



**Universidad Autónoma de Baja California**  
**Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo**  
Doctorado en Ciencias Educativas

**“La matemática en contexto y el enfoque hacia la  
modelación en el aprendizaje de la derivada como  
razón de cambio”**

**TESIS**

Que para obtener el grado de

***DOCTOR EN CIENCIAS EDUCATIVAS***

Presenta

***Maximiliano Cervantes Salazar***

Ensenada Baja California, México. 22 de Agosto de 2008.



**Universidad Autónoma de Baja California**  
**Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo**  
Doctorado en Ciencias Educativas

“La matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación  
en el aprendizaje de la derivada como  
razón de cambio”

**TESIS**

Que para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EDUCATIVAS**

Presenta

**Maximiliano Cervantes Salazar**

APROBADO POR

Dra. Patricia Camarena Gallardo  
Codirectora de tesis

Dra. Gisela Pineda García  
Sinodal

Dr. René Pinet Placencia  
Codirector de tesis

Dra. M. de Jesús Gallegos  
Sinodal

Dra. Edna Luna Serrano  
Sinodal

Ensenada, B. C. México, mayo de 2008

## Dedicatoria

---

A Nuestro Padre Celestial:

Sé que tienes todo conocimiento. De ti recibí la inspiración para hacer este trabajo y sé que no lo necesitas. Pero es todo lo que puedo hacer. Te amo y por eso te lo dedico.

A mi esposa Becky:

Amor, con esto yo cierro un capítulo de mucho esfuerzo en nuestras vidas. Nada de lo que está aquí escrito, pudo ser si tú no me hubieras apoyado. Esto es parte de ti. Te amo.

A Max, Aby, Iván, Ivet, Adán y Aarón:

Ustedes han visto el esfuerzo que esto requiere. Esto ha sido por ustedes y para ustedes. Dios les bendiga. Les amo mucho.

## Agradecimientos

---

Lic. Francisco Carlos Silva Toledo:

Licenciado, reconozco que he recibido de su parte un apoyo que no se recibe en todas partes. Mi más sincero agradecimiento.

Lic. Isidro Arenas Ayón:

Te agradezco tu buena disposición para ayudarme en los momentos difíciles que esta investigación me causó. Gracias, amigo.

MC. Lilia Martínez Lobato:

Compañera, gracias por tu agradable compañía en tantas horas de trabajo y de viaje. Has sido un ejemplo del esfuerzo y del sacrificio. A ti, mi mayor aprecio.

ME. Esperanza Viloría Hernández:

Compañera, ha sido muy grato conocerte y compartir contigo esta experiencia del doctorado. Tú y Lily han sido para mí un gran ejemplo del esfuerzo por salir adelante. Les admiro y respeto.

Dr. René Pinet Placencia:

Le agradezco la confianza que me brindó a lo largo de todo este trabajo. Su paciencia y sus reflexiones me infundieron ánimo. Gracias por su apoyo.

Dra. Patricia Camarena Gallardo:

Ha sido una experiencia muy grata el trabajar con usted. Gracias por sus valiosas orientaciones. Mis mejores deseos.

## Agradecimientos

---

Dra. Edna Luna Serrano:

Te agradezco tu preocupación por mejorar el nivel de la investigación, así como el apoyo que me has brindado. Gracias Dra.

Dra. María Jesús Gallegos:

Le agradezco por motivarme a ingresar al doctorado. Aunque ha sido una experiencia agotadora, también ha sido muy satisfactoria. Siempre le estaré agradecido por ello.

Dra. Gisela Pineda García:

Aunque te incorporaste al final, te agradezco todos tus comentarios en la revisión del documento.

Dr. Servando Ortoll:

El valor de la ayuda está en su oportunidad. La ayuda que me brindaste ha sido de lo más valioso para poder concluir el reporte de la investigación y superar el estrés. De todo corazón, mi mayor agradecimiento.

Javier, Cecy, Vicky y Sergio:

Es un privilegio haberles tenido como compañeros en el programa. Me une a cada uno de ustedes la amistad y el aprecio por el espíritu de camaradería y de ayuda que me mostraron. Les estimo mucho.

## CONTENIDO

	Página
Dedicatoria .....	iii
Agradecimientos .....	iv
Contenido .....	vi
Lista de Tablas .....	ix
Lista de Figuras .....	x
Capítulo I. Introducción.....	1
1.1. Planteamiento del problema.....	2
1.2. Objetivos .....	6
1.3. Pregunta de investigación .....	6
1.4. Justificación .....	7
1.5. Organización de la tesis .....	8
Capítulo II. Antecedentes teóricos.....	10
2.1. Aprendizaje significativo y cognición situada .....	11
2.2. La matemática en el contexto de las ciencias .....	18
2.3. El enfoque hacia la modelación .....	23
2.3.1. La noción de modelo .....	25
2.3.2. Modelación con base en las cantidades.....	26
2.3.3. Significados como <i>modelos para</i> .....	29
2.4. El enfoque ontológico semiótico y la comprensión relacional .....	32
2.4.1. Significados y funciones semióticas .....	32
2.4.2. Comprensión y competencia .....	35
2.4.3. Significados correctos .....	36
Capítulo III. La modelación en la escuela .....	41
3.1. La modelación en el ambiente escolar .....	42
3.2. La modelación tradicional.....	46
3.3. La <i>realistic mathematics education</i> .....	50
3.4. <i>Models and modelling perspectives</i> .....	56
3.5. Habilidades de modelación .....	61
3.6. El enfoque hacia la modelación y la comprensión relacional .....	65

Capítulo IV. Problemas en el aprendizaje de la derivada.....	72
4.1. Importancia de la derivada en ingeniería .....	72
4.2. La modelación y el concepto de derivada.....	75
4.3. La noción de derivada como límite.....	77
4.4. Problemas en el aprendizaje de la derivada .....	86
Capítulo V. La derivada con el enfoque hacia la modelación.....	97
5.1. Situaciones que organiza la derivada .....	99
5.2. La derivada de funciones cuadráticas polinómicas.....	102
5.3. La derivada para cualquier función polinómica $f(x)$ .....	112
5.4. Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada.....	115
Capítulo VI. Método.....	121
6.1. Selección de la estrategia de investigación .....	121
6.2. Diseño de investigación .....	122
6.2.1. Pregunta y proposiciones del estudio.....	123
6.2.2. Unidades de análisis.....	124
6.2.3. Enlaces de datos a proposiciones y criterios de interpretación .....	124
6.3. Participantes.....	125
6.4. Materiales e instrumentos .....	126
6.5. Procedimiento .....	128
6.5.1. Caso tradicional.....	128
6.5.2. Caso matemática en contexto.....	131
6.5.3. Comparación de resultados .....	131
Capítulo VII. Resultados: Caso tradicional .....	132
7.1. El contexto .....	132
7.2. Comprensión relacional .....	134
7.2.1. Configuración epistémica implementada.....	135
7.2.2. Significados declarados.....	141
7.3. La derivada y la realidad cotidiana .....	148
7.4. Habilidades de modelación .....	150
Capítulo VIII. Resultados: Caso matemática en contexto .....	157
8.1. El contexto .....	157
8.2. Comprensión relacional .....	158
8.2.1. Configuración epistémica implementada.....	159
8.2.2. Significados declarados.....	163

8.3. La derivada y la realidad cotidiana .....	171
8.4. Habilidades de modelación .....	176
Capítulo IX. Conclusiones.....	183
9.1. Interpretación de resultados.....	183
9.2. Conclusiones .....	185
9.3. Limitaciones y recomendaciones .....	188
Referencias bibliográficas .....	191
Apéndice.....	204
A. Notas del curso.....	204
B. Examen sobre argumentaciones.....	225
C. Cuestionario sobre comprensión.....	226
D. Examen sobre habilidades de modelación .....	228
E. Configuración epistémica implementada, caso tradicional.....	229
F. Video filmaciones de las clases. Ambos casos .....	239
G. Transcripción de la clase del 20 de febrero.....	240
H. Exámenes presentados en el caso tradicional .....	261
I. Entrevistas sobre derivada y realidad. Caso tradicional. ....	277
J. Configuración epistémica implementada, caso matemática en contexto.....	282
K. Exámenes presentados en el caso de matemática en contexto.....	289
L. Entrevistas sobre derivada y realidad. Caso matemática en contexto.....	315

## LISTA DE TABLAS

Tabla	Descripción	Página
1	Significados de <i>modelo para</i> de ciertos conceptos matemáticos con el enfoque hacia la modelación .....	31
2	Elementos del modelo teórico para la comprensión de Godino .....	37
3	Posturas teóricas que utilizan la modelación en procesos educativos.....	56
4	Habilidades de modelación en diferentes posturas.....	64
5	Alturas, áreas y costos para diferentes tamaños del radio $r$ del bote cilíndrico de la Figura 1.....	74
6	Velocidades de un objeto en caída libre .....	107
7	Velocidades instantáneas.....	108
8	Trayectoria epistémica de la clase del 20 de febrero. 1ra. sección. Caso tradicional .....	137
9	Configuración epistémica de la derivada. Caso tradicional.....	140
10	Desarrollo global de las clases. Caso tradicional .....	142
11	Tipo de comprensión mostrada al argumentar ejercicios. Caso tradicional .....	143
12	Tipo de comprensión mostrada al argumentar en el problema. Caso tradicional .....	144
13	Configuración epistémica de la derivada con el enfoque hacia la modelación .....	147
14	Significados de la comprensión relacional con un enfoque hacia la modelación. Caso tradicional .....	148
15	Resultados sobre la derivada y la realidad. Caso tradicional .....	149
16	Habilidades de modelación. Caso tradicional .....	153
17	Contenidos implementados del uno al 15 de marzo. Caso matemática en contexto .....	159
18	Primeras tres configuraciones epistémicas de la clase del 16 de marzo. Caso matemática en contexto .....	161
19	Configuración epistémica de la derivada. Caso matemática en contexto .....	164
20	Tipo de comprensión mostrada al argumentar ejercicios. Ambos casos .....	165
21	Tipo de comprensión mostrada al argumentar en el problema. Ambos casos.....	167
22	Tipo de comprensión mostrada en argumentos. Ambos casos.....	169
23	Significados de la comprensión relacional con un enfoque hacia la modelación. Ambos casos .....	170
24	Respuestas sobre la derivada y la realidad en el cuestionario de comprensión. Ambos casos .....	172
25	Habilidades de modelación. Ambos casos .....	178

## LISTA DE FIGURAS

Figura	Descripción	Página
1	Tipos de aprendizaje que ocurren en el aula según Ausubel.....	14
2	Usos de los diferentes símbolos que integran un modelo matemático .....	29
3	Gráfica del tiempo récord para una milla .....	47
4	El <i>arithmetic rack</i> .....	52
5	Dos maneras en que podrían sentarse 16 pasajeros, en grupos de diez (a) o dobles (b).....	54
6	Posibles formas de anotar los resultados del <i>arithmetic rack</i> en la Figura 3.....	55
7	Carta de los estudiantes a su cliente, con una gráfica sobre las tendencias de ingreso de sus trabajadores .....	60
8	Proceso de modelación.....	61
9	Significados del numerador y del denominador con el enfoque hacia la modelación.....	67
10	Radio y altura de un bote cilíndrico .....	73
11	Versión moderna del área aumentada bajo la curva $D\delta$ .....	78
12	El área aumentada bajo la curva $D\delta$ se reduce al “mínimo” y toma la forma de la altura $y$ . .....	79
13	rectángulo infinitesimal $dx$ de Leibniz. ....	80
14	El Triángulo infinitesimal o infinitamente pequeño de Leibniz.....	81
15	Área de un “triángulo infinitesimal” formado por los puntos $OPQ$ .....	81
16	El área bajo la curva $AB$ se obtiene al restar el área $OAA$ a la suma de las áreas $OAB$ y $OBb$ .....	82
17	Ampliación de una curva hasta obtener una imagen de recta local.....	90
18	Limitaciones del algoritmo: degeneración de la imagen como recta local. ....	91
19	Transformación de la secante en tangente a medida que $h$ toma un valor extraordinariamente pequeño .....	92
20	Velocidades promedio y su ubicación en la continuidad .....	104
21	Continuidad de tiempo, velocidad y posición. ....	106
22	Continuidad de tiempo y posición.....	108
23	La derivada como <i>modelo para</i> . ....	111
24	La razón de cambio del punto central obtenida con diferentes posiciones del punto de cálculo con $f(x) = x^2$ .....	113

## I. Introducción

Con frecuencia observamos que se utiliza mayor información cuantitativa en las actividades cotidianas de la sociedad. Dicho tipo de información se nos presenta en forma de gráficas, estadísticas o datos numéricos, los cuales orientan a la ciudadanía de los problemas del entorno social o laboral. La necesidad de interpretar de manera correcta tal información, hace que el conocimiento matemático sea uno de los más importantes para la sociedad actual (Wilkins, 2000). Sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas no es fácil. Ello se refleja en las crisis internacionales que han experimentado las matemáticas en educación básica y media, en su reciente evolución. Desde los inicios de los sesentas, políticos o ministros de educación han generado movimientos educativos con el interés de mejorar los resultados de la enseñanza de las matemáticas. Tales movimientos conocidos como *la matemática moderna*, *el regreso a lo básico*, *la resolución de problemas* y más recientemente en los *estándares para las escuelas de matemáticas* reflejan las ideas de la teoría educativa dominante de la época (UNESCO, 1996).

Los resultados de los movimientos educativos distan de ser los deseados. Con la matemática moderna se pensó que el estudiante llegaría al pensamiento formal y axiomático, si al inicio del aprendizaje adquiría el conocimiento estructural de las matemáticas. Sin embargo, la experiencia evidenció que los estudiantes no entendían aspectos conceptuales ni dominaban el uso de las operaciones fundamentales. En respuesta a dicha situación se generó el regreso a lo básico, esto es, al dominio de tales operaciones, bajo la idea de que ello llevaría a los estudiantes a solucionar problemas. Sin embargo, de nuevo se obtuvieron resultados no deseados, los estudiantes se mostraron capaces de obtener resultados algorítmicos apropiados pero incapaces de interpretarlos, esto es, no entendieron los conceptos matemáticos fundamentales. A inicios de los ochentas surge la resolución de problemas para dar respuesta a esta situación, y en los noventas, el *National Council of Teacher of Mathematics* propone los estándares para las escuelas de matemáticas. Entre otras cosas, dichos estándares establecen que el estudiante solucione problemas, aprenda a comunicarse y razonar matemáticamente (Futrell, Lynch y Hunter-Boykin, 2000).

Las deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas continúan, como lo indican los resultados de las pruebas del *Programme for International Student Assessment* (PISA), implementado por los gobiernos de los países miembros de la *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD). El objetivo de las pruebas es probar la capacidad del estudiante para entender el papel de las matemáticas en el mundo actual, su capacidad para aplicarlas a problemas reales y su interés por aprenderlas (OECD, 2003). Los resultados de la aplicación del año 2000 provocaron un debate internacional sobre los objetivos y el papel del currículo de matemáticas, en relación con las situaciones reales (Blum, 2002).

En consecuencia, el interés reciente de las organizaciones matemáticas giró en torno a cómo acercar las matemáticas al mundo real a través de la modelación y aplicaciones matemáticas. Así, el *14th Study* celebrado en Alemania en febrero de 2004, de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) se dedicó a identificar el estado del arte en tales temas (Blum, 2002). Los resultados se presentan en el reporte que editaron Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007). Esta respuesta del ICMI a los bajos resultados en las evaluaciones PISA, nos sugiere que los matemáticos profesionales abogan por el uso de contextos reales en educación matemática.

En educación superior la modelación matemática tiene poca presencia en el currículo de matemáticas (Camarena, 1999; Houston, 2003; Lingefjård, 2007), a pesar de la creciente necesidad de aplicar en la vida diaria el conocimiento matemático adquirido. En el caso de la ingeniería, el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en el centro de la formación profesional (Vargas, 1998). Pensamos que el debate sobre cómo lograr competencia en aplicar el conocimiento matemático al mundo real, tarde o temprano arribará a las escuelas de ingeniería en México. En este contexto, en el Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora (CESUES) nos interesamos en explorar alternativas educativas con base en la modelación, para mejorar la competencia matemática de los estudiantes en ingeniería.

### ***1.1 Planteamiento del problema.***

El empleo de la modelación y las aplicaciones matemáticas como estrategias para el aprendizaje, tiene una historia reciente. El término de modelación matemática se empieza a utilizar en la industria después de la primera mitad de la década de los setenta, básicamente por aparición de los sistemas de cómputo (Hamson, 2003). Dichos sistemas permiten

solucionar no sólo ecuaciones, sino desarrollar modelos complejos para problemas industriales. Sin embargo, de acuerdo con Niss, Blum y Galbraith (2007) uno de los momentos decisivos en el origen del movimiento actual sobre la modelación y aplicaciones matemáticas, se ubica a fines de los sesentas con Hans Freudenthal. En esa época Freudenthal organizó una conferencia con el tema “*How to teach mathematics so as to be useful?*”, en ella se abogó por incluir las aplicaciones matemáticas en el currículo. Dichos autores sugieren tres fases, a partir de ese momento, relacionadas con la investigación en modelación y aplicaciones en educación matemática, que traducimos del inglés como argumentación, desarrollo y maduración. En la primera de ellas (*advocacy*) se aboga por la introducción de las aplicaciones matemáticas en educación. En la fase de desarrollo ubicada entre 1975 y 1990, se genera la mayor parte del currículo y de los materiales de modelación actual en educación. A partir de los noventa en la fase de maduración, el énfasis cambia a los aspectos teóricos.

En 1983 durante la fase de desarrollo en Inglaterra, surgen la *International Community of Teacher of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA) y la conferencia bienal *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (con el mismo acrónimo ICTMA). A través del tiempo, dicha comunidad ha involucrado a matemáticos interesados en la modelación de manera internacional, a la vez que se trabaja en varias áreas de la educación matemática. En el año 2004 el ICTMA es afiliado a la ICMI como el *International Study Group for the Teacher of Mathematical Modelling and Applications* (Haines, Galbraith, Blum y Khan, 2007; Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). Los políticos y ministros de educación coinciden ahora con los educadores e investigadores en modelación y aplicaciones matemáticas, en el interés de mejorar la competencia matemática para solucionar problemas reales.

El debate sobre qué es competencia en matemáticas incluye diferentes posturas. Entre ellas se encuentra el *KOM project (Competencies and the Learning of Mathematics)*, modelo danés utilizado en las evaluaciones PISA 2003 (Steen, Turner y Burkhardt, 2007). Dicho modelo sostiene que son varias competencias las que integran propiamente la llamada competencia matemática, entendida ésta como (Blomhøj y Jensen, 2007, p. 47) la “profunda preparación para actuar en respuesta a cierta clase de desafío matemático en una situación dada”. Así se nos sugieren dos grandes tipos de competencias, para estructurar y responder interrogantes matemáticos (pensamiento, solución de problemas, modelación y razonamiento

matemáticos), y para tratar con el lenguaje matemático (representación, símbolos y formalidades, comunicación y herramientas) (Muller y Burkhardt, 2007; Blomhøj y Jensen, 2007).

La discusión sobre el papel del currículo de matemáticas en educación no sólo incluye las cuestiones de las competencias, sino otras más, como las epistemologías y pedagogías actuales entre otras, mismas que contiene el reporte del *14th ICMI Study*. Con respecto a las competencias en modelación, de acuerdo con Greer y Verschaffel (2007) su desarrollo abarca diferentes niveles de conciencia. En el primer nivel el estudiante es inconciente de que está modelando cuando soluciona un problema, como ocurre en los niveles básicos. Sin embargo, Usiskin, (2007) señala que esta situación puede superarse, al considerar a las operaciones aritméticas como modelos matemáticos. Así la operación suma puede enseñarse como el modelo “*Putting-together model*”, modelo empleado para la adición. Dichos modelos constituyen una base para seleccionar las operaciones a utilizar al solucionar un problema. La falta de ellos dificulta la selección y aplicación de las operaciones.

El segundo nivel de conciencia implica al proceso de modelación, y el tercer nivel al examen crítico de dicho proceso. Según Greer y Verschaffel (2007) para el desarrollo de las competencias en el segundo nivel de conciencia, se encuentran marcos teóricos sobre las diferentes fases del ciclo de modelación, desde especificar el problema hasta la elaboración del reporte (Houston, 2007; Houston y Neill, 2003). Este tipo de marcos es centrado en evaluar la competencia del estudiante en tales fases. En el desarrollo de competencias del tercer nivel de conciencia, se encuentran posturas como el *KOM Project* (Blomhøj y Jensen, 2007) que cuestiona el papel de la modelación en el currículo, la de Jablonka (2007) que cuestiona dicho papel en la sociedad, o de la *matemática en contexto de las ciencias* (Camarena, 2004), que cuestiona el papel de la modelación en la ingeniería.

La mejoría de las competencias matemáticas a través de la modelación tiene un efecto limitado en el currículo actual. Esto es, la modelación tiene una presencia restringida en el currículo (Camarena, 1999; Houston, 2003; Lingefjärd, 2007) a pesar de que existen diferentes marcos teóricos para desarrollar competencias (Muller y Burkhardt, 2007). En el nivel superior la modelación matemática tiene mayormente un papel de *modelación como vehículo*, en la cual, los contenidos matemáticos determinan los problemas a modelar (Julie y Mudaly, 2007), contrario a lo que ocurre con la modelación fuera de la escuela. Así, la problemática de

mejorar competencias vía modelación es compleja e incluye falta de profesores preparados, epistemologías y la cultura del currículo, entre otros.

La discusión sobre los beneficios de la modelación y aplicaciones matemáticas también es presente en la ingeniería. Los reportes indican que la introducción de la modelación matemática en cursos de cálculo para ingeniería, mejora el aprendizaje de sus conceptos, eleva la motivación y el interés en el tema (Aroshas, Verner y Berman, 2007; Biembengut y Hein, 2007). Sin embargo, Anaya, Cavallaro y Domínguez (2007) afirman que los conocimientos previos y el esfuerzo que requiere la modelación matemática también actúa como un obstáculo para los estudiantes que prefieren la enseñanza tradicional. En otros casos, aún cuando los estudiantes consideren los conceptos como herramientas, ellos se muestran incapaces para elegir cuáles son apropiados para modelar un problema. Esto último como resultado de la disociación entre el modelo real y el modelo matemático. En consecuencia, Anaya, Cavallaro y Domínguez (2007) concluyen que en modelación y aplicaciones matemáticas, la dirección del estudiante debe centrarse en la interpretación, la comprensión relacional<sup>1</sup>, y la asociación entre conceptos y relaciones.

En México la *teoría de la matemática en contexto* aboga por mejorar las competencias en matemáticas en la ingeniería y otorga a la modelación un papel de *modelación como vehículo*. Utiliza el ciclo de modelación como didáctica y la denomina *matemática en contexto*, en la cual se introducen los conceptos matemáticos (Camarena, 1999, 2003, 2004). Esta postura sostiene que el estudiante desarrolla competencias matemáticas y en modelación, al solucionar problemas contextualizados en la ingeniería. A pesar de ello, en el caso de ingeniería industrial la modelación tiene poca presencia en el currículo. Esto puede observarse en los contenidos a evaluar por el Examen General de Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Industrial, realizado por el Centro Nacional para la Evaluación de la Educación Superior (CENEVAL, 2005).

En la carrera de ingeniero industrial del CESUES, hemos iniciado el *enfoque hacia la modelación*, esto es, un esfuerzo por mejorar la comprensión de las operaciones aritméticas

---

<sup>1</sup> Según Richard Skemp (Citado en Godino, 2003), un estudiante logra *comprensión relacional* cuando sabe qué hacer y por qué con el conocimiento matemático. Asimismo, logra *comprensión instrumental* cuando sólo sabe qué hacer pero no sabe por qué.

desde la perspectiva de modelación (Cervantes, 2003; Cervantes y Arcos, 2005). Con dicho enfoque, se pretende facilitar la comprensión relacional al conceptualizar las operaciones aritméticas en la actividad de modelar, con base en las cantidades que representan al problema. Con ello se procura otro contexto para significar los conceptos y para centrar la dirección del estudiante en el aprendizaje vía modelación, tal como sugieren Anaya, Cavallaro y Domínguez (2007).

Dada la importancia que tiene el cálculo matemático dentro de la ingeniería, y en particular, las dificultades del aprendizaje del concepto de derivada, nuestro problema es: a) desarrollar una propuesta didáctica para dicho concepto con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación, y b) conocer los efectos de dicha propuesta didáctica en la comprensión relacional y en las habilidades de modelación.

### **1.2 Objetivos.**

El estudio pretende dar una respuesta al problema de investigación a través de tres objetivos:

1. Desarrollar una propuesta conceptual para la derivada en ingeniería con el enfoque hacia la modelación.
2. Elaborar una propuesta didáctica con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación para el aprendizaje de la derivada.
3. Implementar la propuesta anterior y evaluar sus efectos en la comprensión relacional y en habilidades de modelación.

### **1.3 Pregunta de investigación.**

La siguiente pregunta guió el trabajo de investigación:

*¿Qué efectos tiene en la comprensión relacional y en habilidades de modelación, una didáctica para el aprendizaje de la derivada con base en la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación?*

#### 1.4 Justificación.

La literatura sugiere que las posturas teóricas que utilizan modelación en educación matemática, son indiferentes al papel de las cantidades y sus relaciones como fuentes de significación<sup>2</sup>. El enfoque hacia la modelación pretendemos rescatar dicho papel. Es decir, el significado de un concepto lo situamos en un contexto de modelación con base en las cantidades. Así, los contextos para significar son más cercanos a la vida cotidiana: actividades de medir y contar; unir, separar y comparar cantidades. Tales contextos acercan las matemáticas a la realidad y sugieren didácticas que se apartan de las matemáticas abstractas y culturalmente acabadas.

En las escuelas de ingeniería, el aprendizaje de la derivada con frecuencia se limita al dominio de algoritmos, y se descuida el dominio de lo conceptual (Artigue, 1995; Cantoral y Resendiz, 2003). Esto, dificulta utilizar la noción en diferentes contextos y apreciar su papel en la ingeniería, situación contraria a lo deseable al formar ingenieros (Vargas, 1998). Una mejora a dicha situación lo representa la matemática en el contexto de las ciencias. Ésta considera el conocimiento matemático como una herramienta de apoyo, utiliza las definiciones formales de los conceptos y los significa en contextos de ingeniería. Con en el enfoque hacia la modelación sugerimos que se reduce la dificultad de contenido asociada a tales definiciones formales. En el caso de la derivada, esperamos que el estudiante reconozca la estructura de relaciones que caracteriza su uso, tanto en las situaciones problema como en el concepto mismo. Creemos que una didáctica con base en la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación favorece el dominio de lo conceptual o la comprensión relacional, al significar la derivada en un contexto de modelación con base en cantidades como *modelo para*<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup> De acuerdo con Godino y Batanero (1994), el significado personal de un objeto matemático *emerge* de las prácticas (actuaciones) significativas para la persona cuando utiliza dicho objeto para solucionar un problema. Sugerimos que pueden surgir prácticas significativas al dirigir la actuación con base en las *cantidades* que expresan el problema. En este sentido, las cantidades y sus relaciones sirven para construir nuevos significados, esto es, sirven para *significar* el objeto y por tanto, se constituyen en fuentes de significación.

<sup>3</sup> Término acuñado en el Instituto Freudenthal (Gavemeijer y Terwel, 2000) para referirse al hecho, de que un concepto matemático puede concebirse como un *modelo para* una generalidad de relaciones matemáticas, que representa u organiza una situación problema.

En cuanto a pertinencia, consideramos apropiado nuestro estudio con base en tres indicadores: a) el aprendizaje de la derivada es un problema actual de nivel internacional (Bloch y Schneider, 2004; Dolores, 2000; Doorman, 2005; Aroshas, Verner y Berman, 2007), b) el cálculo es causa de reprobación y deserción en el nivel universitario (Cantoral y Reséndiz, 2003) y, c) hay un interés internacional por acercar las matemáticas a la vida cotidiana vía modelación y aplicaciones matemáticas (Blum, 2002; Houston, 2003; Blum, Galbraith, Hen y Niss, 2007).

### 1.6 Organización.

Hemos organizado el reporte de investigación en nueve capítulos: Introducción, Antecedentes teóricos, La modelación en la escuela, Problemas en el aprendizaje de la derivada, La derivada con el enfoque hacia la modelación, Metodología, Resultados: Caso tradicional, Resultados: Caso matemática en contexto, Conclusiones. En el aspecto teórico tenemos diferentes teorías, para fundamentar: a) la propuesta conceptual de acuerdo al primer objetivo, b) la elaboración de la propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada de en el segundo objetivo, y c) la evaluación de los resultados en el tercer objetivo. Así para el primer objetivo nos apoyamos en el aprendizaje significativo de Ausubel (2002) y la cognición situada de Brown, Collins y Duguid (1989), en el segundo objetivo incluimos la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias de Camanera (1999, 2002, 2004). En el tercer objetivo nos apoyamos en el enfoque ontológico semiótico de Godino (2003) y en una propuesta que elaboramos para el análisis de habilidades de modelación, con base en varios autores (Houston y Neill, 2003; Kaiser, 2005; Lesh, 2003; Camarena, 2002, 2004).

La ubicación exacta de cada teoría en los diferentes capítulos nos resulta compleja. Por tanto, decidimos agrupar las teorías en el capítulo II, Antecedentes Teóricos. Ahí describimos las condiciones del aprendizaje significativo y el papel del contexto para significar un concepto. Después se presenta la propuesta de la matemática en contexto de las ciencias para utilizar contextos de la ingeniería. Enseguida se describe cómo significar conceptos con la noción de *modelo para* en contextos de modelación con base en cantidades. Con todo ello sugerimos cómo lograr una mayor comprensión relacional en el aprendizaje de matemáticas. Para evaluar dicha comprensión, al final de dicho capítulo incluimos como referente teórico el enfoque ontológico semiótico.

En el capítulo III se analiza el papel que tiene la modelación en la matemática escolar, a través de ciertas corrientes teóricas. Con ello se prepara al lector para los dos puntos siguientes: a) nuestra propuesta teórica para evaluar las habilidades de modelación de acuerdo al tercer objetivo, y b) apreciar el aporte del enfoque hacia la modelación en relación con el uso de la modelación en el aula.

En el capítulo IV se describe con un ejemplo la importancia que tiene la derivada para la ingeniería. Revisamos en forma breve la evolución de dicha noción y la dificultad heredada para el aprendizaje al definirla como el límite de la razón de cambio promedio. Se presentan diversos esfuerzos que se realizan para superar tales dificultades a través del uso del laboratorio, de software y de nuevas epistemologías. En el capítulo V se describe la propuesta conceptual para la derivada y con ello, se logra el primer objetivo del estudio. En la parte final de dicho capítulo, presentamos sugerimos la didáctica para el aprendizaje de la derivada con la matemática en contexto y la propuesta conceptual.

En los capítulos restantes describimos los resultados al implementar la nueva didáctica y las conclusiones. Los resultados los presentamos en tres apartados: a) comprensión relacional, b) derivada y la realidad, y c) habilidades de modelación. Las conclusiones se describen para cada objetivo del estudio.

## **II. Antecedentes teóricos**

El aprendizaje de las matemáticas es una actividad compleja y ello se refleja tanto en la evolución histórica reciente de la matemática educativa como en las evaluaciones internacionales de PISA (UNESCO, 1996; Blum, 2002). Recientemente la modelación matemática y las aplicaciones adquieren relevancia para mejorar las competencias matemáticas logradas en los aprendizajes escolares. Pero la modelación dispone de un conjunto de principios para su aplicación, en lugar de un cuerpo teórico que la sustente, tal como ocurre con otros contenidos matemáticos (Lingefjärd, 2007a). Así, la mejora del aprendizaje vía modelación requiere indagar los aspectos teóricos sobre el papel del profesor, del alumno, del saber y del contexto.

El primer objetivo de la investigación es elaborar una propuesta conceptual para la noción de derivada con el enfoque hacia la modelación. En la búsqueda de referentes teóricos que nos guiaran en tal objetivo consideramos apropiadas la propuesta del aprendizaje significativo de Ausubel (2002) y la cognición situada (Brown, Collins y Duguid, 1989). El segundo objetivo es elaborar la propuesta didáctica con base en la modelación que integre la propuesta conceptual. Para ello nos apoyamos en la matemática en contexto de las ciencias (Camarena, 1999, 2002, 2004) y en el enfoque hacia la modelación. En el tercer objetivo es evaluar los efectos en la comprensión relacional y en habilidades de modelación. Para lo primero nos apoyamos el *enfoque ontológico semiótico*. Dicho enfoque es propuesto por Godino (2003) para el análisis de los significados negociados en los procesos de instrucción matemáticos con base en la teoría de los significados de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994) y de las funciones semióticas (Godino y Batanero, 1997,1998; Godino y Recio,1998; Godino, 2003). Para lo segundo, en el siguiente capítulo describimos una propuesta teórica después de revisar diferentes posturas que utilizan la modelación en educación matemática.

En este capítulo describimos los elementos de las teorías mencionadas con los que fundamentamos nuestra investigación. Presentamos una breve descripción de las teorías educativas según Hernández (1998) y cómo puede facilitarse el aprendizaje de un concepto con la teoría del aprendizaje significativo. Comentamos bajo que condiciones las situaciones

promueven dicho aprendizaje. También describimos elementos de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias y que hay que considerar al elaborar una propuesta didáctica. Presentamos el enfoque hacia la modelación, cómo se apoya en los elementos teóricos descritos y cómo resignifica los conceptos. Por último, describimos el enfoque ontológico semiótico como un instrumento para el análisis de la comprensión relacional.

### 2.1. *Aprendizaje significativo y cognición situada.*

Las exigencias de los gobiernos giran hacia un mayor contacto de la matemática con la realidad. En respuesta, los matemáticos profesionales recomiendan un mayor uso de la modelación en los procesos de aprendizaje (Blum, 2002). Creemos que esta situación exige clarificar los conceptos matemáticos con relación a la realidad cotidiana y que también presiona a reducir obstáculos epistemológicos<sup>4</sup> y el alto nivel intuitivo en el caso de la derivada. Aquí la pregunta es ¿bajo qué principios pedagógicos se puede lograr esto? o más precisamente: ¿bajo qué teoría podemos desarrollar nuestra propuesta? En esta sección presentamos ciertos elementos de la teoría de los aprendizajes significativos de David Ausubel. Elementos que permiten clarificar las condiciones básicas para lograr de dichos aprendizajes durante la apropiación de conceptos científicos.

Hernández (1998) sugiere cinco corrientes teóricas o *paradigmas* principales en educación. Recurre a la noción de paradigma en el sentido de Kuhn: el de un conjunto de principios compartidos por una comunidad científica comprometida con ellos. Con dicha noción identifica las principales tradiciones de investigación en psicología educativa, a partir de los sesenta. Es decir, los paradigmas educativos: a) conductista, b) humanista, c) psicogenético piagetano, d) sociocultural de Vigotsky y e) cognitivo.

El paradigma conductista tiene un enfoque mecanicista. Está representado en gran parte por los trabajos de Skinner y sus seguidores: considera al alumno como un ente pasivo merced a las influencias del entorno. En este paradigma domina un enfoque mecanicista de acción reacción. En el que un estímulo (la acción) produce una conducta como respuesta (la reacción). Para los conductistas la conducta observable es el objeto de estudio (Bigge, 1975;

---

<sup>4</sup> Noción introducida por Gastón Bachellard y aplicada al conocimiento matemático por Guy Brousseau. Refiere al conocimiento que se opone a la apropiación de un nuevo conocimiento. Usualmente proviene de la experiencia cotidiana o de conocimientos científicos construidos en forma errónea.

Pozo, 2003), mientras que los aspectos cognitivos son ignorados. Este paradigma sostiene que las conductas se pueden consolidar a través del uso de reforzadores. Dado que nuestra investigación gira en torno a la naturaleza cognitiva de la comprensión, el conductismo es poco apropiado a nuestros objetivos.

En un polo opuesto al paradigma conductista se encuentra el humanista. Tiene sus raíces en el existencialismo. Considera al ser humano como una totalidad tendiente a la autorrealización, interpretante de su entorno, consciente de sí mismo y de su experiencia. Hernández (1998) afirma que los trabajos en este paradigma son difusos. Pero que aún así, en educación es posible identificar el papel de la enseñanza como medio para la realización del ser, acentuar su personalidad e iniciativa con un espíritu solidario. Así, los procesos de aprendizaje deben partir de las necesidades individuales y sus potencialidades. El profesor debe constituirse en un facilitador de su autorrealización. Nos parece que este paradigma ofrece poco apoyo a nuestro interés sobre cómo apropiarse de un concepto.

De acuerdo con Hernández (1998) los otros tres paradigmas le otorgan un papel preponderante a la actividad. Centrados en los aspectos cognitivos del sujeto, estos sostienen que el aprendizaje se da en la actividad constructiva. El paradigma psicogenético piagetano da origen al constructivismo. Los trabajos de Piaget sobre la construcción del conocimiento tratan de responder a las cuestiones sobre ¿qué es el conocimiento? y ¿cuáles son sus tipos? Como biólogo, Piaget se interesa en los procesos de adaptación de los organismos vivos, a su entorno. Piaget investiga sobre las formas en que el ser humano adapta y evoluciona al construir su conocimiento. Sus aportes nos indican que el conocimiento se construye con base en esquemas; con procesos en los que el aprendiz asimila, acomoda y equilibra dichos esquemas. También señala Piaget que como ser vivo, el niño evoluciona a través de diferentes etapas o estadios, hasta alcanzar la madurez.

El paradigma sociocultural de Vigotsky resalta el aspecto social en los procesos de aprendizaje. Vigotsky considera a la palabra como unidad básica del pensamiento y señala que los significados son construcciones sociales que deben ser adquiridas por el niño o el alumno. (Vigotsky, 1995). De acuerdo con Hernández (1998) Vigotsky destaca el papel que tiene el profesor al trabajar en la zona de desarrollo próximo<sup>5</sup> y potenciar los aprendizajes. El enfoque

---

<sup>5</sup> La entendemos como la diferencia entre el aprendizaje logrado por el individuo sin ayuda del profesor y el aprendizaje logrado con su ayuda. Vigotsky resalta la importancia social de la zona de desarrollo próximo.

preponderante del paradigma contempla al alumno como un ser social. Éste construye su conocimiento a través de la interacción social. El paradigma vigotskiano brinda aportes importantes para reconstruir un concepto como producto cultural. Sin embargo, pensamos que algunos de sus aspectos fundamentales son recuperados por la cognición situada de Brown, Collins y Duguid (1986).

El inicio del paradigma cognitivo recupera el papel de la mente; se inicia en la segunda mitad de los cincuenta con las teorías del procesamiento de la información. Según Bruner (citado en Hernández, 1998) este paradigma coloca la mente en el centro de las investigaciones, después de una indiferencia total en el paradigma conductista. En un inicio, la intención fue investigar sobre los procesos de construcción de significados, así como en la creación del simbolismo utilizado en las representaciones de la realidad externa. Sin embargo, la idea del procesamiento de la información desvió estas intenciones. Aún así, investigadores de este paradigma indagan la construcción de las representaciones mentales y su influencia en el sujeto al construir nuevas representaciones. Es decir, se investiga la construcción de significados. Los procesos de aprendizaje deben entonces, orientarse en dos direcciones (Hernández, 1998):

Al logro de aprendizajes significativos *con sentido* y al desarrollo de habilidades estratégicas generales y específicas de aprendizajes [...] Esto quiere decir que los contenidos curriculares deben ser presentados y organizados de manera tal que los alumnos encuentren en ellos *un sentido y un valor funcional para aprenderlos*. (p. 133)

Nos apoyamos en la primer dirección señalada. Con base en ello exponemos la forma en que podría construirse un concepto científico. Creemos que la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel proporciona un referente teórico adecuado. Aunque muy aceptada, esta teoría también es desconocida en detalle (Rodríguez, 2004).

Para Ausubel (2002) el aprendizaje tiene dos dimensiones. La primera clasifica el aprendizaje de acuerdo a cómo se relaciona la información: significativo o memorístico. El *aprendizaje significativo* se logra cuando nueva información se enlaza de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognitiva. El *aprendizaje memorístico*, cuando no se logra dicho enlace. La segunda dimensión atiende al tipo de enseñanza y clasifica al aprendizaje en: por

recepción o por descubrimiento. El *aprendizaje por recepción* se da cuando se presentan los contenidos en forma acabada, como conocimiento cultural. El *aprendizaje por descubrimiento*, cuando se presenta parte de los contenidos, y el alumno descubre el resto. De acuerdo con Ausubel (2002), el tipo de aprendizaje logrado es independiente de la forma en que se accede a él. Es posible lograr aprendizajes significativos por recepción o por descubrimiento, así como aprendizajes memorísticos por cualquiera de esas dos formas (Ausubel, 2002; Díaz-Barriga y Hernández, 2002; Hernández 1998; Pozo, 2003) tal como se indica en la Figura 1.

