez variable que aportaba la ventaja de suprimir las vibraciones con una respuesta estable respaldada por el análisis teórico. El dispositivo propuesto consistía de un elemento telescópico de longitud ajustable en el que se acopló dentro un elemento piezoeléctrico; el funcionamiento combinaba un arreglo mecánico de tenazas con la conmutación del elemento piezoeléctrico para lograr la variación de la rigidez. Onoda realizó el experimento únicamente sobre un sistema de un grado de libertad, sin embargo, propone también una ley de control que puede aplicarse a sistemas de varios grados de libertad.

Por su parte Walsh [135] en 1992 realizó un experimento donde diseñó y utilizó un absorbedor de vibraciones adaptable con el objetivo de mitigar las vibraciones transitorias de las máquinas rotativas en el arranque y paro, además de proporcionar un control adaptable a las perturbaciones que se presentan en la operación de estado estable de elementos como bombas y motores con carga variable. El absorbedor consistía de una masa y amortiguamiento constante, pero con rigidez variable, dicho absorbedor se diseñó como un resorte de rigidez variable construido con una doble hoja de metal empotrada a los extremos y separadas en medio con un se parador mecánico acoplado a un motor a pasos; la rigidez del dispositivo podía variar si se variaba la separación de las hojas entre sí.

También en 1992, Onoda [105] desarrolló una investigación acerca de la supresión activa, pasiva

y semi-activa de vibraciones con la variación de la rigidez de un sistema. Como elemento de rigidez variable utilizó un cuerda cuya tensión podía regular y diseñó la lógica de control *on-off* primero para un sistema de un solo grado de libertad y posteriormente una lógica de control para un sistema de múltiples grados de libertad con múltiples elementos de rigidez variable. Debido a que los resultados mostraron que al implementar la lógica de control con un elemento pasivo se presentaba fricción seca que alteraba la tensión de la cuerda en la misma manera que lo hacía el control activo, desarrolló un sistema de control semi-activo para contrarrestar los efectos de dicha fricción seca. La efectividad de tal sistema se comprobó mediante experimentación.

Posteriormente en 1994 Nemir [100] llevó a cabo un estudio enfocado en controlar y limitar el movimiento oscilatorio de estructuras civiles y espaciales; su objetivo fue utilizar una técnica de control semi-activo que aprovechara la dinámica del sistema y utilizara energía mínima para implementarse. El objetivo del estudio fue alterar la rigidez de forma que se alterara la distribución modal de la energía en el sistema, disipando la energía de forma acelerada. Los resultados fueron comprobados solamente con una simulación de una estructura reticular sujeta a perturbaciones sinusoidales y aleatorias. El arreglo mecánico utilizado en la simulación consistía de tres resortes controlados que podían ser liberados o sujetados para lograr variar la rigidez desde un valor máximo a un valor nulo teóricamente.

Kobori [75] en 1995 propuso utilizar un algoritmo de control activo para estructuras con rigidez variable, tal algoritmo analizaba la información de una excitación sísmica o senoidal para estimar las futuras respuestas de la estructura y así determinar la forma de alterar la rigidez para contrarrestar los efectos vibratorios. La efectividad de dicho algoritmo fue confirmada mediante experimentos numéricos sobre un modelo de un edificio de tres niveles bajo perturbaciones sísmicas y senoidales. El modelo de la estructura utilizaba un conjunto de elementos con rigidez constante conectados a elementos de tipo encendido-apagado que permitían variar la rigidez desde el valor máximo al valor mínimo, disipando así la energía del sistema.

En el mismo año Warkentin [137] llevó a cabo un estudio para demostrar el uso del control de rigidez variable para atenuar las vibraciones en un brazo robótico flexible de un solo eslabón. Tal esquema de control era capaz de cambiar de forma activa la rigidez del sistema para aprovechar las capacidades de almacenamiento de energía de deformación ante diferentes valores de rigidez. Mediante simulaciones numéricas y experimentación logró demostrar la efectividad del control propuesto para la supresión de vibraciones transitorias y aleatorias, pues se logró una reducción de 97% respecto al sistema no controlado.

Por su parte Lai [78] en 1996 presentó un estudio donde desarrolló un algoritmo de control para absorbedores dinámicos de energía con rigidez variable; tal algoritmo de control se diseñó para atenuar vibraciones estructurales con técnicas de control paramétrico en tiempo real. Se creó un controlador de lógica difusa para reducir la energía estructural principal mientras reduce la energía total del sistema. Se diseñó un supervisor pasivo para asegurar la estabilidad del sistema. El sistema se probó implementándolo en una viga y los resultados demostraron que se suprimieron la amplitud de las

vibraciones y el nivel de energía estructural.

También en 1996 Onoda [104] propuso una técnica alternativa de control, llamado Control lineal cuadrático de rigidez, para suprimir vibraciones en una estructura de múltiples grados de libertad con elementos de rigidez variable. Mediante simulaciones numéricas estudió el desempeño del enfoque de control, cuyos resultados mostraron su alta confiabilidad para la supresión de vibraciones con la variación de la rigidez.

Yang [146] realizó en 1996 un estudio donde aplicaba técnicas de control activo de rigidez variable en estructuras de edificios excitados con movimientos sísmicos, basados en la teoría de Control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés). El objetivo principal del estudio consistía en comparar distintas técnicas de control y evaluar la respuesta de las estructuras al aplicar uno u otro. Los resultados de simulaciones numéricas demostraron que aunque dichas técnicas son efectivas, se deben realizar más estudios para poder elegir un sistema de control activo de rigidez variable en particular.

Posteriormente Clark [29] en 1999 publicó una investigación donde utilizaba una ley de control de vibraciones semi-activo para conmutar el circuito eléctrico derivativo de un actuador piezoeléctrico que funciona como disipador de energía en un sistema mecánico. La conmutación se llevó a cabo cambiando del estado de circuito abierto, logrando una alta rigidez, a corto circuito, con una baja rigidez; mientras el sistema está en movimiento se mantiene al circuito en el modo de alta rigidez, provocando que la energía se almacene en el actuador, y se cambia a corto circuito (rigidez baja) para disipar la energía. El estudio se realizó de forma numérica arrojando resultados que demostraron la efectividad del actuador para mitigar vibraciones en el sistema mecánico de un grado de libertad donde se probó numéricamente.

Mientras que en el año 2000 Varadarajan [130] investigó la efectividad de un dispositivo semi-activo para la supresión de vibraciones en edificios altos que oscilan por la acción del viento. El dispositivo desarrollado era llamado amortiguador de masa sintonizado semi-activo de rigidez variable (SAIVS-TMD por sus siglas en inglés), y mediante simulaciones numéricas se probó el rendimiento del dispositivo en un edificio de ejemplo de 76 pisos de concreto, cuyos resultados mostraron que el SAIVS-TMD fue capaz de reducir las vibraciones con un menor consumo de energía, comparado con dispositivos similares de control activo.

Luego en el año 2001, Nasu [98] propuso un sistema de control activo de rigidez variable para la respuesta de sísmica de estructuras, tal sistema de control era capaz de cambiar de forma activa la rigidez estructural de un edificio (construido como muestra para proveer datos) para proveer un estado no resonante contra excitaciones de terremotos, que suprimiera la respuesta del edificio. A pesar de tratarse de un sistema de control activo, el consumo de energía que requería era relativamente bajo y mantenía la seguridad del edificio ante terremotos de moderada a alta magnitud. Mediante registros de la respuesta del edificio ante algunos terremotos, se demostró que el sistema era capaz de elegir el valor de rigidez adecuado para brindar un estado no resonante, que resulta en una respuesta muy baja del edificio, comprobando que el sistema de control fue de alta confiabilidad.

Posteriormente en 2003, Gandhi et al [53] publicó un estudio donde utilizaba un dispositivo semi-

activo de rigidez controlable, cuya constante de resorte podía ser modulada en tiempo real con fines de contrarrestar perturbaciones. Se desarrolló un algoritmo de control en el dominio de la frecuencia para perturbaciones armónicas para determinar la variación de rigidez controlable que minimizara la fuerza transmitida de las oscilaciones. El objetivo principal del estudio residía en evaluar la respuesta de diferentes esquemas de control de lazo abierto, lazo cerrado y controles adaptivos para rechazar la fuerza transmitida a la frecuencia de perturbación. Los resultados mostraron que el control de lazo cerrado fue el adecuado para lograr el objetivo de mitigar la fuerza de las vibraciones con el dispositivo semi-activo.

Por su parte, Pnevmatikos en 2004 [109] presentó un trabajo en el que mostraba un sistema para mitigar vibraciones causadas por el movimiento sísmico de la tierra en estructuras, equipándolos con un sistema de control por variación activa de rigidez. En el trabajo presentado se mostraban dos enfoques: el diseño y la operación del sistema en un edificio prototipo; para el diseño utilizó datos de movimientos sísmicos registrados para obtener la frecuencia característica de tales movimientos y diseñar así el sistema de variación activa de rigidez capaz de compensar la energía sísmica. La ventaja del sistema propuesto radicaba en la pequeña cantidad de energía que requería para su operación, comparado con sistemas anteriores.

También en el año 2004 Varadarajan [131] desarrolló un sistema para el control de oscilaciones en edificios causadas por el viento, tal sistema empleaba un amortiguador de masa sintonizado semi-activo de rigidez variable (SAIVS-TMD) similar al que presentó en un trabajo anterior, pero éste nuevo modelo presentaba la ventaja de poder re-sintonizar su frecuencia mediante control robusto en tiempo real. El objetivo principal del estudio presentado consistía en probar las mejoras realizadas al sistema SAIVS-TMD para optimizar la respuesta estructural del edificio, para lo cual diseñó un algoritmo basado en la transformada de Hilbert y la decomposición empírica para desglosar la señal de oscilación en múltiples partes y observar sus componentes de frecuencia y determinar la frecuencia dominante para ajustar así la rigidez adecuada del sistema.

En 2005 Liao et al [82] llevaron a cabo un estudio comparativo entre dos métodos para auto-sintonizar un absorbedor sintonizable de vibraciones cuya rigidez puede variar, que se desarrolló para mitigar oscilaciones en una estructura compuesta por una viga empotrada sujeta a excitación senoidal de frecuencia variable. Los dos métodos analizados difieren en la forma en que identifican la frecuencia de excitación, el primer método utiliza la frecuencia del pico máximo en el espectro de respuesta como la frecuencia de excitación. Mientras que el segundo método utiliza tanto el espectro de respuesta como las frecuencias naturales para estimar la frecuencia de excitación. El absorbedor tenía la capacidad de variar la rigidez en función de la variación de la frecuencia de excitación.

Posteriormente Makihara [90] publicó un análisis de la estabilidad de tres diferentes actuadores cuya operación se basa en la variación de rigidez, utilizados para mitigar oscilaciones. Mediante simulaciones numéricas se llevó a cabo el análisis sobre un sistema compuesto por dos masas, una conectada al suelo y la otra unida a la anterior; el sistema era expuesto a fuerzas de excitación del propio sistema y controlado por tres actuadores de rigidez variable de lazo abierto. El objetivo

principal del estudio consistía en medir la estabilidad del sistema sometido a cada actuador, calculando los valores propios de la matriz de transición de estado en un periodo del ciclo de control. El primer actuador se trataba de uno de tipo “Bang-bang” es decir, que conmuta entre el estado activo e inactivo; el segundo era accionado por una señal armónica, mientras que el último estaba provisto de un mecanismo disipador de energía, lo cual le brindó ventajas considerables ante los otros dos tipos de actuadores.

Bonello [17] realizó en 2005 una publicación donde presentaba un absorbedor de vibraciones sintonizable adaptivo que empleaba un elemento inteligente capaz de variar su rigidez conforme variaba la frecuencia de excitación, permitiendo una mitigación efectiva de oscilaciones en un amplio rango de frecuencias. La principal aportación de tal trabajo radicaba en que lograban la variación de rigidez en el absorbedor mencionado al cambiar la forma del elemento actuador, cambiando su curvatura o geometría de acuerdo al valor de rigidez requerido por el sistema para amortiguar las vibraciones.

Más adelante en 2005 Cronjé [33] desarrolló un dispositivo llamado Eliminador de vibraciones de inercia líquida (*LIVE*, por sus siglas en inglés) de rigidez y amortiguamiento variable, para aislar vibraciones. La principal función de tal dispositivo radicaba en que era capaz de cambiar su frecuencia de aislamiento al cambiar la rigidez de un resorte diseñado para este dispositivo; y también era capaz de cambiar la amplificación en resonancia. Utilizaba una lógica de control de retroalimentación de desplazamiento y velocidad de lazo cerrado para la sintonización del aislador de vibraciones.

También en 2005, Liu [82] propuso un sistema para el aislamiento de vibraciones que integraba un método de control *on-off* de amortiguamiento variable y un método de control *on-off* de rigidez variable, para que el sistema resultara eficaz como aislador de oscilaciones tanto en la región de alta frecuencia como en la región de baja frecuencia. En tal estudio se analizó la respuesta de cada sistema por separado (amortiguamiento y rigidez) y en combinación, utilizando un sistema construido con amortiguadores controlables en serie con dos elementos construidos con material Voigt, cuya característica principal es que posee las propiedades de elasticidad y viscosidad. Los resultados de las pruebas realizadas sobre un sistema de un grado de libertad demostraron que el sistema que combina ambas propiedades resultó ser el de mejor rendimiento para aislar vibraciones en toda la región de frecuencia.

Por su parte Nagarajaiah y Varadarajan [96] también en 2005, llevaron a cabo el desarrollo de un algoritmo para el control de la respuesta de edificios altos ante oscilaciones causadas por el viento, utilizando el sistema SAIVS-TMD, descrito anteriormente en este texto, en conjunto con la transformada de Fourier de tiempo corto para realizar un análisis del espectro de las señales variantes y así identificar la frecuencia dominante de la respuesta, y rastrear así su variación con respecto al tiempo para poder resintonizar en tiempo real los valores de rigidez y amortiguamiento del sistema SAIVS-TMD. Para probar la efectividad del sistema con el nuevo algoritmo, se creó el modelo analítico de un edificio alto excitado por la acción del viento con la rigidez variable del SAIVS-TMD.

Mientras que en el trabajo de Renzi [117] en 2005 se utilizaron dispositivos de rigidez variable

para estudiar la respuesta de la dinámica no lineal de sistemas estructurales al aplicar un esquema de control óptimo semi-activo. Se analizó la respuesta de sistemas de un solo grado de libertad expuestos a excitación en la base, controlados por dispositivos elásticos variables con lógica *on-off* y sujetos a condiciones de movimiento simples, como: vibración libre con condiciones iniciales y respuesta estacionaria ante una entrada armónica. Los resultados del análisis mostraron que el control óptimo semi-activo aplicado a los sistemas descritos logró minimizar la energía cinética de los mismos, y así amortiguar las oscilaciones.

En el mismo año Leavitt [79] empleó actuadores semi-activos que poseían la propiedad de cambiar su rigidez, en un sistema de control de vibraciones estructurales. Para analizar la efectividad de tal sistema, realizó la simulación de una estructura de edificio de tres pisos sujeta al movimiento causado por un terremoto; en el análisis que se llevó a cabo se aplicó una ley de control óptimo cuya finalidad era minimizar el tiempo de la respuesta de control. Los resultados de la simulación demostraron que el uso de dispositivos de rigidez variable logra extraer energía de la estructura, amortiguando así las vibraciones.

Posteriormente en 2005, Winthrop [93] realizó un análisis de diferentes tipos de dispositivos capaces de cambiar su rigidez, para producir un método de selección y diseño de los mismos que funcionara como una herramienta para aplicaciones de control de vibraciones en estructuras, para alcanzar un nivel de amortiguamiento deseado. Para realizar una comparación entre los dispositivos de rigidez variable y sus capacidades, Winthrop identificó un parámetro, ε , que relaciona la máxima y mínima rigidez alcanzada por cada dispositivo durante su operación (basado en los registros de la literatura); luego resolvió un problema de supresión de vibraciones mediante rigidez variable sobre un sistema de un solo grado de libertad, de forma exacta implícita utilizando el parámetro de comparación de rigidez variable. La solución exacta la usó para obtener una solución explícita aproximada ligando pasadas aproximaciones de rigidez variable a la solución exacta de una manera sistemática.

Por su parte Nagarajaiah [97] presentó en 2006 un trabajo donde utilizó el sistema semi-activo de rigidez variable independiente (SAIVS) para el control de vibraciones sobre edificios de base deslizante; mediante pruebas analíticas y experimentales de la relación fuerza-desplazamiento del sistema ante la simulación de un terremoto, se observó que el sistema SAIVS resultó capaz de variar la rigidez entre el valor mínimo y máximo de forma suave y continua. Además el sistema semi-activo probó ser eficaz para variar en tiempo real el periodo de la base deslizante de los edificios y simultáneamente reducir desplazamientos de cojinetes y respuesta de superestructuras, más de lo que es capaz de alcanzar un sistema puramente pasivo.

También en el año 2006, Corr [31] publicó un estudio donde comparaba las similitudes entre los resortes de rigidez variable y los dispositivos piezocerámicos de conmutación por derivación; en dicho estudio resultó que los tipos de dispositivos mecánicos de rigidez variable existentes tenían una contraparte similar con los dispositivos piezocerámicos accionados con distintos tipos de circuitos eléctricos. El primer tipo de dispositivo mecánico, compuesto por dos resortes en paralelo, uno de ellos trabajando de forma normal y el otro capaz de variar su rigidez continuamente desde cero hasta

el máximo valor; resultó similar al actuador piezocerámico conectado a un circuito de derivación de capacitancia. El segundo tipo de actuador mecánico consistía también de dos resortes en paralelo, pero en este caso el resorte secundario no variaba continuamente, sino que podía estar restringido por un tope entre sus espirales o libre, logrando así un valor máximo y mínimo de rigidez; y su actuador piezocerámico similar resultó ser aquel conectado a un circuito de derivación de tierra conmutada. Mientras que el tercer tipo de dispositivo mecánico, compuesto por dos resortes en paralelo donde el resorte secundario es restringido en sus espirales, pero al cual se puede cambiar el punto de restricción, resultó tener similitud con un actuador piezocerámico con circuito de derivación por bobina/resistencia, pues lograba una variación de rigidez muy parecida.