En consecuencia, lo que define un aprendizaje significativo no depende directamente del tipo de enseñanza, sean métodos tradicionales o activos. ¿A que se refiere Ausubel cuando habla de aprendizajes significativos? ¿cuáles son sus condiciones? Encontramos dos acepciones del aprendizaje significativo: como producto y como proceso. Como producto se refiere al aprendizaje logrado por el estudiante, en el que la nueva información se relaciona con su estructura cognitiva de forma sustantiva, no arbitraria. Esto le proporciona un significado, un sentido. Como proceso, el aprendizaje significativo describe al proceso de aprendizaje. Creemos que dicho proceso refiere a la interacción entre la estructura cognitiva del estudiante y el nuevo material; implica comprender un material, generar significados y volverlos funcionalmente disponibles.



Figura 1. Tipos de aprendizaje que ocurren en el aula según Ausubel. Tomado de Hernández (1998).

Ausubel (2002) señala la existencia de dos condiciones básicas para que este proceso ocurra: a) actitud de aprendizaje significativo, y b) un material potencialmente significativo. La primera condición establece que el estudiante debe tener una actitud de aprender significativamente. Esto es, debe tener el objetivo o la intención de relacionar el nuevo material, de manera que lo haga en forma sustantiva y no arbitraria con sus conocimientos previos. Esto se puede lograr, como hemos comentado, tanto por recepción de la información como por descubrimiento. Si este esfuerzo no se presenta, no es posible alcanzar un aprendizaje significativo. La segunda condición establece que el material sea potencialmente significativo. Esto es, debe poseer un *grado de significado lógico* (Ausubel, 2002):

En cuanto a la naturaleza del material de instrucción, es evidente que éste debe ser suficientemente no arbitrario (es decir, no aleatorio, plausible, razonable) para que se pueda enlazar de una manera no arbitraria y no literal con las ideas correspondientes pertinentes que se encuentran en el ámbito de lo que los seres humanos son capaces de aprender (con las ideas correspondientes pertinentes que por lo menos *algunos* seres humanos son capaces de aprender si se les da la oportunidad de hacerlo). Este aspecto [...] que determina si el material es o no potencialmente significativo se puede llamar *grado de significado lógico*. (p. 125)

Pero para que un material sea potencialmente significativo, no basta con que posea un significado lógico. También se requieren ciertas ideas previas en la mente del estudiante. Ideas que permiten relacionar la nueva información con las surgidas de la experiencia individual, que dieron forma a la estructura cognitiva. Estas ideas las identifica Ausubel como *ideas de anclaje* o *subsumidores*. Se relacionan de una manera sustantiva con la nueva información en tres tipos de aprendizaje: subordinado, orden superior y combinatorio. El Primero de ellos se presenta cuando la nueva información queda subordinada a ideas de anclaje que resultan más generales. Esto es, la nueva información es subsumida, incorporada a ideas previas más abstractas. En el segundo tipo de aprendizaje se da el proceso inverso: la nueva información es más general que las ideas previas. El tercero se presenta cuando es imposible establecer alguna de las dos relaciones anteriores. Sin embargo, el nuevo conocimiento tiene puntos de contacto

con diferentes ideas de anclaje. De esta manera, las ideas de anclaje facilitan la comprensión y disponibilidad, así como la transferencia de la nueva información a otras situaciones.

En resumen, las condiciones de un aprendizaje significativo, depende prácticamente de tres condiciones: la disponibilidad de una actitud hacia el aprendizaje significativo; de un material con significado lógico, y de una estructura cognitiva con ideas de anclaje capaces de relacionarse sustancialmente con la nueva información. La falta de cualquiera de estas condiciones obstaculiza para el aprendizaje significativo. Las últimas dos resultan críticas, si deseamos relacionar con mayor fuerza conceptos matemáticos con la realidad cotidiana. ¿Cómo facilitamos la producción de materiales con significado lógico? Más aún, ¿cómo acercamos dichos materiales a las ideas de anclaje? La revisión indica que el contexto es esencial para construir el concepto.

De acuerdo con Brown, Colins y Duguid (1989) el conocimiento se separa de sus usos en la escuela tradicional, lo que dificulta la apropiación de su significado. Para estos autores, un concepto descrito a través de atributos invariantes como lo propone Ausubel, no proporciona su significado. Ellos rechazan tal idea: sostienen que el significado de un concepto se adquiere a lo largo de las diferentes situaciones en que se usa. Así, el significado del conocimiento remite al contexto en que se construye. En particular, en las situaciones que se dan en la práctica diaria de una cultura. Por lo tanto, el conocimiento es *situado*. Brown, Collins y Duguid argumentan que el conocimiento es como el lenguaje: producto de la actividad y situación en que se genera. Con base en ello proponen equiparar la noción con una herramienta conceptual. El significado que el aprendiz le otorga depende de en qué y cómo lo usa. En otras palabras, el contexto es un elemento para significar los aprendizajes.

Para Brown, Collins y Duguid (1989) el conocimiento se comparte por una comunidad de usuarios, expertos, o *comunidad de práctica*, término acuñado por Lave y Wenger (1991) en su etnografía sobre *aprendizaje situado*. En ella describen cómo un aprendiz (de sastre, carnicero, oficial naval) logra su conocimiento al ingresar a dichas comunidades. Comunidades en que las herramientas se utilizan de una manera particular, como lo establece su propia cultura. Por lo que el significado de dichas herramientas es cultural. Brown, Collins y Duguid sostienen que el aprendizaje que se logra en la práctica diaria es más eficiente. Lo describen como un proceso de *enculturación* en el que un aprendiz realiza actividades auténticas, como las hace la comunidad: con un significado propio. Ese significado no puede

ser llevado al aula de manera plena, pues en ella se adquieren los significados de la actividad escolar, de la cultura de la escuela.

De acuerdo con lo expuesto, la realización de actividades auténticas dota de significado al conocimiento que logra el aprendiz. En consecuencia, dichas actividades son deseables en la actividad escolar. Brown, Collins y Duguid señalan la imposibilidad de ello, ya que estas actividades se generan en los contextos de las comunidades de práctica. Sin embargo, sugieren centrar la actividad educativa en contextos que facilitan la participación en una actividad auténtica. Esto es, una participación sencilla, como la que realiza un principiante. Una participación *periférica*, actividad con pleno significado para el aprendiz y la comunidad, como lo sería el planchar para un aprendiz de sastre (Lave & Wenger, 1991). Brown, Collins y Duguid sugieren identificar las características contextuales presentes en una actividad auténtica determinada. Entendida ésta, como la que realiza la gente de la comunidad de práctica. Con base en dichas características, estos autores proponen diseñar contextos en los que el estudiante participe como un aprendiz. En un proceso de enculturación, en el que el contexto precede a la conceptualización.

Los aprendizajes significativos requieren de tres elementos: el interés del estudiante, un material con significado lógico y la presencia de ideas de anclaje. Nuestro interés lo centramos en los últimos dos elementos dada la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. Naturaleza contraria a la del conocimiento basado en situaciones concretas. A nuestra preocupación por lograr un material con significado lógico, el aprendizaje situado señala la necesidad de relacionarlo con contextos previos en los que emerge y es utilizado. Esto es, el conocimiento en forma de definiciones conceptuales acabadas, precisa de contextos de significación previos. Bajo esta óptica, la definición sólo es parte de un significado más global, que evoluciona a medida que surgen nuevas situaciones. Desde esta perspectiva, es deseable incluir en forma previa situaciones que dan origen al concepto y en las que es posible acordar significados lógicos. Éstos, como andamiaje para la definición formal. Así, un material con potencial lógico precisa de estos contextos, acuerdos y definiciones, lo que facilita el aprendizaje significativo.

El contexto también ayuda a la presencia de ideas de anclaje. En esencia éstas surgen de la experiencia cotidiana, en la interacción con el entorno y la cultura. Creemos, como afirman Rioseco y Romero (1997), que los contextos cotidianos despiertan el interés del

estudiante, proveen de sentido al conocimiento. En consecuencia, la selección de contextos ordinarios en el que emerge un concepto, tiene un papel doble. Por un lado promueven el recuerdo de ideas de anclaje en la estructura cognitiva con mayor probabilidad. Por otro, proporcionan condiciones para que emerja el nuevo concepto. Encontramos en el uso de estos contextos ordinarios una forma de acercar el nuevo material a las ideas de anclaje.

Nuestro problema de investigación se ubica dentro del aprendizaje de cálculo en escuelas de ingeniería. Esto lleva a reflexionar sobre la idoneidad de la teoría para elaborar una propuesta. De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se debe considerar el uso del contexto para la introducción de nuevos conceptos y el logro de aprendizajes significativos. Pensamos que la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, responde a esos intereses en las carreras de ingeniería. Primordialmente esta teoría utiliza contextos de las ciencias de la ingeniería para aprender matemáticas. Ofrece, por tanto, un referente teórico apropiado para crear una propuesta didáctica en el aprendizaje de la derivada.

## ***2.2. La matemática en el contexto de las ciencias.***

Esta teoría es explícita para aprender matemáticas en ingeniería. De acuerdo con Camarena (1999, 2002, 2004), dicha teoría surge en las escuelas del Instituto Politécnico Nacional. Su propósito es ayudar a los estudiantes a comprender la utilidad de la matemática dentro de su actividad profesional. Para ello, debemos partir del hecho de que en estas escuelas se forman ingenieros. Por tanto, los contenidos matemáticos se deben ajustar a tal situación. Camarena propone que estos contenidos se desarrollen a partir de un proceso de modelación, que soluciona un problema del contexto de las ciencias de la ingeniería. Camarena insiste en que los aprendizajes realizados de esta forma permiten que el conocimiento matemático sea menos árido, y tenga mayor significado para el estudiante. Para lograrlo, la propuesta teórica de Camarena se basa en cinco ideas fundamentales: a) definir contenidos contextualizados en su ámbito profesional, b) utilizar una didáctica basada en la modelación matemática, c) considerar las condiciones del origen del concepto matemático, d) preparar al docente para este tipo de procesos, y e) considerar los aspectos cognitivos del estudiante. El desarrollo de cada una de estas ideas se ha identificado como una *fase* teórica: curricular, didáctica, epistemológica, de formación docente y cognitiva (Camarena, 2004). Una didáctica de modelación implica solucionar un problema real, extramatemático. Esto es,

fuera de las matemáticas mismas. En consecuencia, se utiliza un contexto real propio de la actividad profesional. El uso de este contexto se constituye en una fuente de significación que puede llevar a un aprendizaje significativo, lo que resulta de especial interés para nuestra investigación.

Camarena desarrolló la metodología *dipcing* (diseño de programas de estudio de las ciencias básicas de ingeniería), para contextualizar los contenidos matemáticos dentro de las ciencias de la ingeniería. Con dicha metodología se pretenden dos cosas básicas: primero, que el profesor tenga claro el porqué de un contenido y oriente al estudiante durante su aprendizaje. Segundo, que el currículo quede construido con bases objetivas, en que las ciencias básicas funcionan como cimiento de la ingeniería (Camarena, 2002a). Para determinar los contenidos, la metodología comprende tres etapas: a) una etapa *central* en la que se analizan los textos del programa de ingeniería para identificar los contenidos requeridos en cada área básica. La intención es vincular los contenidos de las ciencias básicas, las ciencias básicas de la ingeniería, y las ciencias de especialidad; b) una etapa denominada *precedente*, en la que se determina el perfil de ingreso de los estudiantes con base en la etapa central y c) la etapa llamada *consecuente*, en la que se entrevista a ingenieros en ejercicio para conocer los contenidos de las ciencias básicas que utilizan durante su actividad profesional. De esta forma se fortalece la vinculación externa entre el nivel superior y el posgrado; entre la escuela y la industria (Camarena, 2002b). La importancia de la metodología *dipcing* está en su papel para contextualizar contenidos matemáticos en las actividades de la ingeniería. Acerca además, a los estudiantes a los contextos reales de la actividad profesional.

La metodología *dipcing* presenta al estudiante los conocimientos matemáticos de una forma coherente e integrada. Para lograr esto la *dipcing* prescribe contenidos vinculados a ciencias de ingeniería, especificando enfoques, notaciones, profundidad y aplicaciones a abordar para así solucionar los problemas de ingeniería. Esto implica una didáctica en la que el proceso de enseñanza-aprendizaje arranca con problemas contextualizados para modelarse a través de las matemáticas, en vez de iniciar con conceptos formales como ocurre en una enseñanza tradicional. Camarena llama a esta didáctica *matemática en contexto* y nos indica que tiene siete etapas fundamentales (Camarena, 2004):

1. Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.

2. Determinación de las variables y de las constantes del problema.
3. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.
4. Determinación del modelo matemático.
5. Solución matemática del problema.
6. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.
7. Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto. (p. 58)

Aunque la etapa central de esta didáctica es la del modelaje matemático y se relaciona con lo que el futuro ingeniero debe realizar (Camarena, 2003, 2003a, 2004), Camarena nos advierte que la modelación no se contempla explícitamente en los programas de ingeniería (Camarena, 2002):

Si bien los programas de estudio de matemáticas en carreras de ingeniería no siempre contemplan todos los temas que son necesarios para los demás cursos de la propia ingeniería, también es cierto que existen elementos que quedan en *tierra de nadie* [cursiva agregada] y que sin embargo, se supone que el ingeniero en ejercicio de su labor debe conocer y manejar con habilidad, entre estos elementos se localizan los modelos matemáticos. (p. 297)

Hay un malentendido entre maestros de ingeniería y de matemáticas: cada uno supone que la modelación la debe enseñar el otro. La modelación, así, queda dentro del currículum oculto, entendido como el aprendizaje derivado de la práctica escolar informal. Por consecuencia se desvinculan ciertos conocimientos matemáticos con las actividades profesionales del mundo real. Esto es contrario al interés que manifiestan los gobiernos miembros de la OECD a través del programa PISA, en cuanto al uso del conocimiento matemático.

Un ejemplo del tipo de problemas que se manejan dentro de la matemática en el contexto de las ciencias, es el que reporta Zúñiga (2004) en su investigación:

Uno de los problemas más desafiantes para el control de la contaminación del agua lo presenta la industria del curtido de pieles. Los deshechos de esta industria son químicamente complejos. Se caracterizan por valores elevados en la demanda de oxígeno bioquímico, los sólidos volátiles y otras mediciones de contaminación.

Actualmente se tiene un problema serio con este tipo de contaminación en las cercanías de la ciudad de San Luis Potosí y se les está invitando a contribuir en la solución del problema. De acuerdo a los estudios realizados, lo que se necesita en estos momentos es determinar un modelo matemático para el comportamiento de este fenómeno y poder entonces estimar elementos en relación a la contaminación producida.

Considérense los datos experimentales de la tabla de abajo los cuales se obtuvieron de 33 muestras de desperdicios que se tratan químicamente en un estudio realizado en la empresa potosina Pieles Naturales del Centro, durante el periodo comprendido entre agosto de 2001 y enero de 2002. Se presentan las lecturas de la reducción porcentual del total de sólidos ( $x$ ) y de la reducción porcentual de demanda de oxígeno químico ( $y$ ) para esas 33 muestras.

¿Qué modelo matemático propondrían para el comportamiento de estos datos experimentales? (p. 157).

Con dicho problema Zúñiga (2004) analiza las funciones cognitivas que ponen en juego los estudiantes, al introducirlos a los conceptos de función de dos variables, derivada parcial, así como al proceso de determinar valores mínimos para tales funciones. El estudio fue realizado con alumnos de Ingeniería Industrial y de Sistemas del Sistema Tecnológico de Monterrey, campus San Luis Potosí. El problema es típico de la contaminación ambiental en la zona circundante a la ciudad de San Luis Potosí.

De acuerdo con la didáctica de la matemática en contexto, las dos etapas iniciales son el planteamiento del problema y la determinación de variables y constantes. Dada la forma en que Zúñiga describe el problema, observamos que las variables  $x$ ,  $y$  las proporciona él mismo. Zúñiga (2004) reporta que durante la primera sesión se presentó el problema. Se observó motivación en el grupo por la naturaleza del problema. Se pidió a los estudiantes que lo analizaran, discutieran y escribieran el planteamiento considerando lo que conocen y lo que

desconocen. Para ello, los organizó en equipos de trabajo. Zúñiga reporta que durante la discusión los estudiantes graficaron los datos para ver si correspondían a una función. Encontraron que no y entre otras estrategias que pensaron, trazaron una línea entre los diferentes puntos dada la forma que aparecen en la gráfica. El problema fue entonces determinar la línea (modelo) que mejor se ajustara a los datos. Zúñiga pidió entonces que los estudiantes investigaran si existían métodos para encontrar tales tipos de líneas.

En la segunda sesión, después de comentar los métodos de correlación, interpolación y extrapolación, Zúñiga indujo al grupo a utilizar el método de mínimos cuadrados, lo que corresponde con la tercer etapa de la matemática en contexto: inclusión de los temas y conceptos necesarios para resolver problemas. Zúñiga describió las ideas fundamentales del método de mínimos cuadrados. Obtuvo la siguiente función que describe la suma de los cuadrados de las diferencias entre el dato que proyecta la línea (modelo) y el dato real de la demanda de oxígeno.

$$\sum_{i=1}^m [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Zúñiga (2004) reporta que los estudiantes tuvieron problemas para conceptualizar como variables los valores que determinaban la recta  $m$  y  $b$ , atribuible a la tradición de utilizar  $x$ ,  $y$  para representar las variables. Para superar este obstáculo ellos calcularon la sumatoria anterior con menos datos para analizar cómo se comportaba la función obtenida. De la tercera a la quinta sesión, estudiaron la noción de función para generalizarla a dos variables. Aplicaron la derivada parcial para ampliar la noción de derivada de una variable y determinaron cómo encontrar valores mínimos con derivadas parciales. En la sexta sesión, el profesor presentó la cuarta etapa de la matemática en contexto. El profesor y el grupo determinaron el modelo matemático al identificar los valores de  $m$ ,  $b$  que minimizan la sumatoria del cuadrado de las diferencias mencionadas. Aunque el problema explícitamente solicitaba la determinación del modelo, no observamos, en lo que reporta Zúñiga (2004) el desarrollo de otras etapas de la matemática en contexto, que refieren a la obtención de una solución matemática y la bondad del modelo para representar y solucionar el problema.

Entre los principales propósitos de la matemática en el contexto de las ciencias se encuentra integrar el conocimiento matemático a las ciencias de ingeniería. En el ejemplo descrito observamos el empleo de temas matemáticos sumamente abstractos para solucionar

un problema de estimaciones de contaminantes. De acuerdo con Zúñiga (2004) la introducción de un problema real, en un contexto propio de su carrera, motivó a los estudiantes. Sugerimos que también proveyó de un contexto para significar derivadas parciales y el método de mínimos cuadrados, en una actividad propia del ingeniero. De esta forma la matemática en contexto promueve el interés del alumno por el aprendizaje de las matemáticas. Reduce su aridez e integra la actividad de ingeniería con los conceptos matemáticos. Por consecuencia, creemos que facilita un aprendizaje significativo.

La matemática en contexto ofrece un marco teórico apropiado para elaborar una didáctica con base en la actividad de modelar y constituye nuestro principal referente teórico. Sin embargo, no es fácil de lograr (Camarena, 1999) y queda limitada a contextos de la actividad profesional, los cuales con frecuencia no están al alcance de los estudiantes en la vida cotidiana. Pensamos que esto último es desventajoso, ya que como proponen Rioseco y Romero (1997) el aprendizaje significativo se facilita con el uso de contextos ordinarios de la vida cotidiana. Esto es, entre más cercano esté un contexto profesional a un contexto ordinario, habrá mayor número de ideas de anclaje. Proponemos que el enfoque hacia la modelación complementa a la matemática en contexto en este último aspecto.

### ***2.3. El enfoque hacia la modelación.***

En esta propuesta conceptual re-orientamos el significado de ciertos conceptos matemáticos hacia la modelación. Iniciamos dicha propuesta en la unidad académica San Luis Río Colorado del Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora. Con dicho enfoque presentamos a los alumnos de ingeniería industrial una matemática más cercana a la realidad (Cervantes, 1996). En un principio comparamos las actividades de modelación matemática con las actividades de modelación dentro del diseño en ingeniería (Krick, 1995). Por ejemplo, es común que se usen maquetas para reproducir edificios o modelos a escala para representar autos, aviones, o cualquier otro objeto real. Las actividades de su construcción comprenden, entre otras, medir aquellas partes esenciales para su prototipo. Esto es, reducir dimensiones a representar por medio del uso de una escala de reducción. Construir tales partes e integrarlas de manera que constituyan al objeto como un todo. A través del modelo obtenemos información, en forma de imágenes visuales para diferentes colores, posiciones o del efecto de alguna modificación. En esta actividad de modelación distinguimos tres elementos relevantes:

a) considerar sólo aspectos esenciales que describen la naturaleza o el comportamiento de una realidad concreta a través del modelo, b) modificar el modelo respetando la realidad representada y c) generar información válida para nuevas condiciones, usualmente orientada a solucionar un problema. De acuerdo con Krick (1995) las representaciones o modelos matemáticos que se utilizan para el diseño en ingeniería revisten estos elementos:

Por medio del empleo de las matemáticas pueden realizarse predicciones de [...] fenómenos naturales, así como también del comportamiento de dispositivos, estructuras y procesos construidos por el hombre. Utilizando el sistema de reglas y convenciones prescritas por las matemáticas, y asignando símbolos para representar las propiedades importantes del objeto real, las expresiones matemáticas pueden manipularse hasta obtener predicciones útiles de lo que debe esperarse según determinadas condiciones. (p. 65)

A diferencia de las maquetas y modelos a escala, las matemáticas emplean símbolos para representar los objetos y situaciones reales. Estos símbolos y los conceptos que subyacen en ellos tienen significados muy propios de la actividad de modelación. En consecuencia, el aprendizaje de las matemáticas debe incluir dichos significados. Bajo esta forma de pensar desarrollamos lo que inicialmente denominamos el *enfoque de modelos simbólicos* (Cervantes, 1996) y actualmente denominamos el *enfoque hacia la modelación* (EHM). Éste es construido a partir de tres ideas fundamentales:

- a) Las matemáticas son producto de la actividad humana y se inician a partir de una actividad modeladora del ser humano sobre su medio ambiente, tal como lo postula Freudenthal (Gravemeijer y Terwel, 2000).
- b) La actividad de modelación básicamente se realiza con base en las cantidades que representan el problema y sus relaciones.
- c) Los conceptos matemáticos así generados tienen un significado de *modelo para*<sup>6</sup> relaciones constantes<sup>7</sup> entre tales cantidades.

---

<sup>6</sup> Simbolización matemática que describe generalidades comunes a diferentes situaciones problemas.

Con estas ideas pretendemos recuperar contextos de modelación que creemos se presentaron en el inicio de las matemáticas, así como el papel de las cantidades como fuente de significación. Proponemos de igual manera que los conceptos matemáticos pueden significarse a partir de las relaciones constantes entre las cantidades presentes en la actividad de modelación, y reducir su dificultad de contenido. Creemos que dichos significados funcionan como lo indica la noción de *modelo para* definida por la *realistic mathematics education*<sup>8</sup> (Gravemeijer y Terwel, 2000). Pensamos que con esta posición se recuperan contextos de modelación en ambientes cotidianos; asimismo se pueden elaborar nuevos materiales con significado lógico con base en las relaciones entre cantidades. El objetivo es facilitar el aprendizaje significativo y en consecuencia la comprensión de los conceptos matemáticos. Las ideas fundamentales nos requieren clarificar la noción de modelo, explicar cómo se modela con base en las cantidades, así como describir los significados de *modelo para* que otorgamos a ciertos conceptos.

**2.3.1. La noción de modelo.** Hay diversas definiciones para la noción de. Para investigadores de operaciones que utilizan modelos matemáticos en forma exhaustiva, un modelo es una representación abstracta e idealizada de una situación real (Moskowitz y Wright, 1982). Dicha representación también describe relaciones de causalidad (Thierauf y Grosse, 1991). En el área educativa, Swetz (1991) considera un modelo matemático como una estructura muy próxima a la del fenómeno representado. Biembengut y Hein (1999) se refieren a un modelo como símbolos y relaciones matemáticas que representan un problema real. Algo similar ocurre entre las posturas teóricas que utilizan modelación en la matemática escolar. Para las *models and modelling perspectives*<sup>9</sup> (Lesh y Lehrer, 2003) el modelo se define como

---

<sup>7</sup> Relaciones de tamaño, de unión o separación, y de variación. La estructura de estas relaciones se encuentra tanto en las situaciones problema como en el concepto que emerge al modelar dichas situaciones. Así, la relación de *unión de cantidades cualesquiera* tiene una estructura compuesta por dos o más cantidades cualesquiera que se unen. Dicha estructura origina el concepto de suma. En consecuencia, éste tiene un significado de *modelo para* tal estructura de relaciones. Esto es, de *modelo para la unión de cantidades cualesquiera*.

<sup>8</sup> Corriente teórica surgida en los Países Bajos que utiliza la modelación en sentido amplio y sugiere que el niño “reinventa” el concepto con modelos que emergen en la actividad matemática.

<sup>9</sup> Propuesta estadounidense que utiliza actividades que “invocan” la construcción de un modelo. Se describe en el siguiente capítulo.

un sistema conceptual que se puede expresar a través de múltiples representaciones. El modelo matemático se centra más en las características estructurales del sistema representado (Lesh y Harel, 2003). Desde la perspectiva de la *realistic mathematics education* la noción de modelo es más amplia, e incluye al modelo matemático (Van der Heuvel-Panhuizen, 2003):

Dentro de la *realistic mathematics education*, los modelos son considerados representaciones de situaciones problema, que necesariamente reflejan aspectos esenciales de los conceptos matemáticos y las estructuras que son relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diferentes manifestaciones. Esto significa que el término modelo no es tomado de una manera muy literal. Materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas y aún símbolos, pueden servir como modelos. (p. 13) [traducción libre].

A partir de esta variedad de nociones, en el enfoque hacia la modelación, por modelo nos referimos a toda *representación idealizada de relaciones, causalidades y estructuras del fenómeno o sistema representado, para describirlo, explicarlo o predecir su comportamiento como un todo*. Bajo esta perspectiva un modelo a escala describe la naturaleza física del objeto real. A su vez, un modelo matemático podría describir el comportamiento de toda una situación. En particular nos interesan los modelos matemáticos contruidos con símbolos, porque al atender sus elementos, podemos construir significados asociados a la actividad de la que emergieron. Algunos ejemplos de modelos simbólicos para calcular un volumen, la unión de dos cantidades específicas y una razón de variación instantánea son:

$$V = \frac{mKT}{\rho} \quad 425 + 32 = 457 \quad \frac{dP}{dt} = (b - d)P$$

Creemos que las matemáticas como modelos simbólicos se originaron al solucionar problemas en contextos cotidianos al modelar con base en cantidades.

**2.3.2. Modelación con base en las cantidades.** Sugerimos que la matemática surgió ante una situación problema que exigió cuantificar una dimensión para representarla. A través

de la historia esto llevó paulatinamente a crear las matemáticas como un sistema semiótico cultural (Radford, 1998, 2004). Lo que actualmente recibimos en la escuela es la matemática formal, en su forma acabada, abstracta y descontextualizada. Es frecuente ver que los textos privilegian los significados con base en el número y sus estructuras (Castro, Rico y Castro, 1995) y que pasan por alto posibles contextos de modelación que les dieron origen. Pero, ¿cómo sería dicha modelación? Pensamos que la modelación como actividad elemental requiere: a) identificar lo que se tiene que medir o contar; b) crear o adoptar una unidad de medida apropiada; c) determinar cantidades a través del conteo o la medición; d) identificar la forma se relacionan las cantidades en la situación problema; e) formular un modelo simbólico y f) obtener una solución. Es razonable pensar que en un inicio, ante una situación problema, el ser humano se valió de una unidad de medida arbitraria –tal vez los dedos– y empezó a contar el número de unidades presentes. Así, creó el número como nombre propio de una cantidad dada y en consecuencia las matemáticas como un lenguaje. En el enfoque hacia la modelación pensamos que las cantidades obtenidas de estos procesos de medición y conteo son el enlace entre la realidad y su representación simbólica, su modelo. Entendemos por cantidad *un tamaño cuantificado, una porción de magnitud o un número de unidades*.

El uso de las cantidades como enlace entre el entorno y el modelo matemático no es nuevo. Camacho reporta en su investigación histórica sobre la difusión de los conocimientos en la América del siglo XIX, en el Colegio de San Ildefonso en México, el papel que desempeñó la noción de cantidad con significados muy similares a los que le asignamos en el enfoque hacia la modelación (Camacho, 2002):

En primer término opera con magnitudes de la matemática (números reales y variables) y bajo otra perspectiva como entes de la realidad física (áreas, volúmenes, distancias) [...] Dentro de las actividades científicas en nuestro país, dicha idea se utilizaba como un elemento de enlace entre la matemática y los problemas físicos que enfrentaban disciplinas como la astronomía y [la] topografía, colocándose entre el problema real y el concepto de ecuación o función [...] el enlace se daba de la siguiente manera:

Problema físico  $\leftrightarrow$  Cantidad  $\leftrightarrow$  Ecuación-función

La justificación a este esquema operativo se encuentra inmersa en los modelos matemáticos [...] que hacían más rápidos y confiables cálculos hacia la fenomenología física. (p. 17)

En el enfoque hacia la modelación, recuperamos el papel de las cantidades como elemento de enlace entre la situación problema y el concepto matemático que la modela:

Situación problema  $\Leftrightarrow$  Cantidades  $\Leftrightarrow$  *Concepto matemático*

Estos conceptos funcionan como *modelo para* relaciones constantes entre las cantidades presentes en tal situación problema. Veamos esto con un ejemplo. Supongamos que deseamos determinar cuánto espacio ocuparán un librero y un archivero en una oficina. El pensamiento inmediato es tomar una cinta métrica, medir ambos objetos y luego sumar tales cantidades. Al hacerlo, necesariamente elegimos una unidad de medida y cuantificamos la longitud del librero y del archivero. Supongamos que miden 90 cm y 50 cm respectivamente. El siguiente paso es determinar el total que medirán juntos:  $90 \text{ cm} + 50 \text{ cm} = 140 \text{ cm}$ . Hemos construido un modelo matemático que nos describe cuánto medirán ambos muebles si los colocamos juntos. En la Figura 2 indicamos para qué utilizamos cada símbolo del modelo.

En el modelo anterior se precisan los tamaños o dimensiones a través de los conceptos de unidad de medida, cantidad y número; la unión de tales tamaños o dimensiones se modela con el concepto y su algoritmo,<sup>10</sup> y el tamaño o dimensión de la unión se representa a través del concepto de igualdad. El concepto central que describe toda la actividad de modelación, es el de suma: funciona como un *modelo para la unión de cantidades cualesquiera*. Aquí la relación invariante es que las cantidades se unen. La suma implica la unión de cantidades.

Este tipo de significados no los encontramos explícitamente en posturas que utilizan la modelación en la matemática escolar. Sin embargo, los consideramos importantes para comprender significados de los conceptos desde una actividad de modelación, cuyos contextos implican acciones ordinarias como contar y medir. Estos significados permiten ir del

---

<sup>10</sup> El algoritmo lo describimos como un procedimiento que se sigue paso a paso para calcular un resultado. Tales procedimientos pueden ser la división larga o la suma de quebrados, entre otros.

problema al concepto y del concepto al problema, pasando por diferentes niveles de comprensión (Gravemeijer, 1999; Van Der Heuvel-Panhuizen, 2003).

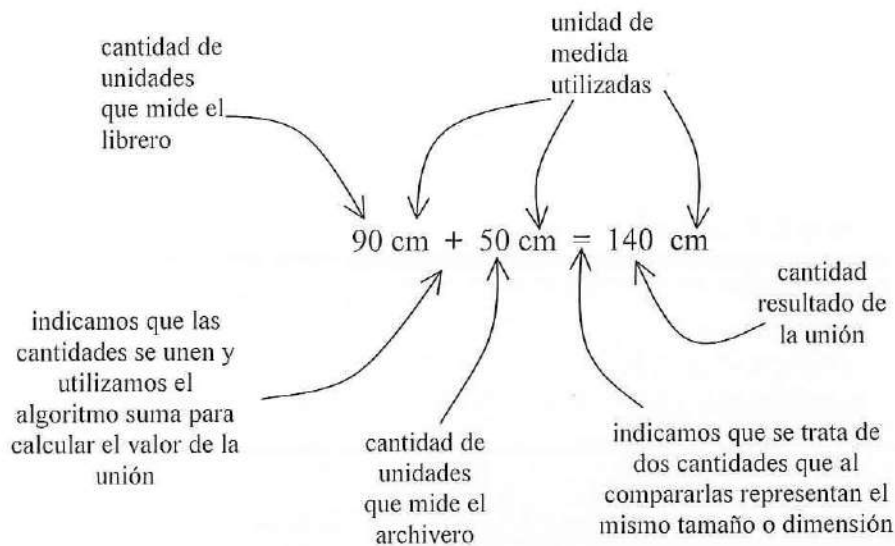


Figura 2. Usos de los diferentes símbolos que integran un modelo matemático.

**2.3.3. Significados como modelos para.** En el enfoque hacia la modelación, a ciertos conceptos les atribuimos un significado de *modelo para*, que describe las relaciones constantes entre cantidades. Estas relaciones se establecen con base en la actividad realizada con las cantidades, que emergen durante la representación del problema. Hasta el momento, distinguimos tres tipos de relaciones: de tamaño, de unión o separación y de variación. Las *relaciones de tamaño* surgen durante actividades de comparación: ¿son cantidades mayores o menores?, ¿iguales?, ¿cuántas veces una cantidad es más grande o pequeña que otra? Las *relaciones de unión o de separación* aparecen cuando la actividad requiere unir o separar las cantidades: ¿hay que unirlas o separarlas?, ¿son todas iguales o diferentes?, ¿la unión se parece al crecimiento generacional o no? Las *relaciones de variación* emergen en actividades que representan variaciones: ¿la variación depende de otra cantidad?, ¿son variaciones promedio o para un punto? o, ¿se trata de obtener una variación total a partir de la variación de cada punto?

Las relaciones constantes producen significados. Sugerimos que éstas constituyen lo que denominamos el significado *genético* del concepto (Cervantes, 2003) es decir, la razón primordial de su existencia, su significado como *modelo para* relaciones constantes entre cantidades. Rescatamos con ello el papel de las cantidades como elemento central de significación de los conceptos matemáticos. Los apreciamos como modelos de una situación dada en que las cantidades muestran una relación invariante, específica. Reconocemos que no todos conceptos presentan este significado, sino que otros funcionan como representaciones aisladas, con una especie de significado de elemento del modelo.

En el caso de las operaciones básicas, las relaciones modeladas son aquellas que se presentan en las actividades de unión o separación de cantidades. Por ejemplo, comentamos que a la suma le asignamos un significado de *modelo para unir cualquier cantidad*; esa es, en nuestra propuesta, su significado genético. La suma entonces modela situaciones cuya solución requiere de actividades en que se unen cantidades conocidas o desconocidas, y cuyo resultado deseamos conocer. Establecemos así una relación directa entre la aritmética y el álgebra. Cuando las cantidades son conocidas dentro de la suma, modelamos las situaciones aprendidas en la aritmética como una estructura numérica (Castro, Rico y Castro, 1995). Si las cantidades son desconocidas, modelamos las situaciones a través de la suma algebraica. En ambos casos se trata de unir cantidades cualesquiera. Bajo esta línea de pensamiento sugerimos que las leyes conmutativa y asociativa<sup>11</sup> de la suma se derivaron del comportamiento de las cantidades al unirlos.

Algo similar ocurre con la operación de resta: aquí el significado genético es de *modelo para la separación de cantidades cualesquiera*. En estos procesos de separación encontramos tres situaciones: separar una cantidad menor a la disponible, una igual y una mayor, lo que lleva a crear un sistema numérico que incluya al cero y a los negativos para modelar las últimas dos situaciones. Para nosotros la división y la multiplicación también modelan procesos de unión y de separación con la particularidad de que estos procesos involucran la presencia de cantidades iguales. Así, para la multiplicación, su significado genético es el de *modelo para la unión de cantidades iguales* y en el caso de la división, es el de *modelo para la*

---

<sup>11</sup> La ley conmutativa establece que el orden con que se inicie la suma no importa, en otras palabras, es lo mismo empezar la unión con cualquier cantidad:  $1 + 2 = 2 + 1$ . La ley asociativa establece que la suma puede iniciarse con cualquier par de sumandos, o cualquier par de cantidades:  $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$ .

*separación en cantidades iguales*. Presentamos de manera más detallada estas nociones en *El enfoque de modelos para matemáticas: modelos básicos*, documento escrito para los estudiantes de ingeniería industrial de la unidad CESUES San Luis Río Colorado (Cervantes, 1996). En una investigación exploratoria encontramos indicios de que el enfoque hacia la modelación promueve la comprensión de los conceptos como modelos matemáticos (Cervantes, 2003; Cervantes y Arcos, 2005). En la Tabla 1 presentamos ciertos conceptos con significados de *modelo para*.

Relación	Significado genético ( <i>modelo para</i> un tipo de relaciones)	Concepto matemático
<b>De tamaño:</b> surgen en las actividades que requieren comparar las cantidades: ¿son cantidades mayores o menores?, ¿iguales?, ¿cuántas veces una cantidad es más grande o pequeña que otra?	Cantidades iguales	Igualdad
	Cantidad(es) mayor(es) que otra(s)	Desigualdad
	Cantidad(es) menor(es) que otra(s)	
	Relación entre dos cantidades	Razón
	Relación porcentual	Porcentaje
<b>De unión o separación:</b> emergen en las actividades que requieren unir o separar las cantidades: ¿hay que unirlas o separarlas?, ¿son todas iguales o diferentes?, ¿la unión se parece al crecimiento generacional o no?	Unión de cantidades cualesquiera	Suma
	Unión de cantidades iguales	Multiplicación
	Separación de cantidades cualesquiera	Resta
	Separación de cantidades iguales	División
	Unión exponencial de cantidades	Potencia
	Separación exponencial de cantidades	Raíz
<b>De variación:</b> surgen en las actividades que representan variaciones: ¿la variación depende de otra cantidad?, ¿son variaciones promedio o para un punto?, ¿se trata de obtener una variación total a partir de la variación de cada punto?	Dependencia entre cantidades	Función
	Relación entre dos cantidades de variación	Razón de cambio promedio
	Relación instantánea entre dos cantidades de variación	Derivada
	Variaciones totales	Integral

Tabla 1. Significados de *modelo para* de ciertos conceptos matemáticos con el enfoque hacia la modelación.

La intención del enfoque hacia la modelación es proporcionar una visión de modelo para los conceptos matemáticos que acerque las matemáticas con la realidad, a partir de lo que

llamamos el significado genético y la noción de *modelo para*. Al igual que la matemática en el contexto de las ciencias, ésta es una propuesta surgida en las escuelas de ingeniería para facilitar el aprendizaje en matemáticas. El primer objetivo de la investigación es construir una propuesta conceptual para el aprendizaje de la derivada con un significado de *modelo para* una relación constante e invariante entre cantidades. Con base en la matemática en contexto nuestro segundo objetivo es desarrollar una didáctica para la comprensión de la derivada al contextualizarla en actividades ordinarias de contar y medir. Actividades que requieren determinar cantidades y sus relaciones para solucionar una situación problema. El tercer objetivo requiere que caractericemos efectos en la comprensión, así como en las habilidades de modelación. Para estudiar los significados y la comprensión, consideramos apropiado el *enfoque ontológico semiótico* de Godino (2003). Dicho enfoque constituye una postura teórica para analizar procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Los resultados que obtuvimos sobre de los efectos en la comprensión se describen en capítulos posteriores.

#### **2.4. El Enfoque Ontológico Semiótico y la comprensión relacional.**

En España, el doctor Juan Díaz Godino y un grupo de investigadores de la Universidad de Granada realizan una actividad importante para nuestra investigación. Para ellos un concepto matemático es objetivado por la cultura. Hablan entonces de un objeto como algo que puede ser señalado, indicado o referenciado. Godino y colaboradores proponen el *enfoque ontológico semiótico* para caracterizar los significados presentes en los procesos de enseñanza aprendizaje sobre objetos matemáticos. En la siguiente sección describimos los elementos que utilizamos de dicha propuesta en nuestro análisis de la comprensión relacional.