Posteriormente en el año 2008, Liu et al. [85] propuso un sistema para controlar vibraciones mediante rigidez y amortiguamiento variables, que no resultara tan complicado y difícil de implementar como los dispositivos convencionales utilizados hasta entonces. La nueva configuración propuesta consistía de dos amortiguadores de fluido magnetorreológico controlables y dos resortes constantes, constituyendo un elemento tipo Voigt (con elasticidad y viscosidad) con un amortiguador y un resorte constante en serie, se utilizaron para controlar la rigidez equivalente del sistema. Mientras que el segundo amortiguador en paralelo al elemento Voigt se usó para variar el amortiguamiento del sistema. Para evaluar la efectividad del sistema propuesto para el control de vibraciones, se llevaron a cabo pruebas analíticas y experimentales implementando diferentes esquemas de control y distintas señales de excitación; los resultados mostraron que el control on-off del sistema con rigidez y amortiguamiento variable resultó adecuado para aislar vibraciones ante un amplio rango de excitaciones.

Mientras que en el año 2009, Azadi et al. [13] desarrolló un estudio sobre dispositivos de rigidez variable basados en fuerzas antagónicas, aquellas fuerzas internas en los eslabones de un mecanismo donde la fuerza/momento externamente aplicado es igual a cero; utilizando este tipo de dispositivos para el control de vibraciones en mecanismos controlados por cables, que presentan desplazamientos muy pequeños. El objetivo principal del estudio consistía en abordar los criterios más notables para determinar la efectividad de la aplicación de tales dispositivos, como por ejemplo, que la rigidez antagónica debe ser dominante ante el resto de la rigidez del elemento, y que el rango del cambio de rigidez debe ser significativo. Para probar la efectividad del sistema propuesto, se diseñó una montura para motor basada en un elemento de rigidez variable antagónico, y se comparó con una montura comercial de caucho utilizando simulaciones numéricas; los resultados mostraron que la montura propuesta tuvo un rendimiento mucho mayor a la de caucho tanto en baja como en alta frecuencia.

Otro trabajo en que se presentó el diseño de un mecanismo de rigidez variable, lo realizaron Anubi et al. [11] en el año 2010; el diseño del mecanismo consistía de un arreglo de dos resortes, un brazo de palanca y una barra de pivote. Se logró variar la rigidez del mecanismo en función de la posición horizontal del pivote. Mediante un análisis directo empleando todos los parámetros del mecanismo, se obtuvo una expresión para la rigidez efectiva; mientras que un análisis inverso reveló que el mecanismo presentaba una tendencia hacia el resorte izquierdo conforme el desplazamiento del pivote tendía a infinito, y hacia el resorte derecho conforme el desplazamiento tendía a cero.

Por su parte Lu et al. [86] en el año 2011 realizaron un trabajo donde proponía un nuevo sistema de rigidez variable basado en un mecanismo de apalancamiento. El nuevo sistema era llamado sistema de aislamiento de rigidez variable de tipo apalancamiento (LVSS, por sus siglas en inglés), con el cual la rigidez del sistema podía regularse al ajustar el punto de pivote de un mecanismo de palanca; el sistema fue probado analíticamente y experimentalmente sobre un sistema de “mesa temblorosa”, un mecanismo para probar la respuesta sísmica de estructuras; los resultados mostraron la efectividad del sistema para suprimir el desplazamiento excesivo de las estructuras inducido por un terremoto.

También en el año 2011 Ghorbani-Tanha et al. [54] diseñó un dispositivo innovador de rigidez variable semi-activo con una estructura similar a una viga, capaz de variar su rigidez entre un valor mínimo y un valor máximo utilizando la variación del momento de inercia de un área conforme rota alrededor de un eje normal que pasa a través de su centroide. En el mismo trabajo se desarrolló, como una aplicación práctica del dispositivo propuesto, un absorbedor de vibraciones sintonizable semi-activo, capaz de resintonizar en tiempo real y operar en un amplio rango de frecuencias. La rigidez del absorbedor se variaba para poder sintonizar la frecuencia natural del absorbedor a la frecuencia de la fuerza de excitación en tiempo real. Los resultados al evaluar el sistema durante el inicio del ciclo de una máquina rotativa y compararlo con un sistema simplemente pasivo, mostraron la efectividad del dispositivo propuesto en la reducción de la respuesta transitoria, comparada con un absorbedor pasivo.

En el trabajo de Spelta, Previdi, Savaresi et al. [20] en el año 2011, se estudia la aplicación de dispositivos de rigidez y amortiguamiento variable en sistemas de suspensión, propone dos distintas arquitecturas utilizando únicamente amortiguadores controlables para lograr la regulación efectiva tanto del amortiguamiento como de la rigidez del sistema de suspensión. También se desarrolló en el mismo estudio un algoritmo de control de amortiguamiento y rigidez variable, orientado en la comodidad; los resultados de pruebas realizadas demostraron que la combinación de la suspensión de rigidez y amortiguamiento variable con el algoritmo desarrollado logran mejoras significativas en la comodidad, comparado con sistemas clásicos de suspensión pasiva.

Más adelante, en el año 2012, Braun et al. [18] desarrollaron una propuesta de control óptimo para el cálculo de los movimientos de un motor y el torque variante en el tiempo asociado a los mismos, así como la rigidez involucrada. Para realizar pruebas de efectividad del enfoque propuesto, se utilizó una tarea “explosiva” de tirar una pelota con un robot de dos eslabones de rigidez variable, así los actuadores involucrados deberían demostrar su flexibilidad. Los resultados permitieron concluir que la metodología de control propuesta fue capaz de adaptar las estrategias de impedancia para objetivos específicos de la tarea y dinámica del sistema; que la capacidad para variar su rigidez permitía lograr un mejor rendimiento, y que en sistemas con constitución física flexible esta formulación de control permite explotar las capacidades de almacenamiento de energía y amplificación de potencia de los actuadores para mejorar el rendimiento de la tarea.

Por su parte Sun y Nagarajaiah [125] también en el año 2012, trabajaron en la implementación de un algoritmo de control en tiempo real basado en la transformada de Fourier de tiempo corto,

para extraer la frecuencia dominante de la señal de excitación, aplicado a un amortiguador de masa sintonizado semi-activo (STMD, por sus siglas en inglés), con el propósito de suprimir vibraciones sísmicas en edificios. El algoritmo propuesto utilizaba la frecuencia dominante para sintonizar la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento del STMD. También estudiaron la respuesta de un múltiple amortiguador de masa sintonizado (MTMD, en inglés) compuesto por un TMD y un STMD en paralelo. Tras realizar pruebas con tres tipos de movimientos sísmicos simulados para evaluar el rendimiento de los dos tipos de sistemas, se demostró que ambos dispositivos resultaron más efectivos que los TMD simples para reducir los picos de respuesta.

Posteriormente en 2013, Xu y Ahmadian [141] utilizaron la propiedad de variación de rigidez y amortiguamiento de un sistema de suspensión de vehículos en un caso de aplicación para mejorar la fuerza normal de las llantas de dicho sistema de suspensión. El sistema de suspensión con rigidez y amortiguamiento variable puede construirse, como se sugiere en el estudio de Xu y Ahmadian, utilizando como base un sistema de suspensión convencional y añadiendo un resorte en serie con éste, además de emplear amortiguadores magnetorreológicos (MR) para variar el coeficiente de amortiguamiento. Para evaluar los efectos del sistema de suspensión propuesto sobre la fuerza normal de las llantas, para el estudio realizaron simulaciones numéricas con un modelo de referencia aplicando un algoritmo simple de control *on-off* para mejorar las fuerzas normales de las llantas, y una lógica de control difuso para modelar el control de momento de derrape directo (DYC, por sus siglas en inglés). Los resultados mostraron que la aplicación del sistema de suspensión con rigidez y amortiguamiento variable mejoraba notablemente las fuerzas normales de las llantas, además se descubrió que al combinar el control *on-off* de la suspensión con la estrategia DYC se puede mejorar el control del chasis del vehículo.

También en el año 2013, Azadi et al. [14] trabajaron en el desarrollo de un soporte semi-activo para motor de un vehículo, con la finalidad de mejorar la operación del motor ante las vibraciones mecánicas que el mismo genera. El soporte desarrollado es un dispositivo semi-activo de rigidez variable con una estrategia de control *on-off*, menos costoso y menos complejo que otros soportes activos y semi-activos disponibles; emplea en su diseño un resorte variable controlado de respuesta rápida mediante fuerza. Los resultados de pruebas realizadas mostraron que el soporte para motor de rigidez variable propuesto resultó más eficaz para amortiguar vibraciones comparado con soportes pasivos de caucho e incluso con un mejor rendimiento que un soporte anterior desarrollado por los mismos autores.

Otra implementación de rigidez variable para aplicación en vehículos la llevaron a cabo Anubi y Crane [10] en el mismo año, ya que presentaron el diseño de un sistema de suspensión de rigidez variable, empleando un novedoso mecanismo de rigidez variable que consistía de un *strut* (un tipo de amortiguador) horizontal y otro *strut* vertical controlados de manera semi-activa mediante amortiguadores MR. La manera en que el mecanismo se empleaba en la suspensión consistía en cambiar el punto de acoplamiento del *strut* vertical al cuerpo del vehículo mediante el control semi-activo que realizaba el *strut* horizontal, que utilizaba un concepto llamado descenso no lineal de energía (NES,

por sus siglas en inglés) para transferir la energía de las vibraciones a una masa de control, reduciendo así la transferencia de energía de las perturbaciones del camino al cuerpo del automóvil. Mediante análisis y simulaciones numéricas se observó un mejor rendimiento del sistema de suspensión en el vehículo.

También durante 2013 Anubi et al. [12] desarrollaron un sistema de suspensión de rigidez variable con un esquema de control pasivo. Utilizaron el mismo mecanismo de rigidez variable que en el trabajo anterior de Anubi y Crane [10] pero en esta ocasión con otro análisis basado en la disipación pasiva de la energía. Las pruebas de simulación y experimentación que se realizaron tenían como objetivo medir criterios del rendimiento de la suspensión de rigidez variable tales como la comodidad durante el desplazamiento del vehículo, la deflexión de la suspensión y el agarre del automóvil a la carretera mediante la deflexión de las llantas; el sistema de suspensión controlado de forma pasiva mostró un rendimiento superior ante suspensiones de rigidez constante.

En el trabajo que Sayyad y Gadhavé [121] presentaron en el año 2013, se implementó el concepto de rigidez variable en un absorbedor de vibraciones magnético para suprimir las vibraciones en una estructura de viga en voladizo sujeta a excitación armónica con frecuencia variable. El principio de la variación de rigidez en el absorbedor se conseguía al variar la distancia de separación entre los magnetos del absorbedor. Se observó que conforme aumentaba la distancia entre los magnetos, decrecían las frecuencias naturales del sistema y los picos de amplitud de las vibraciones disminuían.

Por su parte, Kuder et al. [76] en el año 2013 llevaron a cabo un estudio de revisión donde identificaban y clasificaban los principales elementos de rigidez variable existentes, como un medio para dotar a estructuras ligeras de una alta rigidez y al mismo tiempo la propiedad de deformación reversible, para aplicaciones de estrategias *morphing*, es decir, de materiales capaces de adaptar su forma para responder óptimamente a diversas condiciones de operación. En el trabajo presentado se mostraron cuatro categorías en las que la rigidez variable ha sido aplicada o con potencial para ser aplicada en *morphing*: ingeniería de materiales, diseño mecánico activo, técnicas semi-activas y comportamiento elástico estructural; y resaltaron las capacidades, limitaciones y retos presentes en cada categoría.

Posteriormente en el año 2014, Qiu et al. [111] realizaron una investigación analítica sobre la rigidez de malla variante en el tiempo en sistemas de engranajes. La rigidez variable de malla, asociada con la deflexión elástica de los dientes en contacto, variante en el tiempo excita paramétricamente los sistemas de engranes, causando así vibración e inestabilidades; además, con las fluctuaciones de velocidad rotacional de los engranes, la rigidez de malla es modulada por frecuencia, aumentando y volviendo más complejas las inestabilidades. Ante tal problemática, en el estudio utilizaron análisis de perturbaciones sobre un modelo de una sola malla de engranes, para examinar diferentes aspectos de la respuesta del sistema, tales como la amplitud de la variación de rigidez, las fluctuaciones de velocidad y el amortiguamiento del sistema.

Una implementación de elementos de rigidez variable en el control de vibraciones en edificios se presentó en el trabajo de Deshmukh y Chandiramani [39] en el año 2014. Implementaron un

controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*), para amortiguar el movimiento oscilatorio causado por el viento en un edificio alto, al que se equipó con un amortiguador de masa sintonizado semi-activo de rigidez variable tomado de una referencia de la literatura. El controlador LQR calculaba la fuerza de control requerida por el sistema lineal invariante en el tiempo, y luego la fuerza calculada era realizada al variar la rigidez del dispositivo alrededor de su valor nominal mediante una ley de control simple. Se llevaron a cabo pruebas de rendimiento del sistema propuesto cuyos resultados mostraron que logra un control de desplazamiento comparable al de otros controladores existentes.

También en el año 2014 Rafeipour et al. [114] publicaron un estudio donde proponían un nuevo dispositivo de rigidez variable, llamado resorte de rigidez variable plegable (FVSS, por sus siglas en inglés) que podía utilizarse, por ejemplo, en amortiguadores de masa sintonizados (TMD) para adaptar la rigidez del sistema ante diferentes condiciones de operación. Se llevaron a cabo análisis del dispositivo utilizado para controlar una estructura de un solo grado de libertad y otra estructura de múltiples grados de libertad mediante un TMD semi-activo. Los resultados del análisis numérico del sistema mostraron la efectividad que presenta al compararlo con un sistema de control pasivo similar.

Por su parte, Wu y Lan [139] llevaron a cabo el diseño de un mecanismo lineal de rigidez variable, que consistía de dos vigas biestables paralelas unidas a través de un resorte vertical; y los diferentes valores de rigidez en la curva fuerza contra desplazamiento se variaban con el ajuste de las vigas biestables. Con el diseño propuesto lograron un amplio rango de variación de rigidez con un mecanismo de dimensiones reducidas. Los resultados del desempeño del diseño se probaron mediante simulaciones numéricas, y en el trabajo presentado mostraron un prototipo ilustrado del mecanismo.

Lin et al. [83] en el año 2015 realizaron un trabajo donde utilizaban un amortiguador de masa sintonizado (TMD) para el control de vibraciones de estructuras civiles; los autores diseñaron un TMD semi-activo llamado TMD reajutable de rigidez variable (RVS-TMD, por sus siglas en inglés), que consistía de un TMD sin amortiguar y un dispositivo reajutable de rigidez variable, éste último integrado por un elemento reajutable y de un elemento de rigidez controlable. El RVS-TMD lograba disipar la energía de la estructura ya que al variar la rigidez del elemento de rigidez controlable la fuerza producida por el dispositivo reajutable de rigidez variable podía controlarse con una ley de control semi-activa, permitiendo ajustar tanto la rigidez como el amortiguamiento del RVS-TMD. Mediante simulaciones numéricas de probó la efectividad del RVS-TMD sobre una estructura de edificio, cuyos resultados mostraron que el dispositivo logra un rendimiento óptimo ante la respuesta sísmica de la estructura.

También en el año 2015, Wu y Lan [138] publicaron un estudio donde llevaron a cabo el diseño y experimentación de un mecanismo de rigidez variable para sistemas de control de vibraciones semi-activos. Aprovecharon la propiedad de los elementos de rigidez variable para lograr un mecanismo capaz de adaptarse a los cambios de frecuencia o carga de las perturbaciones. El mecanismo consistía de dos resortes planares en paralelo con rotación simétrica, la rigidez del sistema podía exhibir valores desde cero hasta un valor muy grande, dependiendo de la cantidad de rotación ajustada en los resortes. Los resultados de pruebas experimentales con un prototipo del mecanismo de rigidez

variable mostraron el rendimiento para absorber vibraciones ante varias frecuencias de perturbación.

Posteriormente en el año 2017, Min et al. [94] presentaron un estudio donde trataban un nuevo concepto de control semi-activo de vibraciones con un sistema en serie de interruptores-rigidez (SSSS, por sus siglas en inglés) que se considera como un sistema de un grado y medio de libertad. El sistema propuesto consistía de un conjunto de dos elementos en serie, compuesto cada uno por un resorte y un interruptor en paralelo cada uno. Se utilizó una ley de conmutación basada en el cruce por cero de la velocidad para lograr la reducción de las vibraciones, además de que este novedoso sistema era capaz de almacenar la energía cinética de las vibraciones en forma de energía potencial en los resortes para después utilizarla para amortiguar la vibración.

Dispositivos de rigidez variable electromagnéticos

Un tipo de dispositivo que recientemente ha ido obteniendo mayor popularidad y cada vez son más estudiados y aplicados es el de aquellos dispositivos construidos con arreglos electromagnéticos, es decir, aprovechan las propiedades magnéticas de algunos materiales para emplearlos como método de amortiguamiento y mitigar oscilaciones, por ejemplo, en una configuración compuesta por una viga en voladizo y un conjunto de imanes que hacen la función de un resorte en un sistema masa-resorte.

Los dispositivos electromagnéticos de rigidez variable son aquellos que utilizan imanes y bobinas en su construcción para actuar como dispositivo que aporta rigidez a un sistema, es decir, actuar como un resorte mecánico pero agregando ciertas ventajas en cuanto a su desempeño y eficiencia. En esta sección se revisarán ahora los avances que existen en el diseño y aplicación de dichos dispositivos para el control de vibraciones.