**2.4.1. Significados y funciones semióticas.** Godino (2003) señala que la investigación en didáctica de las matemáticas debe centrarse en el análisis de los procesos de enseñanza aprendizaje realizados en las aulas. Así como en sus factores condicionantes: saber, alumnos, profesor, contexto y relaciones entre ellos. Propone para ello su enfoque ontológico semiótico que se ubica dentro de las corrientes constructivistas. El eje principal del enfoque es la teoría de los significados de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994) y la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1997, 1998; Godino y Recio, 1998).

La teoría de los significados de los objetos matemáticos establece que el significado se sitúa en el *sistema de prácticas* de donde emerge el objeto. Como práctica se considera *cualquier actuación*, lingüística o no, mostrada en la actividad matemática por un sujeto o por una institución.<sup>12</sup> En consecuencia, el significado se identifica como una *praxeología matemática* relacionada con el objeto matemático. Praxeología que entendemos como un conjunto de actuaciones relacionadas con dicho objeto o concepto. Godino (2003) señala que ésta tiene un componente práctico (*praxis*) y un componente discursivo (*logos*). El primero de ellos remite a las acciones y tareas realizadas durante la solución de una situación problema. El segundo componente refiere a los aspectos teóricos, esto es, al discurso que explica tales acciones y tareas.

En el enfoque ontológico semiótico el significado de un objeto es un emergente evolutivo. Es decir, el significado emerge y evoluciona de prácticas *significativas* que tienen sentido e importancia para un sujeto o una institución. En el caso del sujeto el significado es *personal*. En el caso de la institución, entendida como un grupo de matemáticos profesionales o institución matemática, el significado es *institucional* (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1994). Observamos en esta posición un significado que va más allá de la simple definición del concepto. Se trata de un significado global más orientado a la actividad o contextos de donde emerge un objeto; mismo que puede ser un concepto matemático. Esta posición coincide con la cognición situada.

El significado de un objeto matemático tiene diferentes componentes. El significado como praxeología implica un análisis de las diferentes prácticas relacionadas a un objeto. Godino y colaboradores en forma evolutiva han propuesto una categorización de tales prácticas. Cada categoría se convierte en una fuente de significación. Dichas categorías son llamadas *entidades primarias* del significado: situaciones, acciones, conceptos, propiedades, argumentos y lenguajes. En consecuencia, el significado de un objeto es *global* o *sistémico*. Esto es, estaría formado por los significados construidos dentro de cada categoría o entidad primaria del significado (Godino y Batanero, 1997; Godino, 2002):

---

<sup>12</sup> Con este término Godino y Batanero (1994) se refieren a una organización de profesionales o a una institución propiamente dicha.

- (1) *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.
- (2) *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.
- (3) *Acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- (4) *Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función...).
- (5) *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- (6) *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo). (p. 6)

Las funciones semióticas permiten proponer significados. Como lo indica Godino (2003), su teoría utiliza la noción de *función semiótica* de Eco, inicialmente propuesta como *función de signo* por Hemslev. Esta función se da cuando una *expresión* o *significante* se pone en lugar de su *contenido* o *significado* y se requiere interpretarlo. Sin embargo la interpretación, al igual que el lenguaje, no puede ser arbitraria. Debe interpretarse de acuerdo al papel que la expresión desempeña en el contexto cultural de los procesos comunicativos. Esto es, la interpretación está sujeta al uso que la cultura da a la expresión. Godino (2003) señala que ello permite proponer la interpretación que hace un sujeto de un objeto matemático, en un contexto dado. Con ello, Godino sugiere que el conocimiento es una función semiótica, un significado mediado por la cultura. Creemos que la función semiótica fijada culturalmente, está dentro de lo que Radford (1998, 1998a, 2004) denomina sistema semiótico cultural.

Las funciones semióticas son de diferente tipo. El contenido final de una expresión es una práctica dentro de una categoría o entidad primaria del significado, señalada por la función semiótica. En consecuencia, ésta puede ser de tipo lingüístico, situacional, conceptual, proposicional, actuativo, argumentativo. Además, la práctica se encuentra caracterizada por otros factores, que Godino llama *facetas* o *dimensiones duales*. Facetas que nosotros

interpretamos como diferentes perspectivas para caracterizarlas. Así, de acuerdo al contenido final de la expresión, una función semiótica puede ser de tipo: institucional o personal, elemental o sistémica, ostensiva o no ostensiva, ejemplar o tipo, expresión o contenido (para mayores detalles ver Godino, 2003, pp.135-145).

**2.4.2. Comprensión y Competencia.** Godino (2003) propone un modelo para la noción de *comprensión* con base en las teorías descritas. Para ello sugiere tres elementos básicos de la comprensión: la dimensión personal e institucional, su carácter sistémico y dinámico, y la acción humana e intencionalidad. Con relación al primer elemento, Godino sostiene que el significado de un objeto está fijado culturalmente a través de las instituciones matemáticas. La función del profesor es ayudar al alumno en su adquisición. Para dicho autor la comprensión es la (Godino, 2003, p. 124) “construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto”. Además, Godino reconoce un proceso interactivo y social que va más allá de un proceso mental. Esto es, una institución establece el significado de un objeto a través de un sistema de prácticas significativas, y ella acepta que una persona comprende un objeto cuando es *capaz de reconocer* tales prácticas (Godino, 1996). El interés al evaluar la comprensión está en identificar los significados construidos a partir del conocimiento institucional enseñado, no los procesos mentales. Con respecto al carácter sistémico y dinámico, la comprensión implica un significado global, sistémico, con todos elementos del significado (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y relaciones, argumentos). Su apropiación es lenta y progresiva. En el tercer elemento de su modelo, Godino (2003) reconoce una intencionalidad de la acción, un para qué del objeto. En resumen, la comprensión reviste tres elementos: a) la dimensión personal e institucional, b) el carácter sistémico y dinámico, y c) la acción humana e intencionalidad.

La comprensión abarca tres entidades primarias del significado. Para Godino (2003) la comprensión implica un *saber* y *saber por qué*. Mientras, la noción de *competencia* implica *saber hacer*; equipara dichas nociones con las de Richard Skemp, la comprensión con la *comprensión relacional* y la competencia con la *comprensión Instrumental*. La competencia se relaciona con la praxis y la comprensión con el logos del modelo teórico descrito (Godino, 2003):

El componente práctico (praxis) ligado con la idea de competencia [...] en nuestro modelo teórico se descompone todavía en dos subcomponentes: las situaciones-problemas y las técnicas de solución.

El componente discursivo/relacional, ligado tradicionalmente a la idea de comprensión y formado por el sistema de reglas y justificaciones [...] en nuestro modelo se descompone en argumentaciones, definiciones de conceptos y propiedades en las que se apoya. (p. 130)

Esto sugiere que un estudiante logra la comprensión relacional si explica correctamente lo que hace. Esto es, si utiliza las argumentaciones, conceptos y propiedades empleadas por los profesionales o instituciones matemáticas. Además, logra la comprensión instrumental si reconoce situaciones y realiza acciones de solución propias del objeto matemático. De manera más precisa, como Godino (2003, p. 132) afirma: “diremos que un sujeto “comprende” el significado [...] de un concepto, - si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades y representaciones características, relacionarlo con otros objetos [...] en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente”. Pensamos que este modelo teórico posibilita evaluar el efecto sobre la comprensión de la derivada con la didáctica de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. Ello al analizar los significados que el estudiante provee en sus explicaciones o discursos al realizar actividades matemáticas. Estos elementos los mostramos en la Tabla 2.

**2.4.3. Significados correctos.** Godino (2003) propone el análisis ontológico semiótico como herramienta para determinar significados correctos. Para ello, denomina como significado institucional de *referencia* a la recopilación que hace el profesor del significado sistémico de un objeto, de acuerdo con lo que dicen textos, expertos, su experiencia y orientaciones curriculares. De esta recopilación, el profesor selecciona aquellos significados que considera pertinentes para llevarlos al salón de clase. Estos son significados institucionales *pretendidos*. Pero la clase se desarrolla siguiendo más o menos lo planeado. De tal forma que el verdadero significado institucional *implementado* es lo que se instruye. Estos determinan una configuración para el objeto, que Godino llama *configuración epistémica*. Para efectos de evaluación, el significado institucional *evaluado* es una muestra de los

significados implementados. Una tipología similar se establece para los significados personales. El significado personal *global* abarca todos los significados que tiene un estudiante y que puede manifestar potencialmente. El significado personal *declarado* es lo que el estudiante manifiesta en los instrumentos de evaluación. Por último, el significado personal *logrado* son los significados correctos desde el punto de vista de la institución. La parte de los significados declarados no correctos es lo que Godino (2003) llama disparidades entre dos interpretantes o *conflictos semióticos*.

Dimensión personal e institucional	Carácter sistémico y dinámico					Acción humana e intencionalidad
Institucional: Significados fijados culturalmente	Lenguaje					Un para qué del objeto
	Conceptos	Propiedades	Argumentos	Situaciones	Acciones	
	Comprensión relacional (saber y saber por qué; conocimiento conceptual argumentativo)			Comprensión instrumental (saber hacer; conocimiento procedimental)		
Personal: construcción o apropiación del significado institucional	Lenguaje					Un para qué del objeto
	Conceptos	Propiedades	Argumentos	Situaciones	Acciones	
	Comprensión relacional (saber y saber por qué; conocimiento conceptual y argumentativo)			Comprensión instrumental (saber hacer; conocimiento procedimental)		
	Capacidad de explicar por qué está haciendo algo, utilizando conceptos, propiedades y argumentos empleados por los profesionales o instituciones matemáticas; o de reconocer conceptos, argumentaciones, propiedades y representaciones características de un objeto [...] en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente			Reconocer situaciones y realizar acciones de solución en relación al objeto matemático		

Tabla 2. Elementos del modelo teórico para la comprensión de Godino (2003).

El análisis de los efectos en la comprensión requiere caracterizar significados. Esto es, necesitamos identificar los significados negociados entre profesor y estudiantes. Para ello se necesita disponer del texto o notas del profesor que permitan identificar los significados pretendidos; del texto de la transcripción de las clases, de exámenes y entrevistas para caracterizar significados implementados y declarados. A partir de ellos, creemos que es posible hacer comparaciones analíticas, observar efectos en la comprensión, y llegar a conclusiones pertinentes.

**Sumario.** En este capítulo presentamos los elementos principales del aprendizaje significativo, la cognición situada, la matemática en contexto. También, la postura del enfoque hacia la modelación. Por último presentamos el enfoque ontológico semiótico como un referente para analizar los significados y la comprensión. A manera de resumen presentamos lo siguiente.

El *aprendizaje significativo* se logra cuando se enlaza nueva información en forma sustancial y no arbitraria. Esto, exige dos condiciones: a) actitud de aprendizaje significativo, b) material potencialmente significativo. La segunda condición exige que el material posea un *grado de significado lógico* y la existencia de *ideas de anclaje* o *subsumidores*. Estas ideas facilitan la comprensión. Es importante considerar el contexto para producir materiales con significado lógico y acercarlo a las ideas de anclaje.

Brown, Collins y Duguid (1989) sostienen que el significado de un concepto se adquiere a lo largo de diferentes situaciones en que se usa. El conocimiento es *situado*. Es como el lenguaje: producto de la actividad y situación en que se genera. En consecuencia, El significado depende del contexto. Dichos autores describen el aprendizaje como un proceso de *enculturación* en el que un aprendiz realiza actividades auténticas y sugieren centrar la actividad educativa en contextos que facilitan una participación *periférica*. El aprendizaje situado indica la necesidad de relacionar el concepto con contextos en los que emerge y es utilizado. Rioseco y Romero (1997) sostienen que contextos cotidianos despiertan el interés del estudiante y proveen de sentido al conocimiento. Encontramos en el uso de contextos ordinarios una forma de acercar el nuevo material a ideas de anclaje.

La teoría de la matemática en el contexto de las ciencias responde al aprendizaje significativo y a la cognición situada. Basada en una didáctica de modelación llamada *matemática en contexto*, esta postura recomienda utilizar el contexto de las ciencias de la ingeniería como fuente de significación. Para contextualizar los contenidos utiliza la metodología *dipping*. Con todo, encontramos limitada a la matemática en el contexto de las ciencias, al utilizar contextos de la actividad profesional, los cuales con frecuencia están más allá del alcance de los estudiantes en la vida cotidiana. Proponemos que el enfoque hacia la modelación complementa a la matemática en contexto en este último aspecto y disminuye la dificultad de contenido de ciertos conceptos matemáticos.

El enfoque hacia la modelación utiliza contextos más cotidianos, cercanos a la actividad de medir y contar requeridas para modelar. Este enfoque recupera el papel de las cantidades como fuente de significación; otorga un significado de *modelo para* a ciertos conceptos matemáticos. Dicho significado se centra en las relaciones constantes entre cantidades presentes en la modelación y distingue tres tipos de relaciones: de tamaño, de unión o separación, entre variaciones. Así, la suma se puede significar como un *modelo para la unión de cantidades cualesquiera*; la resta como un *modelo para la separación de cantidades cualesquiera*. Estos significados están más cerca de una actividad cotidiana y pueden facilitar aprendizajes significativos, así como la comprensión de los conceptos desde una perspectiva de modelación. Nuestro primer objetivo es crear una propuesta para el aprendizaje de la derivada con base en estos antecedentes teóricos. Por otra parte el tercer objetivo nos requiere caracterizar significados y evaluar efectos en la comprensión al implementar nuestra propuesta.

El enfoque ontológico semiótico proporciona un referente teórico para analizar efectos en la comprensión. Dicho enfoque constituye una postura teórica que analiza procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Se basa en la teoría de los significados de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994) y la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1997, 1998; Godino y Recio, 1998). Identifica además, el significado de un objeto como una *praxeología matemática*. Esto es, un conjunto de actuaciones relacionadas con dicho objeto, de las que emerge en forma evolutiva a través de prácticas *significativas*. El significado es por tanto *personal* o *institucional*. Se trata de un significado *global* o *sistémico* orientado a la actividad, cuyas categorías son llamadas *entidades primarias* del significado: situaciones, acciones, conceptos, propiedades, argumentos y lenguajes. Godino (2003) sugiere que las funciones semióticas de una expresión permiten proponer significados, dado su uso convencional o cultural.

La comprensión puede evaluarse a través de los significados como *praxeología*. Para Godino (2003, p. 124) la comprensión es la “construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto”. Significado que se define a través de prácticas significativas. Godino se aparta de los procesos cognitivos y afirma que una persona comprende un objeto cuando es *capaz de reconocer* tales prácticas (Godino, 1996). Evaluar la comprensión implica identificar los significados construidos a partir del conocimiento institucional enseñado.

Dichos significados se infieren con el análisis de la praxeología mostrada al solucionar un problema o de los reactivos de evaluación propios para el objeto evaluado. La comprensión lograda se infiere entonces, a partir de los significados *correctos* desde el punto de vista institucional. Creemos que con este referente teórico es posible evaluar efectos en la comprensión. Tópico de especial interés en nuestra investigación.

### III. La modelación en la escuela

En el capítulo anterior hemos visto cómo los contextos ayudan a lograr aprendizajes significativos entre más cercanos estén a las actividades ordinarias de la vida cotidiana. Para aprender matemáticas en ingeniería, Camarena (1999, 2002, 2004) sugiere que los contenidos matemáticos se presenten a través de la modelación. Como ella indica, esto permite que el conocimiento matemático sea menos árido, menos aislado de la actividad profesional, por una parte. Por la otra, el conocimiento así logrado alcanza mayor significado para el estudiante al ubicarlo en contextos específicos. También hemos propuesto que el enfoque hacia la modelación complementa a la teoría de matemática en el contexto de las ciencias de Camarena. Nuestra propuesta teórica sugiere el uso de contextos ordinarios de medición y conteo, más fáciles de encontrar en la experiencia cotidiana que los contextos profesionales. Creemos, como indican Rioseco y Romero (1997), que los contextos ordinarios contribuyen al aprendizaje significativo.

Con el enfoque hacia la modelación proponemos para ciertos conceptos matemáticos significados de *modelo para*, en términos de las cantidades y sus relaciones emergentes de contextos de modelación. Pensamos que estos significados acercan el contenido matemático a la realidad cotidiana, aumentan la comprensión relacional y favorecen aprendizajes significativos. Sin embargo, la presencia de la modelación matemática en la escuela nos plantea ciertas interrogantes: ¿qué papel desempeña? ¿cómo se utiliza? ¿cuál es su importancia?

En el presente capítulo subrayamos la importancia de la modelación y las aplicaciones matemáticas para la educación actual. Además, describimos tres posturas teóricas que utilizan la modelación en la matemática escolar: modelación tradicional, *realistic mathematics education*, *models and modelling perspectives*. Utilizamos un ejemplo que creemos pertinente para clarificar los aportes de cada propuesta. Con esto, pretendemos ejemplificar los dos usos relevantes que tiene la modelación, según nos indican Niss, Blum y Galbraith (2007). Luego, para lograr el tercer objetivo, proponemos un referente teórico para las habilidades de modelación a partir de dichas posturas y la matemática en el contexto de las ciencias. Por último, describimos cómo el enfoque hacia la modelación complementa las propuestas revisadas y favorece la comprensión relacional. Como ejemplo describimos el significado de

la división de fracciones en un contexto de modelación con base en cantidades. Con esto, esperamos que el lector aprecie más claramente el aporte de nuestra propuesta y por qué constituye otra alternativa de significación que pudiera extenderse al aprendizaje de la derivada.

### 3.1. La modelación en el ambiente escolar.

Los gobiernos de los países miembros de la *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD) incrementaron su interés por el control de los recursos destinados a los sistemas educativos y sus contenidos. En 1997 esto originó el *Programme for International Student Assessment* (PISA) como parte del proyecto *International Indicators of Educational Systems*. Este último provee de indicadores sobre la eficacia internacional de los sistemas educativos para orientar las decisiones gubernamentales. Debido a que los gobiernos se encuentran comprometidos con la educación básica, el interés de las evaluaciones de PISA es determinar el nivel de conocimiento que adquieren los jóvenes y su capacidad para aplicarlo en el mundo real, después de abandonar la escuela obligatoria (Gil, s.f.).

Así, el conjunto de indicadores obtenidos a través de las evaluaciones se divide en tres temáticas indispensables: lenguas, matemáticas y ciencias (Gil, s.f.; INEE, 2003; OECD, 2003). Con respecto a las matemáticas PISA tiene la intención de probar la capacidad del joven para entender el papel de éstas en el mundo actual, y su interés por aprenderlas de manera que cubran sus necesidades como ciudadano. En consecuencia, PISA pone un especial énfasis en evaluar su *lenguaje matemático*<sup>13</sup>, referido en inglés como *mathematical literacy*. En el marco teórico para la evaluación 2003, dicha expresión se refiere a (OECD, 2003):

La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y para usar e involucrarse con las matemáticas en formas que cubran las necesidades de su vida individual como un ciudadano constructivo, interesado y crítico. (p. 24) [traducción libre].

---

<sup>13</sup> Término en español con que nos referimos al concepto de *mathematical literacy*.

Según se explica en el mismo documento, el término *mathematical literacy* representa la posición en que las matemáticas son consideradas como un lenguaje, en la que el individuo habla, lee y se comunica con expresiones matemáticas; conoce sus condiciones y estructuras. Se mencionan tres razones fundamentales para promover y evaluar dichas capacidades: a) existe una necesidad social de individuos preparados matemáticamente que puedan emitir juicios acertados sobre la información que reciben en una sociedad del conocimiento, dentro de un mundo complejo; b) cada vez son menos las tareas repetitivas que requieren de la fuerza de trabajo y son más las que requieren la interacción con equipo de alta tecnología; y c) se requiere que los estudiantes aprecien las matemáticas como algo que sirva a su vida cotidiana.

Para el programa PISA las actividades de *matematización*<sup>14</sup> son el vehículo para organizar y estructurar los fenómenos matemáticamente y promover el lenguaje matemático. Las actividades de matematización a evaluar son:

1. Iniciar con un problema situado en la realidad.
2. Organizarlo utilizando conceptos matemáticos. Esto es, buscar conceptos que sirvan para representar diferentes características de la situación real.
3. Apartar gradualmente el problema de la realidad, mediante suposiciones sobre las características relevantes, generalizando y formalizándolo hasta transformarlo en un problema matemático.
4. Solucionar el problema.
5. Interpretar la solución matemática en términos del problema real.

En la primera aplicación de las pruebas PISA en el año 2000, entre jóvenes de 15 a 16 años en 32 países participantes, los resultados obtenidos provocaron un debate internacional sobre los objetivos y el papel del currículo de matemáticas, de la modelación y de las aplicaciones en relación con las situaciones reales. Por modelación entendemos el proceso de construir un modelo matemático a partir de un problema real y por aplicación matemática el proceso inverso: se aprenden matemáticas y después se buscan situaciones en qué aplicarlas

---

<sup>14</sup> Término creado por Hans Freudenthal para describir las actividades matemáticas como actividades mediante las cuales, una situación se describe con mayor generalidad, certeza, exactitud y brevedad. Cualquier actividad que lleva al uso de matemáticas es una actividad de matematización.

(Blum, 2002). En consecuencia, el interés giró en torno a cómo acercar las matemáticas al mundo real.

Dentro de esta problemática, las organizaciones matemáticas internacionales desempeñan un papel relevante. Una de ellas es la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) adscrita a la principal organización mundial de matemáticos, la *International Mathematical Union* (IMU), cuyos orígenes se sitúan a inicios del siglo pasado (Jackson, 1994; Lehto, 1995). La ICMI, a su vez cuenta, a partir de los setenta, con diferentes grupos de estudio, entre ellos el *International Study Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) a partir de 1976. Dos eventos trascendentes para nuestra investigación que la ICMI organiza, son: el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), evento de mayor relevancia para los matemáticos y los *ICMI Studies*. En respuesta a las evaluaciones PISA, el *ICMI Study 14*, celebrado en Alemania en febrero de 2004, se dedicó a identificar el estado del arte en modelación y aplicaciones matemáticas (Blum, 2002). Los resultados se presentan en el reporte que editaron Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007). Esta respuesta del ICMI a los bajos resultados en las evaluaciones PISA, sugiere que los matemáticos profesionales abogan por un mayor uso de contextos reales en educación matemática.

Otra organización de interés en el ámbito internacional, es la *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*, que constituye el *International Study Group for Mathematical Modelling and Applications* dentro de la ICMI desde 2003 y patrocina la *International Conference on Teaching of Mathematical Modelling* (ICTMA) desde 1983. La ICTMA aborda diferentes tópicos de la modelación matemática. En la conferencia ICTMA 11 —*Modelación matemática: una forma de vida*— se exploran alternativas para utilizar la modelación en todos los niveles educativos, el propósito es que el estudiante perciba la modelación matemática como una manera de enfrentar la vida cotidiana.

En dicha conferencia Houston (2003), al reflexionar sobre los primeros 20 años de la organización, señala que se han alcanzado notables progresos en promover y difundir la actividad. Sin embargo, menciona la persistencia de ciertos problemas como el descrito en el reporte sobre las matemáticas en la industria de la *Society for Industrial and Applied Mathematics*, en el que los graduados de doctorado manifiestan sentirse inadecuadamente preparados para abordar los diversos problemas. También, en la mencionada conferencia Houston y Neill (2003) señalan la falta de habilidad de los estudiantes universitarios para

clarificar lo que debe ser realizado mediante un modelo, así como para relacionar situaciones físicas con las formulaciones matemáticas. Por otra parte, Houston (2003) menciona el limitado progreso que muestran los estudiantes después de llevar varios módulos de modelación y de trabajar un año en la industria (Izard, Haines, Crouch, Houston & Neill, 2003). Estos señalamientos muestran que aún persisten resultados contrarios a lo que pretende la OECD a través de PISA. Apreciamos que tanto la *Intentional Commission on Mathematical Instruction* como la *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* coinciden en proponer la modelación en educación para solucionar las deficiencias detectadas por PISA, esto es, que proponen el uso de contextos reales. Esto nos lleva a investigar el papel de la modelación en la matemática escolar.

Niss, Blum y Galbraith (2007) dicen que hay una dualidad o dos polos en cuanto al porqué del utilizar la modelación y aplicaciones matemáticas en la escuela. En un polo se encuentran las posturas que las consideran como un medio para aprender matemáticas. En el otro, las posturas que las consideran un fin. Esto es, las primeras posturas se interesan por mostrar el papel de la matemática en la actualidad y motivar su estudio; las segundas se interesan por desarrollar capacidades de modelación para se utilicen en contextos fuera del aula. Nosotros decidimos llamar a esta última postura *modelación tradicional*. Siguiendo las ideas de Niss, Blum y Galbraith (2007) creemos que dicha modelación se caracteriza por un enfoque utilitario, en el que el conocimiento matemático se asemeja a una caja de herramientas de la cual hay que extraer el instrumento para resolver una situación problema. En esta posición la secuencia es aprender matemáticas y luego a modelar matemáticamente. Un ejemplo de este enfoque se aprecia en el libro *Mathematical Modelling* (Berry y Houston, 1995).

En el otro extremo radicalmente opuesto, los conceptos matemáticos se adquieren como consecuencia de la modelación presente en las actividades de matematización, tal como se hace en la *realistic mathematics education* (Gravemeijer, 1999; Gravemeijer & Doorman, 1999; Gravemeijer & Terwel, 2000). De dichas actividades emerge el conocimiento matemático durante la solución de la situación problema. Entre estas dos posturas extremas, existen otras que combinan sus fines: aprender matemáticas y aumentar las capacidades de modelación. Entre ellas ubicamos a la *models and modeling perspectives* en la que el alumno necesita resolver un problema utilizando la modelación, argumentar su razonamiento y

comunicar sus resultados (Lesh, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh y Harel, 2003), y a la matemática en el contexto de las ciencias (Camarena, 1999, 2002, 2004) que ya hemos descrito. A continuación presentamos los principales elementos de lo que llamamos modelación tradicional, la *realistic mathematics education* y las *models and modeling perspectives*.

### 3.2. La modelación tradicional.

Esta postura la caracterizamos por la intención del desarrollo de capacidades de modelación en primer término, por un entorno en el que se presenta un problema real y se pide al estudiante que utilice la matemática para solucionarlo. Esto exige un conocimiento previo de los conceptos y procedimientos matemáticos que serán utilizados como instrumentos de modelación. Consideramos el contenido del libro *Mathematical Modelling* de Berry y Houston (1995) un buen ejemplo de esta postura. En él, Berry y Houston (1995, p. 1) definen de manera amplia un modelo matemático como “una representación matemática de las relaciones entre dos o más variables relevantes a un problema o situación dada” y a la modelación matemática como “un método para solucionar problemas matemáticamente”. Para dicho método ambos autores distinguen dos tipos de modelación: *empírica* y *teórica*. En el primer tipo, el modelo se construye esencialmente a partir de datos y, en el segundo, a partir de consideraciones teóricas.

Por sencillez, tomamos el ejemplo que se encuentra en la página cuatro del libro de Berry y Houston (1995). Pretendemos con ello mostrar cómo se crea un modelo matemático a partir de datos empíricos. En la información del problema se observa cómo el tiempo récord para carreras de una milla disminuye a través de los años: a partir de 1913, cuando el tiempo récord fue de 4 minutos 14.4 segundos hasta 1993, cuando fue de 3 minutos 44.39 segundos. Como parte del problema, los autores piden determinar en qué año es probable que el récord sea de 3 minutos 40 segundos. Berry y Houston indican que la solución se puede obtener a través de la gráfica (modelo gráfico) de la Figura 3 o bien, de la ecuación de la recta mostrada en la gráfica (modelo simbólico):  $t = 255 - 0.38T$  en la que  $t$  representa el tiempo récord en segundos y  $T$  el tiempo en años. Berry y Houston señalan las obvias limitaciones del modelo, ya que indican la posibilidad de que el tiempo récord sea de cero segundos.

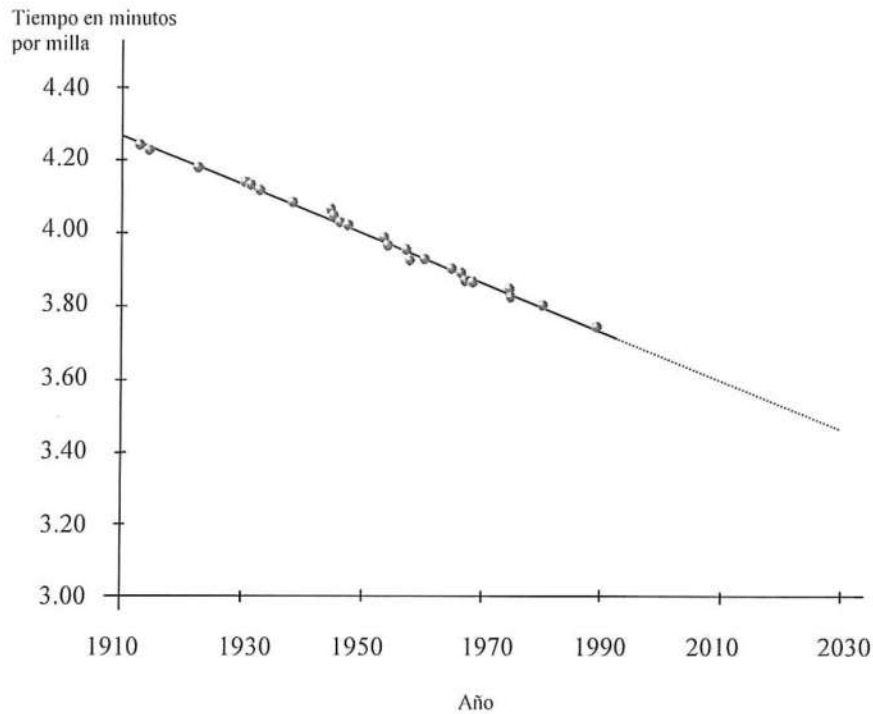


Figura 3. Gráfica del tiempo récord para una milla, tomada de Berry y Houston (1995).

Como un ejemplo de modelación teórica, Berry y Houston (1995) muestran el siguiente problema:

Como peatón, hay varias veces en el día en que usted ha tenido que cruzar una calle. En algunas calles que no tienen mucho tráfico, ha tenido que esperar por un espacio entre los carros y entonces cruzar; en aquellas con mucho tráfico se le aconseja que utilice un cruceo peatonal. La autoridad local tiene que decidir si debe instalar y cuándo, cruceos controlados en ciertas calles [...] formule un modelo matemático para el cruce en una calle de un solo sentido, de manera que un peatón pueda hacerlo en forma segura. Utilice su modelo para decidir bajo qué condiciones la autoridad local debe instalar un cruceo peatonal. (p. 12) [traducción libre].

La información cuantitativa que se requiere para solucionar este problema depende de la perspectiva teórica con que se enfrente. Si se consideran las velocidades de los vehículos, del peatón, así como las distancias reglamentarias que deben guardarse entre los vehículos, será necesario conseguir la información correspondiente. Bajo esta perspectiva, Berry y Houston comentan que tal vez se sugiera que no se instale un cruce peatonal, porque en teoría existe tiempo suficiente entre carro y carro para realizar un cruce seguro. Otra consideración puede incluir las frecuencias de los espacios que hay entre dos vehículos consecutivos y las probabilidades de que se presente un espacio suficientemente grande para realizar un cruce seguro. Las dos formas de solucionar el problema son descritas a detalle en el libro *Mathematical Modelling* de Berry y Houston (1995).

En estos ejemplos podemos ver la necesidad de que el estudiante cuente con el conocimiento previo de conceptos matemáticos relacionados con desigualdades y teoría de probabilidad; así como de los procedimientos matemáticos para ajustar una recta a datos puntuales con tendencia, la forma de calcular velocidades, entre otros. Aparte de poner a la matemática en contacto con la realidad, el propósito expreso de esta didáctica es desarrollar capacidades de modelación. Para Berry y Houston, la modelación matemática involucra el desarrollo de los siguientes pasos: a) comprender el problema, b) identificar las características relevantes, c) realizar suposiciones y simplificaciones, d) definir variables, e) utilizar sub modelos, f) establecer relaciones entre variables, g) resolver ecuaciones, h) interpretar y validar el modelo, i) mejorar el modelo, y j) explicar los resultados.

Los cursos de modelación matemática en la Universidad de Ulster en Inglaterra, que utilizan ejemplos del texto de Berry y Houston, no necesariamente persiguen el desarrollo de habilidades para realizar cada uno de los pasos mencionados. Houston y Neill (2003) reportan que los estudiantes de los cursos de matemáticas, estadística y cómputo llevan dos módulos de modelación durante los primeros dos años y que, durante el tercero, pasan un año en la industria. En los módulos mencionados se persigue que, para un problema real, los estudiantes desarrollen la habilidad para: a) formular un modelo apropiado; b) producir la correspondiente solución matemática; c) interpretar posibles resultados; d) evaluar una solución óptima; e) reportar la solución y sus implicaciones y f) repasar y refinar el modelo original a la luz del análisis.

Para evaluar las habilidades de los alumnos al desarrollar cada etapa en el proceso de pasar de un problema real a un problema matemático, Houston y Neill (2003) señalan que Haines, Crouch y Davis diseñaron una prueba del tipo de opción múltiple. Los tipos de preguntas incluyeron: a) realizar suposiciones simplificadoras; b) clarificar el objetivo; c) formular el problema; d) asignar variables, parámetros y constantes; e) plantear formulaciones matemáticas y f) seleccionar un modelo. Houston y Neill aplicaron dichos cuestionarios al inicio y al final de cada año académico para los periodos 1999-2000 y 2000-2001 con el fin de detectar las áreas de debilidad y proponer mejoras a los módulos de modelación. También utilizaron un cuestionario que ellos mismos diseñaron, y que era similar al de Haines, Crouch y Davis. Los resultados previos mostraron que los tres cuestionarios quedaron cortos, por lo que se recombinaron y se agregaron dos tipos de preguntas más para completar un cuestionario con 22 preguntas. Entre los resultados, los investigadores encontraron que los estudiantes mostraban falta de habilidad para saber qué es lo que persigue un modelo (clarificar el objetivo) y dificultad para relacionar situaciones físicas con las formulaciones matemáticas (seleccionar un modelo).

Estos resultados forman parte de otro estudio más amplio que involucra a otras universidades y que reportaron IZARD, CROUCH, HAINES, HOUSTON Y NEILL (2003). En dicho estudio los autores concluyen que a pesar de haber cursado varios módulos en modelación matemática y haber trabajado un año en la industria, los resultados de las pruebas no mejoran. Aun así, otros reportes en que se involucra una modelación tradicional indican que los estudiantes pueden aprender del papel sociocultural de las matemáticas (Barbosa, 2003), o que los alumnos se motivan y se sorprenden por la forma en que la matemática les ayuda a resolver problemas reales (Yanagimoto, 2003).

Podemos concluir que no encontramos dentro de esta postura un interés explícito en construir significados para los conceptos matemáticos, sino en el desarrollo de habilidades de modelación. Pensamos que en sus primeros años éste fue el uso dominante de la modelación matemática en el ámbito escolar (Berry, Burges, Huntley, James, Moscardini, 1986). Sin embargo, el introducir contextos reales para modelar con matemáticas permite al estudiante crear significados a través de estas situaciones. Significados que acercan la matemática a la realidad cotidiana.

### 3.3. *La realistic mathematics education.*

En una postura opuesta a la modelación tradicional, en que la modelación es un medio para aprender matemáticas, ubicamos a la *realistic mathematical education*. Iniciada por Hans Freudenthal (1905-1990) ésta se desarrolló en la Universidad de Utrecht, en los Países Bajos. Esta corriente se distingue por su interés en que la matemática construida tenga un sentido de realidad en cualquier nivel de actividad. Privilegia el uso de contextos centrados en las actividades, en las cuales se utiliza la modelación como un puente entre situaciones y objetos matemáticos construidos. Freudenthal compartió la idea del *centro de interés* de Decroly: un conjunto de temas relacionados con las necesidades del niño y su medio ambiente, hacia los cuales éste dirige su atención en forma natural. Freudenthal, convencido de que la matemática es una actividad humana, se opuso con fuerza a las teorías de corte conductista, sus métodos de enseñanza y de evaluación. Para él la matemática era más que nada una actividad de la que surgían los productos matemáticos (Gravemeijer & Terwel, 2000):

La matemática como actividad humana es una actividad de solución de problemas, de buscar problemas, también es la actividad de organizar un tópico. Éste puede ser de una realidad que tiene que ser organizada de acuerdo con patrones matemáticos, si se parte de la realidad. También puede ser un tópico matemático, de nuevos o viejos resultados, propios o ajenos, los cuales tienen que organizarse de acuerdo con nuevas ideas, para ser mejor entendidas, en un contexto amplio, o bajo un enfoque axiomático. (p. 781) [traducción libre].

Tal concepción de la matemática lleva a Freudenthal a promover cambios en el currículo, en los métodos de investigación y en la didáctica. El centro de la educación matemática abarca las actividades que sirven para organizar matemáticamente un problema o actividades de *matematización* y sus efectos: el producto matemático. Gravemeijer y Terwel (2000) nos indican que el término “matematización” literalmente significa “hacerlo más matemático” (p. 781). Es decir, de mayor generalidad, certidumbre, exactitud y brevedad. La actividad de *matematización* y sus construcciones son el centro de la intervención didáctica. En ella, el docente desempeña un doble papel: promueve construcciones matemáticas por un lado, y por otro su formalización, a través del uso de símbolos, notaciones y conceptos

convencionales de la matemática. Las actividades de matematización son aquellas necesarias para pasar del mundo real al mundo matemático, con un sentido de realidad (Gravemeijer & Terwel, 2000; Gravemeijer, Cobb, Bowers, Whitenack, 2000). Treffer (citado en Gravemeijer y Doorman, 1999) distingue dichas actividades como matematización *horizontal* cuando se refieren a la descripción matemática de un problema contextualizado y como matematización *vertical*, cuando se centran en la actividad matemática, ignorando el contexto. En estas actividades se alcanza el mayor nivel matemático.

Las ideas anteriores son centrales en la *realistic mathematics education*, que trata de mantener un sentido de realidad en todos los niveles de las actividades de matematización. El problema es, entonces, cómo lograr una configuración educativa bajo tales ideas. La solución propuesta establece tres principios fundamentales: reinención guiada, fenomenología didáctica y los niveles en el proceso de aprendizaje (Gravemeijer & Terwel, 2000), también llamado el principio del nivel (Van Del Heuven-Panhuizen, 2003).

En la reinención guiada, Freudenthal deja claro que se propone diseñar un proceso de aprendizaje en el que los alumnos compartan sus hallazgos y sean los responsables de los mismos, no el maestro. En esta interacción el alumno “re-inventa” el tópico de enseñanza, experimenta las sensaciones de crear, aprender y comprender. Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) señalan que bajo este principio se busca la historia del desarrollo de ciertas prácticas matemáticas. Con esta información elaboran una *trayectoria de aprendizaje conjeturada* a la vez que visualizan posibles dificultades, interpretaciones informales y la manera en que pueden evolucionar a una práctica más formal. La historia y las posibles interpretaciones constituyen el punto de partida.

De manera muy sintética presentamos como ejemplo el experimento reportado como *estructurando números*. En él dichos autores describen el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje, en que niños de primer año aprendieron a organizar y a sumar los números hasta el 20. Luego de buscar en reportes de investigación los autores encontraron que las estrategias de duplicar un número o agruparlo en múltiplos de cinco son frecuentes, atribuibles al uso de los dedos y las manos durante la actividad de conteo. En consecuencia, se diseñó el *arithmetic rack*, un dispositivo similar al ábaco, en el que se colocaron cinco bolitas rojas y cinco blancas en cada uno de los dos ejes del instrumento. Como se muestra en la Figura 4.

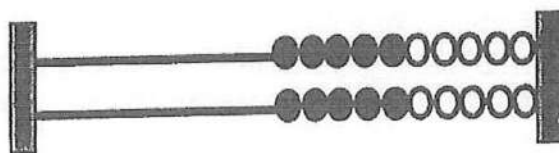


Figura 4. El *arithmetical rack*, tomada de Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000).

Con este dispositivo, en una especie de modelación elemental, los niños podrían realizar conteos al desplazar las bolitas del lado derecho al izquierdo: actividades de matematización que presumiblemente dieron origen a la secuencia numérica. Para que estas actividades tengan un sentido de realidad, es necesario que se anclen en actividades cotidianas. Para ello se requiere atender al principio de la fenomenología didáctica.

Para Freudenthal la matemática no es un cuerpo de conocimiento que deba adquirirse en una forma bancaria<sup>15</sup>; más bien es una actividad de solución de problemas. Freudenthal sugiere que la mejor manera de aprenderla es a través de la actividad (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 11): “lo que los seres humanos tienen que aprender, no es la matemática como sistema cerrado, sino más bien una actividad, como el proceso de matematizar la realidad y, si es posible aun eso de matematizar matemáticas”. El *arithmetical rack*, no sirve para este propósito por sí solo, aunque favorece las actividades de conteo. Debe ser utilizado en esta didáctica como un instrumento que ayude a matematizar una realidad, un fenómeno.

La fenomenología didáctica busca escenarios reales o que puedan percibirse como reales; que sean apropiados para promover el surgimiento de otro nivel de actividades de matematización. Para este ejemplo, Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) eligieron la situación problema de contar los pasajeros que quedan después de que cierto número de ellos sube y baja de un autobús de dos pisos. Así, la hilera superior de bolitas y la inferior del *arithmetical rack* asemejan a los pasajeros de los niveles superior e inferior del autobús. Esto puede dar al niño la sensación de que está manejando y contando pasajeros y no bolitas. La trayectoria de aprendizaje queda definida hasta este punto en dos niveles de actividad: la elección de un fenómeno susceptible de ser matematizado y el uso de un instrumento que

<sup>15</sup> Término acuñado por el educador Paulo Freire para referirse al tipo de educación en que el profesor es el poseedor del conocimiento y lo “deposita” en el alumno quien lo recibe de manera pasiva.

propicia la actividad de matematizar. Pero, ¿cómo favorecer la transición al mundo matemático? Es aquí donde el principio de los niveles o de los modelos emergentes se torna relevante para elaborar la trayectoria de aprendizaje.

La *realistic mathematics education* distingue cuatro tipos generales de actividad que llevan de los escenarios reales al mundo matemático. Estas actividades constituyen una especie de matematización progresiva en la que, para Freudenthal, la actividad de un nivel previo es sujeta de análisis y reflexión en la actividad del siguiente nivel, y por tanto implica diferente nivel de comprensión (Van Del Heuvel-Panhuizen, 2003). Estas actividades no necesariamente se presentan en una secuencia ordenada o jerárquica. Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) las describen de la siguiente forma:

Nivel 1: Actividad en el escenario de la tarea, en la cual interpretaciones y soluciones dependen de la percepción de cómo se desarrolla tal escenario (con frecuencia fuera de ambientes escolares).

Nivel 2: Actividad referencial, en la cual los *modelos de* refieren a la actividad descrita en actividades instruccionales (ubicada principalmente en las escuelas).

Nivel 3: Actividad general, en la cual los *modelos para* hacen posible enfocarse en interpretaciones y soluciones independientemente del contexto específico.

Nivel 4: Razonamiento con simbolizaciones convencionales, el cual no depende más del apoyo de los *modelos para* de la actividad matemática. (p. 243) [traducción libre].

Para el ejemplo citado, la actividad en el escenario de la tarea implicaría pasear en tales autobuses, observando cuánta gente sube y baja en cada parada y, de ser posible, contándolos. En el segundo nivel empieza a darse un uso didáctico a los modelos en esta corriente. Van Del Heuvel-Panhuizen (2003, p. 13) sostiene que la noción de modelo es amplia: “materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas y aún símbolos pueden servir como modelos”. En este ejemplo, el *arithmetic rack* es un dispositivo que funciona como *modelo de*<sup>16</sup> la situación representada: los pasajeros de un autobús de doble piso.

---

<sup>16</sup> Modelo específico de una situación problema. Esto es, materiales, bosquejos visuales, esquemas, entre otros, que representan una situación particular en su totalidad.

La actividad referencial implicaría representar a los pasajeros con tal dispositivo, distribuir y sumar a los que suben y bajan, sin el empleo de notación alguna. Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) señalan que en la trayectoria didáctica “conjeturada”, el profesor podría pedirle a los niños que mostraran la forma en que podrían sentarse nueve pasajeros. Después de una discusión procedería a preguntar cuántos pasajeros se tendrían en el caso de que subieran siete más. Dos maneras en que podrían hacerlo son a través de grupos de diez o de dobles, como se muestra en la Figura 5.

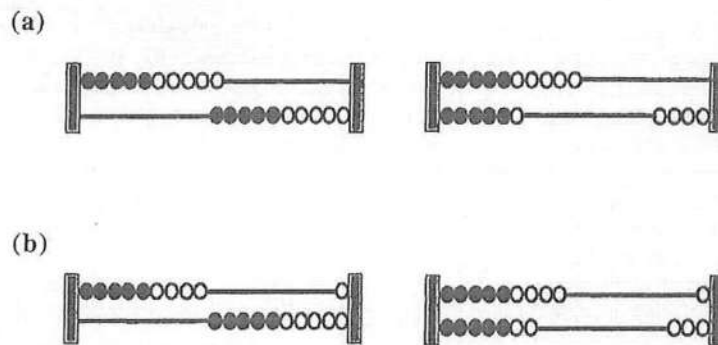


Figura 5. Dos maneras en que podrían sentarse 16 pasajeros, en grupos de diez (a) o dobles (b), tomada de Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000).

En las actividades de tercer nivel, el *modelo de* funciona como un patrón de relaciones matemáticas generales, esto es, como un *modelo para*. Volviendo al ejemplo, los autores indican que esto podría iniciarse con una discusión ante el grupo sobre la necesidad de crear notaciones para representar lo que se ha logrado con el *arithmetic rack*. Aquí el profesor, aparte de estimular las representaciones propias de los alumnos, debe promover que se adopten los símbolos convencionales. Presumiblemente en este punto el niño se aleja de la situación específica de los pasajeros, y se centra en las relaciones numéricas. El *arithmetic rack* se emplea ahora como un *modelo para* de tales relaciones. La visión gira: de percibirlo como *modelo de* pasajeros en el autobús, a percibirlo como *modelo para* las relaciones que se describen a través de la simbolización. Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) indican las posibles formas de simbolizar las relaciones numéricas para el resultado previo, en la Figura 6.

<p>(a) <math>9 + 1 = 10</math>  <math>10 + 6 = 16</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>9 + 7 = 16</math></p> <div style="margin-left: 40px;"> <math>\swarrow</math>  <math>1 \quad 6</math> </div>	<p>(b) <math>7 \quad 2</math></p> <div style="margin-left: 40px;"> <math>\searrow</math>  <math>9 + 7</math> </div> <p style="margin-left: 40px;"><math>7 + 7 = 14</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>14 + 2 = 16</math></p>
--	--

Figura 6. Posibles formas de anotar los resultados del *arithmetic rack* en la Figura 5, tomada de Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000).

Dichos autores conjeturan que el cuarto nivel podría alcanzarse cuando, dentro de la actividad, las relaciones numéricas se percibieran como algo que existe por sí mismo. Aunque el uso de modelos emergentes (*modelo de* y *modelo para*) durante las actividades de matematización desempeña un papel central en la *realistic mathematics education*, el propósito principal no es el desarrollo y la construcción de modelos matemáticos. Más bien, el propósito es proporcionar un sentido de realidad a los significados de conceptos y notaciones matemáticas a través de un proceso de reinención guiada, como lo ejemplifica el uso del *arithmetic rack*. Aunque la *realistic mathematics education* se ha desarrollado para los niveles básicos de la educación, es posible utilizarla en temas complejos como el cálculo (Gravemeijer y Doorman, 1999; Doorman, 2005).

Consideramos que la fenomenología didáctica constituye un aporte significativo de esta propuesta para acercar la matemática a la realidad. Creemos que favorece aprendizajes significativos al utilizar contextos cotidianos, como lo señalan Ríoseco y Romero (1997). Por otra parte, el significado de un objeto matemático se facilita en esta propuesta, a través del uso didáctico de la modelación, y de las nociones de *modelo de* y *modelo para*. Dichas nociones permiten relacionar las formulaciones matemáticas con las situaciones particulares de donde emergen. De ahí que tales formulaciones tienen un sentido, un significado propio. Sin embargo, consideramos conveniente señalar que la *realistic mathematics education* no enfatiza el papel de las cantidades y sus relaciones presentes al matematizar el problema, tal como lo proponemos con el enfoque hacia la modelación.

3.4. Models and modelling perspectives.

La perspectiva de la modelación tradicional, como la hemos descrito, se interesa más por desarrollar capacidades de modelación, y los conceptos y notaciones matemáticas presentan un uso instrumental. En un sentido inverso, la *realistic mathematics education* se interesa más por construir los conceptos a través de actividades de matematización, y los modelos tienen un uso instrumental (Véase Tabla 3). Entre estas dos posturas observamos corrientes intermedias que utilizan la modelación y se interesan tanto por desarrollar capacidades de modelación como por construir significados de conceptos matemáticos.

Nivel Educativo <sup>1</sup>	Prioridad de la propuesta		
	Desarrollar el significado del concepto	↔	Desarrollar el modelo y habilidades de modelación
Elemental	<i>Realistic Mathematics Education</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso instrumental de cualquier tipo de modelo</li> <li>• Reinención guiada</li> <li>• Actividades de matematización</li> </ul>	<i>Models and Modelling Perspectives</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variedad y entendimiento profundo de conceptos elementales al construir un modelo</li> <li>• Desarrollo de sistemas conceptuales</li> </ul>	
Medio			
Superior		Matemática en el Contexto de las Ciencias <ul style="list-style-type: none"> <li>• Introduce el concepto formal durante el proceso de modelación</li> <li>• Conceptos contextualizados en la práctica profesional</li> </ul>	Matemática Tradicional <ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso instrumental de conceptos y notaciones matemáticas</li> <li>• Actividades de modelación tradicionales</li> </ul>

<sup>1</sup> Aunque las propuestas se originan en cierto nivel educativo, con frecuencia su aplicación puede ampliarse a otros niveles.

Tabla 3. Posturas teóricas que utilizan la modelación en procesos educativos.

Dentro de estas corrientes intermedias, Jones, Langrall, Thorton y Nisbet (citados en English, 2003) dicen que el alumno debe iniciarse en estas actividades desde la educación primaria. Esencialmente, estos autores sostienen que al momento de modelar un problema a fin de solucionarlo, difundirlo y argumentarlo, el alumno requiere expresar, probar y revisar

sus construcciones conceptuales. Actividades menos realizadas en la solución de problemas o en la enseñanza tradicional con base en ejercicios. Dentro de estos enfoques, English (2003) afirma que es necesario ir más allá de solucionar problemas y cambiar la práctica en el ámbito escolar y optar por otra posibilidad. Al niño debe dársele la oportunidad para que se desarrolle socialmente y se involucre en actividades matemáticas importantes, tal como ocurre en la modelación al describir, explicar, construir y razonar de manera crítica. Lesh (2003), por su parte, añade que alumnos menos brillantes realizan aportaciones importantes en estos procesos. Lamón (2003) reporta que estas actividades se pueden aplicar al álgebra en la educación media superior. En resumen, está surgiendo un importante movimiento en educación matemática que tiende a utilizar modelos y la modelación a partir de los niveles elementales. Dichas actividades permiten alcanzar una mayor profundidad al comprender la actividad matemática y su importancia.

Una postura típica de dicho movimiento es la *Models and Modelling Perspectives*. Richard Lesh la inició a finales de la década de los setenta en la Universidad de Indiana. Lesh (2003) nos indica que una de las principales preocupaciones gira en torno a la naturaleza de los conocimientos y habilidades matemáticas que fundamentan el éxito del alumno en la sociedad del conocimiento. De acuerdo con su experiencia, las actividades en las que se aplican las matemáticas implican solucionar problemas para un fin específico en poco tiempo, con recursos limitados y objetivos encontrados. Las personas que tienen mayor éxito en este tipo de actividades son las que poseen variadas herramientas conceptuales y un entendimiento profundo de conceptos elementales, entre otros. Sin embargo, el desarrollo de estas capacidades no se promueve en los textos tradicionales de solución de problemas. Para ello, Lesh (2003) propone actividades que utilizan el modelo y la modelación para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

En el centro de la *models and modeling perspectives* se encuentran las actividades que promueven el construir un modelo para solucionar una situación-problema de la realidad cotidiana. De esta manera dicha postura privilegia contextos cotidianos en el aprendizaje de las matemáticas. Las *model eliciting activities* se distinguen de la solución de problemas tradicional, en tres aspectos: a) los alumnos tienen que ofrecer descripciones matemáticas simbólicas de situaciones que son significativas para ellos, b) siempre está claro quién necesita del modelo como una herramienta, por qué o para qué propósito, y c) el desarrollo del modelo

vale la pena porque será compartido, re-utilizado o modificado. Aquí la noción de modelo funciona como una herramienta conceptual para describir o explicar matemáticamente una situación (Lesh y Harel, 2003):

Los *modelos* son sistemas conceptuales que generalmente tienden a ser expresados utilizando una variedad de medios representacionales que interactúan entre sí. Dichos modelos pueden involucrar símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficas en computadoras, diagramas o gráficas en papel o metáforas basadas en la experiencia. Sus propósitos son construir, describir o explicar otros sistemas [...] los modelos matemáticos son distintos de otras categorías de modelos, principalmente porque se enfocan en las características estructurales [...] de los sistemas que describen [...] el desarrollo de modelos útiles típicamente requiere una serie de “ciclos de modelación” donde las descripciones [...] son probadas y revisadas repetidamente. (p. 159) [traducción libre].

Al igual que en otras corrientes, la modelación se concibe como el proceso de desarrollo del modelo, y se reconoce la naturaleza iterativa de dicho proceso en la noción de ciclos de modelación. Cada uno de estos ciclos supone un nivel de entendimiento de mayor profundidad. Lesh y Harel (2003) reportan cierta similitud entre estos niveles y las etapas de desarrollo cognitivo de Piaget. Durante estos procesos de modelación entran en juego tres tipos de sistemas: a) un sistema conceptual interno, que se construye en la estructura cognitiva, b) un sistema externo, que se ubica en el contexto de la experiencia, en la naturaleza, y c) un sistema representacional, que se encuentra fuera del individuo y que representa tanto el sistema conceptual como el sistema externo (Lesh y Doerr, 2000).

En el sistema conceptual interno surgen los constructos que dan sentido a sistemas que involucran entidades matemáticas, como los tasas, razones, vectores y proporciones, entre otros. Este sistema conceptual sufre transformaciones durante los ciclos de modelación, cuando la utilidad del sistema representacional es puesta a prueba para solucionar el problema. Dichos sistemas se convierten en poderosas herramientas conceptuales y construirlos debería ser uno de los objetivos de la educación matemática (Lesh y Doerr, 2000). Bajo la *models and modeling perspectives* el proceso de aprendizaje se inicia con una situación problema

relacionada con la vida cotidiana. Se le pide al niño que elabore un modelo para solucionar el problema, que argumente cómo lo construye, sus razonamientos y por qué funciona. Esto promueve el desarrollo de sistemas conceptuales más profundos entre los conceptos matemáticos utilizados, a la vez que experimenta la utilidad de la matemática en el mundo real (Lesh, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh, Carmona y Post, 2002). Un ejemplo del tipo de problemas utilizados en las *model eliciting activities* es el de los trabajos de verano (*Summer jobs problem*) (Lesh y Doerr, 2000):

El verano pasado Maya empezó con una concesión de negocios en el *Wild Day Amusement Park*. Sus vendedores llevaban palomitas de maíz y bebidas alrededor del parque, vendiendo donde encontraban consumidores. Maya necesita tu ayuda para decidir qué trabajadores recontractar el próximo verano. El año pasado Maya tuvo nueve vendedores. Este verano, ella sólo puede tener seis: tres tiempos completos y tres medios tiempos. Ella quiere recontractar a los vendedores que produzcan mayores ganancias, pero no sabe cómo compararlos porque trabajaron diferentes números de horas. También, cuando trabajaron mostraron profundas diferencias. Después de todo, es fácil vender más por la noche de un viernes abarrotado que en una tarde lluviosa.

Maya revisó sus registros del año pasado. Para cada vendedor, ella sumó el número de horas trabajadas y el dinero obtenido, en los momentos en que el negocio del parque estuvo lleno, estable, y bajo (Consulta la tabla). Por favor, evalúa qué tan bien se desempeñaron los diferentes vendedores el año pasado y decide cuáles tres Maya debería recontractar a tiempo completo y cuáles tres a medio tiempo.

Escribe una carta a Maya con tus resultados. En tu carta describe cómo evaluaste a los vendedores. Proporciona detalles de manera tal que Maya pueda verificar lo que hiciste, y también ofrece una explicación clara, de manera que ella pueda decidir si tu método es bueno para que lo utilice. (p. 369) [traducción libre].

El resto del problema incluye dos tablas con las cantidades de horas trabajadas y del dinero acumulado por sus empleados. Lesh y Doerr (2000) reportan que este problema se aplicó en Estados Unidos a alumnos cuyo nivel correspondería al primer año de enseñanza secundaria en nuestro país. El grupo se organizó en equipos de tres alumnos y se les

proporcionó herramientas de trabajo, que incluían una computadora y calculadoras. El análisis de las actividades de los alumnos permitió identificar 14 ciclos de modelación, ello implica que el sistema conceptual se desarrolló en 14 niveles de entendimiento. El primero se caracterizó por formas desorganizadas de pensamiento: los alumnos se preocuparon más por qué hacer que por el significado de la información. En el segundo ciclo construyeron una tabla con datos más significativos, con el total del número de horas por trabajador. En el tercer ciclo elaboraron otra tabla con el total de ingresos por trabajador. Los alumnos se concentraron en el total de horas trabajadas y de ingresos, pero ignoraron los horarios de cada trabajador. Lesh y Doerr indican que un pensamiento más sofisticado se presentó a partir del quinto ciclo, en el que la atención se centró en un diagrama con las trayectorias de ventas de los mejores trabajadores. En el sexto ciclo, los alumnos utilizaron gráficas computarizadas pero no vieron claramente quién era mejor o peor trabajador. Un cambio se presentó del octavo al décimo ciclo, cuando construyeron una razón de ventas por hora para cada trabajador. Comentan Lesh y Doerr que en la solución, los alumnos manifestaron interpretaciones complejas, con opciones condicionales, que explicaron a Maya en una carta. Estas explicaciones, descripciones y argumentos, reflejan el sistema conceptual que los alumnos tienen sobre una noción. En este caso, el de productividad. La Figura 7 muestra la carta y la gráfica que los alumnos construyeron, misma que modela las tendencias de las ventas por hora por trabajador y permite dar respuesta al problema planteado.

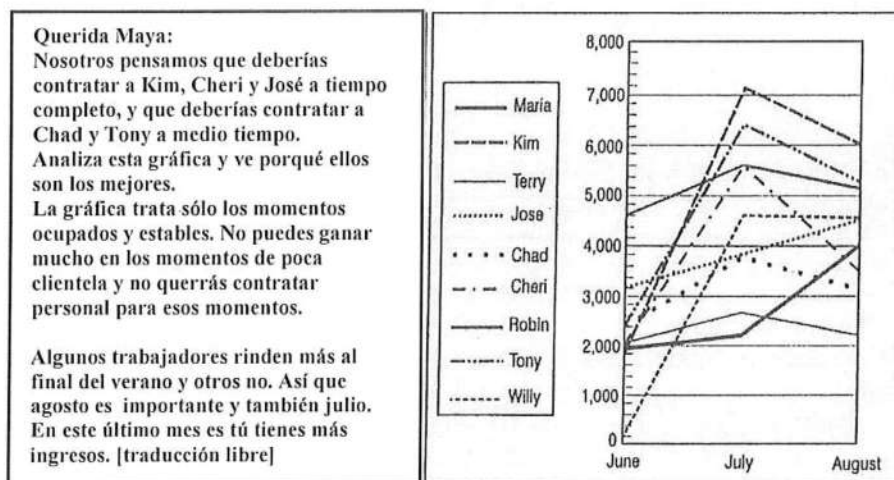


Figura 7. Carta de los estudiantes a su cliente, con una gráfica sobre las tendencias de ingreso de sus trabajadores, adaptada de Lesh y Doerr (2000).

Esta *model eliciting activity*, nos sugiere que los alumnos profundizan sus interpretaciones sobre la noción de razón de ventas por hora cuando la usan para medir la productividad de los vendedores. Aquí la actividad de modelación se utiliza explícitamente para construir un modelo y profundizar en el concepto matemático como herramienta conceptual. Observamos en esta postura una mezcla de la modelación tradicional y de la *realistic mathematics education* en cuanto al uso de la modelación. Por una parte la construcción del modelo es un propósito de la *models and modeling perspectives*, en lo que coincide con la modelación tradicional. A la vez, otro propósito que se persigue es desarrollar un sistema conceptual con nuevas interpretaciones del concepto en contextos de la vida cotidiana. En esto la *models and modeling perspectives* se parece a la *realistic mathematics education*. Al igual que en las otras posturas, creemos que el uso de contextos ordinarios en la *models and modeling perspectives* promueve aprendizajes significativos.

### 3.5. Habilidades de modelación.

Hasta este punto hemos descrito cuatro posturas que consideramos importantes para aproximar el papel de la modelación en la matemática escolar. Ello nos coloca en un punto en el que podemos proponer un esquema teórico para precisar habilidades de modelación. Lo que consideramos pertinente para lograr el tercer objetivo, en que nos propusimos evaluar los efectos de nuestra propuesta didáctica en habilidades de modelación. Kaiser (2005) describe en la Figura 8 el proceso de modelación que subyace en las posturas descritas.

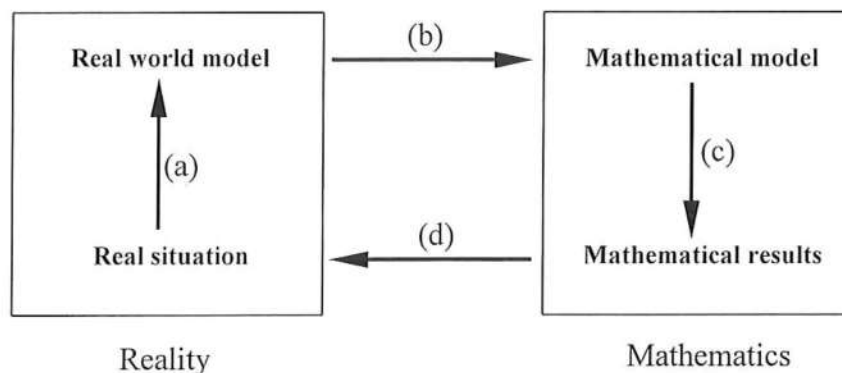


Figura 8. Proceso de modelación, tomado de Kaiser (2005).

El inicio del proceso es una situación problema real que es representada y solucionada a través de lo que llamamos cuatro momentos o pasos de modelación. En el primero [representado por (a)], el problema real se simplifica y se traslada a una situación ideal, con lo que obtenemos un modelo del mundo real (*real world model*). El segundo paso consiste en matematizar o trasladar la situación ideal a un modelo matemático [inciso (b)]. El tercer paso comprende las actividades matemáticas para obtener una solución [inciso (c)]. En el último paso [representado por (d)] hay que verificar y validar la solución. En estos pasos encontramos cierta coincidencia con las etapas de la matemática en contexto. Esto es, con plantear el problema, identificar variables y constantes, así como los conceptos necesarios para construir el modelo, obtener y verificar su solución (Camarena, 2002, 2004). También, encontramos estos pasos dentro de los ciclos de modelación de la *models and modeling perspectives* (Lesh, 2003, Lesh y Doerr, 2000), de la modelación tradicional (Houston y Neil, 2003), así como con las actividades de matematización señaladas por OECD/PISA para organizar fenómenos matemáticamente y promover el lenguaje matemático (OECD, 2003).

La matemática en contexto de las ciencias propone que las actividades de modelación requieren de las habilidades propias de la resolución de problemas: heurísticas, del pensamiento, metacognitivas y creencias (Camarena, 2003b). Habilidades que consideramos más generales que las de modelación señaladas por las otras posturas. Entonces, ¿qué habilidades de modelación promueve la matemática en el contexto de las ciencias? Creemos obtener una respuesta pertinente a partir de la didáctica de dicha postura, esto es, de la matemática en contexto. Consideramos razonable pensar que cada una de las etapas de modelación promueve el desarrollo de una habilidad particular. En consecuencia, esperamos que los estudiantes desarrollen habilidades para plantear el problema, identificar aspectos relevantes y representarlos con variables y constantes, construir un modelo matemático, obtener una solución, interpretarla y validarla dentro del contexto del problema.

De acuerdo con Camarena (2001), la actividad de modelación también exige la habilidad para descubrir las relaciones que gobiernan o describen la situación. Como ella indica, la modelación la concebimos como un proceso cognitivo con tres momentos: a) la identificación de variables y constantes del problema, b) el establecimiento de relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados y c) la validación de la relación matemática con la que se modela el problema. Es decir, Camarena sostiene que la identificación de relaciones es

una habilidad de modelación. Con base en esta reflexión sugerimos que la matemática en contexto promueve habilidades para:

1. Plantear el problema.
2. Determinar las variables y constantes que describen el problema.
3. Identificar las relaciones entre variables y constantes.
4. Formular o construir el modelo matemático.
5. Obtener una solución matemática del problema.
6. Interpretar y validar la solución en términos del problema.

Construimos la Tabla 4 para mostrar ciertas coincidencias en las habilidades de modelación señaladas por diferentes posturas, y que tienen una estrecha relación con las etapas de modelación que sugiere Kaiser (2005).

La habilidad de identificar y aclarar relaciones entre las variables y constantes de un problema es, a nuestro entender, una habilidad clave al construir el modelo. De acuerdo con Freudenthal y Terwel (2000), existen conceptos que son capaces de organizar matemáticamente una situación, un problema. Dichos conceptos funcionan como *modelos para* y desde un enfoque conceptual tradicional, su aplicación exige distinguir las relaciones numéricas que está modelando. Esto es, requerimos de la capacidad para distinguir dichas relaciones tanto en el problema real como en el concepto.

Pensamos que la habilidad mencionada no es fácil de alcanzar. De acuerdo con Houston y Neill (2003) en cursos de modelación matemática tradicional las habilidades menos desarrolladas por los estudiantes son clarificar el objetivo y *seleccionar un modelo apropiado* en menor grado. En el caso de posturas que buscan la construcción del concepto o la profundización del mismo, que hemos revisado, el identificar relaciones numéricas tiene diferentes matices. En la *models and modeling perspectives* las relaciones se identifican a prueba y error, a través de diferentes ciclos de modelación. Por su parte, la *realistic mathematics education*, identifica las relaciones a través de un modelo, que funciona como *modelo de* y *modelo para*. En la matemática en contexto, profesor y estudiantes identifican las relaciones. El profesor introduce el concepto que las modela. En el enfoque hacia la modelación sugerimos que estas relaciones las identificamos con mayor facilidad en términos

de las cantidades. Cantidades que surgen en actividades propias de la vida cotidiana, como el medir y contar. Pensamos también que la noción de *modelo para*, al funcionar como patrón de relaciones entre cantidades, facilita identificar dichas relaciones. De ahí surge nuestra idea sobre su potencial para mejorar habilidades de modelación.

Etapas del proceso de modelación (Kaiser, 2005)	Habilidades o competencias de modelación			
	PISA (OECD, 2003, p. 40)	Modelación tradicional (Houston y Neil, 2003, p. 156-160)	<i>Models and modeling perspectives</i> (Lesh, 2003, p.50-51)	Matemática en contexto (Camarena, 1999, 2003, 2004)
Simplificación o estructuración idealizada del problema  Producto de esta etapa: <i>real world model</i>	Estructurar el campo o situación a ser modelada	Formular un modelo apropiado [de a) a f)] a) Realizar suposiciones y simplificaciones b) Clarificar el objetivo c) Formular el problema		Plantear el problema
Matematizar o trasladar el problema a un modelo matemático  Producto de esta etapa: <i>Mathematical model</i>	Trasladar la realidad a estructuras matemáticas	d) Asignar variables, parámetros y constantes e) Formular declaraciones matemáticas f) Seleccionar un modelo	Diseñar o planear	Determinar las variables y constantes del problema Identificar relaciones entre variables y constantes Formular o construir modelo matemático
Consideraciones matemáticas para obtener una solución  Producto de esta etapa: <i>Mathematical results</i>	Solucionar el problema.	Producir la solución matemática correspondiente	Probar	Obtener una solución matemática del problema
La adecuación de la solución debe verificarse, validada	Interpretar la solución matemática en términos del problema real.	Interpretar y evaluar la solución; Reportar sus implicaciones; Revisar y ajustar el modelo a la luz del análisis.	Revisar lo realizado	Interpretar y validar la solución en términos del problema

Tabla 4. Habilidades de modelación en diferentes posturas.

### 3.6. El enfoque hacia la modelación y la comprensión relacional.

De acuerdo con Orton (1998), hay cuatro tipos de aprendizaje requeridos en la actividad matemática: a) retención y memorización; b) empleo de algoritmos; c) aprendizaje de conceptos, y d) resolución de problemas. El primer tipo de aprendizaje busca fijar en la memoria a largo plazo y recuperar con cierta facilidad, diferentes expresiones matemáticas como palabras, notaciones, símbolos y fórmulas, entre otros. Este tipo de aprendizaje se facilita si el alumno es capaz de atribuirle significados a dichas expresiones. El problema se presenta en los primeros niveles educativos: ¿cómo iniciar a un alumno en matemáticas cuando carece de tal materia en su estructura cognitiva? Orton no ofrece una respuesta en esta dirección. Para promover la memorización y retención, Orton (1998) sugiere el uso de diversas estrategias como la mnemotecnia, ejercicios de repetición y mapas conceptuales.

Creemos que el enfoque hacia la modelación favorece la comprensión en el segundo tipo de aprendizaje: el empleo de algoritmos. Ante la carencia de significados para los diferentes pasos del algoritmo, es frecuente que el estudiante entienda lo que *debe hacer* para tener un resultado; esto es lo que Skemp (citado por Orton, 1998) llama *comprensión instrumental*. Por otra parte, si el estudiante sabe *porqué* tiene que hacer cada paso, posee lo que Skemp llama una *comprensión relacional*. Esta distinción entre dos tipos de comprensión es importante: cada una de ellas tiene sus ventajas. Godino (2003) cita a Skemp para señalar los beneficios de la comprensión instrumental:

Dentro de su propio contexto, las matemáticas instrumentales son usualmente más fáciles de aprender; a veces mucho más fáciles. Algunos temas, como la multiplicación de dos números negativos, o la división por una fracción son difíciles de comprender relacionamente. “Menos por menos, más”, y “para dividir por una fracción, multiplicas por la fracción inversa” son reglas que se recuerdan con facilidad. Así como las respuestas rápidas, correctas y el sentimiento de éxito. (p. 121)

De acuerdo con esta afirmación, la comprensión instrumental es deseable ante la ausencia de un discurso que explique el porqué de la acción. Sin embargo, para otras situaciones, la comprensión relacional tiene más ventajas (Godino, 2003):

La comprensión relacional, el saber no sólo qué método funciona sino también por qué, permite adaptar los métodos a los nuevos problemas. La comprensión instrumental necesita controlar qué método se aplica a cada problema y cuál no, y aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas. (p. 122)

Godino (2003) señala que los métodos son más fáciles de recordar y tienden a favorecer su propio crecimiento. Sin embargo, la actividad de modelación exige saber por qué ejercitamos un procedimiento, seguimos un método matemático o aplicamos un concepto. Ello facilita adaptar el conocimiento a circunstancias nuevas. Es necesario saber por qué sirve un concepto.

Proporcionamos un ejemplo de cómo el enfoque hacia la modelación favorece la comprensión relacional en la división de fracciones. Orton (1998) señala el papel de la comprensión relacional con los problemas que se presentan al aprender tales divisiones:

La peor historia de horror de todas las fracciones consiste en la división, por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$$

Para hallar instrumentalmente, la respuesta, se “invierte la segunda fracción y se sustituye el “÷” por “x”. Esto ha conducido inevitablemente a la confusión en el recuerdo, sobre todo respecto a qué fracción había que invertir o si eran ambas. Relacionalmente, desde luego, deseamos saber cuántos 7/10 hay en 3/5, por ello, la idea de equivalencia está implícita. ¿Es necesario el algoritmo? Si lo es, ¿a qué edad es preciso dirigirse para lograr una comprensión relacional? Tal comprensión auténtica no parece estar al alcance de la mayoría de los chicos dentro de los años de escolaridad obligatoria. (p. 45)

Orton se refiere al interés por saber cuántas veces siete décimos caben en tres quintos, y afirma “por ello, la idea de equivalencia está implícita”. Él sugiere que esta idea sólo se percibe en una comprensión relacional que nos ayuda a entender el algoritmo y que es difícil de alcanzar por parte de los alumnos de educación obligatoria. ¿Pero específicamente a qué se refiere Orton con esta expresión? Él no lo explicita, así que sólo nos queda especular. Dos

situaciones son posibles. Primera, que él se refiera a que se obtiene otra fracción *equivalente* al determinar cuántas veces siete décimos caben en tres quintos. Segunda, que se refiera a que la división de fracciones es *equivalente* a la multiplicación de las mismas pero utilizando fracciones inversas, ya que se trata de operaciones inversas:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{10} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{7} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

Creemos que Orton se refiere al primer tipo de situación, y que la comprensión relacional permite ver que se trata de obtener, como resultado, una fracción equivalente. Sin embargo, a este nivel no queda explícito el por qué de cada paso del algoritmo.

En el enfoque hacia la modelación, una fracción procede de actividades en las que hay que medir dimensiones con tamaño menor a la unidad. Para lograr exactitud, la unidad de medida se fracciona o divide en partes iguales, lo que nos lleva a tener mitades, tercios, cuartos, u otra fracción como nueva unidad de medida, que podríamos llamar *fracción unidad*. Con ésta, contamos o medimos tamaños menores a la unidad, y obtenemos una cantidad de fracciones unidad que nos indica el tamaño de lo que medimos. De esta forma, interpretamos el número que aparece en la parte inferior de la fracción o *denominador* como unidad de medida, y el número que aparece en la parte superior de la fracción o *numerador*, como una cantidad, tal como lo indicamos en la Figura 9.

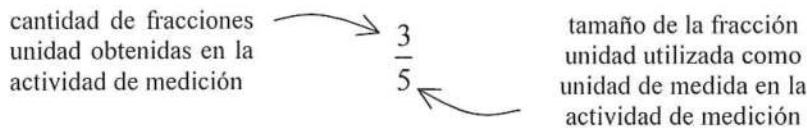


Figura 9. Significados del numerador y del denominador con el enfoque hacia la modelación.

En el enfoque hacia la modelación, las unidades de medida no son sujetas de operaciones matemáticas. Esto ocurre sólo con las cantidades. También observamos un *principio de uniformidad* de medida para operar tales cantidades. Esto es, podemos afirmar que la expresión  $8 + 8 = 16$  es verdadera sólo si hay uniformidad en las unidades de medida. Si la primer cantidad se obtuvo con centímetros y la segunda con milímetros, la expresión  $8 + 8 = 16$  es falsa al igual que lo sería utilizar semanas y días en una suma, como lo señala Tarp

(2004). Para que la expresión sea verdadera, ambas cantidades deben haberse generado con centímetros, o bien con milímetros. Este hecho es relevante para comprender los algoritmos para las operaciones con fracciones. Por ejemplo, en la suma de las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10}$$

el resultado que se obtiene sumando directamente las cantidades de tres y siete es incorrecto, porque dichas cantidades se obtuvieron con diferentes unidades de medida, y refieren a tamaños diferentes: un quinto es el doble de un décimo en tamaño. El principio de uniformidad que observamos nos lleva a igualar las unidades de medida, ya sea a quintos, décimos o alguna otra unidad común para ambas, como quinceavos, por ejemplo. Utilizar otra fracción equivalente para tener la misma unidad de medida, es a lo que al parecer se refiere Orton cuando habla de “la idea de equivalencia”. Una vez que ambas fracciones se expresan en términos de la misma unidad, calculamos el valor de su unión mediante la suma:

para encontrar un fracción equivalente a  $\frac{3}{5}$

cambiamos la unidad de medida a décimos, entonces  $\frac{3}{5}$

lo podemos expresar con  $\frac{6}{10}$

y la suma  $\frac{3}{5} + \frac{7}{10}$

es igual a  $\frac{6}{10} + \frac{7}{10}$

cuyo resultado obtenemos sumando los numeradores  $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$

Observemos que cuando tenemos décimos como unidad de medida única, sumamos las cantidades seis y siete que corresponden a mediciones con dicha unidad. Notemos que la unidad de medida no la sumamos, sino simplemente la indicamos. Volvamos ahora a la “historia de horror” de la división de las fracciones:

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$$

Para Orton (1998) en este problema el interés se centra en conocer cuántas veces siete décimos caben en tres quintos. En el enfoque hacia la modelación, lo interpretamos como en cuántas partes iguales de siete décimos podemos separar la cantidad de tres quintos. Con tales

unidades de medida no es posible hacer una comparación que nos permita cuantificar lo que se pide. Nuevamente enfrentamos la necesidad de igualar las unidades de medida, como lo sugiere el principio de uniformidad. Procedemos entonces de manera similar a como lo hicimos en la suma de fracciones, utilizando décimos como unidad de medida:

entonces la división de las fracciones  $\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$

es igual a  $\frac{6}{10} \div \frac{7}{10}$

cuyo resultado lo obtenemos dividiendo los numeradores  $\frac{6}{10} \div \frac{7}{10} = \frac{6}{7}$

Como se trata de separar la cantidad de seis décimos en cantidades iguales de siete décimos, resulta obvio que no podemos hacerlo, ya que siete décimos es mayor que seis décimos. Sin embargo, como ambas cantidades refieren a unidades de medida del mismo tamaño, podemos expresar el resultado como la división de seis entre siete. Con ello indicamos que la relación entre las cantidades es igual a tener seis partes de la primera por cada siete de la segunda, o en decimales, a 0.8571 de la primera por cada unidad de la segunda. En otras palabras, dividir una cantidad de tres quintos entre otra de siete décimos, es igual a dividir seis entre siete, cuando las unidades de medida son iguales. La comprensión relacional de la división de fracciones con el enfoque hacia la modelación, nos permite modificar ligeramente la regla que menciona Godino (2003, p. 121): “multiplicas por la fracción inversa”; o por Orton (1998, p. 45): “se invierte la segunda fracción y se sustituye el ‘÷’ por ‘x’”. Formulaciones inspiradas, a nuestro entender, en una forma mecánica de obtener fracciones equivalentes para igualar los denominadores.

Para lograr la comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación, empleamos diversas nociones clave que explicitan la actividad. Nociones tales como cantidad, unidad de medida, y principio de uniformidad, facilitan el significado de la división de fracciones como actividad de modelación. Pensamos que este significado puede llevar a un aprendizaje significativo por al menos dos razones. Una, es que el estudiante empieza a construir sus significados en contextos cotidianos de medir y contar, lo que favorece la presencia de ideas de anclaje. Otra, que el material de aprendizaje se organiza a partir una actividad concreta en una secuencia lógica, y conlleva un grado de significado lógico. Estas dos razones y el interés

del alumno, son los requisitos que Ausubel (2002) establece para lograr aprendizajes significativos.

**Sumario.** Hay una necesidad sentida internacionalmente para acercar el conocimiento matemático a las actividades cotidianas o actividades del “mundo real” (Blum, 2002; OECD, 2003). Las actividades de modelación matemática reúnen muchas de las condiciones para desarrollar las habilidades que exige la “sociedad basada en el conocimiento” (Lesh, 2003, English, 2003). Sin embargo, la modelación matemática se utiliza con diferentes propósitos y papeles en los procesos de aprendizaje. En un extremo, encontramos la modelación tradicional (Berry y Houston, 1995; Houston y Neill, 2003) en la que el propósito de la educación enfatiza el desarrollo de las habilidades de modelación y de aprender a modelar matemáticamente. En esta tendencia los conceptos matemáticos se adquieren con anterioridad y su papel es el de herramienta que ayuda a solucionar problemas. En el otro extremo, ubicamos a la *realistic mathematics education* (Gravemeijer y Terwel, 2000; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Doorman, 2005) cuyo propósito es la re-inención del concepto matemático. Para ello, esta tendencia utiliza modelos emergentes. Esta postura está más acorde con las posturas constructivistas y las ideas de Decroly y Dewey para la educación. El papel que desempeña la modelación es el de una actividad instrumental, mediadora, por medio de la cual se facilita la re-inención.

En otras corrientes intermedias –como las *models and modeling perspectives* (Lesh, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh, Carmona y Post, 2002)– ubicadas en educación media, el propósito del proceso de aprendizaje es que el alumno aprenda la actividad de modelación matemática y profundice en los significados de los conceptos matemáticos. Todo esto como una forma de enfrentar los retos de la “sociedad del conocimiento”. En otra posición intermedia ubicamos a la matemática en el contexto de las ciencias, cuyo propósito es que el alumno de ingeniería relacione el conocimiento matemático con su entorno profesional y lo encuentre menos árido.