Chen y Yeh [24] utilizaron en el año 2001 un dispositivo de rigidez variable electromagnético como fuente de excitación paramétrica para experimentar sobre una viga y estudiar su inestabilidad mediante experimentación y analíticamente. Para el experimento se diseñó un dispositivo electromagnético que actuaba como un resorte al variar su rigidez. Las ventajas que este dispositivo aportó fueron: una fuerza de excitación electromagnética sin contacto; la fuerza de excitación actuando sobre la viga en dirección transversal; y la frecuencia y amplitud controladas de forma sumamente precisa por la fuente de poder de AC. El dispositivo diseñado consistía de dos imanes permanentes y dos bobinas colocadas entre los dos imanes, por las que circulaba una corriente DC controlada por una fuente de poder; conforme la corriente fluye por las bobinas, éstas se convierten en electroimanes, así las fuerzas repelentes entre los imanes permanentes y los electroimanes hacen al dispositivo comportarse como un resorte.

En 2007 Pratiher [110] realizó un experimento para observar las regiones de inestabilidad de una viga en voladizo sometida a la excitación de un campo magnético variante con el tiempo y una fuerza axial. Mediante el experimento se estudiaron la influencia del campo magnético, la carga axial, el amortiguamiento constante y el coeficiente de la masa en las regiones de inestabilidad.

En el trabajo de Schmidt et al. [122] se diseñó un actuador electromagnético para inducir excitación

de rigidez paramétrica sobre un sistema mecánico artificial; el actuador consistía en una bobina conducida por corriente situada entre dos imanes permanentes dentro de una cubierta cilíndrica ferromagnética, y utiliza las fuerzas repelentes generadas entre la bobina y los imanes permanentes al hacer fluir un corriente por dicha bobina, de este modo se crea una rigidez periódica en el tiempo cuya magnitud es controlada por la corriente aplicada al electroimán.

Posteriormente en el año 2008 Liu & Liu [85] publicaron un trabajo donde utilizaban un absorbedor de vibraciones electromagnético activo (AEMVA, por sus siglas en inglés) capaz de generar una fuerza de actuación instantánea. Para probar la estabilidad del dispositivo se aplicó un esquema de control que combinada un control PD (proporcional-derivativo) y un control de retardo, y parte del estudio centraba su atención en la relación entre la ganancia de diseño y la ganancia mínima de retroalimentación lograda entre ambos sistemas. En el trabajo también se propuso un algoritmo de sintonización en línea para el control, que permitía determinar la ganancia óptima son requerir un conocimiento preciso del sistema primario al que se aplicaba el control. Los resultados experimentales de un prototipo mostraron que el AEMVA podía suprimir efectivamente las vibraciones del sistema primario cuando se utilizaba en conjunto con el algoritmo de sintonización en línea propuesto.

Posteriormente Han et al.[136] realizó un experimento para estudiar la inestabilidad paramétrica de una viga en voladizo sujeta a la excitación de dos dispositivos electromagnéticos, para lo que diseñó dos dispositivos idénticos; dichos dispositivos consistían cada uno de un par de bobinas montadas en la viga y situadas entre un par de imanes permanentes fijos al soporte, sin cubierta alrededor.

Por otro lado, Dohnal [40] realizó un estudio compilatorio de experimentos de amortiguamiento por excitación paramétrica usando electroimanes. En dicho estudio se consideran algunos trabajos destacados en el análisis de vibraciones con el uso de dispositivos electromagnéticos en distintas configuraciones para observar la respuesta del amortiguamiento en el sistema.

También en el año 2012 Han et al. [58] llevaron a cabo un análisis de elemento finito del rango de operación lineal de la rigidez de un dispositivo electromagnético. El dispositivo electromagnético bajo prueba consistía de un par de imanes permanentes y una bobina DC no magnética, para lograr actuar como un resorte mecánico con rigidez constante. Para verificar la exactitud del análisis numérico se utilizaron dos indicadores: el coeficiente de corriente/rigidez y el rango de rigidez lineal; los resultados mostraron que la rigidez del dispositivo era linealmente proporcional a la corriente de la bobina y que el rango de rigidez lineal no se veía afectado por la corriente.

Por su parte Zihao et al. [148] en el año 2014 presentaron un estudio sobre un absorbedor de vibraciones electromagnético (EVA, por sus siglas en inglés) semi-activo. El EVA estaba compuesto por una viga en voladizo flexible ferromagnética, una masa ferromagnética adjunta al extremo libre de la viga y un electroimán en forma de E. Al cambiar la corriente del electroimán se variaba la fuerza entre la masa ferromagnética y el electroimán, así la rigidez del absorbedor podía sintonizarse en línea. Se llevó a cabo un análisis de elemento finito para caracterizar el EVA, y se realizaron pruebas sobre un sistema de control semi-activo de dos grados de libertad para medir la efectividad del diseño del absorbedor. Los resultados mostraron que el sistema de control era capaz de responder

rápidamente y reducir la amplitud de respuesta a la vibración.

En el trabajo de Szmidski y Przybyłowicz [127] publicado en el año 2014 se analizó la estabilidad dinámica y la vibración casi crítica de una columna Beck, donde la fuerza tangencial actúa en el extremo libre de una viga empotrada, utilizando actuadores electromagnéticos. Se observó que la aplicación de los actuadores llevó a un incremento de la carga crítica y afectaba la frecuencia inicial de aleteo; se obtuvieron aproximaciones analíticas de la solución de las vibraciones periódicas casi críticas, cuya exactitud fue probada por comparación de las simulaciones numéricas con predicciones teóricas. Del estudio se obtuvieron conclusiones tales como que los actuadores magnéticos permiten disminuir significativamente la amplitud de las vibraciones post-críticas, y que el efecto del amortiguamiento magnético depende fuertemente de la posición a la cual el actuador está sujeto a la columna.

En el año 2017 Li et al. [81] publicaron un estudio sobre el diseño e implementación de un dispositivo para la recolección de energía que implementaba actuadores electromagnéticos. El dispositivo estaba compuesto de una bobina de cobre montada en un plato circular de FR-4 (un tipo de laminado epóxico) suspendido por resortes de poliamida, y un magneto en forma de disco montado debajo de la bobina para funcionar como recolector de energía. El dispositivo se diseñó para poder funcionar como fuente de energía para sistemas donde el tamaño de la fuente de energía no sea crítico, por ejemplo como fuente para sensores de un vehículo, ya que no provee un alto valor de voltaje de salida. Los autores planean mejorar ese aspecto, y aumentar la salida de voltaje del dispositivo en futuros trabajos.

Dispositivos con fluidos magnetorreológicos

Por último, se verá a continuación un resumen de las aplicaciones de otro tipo de dispositivos llamados magnetorreológicos. Tales dispositivos utilizan para su construcción fluidos o sólidos magnetorreológicos.

Los fluidos magnetorreológicos (FMR) son aquellos materiales que experimentan reversibles cambios instantáneos significativos en las características del material cuando están sujetos a los cambios de un campo magnético. El cambio más significativo se asocia con el módulo de esfuerzo cortante complejo, por lo que los FMR pueden ser ampliamente utilizados en muchos sistemas de control de vibraciones semi-activos y suspensiones donde son utilizados los amortiguadores de velocidad variable. Típicamente los FMR consisten de partículas microscópicas magnéticamente polarizables dispersas en un medio portador, como aceite mineral o de silicón; tales partículas pueden polarizarse y alinearse con la aplicación de un campo magnético, resultando en fluidos que pueden cambiar de una forma líquida a una estructura casi sólida de forma casi instantánea [68].

Inicialmente fue la industria automotriz la que comenzó a desarrollar amortiguadores y sistemas de suspensión con fluidos magnetorreológicos, pero actualmente se desarrollan diversos estudios para ampliar su aplicación en otros campos utilizando control activo y semi-activo. A continuación se repasan aquellas investigaciones donde se han estudiado y aplicado los FMR en sistemas de control

de vibraciones.

En el año 2006 Liu et al. [84] desarrollaron un estudio donde utilizaron dos amortiguadores magnetorreológicos (MR) en serie para lograr rigidez y amortiguamiento variable para el sistema. Mediante cálculos teóricos y experimentos realizaron una comparación entre el sistema puramente pasivo, el sistema con rigidez variable, con amortiguamiento variable y del sistema con rigidez y amortiguamiento variables; se obtuvo la respuesta en tiempo y frecuencia de cada uno de los sistemas empleando un control de tipo *on-off*, resultando con mejor rendimiento aquel sistema que combinaba rigidez y amortiguamiento variable.

Posteriormente en el año 2009 Zhou et al. [147] llevaron a cabo el desarrollo y caracterización de un aislador de vibraciones de rigidez y amortiguamiento variable utilizando FMR. Fabricaron un prototipo del aislador FMR, que consistía de un resorte, una válvula MR y un acumulador; aplicaron a éste distintos campos magnéticos para evaluar su comportamiento e identificar los parámetros del modelo matemático. Las pruebas experimentales demostraron que tanto la rigidez como el amortiguamiento del sistema podían controlarse con la aplicación de un campo magnético.

Por su parte Aguirre et al. [8] desarrollaron en el año 2010 un estudio cuyo principal objetivo consistía en la identificación de los parámetros del modelo matemático de un amortiguador MR a pequeña escala. Debido a que los dispositivos que utilizan FMR son intrínsecamente no lineales, resulta en un verdadero reto desarrollar modelos con la exactitud suficiente para aplicar esta tecnología con confiabilidad y estabilidad. Los resultados experimentales que se obtuvieron en el estudio demostraron la concordancia con las fuerzas predichas por el modelo identificado.

Luego en el año 2014, Greinier-Petter et al. [57] trabajaron en el desarrollo de un dispositivo semi-activo de rigidez y amortiguamiento variable utilizando FMR. Tal dispositivo consistía de dos válvulas MR y dos resortes. Derivaron el modelo para el comportamiento magnético, reológico, mecánico y fluido de todo el sistema. También desarrollaron un sistema de experimentación para estudiar y comparar el comportamiento del sistema con las simulaciones. Los resultados obtenidos mostraron que la rigidez del sistema podía variarse entre tres valores diferentes, mientras que el amortiguamiento era continuamente variable.

En el año 2016 Gordeev et al. [55] publicaron un estudio donde abordaron la tarea de hallar las características y parámetros de un FMR con cargas de impacto y estudiar el efecto de campos magnéticos internos y externos en un amortiguados MR. Los resultados del análisis del amortiguador ante una señal eléctrica de amplitud positiva y negativa mostraron que la duración y amplitud de los impulsos son una función de las cargas de impacto y que deben tenerse en cuenta para desarrollar amortiguadores MR.

Graczykowski y Pawlowski [56] llevaron a cabo un estudio en el año 2017 en el que desarrollaron el modelo matemático exacto que describe las propiedades de los fluidos magnetorreológicos. El modelo combina el efecto de compresibilidad al que se someten los FMR dentro de las cámaras de los amortiguadores, con el efecto de bloqueo de flujo entre las cámaras en un caso de una baja diferencia de presión. La combinación en el modelo de las dos propiedades mencionadas, afectan significativamente

el comportamiento mecánico del amortiguador, ya que influencía sus características de disipación y es la razón de la histéresis observada en la respuesta experimental de estos dispositivos. Mediante validación experimental se comprobó la exactitud de los parámetros físicos del sistema identificados para el modelo.

Bibliografia

- [1] J. McCoy A. Baz, K. Imam. Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 140(3):437–456, October 1990.
- [2] B. Lundberg A. Jansson. Damping of elastic strain waves by means of a piezoelectric bar element feeding an external rl circuit. *Journal of Sound and Vibration*, 314:70–82, February 2008.
- [3] M. Noory A. Masuda. Optimization of hysteretic characteristics of damping devices based on pseudoelastic shape memory alloys. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37:1375–1386, 2002.
- [4] N. Jalili A. Ramaratnam. A switched stiffness approach for structural vibration control: theory and real-time implementation. *Journal of Sound and Vibration*, (291):258–274, August 2005.
- [5] A. Tuissi A. Spaggiari, E. Dragoni. Niti alloy negator springs for long-stroke constant-force shape memory actuators: Modmodel, simulation and testing. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 23:2412–2419, 2014.
- [6] E. Dragoni A. Spaggiari. Analytical and numeric modeling of shape memory alloy negator springs for constant-force, long-stroke actuators. *Journal of Intellingent Material Systems and Structures*, 0(0):1–10, 2013.
- [7] R.A.A. De Aguiar, J.H.I. Pereira, and C.G. de Souza et al. Shape momory alloy helical springs: modmodel, simulation and experimental analysis. *Mechanics of Solids in Brazil*, 2009.
- [8] N. Aguirre, F. Ikhouane, J. Rodellar, D. Wagg, and S. Neid. Modeling and identification of a small scale magnetorheological damper. *Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 2010.
- [9] B.O. Andrawes A.M. Sharabash. Application of shape memory alloydampers in the seismic control of cable-stayed bridges. *Engineering Structures*, 31:607–616, 2009.

- [10] Olugbenga M. Anubi and Carl Crane. A new semiactive variable stiffness suspension system using combined skyhook and nonlinear energy sink-based controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(3), May 2013.
- [11] O.M. Anubi, C.D. Crane III, and S. Ridgeway. Design and analysis of a variable stiffness mechanism. *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, 2010.
- [12] O.M. Anubi, D.R. Patel, and C.D. Crane III. A new variable stiffness suspension system: passive case. *Mechanical Sciences*, 4:139–151, 2013.
- [13] M. Azadi, S. Behzadipour, and G. Faulkner. Antagonistic variable stiffness elements. *Mechanism and Machine Theory*, 44:1746–1758, 2009.
- [14] M. Azadi, S. Behzadipour, and G. Faulkner. Introducing a new semi-active engine mount using force controlled variable stiffness. *Vehicle Systems Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 51(5):721–736, 2013.
- [15] Victor Birman. Shape memory elastic foundation and supports for passive vibration control of composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 45:320–335, September 2008.
- [16] S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic Systems, Filtering and Control*. Springer-Verlag, 2009.
- [17] P. Bonello, M.J. Brennan, S.J. Elliott, J.F.V. Vincent, and G. Jeronimidis. Design for an adaptive tuned vibration absorber with variable shape stiffness element. *Proceedings of the Royal Society A*, 461:3955–3976, 2005.
- [18] D. Braun, M. Howard, and S. Vijayakumar. Optimal variable stiffness control: formulation and application to explosive movement tasks. *Autonomous Robot - Springer*, 2012.
- [19] Misael Avedaño C. The concept of monodromy for linear problem and its application. Master's thesis, Universidad de Sonora, December 2008.
- [20] Spelta C, F. Predivi, S.M. Savaresi, P. Bolzern, M. Cutini, C. Bisaglia, and S.A. Bertinotti. Performance analysis of semi-active suspensions with control of variable damping and stiffness. *Vehicle Systems Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 49, 2011.
- [21] Y. Chen Z. Zhang C. Wang, X. Xie. Investigation on active vibration isolation of a stewart platform with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 383:1–19, November 2016.
- [22] T. Caughey and A. Vijayaraghavan. Stability analysis of the periodic solution of a piecewise-linear non-linear dynamic system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 11(2):127–134, 1976.

- [23] T. Caughey and A. Vijayaraghavan. Forced oscillations of a piecewise-linear non-linear dynamic system with several degrees of freedom. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 12(6):339–353, 1977.
- [24] C.-C. Chen. Parametric instability of a beam under electromagnetic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 240(4):747–764, 2001.
- [25] J.C. Chen. Response of large space structures with stiffness control. *AIAA Journal*, 21(5), September-October 1984.
- [26] M.O. Chtiba, S. Choura, A.H. Nayfeh, and S. El-Borgi. Vibration confinement and energy harvesting in flexible structures using collocated absorber and piezoelectric devices. *Journal of Sound and Vibration*, 329:261–276, 2010.
- [27] T.K. Caughey C.J. Goh. A quasi-linear vibration suppression technique for large space structures via stiffness modification. *International Journal of Control*, 41(3):803–812, 1985.
- [28] G.A. Lesiutre C.L. Davis. An active tuned solid-state vibration absorber using capacitive shunting of piezoelectric stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 232(3):601–617, 2000.
- [29] W.W. Clark. Semi-active vibration control with piezoelectric material as variable stiffness actuators. *SPIE Conference on Passive Damping and Isolation*, 3672, 1999.
- [30] J.C. Collinger, W.C. Messner, and J.A. Wickert. An investigation into using magnetically attached piezoelectric elements for vibration control. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134, December 2012.
- [31] L.R. Corr and W.W. Clark. Similarities between variable stiffness springs and piezoceramic switching shunts. *AIAA Journal*, 44(11), November 2006.
- [32] G. Costanza, M.E. Tata, and C. Calisti. Nitinol one-way shape memory springs: Thermomechanical characterization and actuator design. *Sensors and Actuators, A: Physical*, 157:113–117, 2010.
- [33] J.M. Cronje, N.J. Theron P.S. Heyns, and P.W. Loveday. Development of a variable stiffness and damping tunable vibration isolator. *Journal of Vibration and Control*, 11(381), 2005.
- [34] W.J. Culver. On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(5):1146–1151, October 1966.
- [35] M. Zillett D. Casagrande, P. Gardonio. Smart panel with time-varying shunted piezoelectric patch absorber for broadband vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 400:288–304, 2017.