Una vez que hemos expuesto las diferentes posturas que utilizan modelación matemática en los procesos de aprendizaje, sugerimos qué habilidades de modelación que promueve la matemática en contexto. Con base en Kaiser (2005) describimos el proceso de modelación que subyace en las diferentes posturas. Las coincidencias que encontramos entre

dichas posturas las indicamos en la Figura 12. Sugerimos entonces, que la didáctica de matemática en contexto promueve el desarrollo de habilidades como el plantear el problema, identificar variables y constantes, y sus relaciones, entre otras. Creemos que el enfoque hacia la modelación facilita identificar relaciones entre variables y constantes, al considerar a las cantidades. La noción de *modelo para* facilita el identificar las relaciones al funcionar como un patrón de relaciones entre cantidades. Relaciones que emergen de las actividades de medir y contar en contextos ordinarios de la vida cotidiana.

En las posturas revisadas no encontramos un análisis del papel que desempeña la noción de cantidad en la construcción de significados. En el enfoque hacia la modelación (Cervantes, 1996, 2003; Cervantes y Arcos, 2005) se propone que este papel es esencial para comprender el concepto matemático como producto de una actividad modeladora sobre el entorno. En la solución de una situación problema, la actividad lleva a crear o usar conceptos y notaciones matemáticas. Bajo dichas condiciones algunos conceptos funcionan como *modelos para* que organizan toda la actividad. Los significados que proponemos en esencia se basan en las nociones de *modelo para*, unidad de medida, cantidad, modelación y modelo. Proponemos que estas nociones favorecen la comprensión relacional, como mostramos en la división de fracciones. Sugerimos que el enfoque hacia la modelación también favorece las habilidades de modelación y el percibir la matemática y la realidad en estrecho contacto. Finalmente, dicho enfoque lo visualizamos como una *postura complementaria* a las diferentes corrientes didácticas que utilizan la modelación matemática. En los siguientes capítulos describimos la importancia de la derivada para la ingeniería y la problemática de su aprendizaje, así como nuestra interpretación con el enfoque hacia la modelación.

## **IV. Problemas en el aprendizaje de la derivada**

En los capítulos anteriores describimos ciertas posturas que utilizan la modelación en la matemática escolar. Posturas que consideramos importantes para presentar un panorama general de los usos de la modelación. Los ejemplos descritos permiten clarificar cada propuesta. Apreciamos en todas ellas el uso de contextos reales para el aprendizaje de las matemáticas o para aplicarlas. Con respecto a la enseñanza tradicional que promueve aprendizajes algorítmicos, el uso de contextos supone un avance en la construcción de significados. En particular, en el caso de la derivada, pensamos que el empleo de actividades reales fortalece los procesos de enseñanza aprendizaje. Por ello, la modelación es deseable en la didáctica. ¿Cómo se utiliza la modelación en la enseñanza de la derivada? ¿Cuáles contextos son utilizados? ¿Cuáles son los principales problemas de aprendizaje?

En el presente capítulo tratamos responder a las preguntas anteriores. Iniciamos con un ejemplo sencillo que nos muestra la importancia de la derivada para la ingeniería. Con esto pretendemos ubicar al lector en por qué es importante facilitar el aprendizaje de dicha noción. Presentamos también el resultado de nuestra búsqueda sobre el papel que desempeña la modelación en el aprendizaje de la derivada. Además, incluimos un apartado sobre el origen de dicha noción como un límite. Ello nos proporciona una idea de la dificultad que tienen que enfrentar los estudiantes para lograr la comprensión relacional, al aprenderla y apreciarla como algo obtenido de la realidad. Un último apartado abunda en los problemas que se presentan en el aprendizaje de la derivada, así como algunas propuestas teóricas para superarlos, mismas que incluyen el uso del laboratorio, software, o nuevas posturas epistemológicas. Todo ello proporciona un panorama de los problemas que pretendemos superar, a partir de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación.

### ***4.1. Importancia de la derivada en ingeniería.***

El aprendizaje del cálculo matemático es esencial para la ingeniería. No sólo es una herramienta con la que debe contar el futuro ingeniero, sino que si es contextualizado apropiadamente, proporciona una visión del papel que tiene el conocimiento matemático en la práctica profesional. Visión propia del perfil deseable por parte de organismos internacionales

o nacionales (Vargas, 1998). Pero, ¿por qué otorgarle tanta importancia al papel que desempeña la noción de derivada en este contexto? Mencionamos tres razones principales: a) es un tema central para el aprendizaje del cálculo; b) es una fuente constante de problemas de aprendizaje en las escuelas de ingeniería; y c) se aplica a problemas de optimización y de predicción que muestran cómo utilizar el conocimiento matemático en la práctica profesional. Presentamos un ejemplo que provee una visión de esto último.

Tomamos del texto de Hoffman (1985, p. 137) el problema de determinar las dimensiones de una lata de refresco (cerveza en el problema original) que minimice el costo de los materiales. Se establece que la lata debe tener un volumen de 360 ml (12 oz) y que el costo de las tapas superior e inferior es el doble del resto del material. Bajo estas condiciones, las dimensiones a determinar son el radio  $r$  de la tapa y la altura  $h$  de la lata como se muestra en la Figura 10.

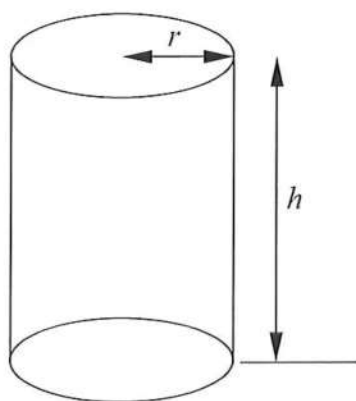


Figura 10. Radio y altura de un bote cilíndrico, adaptado de Hoffman (1985).

El material total requerido se representa con el área total  $A$ , que incluye el de las dos tapas ( $2\pi r^2$ ) más el área de las paredes del cilindro ( $2\pi r h$ ). A partir de ello y del volumen  $V$  de la lata, se obtiene el siguiente modelo que calcula el área total en función del tamaño del radio de la tapa:  $A = 2\pi r^2 + 720r^{-1}$ , medida en centímetros cuadrados. Si  $C$  representa el costo total del material, y suponemos un costo por centímetros cuadrados de \$ 0.001, el costo total lo calculamos con  $C = 0.004\pi r^2 + 0.720r^{-1}$  medido en pesos. A medida que el radio  $r$  varía, la altura  $h$  variará para conservar el mismo volumen. Dichos cambios provocan una variación en el material requerido y en consecuencia en los costos. Una interrogante frecuente en este tipo

de problemas de *optimización* es ¿en qué momento se obtiene un costo mínimo de materiales? Los procedimientos de cálculo permiten determinar *el ritmo de variación* del costo: en qué momento está aumentando, disminuyendo o permanece constante a través de la *razón de cambio*<sup>17</sup> para cada tamaño de radio. Es obvio que obtendremos un costo mínimo justo cuando esta razón de cambio pase de valores que disminuyen a valores que aumentan, o matemáticamente, cuando dicha razón toma un valor de cero después de tener valores negativos y antes de tener valores positivos. La Tabla 5, elaborada en Excel contiene las dimensiones  $r$ ,  $h$ , el área  $A$  y los costos totales  $C$ , así como la razón de cambio para cada tamaño del radio cuando varía de uno a diez centímetros.

Radio $r$ (cm)	Altura $h$ (cm)	Area total $A$ (cm <sup>2</sup> )	Costo $C$ (\$)	Razón de cambio Costo/radio ( $\Delta\$/\Delta\text{cm}$ )
1	114.59	726.28	0.73	-0.695
2	28.65	385.12	0.41	-0.130
3	12.73	296.52	0.35	-0.005
4	7.16	280.48	0.38	0.055
5	4.58	301.00	0.46	0.097
6	3.18	346.08	0.57	0.131
7	2.34	410.58	0.72	0.161
8	1.79	491.92	0.89	0.190
9	1.41	588.68	1.10	0.217
10	1.15	700.00	1.33	0.244

Tabla 5. Alturas, áreas y costos para diferentes tamaños del radio  $r$  del bote cilíndrico de la Figura 10.

<sup>17</sup> Definimos razón de cambio como la razón matemática existente entre dos cambios o variaciones. Por ejemplo, la velocidad de 65 kilómetros por hora es la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo utilizado, y expresa una relación de 65 a uno: 65 unidades de distancia por una de tiempo. Si la razón aumenta, esto implica mayor velocidad; si disminuye, implica una velocidad menor. Con ello observamos el ritmo de variación de la velocidad y cuándo es máxima o mínima.

En esta forma tabular observamos las dimensiones que minimizan el costo total  $C$ . En la cuarta columna vemos que los costos se minimizan cuando la tapa tiene un radio de tres centímetros, o sea, con una lata de seis centímetros de diámetro y 12.7 centímetros de altura; aproximadamente, las dimensiones de una lata de refrescos común. La última columna nos proporciona la razón de cambio para cada tamaño del radio. Observamos que cuando el radio mide un centímetro, la razón de cambio toma un valor negativo de 0.695. Es decir, el costo se reduce en 0.695 pesos por centímetro que aumente el radio. Pero ocurre sólo cuando el radio es de un centímetro. Cuando es de dos, el costo se reduce a otro ritmo, a una razón negativa de 0.130 pesos por centímetro. Cuando el radio es de tres centímetros, el costo se reduce a una razón de 0.005. Finalmente, cuando el radio es de cuatro centímetros, el costo aumenta a una razón de 0.055 pesos por centímetro. De ahí en adelante los costos aumentan, lo que indica que ya se rebasó el costo mínimo.

De esta forma la razón de cambio permite determinar en qué momento tenemos un valor mínimo o máximo. La función que proporciona dicha razón de cambio es la *derivada*<sup>18</sup>. En este ejemplo apreciamos su eficacia para conocer cuándo maximizar un beneficio, o bien, cuándo minimizar costos, materiales, o cualquier otra dimensión. La noción también se utiliza para describir conceptos como velocidad instantánea, aceleración instantánea, costos marginales, tasas de crecimiento, productividad instantánea, entre otros. En este punto creemos que es posible tener una mayor aproximación a la importancia del aprendizaje de la derivada, y del papel que ésta desempeña como conocimiento básico para la ingeniería. También, con el ejemplo descrito podemos apreciar el papel del contexto para significar la función derivada, y la importancia de la modelación para la comprensión relacional en el aprendizaje de dicha noción.

#### 4.2. La modelación y el concepto de derivada.

La modelación tiene una aplicación limitada como estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Tras una búsqueda cuidadosa, encontramos escasos reportes de investigación con esta temática en tres de las conferencias internacionales más

---

<sup>18</sup> En nuestra investigación llamamos *derivada* a la función que proporciona la razón de cambio en un punto. Dicha función no se puede obtener directamente, sino que es necesario derivarla de otra función, tal como se muestra más adelante.

recientes: el 10<sup>th</sup> *International Congress on Mathematical Education* (ICME 10), celebrado en Copenhague, Dinamarca, en julio de 2004; la *Eleventh International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA 11) celebrada en Milwaukee, Estados Unidos, en 2003; y el estudio 14 de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI Study 14): *Modelling and applications in Mathematics Education*, celebrado en Dortmund, Alemania, en febrero de 2004. En la *Twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA 12), encontramos investigaciones relacionadas de manera indirecta con la modelación en el aprendizaje de la derivada (Roorda, Vos y Goedhart, 2007; Jiang, Xie y Ye, 2007). Estos resultados indican que la modelación tiene escasa aplicación en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Pese a lo anterior, observamos que la modelación cada vez adquiere mayor importancia en relación con la derivada. Roorda, Vos y Goedhart (2007) se interesan por un marco teórico específico para medir habilidades de transferencia del concepto de derivada en la modelación y aplicaciones matemáticas. Jiang, Xie y Ye (2007) reportan el Concurso Matemático de Modelación Chino iniciado en 2003. Dicho concurso promueve el diseño de “módulos” de modelación matemática, mismos que los profesores utilizarán en sus cursos. A manera de ejemplo, los autores presentan un módulo para el aprendizaje de cálculo. Con anterioridad en Alemania, Kaiser-Mesmer (1986), reportó que los grupos que utilizan la modelación en el aprendizaje de la derivada alcanzan una mejor comprensión del concepto.

Por otra parte, Doorman (2005) reporta una investigación en la que el movimiento es modelado con ayuda de computadoras bajo la *realistic mathematics education*, y analiza el desarrollo conceptual en los alumnos sobre la velocidad instantánea. Dado el papel que dicha noción desempeñó en la historia de los conceptos de cálculo, Doorman (2005) describe un proceso de reinención guiada y el éxito obtenido al integrar aspectos históricos de la noción de derivada: el uso de gráficas y problemas de velocidad instantánea. Doorman concluye que bajo tales condiciones es factible implementar el proceso de reinención guiada. Entre otras cosas, aclara que los alumnos encuentran difícil pasar de modelos gráficos basados en datos, a modelos gráficos continuos. Doorman investiga además, los efectos que tienen los medios informáticos en tales procesos y concluye que estos proveen un ambiente de trabajo dinámico

para interpretar la pendiente y contribuyen a comprender las relaciones gráficas que predicen el movimiento.

Con base en lo anterior, creemos que la modelación tiene una utilización limitada para profundizar en la enseñanza y aprendizaje de la derivada. En particular, desaprovechamos el potencial de la modelación para significar dicha noción en contextos reales. Afirmamos que ello ocurre esencialmente por la dificultad que encierra encontrar situaciones reales en las que abstraer el concepto sea relativamente sencillo. Para clarificar esta afirmación, resumimos la evolución histórica de la derivada en el siguiente apartado.

#### 4.3. La noción de derivada como límite.

En el ejemplo sobre las dimensiones de una lata de refresco, utilizamos la razón de cambio costo/radio para cada tamaño de radio. Con ella identificamos el costo mínimo. Es posible obtener dicha razón de cambio a través de la función matemática que llamamos derivada. Aunque logramos una mayor comprensión relacional al saber porqué utilizar dicha noción, aún no sabemos porqué o cómo funciona. Pensamos que la historia de la derivada no ayuda lo suficiente, y es difícil comprender el porqué una razón de cambio promedio tiende a un valor fijo. Sin embargo, con el deseo de aproximarnos a las dificultades que experimentan los alumnos en el aprendizaje de la derivada, revisamos su evolución histórica. Se atribuye a Newton y a Leibniz la creación de la derivada de manera independiente en el siglo diecisiete, pero ella requirió de siglo y medio para ser definida como la conocemos actualmente.

De acuerdo con Boyer (1959) los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVII se preocuparon por encontrar métodos generales que solucionan problemas de tangentes, máximos y mínimos, y *cuadraturas* de las curvas (área bajo la curva). El desarrollo de los métodos de cálculo para solucionar dichos problemas se atribuye a Issac Newton y a Gottfried Wilhelm Leibniz en forma independiente. El primero de ellos desarrolló entre 1665 y 1666 su método bajo la idea de que las cantidades fluyen en un continuo o en *fluentes*. Lo anterior lo asentó en el documento *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que elaboró en 1669 y publicó hasta 1711. Una explicación más detallada la escribió Newton en su *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* aproximadamente en 1671, misma que se publicó hasta 1736. Boyer (1959) indica que en una tercer etapa, Newton percibió la noción de límite como se refleja en su manuscrito *De quadratura curvarum* escrita en 1676 y publicada hasta

1704. De acuerdo con Boyer (1959, p. 202). “se ha sugerido que la larga demora de Newton por publicar estos tres trabajos seminales en el cálculo, fue ocasionada por el hecho de que estaba insatisfecho con sus fundamentos lógicos”.

Al revisar a Dunham (2005) nos aproximamos al pensamiento de Newton sobre la razón de cambio en su propuesta para calcular el área bajo la curva propuesto en el manuscrito *De analysi*. (Aclaremos que nuestro interés no es proporcionar la demostración rigurosa y compleja hecha por Newton, sino presentar las ideas principales de su trabajo con la derivada). De acuerdo con Dunham (2005) en dicho documento Newton explica las reglas para encontrar la cuadratura de curvas simples. A partir de un planteamiento deductivo, Newton establece la regla y procede a demostrarla. La regla número uno afirma que si la curva de una gráfica es del tipo  $y = ax^{m/n}$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos, el área bajo la curva del punto  $A$  al punto  $D$  (véase la Figura 11) está dada por la expresión:

$$\frac{an}{m+n} x^{(m+n)/n}$$

Newton se propuso demostrar que si la expresión anterior proporciona el área bajo una curva cuando  $x$  aumenta en  $o$  unidades, entonces al reducir tal aumento a un “valor mínimo”, el área aumentada se reduce al de una línea bajo la curva, igual a la línea  $y$ . De acuerdo con Dunham (2005) una versión moderna de esto sería la gráfica de la Figura 11 en que el área inicial  $ABD$  se amplía al área  $A\beta D\delta$  cuando  $x$  aumenta a  $x + o$ . El área  $B\beta D\delta$  es la ampliación bajo la curva y es igual al área  $B\beta KH$  del rectángulo de base  $o$  y altura  $v$  (línea punteada).

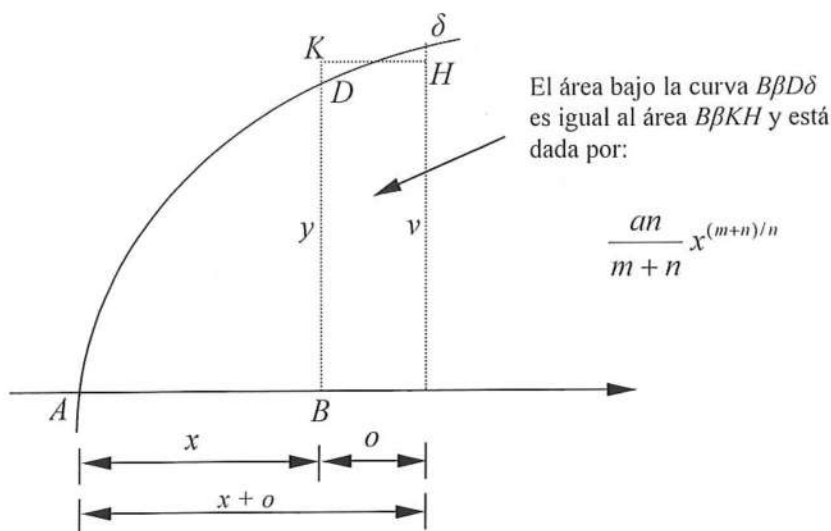


Figura 11. Versión moderna del área aumentada bajo la curva  $D\delta$ , adaptada de Dunham (2005).

Para Newton, a partir del área punteada, si el aumento  $o$  se reduce a un “tamaño mínimo” se obtiene un área igual al de la línea  $y$  con valor  $y$ , como se muestra en la Figura 12.

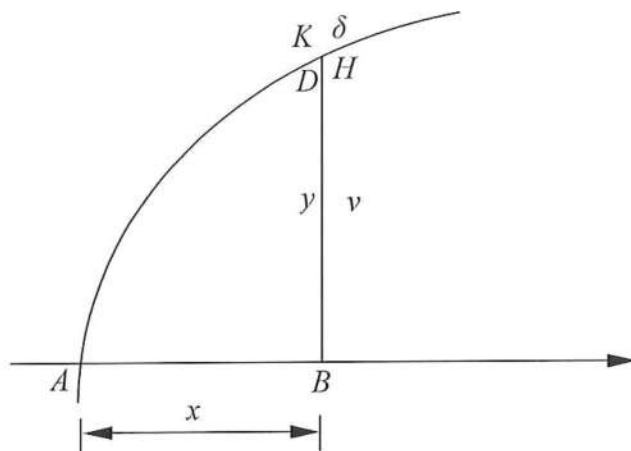


Figura 12. El área aumentada bajo la curva  $D\delta$  se reduce al “mínimo” y toma la forma de la altura  $y$ , adaptada de Dunham (2005).

Para comprobar su afirmación, Newton tiene que demostrar que la razón entre el área ampliada y el aumento  $o$  es igual al valor  $y = ax^{m/n}$  cuando  $o$  toma su “valor mínimo”. En otras palabras, tiene que encontrar la razón de cambio *instantánea* el área con respecto a la variación de  $x$ . Para describir la demostración hecha por Newton, Dunham (2005) describe el área con  $z(x)$  y su aumento con  $ov$ ; transforma la expresión inicial del área bajo la curva:

$\frac{an}{m+n} x^{(m+n)/n}$  a la expresión  $cx^{p/n}$ , donde donde  $c = an/(m+n)$  y  $p = m+n$ . Con esto, el área

ampliada bajo la curva toma la forma de un binomio, en lo que Newton era experto:

$$[z(x) + ov]^n = c^n (x + o)^p$$

Después de complejas operaciones algebraicas, entre las que se incluye dividir la serie entre el valor  $o$ , Newton llegaría a la siguiente expresión:

$$n[z(x)]^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{2} [z(x)]^{n-2} ov^2 + \dots = c^n px^{p-1} + c^n \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} o + \dots$$

En este punto Newton escribe (Dunham, 2005, p. 14): “Si suponemos que  $B\beta$  son disminuidos infinitamente y desaparecen, o que  $o$  es *nada* [cursiva agregada],  $v$  y  $y$  serán iguales en ese caso, y los términos que son multiplicados por  $o$  desaparecerán”. La

contradicción señalada extensamente por matemáticos contemporáneos, es que si el valor  $o$  toma el valor de cero, todo lo hecho carece de sentido. Lo anterior, porque el dividir entre cero implica que el aumento en  $x$  nunca se dio y, ¿cómo puede obtenerse la razón de un aumento de área entre un aumento en  $x$  que no existió? Dunham (2005, p.14) escribe al respecto: “esta dicotomía de cero/no cero metería en problemas a los analistas del siguiente siglo y a otros desde entonces”. A pesar de ello, Newton continúa y demuestra que  $y = ax^{m/n}$ , con lo que “comprueba” su primera regla para determinar cuadraturas. El lector interesado puede buscar mayores detalles en Dunham (2005).

El método de Leibniz para encontrar el área bajo la curva nos parece significativamente diferente a lo que propone Newton. De acuerdo con Dunham (2005) y Boyer (1959), Leibniz publicó en 1684 su método para encontrar tangentes, máximos y mínimos como: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, que podríamos traducir del inglés como un “nuevo método para máximos y mínimos, también tangentes, al cual no lo limitan cantidades fraccionales o irracionales”. Su método se basa en la noción de *diferencia* o *diferencial de una cantidad* que supone la existencia de una “cantidad mínima”, *infinitesimal*. Una aproximación al pensamiento de Leibniz sobre los diferenciales, la podemos obtener en el teorema de la *transmutación*, descrito en Dunham (2005). Según Leibniz, el área bajo la curva debía encontrarse a partir de la suma infinita de rectángulos infinitesimales, cuya base y altura tienen longitudes  $dx$  y  $y$  respectivamente, tal como lo muestra la Figura 13:

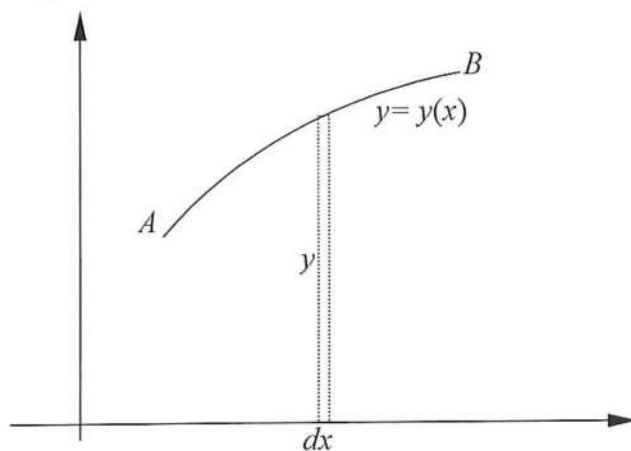


Figura 13. El rectángulo infinitesimal  $dx$  de Leibniz, adaptado de Dunham (2005).

Pero, ¿cómo calcular la suma de estas cantidades? Bajo la idea de que el diferencial tiene una longitud infinitesimal, a partir de la siguiente figura Leibniz supuso la existencia de un triángulo “infinitamente pequeño”, cuya hipotenusa  $ds$  es tangente a la curva, como se aprecia en la Figura 14:

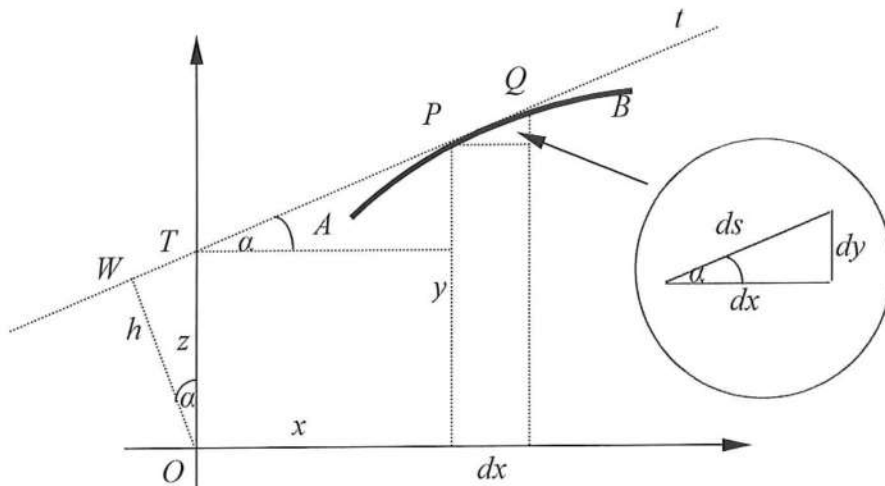


Figura 14. El Triángulo infinitesimal o infinitamente pequeño de Leibniz, adaptado de Dunham (2005).

El término  $dy/dx$  correspondería a la razón de cambio en un “instante” o la *ultimate ratio* de Newton. Al proyectar la tangente  $ds$ , Leibniz determinó relaciones geométricas según las cuales encontró que el área de un triángulo infinitesimal formado por los puntos  $OPQ$ ,

mostrado en la Figura 15, es igual a: área de  $OPQ = \frac{1}{2} Z dx$

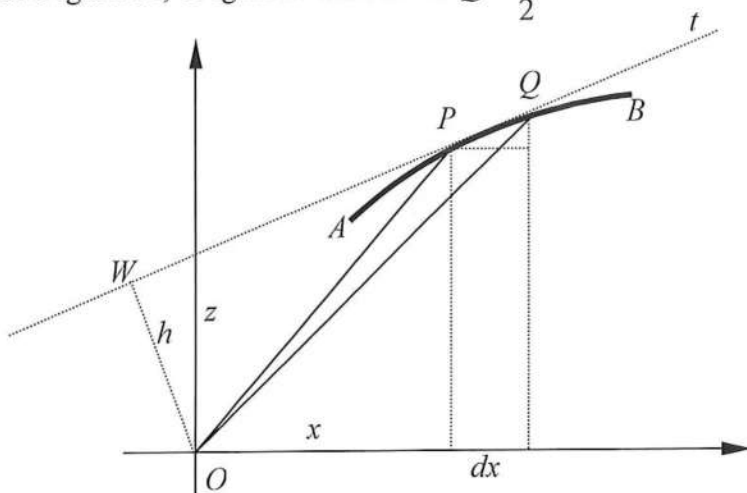


Figura 15. Área de un “triángulo infinitesimal” formado por los puntos  $OPQ$ , adaptado de Dunham (2005).

Leibniz pudo determinar el área bajo la curva  $AB$ , sumando el área de todos los triángulos infinitesimales que forman el triángulo  $OAB$  al área del triángulo  $OBb$ , restando el área del triángulo  $OAA$ . Esto se muestra en la Figura 16.

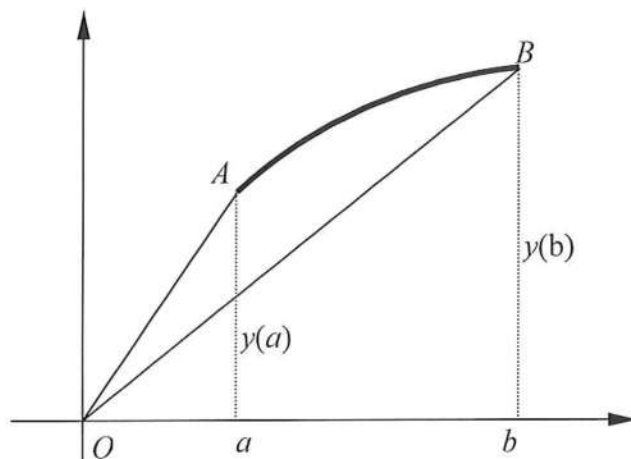


Figura 16. El área bajo la curva  $AB$  se obtiene al restar el área  $OAA$  a la suma de las áreas  $OAB$  y  $OBb$ , adaptado de Dunham (2005).

Así, Leibniz especificó el área bajo la curva en su propia notación simbólica, como:

$$\int ydx = \frac{1}{2} \int zdx + \frac{1}{2}by(b) - \frac{1}{2}ay(a)$$

y lo llamó el teorema de la transmutación. No encontramos una explicación de cómo aplicar dicho teorema a un caso específico en Dunham (2005). Sin embargo, consideramos suficiente concluir que Leibniz basa su cálculo en la noción controvertida de diferencial: “cantidad mínima o infinitesimal”. Remitimos al lector Dunham (2005) para mayor información.

Los acontecimientos históricos alrededor del naciente cálculo son muy complejos y sólo esbozamos algunos hechos relevantes que llevaron a la noción actual de derivada. Tanto Newton como Leibniz fueron cuestionados por matemáticos de su época en cuanto a la lógica de sus planteamientos. Pero no en la efectividad de sus métodos. Newton utilizó la noción de *fluxion* para referirse a la razón de cambio entre dos cantidades que fluyen o *fluentes* y que disminuyen hasta desvanecerse. En algún punto de este desvanecimiento se presenta esta dicotomía de cero/no cero para tales cantidades. Al mismo tiempo, el fluxion converge o tiende a un valor fijo: la *ultimate ratio* o razón de cambio para un instante. Boyer (1959) cita

la siguiente explicación que Newton ofreció en su *Principia*, para apartarse de la idea de los infinitesimales y centrarse en las razones de cambio:

Las razones últimas en las cuales las cantidades desaparecen, no son, estrictamente hablando, razones de las últimas cantidades, sino límites. A los que, [...] dichas cantidades tienden al decrecer sin límite, y [...] aunque pueden estar muy cerca de tales límites, ni se pueden pasar, u obtener antes de que las cantidades hayan *disminuido indefinidamente* [cursiva agregada]. (p. 198) [traducción libre].

Esta afirmación indica que Newton intuía la noción de límite aunque no la formalizó matemáticamente. Sin embargo al igual que Leibniz, Newton manifestó que se accede al límite a través de una confusa “disminución infinita”. En el caso de Leibniz, sus afirmaciones también fueron similares (Dunham, 2005):

Por [...] infinitamente pequeño, entendemos algo [...] *indefinidamente pequeño* [cursiva agregada], de manera que cada [diferencial] conduce a un tipo de clase, y no meramente como la última cosa de una clase. Si cualquiera desea comprender [lo infinitamente pequeño] como las cosas últimas [...] puede hacerlo, y eso también sin regresar a la controversia sobre la realidad de las extensiones, o del continuo infinito en general, o de lo infinitamente pequeño [...] aunque se pueda pensar que tales cosas son completamente imposibles. (p. 24) [traducción libre].

Boyer (1959) afirma que Leibniz intentó escribir externar sus puntos de vista sobre el infinito pero al parecer, cayó en vacilaciones. Dos meses antes de su muerte, en una carta, afirmó (Boyer, 1959, p. 219) que “no creía del todo que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas o verdaderamente infinitesimales”, sino que él las consideraba “ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente”. ¿Cómo podría enseñarse tal cálculo?

Estos cuestionamientos sobre una matemática no fundamentada, tenían en aquella época implicaciones de tipo social. En particular en torno a las actitudes religiosas y científicas acerca de la fe. El obispo de Cloyne, George Berkeley en *The analyst* en 1734, marcó su crítica célebre (Dunham, 2005, p. 71): “¿Y qué son esos fluxiones? ¿Las velocidades

de incrementos que se desvanecen? Ni son cantidades finitas ni infinitamente pequeñas, ni nada todavía. ¿No podríamos llamarlas los fantasmas de las cantidades muertas?” Ésta es la respuesta a la crítica que los científicos lanzaban a los hombres de fe (Grabiner, 2005). Coincidimos con Berkeley: ¿no se requiere fe también para creer en tales razonamientos científicos? Berkeley argumentó que si Newton basaba su razonamiento en la suposición de que se genere un aumento o variación, la desaparición de este aumento invalidaba todos sus resultados. Se necesitaba una mejor explicación científica del método de fluxiones. Para Berkeley no podía existir algo como la velocidad en un instante obtenida por Newton a través del método de fluxiones. Leibniz también enfrentó dificultades con su diferencial: Voltaire describió su cálculo como (Boyer, 1959, p. 238): “el arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser concebida”. Hasta la actualidad, encontramos difícil la existencia de contextos cotidianos donde podamos observar lo infinitamente pequeño.

Durante el siglo XVIII los matemáticos trabajaron para fundamentar el cálculo. Sus trabajos marcaron el rumbo hacia la definición actual de derivada. Jean le Rond d’Alembert, al considerar los fundamentos del cálculo, afirmó (Dunham, 2005, p.72): “una cantidad es *algo* o es *nada* [cursiva agregada]; si es algo, todavía no se ha desvanecido; si es nada, literalmente se ha desvanecido. La suposición de que hay un estado intermedio es una quimera”. Dunham señala que d’Alembert propuso la noción de límite como base del cálculo y que la expresión  $dy/dx$  refiere al límite del cociente de dos cantidades finitas (Dunham, 2005, p. 72): “la cantidad a la cual la razón  $z/u$  converge más y más cercanamente si suponemos que  $z$  y  $u$  son reales y decrecientes. Nada es más claro que esto”. El término  $z/u$  expresa la razón de cambio entre la variación de la función  $y$ , y de la variable  $x$ :

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

D’Alembert no fue más allá. De acuerdo con Dunham (2005) fue Augustin Louis Cauchy quien formalizó esta situación en 1823 en su *Résumé des leçons données a l’École Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal*. La esencia de sus ideas la describe Dunham (2005) de la siguiente forma:

Cauchy proporcionó el ejemplo del área del círculo como el límite de las áreas de los polígonos regulares [cuadrados, hexágonos, decágonos, entre otros] delimitados dentro

del mismo, a medida que el número de lados se incrementa sin fin. De seguro, ningún área poligonal igualará el área del círculo. Pero para cualquier tolerancia aceptada [diferencia entre áreas], se puede encontrar un polígono dentro del círculo cuya área, y aquellas de todos los polígonos regulares inscritos con más lados, se acerque a la del círculo, tanto como lo permita la tolerancia. El área de los polígonos se acerca -y permanece cerca- al área del círculo. (p. 78) [traducción libre].

Esta idea implica que dentro de un círculo se puede construir un pentágono, un hexágono, o cualquier otro polígono. Y aunque el área de cada figura aumente con el número de lados, siempre tendrá como límite el área del círculo. Nos podremos acercar a dicha área (o límite) tanto como deseemos. Cauchy describió el límite así (Grabiner, 2005, p. 114): “Cuando los valores atribuidos indefinidamente a la misma variable tienden a un valor fijo, terminando por diferenciarse de dicho valor por tan poco como se desee, tal valor es llamado el límite de todos los otros”. Grabiner (2005) aclara que Cauchy agregó que cuando el límite existe la razón de cambio,

[...] tiene un valor definido para cada valor de  $x$ ; que varía con  $x$  [...] [Será] una nueva función de la variable  $x$  [...] Para indicar esta dependencia, le damos a la nueva función el nombre de función *derivada* [cursiva agregada] [...] y la designamos con la ayuda de un apóstrofe en la notación  $y'$  o  $f'(x)$ . (pp. 114-115) [traducción libre].

Esto es, la derivada o función que proporciona la *ultimate ratio* de Newton, el cociente  $dy/dx$  de Leibniz o razón de cambio en un punto, tal como la conocemos actualmente, es un límite al que tiende la razón de cambio promedio entre la variación de la función y la de la variable independiente:

$$y' = f'(x) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Omitimos otras aportaciones de Cauchy a la definición y demostración de la derivada; el lector interesado puede consultar Grabiner (2005). Nos interesa remarcar cómo se formaliza la noción de límite que Newton y Leibniz poseían intuitivamente, y que tomó más de un siglo para que la formalizaran los matemáticos más destacados.

Con esta perspectiva histórica de la noción de derivada como límite resulta fácil pronosticar importantes dificultades para su aprendizaje. Así, resulta difícil lograr la comprensión relacional que permite utilizar la noción en diferentes situaciones, y aún, adaptar los algoritmos en ellas. Desde la perspectiva de la cognición situada, enfrentamos la dificultad para observar en actividades ordinarias, a las razones de cambio con variables que disminuyen infinitamente. Dicha dificultad obstaculiza el significar la noción en un contexto cotidiano, y el uso de la modelación como estrategia didáctica. Desde la perspectiva del aprendizaje significativo, que exige un material lógico y la presencia de ideas de anclaje, enfrentamos una noción que sólo podemos intuir. Esto implica la ausencia de los requisitos globales de un aprendizaje significativo, necesario para profundizar en la comprensión relacional. Nos inclinamos a pensar que esto es lo que ocurre en el aprendizaje del cálculo. La compleja evolución histórica de la derivada, nos sugiere que es difícil utilizar la modelación matemática en su aprendizaje. En consecuencia, surge el interés por conocer la problemática del aprendizaje de la derivada.

#### 4.4. Problemas en el aprendizaje de la derivada.

En la evolución de la derivada como concepto, encontramos tres nociones fundamentales: la razón de cambio instantánea o *en un punto* que en esencia es la *ultimate ratio*; la tangente a la curva o cociente diferencial  $dy/dx$ , y la noción de límite. La revisión nos sugiere que conceptualizar dichas nociones y aplicarlas en la solución de problemas son las principales dificultades de aprendizaje de la derivada. Esto lleva a que predomine el aprendizaje de los algoritmos o reglas de derivación (Dolores, 2000; Moreno y Cuevas, 2004; Bloch y Schneider, 2004; Tall y Mejía, 2004; Cantoral y Reséndiz, 2003). De acuerdo con Dolores (2000), las dificultades del aprendizaje del cálculo diferencial son generalizadas:

Según reportes de varios investigadores, son generalizados los resultados que se obtienen después de haber cursado Cálculo Diferencial (CD) en México y en varias partes del mundo. [Si bien] se logra un dominio *razonable* de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, existen dificultades significativas [al conceptualizar] los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada [...] y existen dificultades mayores en la resolución de problemas de aplicación del concepto

de derivada [...] cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente [los alumnos] comprenden el para qué de esos algoritmos que realizan y el significado de los conceptos. (p. 2)

Dolores (2000) indica además que surgen dificultades para aceptar la tangente a la curva como el límite de una serie de secantes, y cita a Sierpinska para referirse a obstáculos de tipo epistemológico, en los que los alumnos ven el límite como una especie de aproximación o rechazan el nuevo tipo de operaciones matemáticas.

Otro problema no menos importante que encontramos, es escuchar afirmaciones entre profesores respecto a que la derivada no se relaciona con la realidad. Esto, pese al avance que supone el formalizar la noción de límite y casi 200 años de experiencia: Berlinski, (1995) al dirigir sus pensamientos a uno de sus alumnos que le había cuestionado la noción de velocidad instantánea, manifestó:

Pero Hafez, Hafez, Hafez, [...] la derivada es un artefacto; el primero de los grandes conceptos de la ciencia moderna que fracasa visiblemente en corresponder a cualquier cosa en la vida real. Para expresar la velocidad como una función del tiempo, el matemático está preparado para sacrificar el sentido común; está preparado para sacrificar la definición intuitiva de velocidad. De hecho, está preparado para sacrificar cualquier cosa. (p. 165) [traducción libre].

Una percepción de esta naturaleza en un profesor limita en consecuencia las formas de enseñanza y aprendizaje. En el caso de las didácticas que utilizan la modelación matemática basada en hechos reales, este tipo de percepción tiende a reafirmar una discontinuidad: una verdadera ruptura entre la actividad matemática y el mundo real. Desde otra perspectiva, esta situación obliga a aprendizajes algorítmicos, sin posibilidad de lograr una comprensión relacional, deseable en actividades de modelación.