- [36] M. Pietrzakowski D. Sado. Dynamic of thermally activated shape memory alloy autoparametric systems with two pendulums. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45:589–865, 2010.
- [37] Henry D’Angelo. *Linear time-varying systems: analysis and synthesis, The Allyn and Bacon series in electric engineering*. Allyn and Bacon, 1970.
- [38] M.M. Khan D.C. Lagoudas, J.J. Mayes. Simplified shape memory alloy (sma) material model for vibration isolation. *Smart Materials and Structures*, 4326, 2001.
- [39] SN Deshmukh and N.K. Chandiramani. Lqr control of wind excited benchmark building using variable stiffness tuned mass damper. *Hindawi Publishing Corporation Shock and Vibration*, 2014:12, 2014.
- [40] F. Dohnal. Experimental studies on damping by parametric excitation using electromagnets. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 226(8):2015–2027, 2012.
- [41] Arnauld Douay. *Optimal Variable Stiffness Feedback Control for Structural Vibration Suppression*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, February 1993.
- [42] L. Duigou, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Equivalent stiffness and damping of sandwich piezoelectric beams submitted to active control. *Smart Materials and Structures*, 15:623–630, 2006.
- [43] S.M. Srinivasan E. Khan. A new approach to the design of helical shape memory alloy spring actuators. *Smart Materials Research*, 2011, 2011.
- [44] B.R. Mace E. Rustighi, M.J. Brennan. A shape memory alloy adaptive tuned vibration absorber: design and implementation. *Smart Materials and Structures*, 14:19–28, 2005.
- [45] B. Rousselet E.J. Haug. Design sensitivity analysis in structural mechanics. i: Static response variations. *Journal of Structural Mechanics*, 8(1):17–41, 1980.
- [46] D. Wolons F. Gandhi. Characterization of the pseudoelastic damping behavior of shape memory alloy wires using complex modulus. *Smart Materials and Structures*, 8:49–56, 1999.
- [47] P.J. Cornwell F. P. Beer, E.R. Johnston Jr. *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica*. Mc-Graw-Hill, 2010.
- [48] M. Follador, M. Cianchetti, A. Arienti, and C. Laschi. A general method for the design and fabrication of shape memory alloy active spring actuators. *Smart Materials and Structures*, 21, 2012.

- [49] P.M. Frank. *Introduction to system sensitivity theory*. Academic Press, 1978.
- [50] M.I. Friswell. The derivatives of repeated eigenvalues and their associated eigenvectors. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118:390–397, July 1996.
- [51] D.D. Joseph G. Iooss. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1980.
- [52] H.N. Li G. Song, N. Ma. Applications of shape memory alloys in civil structures. *Engineering Structures*, 28:1266–1274, 2006.
- [53] F. Gandhi and P. Anusonti-Inthra. Adaptive control of semiactive variable stiffness devices for narrow-band disturbance rejection. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14(191), 2003.
- [54] A.K. Ghorbani-Tanha, M. Rahimian, and A. Noorzad. A novel semiactive variable stiffness device and its application in a new semiactive tuned vibration absorber. *Journal of Engineering Mechanics*, 2011.
- [55] B.A. Gordeev, A.B. Dar’enkov, S.N. Okhulkov, and A.S. Plekhov. Magnetorheological fluid examination for antivibration mount at impact loads. *Procedia Technology*, 24:406–411, 2016.
- [56] C. Graczykowski and P. Pawlowski. Exact physical model of magnetorheological damper. *Applied Mathematical Modelling*, 2017.
- [57] C. Greiner-Petter, A. Suryadi Tan, and T. Sattel. A semi-active magnetorheological fluid mechanism with variable stiffness and damping. *Smart Materials and Structures*, 23, 2014.
- [58] Q. Han, J. Wang, and Q. Li. Finite element analysis of stiffness characteristics of an electromagnetic device. *Journal of Vibration and Control*, 18(141), 2012.
- [59] C.M. Harris. *Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill, 1988.
- [60] Y.Y. He, S. Oi, F.L. Chu, and H.X. Li. Vibration control of a rotor-bearing system using shape memory alloy: I. theory. *Smart Materials and Structures*, 16:114–121, 2007.
- [61] R.T. Haftka H.M. Adelman. Sensitivity analysis of discrete structural systems. *AIAA Journal*, 24(5):823–832, May 1986.
- [62] S. A. Holanda, A. A. Silva, and C. J. De Araujo. Study of the complex stiffness of a vibratory mechanical system with shape memory alloy coil spring actuator. *Shock and Vibration*, 2014.
- [63] S.A. Holanda, A.A. Silva, C.J. de Araújo, and A. S. de Aquino. Study of the complex vibratory of a vibratory mechanical system with shape memory alloy coil spring. *Shock and Vibration*, 2014, June 2014.

- [64] M.A. Savi H.S. Oliveira, A.S. de Paula. Dynamical jumps in a shape memory alloy oscillator. *Shock and Vibration*, 2014, 2014.
- [65] J.A. Inaudi. Modulated homogeneous friction: a semi-active damping strategy. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26(3):361–376, 1997.
- [66] K.A. Cunefare K.A. Williams J. Wang, W. S. Shepard Jr. Actuation of a discontinuous structure with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, 309:677–694, October 2008.
- [67] L.S. Jacobsen and R.S. Ayre. *Engineering Vibrations*. McGraw-Hill, 1958.
- [68] Nader Jalili. A comparative study and analysis of semi-active vibration-control systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124:593–605, 2002.
- [69] Q.S. Li J.Y. Xu, J. Tang. Semi-active control devices in structural control implementation. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 14(2):165–174, 2005.
- [70] H. Utsuno K. Yamada, H. Matsuhisa. A new method for accurately determining the modal equivalent stiffness ratio of bonded piezoelectric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 331:3317–3344, 2012.
- [71] R. Kelly and V. Santibanez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall, 2003.
- [72] S. Graham Kelly. *Fundamentals of Mechanical Vibrations Second Edition*. McGraw-Hill, 2000.
- [73] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [74] H. Kim, Y. Han, D. Lee, J. Ha, and K. Cho. Sensorless displacement estimation of a shape memory alloy coil spring actuator using inductance. *Smart Materials and Structures*, 22, 2013.
- [75] K. YamK. Yamada. Kobori. Control algorithm for estimating future response of active variable stiffness structure. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24:1085–1099, 1995.
- [76] Izabela K. Kuder, A.F. Arrieta, Wolfram E. Raither, and P. Ermanni. Variable stiffness material and structural concepts for morphing applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 63:33–55, 2013.
- [77] T. Yin L. Ding, H.P. Zhu. Wave propagation in a periodic elastic-piezoelectric axial-bending coupled beam. *Journal of Sound and Vibration*, 332:6377–6388, 2013.
- [78] J.S. Lai and K.W. Wang. Parametric control of structural vibrations via adaptable stiffness dynamic absorbers. *Journal of Vibration*, 118, January 1996.
- [79] J. Leavitt, F. Jabbari, and J.E. Bobrow. Optimal control and performance of variable stiffness devices for structural control. *2005 American Control Conference*, 2005.

- [80] H.B. Li, Y.D. Li, X. Wang, and X. Huang. Nonlinear vibration characteristics of graphene/piezoelectric sandwich films under electric loading based on nonlocal elastic theory. *Journal of Sound and Vibration*, 358:285–300, December 2015.
- [81] Y. Li, W. Zhang, Y. Zhang, and J. Cao. A batch-fabricated electromagnetic energy harvester based on flex-rigid structures. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2017.
- [82] K. Liu, K. Liu, Liao and J. Liu. Comparison of two auto-tuning methods for a variable stiffness vibration absorber. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2005.
- [83] G.L. Lin, C.C. Lin, B.C. Chen, and T.T. Soong. Vibration control performance of tuned mass dampers with resettable variable stiffness. *Engineering Structures*, 83:187–197, 2015.
- [84] C.S. Liu. Reid’s passive and semi-active hysteretic oscillators with friction force dependence on displacement. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41:775–786, April 2006.
- [85] J. Liu and K. Liu. Application of an active electromagnetic vibration absorber in vibration suppression. *Structural Control and Health Monitoring*, 2008.
- [86] L.Y. Lu, S.Y. Chu, S.W. Yeh, and C.H. Peng. Modeling and experimental verification of a variable-stiffness isolation system using a leverage mechanism. *Journal of Vibration and Control*, 17:1869, 2011.
- [87] D.C. Lagoudas, M. M. Khan. Model of shape memory alloy pseudoelastic spring element using Preisach model for passive vibration isolation. *Smart Materials and Structures*, 4693, 2002.
- [88] S. Michelin, M. Piñeirua, O. Doaré. Influence and optimization of the electrodes position in a piezoelectric energy harvesting flag. *Journal of Sound and Vibration*, 346:200–215, 2015.
- [89] W. Magnus and S. Winkler. *Hill’s equation*. Dover Publications, 2004.
- [90] K. Makihara and H. Ecker. Stability analysis of open-loop stiffness control to suppress self-excited vibrations. *Journal of Vibration and Control*, 11(643), 2005.
- [91] Leonard Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis, Second Edition*. Mc-Graw-Hill, 1986.
- [92] C.D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, 2000.
- [93] R.G. Cobb, M.F. Winthrop, W.P. Baker. A variable stiffness device selection and design tool for lightly damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, (287):667–682, February 2005.
- [94] C. Min, M. Dahlmann, and Thomas Sattel. A concept for semi-active vibration control with a serial-stiffness-switch system. *Journal of Sound and Vibration*, 405:234–250, 2017.
- [95] S.T. Quek, N. Wu, Q. Wang. Free vibration analysis of piezoelectric coupled circular plate with open circuit. *Journal of Sound and Vibration*, 329:1126–1136, 2010.

- [96] S. Nagarajaiah and N. Varadarajan. Short time fourier transform algorithm for wind response control of buildings with variable stiffness tmd. *Engineering Structures*, 27:431–441, 2005.
- [97] Satish Nagarajaiah and Sanjay Sahasrabudhe. Seismic response control of smart isolated buildings using variable stiffness systems: An experimental and numerical study. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 35:177–197, 2006.
- [98] T. Nasu, T. Kobori, M. Takahashi, N. Niwa, and K. Ogasawara. Active variable stiffness system with non-resonant control. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30:1597–1614, 2001.
- [99] Ali Hasan Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley Classics Library, 1993.
- [100] D.C. Nemir, Y. Lin, and R.A. Osegueda. Semiactive motion control using variable stiffness. *Journal of Structural Engineering*, 120:1291–1306, 1994.
- [101] H. Adeli N.R. Fisco. Smart structures: Part i - active and semi-active control. *Scientia Iranica, Transactions: Civil Engineering*, 18:275–284, 2011.
- [102] C. Touze O. Doare, A. Sbarra, M.O. Moussa, and Z. Mounni. Experimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 49:32–42, 2012.
- [103] J. Onoda, T. Endo, H. Tamaoki, and N. Watanabe. Vibration suppression by variable-stiffness members. *AIAA Journal*, 29(6):7, June 1991.
- [104] J. Onoda. and K. Minesugi. Alternative control logic for type-ii variable-stiffness system. *AIAA Journal*, 34(1), 1996. Technical Notes.
- [105] Junjiro Onoda. Active, pasive, and semiactive vibration suppression by stiffness variation. *AIAA Journal*, 30(12), December 1992.
- [106] D. Casagrande P. Gardonio. Shunted piezoelectric patch vibration absorber on two-dimensional thin structures: Tuning considerations. *Journal of Sound and Vibration*, 395:26–47, 2017.
- [107] R.J. Spiteri P. Montagnier, C.C. Paige. Real floquet factors of linear time-periodic systems. *Systems and Control Letters*, 50:251–262, April 2003.
- [108] Y.M. Parulekar, G.R. Reddy, K.K. Vaze, S. Guha, C. Gupta, K. Muthumani, and Sreekala R. Seismic response attenuation of structures using shape memory alloy dampers. *Structural Control and Health Monitoring*, 19:102–119, 2012.
- [109] N.G. Pnevmatikos, L.F. Kallivokas, and CJ. Gantes. Feed-forward control of active variable stiffness systems for mitigating seismic hazard in structures. *Engineering Structures*, 26:471–483, 2004.

- [110] Barun Pratiher and Santosha Kumar Dwivedy. Parametric instability of a cantilever beam with magnetic field and periodic axial load. *Journal of Sound and Vibration*, 305(4-5):904–917, 2007.
- [111] X. Qui, Q. Han, and F. Chu. Analytical investigation on unstable vibrations of single-mesh gear systems with velocity-modulated time-varying stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 333:5130–5140, 2014.
- [112] A. Yavari R. Mirzaeifar, R. DesRoches. A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs. *International Journal of Solids and Structures*, 48:611–624, 2011.
- [113] P.M.C.L. Pacheco R.A.A. de Aguiar, M.A. Savi. Experimental investigation of vibration reduction using shape memory alloys. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(2):247–261, October 2012.
- [114] M.H. Rafieipour, A.K. Ghorbani-Tanha, and M. RahM. Rahimian. Mohammadi-Ghazi. A novel semi-active tmd with folding variable stiffness spring. *Eathquake Engineering and Engineering Vibration*, 13:509–518, 2014.
- [115] A. Ramaratnam, N. Jalili, and D. Dawson. semi-active vibration control using piezoelectric-based switched stiffness. *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, July 2004.
- [116] T.J. Reid. Free vibration and hysteretic damping. *Technical Notes-T.J. Reid*, 1956.
- [117] Emanuele Renzi and Maurizio De Angelis. Optimal semi-active control and non-linear dynamic response of variable stiffness structures. *Journal of Vibration and Control*, 11(1253), 2005.
- [118] J.A. Richards. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer-Verlag, 1983.
- [119] J. Woodhouse S. Adhikari. Identification of damping: Part 3, symmetry-preserving methods. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3):477–490, 2002.
- [120] J.B. Dabney S. M. Dutta, F.H. Ghorbel. Model and control of a shape memory alloy actuator. *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, June 2005.
- [121] F.B. Sayyad and N.D. Gadhav. Variable stiffness type magnetic vibration absorber to control the vibration of beam structure. *Journal of Vibration and Control*, June 2013.
- [122] Erich Schmidt, Wolfgang Paradeiser, Fadi Dohnal, , and Horst Ecker. Design of an electromagnetic actuator for parametric stiffness excitation. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 26(3):800–813, 2007.
- [123] A.L. Kalamkarov S.J. Yates. Experimental study of helical shape memory alloy actuators: Effects of design and operating parameters on thermal transients and stroke. *Metals*, 3:123–149, 2013.

- [124] A. Spaggiari, E. Dragoni, and A. Tuissi. Experimental characterization and modeling validation of shape memory alloy negator springs. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, pages 1–12, 2013.
- [125] C. Sun and S. Nagarajaiah. Stst based real-time control with variable stiffness and damping of smart tuned mass damper for seismic portection. *15 WCEE Lisboa 2012*, 2012.
- [126] J.-G. Sun. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues (i). *Journal of Computational Mathematics*, 1(1):28–38, 1988.
- [127] Tomas Szmidt and Piotr Przybylowicz. Critical load and non-linear dynamics of beck's column with electromagnetic actuators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 67:63–73, 2014.
- [128] A. Vijayaraghavan T.K. Caughey. Free and forced oscillations of a dynamic system with "linear hysteretic damping"(non-linear theory). *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 5:533–555, 1970.
- [129] V.M. Starzhinskii V.A. Yakubovich. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. John Wiley & Sons, 1975.
- [130] N. Varadarajan and S. Nagarajaiah. Semi-active variable stiffness tuned mass damper for response control of wind excited tall buildings: Benchmark problem. *Proceeding of Eng. Mech. Conf. EM, ASCE, UT Austin*, 2000.
- [131] N. Varadarajan and S. Nagarajaiah. Wind response control of building with variable stiffness tuned mass damper using empirical mode decomposition/hilbert transform. *Journal of Engineering Mechanics*, 130:451–458, 2004.
- [132] M.S. Kumar V.R. Raj Kumar, M.B. Bharati. Experimental studies on dynamic vibration absorber using shape memory alloy (niti) springs. *AIP Conference Proceedings*, 336, 2011.
- [133] N. Hofreiter W. Grobner. *Integraltafel*. Springer-Verlag, 1961.
- [134] S. Winkler W. Magnus. *Hill's Equation*. Interscience Publishers, 1966.
- [135] P.L. Walsh and J.S. Lamancusa. A variable stiffness vibration absorber for minimization of transient vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 158(2):195–211, 1992.
- [136] Q. HanQ. Han. Wang and Q. Li. Parametric instability of a cantilever beam subjected to two electromagnetic excitations: Experiments and analytical validation. *Journal of Sound and Vibration*, 2011.
- [137] A. Warkentin and S.E. Semercigil. Variable stiffness control of a single-link flexible robotic arm. *Journal of Sound and Vibration*, 187(1):1–21, 1995.

- [138] T.H. Wu and C.C. Lan. A variable stiffness mechanism for semi-active vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 363:18–32, 2015.
- [139] Yi-Syuan Wu and Chao-Chieh Lan. Design of a linear variable-stiffness mechanism using pre-loaded bistable beams. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, July 2014.
- [140] C.R. Wylie. *Advance engineering mathematics, 2nd Edition*. McGraw-Hill, 1960.
- [141] Y. Xu and M. Ahmadian. Improving the capacity of tire normal force via variable stiffness and damping suspension system. *Journal of Terramechanics*, 50:121–132, 2013.
- [142] S. Zhu Y. Zhang. A shape memory alloy-based reusable hysteretic damper for seismic hazard mitigation. *Smart Materials and Structures*, 16:1603–1613, 2007.
- [143] W.D. Iwan Y. Zhang. Some observations on two piecewise-linear dynamic systems with induced hysteretic damping. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38:753–765, 2003.
- [144] Keisuke Yamada. Enhancing efficiency of piezoelectric element attached to beam using extended spacers. *Journal of Sound and Vibration*, 341:31–52, April 2015.
- [145] Keisuke Yamada. Complete passive vibration suppression using multi-layered piezoelectric element, inductor, and resistor. *Journal of Sound and Vibration*, 387:16–35, January 2016.
- [146] J.N. Yang, J.C. Wu, and Z. Li. Control of seismic-excited buildings using active variable stiffness systems. *Engineering Structures*, 18(8):589–596, 1996.
- [147] Y. Zhou, X. WanX. Wang. Zhang, and W. Li. Variable stiffness and damping magnetorheological isolator. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 4(3):310–315, 2009.
- [148] Liu Zihao, Li Wanyou, and Yu Yali. A study of a beam-like electromagnetic vibration absorber. *Journal of Vibration and Control*, 1(10), 2014.