En el ámbito internacional, sugerimos que la modelación como estrategia didáctica se aplica muy poco para superar las dificultades del aprendizaje de la derivada. Sin embargo, bajo ciertas posturas teóricas se propone superar tales dificultades a través de experiencias

previas de laboratorio o de software, o bien, con nuevas epistemologías. Para tener una idea de las investigaciones de este tipo, comentamos algunos casos. Bloch y Schneider (2004) se apoyan en la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, e indican que los estudiantes rara vez experimentan con la noción de límite, antes de iniciar con los conceptos formales. En consecuencia, los estudiantes perciben el cálculo como algo muy difícil. Según explican Bloch y Schneider, (2004) se espera que en la educación media los alumnos se familiaricen con estos conceptos y que profundicen las cuestiones formales en educación superior. Sin embargo, con frecuencia se observa un fuerte énfasis en el uso de algoritmos y de representaciones gráficas. Como consecuencia, al llegar a la universidad, durante y después de los cursos de cálculo, persisten ciertos obstáculos de tipo epistemológico. Bloch y Schneider señalan, además, la dificultad que varios estudiantes muestran para aceptar conceptos como velocidad y flujo instantáneo, y procedimientos en los que el área bajo la curva se obtiene a través de rectángulos. Agregan la dificultad semiótica que los estudiantes enfrentan por el formalismo matemático del concepto de límite.

Bloch y Schneider (2004) sugieren utilizar situaciones fundamentales para la noción de límite considerando los obstáculos descritos. Dichos autores proponen el uso del laboratorio para observar el valor de un flujo instantáneo. Esto es, experimentar la existencia de valores instantáneos, así como comprobar el valor del área bajo una curva. Estas actividades deben ser previas a las formalizaciones del concepto. Resumimos que dichos autores abogan por situaciones antecedentes que faciliten el significar la razón de cambio instantánea, y la integral como área bajo la curva.

Otro caso lo reporta Hähkiöniemi (2005) de la Universidad de Jyväskylä, Finlandia. Hähkiöniemi utiliza la teoría APOS (*action, process, object, schema*), y concluye que la noción de razón de cambio genera diversos aprendizajes cuando se utiliza para acceder a la noción de tangente a la curva o cociente diferencial. Hähkiöniemi realizó su estudio con estudiantes finlandeses de nivel medio, para explorar si comprendían la noción de límite del cociente diferencial. En el curso de cálculo diferencial, se introdujo la derivada con la pregunta ¿cómo determinar la razón de cambio en un punto? Se utilizaron gráficas y se describió que la razón de cambio promedio es una secante. Después se arribó a la derivada como la pendiente de la tangente a la curva, a medida que los cambios en  $x$  tendían a cero y se formalizó como el límite de la razón de cambio promedio. Hähkiöniemi (2005) indica que al

final hubo alumnos que interpretaron la derivada como la pendiente de la tangente a la curva; otros la interpretaron como razón de cambio y otros más, mostraron ambas interpretaciones.

En el caso del desarrollo tecnológico y el uso software encontramos contextos interactivos que funcionan como andamiaje a las nociones formales del cálculo. David Tall (2004) sugiere tres categorías del desarrollo cognitivo en su teoría *three worlds of mathematics*: a) el *conceptual-embodied world* o mundo de las percepciones físicas que internalizamos como conceptos, a través de la reflexión y la experimentación; b) el *symbolic-proceptual world* o mundo de los cálculos y la manipulación simbólica, en que los símbolos funcionan como *proceptos*; esto es, implican procesos y conceptos a la vez y, c) el *formal-axiomatic* o mundo de las propiedades expresadas a través de axiomas, definiciones y demostraciones matemáticas. Tall y Mejía (2004) indican que los sistemas de cómputo desempeñan un papel primordial al proveer a los estudiantes de experiencias para el desarrollo cognitivo. En el caso de la noción de límite, dichas experiencias se generan en los mundos *conceptual-embodied* y *symbolic-proceptual*, y sirven como andamiaje para acceder a la noción formal.

Tall (1985) indica que los procesos asociados al límite son solucionados en el sentido matemático, pero no en un sentido cognitivo. Añade que el educador en matemáticas debe proveer experiencias que ayuden a construir (Tall, 1980, p. 2) “la estructura cognitiva formada por imágenes mentales, propiedades y procesos asociados a un concepto” o *concepto imagen*. Para el caso de la derivada como límite, Tall y Mejía (2004) sugieren el uso de software para adquirir experiencias que faciliten el desarrollo cognitivo. Para dar importancia a ello, en su participación dentro del *Topic Study Group 12: Research and Development in the Teaching of Calculus* del Congreso ICME 10, Tall y Mejía (2004) indican que hay cosas que permanecen a pesar de los grandes cambios culturales. Como ocurre con la libra y la pulgada, que se utilizan a pesar de la adopción del sistema métrico internacional. Ellos sostienen que en matemáticas ocurre lo mismo con el cálculo diferencial e integral, pese a los grandes cambios tecnológicos. Al final de su intervención, Tall y Mejía (2004) hacen el siguiente llamado:

Nuestro reto en este grupo de trabajo es pensar cuidadosamente dónde se encuentra la enseñanza de las matemáticas en este momento y hacia dónde va. En este encuentro tendremos un formidable rango de presentaciones sobre ciertos aspectos del cálculo.

Nuestro desafío no es describir la enseñanza local del cálculo en un tópico particular, o la continuación de elementos culturales que han funcionado en el pasado y que continúan en el presente, sino re-pensar de manera fundamental el contexto global del cálculo en una nueva era tecnológica. (p. 11) [traducción libre].

Desde esta perspectiva ambos autores sugieren que los equipos de cómputo pueden desempeñar un papel clave para el futuro de la educación matemática. Para el aprendizaje de la derivada, Tall (1992) propone usar software que permite ampliar la imagen de una curva. A medida que los valores de la variable independiente vuelven más pequeños, mediante el uso de más decimales, la imagen de una curva se transforma en una “recta local”. Esto sugiere que en un valor puntual (o en un instante) existe una recta, cuya pendiente se obtiene a través de la derivada. Es en esta manera que los equipos de cómputo proveen contextos que permiten acceder a la noción de derivada de un modo menos intuitivo.

Giraldo y Carvalho (2004) reportan un estudio para el aprendizaje de la derivada con las ideas anteriores, en el que los alumnos transforman una curva en recta local (véase Figura 17).

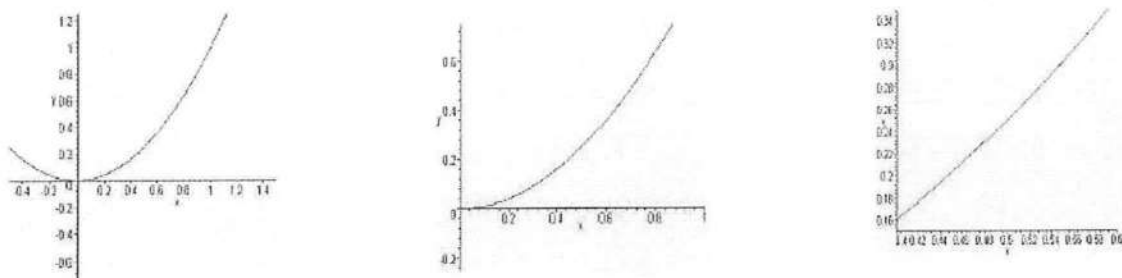


Figura 17. Ampliación de una curva hasta obtener una imagen de recta local, tomado de Giraldo y Carvalho (2004).

Sin embargo, el uso del software no está libre de problemas: una ampliación continua de la imagen a través de la disminución de los valores de la variable, hasta ocho o más decimales, produce una imagen fragmentada en forma escalonada, como muestra la Figura 18.

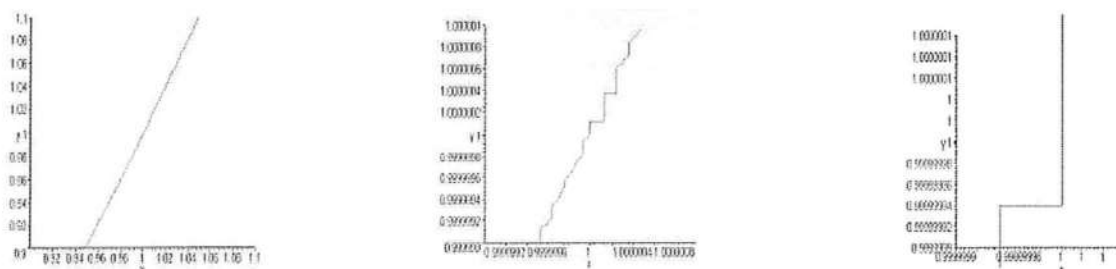


Figura 18. Limitaciones del algoritmo: degeneración de la imagen como recta local, tomado de Giraldo y Carvalho (2004).

Giraldo y Carvalho (2004) reportan que esta situación se convirtió en un acicate para ciertos estudiantes cuando intentaron entender lo que ocurría. No sólo la visualización de la curva como una recta local se logra en este contexto. Hofe (1998), al identificar el papel que desempeña la superación de obstáculos epistemológicos, entre otros, reporta que es posible generar construcciones sobre el límite y los infinitesimales con la ayuda de software. Éste permite ver cómo una línea secante se convierte en una tangente en un punto, a medida que  $h$  toma valores pequeños en  $[f(x+h) - f(x)]/h$  (una razón de cambio promedio). En su estudio, Hofe (1998) pidió a un grupo de niños experimentar con valores de  $h$  que incluyen el dos, una milésima y cero entre otros. Con el dos obtuvieron una secante; con una milésima dicha secante prácticamente se transformó en una tangente (véase Figura 19). Con el valor de cero, la secante desapareció. Al explicar este comportamiento, una niña empleó la idea de un *minipunto* que se obtiene al reducir y reducir las cantidades. Estos minipuntos equivaldrían a la noción infinitesimal de Leibniz en la que se tiene la tangente a la curva. Aunque estos procesos facilitan construir la noción, observamos que los estudios reportados no utilizan contextos con situaciones reales y se viven como una experiencia intramatemática.

En el ámbito nacional, identificamos dos principales tradiciones de investigación en matemática educativa que abordan el aprendizaje de la derivada. Una de ellas es la matemática en el contexto de las ciencias en las escuelas de ingeniería que ya hemos descrito. Esta postura propone utilizar contextos de la ingeniería para introducir los conceptos matemáticos. Sin embargo, no encontramos trabajos específicos para el aprendizaje de la derivada. Otra tradición de investigación, se desarrolla en el Departamento de Matemática Educativa del

Centro de Investigaciones Avanzadas (CINVESTAV). Ambas tradiciones se encuentran en el Instituto Politécnico Nacional con más de 20 años en investigación.

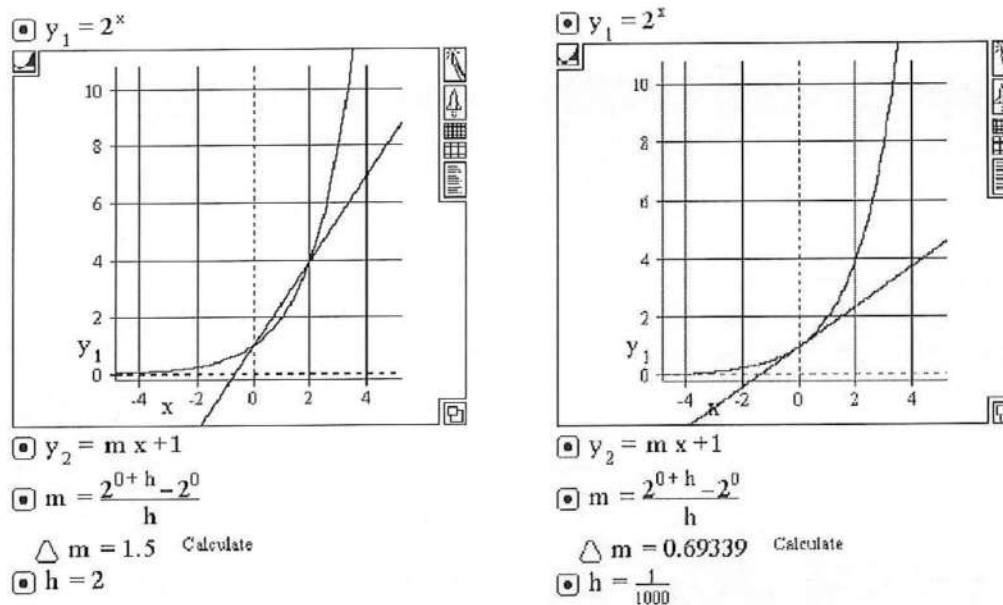


Figura 19. Transformación de la secante en tangente a medida que  $h$  toma un valor extraordinariamente pequeño, tomado de Hofe (1998).

Los investigadores del Departamento de Matemática Educativa proponen tres epistemologías o formas de construir la noción de derivada bajo el enfoque *socioepistemológico* del conocimiento matemático. Dicho enfoque comprende el análisis de cuatro factores en la enseñanza de las matemáticas: el aspecto epistemológico, el cognitivo, la transmisión social del conocimiento y el aspecto sociocultural. En este último se revisa el papel del contexto y de los procesos de enculturación al significar un concepto (Cantoral y Farfán, 2003). En otras palabras, el enfoque socioepistemológico reconoce que el aprendizaje es situado (Brown, Collins y Duguid, 1989). Por lo tanto, la socioepistemología reconoce que los objetos matemáticos se crean en las prácticas en que intervienen y que el conocimiento matemático está situado social, histórica y culturalmente. El análisis se centra en explicar qué motiva a las *prácticas normadas* socialmente bajo las que se construye un objeto matemático, así como en el *discurso matemático escolar* a través del cual se logran acuerdos y se comparten significados. Por ejemplo, este enfoque sostiene que la necesidad de *predicción*

llevó a prácticas sociales que justifican el uso de la derivada lagrangiana<sup>19</sup> (Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez, 2006).

Desde la epistemología, el enfoque socioepistemológico identifica tres tipos de situaciones en el aprendizaje de la derivada: de aproximación, de variación y de transformación (Cordero (2001). Entre las situaciones de aproximación, se encuentran los trabajos de Newton y Leibniz. En dichos trabajos se obtiene un valor límite a través de un acercamiento infinito. La derivada como límite se obtiene a través de este acercamiento o epistemología de aproximación. Las situaciones de variación se caracterizan por la necesidad social de predecir (Cantoral y Mirón, 2000) y las situaciones de transformación, por la necesidad de modificar gráficas de funciones matemáticas. Cordero propone el término de *comportamiento tendencial de las funciones* para referirse a procedimientos en que las gráficas que describen funciones se modifican a partir de sus coeficientes. Con tales procedimientos se obtiene la derivada al coincidir en un punto una curva y una recta tangente. Estos tres tipos de situaciones constituyen la epistemología de las construcciones de la derivada. Cada situación genera sus significados propios. Observamos que tanto Cordero (2001) como Cantoral y Mirón (2000) investigan situaciones alternativas alejadas de la noción de límite en el aprendizaje de la derivada.

Como parte del enfoque socioepistemológico, Cantoral y Farfán (1998) reportan la línea de investigación de *pensamiento y lenguaje variacional*. Dentro de dicha línea analizan la matemática de la variación entendida como la cuantificación del cambio, que con frecuencia se observa en fenómenos físicos. Cantoral y Farfán (1998) sostienen que en los fenómenos de flujo continuo en el tiempo se presenta la necesidad social de predecir, al pasar el tiempo de un estado inicial a uno futuro. La derivada de Lagrange se utiliza en los procedimientos de predecir. En consecuencia, el significado de la derivada obtenida envuelve la idea de predicción. Cantoral sostiene que un pensamiento y lenguaje variacional avanzado puede dar significado a la derivada cuando se aparta de interpretaciones fenomenológicas (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2004).

---

<sup>19</sup> En la búsqueda de fundamentos para el cálculo, Joseph Louis Lagrange propuso la derivada como un coeficiente en un resultado algebraico, obtenido al elevar a una potencia  $n$  a un binomio que incluye una variación o incremento. Aunque este fundamento es práctico, no explica el significado de la derivada como la pendiente de la tangente a la curva o la razón de cambio en un punto (Grabiner, 2005, pp. 35-40).

La línea de investigación del lenguaje y pensamiento variacional también estudia la transmisión social del conocimiento. Dolores señala que otro factor en la problemática de los aprendizajes del cálculo es el modo o tendencia que sigue la enseñanza (Dolores, 2000, 2000a; Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002). Dolores (2000) indica que en el caso de la derivada pueden clasificarse dos tendencias fundamentales para la instrucción: las orientadas a los contenidos o las orientadas a los significados. En la primera tendencia los contenidos rigen el proceso de enseñanza aprendizaje y los significados del concepto pasan a un segundo plano. Por el contrario, la segunda tendencia da prioridad a la construcción de los significados sobre los contenidos. En ambas tendencias, Dolores (2000) identifica además, ciertas variantes que llama enfoques. En las tendencias orientadas al contenido, dichos enfoques son: algebraico, numérico, formal, infinitesimalista y de aproximación local. En las tendencias orientadas a los significados los enfoques son: el geométrico y el variacional. Otro enfoque que puede caer dentro de cualquiera de las dos tendencias, es el computacional, caracterizado por el uso de los medios informáticos como lo proponen Tall y Mejía (2004).

El enfoque geométrico se caracteriza por solucionar problemas de optimización, de acuerdo con Dolores (2000). Ellos implican determinar la tangente a la curva e identificar cuando una función aumenta, disminuye o se encuentra en un punto máximo o mínimo. Lo importante de esta tendencia es que pone el interés en solucionar un problema de optimización que puede ser real o ficticio. Esto justifica aprender el concepto de derivada. Sin embargo, Dolores (2000) señala que este enfoque lleva demasiado tiempo, causado por el recorrido histórico del concepto.

El enfoque variacional se centra en solucionar problemas de variación física y coloca en segundo plano el papel de la noción de límite. Con dicho enfoque se realiza un mayor esfuerzo en el uso de las cantidades y magnitudes. Dolores (2000) plantea el desarrollo de una propuesta didáctica con este enfoque siguiendo las ideas de Elfriede Wenzelburger (1993). Éstas se apartan de la secuencia tradicional de los contenidos para el aprendizaje de la derivada. En vez de iniciar con números reales, funciones, límites y continuidades, propone una didáctica de tres etapas. En la primera, Dolores sugiere iniciar con actividades de modelación de problemas de la física. Ello permite construir las nociones de variable y función en contextos fenomenológicos, reales. En la segunda, a través de nociones como velocidad promedio y velocidad instantánea, se construye la noción de “rapidez de la variación

promedio”, en que se intuye la noción de límite. En la tercer etapa se formaliza la derivada, a través de su definición, del uso de reglas y fórmulas de derivación. Es evidente que estas ideas abogan por un mayor contacto de la matemática con el mundo real y rescatan parte de las situaciones que enfrentó Newton. Observamos también cierta coincidencia con las didácticas que utilizan la modelación matemática. El enfoque variacional y la didáctica para el aprendizaje del cálculo que plantea Dolores (2000) rescata el papel de las cantidades y magnitudes. Sin embargo, no centra el significar los conceptos como *modelos para* que sugerimos en el enfoque hacia la modelación y que, creemos, facilita el utilizar los contextos cotidianos.

De acuerdo con lo expuesto en esta sección, sugerimos que en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada se privilegia el dominio de sus reglas y algoritmos (Dolores, 2000; Moreno y Cuevas, 2004; Bloch y Schneider, 2004; Tall y Mejía, 2004; Cantoral y Reséndiz, 2003). En casos extremos se afirma que no tiene nada que ver con la realidad (Berlinski, 1995). Sin embargo, en los reportes de investigación, apreciamos esfuerzos significativos para superar esta situación desde diferentes posturas teóricas. Algunas abogan por experiencias previas que ayudan al alumno a significar el conocimiento. Bloch y Schneider (2004) proponen actividades de laboratorio bajo la teoría de las situaciones didácticas. Tall y Mejía (2004), entre otros, proponen el uso de software para experimentar con la noción de límite, antes de acceder a su definición formal.

También encontramos un esfuerzo por apartarse de la noción de límite en el terreno epistemológico. En particular, Cantoral y Reséndiz (2003) sugieren que la derivada se justifica en la necesidad social de predecir. Cordero (2001) propone el comportamiento tendencial de las funciones como necesidad génesis de la derivada. Mientras que Dolores (2000) sugiere una didáctica iniciada en la modelación de variaciones físicas. En su propuesta, Dolores rescata situaciones que enfrentó Newton y el papel de las cantidades y las mediciones. Sin embargo, no utiliza estas últimas como fuentes para significar. En concreto, encontramos esfuerzos educativos por facilitar el acceso a la noción de límite y por alejarse de ella. Sugerimos que dicha noción está en el centro de las dificultades de aprendizaje de la derivada. En el próximo capítulo describimos nuestra propuesta para superar tales dificultades, con base en el enfoque hacia la modelación y la matemática en contexto para favorecer la comprensión relacional de la derivada.

**Sumario.** La enseñanza y aprendizaje de la derivada es un tema relevante para la ingeniería. En ésta, uno de los objetivos frecuentes de la actividad es optimizar recursos, y la derivada es el concepto matemático que permite lograrlo. Además, dicho concepto también describe ciertas nociones científicas como velocidad instantánea y costo marginal, entre otras. La modelación como estrategia didáctica es deseable porque utiliza contextos reales. Sin embargo, encontramos un papel limitado de la modelación en el aprendizaje de la derivada. Creemos que ello ocurre por la dificultad de encontrar situaciones reales para abstraer la derivada como un límite. Pese a ello, la modelación y aplicaciones matemáticas están adquiriendo mayor importancia como didácticas.

Al revisar la evolución histórica del concepto de derivada, encontramos una evolución compleja. En sus orígenes Newton y Leibniz aparecen como dos creadores con razonamientos independientes. Newton define la derivada como la razón última de una razón de cambio promedio. Por su parte, Leibniz la define como el cociente de dos diferenciales, con el término  $dy/dx$ . En el pensamiento de Newton, la razón última obtenida al dividir entre cero, operación matemática no aceptada, ocasiona una contradicción. En el caso de Leibniz, la noción de diferencial como la unidad más pequeña, es inconcebible. Estas dificultades son superadas por Cauchy a través de la noción de límite. Sin embargo, es difícil encontrar contextos cotidianos para significar la razón de cambio promedio como un límite, por lo cual es necesario intuir dicha noción.

La derivada tiene una problemática compleja en la instrucción. La dificultad de sus principales nociones ocasiona que se prefiera el aprendizaje algorítmico. Como resultado de ello, se debilita el aspecto conceptual. Incluso, hay quienes afirman que la derivada es un artefacto que no tiene que ver con la realidad, en una postura contraria a lo deseable por la modelación matemática. Entre los esfuerzos realizados para solucionar esta problemática, observamos posturas que recomiendan experiencias previas para acceder a la noción de límite o nuevas epistemologías que se apartan de dicha noción. Creemos que podemos mejorar el aprendizaje de la derivada y favorecer la comprensión relacional de dicha noción, si seguimos esta última dirección y promovemos el uso de contextos cotidianos, tal como lo describimos en el siguiente capítulo.

## V. La derivada con el enfoque hacia la modelación

En el capítulo anterior señalamos que el aprendizaje de la derivada como límite, tiene dos grandes desafíos. Primero, desde la teoría de la cognición situada, encontramos difícil emplear contextos cotidianos para significar la razón de cambio en un punto, y en consecuencia, resulta problemático utilizar didácticas de modelación. Segundo, desde la teoría del aprendizaje significativo, enfrentamos la ausencia de un material lógico y de ideas de anclaje sustentadas en experiencias cotidianas. La noción de derivada como límite se nos presenta como algo que sólo podemos intuir. Para solucionar los problemas del aprendizaje de dicha noción, encontramos posturas que sugieren la adquisición de experiencias previas o bien, nuevas epistemologías.

Desde nuestra posición, creemos que la derivada se puede significar como una noción en estrecho contacto con la realidad, a través de didácticas de modelación basadas en las relaciones entre cantidades. Estas últimas obtenidas en contextos cercanos a la experiencia cotidiana, con actividades de conteo y medición. Pensamos que dichas actividades, favorecen la presencia de ideas de anclaje. Además, en el terreno epistemológico, proponemos un significado para la derivada que se aparta de la noción de límite. Con ello, presentamos ideas para desarrollar un material con mayor significado lógico para el aprendizaje de la derivada. Así como para conceptualizar dicha noción de una manera que favorece la comprensión relacional, y en consecuencia, habilidades de modelación.

En el presente capítulo presentamos la naturaleza continua de los problemas que se organizan y resuelven a través de la derivada, en la que ésta funciona como *modelo para*. En las secciones siguientes, describimos cómo representar tales problemas en la actividad de modelación. Para ello, describimos cómo se mide lo continuo, y la manera de obtener la razón de cambio en un punto a partir de dicha medición y el promedio aritmético. También y en primer término, proponemos cómo obtener la derivada para funciones cuadráticas de tipo polinómico, sin utilizar a la noción de límite. En segundo, cómo obtener dicha noción para cualquier función polinómica a partir de lo que hemos llamado *términos independientes del tamaño del intervalo*. Por último, describimos nuestra propuesta didáctica con base en la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación.

Creemos que la comprensión relacional es favorecida con los aprendizajes significativos. Estos a su vez, requieren de la posibilidad real de enlazar nueva información con las ideas previas del alumno o ideas de anclaje. Esto es, las ideas contenidas en el material, deben poder relacionarse con las experiencias comunes de los alumnos. Según Mochón (1994) el aprendizaje de la derivada como límite, requiere de un salto cognitivo que metafóricamente, es comparable a un salto con garrocha. Por tanto, para que el material de aprendizaje sea potencialmente significativo debe preparar al estudiante para ese salto cognitivo, o bien, reducir su altura. Para esto último, sugerimos dos acciones: la primera, disminuir el nivel de intuición que históricamente requiere aprender la noción de derivada (Boyer, 1959; Colette, 1985; Grabiner, 2005). Esto es, que el material de aprendizaje contenga proposiciones admisibles y razonables sobre la derivada, creíbles a la luz de la experiencia de los alumnos (Ausubel, 2002). Pensamos que esto, lo logramos en el terreno epistemológico, al evitar los procesos de aproximación y la noción de límite. La segunda acción que sugerimos, es procurar que el material de aprendizaje desarrolle la noción de derivada a partir de las cantidades generadas en contextos de modelación. Esto permite acercar la matemática escolar a la realidad cotidiana, tal como interesa a los gobiernos en el caso de la educación obligatoria (Gil, s.f.; OCDE, 2003); a la teoría de la matemática en contexto de las ciencias (Camarena, 2004) y a organismos colegiados sobre la ingeniería industrial (Vargas, 1998).

En el enfoque hacia la modelación proponemos cómo llevar a cabo las dos acciones que señalamos en el párrafo anterior, y con ello, lograr el primer objetivo de nuestra investigación. Nuestra premisa básica es que debemos situar la derivada en una actividad de modelación que la “genere”. Esto es, la derivada debe ser un producto de la actividad de modelación, de manera semejante a la reinención guiada como la propone Doorman (2005). Sin embargo, diferimos en la necesidad de recurrir a la noción de límite. Para ello, describimos más adelante cómo obtener la razón de cambio en un punto a partir de las cantidades y sus relaciones. Otra premisa, es que la actividad de modelación debe iniciarse en contextos de conteo y medición cercanos a lo cotidiano. Esto permite significar la derivada en actividades ordinarias y sencillas, mismas que facilitan ideas de anclaje para construir la noción y lograr aprendizajes significativos (Ríoaseco y Romero, 1997) y, en consecuencia, favorecer la comprensión relacional. En las siguientes secciones describimos nuestra propuesta.

### 5.1. Situaciones que organiza la derivada.

Para Freudenthal un concepto matemático surge de las actividades de matematización y tiene la capacidad de organizar<sup>20</sup> matemáticamente el problema de donde ha surgido (Gravemeijer & Terwel, 2000). En el caso de la derivada, las situaciones que ésta organiza, son aquellas en que se desea determinar una razón de cambio instantánea. Desde una perspectiva de modelación, estas situaciones se relacionan estrechamente con los fenómenos de variación que se encuentran en la naturaleza y en otros ámbitos de interés. Estas variaciones las podemos apreciar con un ejemplo sencillo. Imaginemos que permanecemos un día en la playa, desde el amanecer hasta el anochecer. Observaremos que ciertas cosas varían o cambian a medida que transcurre el tiempo: la posición del sol en el horizonte, la temperatura ambiente, la altura de la marea, entre otras. Cuando es posible, estos cambios los describimos a través de una *función* matemática con variaciones en la variable tiempo. Así, para una hora determinada podemos predecir en que posición se encuentra el sol en el horizonte, cuál es la temperatura ambiente, la altura de la marea o la dirección del viento. Sin embargo, nuestra descripción es más completa si conocemos su *ritmo de variación*, o lo que de manera cuantitativa, llamamos *razón de cambio*. Para el caso de la marea, predicciones como ¿cuándo sube?, ¿a qué hora está más alta? Son realizadas con ayuda de la derivada, o función matemática que describe la razón de cambio en un instante dado.

Otras situaciones más comunes en la ciencia incluyen condiciones instantáneas de fenómenos tales como la velocidad y la aceleración de un objeto, tasas de crecimiento o de natalidad, enfriamiento de un líquido, productividad, entre otras. Condiciones fugaces todas, que sólo podemos describir a través de la derivada. Sin embargo, creemos que construir dicha noción como un modelo de tales condiciones es una tarea conceptual difícil. Pese a ello, necesitamos clarificar el tipo de problemas que podemos precisar, representar y resolver, esto es, organizar matemáticamente con dicha noción. Para identificar tales problemas típicos,

---

<sup>20</sup> Para Freudenthal (Gravemeijer y Terwel, 2000) las matemáticas se caracterizan por su generalidad, certidumbre, exactitud y brevedad. Las actividades de generalizar, dar certeza, exactitud y brevedad a un asunto, son actividades que lo *organizan* de una manera matemática, son actividades de *matematización*. En este sentido para nosotros, un concepto emerge de las situaciones que organiza matemáticamente.

tomamos como ejemplo una experiencia que consideramos cotidiana: acelerar nuestro automóvil.

Supongamos que justo antes de salir a carretera, nos encontramos haciendo un alto en un semáforo en rojo: nuestro vehículo no se mueve. Al cambiar la luz a verde, aceleramos y momentos después alcanzamos la velocidad de 90 kilómetros por hora. ¿Qué velocidad experimentamos a los tres segundos después de arrancar? No lo sabemos.

Para obtener una respuesta, necesitamos reflexionar sobre la naturaleza de la velocidad como razón de cambio. Podemos observar que el velocímetro indica la velocidad como una razón de cambio con la expresión: 90 Km/hr. Esto es, la velocidad requiere que midamos dos dimensiones para describirla: la distancia recorrida y el tiempo utilizado en ello. La primera de ellas, la obtenemos al medir el cambio de posición ( $\Delta s$ ) y la segunda, el cambio en el tiempo ( $\Delta t$ ). La razón matemática obtenida con estos cambios ( $\Delta s/\Delta t$ ), la interpretamos como *modelo para* lo que llamamos *relación por unidad*. Dicha relación la establecemos con base en dos cantidades de variación o dos cambios. Esto es, la expresión 90 Km/hr representa una relación por unidad de 90 a uno. Con el enfoque hacia la modelación, dicha expresión significa que el cambio de la posición es de 90 unidades cuando el cambio del tiempo es de una unidad. Es decir, la posición varía 90 unidades cuando el tiempo varía una.

Regresando a nuestra pregunta: ¿qué velocidad experimentamos a los tres segundos después de arrancar? Ella implica determinar una velocidad instantánea: la velocidad que experimentamos cuando completamos exactamente los tres segundos. ¿Existe tal velocidad? Pensamos que sí. Si el vehículo pasó de una velocidad de cero a 90 kilómetros por hora, es evidente que experimentó en forma *continua* todas las velocidades instantáneas existentes entre ambos valores. Esto es, nuestro vehículo experimentó todas las razones de cambio instantáneas posibles entre tales valores. Creemos que el problema no es la existencia de una velocidad instantánea como lo cuestionó Berkeley en 1734, sino cómo medirla. Tal como lo señala Dolores (1999, p. 71): “el problema principal consiste en *la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante o en un punto* [cursiva agregada] por medios aritméticos conocidos”.

Para nosotros, tiene una validez absoluta utilizar la razón de cambio ( $\Delta s/\Delta t$ ) como expresión de la velocidad *promedio*,<sup>21</sup> pero su uso merece ciertas precauciones en el caso de la velocidad instantánea. Una manera común de razonar nos sugiere que obtenemos dicha velocidad a través de la disminución infinita del intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ), tal como hicieron Newton y Leibniz. Observamos con tal disminución, que la velocidad promedio expresada con la razón de cambio ( $\Delta s/\Delta t$ ) converge hacia un valor instantáneo o límite. Esta forma de pensar conduce a un callejón sin salida: a) por un lado, la razón de cambio proporciona una velocidad instantánea sólo cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  desaparece; b) por el otro, no podemos calcular velocidad sin tener dicho intervalo  $\Delta t$ . En lo matemático, evitamos este callejón sin salida con la noción de límite, pero no en el aspecto cognitivo (Tall, 1985).

Dicho callejón sin salida en lo cognitivo, lo enfrentamos cuando se utiliza la razón de cambio en un punto para expresar condiciones instantáneas. A nuestro juicio, esta dificultad cognitiva causa afirmaciones sesgadas en torno a que la derivada no tiene nada que ver con la realidad (Berlinski, 1995), o que es un artefacto matemático (Pinet, 2001). También creemos que es el origen del rechazo de los alumnos en niveles medios (Sierpiska citado en Dolores, 2002; Bloch y Schneider, 2004) y en niveles superiores de la educación (Cantoral y Mirón, 2000; Tall, 2004); así como de la preferencia por aprendizajes algorítmicos en detrimento de los conceptuales. Nos apartamos de la noción de derivada como límite para evitar esta dificultad cognitiva y los problemas de aprendizaje asociados.

En este punto, desde un enfoque hacia la modelación, resumimos que la derivada organiza matemáticamente situaciones problemas con dos características esenciales: a) dimensiones continuas que varían y cuyas cantidades son representadas con tres variables: una independiente, una dependiente y otra dependiente que expresamos como razón de cambio entre las dos primeras variables; y b) hay que determinar el valor de esta última variable dependiente en una condición instantánea, esto es, obtener la razón de cambio en un valor de la variable independiente. En nuestro ejemplo las dimensiones continuas que varían son el tiempo, la distancia recorrida y la velocidad, y deseamos obtener una velocidad instantánea, esto es, la velocidad cuando el tiempo es de tres segundos de desplazamiento. Expresamos la velocidad como una razón de cambio entre la distancia y el tiempo, que especifica la relación

---

<sup>21</sup> Velocidad que no varía durante todo el período de desplazamiento de un objeto. Se expresa con la razón de cambio que identifica la relación a uno entre el desplazamiento y el tiempo utilizado en ello.

a uno entre dichas dimensiones. La velocidad instantánea la expresamos con una razón de cambio instantánea que especifica la relación a uno para un valor en el tiempo. Dicha razón de cambio es obtenida a través de una función *derivada*. En este contexto, la derivada funciona como *modelo para la relación a uno instantánea entre cantidades de variación*. En esencia, proponemos este significado como la génesis o razón de la existencia de la derivada, independientemente del contexto en que haya sido creada.

### 5.2. La derivada de funciones cuadráticas polinómicas.

En la sección anterior vimos que la derivada organiza situaciones caracterizadas por dimensiones continuas que varían. En estas secciones proponemos la actividad de modelación con base en cantidades de la que emerge la derivada. Si queremos modelar una dimensión continua, enfrentamos la interrogante de ¿cómo representar lo continuo? o más bien, ¿cómo modelar la continuidad con nuestro sistema numérico?

Con el enfoque hacia la modelación centramos la atención en la actividad de modelar. En su etapa inicial, ésta requiere identificar las dimensiones relevantes para el problema y plantearlo con base en ellas. Después de identificar tales dimensiones como variables y constantes, es necesario elegir o crear una *unidad de medida* con la cual podamos cuantificarlas. Con dicha unidad, medimos lo continuo y determinamos cuántas unidades hay en una porción de continuidad. De esta manera, obtenemos un sistema de representación con base en las cantidades determinadas, mismas que expresamos con números. En consecuencia, un número representa el *punto* en la continuidad en que completamos cierta cantidad o número de unidades.

Con base en la actividad de medir descrita modelamos la continuidad a través del sistema numérico. Con él, cuantificamos y representamos dimensiones continuas como el tiempo, la longitud, el peso, y fenómenos complejos como la velocidad de un objeto, misma que cuantificamos a partir de las variaciones de tiempo y longitud. En el ejemplo del vehículo que arranca, cuya velocidad se incrementa en un continuo de cero a 90 kilómetros por hora, nuestro problema es: ¿cómo determinamos la velocidad alcanzada exactamente a los tres segundos después de arrancar?

Es evidente que necesitamos formular un modelo para obtener una velocidad instantánea, misma que expresamos como una razón de cambio en un punto. Centramos de

nuevo nuestra atención en la actividad de modelar con base en las cantidades. Después de identificar las variables continuas y cómo representarlas a través del sistema numérico, consideramos las *relaciones* entre dichas variables. Con ellas, propondremos un modelo matemático para obtener la razón de cambio en un punto y por tanto, calcular velocidades instantáneas.

A diferencia de las dimensiones como longitud y tiempo, que se pueden medir directamente, las cantidades de otras dimensiones como la velocidad, tenemos que calcularlas. Esto es, primero medimos el desplazamiento y el tiempo utilizado y, con base en ellos, calculamos la razón de cambio con la que expresamos la cantidad de velocidad. Dicha razón de cambio indica la relación por unidad entre el desplazamiento y el tiempo que muestra el objeto al moverse. Así, expresamos la velocidad promedio con una razón de cambio constante para todo el desplazamiento. En contraparte, representamos la velocidad instantánea con una razón de cambio en un punto de la continuidad. El cálculo de una velocidad promedio es fácil, se logra al dividir cantidad de desplazamiento entre cantidad de tiempo. Pero, ¿cómo calcular la velocidad instantánea?, ¿cómo obtener la razón de cambio en un punto de la continuidad?

Newton y Leibniz calculan la razón de cambio en un punto, a partir de la razón de cambio promedio. En el contexto de las velocidades, esto tiene ciertas implicaciones durante la representación de continuidades. Primero, los promedios tienden a estar al centro de las mediciones. De ello se desprende que la velocidad promedio para un intervalo de tiempo, es más apropiada para calcular la velocidad instantánea de un punto cercano al centro de dicho intervalo. Segundo, la razón de cambio promedio se calcula de dos formas: a) dividir las cantidades de variación de las correspondientes dimensiones continuas, o b) promediar todas las razones de cambio en un punto del intervalo de continuidad. En consecuencia, hay dos maneras de calcular la velocidad promedio: promediar las velocidades instantáneas o dividir la cantidad de variación de posición entre la de tiempo. Desarrollamos nuestro modelo con base en estas dos maneras de calcular la razón de cambio promedio.

Los números representan cantidades de dimensiones medidas e indican puntos específicos en la continuidad. En consecuencia, el promedio aritmético obtenido con dichos números, también se ubica en un punto específico. Veamos qué implica todo ello en nuestro ejemplo. Supongamos que al arrancar, el vehículo experimenta un incremento de velocidad constante en el tiempo. Es decir, para un mismo periodo de tiempo experimenta el mismo

incremento de velocidad. La dimensión continua de velocidad es expresada con una línea en el inciso a) de la Figura 20.

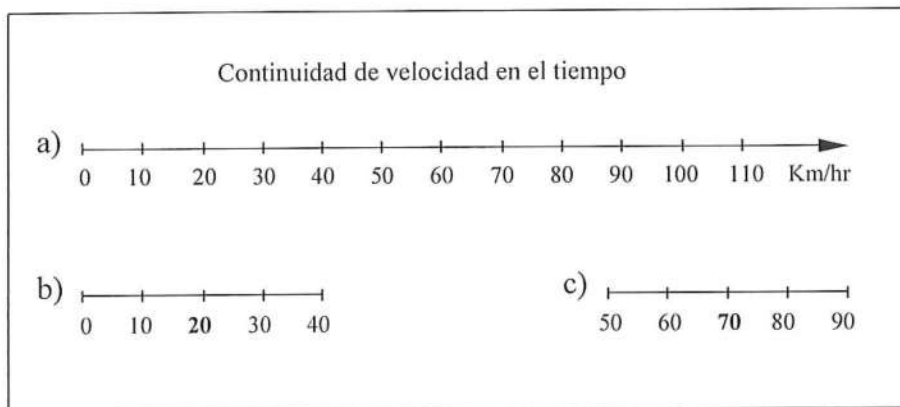


Figura 20. Velocidades promedio y su ubicación en la continuidad.

Si para el intervalo de tiempo en que pasamos de cero a 40 kilómetros por hora [inciso b) de la Figura 26], calculamos la velocidad promedio ( $v_m$ ) con un promedio de sus velocidades instantáneas ( $v_i$ ), encontramos que su valor es de 20 kilómetros por hora:

$$v_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{5} (0 + 10 + 20 + 30 + 40) \text{ Km/hr} = 20 \text{ Km/hr}$$

Dicho valor ocupa la posición central en la continuidad de velocidad, y corresponde a la velocidad alcanzada justo al centro del intervalo en que se pasó de cero a 40 kilómetros por hora. Se repite la misma situación con la velocidad promedio del intervalo en que el vehículo pasa de 50 a 90 kilómetros por hora. Dicha velocidad es de 70 kilómetros por hora y corresponde al punto central del intervalo [inciso c) de la Figura 26]. Esto señala otro camino para determinar una velocidad instantánea, y que no utiliza la noción de límite. Sin embargo, hay una condición muy selecta: la velocidad debe ser constante en periodos iguales de tiempo. Esto implica que dicho razonamiento se aplica sólo cuando las dimensiones expresadas con razones de cambio varían de manera continua y constante.

Las relaciones anteriores permiten encontrar la razón de cambio en un punto a partir de la razón de cambio promedio y las describimos de la siguiente manera:

- Sea un fenómeno que representamos a través de dimensiones continuas, una independiente como el tiempo  $t$  y dos dependientes, como la posición  $s$  y la velocidad  $v$ ,
- La dimensión que funciona como variable independiente la medimos con un intervalo  $dt$  seleccionado como unidad de medida,
- Para cada intervalo  $dt$  de la dimensión independiente, hay una variación en las otras dimensiones:  $ds$  para la dimensión de posición y  $dv$  para la de velocidad.
- Una de las dimensiones dependientes sólo se puede expresar con una razón de cambio y tiene una variación constante, como la velocidad ( $ds/dt$ ) con  $dv$  igual en cada intervalo de tiempo,
- Para analizar el fenómeno, elegimos un número par de  $n$  unidades de la dimensión independiente  $dt$ .

Bajo estas condiciones, para nuestro fenómeno de velocidad de un objeto, afirmamos que la velocidad promedio para un intervalo de tiempo, es igual a la velocidad del punto del centro de dicho intervalo. De manera general, sostenemos que la razón de cambio promedio de todo el intervalo de variación es igual a la razón de cambio del punto en el centro.

Se puede comprobar la afirmación anterior, si hacemos  $n$  par para garantizar un punto en el centro y representamos con  $t_1$  el primer punto de la continuidad en el tiempo; con  $t_c$  el punto central; y con  $t_{n+1}$  el último punto [inciso a) de la Figura 21]. En la continuidad de velocidad expresamos con  $v_{t_i}$  las cantidades de velocidad instantánea correspondientes a cada punto  $t_i$ , separadas por un incremento igual o variación  $dv$  [inciso b) de la Figura 21]. Aclaremos que la variación  $dv$  no es la unidad de medida para la continuidad en la velocidad, sino el cambio correspondiente a una unidad  $dt$  en el tiempo.

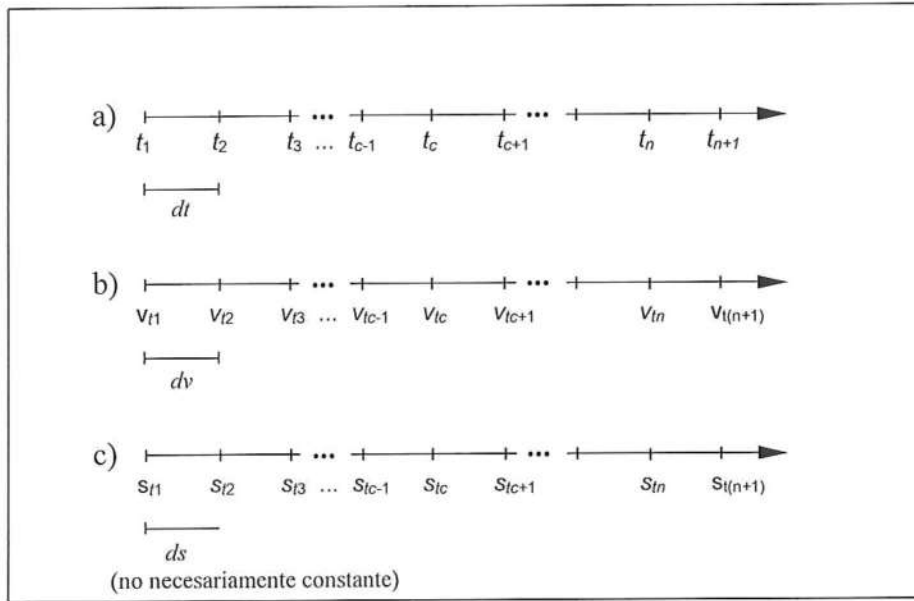


Figura 21. Continuidad de tiempo, velocidad y posición.

Para las condiciones anteriores proponemos que la velocidad promedio  $v_m$  en el intervalo de tiempo  $(t_{n+1} - t_1)$  es igual a la velocidad del punto en el centro  $v_{1c}$ . Como se demuestra a continuación:

$$v_m = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_{1i} = \frac{v_{11} + v_{12} + v_{13} + \dots + v_{1c} + \dots + v_{1(n+1)}}{n+1}$$

y en virtud de su posición el punto del centro es  $v_{1c} = v_{11} + \frac{n}{2} dv$

y como:  $v_{12} = v_{11} + 1dv$ ,  $v_{13} = v_{11} + 2dv$ , ...  $v_{1c} = v_{11} + \frac{n}{2} dv$ ,  $v_{1(n+1)} = v_{11} + ndv$ ,

$$\text{luego: } v_m = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_{1i} = \frac{v_{11} + (v_{11} + dv) + (v_{11} + 2dv) + \dots + \left(v_{11} + \frac{n}{2} dv\right) + \dots + (v_{11} + ndv)}{n+1}$$

desarrollando: 
$$v_m = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_{t_i} = \frac{(n+1)v_{t_1} + (1+2+3\dots n)dv}{n+1}$$

$$v_m = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_{t_i} = \frac{(n+1)v_{t_1} + \frac{n}{2}(n+1)dv}{n+1} = v_{t_1} + \frac{n}{2}dv = v_{t_c}$$

tenemos  $v_m = v_{t_c}$

Nuestro problema ahora es cómo calculamos la velocidad promedio  $v_m$  para conocer la velocidad instantánea del punto central del intervalo. La velocidad la expresamos con una razón de cambio, en consecuencia, una velocidad media se expresa con una razón de cambio promedio. Al inicio de esta sección indicamos que conocemos dos maneras de obtener dicha razón de cambio: a) dividir las cantidades de variación de las correspondientes dimensiones continuas y, b) promediar todas las razones de cambio en un punto del intervalo considerado. Las dos maneras determinan la misma relación por unidad, y por tanto, la misma razón de cambio promedio. Con el siguiente ejemplo pretendemos aclarar estas ideas. Supongamos que soltamos un objeto y cae durante los primeros cuatro segundos, en los que experimenta las velocidades instantáneas de la Tabla 6.

Tiempo $t$ (s)	Velocidad (m/s)
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40

Tabla 6. Velocidades de un objeto en caída libre.

Obtenemos la velocidad promedio para estos primeros cuatro segundos a través de las velocidades instantáneas:

$$v_m = \frac{0+10+20+30+40}{5} = 20 \text{ m/s}$$

Dicho promedio implica una velocidad constante, con la que el objeto recorre una distancia equivalente a la recorrida con las velocidades de la Tabla 6. En consecuencia, la velocidad instantánea en cada punto es la misma, como se indica en la Tabla 7:

Tiempo $t$ (s)	Velocidad (m/s)
0	20
1	20
2	20
3	20
4	20

Tabla 7. Velocidades instantáneas.

Estos datos indican que el objeto recorre 80 metros en un intervalo de tiempo de cuatro segundos. Otra manera de calcular la velocidad promedio, es dividir la distancia recorrida o cambio de posición  $\Delta s$  entre el tiempo utilizado  $\Delta t$ , esto es,  $v_m = \Delta s / \Delta t = v_{ic}$ . Para ello, revisamos cómo obtener dicho cambio a partir de una función.

Establecimos que para intervalo de variación en el tiempo  $dt$ , tenemos una variación en la dimensión de posición  $ds$ , que no es necesario que sea constante. En consecuencia, para cada punto  $t_i$ , tenemos una medición de posición  $s_{ti}$  como muestra el inciso c) de la Figura 22.

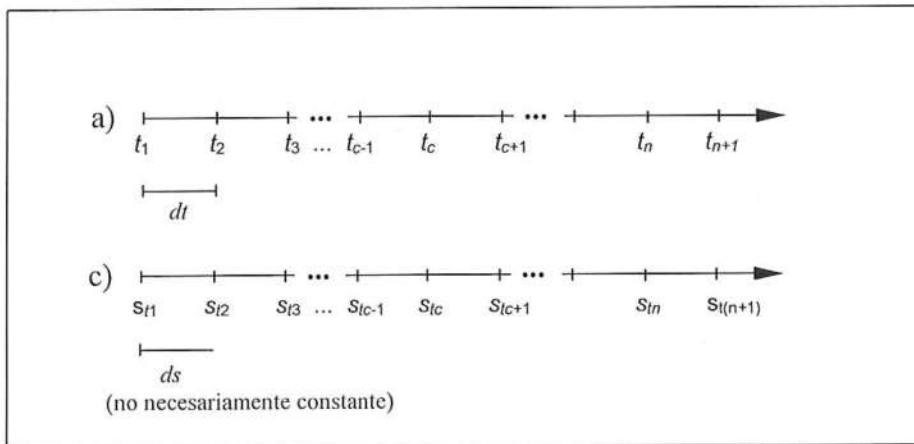


Figura 22. Continuidad de tiempo y posición.

Con frecuencia, para calcular dicha posición, podemos establecer una función  $s(t)$ . Con ella, obtenemos el cambio de posición o distancia recorrida que expresamos con  $\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1)$ . Otra manera de obtener dicho cambio, es medir físicamente la distancia recorrida en el intervalo  $\Delta t$ , lo que consideramos ideal para una actividad de modelación con los alumnos. Ahora nos encontramos en condiciones de formular un primer modelo para obtener la velocidad instantánea de un punto central, a partir de la velocidad promedio. Expresadas ambas con razones de cambio.

Para el intervalo  $\Delta t$ , expresamos con  $t_1$ ,  $t_c$  y  $t_2$ , el primer punto, el punto central y el último respectivamente. También representamos sus correspondientes puntos en las continuidades de velocidad y posición con  $v_1$ ,  $v_c$  y  $v_2$ ;  $s_1$ ,  $s_c$ , y  $s_2$ . Con dichas notaciones formulamos un modelo para la velocidad instantánea del punto central  $v_c$ , del intervalo, expresada con la razón de cambio:

$$v_{tc} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_m$$

Dicho modelo requiere de los valores  $t_1$ ,  $t_2$  y de la función  $s(t)$  para proporcionar la velocidad instantánea  $v_{tc}$  a través de la razón de cambio en un punto. Nuestra intención es formular un modelo que nos proporcione la velocidad instantánea a partir del punto central  $t_c$ . Para ello, utilizamos  $t_c$  como *punto de cálculo*<sup>22</sup> y la función de posición  $s(t)$ , para *derivar* una nueva función  $s'(t_c)$  que nos sirva de modelo. Con él, obtenemos la velocidad instantánea del punto central, expresada como una razón de cambio  $\Delta s/\Delta t$ . Esto es:

$$v_{tc} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t_c)$$

En términos del punto  $t_c$ , nuestro modelo para derivar una función de la velocidad instantánea queda:

$$t_1 = t_c - \frac{1}{2} \Delta t; \quad t_2 = t_c + \frac{1}{2} \Delta t$$

$$v_{tc} = s'(t_c) = \frac{s(t_c + \frac{1}{2} \Delta t) - s(t_c - \frac{1}{2} \Delta t)}{\Delta t}$$

<sup>22</sup> Punto de la continuidad que introducimos en nuestro modelo matemático o fórmula, para obtener la razón de cambio promedio.

En este modelo, requerimos conocer la función de posición  $s(t)$  para obtener la función derivada de una razón de cambio instantánea. En nuestro ejemplo del vehículo que arranca, necesitamos la función  $s(t)$  para conocer la velocidad a los tres segundos de aceleración. De manera general, esta propuesta se aplica a fenómenos que tengan las condiciones descritas al inicio de nuestro análisis. Condiciones que presentamos a continuación expresadas en términos generales:

- Sea un fenómeno que representamos a través de tres dimensiones continuas. Una independiente expresada con la variable  $x$ , una dependiente expresada con la variable  $y$  y otra dependiente de ambas, expresada como una razón de cambio entre las anteriores  $\Delta y/\Delta x$ .
- Medimos la variable independiente  $x$  a través de un intervalo  $dx$  seleccionado como unidad de medida,
- Para cada intervalo  $dx$  de la variable independiente, hay una variación dependiente  $dy$  en la variable  $y$  y una variación *constante* en la variable expresada como la razón de cambio  $\Delta y/\Delta x$ .
- El intervalo de variación  $\Delta x$  de la variable independiente  $x$ , tiene un número par de  $n$  unidades de medida  $dx$ .

El modelo matemático para obtener la derivada en el punto central  $x_c$ , se expresa de manera general como:

$$y' = f'(x_c) = \frac{f(x_c + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x_c - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

Una vez definida la función derivada, se puede calcular la razón de cambio en dicho punto  $x_c$ . Lamentablemente, una condición restrictiva es la variación constante de la variable expresada con la razón de cambio. Esto implica que sólo podemos aplicar nuestro modelo a situaciones en que la cantidad dependiente  $y$  sigue una función cuadrática. Veamos ahora cómo funciona nuestro modelo con un ejemplo sencillo. Supongamos que deseamos obtener una derivada en que la variable dependiente  $y$  sigue la función  $f(x) = x^2$ :

$$y' = f'(x_c) = \frac{f(x_c + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x_c - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$y' = f'(x_c) = \frac{(x_c + \frac{1}{2}\Delta x)^2 - (x_c - \frac{1}{2}\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$y' = f'(x_c) = \frac{x_c^2 + x_c\Delta x + \Delta x^2 - x_c^2 + x_c\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$y' = f'(x_c) = \frac{x_c\Delta x + x_c\Delta x}{\Delta x} = \frac{2x_c\Delta x}{\Delta x} = 2x_c$$

Nuestro modelo proporciona la función derivada para la razón de cambio en el punto  $x_c$ , sin utilizar la noción de límite. Para este ejemplo, la derivada  $y' = 2x_c$  la interpretamos como un *modelo para* la relación de la variación de  $y$  entre la variación de  $x$ , y nos indica que dicha relación es de dos a uno (dos veces el valor del punto  $x_c$ ). Es decir, la dimensión  $y$  varía en dos unidades de medida cuando la dimensión  $x$  varía en una unidad de medida. Si en los puntos siguientes a  $x_c$  la relación anterior disminuye hasta cero, esto revela que la dimensión  $y$  deja de variar con respecto a la dimensión  $x$ . Este tipo de análisis es básico para la ingeniería. En la Figura 23 resumimos nuestro enfoque para significar la función derivada como *modelo para*, a partir del papel que desempeñan las cantidades en un contexto fenomenológico ordinario. En la siguiente sección, proponemos ampliar el modelo para utilizarlo con cualquier función de la cantidad dependiente  $y$ .

Situación problema  $\Leftrightarrow$  Cantidades  $\Leftrightarrow$  Concepto matemático

Arranque del vehículo.		Medición de tiempo y desplazamiento.		<i>La función derivada para la razón de cambio en un punto, es un modelo para la relación por unidad instantánea, entre dos cantidades de variación</i>
Cálculo de velocidad instantánea	$\Leftrightarrow$	Cálculo de velocidad como razón entre dos cantidades de variación	$\Leftrightarrow$	

Figura 23. La derivada como *modelo para*.

### 5.3. La derivada para cualquier función polinómica $f(x)$ .

Del análisis de la sección anterior, formulamos un modelo para obtener la función derivada que proporciona la razón de cambio en un punto central. Para hacerlo tomamos como base el hecho de que la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio en dicho punto, cuando la función  $f(x)$  es cuadrática. Este hecho también implica que la razón de cambio promedio es diferente de la razón de cambio en un punto que no es central. En consecuencia, al tomar el punto inicial del intervalo como punto de cálculo, la razón de cambio promedio no provee la razón de cambio en dicho punto. Esta situación la enfrentaron Newton y Leibniz al utilizar la razón de cambio promedio para obtener la razón de cambio de un punto  $x$  situado al inicio del intervalo. La posición del punto  $x$  se observa en la definición de la derivada como un límite, en la que el intervalo  $\Delta x$  se expresa con la letra  $i$ :

$$y' = f'(x) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Lo anterior sugiere que hay una diferencia entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio en el punto inicial, que casi desaparece cuando el intervalo es infinitamente pequeño. Esto origina los procesos de aproximación al infinito entre ambas razones, que enfrentaron Newton y Leibniz y llevaron a d'Alembert y Cauchy a desarrollar la noción de límite.

Con el enfoque hacia la modelación proponemos una alternativa que elude los procesos mencionados. Para ello, analizamos la razón de cambio promedio que se obtiene con diferentes posiciones del punto de cálculo en el intervalo de variación. En la Figura 24 mostramos los modelos o funciones obtenidas para la razón de cambio promedio, formuladas a partir del punto de cálculo  $x$  y la función  $f(x) = x^2$  para la variable dependiente  $y$ . En la primer columna, se indica la posición del punto de cálculo en términos del tamaño del intervalo  $\Delta x$ . Así tenemos cero  $\Delta x$ , un cuarto, una mitad, tres cuartos y un  $\Delta x$ . En las columnas restantes se muestran tres expresiones de la razón de cambio promedio formulado con dichos puntos. En la segunda columna, obtenemos una versión general para obtener la derivada con la función  $f(x)$  de la variable  $y$ . En la tercer columna, introducimos la función cuadrática  $f(x) = x^2$  para dicha variable. En la cuarta, se muestra el modelo final para obtener la derivada del punto central  $f'(x_c)$  a partir del punto de cálculo  $x$  y la función  $f(x) = x^2$ .

Posición del punto de cálculo:	Razón de cambio promedio:	Razón de cambio promedio con $f(x) = x^2$ :	Razón de cambio del punto central $x_c$ :
$x$	$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$	$\frac{(x_2)^2 - (x_1)^2}{\Delta x}$	$f'(x_c) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$
$0\Delta x$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	$\frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x}$	$[2x_{0\Delta x} + \Delta x]$
$\frac{1}{4}\Delta x$	$\frac{f(x + \frac{3}{4}\Delta x) - f(x - \frac{1}{4}\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{(x + \frac{3}{4}\Delta x)^2 - (x - \frac{1}{4}\Delta x)^2}{\Delta x}$	$2x_{\frac{1}{4}\Delta x} + \frac{1}{2}\Delta x$
$\frac{1}{2}\Delta x$	$\frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{(x + \frac{1}{2}\Delta x)^2 - (x - \frac{1}{2}\Delta x)^2}{\Delta x}$	$2x_{\frac{1}{2}\Delta x} = 2x_c$
$\frac{3}{4}\Delta x$	$\frac{f(x + \frac{1}{4}\Delta x) - f(x - \frac{3}{4}\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{(x + \frac{1}{4}\Delta x)^2 - (x - \frac{3}{4}\Delta x)^2}{\Delta x}$	$2x_{\frac{3}{4}\Delta x} - \frac{1}{2}\Delta x$
$1\Delta x$	$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{(x)^2 - (x - \Delta x)^2}{\Delta x}$	$2x_{1\Delta x} - \Delta x$

Figura 24. La razón de cambio del punto central  $f(x_c)$  obtenida con diferentes posiciones del punto de cálculo con  $f(x) = x^2$ .

En la Figura 24 observamos tres propiedades importantes al determinar la función derivada  $f'(x_c)$  a partir de la razón de cambio promedio. Primera, cuando el punto de cálculo  $x$  y el punto central  $x_c$  coinciden (véase el caso en que  $x$  está a la mitad del intervalo,  $\frac{1}{2}\Delta x$ ), la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio en el punto de cálculo  $[\Delta f(x)/\Delta x] = f'(x)$ . En este caso, no se presenta la diferencia que origina procesos de aproximación infinitos. Esta propiedad es válida con cualquier función polinómica  $f(x)$ , cuando el punto de cálculo coincide con un *punto medio*  $x_p$ , cuya razón de cambio es igual a la razón de cambio promedio. Aunque se desconoce la posición del punto medio  $x_p$ , su existencia la comprueba el teorema del valor medio. Así, la primera propiedad que proponemos es: cuando el punto de cálculo y el punto medio coinciden ( $x = x_p$ ), la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio en el punto de cálculo, esto es:  $[\Delta f(x)/\Delta x] = f'(x)$ .

En la cuarta columna de la Figura 24 observamos otra propiedad: la razón de cambio promedio siempre incluye a la función derivada para el punto de cálculo. Esto es, Cuando  $x$  es un valor que está al inicio del intervalo ( $0\Delta x$ ) la razón de cambio promedio  $[\Delta f(x)/\Delta x]$  es  $2x +$

$\Delta x$ . Cuando  $x$  es un valor a un cuarto del intervalo ( $\frac{1}{4}\Delta x$ ) la razón de cambio promedio es  $2x + \frac{1}{2}\Delta x$ . Cuando  $x$  está al centro del intervalo ( $\frac{1}{2}\Delta x$ ) la razón de cambio promedio es  $2x$ . Esta situación se repite para los puntos de cálculo restantes. La constancia de dicha situación, nos lleva a proponer la segunda propiedad: la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio del punto medio  $x_p$  y siempre incluye a la función derivada del punto de cálculo  $x$ , esto es:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_p) = f'(x) + [f'(x_p) - f'(x)]$$

Esta segunda propiedad implica otro hecho relevante: no importa la posición del punto de cálculo; siempre es posible obtener su derivada a partir de la razón de cambio promedio. La dificultad es identificar tal derivada. Para ello, en la cuarta columna de la Figura 24, se observa que la derivada del punto  $x$  al inicio de  $\Delta x$ ,  $f'(x) = 2x_{0\Delta x}$ , es independiente del tamaño del intervalo. También encontramos esta independencia en las derivadas de los restantes puntos de cálculo. Por ende, se propone como tercer propiedad: la función derivada para el punto de cálculo  $x$ , es *independiente del tamaño del intervalo*  $\Delta x$ . Con base en ello, identificamos la derivada del punto de cálculo  $x$ , con los términos independientes o factores en su caso, del tamaño del intervalo en el cociente de la razón de cambio promedio. En nuestra propuesta, expresamos con el término *tiic* a dichos términos o factores. Esto es, con base en la tercer propiedad, identificamos la derivada a través de los *tiic* y la expresamos como:

$$f'(x) = \text{tiic} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

A través de los planteamientos descritos, proponemos que es posible obtener la función derivada para la razón de cambio en un punto, en un contexto de modelación. En el que la derivada surge de la actividad de determinar una velocidad instantánea y se aparta de la noción de límite. Sugerimos que con un enfoque hacia la modelación, los significados de las principales nociones se entrelazan de una manera que favorece la comprensión relacional. Esto es, tales significados se originan al modelar el problema a través de las cantidades y sus relaciones. Dicha actividad de modelar se convierte en un contexto semiótico para nociones tales como: función derivada, razón de cambio promedio y en un punto, cantidad de variación, punto medio y punto de cálculo. Por tanto, sugerimos que una didáctica con el enfoque hacia la modelación para significar las nociones anteriores, profundiza la comprensión relacional de

la función derivada y promueve habilidades de modelación. Entre ellas y de manera particular, favorece la identificación de relaciones entre variables.

#### **5.4. Propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada.**

Al inicio del presente capítulo sugerimos dos acciones para obtener un material potencialmente significativo en el aprendizaje de la derivada. Ellas son apartarse de la noción de límite, y significar la derivada a partir de las cantidades generadas en un contexto de modelación. Para guiar dichas acciones, establecimos dos premisas básicas: situar la derivada en una actividad de modelación que la “genere” e iniciar dicha actividad en contextos de conteo y medición cercanos a lo cotidiano. Con estas premisas en mente, en las secciones anteriores hemos desarrollado una propuesta conceptual bajo el enfoque hacia la modelación. Con la cual modelamos la derivada sin utilizar la noción de límite. Con base en ello, logramos el primer objetivo de la investigación.

El segundo objetivo es crear una propuesta didáctica con la matemática en contexto y la propuesta conceptual desarrollada para la derivada. A continuación describimos cada una de las etapas didácticas de la matemática en contexto (Camarena, 1999, 2002, 2003) que integran la propuesta para la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

**5.4.1. Análisis de textos de las asignaturas que cursa el estudiante.** De acuerdo con Camarena (2002), para integrar el conocimiento matemático a la ingeniería, se recomienda solucionar problemas de la misma profesión. Con este propósito Camarena sugiere analizar los textos de la carrera. Así, un concepto matemático se presenta al modelar un problema típico, lo que motiva al estudiante a aprender matemáticas. En nuestro caso, la propuesta conceptual para el aprendizaje de la derivada con el enfoque hacia la modelación, requiere de problemas reales en que la variable dependiente siga una función cuadrática. Después de una búsqueda cuidadosa, no encontramos en los textos de ingeniería industrial un problema con tal condición. Recurrimos entonces a textos de las ciencias básicas. Así, en textos de física localizamos el problema de la caída libre de un objeto. Problema que decidimos utilizar por dos razones básicas: el desplazamiento sigue una función cuadrática, y es posible replicar la caída en el aula.

**5.4.2. Planteamiento del problema de las disciplinas del contexto.** Esta etapa refiere al momento en que el problema se presenta al grupo. Antes de ello, sugerimos dedicar dos semanas de clases al aprendizaje de las operaciones básicas con enfoque hacia la modelación. Con esto familiarizamos al alumno con el nuevo enfoque conceptual, a la vez que presentamos las etapas de la matemática en contexto, como etapas de un procedimiento general de modelación. De esta manera, creamos condiciones más adecuadas para iniciar el aprendizaje de la derivada con el enfoque hacia la modelación. El problema que sugerimos se encuentra en la página 26 del documento: “Cálculo diferencial e integral. Las operaciones básicas y la derivada bajo un enfoque hacia la modelación” (véase Apéndice A). A continuación transcribimos dicho problema:

Situación Típica:

1) Con frecuencia en ingeniería industrial se presentan problemas asociados a las velocidades de un objeto como la velocidad de una pieza en una máquina, de bandas de producción, de fluidos, cajas en transportadoras de rodillos, etc. Con el fin de analizar los problemas de objetos en movimiento, resuelva el siguiente problema.

Un objeto se deja caer en caída libre. ¿Cuál es la velocidad promedio durante las primeras cinco décimas de segundo?, ¿cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento?, ¿cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento  $t$  si la posición del objeto sigue la función  $s(t) = t^3$ ?

Las dos primeras preguntas requieren utilizar una función cuadrática para el desplazamiento. Esta condición resulta propicia para modelar la caída libre de un objeto en el aula. La última pregunta obliga a concluir que la derivada es independiente del intervalo  $\Delta x$ , y que puede ser identificada con base en ello. Todo esto permite introducir la noción de derivada como *tiic* de la razón de cambio promedio. Para dar respuesta a las interrogantes, los estudiantes necesitan generar los datos del desplazamiento. Para esto se sugiere filmar la caída libre de un objeto.

**5.4.3. Determinación de las variables y de las constantes del problema.** El planteamiento del problema termina cuando se precisa lo que se requiere para solucionarlo. El siguiente momento didáctico determina las variables necesarias para representar el problema, así como sus condiciones constantes. En esta etapa se identifica como variable independiente el tiempo, como dependientes el desplazamiento y la velocidad. Es importante que los estudiantes concluyan que esta última se expresa con la razón de cambio desplazamiento sobre tiempo. Para lo anterior se guía a los estudiantes a través de una lluvia de ideas para determinar variables y constantes.

**5.4.4. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelaje y su solución.** En esta etapa de la matemática en contexto, el profesor debe invitar a los estudiantes a investigar sobre la derivada. Luego, a través de discusiones y consensos, se identifican las relaciones entre las variables con base en la derivada (Camarena, 2001). Sugerimos identificar esta etapa como de *determinación de relaciones entre variables y constantes*. Esto permite centrar la atención en identificar y clarificar dichas relaciones, con las que se crea el concepto de derivada. Es decir, a partir de las dimensiones y sus cantidades, proponemos identificar los tres tipos de variables que caracterizan la situación problema: una independiente, una dependiente, y otra dependiente relacionada con las anteriores, expresada como su razón de cambio. También sugerimos clarificar que se requiere una medición instantánea para esta última variable y que ello se logra al derivar una nueva función a partir de la razón de cambio promedio. Todo lo anterior, como parte de la actividad de modelar el problema. Por tanto, en esta etapa los estudiantes identifican la función de posición, la relación de igualdad entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea para una función cuadrática. También identifican la propiedad de independencia de la derivada, con la que ésta se obtiene a partir de cualquier función polinómica.

**5.4.5. Determinación del modelo matemático.** Esta etapa se inicia en el momento en que se realizan los procedimientos matemáticos que llevan a obtener un modelo o fórmula, que valida todas las relaciones entre variables. Dicho modelo sirve para solucionar el problema. Para las dos primeras interrogantes, el modelo o función derivada es la fórmula en

que el punto de cálculo  $x$  es igual al punto central  $x_c$ . Esto es, el modelo genera la derivada para cualquier función cuadrática. La fórmula a obtener es:

$$y' = f'(x_c) = \frac{f(x_c + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x_c - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

Para la última pregunta, el modelo a obtener y que crea la derivada para cualquier función polinómica es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

**5.4.6. Solución matemática del problema.** Las expresiones obtenidas en la etapa anterior son de tipo general (Camarena, 1999). Se requiere la función específica de la situación para obtener la derivada a partir de los modelos anteriores mediante los pasos matemáticos apropiados. En esta etapa los alumnos deben obtener la derivada  $f'(x) = 10t$  para responder a las primeras preguntas, y la derivada  $f'(x) = 3t^2$  en el caso de la última pregunta. En este momento, la derivada funciona como *modelo para* la relación instantánea entre dos cantidades de variación.

**5.4.7. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto.** En esta etapa, se introducen los datos apropiados en las derivadas obtenidas para calcular las razones de cambio instantáneas y solucionar el problema.

**5.4.8. Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto.** Por último, los resultados se interpretan en el ámbito del problema y para verificar su congruencia. En nuestra propuesta, sugerimos que las actividades de éstas últimas tres etapas, se realicen en una sola etapa procedimental, que identificamos como “obtención de una solución”. El lector puede recurrir al documento “Cálculo diferencial e integral. Las operaciones básicas y la derivada bajo un enfoque hacia la modelación” (véase Apéndice A).

Con nuestra propuesta pensamos favorecer la comprensión relacional sobre la derivada, esto es, proporcionar mayor claridad en torno a los diferentes aspectos de la noción. Para ello, evitamos la noción de límite y se construye la noción de derivada a partir de las

cantidades, en un contexto para modelar la caída libre de un objeto. Sugerimos que la propuesta provee de ideas cercanas a la experiencia de los alumnos y constituye, por tanto, un material potencialmente significativo. Además, al profundizar en las diferentes relaciones de las variables que llevan a crear la derivada, los estudiantes se capacitan para ajustar procedimientos matemáticos a diferentes situaciones. En consecuencia, esperamos una mejora en cuanto a las habilidades de modelación de tales estudiantes.

**Sumario.** En el aprendizaje de la derivada se enfrenta la naturaleza intuitiva de la noción de límite. Así mismo, tal naturaleza dificulta encontrar contextos ordinarios para su modelación en educación matemática, así como la presencia de ideas de anclaje en los estudiantes. Para enfrentar tales desafíos, nos alejamos de la noción de límite y proponemos una didáctica con base en la actividad de modelar relaciones con base en las cantidades. Dichas cantidades representan las dimensiones que gobiernan el problema y que llevan a crear la noción de derivada. Con todo ello se pretende favorecer la comprensión relacional y las habilidades de modelación.

Presentamos aquí el ejemplo prototípico de la velocidad instantánea de un vehículo, para mostrar el tipo de problemas que organiza la derivada. Las preguntas que caracterizan dichos problemas son del tipo ¿cuál es la velocidad en un momento  $t$ ?, ¿cuál es la razón de cambio instantánea? El cálculo de la razón de cambio instantánea a partir de la razón de cambio promedio lleva a un callejón sin salida. Éste es superado en lo matemático mediante la noción de límite, mas no en lo cognitivo. Creemos que la frustración en lo cognitivo es la causa del rechazo de la noción y de expresiones de que la derivada no tiene que ver con la realidad. Sin embargo, proponemos que se puede obtener la derivada a partir de la razón de cambio promedio. Para ello, consideramos la manera en que expresamos lo continuo con nuestro sistema numérico, y sugerimos que los promedios tienden a ubicarse al centro de intervalos de continuidad. Esto implica que la razón de cambio promedio puede ser igual a la razón de cambio en un punto cerca del centro del intervalo de variación.

Cuando en un fenómeno, la variable dependiente sigue una función cuadrática, tenemos las condiciones bajo las cuales la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio en el punto central  $x_c$ . Esto es, obtenemos la función derivada para dicho punto. Tales fenómenos tienen varias características: una variable independiente  $x$ , una dependiente  $y =$

$f(x)$ , y otra dependiente con variación constante, que expresamos como razón de cambio entre las dos primeras. Ejemplificamos lo anterior con el problema de calcular la velocidad instantánea de un vehículo. Demostramos matemáticamente que  $v_m = v_{ic}$ . Esto nos muestra otra manera de obtener una razón de cambio sin utilizar la noción de límite. Con base en estas ideas, determinamos el siguiente modelo para obtener la derivada cuando se tiene una función cuadrática:

$$y' = f'(x_c) = \frac{f(x_c + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x_c - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

El modelo anterior es transformado para utilizarlo con cualquier función polinómica  $f(x)$  para la variable dependiente. Esto lo logramos al considerar tres propiedades: primera, la razón de cambio promedio y la razón de cambio en un punto son iguales cuando el punto de cálculo  $x$  y el punto medio  $x_p$  coinciden. Esto es,  $[\Delta f(x)/\Delta x] = f'(x_p)$ . Segunda, la razón de cambio promedio siempre incluye a la razón de cambio del punto de cálculo  $x$ :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_p) = f'(x) + [f'(x_p) - f'(x)]$$

Tercera, la función derivada para la razón de cambio del punto de cálculo  $x$ , es independiente del tamaño del intervalo  $\Delta x$ . Con base en esta propiedad, identificamos la derivada con los *ticc*:

$$f'(x) = \text{ticc} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Por último, describimos la propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada a partir de las ideas anteriores y de la matemática en contexto. Dicha propuesta no utiliza la noción de límite y utiliza un contexto cotidiano para modelar: la caída libre de un objeto. Con ello, pretendemos favorecer la comprensión relacional de la derivada y, en consecuencia, las habilidades de modelación. En los próximos capítulos expondremos los resultados obtenidos con una didáctica tradicional y la propuesta, en cursos de cálculo diferencial de la carrera de ingeniería industrial del Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora.

## VI. Método

En los capítulos anteriores hemos revisado la problemática del aprendizaje de la derivada en ingeniería, la dificultad de la noción de límite y elaboramos una propuesta didáctica para superar tal dificultad. En este capítulo describimos el método seguido para realizar la investigación. Esencialmente desarrollamos el estudio de dos grupos de Cálculo diferencial e integral seleccionados como casos para evaluar dicha propuesta. En uno de ellos se sigue lo que llamamos una didáctica *tradicional* y en otro la didáctica propuesta. A cada caso aplicamos los mismos instrumentos de colección de datos y comparamos resultados para emitir una respuesta. Los resultados se describen en los capítulos siguientes.

Los objetivos del estudio nos llevaron a realizarlo en dos etapas, la elaboración de la propuesta didáctica descrita y la evaluación de sus efectos en la comprensión relacional y habilidades de modelación. Para la primer etapa, en que desarrollamos nuestra propuesta didáctica, se realizó investigación documental. Consultamos bibliografía y bases de datos en diferentes bibliotecas, así como revistas y bases de datos electrónicas del área temática, y de eventos y organizaciones matemáticas. Para la segunda etapa, en que tomamos el estudio de casos como estrategia de investigación, seguimos los criterios dados por Yin (2003), tal como se describe a continuación.

### 6.1. Selección de la estrategia de investigación.

La naturaleza de la pregunta de investigación nos sugirió desarrollar una actividad en un escenario complejo, exploratorio y de poco control en la búsqueda de una respuesta. Complejo porque indagamos efectos en la comprensión relacional y en habilidades de modelación. La primera de ellas remite al análisis de la apropiación de los significados, lo que reviste una complejidad considerable. Es aquí donde otorgamos al análisis semiótico de Godino y Batanero (1997, 1998) un papel relevante para esta investigación. Con respecto a las segundas, observamos una complejidad menor, ya que entre los autores del tema encontramos cierta coincidencia sobre las habilidades específicas que demanda la modelación matemática (Camarena, 2001; Houston y Neill, 2003; Kaiser, 2005). En consecuencia, sugerimos que es posible analizar los efectos de la didáctica propuesta con base en tales habilidades. Esto es, es

posible caracterizar las habilidades de modelación de un estudiante, a través de las actividades mostradas al modelar un problema de ingeniería.

Por otra parte, el escenario nos muestra una actividad de investigación exploratoria porque no encontramos antecedentes de trabajos similares al del enfoque hacia la modelación. Como una implicación de lo anterior y de la falta de un estudio piloto, se nos presenta una actividad con poco control sobre la evolución de la instrucción conforme a lo planeado. Con base en estas implicaciones se decidió realizar un estudio de casos en la segunda etapa de la investigación.

De acuerdo con Yin (2003), un estudio de casos es recomendado cuando se tienen preguntas de investigación que inician con ¿cómo? o ¿por qué?, poco control del investigador sobre los eventos y se pone mayor atención a eventos contemporáneos. Las últimas dos condiciones están dadas en el escenario de la investigación. En el caso de la primer condición, la pregunta de investigación inicia con un ¿qué? Al respecto Yin (2003) indica que el estudio de casos exploratorio es apropiado, cuando una pregunta que inicia con un ¿qué? refiere a una comprensión de tipo cualitativo, como en este caso. Para otros autores, un estudio de casos es una estrategia de investigación que se enfoca en un ejemplo particular con un contexto complejo, sobre el que se desea mayor comprensión (Mertens, 1998; Titscher, 2000). O bien, se enfocan en ejemplos únicos en contextos reales en los que se observa cómo pueden coincidir teoría y práctica (Cohen, Manion y Morrison, 2000).

## **6.2. Diseño de investigación.**

De manera general el diseño refiere a la secuencia lógica de las actividades que proveen evidencia para responder la pregunta de investigación. La pregunta de investigación sugiere una base de comparación para obtener una respuesta. Por ello utilizamos un diseño de dos casos con condiciones contrastantes, esto es, un caso sometido a la didáctica propuesta y otro con la didáctica sugerida por la academia de matemáticas. Por tanto, tomamos como casos a estudiar a los dos grupos de ingeniería industrial de los cursos de cálculo diferencial e integral en el periodo 2006-1. Dichos grupos corresponden a los turnos matutino y vespertino en el semestre de enero a junio. Elegimos estos grupos por varias razones, primero por la coincidencia de la programación de los cursos con los tiempos propuestos para el desarrollo de la investigación; segundo, por el hecho de que es el primer curso de cálculo dentro del

programa. Otra razón importante fue la facilidad del acceso que representó para la investigación.

Como primer caso se escogió al grupo programado en el turno vespertino en horario de 5:00 a 5:50 PM de lunes a viernes. En este grupo las clases se impartieron por el profesor asignado a la materia, con una didáctica expositiva propia de la enseñanza tradicional. A este grupo le llamamos el *caso de la matemática tradicional*. Como segundo caso se seleccionó al grupo de cálculo diferencial e integral en horario de 8:00 a 8:50 AM, las cuales se desarrollaron con la matemática en contexto con el investigador como profesor. A este grupo le llamamos el *caso de la matemática en contexto*. El diseño contempló realizar el estudio de los efectos en la comprensión y en habilidades de modelación para ambos casos, y un análisis de sus diferencias para dar respuesta a la pregunta de investigación.

El diseño de investigación para un estudio de casos comprende cinco componentes (Yin (2003, p. 21): “1. las preguntas del estudio, 2. sus proposiciones, si las hay, 3. sus unidades de análisis, 4. la lógica de enlace entre los datos y las proposiciones; y 5. el criterio para interpretar los resultados” [traducción libre].

**6.2.1. Pregunta y proposiciones del estudio.** Tradicionalmente, de acuerdo con Merriam (1988) los estudios de caso se inician con algún problema identificado en la práctica y en el que deseamos conocer cómo ocurren las cosas. En nuestro caso la pregunta de investigación surge de la posibilidad de comprender la derivada desde una perspectiva de modelación del entorno. Esto nos sugiere realizar una actividad exploratoria utilizando la didáctica de la matemática en contexto con un grupo de alumnos, para luego comparar sus resultados con otro grupo que no la haya utilizado.

La importancia de una proposición, según Yin (2003), está tanto en su aportación de tipo teórico como en su capacidad para dirigirnos en la búsqueda de una respuesta. Sin ellas es difícil dirigir la investigación hacia puntos específicos. Al inicio de la misma pensamos que los efectos más significativos podrían darse en la comprensión relacional y en las habilidades de modelación. Sin embargo, en el transcurso de la investigación, nos interesamos por indagar si el estudiante percibe la derivada en su realidad cotidiana. Con base en el marco teórico y esta última consideración, se establecieron tres proposiciones:

1. La didáctica de la matemática en contexto con el enfoque hacia la modelación para la enseñanza aprendizaje de la derivada favorece la comprensión relacional.
2. Acerca la noción de derivada a la realidad cotidiana.
3. Favorece el desarrollo de habilidades de modelación, en particular, la identificación de relaciones entre variables.

Si la matemática en contexto con un enfoque hacia la modelación, favorece la comprensión relacional y las habilidades de modelación, esperamos que los estudiantes muestren las capacidades señaladas y declaren significados para la derivada como *modelo para*.

**6.2.2. Unidades de análisis.** De manera global, las unidades de análisis en cada caso son la transcripción de la clase en que se estudia la noción de derivada, y los alumnos seleccionados para evaluar efectos en la comprensión y habilidades de modelación. Otras unidades de análisis son propias del enfoque ontológico semiótico (Godino, 2003) para determinar la configuración epistémica de la derivada, o para caracterizar los significados propios de la comprensión relacional.

**6.2.3. Enlaces de datos a proposiciones y criterios de interpretación.** La obtención de datos enlazados a las proposiciones se puede hacer de muchas maneras según Yin (2003). Aunque él aclara que ninguna ha sido definida con la misma precisión con que ocurre la asignación de sujetos y tratamientos en los experimentos psicológicos. En nuestro estudio, la primer proposición implica el análisis de las explicaciones de los estudiantes sobre lo que hacen y ver si su discurso incluye conceptos, propiedades y argumentaciones coherentes con el enfoque hacia la modelación. Esto nos sugiere utilizar tres fuentes de evidencia para la colección de datos en ambos casos: a) observación directa de los significados que se negocian en clases en las que la derivada es objeto de enseñanza aprendizaje. Caracterizar dichos significados con base en el enfoque ontológico semiótico de Godino (2003) para obtener el significado implementado como una *configuración epistémica*<sup>23</sup> del objeto; b) evaluaciones

---

<sup>23</sup> Conjunto de significados con relación a un concepto matemático que se agrupan en las categorías: significados lingüísticos, situacionales, actuativos, conceptos, propiedades y argumentos (Godino, 2003)

para identificar y caracterizar los significados del enfoque hacia la modelación declarados por los estudiantes, a través de un cuestionario sobre comprensión relacional, un examen con ejercicios y un problema de derivadas; y c) entrevistas enfocadas para precisar más allá de lo escrito, los significados declarados y logrados.

La segunda proposición del estudio, relacionada con la derivada y la realidad, nos sugiere utilizar la evaluación y la entrevista para preguntar de manera directa sobre ello. En cuanto a la tercer proposición, nos parece apropiado utilizar la evaluación como fuente de evidencia para identificar habilidades de modelación. Así como entrevistar a los estudiantes para profundizar en lo realizado.

En cuanto a los criterios de interpretación de resultados, Yin (2003) afirma que actualmente no hay una forma precisa de establecerlos. Ante la ausencia de una guía clara, optamos por comparar los resultados en cada una de las proposiciones. Esto es, en cuanto a la comprensión relacional, esperamos que los estudiantes del caso de la matemática en contexto muestren mejores resultados que los del caso tradicional. Para confirmar dicha condición, comparamos los resultados de ambos casos. De manera similar comparamos los resultados en habilidades de modelación y la percepción del estudiante sobre la derivada y la realidad. También al comparar ambos casos, se buscan posibles indicios de correlación entre la comprensión relacional y habilidades de modelación.

### **6.3. Participantes.**

El grupo del caso tradicional lo utilizamos como referencia y estuvo formado por seis alumnos regulares y un alumno de oyente. Tres de los estudiantes regulares llevaron anteriormente el curso de cálculo diferencial e integral en otras universidades. El profesor imparte el curso por primera vez en ingeniería industrial y todos los estudiantes son del sexo masculino. El grupo de la matemática en contexto estuvo integrado por 19 estudiantes, en su mayoría jóvenes que llevarían su primer curso de cálculo diferencial en la universidad. En dicho grupo sólo se tuvieron dos alumnas. El investigador participó como profesor del curso e implementó la didáctica propuesta. El profesor regular participó en la filmación de las clases y al dar instrucciones sobre la aplicación de exámenes.

#### 6.4. Materiales e instrumentos.

**6.4.1. Notas del curso de cálculo diferencial.** En el caso tradicional el material o notas del curso, son elaboradas por el profesor siguiendo instrucciones de la academia de matemáticas, y su experiencia bajo el principio de libertad de cátedra. En el caso de la matemática en contexto, las notas del curso son elaboradas por el investigador con el enfoque hacia la modelación siguiendo la matemática en contexto (véase Apéndice A). Dichas notas se dividen en tres temas, modelos y modelación, modelos para relaciones de unión o separación de cantidades, y modelos para relaciones de variación: dependencia, variación media, en punto y total. Los dos primeros temas ofrecen una perspectiva de los modelos y de las operaciones básicas como modelos simbólicos. El tercer tema se desarrolla siguiendo la propuesta didáctica. Esto es, a los alumnos se les pide construir un modelo matemático para calcular velocidades instantáneas de un cuerpo en caída libre. Con ello se ofrece una perspectiva de modelo para las funciones y la derivada. La parte que corresponde al cálculo intergral no se ha escrito.

**6.4.2. Transcripción de clases.** En ambos casos la clase en que se estudia la derivada fue transcrita para el análisis de los significados negociados en la misma. En el caso tradicional se transcribe la clase del 20 de febrero y en el caso de la matemática en contexto, la clase del 16 de marzo.

**6.4.3. Examen sobre argumentos.** De acuerdo con Godino (2003) es posible inferir la comprensión de un estudiante a partir de sus argumentaciones al realizar una tarea, o a partir de los conceptos, propiedades y argumentos que un estudiante reconoce como característicos de un objeto matemático. Por consiguiente, decidimos diseñar un examen sobre derivadas y pedirle al alumno que justificara cada paso (véase Apéndice B). Dicho examen tiene tres secciones, una que contiene los ejercicios y problemas a resolver, otra para anotar los pasos de solución, y otra para anotar la justificación de cada paso. En un inicio, pensamos incluir la noción de límite en nuestro análisis, pero la complejidad de la investigación y el escaso aporte a responder la pregunta de investigación nos llevaron a rechazar la idea. El examen tiene cuatro reactivos, dos para límites y dos para derivadas. A los estudiantes se les pidió resolver sólo los reactivos tres y cuatro que corresponden a derivadas.

**6.4.4. Cuestionario sobre comprensión.** Con el propósito de conocer si el alumno reconoce significados de la derivada propios del enfoque hacia la modelación, que funcionan como andamiaje para la comprensión relacional, se diseña el cuestionario de comprensión (véase Apéndice C. Con base en Godino (2003), los reactivos de dicho cuestionario se categorizan en conceptos, propiedades y argumentos asociados con la derivada. Así, los reactivos del uno al cinco, siete, ocho y once pertenecen a la categoría de conceptos. Todos ellos son de opción múltiple y sus respuestas tienen significados de la matemática tradicional y del enfoque hacia la modelación. En el cuestionario se le pide al estudiante que elija una de ellas, la que considere correcta. Algo similar ocurre con los reactivos seis, nueve y diez, pertenecientes a la categoría de propiedades. Por su parte, los reactivos 15, 16 y 17 pertenecen a la categoría de argumentos y son preguntas abiertas. Los reactivos 12 y 13 son preguntas abiertas sobre ejemplos y contra ejemplos de la derivada en la realidad. El reactivo 14 es de opción múltiple que se pide al estudiante que identifique los ejemplos que tratan de derivadas. Por último, los reactivos 18 y 19 incluyen una gráfica en que se pide identificar el valor de una derivada. Estos dos últimos reactivos los basamos en el instrumento utilizado por Dolores (2000) para estudiar el conocimiento de la derivada en jóvenes de educación media superior.

**6.4.5. Examen sobre habilidades de modelación.** Las habilidades que evaluamos son plantear el problema, identificar variables y constantes, relacionar variables y constantes, y formular el modelo matemático. Para ello se adaptó un problema de administración de inventarios del área de investigación de operaciones para aplicarlo en un examen (véase Apéndice D). En éste último se pide formular un modelo para el ritmo de variación del costo total anual de acuerdo al tamaño de pedido.

**6.4.6. Entrevistas.** Dado que los estudiantes pueden proporcionar respuestas o realizar acciones sin un por qué claro, se decidió entrevistarlos. Por lo tanto, todos los exámenes y el cuestionario sobre comprensión fueron complementados con entrevistas enfocadas<sup>24</sup> en los ejercicios, problemas y preguntas contestadas por los estudiantes seleccionados.

---

<sup>24</sup> La entrevista enfocada se caracteriza porque se encuentra definida por temas específicos. De acuerdo con Galindo (1998, p. 299) en dicha entrevista “el sujeto nos interesa porque [...] se conoce de antemano su participación en una experiencia que ha motivado el diseño de la investigación”.

## 6.5 Procedimiento.

**6.5.1. Caso tradicional.** Se contactó al profesor del curso, se le expuso el objetivo de la investigación y se obtuvo su autorización para realizarla en su grupo. En consecuencia las clases fueron video grabadas, transcritas y se analiza la que presenta a la derivada. Se aplicaron los instrumentos señalados anteriormente y se entrevistó a los estudiantes. Por último se resumieron los resultados para tener una base de comparación con el caso de la matemática en contexto. A continuación se describe el procedimiento seguido para evidenciar cada proposición del estudio.

**6.5.1.1. Comprensión relacional y la derivada en la realidad.** Para inferir los logros en la comprensión relacional con base en el enfoque ontológico semiótico de Godino y Batanero (2003) se siguieron las siguientes acciones: a) determinar la configuración epistémica implementada de la derivada, b) identificar los argumentos de los estudiantes al solucionar una tarea con dicha noción, y c) caracterizar los conceptos, propiedades y argumentos de la derivada con el enfoque hacia la modelación, reconocidos por los estudiantes.

**6.5.1.1.2. Configuración epistémica implementada de la derivada.** Esta configuración se obtuvo siguiendo los siguientes pasos:

- a) La clase del 20 de febrero en que se presenta la derivada, fue video grabada y transcrita por el investigador para su análisis.
- b) Con base en el enfoque ontológico semiótico, el texto de la transcripción se descompuso en unidades naturales, unidades epistémicas y configuraciones epistémicas.
- c) Para cada configuración epistémica se determinó un carácter global o significado global.
- d) Con base en los significados globales se obtuvo la configuración epistémica implementada de la derivada, desglosada en las categorías de situaciones, acciones, conceptos, propiedades, argumentos y lenguaje.

**6.5.1.1.3. Caracterización de argumentos.** Los argumentos de los estudiantes se caracterizan con base en el tipo de comprensión mostrada, ya sea relacional o instrumental. Para caracterizar tales argumentos se realizaron los siguientes pasos:

- a) Se obtuvo autorización del profesor del curso y se aplicó el examen sobre argumentos a todo el grupo.
- b) Se recogieron y guardaron los exámenes.
- c) Se propuso la solución del examen y 18 probables argumentos que reflejan comprensión relacional o instrumental.
- d) Se eligieron tres estudiantes que mostraron mayor interés en las clases y se les entrevistó sobre sus justificaciones.
- e) De acuerdo a las justificaciones ofrecidas, se asignó un tipo de comprensión a los argumentos dados por los estudiantes.
- f) Se elabora una tabla con los resultados de los tres estudiantes y el tipo de comprensión mostrada.

**6.5.1.1.4. Conceptos, propiedades y argumentos reconocidos.** Los significados propios de una comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación, se infieren a través de los conceptos, argumentos y propiedades sobre la derivada que reconoce el alumno. Para ello se realizaron las siguientes acciones:

- a) Se obtuvo autorización del profesor del curso y se aplicó el cuestionario sobre comprensión a todo el grupo.
- b) Se recogieron los cuestionarios y se guardaron.
- c) A los tres estudiantes elegidos para el análisis se les entrevistó sobre sus respuestas.
- d) De acuerdo a las argumentaciones ofrecidas, se determina si el estudiante reconoce los significados de conceptos, propiedades o argumentos con el enfoque hacia la modelación.
- e) Se elabora una tabla con los resultados de los tres estudiantes sobre los significados reconocidos.

Con los elementos anteriores inferimos los logros en la comprensión relacional del caso tradicional, y establecemos una base para comparar los resultados del caso de la matemática en contexto.

La siguiente proposición del estudio refiere a la posibilidad de que el estudiante reconozca la derivada como algo en contacto con la realidad. Decidimos preguntar sobre ello de manera directa en las preguntas 12, 13 y 14 del cuestionario sobre comprensión. En consecuencia, el procedimiento que seguimos es el descrito arriba hasta el paso c), en que también se pregunta por la forma en que ellos enseñarían la derivada. Esto último con intención de conocer el interés de los estudiantes por utilizar situaciones reales. Las entrevistas fueron transcritas y se analizó si el estudiante es capaz de proporcionar ejemplos y contra ejemplos de la derivada en situaciones reales. Los resultados se resumieron en una tabla.

**6.5.1.2. Habilidades de modelación.** La última proposición del estudio nos lleva a indagar por las habilidades de modelación. Éstas son, plantear el problema, identificar variables y constantes, relacionarlas, y formular el modelo matemático. Dichas habilidades se evalúan a través del examen diseñado para tal fin. Éste se aplicó de acuerdo a los pasos siguientes:

- a) Se obtuvo autorización del profesor del curso para aplicar el examen sobre habilidades de modelación a todo el grupo.
- b) El profesor ofreció diez puntos adicionales en la calificación para motivar a los estudiantes a resolverlo.
- c) Se aplicó el examen a todo el grupo.
- d) Se recogieron los exámenes y se guardaron.
- e) A los tres estudiantes elegidos para el análisis se les entrevistó sobre sus respuestas.
- f) De acuerdo a las argumentaciones ofrecidas, se determinó si el estudiante planteó el problema, identificó todas variables propias de una situación de derivadas, las relacionó y formuló cada paso para obtener el modelo del ritmo de variación.
- g) Se elabora una tabla con los resultados de los tres estudiantes sobre las habilidades mostradas.

**6.5.2. Caso de la matemática en contexto.** Al igual que en el otro caso, se contactó al profesor y se le expuso el motivo de la investigación, sin embargo, él declinó impartir la derivada con la didáctica de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. Se acordó entonces que impartiéramos la parte del curso en que se estudia la derivada como *modelo para*. Los procedimientos e instrumentos utilizados para este caso son los mismos que se utilizaron en el caso tradicional, con excepción de que seleccionamos cuatro estudiantes para el análisis de los resultados; y nuestra observación fue más en forma de tipo participante.

**6.5.3. Comparación de resultados.** Para dar respuesta a la pregunta de investigación, los resultados de ambos casos se compararon para cada proposición, a partir de los totales de las diferentes categorías de respuestas.

## VII. Resultados: Caso tradicional

En este capítulo describimos los resultados obtenidos con la didáctica tradicional para el aprendizaje de la derivada en un grupo de ingeniería industrial, al que hemos denominado caso tradicional. De manera general exponemos el contexto y los aspectos considerados más relevantes de nuestro estudio en cada una de las proposiciones que nos guían: comprensión relacional, la derivada y la realidad, y las habilidades de modelación. El lector interesado encontrará más detalle de lo que aquí presentamos en los apéndices. En esta sección presentamos el contexto y los resultados relacionados con cada una de las proposiciones del estudio. Esto es, los logros obtenidos en la comprensión relacional, la derivada y la realidad, y habilidades de modelación.

### 7.1. El contexto.

San Luis Río Colorado es una ciudad frontera con San Luis Arizona en Estados Unidos y se ubica aproximadamente a 50 Km al este de la ciudad de Mexicali, Baja California. En 1983 se creó el CESUES en la unidad académica San Luis Río Colorado para apoyar el desarrollo regional, acorde a sus prioridades institucionales, tal como se indica en su ley orgánica (Gobierno del Estado de Sonora, 1983). En la década pasada, el CESUES implementó los programas de ingeniero industrial e ingeniero industrial en electrónica para atender las necesidades de la industria maquiladora local. Dichos programas tienen un sistema curricular de créditos, y comparten un tronco común durante los primeros cinco períodos a partir del plan de estudios 2001.

El aprendizaje de la modelación matemática en ambas carreras es algo que no encontramos explícitamente definido. En el caso del programa de ingeniero industrial observamos una referencia tangencial en su objetivo general, al señalar que el propósito es formar ingenieros que optimicen recursos materiales, tecnológicos y financieros entre otros. Una referencia más específica la encontramos en el perfil del egresado (CESUES, 2002, p. 4): “desarrolla y utiliza modelos teóricos a través de técnicas de investigación de operaciones y simulación de sistemas para predecir el comportamiento de sistemas industriales y de servicios”. Otra referencia la hallamos en el campo de trabajo descrito en la página cinco del

mismo documento, en ella se indica que el ingeniero participa en tareas para analizar “un modelo, para aplicar metodologías de solución fundamentales en la resolución de problemas”. En el programa de ingeniero industrial en electrónica encontramos menos referencias para el aprendizaje de la modelación matemática. La única expresión que asociamos al uso de la modelación matemática, la hallamos en el perfil del egresado, en el que establece que el ingeniero es capaz de utilizar (CESUES, 2002a, p. 4): “las computadoras para el análisis, diseño, simulación y control de dispositivos y circuitos eléctricos y electrónicos”.

Los planes curriculares en ambos programas presentan las mismas asignaturas en los primeros cinco períodos y no observamos ninguna orientación específica para cada carrera. Para la formación en matemáticas se establecen cuatro cursos iniciales: a) MAT103 Matemáticas para ingeniería, b) MAT104 Cálculo diferencial e integral, c) MAT105 Cálculo avanzado y, d) MAT106 Ecuaciones diferenciales. El primer curso se presenta básicamente como un repaso a las nociones fundamentales del álgebra, de la trigonometría y la geometría analítica. El curso de cálculo diferencial e integral por su parte, tiene como objetivo “proporcionar los conocimientos introductorios sobre el Cálculo para funciones de una variable, con la finalidad de obtener la derivada de funciones de varios tipos y la resolución de integrales utilizando diversas técnicas de integración”. En dicho objetivo no se menciona el desarrollo de habilidades en modelación matemática.

En el periodo 2006-1 se programó el curso de cálculo diferencial para los estudiantes de ingeniería industrial en dos horarios. El horario matutino es de 8:00 a 8:50 hr y el vespertino es de 17:00 a 17:50 hr. Ambos cursos se programan de lunes a viernes. Observamos que en el horario matutino se inscriben estudiantes regulares en su mayoría. El caso contrario lo encontramos en el horario vespertino. De acuerdo con la disponibilidad de los profesores para implementar nuestra didáctica, seleccionamos al grupo de este último horario como caso tradicional. En este grupo, el profesor imparte las clases de acuerdo con las instrucciones de la academia de matemáticas y su experiencia personal. El manual del curso sugerido por dicha academia, muestra una tendencia para la enseñanza con base en ejercicios básicos de cada tema, con una explicación conceptual mínima. El diseño del curso lo identificamos como el de una clase expositiva centrada en aprendizajes algorítmicos.

Para determinar los significados implementados en clase con respecto a la derivada, realizamos una observación no participante en los días 20, 22, 23, 27 de febrero y 1, 6 de

marzo. En tales días se presentó la noción de derivada, y se realizaron ejercicios con límites y reglas para derivar. El curso fue interrumpido frecuentemente por la asistencia del profesor a otros cursos de capacitación que promovió el mismo CESUES. Decidimos aplicar el análisis semiótico ontológico para configurar los significados implementados sólo a la clase del día 20 de febrero. Ello obedece a dos razones, una es que el análisis es complejo y detallado lo que hace impráctico extenderlo a más clases; la otra, es que en dicha clase se presenta la noción de derivada.

Con respecto a los estudiantes participantes, la matrícula fue de seis de los cuales tres llevaron cálculo en otras escuelas de ingeniería antes de inscribirse en el CESUES. Además se admitió un alumno de oyente, que según manifestó, quería repasar cálculo diferencial antes de entrar a cálculo avanzado. Realizamos la observación a través de audio y video grabación. La cámara de video se ubicó en la parte posterior del aula y una pequeña grabadora de audio en la parte frontal.

Después del periodo de observación todos los estudiantes fueron sometidos a tres exámenes: uno para conocer sus argumentaciones al solucionar ejercicios y un problema; un cuestionario sobre nociones propias de la comprensión relacional, y un examen que requirió modelar un problema para solucionarlo. Para analizar los resultados seleccionamos a tres estudiantes que a nuestro criterio, mostraron mayor interés en clase: Carlos, Raúl y Erick. Los dos primeros son repetidores que llevaron cursos de cálculo en otras universidades, y el último cursa cálculo por primera vez en el ámbito universitario. A continuación presentamos los resultados obtenidos en cada proposición del estudio.

### 7.2. *Comprensión relacional.*

La primer proposición que guía nuestro caso, es que la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación, favorecen la comprensión relacional y la construcción de significados como *modelo para* de la derivada. Nos apoyamos en el enfoque ontológico semiótico de Godino y Batanero (1997, 1998; Godino, 2003) para el análisis de la comprensión relacional lograda. Siguiendo dicho enfoque decidimos realizar el análisis a partir de tres fuentes de datos. La primera la constituyen los significados negociados en clase

con respecto a la derivada o *configuración epistémica*<sup>25</sup> implementada, de esta manera nos aproximamos a lo que se enseñó en el aula. La segunda fuente son los significados declarados por el estudiante al justificar sus acciones en un problema con la derivada. Con ello inferimos si la comprensión lograda es instrumental o relacional. La tercer fuente, son los significados que el estudiante es capaz de reconocer en un cuestionario sobre conceptos, propiedades y argumentos para la derivada con el enfoque hacia la modelación. Con base en los significados reconocidos por el estudiante inferimos si posee el andamiaje para una comprensión relacional con dicho enfoque. A partir de estas tres fuentes de datos comparamos los resultados obtenidos entre los dos casos y proponemos nuestras conclusiones.

**7.2.1. Configuración epistémica implementada.** Para analizar los significados negociados en el aula, utilizamos el modelo teórico que propone Godino (2003) y que denomina *análisis epistémico*. En dicho análisis, clasificamos la actividad del aula en seis tipos de prácticas: situaciones, acciones, conceptos, proposiciones, argumentos y lenguaje. Cada una de ellas origina una entidad primaria (o categoría) del significado. El análisis epistémico consiste entonces, en descomponer la actividad en tales entidades y determinar su secuencia o trayectoria. Godino llama *unidad epistémica* a cada parte de la actividad en que se negocia una sólo entidad primaria o categoría del significado, e identifica con el término *estado epistémico* al tipo de significado que muestra dicha unidad. En consecuencia, los seis estados posibles son (Godino, 2003, p. 184):

- E1: Situacional: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.
- E2: Actuativo: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.
- E3: Lingüístico: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.
- E4: Conceptual: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.
- E5: Proposicional: se enuncian e interpretan propiedades.
- E6: Argumentativo: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

---

<sup>25</sup> Conjunto de significados con relación a un concepto matemático que se agrupan en las categorías: significados lingüísticos, situacionales, actuativos, conceptos, propiedades y argumentos (Godino, 2003).

Con la trayectoria epistémica caracterizamos los significados implementados a través de la identificación de cada estado. Concordamos con Godino (2003) sobre la subjetividad presente al caracterizar una actividad como un estado epistémico, sin embargo, creemos que es posible lograr una caracterización aceptable. Para realizar el análisis epistémico descomponemos el texto en sus oraciones gramaticales con cierta flexibilidad, a cada una de ellas se le llama *unidad natural*. Estas oraciones o unidades son agrupadas para integrar un conjunto de oraciones en el que se negocia una entidad primaria. Dicho conjunto es una unidad epistémica para el que sugerimos un estado epistémico.

A su vez, las unidades epistémicas con sus correspondientes estados, son agrupados en otra unidad más global, que Godino (2003) llama *configuración epistémica*. De acuerdo con el análisis ontológico semiótico, dicha configuración se delimita con el inicio y terminación de una situación problema. Esto es, una configuración epistémica engloba la actividad desde el momento en que se presenta un problema hasta el momento en que se resuelve y se pasa a otro. Otro criterio para delimitar una configuración epistémica, es el carácter global de la discusión en que el profesor presenta una entidad primaria (comunicación personal, 24 enero 2007). En otras palabras, una configuración epistémica también es delimitada por el inicio y fin de una argumentación con un significado global, que corresponde a una sola entidad primaria.

Al caracterizar los significados implementados aplicamos el análisis epistémico a las transcripciones de la clase del 20 de febrero, en que el profesor explica la derivada como límite. Para ello, separamos el texto en unidades naturales, las cuales agrupamos en unidades epistémicas al identificar el inicio y fin de un estado epistémico. A su vez, las unidades epistémicas son agrupadas en configuraciones epistémicas que nos muestran el carácter global de la actividad analizada. Con base en dichas unidades epistémicas determinamos los significados implementados para la derivada en cada entidad primaria del significado. A continuación describimos cómo determinamos las primeras tres configuraciones epistémicas de las ocho que encontramos en esta clase. El lector interesado puede ver el análisis completo en el Apéndice E, así como la video filmación y transcripción de la clase en los Apéndices F y G respectivamente.

**Configuración epistémica uno.** Esta configuración es iniciada con la unidad epistémica uno (véase Tabla 8), al recordar el significado de recta tangente y de recta secante, y termina al reconocer que una parábola es la gráfica de una función de segundo grado.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
1-17	CE-1	1	Recordatorio del concepto de recta secante y recta tangente a una curva	E4: conceptual	Conceptual: Se pretende que los alumnos recuerden conceptos previos para introducir la noción de derivada.
18-23		2	Presentación gráfica de recta tangente y recta secante en una circunferencia	E3: lingüístico	
24-25		3	Recordatorio de que el grado de una función es determinado por su mayor exponente	E5: proposicional	
26-32		4	Reconocimiento de que la gráfica de una función cuadrática: $x^2 + 3x$ es una parábola	E5: proposicional	
33-34	CE-2	5	Planteamiento del problema de obtener la tangente a una parábola	E1: situacional	Conceptual: Se formula la derivada como una función que permite obtener la pendiente de la tangente a una curva.
35-47		6	Introducción de gráficas y notaciones para la variable independiente, su incremento y función $x, x + \Delta x, f(x)$	E3: lingüístico	
48-52		7	Introduce notación para el incremento en la función $[f(x + \Delta x) - f(x)]$	E3: lingüístico	
56-65		8	Se propone que la secante se convierte en tangente cuando el incremento tiende a cero	E5: proposicional	
66-67		9	Describe la acción para obtener la función que proporciona la inclinación o pendiente de la tangente	E2: actuativo	
68		10	Se introduce la fórmula para obtener la pendiente de la tangente: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	E3: lingüístico	
69-72		11	Se define la derivada como la función que proporciona la <i>pendiente de la tangente</i>	E4: conceptual	
73-82	CE-3	12	Descripción de situaciones en que es útil la derivada, equivocadamente menciona que sirve para obtener una velocidad media	E1: situacional	Situacional: Se pretende que los alumnos identifiquen situaciones que justifican el estudio de la derivada
83-92		13	Mención de la derivada como <i>velocidad en un punto</i> y su utilidad en problemas de optimización.	E1: situacional	
93-94		14	Se insiste en que la fórmula de la derivada proporciona una tangente	E4: conceptual	

Tabla 8. Trayectoria epistémica de la clase del 20 de febrero. 1ra. sección. Caso tradicional.

Creemos que en la primer unidad epistémica la trayectoria presenta un estado conceptual, al poner en juego la definición de recta secante y recta tangente. Observamos que la definición se limitó a los puntos de la circunferencia, y no a la curva que describe una función.

La segunda unidad epistémica nos sugiere un estado lingüístico en que es presentada la forma gráfica de describir los conceptos negociados. Esto es, el profesor dibuja la circunferencia con una recta secante y una tangente. Luego, él dirige la clase al tema de funciones en la tercer unidad epistémica, y afirma que el grado de una función es identificado por su exponente, aunque no aclara que debe ser el mayor, lo que puede generar conflictos semióticos.

En la cuarta unidad epistémica, se realiza un repaso de la propiedad gráfica de las funciones de segundo grado, como una curva parabólica. En este punto el profesor trata de asociar las funciones a sus curvas características como una propiedad con el ejemplo de la función de segundo grado  $x^2 + 3x$ . Estas cuatro unidades epistémicas las agrupamos en la configuración epistémica uno, y sugerimos que, de manera global tiene un carácter esencialmente conceptual, previo para la construcción del concepto de derivada. Pensamos que los principales significados negociados incluyen los conceptos de recta secante, recta tangente, grado de una función, representaciones notacionales y gráficas de funciones de segundo grado.

**Configuración epistémica dos.** De manera global en esta configuración se formula la derivada como la pendiente de la tangente a la curva y abarca de la unidad epistémica cinco a la 11. En unidad epistémica cinco es propuesto el problema de obtener la recta tangente a una parábola. En la seis, el profesor presenta la gráfica y las notaciones correspondientes. En la unidad epistémica siete, se introduce la notación para el incremento de la función. En la ocho, el profesor explica que la pendiente de la secante se transforma en la pendiente de la tangente a la parábola cuando el incremento tiende a cero. La expresión de un alumno: ¡órale! nos sugiere que se ha generado un acto de comprensión. En la unidad epistémica nueve, el profesor describe la acción para obtener la función de la pendiente a la curva, por lo que dicha unidad tiene un estado actuativo. En la diez, se formaliza la acción a través de la fórmula de la derivada como el límite de un cociente. En la unidad epistémica 11 se presenta un estado

conceptual, ya que el profesor define la derivada con dicha fórmula para una función de cualquier grado.

En esta configuración se formula el concepto de derivada sin mayor discusión por los alumnos. Entre los significados puestos en juego, encontramos la situación problema de determinar la tangente a una parábola, el uso de notaciones  $x$ ,  $f(x)$ ,  $\Delta x$ ,  $f(x + \Delta x)$ , la derivada como una fórmula para la pendiente de la tangente, y como un límite. De manera global, sugerimos un significado conceptual para esta configuración epistémica, ya que se pretende definir la derivada.

**Configuración epistémica tres.** Sugerimos un carácter esencialmente situacional para la configuración epistémica tres. El profesor menciona diversas situaciones problema en las que se utiliza la derivada para su solución, como una justificación para el estudio. En la unidad epistémica 12 el profesor pregunta a los estudiantes sobre el porqué aprender derivadas, él insiste en que los alumnos recuerden lo aprendido en preparatoria. En la unidad epistémica 13, el profesor expone la situación en que se requiere calcular la velocidad de un objeto en caída libre, como un caso de aplicación de la derivada. También él expone la situación en que se requiere minimizar el material de una lata como otro caso de aplicación, y menciona el ahorro de tiempo obtenido a través del cálculo como una justificación para su aprendizaje. En la unidad epistémica 14, el profesor insiste en situaciones en que la derivada proporciona la tangente a la curva.

Inferimos una configuración epistémica para la derivada (véase Tabla 9), a partir de los significados propuestos en las ocho configuraciones epistémicas que encontramos para esta clase. De acuerdo con Godino (2003) la comprensión instrumental de la derivada es definida por los significados implementados que corresponden a las categorías de situaciones y acciones. Así, la comprensión instrumental que debería haber logrado un estudiante en la clase reportada, implica identificar situaciones y realizar acciones para obtener la derivada de una función no contextualizada, así como de algunas situaciones de aplicación.

En cuanto a la comprensión relacional, ésta se define por los significados implementados que se encuentran en las categorías de conceptos, propiedades y argumentos. Para este caso los conceptos de recta secante, recta tangente y función constituyen el punto de partida para conceptualizar la derivada como la tangente a la curva. Así mismo, en cuanto a las

COMPONENTE PRACTICO (comprensión instrumental)	<b>SITUACIONES</b>	<b>ACCIONES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Determinar la tangente a una parábola o a una curva</li> <li>▪ Problemas descontextualizados para calcular la derivada de una función lineal, de una función cuadrática, de n grado</li> <li>▪ Problemas de optimización</li> <li>▪ Problemas para encontrar valores máximos o tasas de crecimiento poblacional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Obtención de una solución e interpretarla.</li> <li>▪ Aplicación de las reglas de derivadas.</li> <li>▪ Introducción de la función en la fórmula de derivada como límite.</li> <li>▪ Realización de procedimientos algebraicos de solución para la derivada como límite</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>CONCEPTOS</b>	<b>PROPIEDADES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Previos: <i>recta secante, recta tangente, función, grado de una función, parábola, límite de una función</i></li> <li>▪ Emergentes: <i>derivada como fórmula para la pendiente de la tangente a una curva, derivada como límite de una familia de secantes, derivada como promedio, como velocidad en un punto, como tangente a la curva. Reglas de derivación.</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Se obtiene cuando <math>\Delta x</math> tiende a cero.</li> <li>▪ Es el límite de un cociente.</li> <li>▪ Reglas de derivación como propiedades</li> </ul>
	<b>ARGUMENTOS</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Comprobación gráfica de que el límite de la secante es la pendiente de la tangente a la curva.</li> <li>▪ Comprobación procedimental de que la regla produce el mismo resultado que el procedimiento algebraico para la derivada como límite.</li> </ul>	
COMPONENTE DE DESARROLLO	<b>LENGUAJE</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Verbal: <i>Derivada: pendiente de la recta tangente a la curva, el límite de las secante cuando <math>\Delta x</math> tiende a cero. Método de los cuatro pasos.</i></li> <li>▪ Gráfico: <i>gráficas en las que se obtiene la pendiente de la recta tangente a una curva.</i></li> <li>▪ Simbólico: <math>x, f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} y' = 0; y' = nkx^n</math></li> </ul>	

Tabla 9. Configuración epistémica de la derivada. Caso tradicional.

propiedades, el estudiante debe comprender que la derivada se obtiene al reducir infinitamente los incrementos  $\Delta x$ , lo cual debe argumentar a través del uso de gráficas cartesianas. Encontramos que el profesor expone las reglas para derivar como una propiedad de los procedimientos algebraicos, y no como un argumento o demostración para encontrar un límite. Si un estudiante construye tales significados, debe ser capaz de presentar un discurso que los relacione.

Es decir, los significados negociados deben funcionar como una andamiaje en el estudiante, para saber qué hacer y por qué al solucionar un problema. Pero, ¿cómo sabemos que esto es así? Godino (2003) sugiere inferir la comprensión relacional lograda a partir del análisis de las argumentaciones dadas por el estudiante, y de sus respuestas a reactivos de evaluación sobre la comprensión de la noción. Ello lo reportamos en el apartado de significados declarados. Por último, las notaciones que el estudiante debe utilizar al expresar su comprensión, son incluidos en la categoría de lenguaje de la Tabla 9.

Al analizar las clases implementadas los días 22, 23, 27 de febrero, uno y seis de marzo, encontramos que sólo se realizan ejercicios para obtener la derivada como límite y se introducen otras reglas para derivar. Observamos que el profesor no profundizó en los aspectos conceptuales más allá de lo visto en la clase del día 20 de febrero, como se muestra en la Tabla 10. Consideramos por tanto, que la configuración epistémica para la derivada mostrada en la Tabla 9, es representativa de los elementos del significado implementados durante el período de observación.

**7.2.2. Significados declarados.** De acuerdo con Godino (2003) es posible inferir la comprensión personal de un estudiante, a partir del análisis de sus explicaciones al solucionar un problema o de sus respuestas en una evaluación sobre las características del objeto matemático. Por tanto, decidimos aplicar un examen sobre derivadas y un cuestionario adicional sobre comprensión. En el primero requerimos al estudiante justificar cada paso al solucionar dos ejercicios sencillos y un problema sobre derivadas. En el segundo evaluamos la capacidad del estudiante para reconocer significados propios de un enfoque hacia la modelación. Con ello evidenciamos la existencia del andamiaje de significados propios de la comprensión relacional con dicho enfoque.

FECHA	TEMA DESARROLLADO EN CLASE
22 de febrero	Comportamiento gráfico de las funciones: El profesor explica el comportamiento gráfico de funciones cuadráticas y lineales utilizando el software Derive 5. Muestra como éstas se indefinen en un punto dado señalando esta condición como un límite.
23 de febrero	Determinación del límite de una función. El profesor explica que hay funciones que no están definidas en un punto en forma directa, pero que aún así tienden a tomar un valor específico, conocido como el límite. Luego muestra acciones algebraicas para obtener el límite de una función. Dedicó el tiempo al desarrollo de ejercicios para obtener el límite.
27 de febrero	Determinación del límite de una función. El profesor proporciona una hoja con ejercicios para obtener el límite de una función que los alumnos resuelven en forma individual o en grupo. La interacción es prácticamente nula.
1 de marzo	Cálculo de derivadas utilizando reglas de derivación. Se repasa el método de obtención de la derivada a través del uso de límites. El profesor hace un recordatorio de las dos reglas de derivación vistas e introduce las reglas sobre la multiplicación y división de funciones. Presenta dos ejemplos y requiere a los alumnos que resuelvan ejercicios en el pizarrón. Deja dos ejercicios de tarea.
6 de marzo	Cálculo de derivadas utilizando reglas de derivación. El profesor pasa a dos alumnos a resolver los ejercicios de tarea. Aclara que se pueden seguir diferentes caminos algebraicos para aplicar las reglas y continúa con la realización de más ejercicios para aplicar las reglas de derivación.

Tabla 10. Desarrollo global de las clases. Caso tradicional.

El examen aplicado para analizar las justificaciones dadas por los estudiantes y sus resultados se muestran en el Apéndice H. Resumimos dichos resultados en la Tabla 11. En la primer columna se transcribe los ejercicios que se pidieron resolver. En la segunda, anotamos las acciones o pasos necesarios para solucionar cada ejercicio. En la tercer columna se anota la posible argumentación que justifica cada paso desde una comprensión relacional. Dicha argumentación la comparamos con la justificación dada por el estudiante y analizamos la evidencia de una comprensión relacional. Si en su justificación el estudiante proporciona una respuesta que refleja una comprensión relacional, la consideramos así aunque no coincida con la argumentación propuesta. En las columnas restantes mostramos el tipo de comprensión manifestada. Los resultados indican que los tres estudiantes poseen una comprensión instrumental. En cuanto a los ejercicios, Carlos manifiesta dicha comprensión en ocho posibles justificaciones, Raúl y Erick en seis. A diferencia de Carlos, estos últimos no definen la

Situación problema	Acción	Justificación (¿por qué?)	Comprensión <sup>1</sup>		
			Carlos	Raúl	Erick
3 a) Encuentre la derivada de las funciones: a) $f(x) = 6x^2$	a) Definir la derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $f'(x) = \text{tiic} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Necesitamos definir la derivada y realizar el procedimiento para obtenerla.	I	N	N
	b) Sustituir la función $f(x) = 6x^2$ en la definición de derivada	$f(x) = 6x^2$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	I
	c) Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	I
	d) Eliminar los términos con $\Delta x$ y obtener $f'(x)$ como el límite	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. Los términos $\Delta x$ se ignoran para identificar los <i>tiic</i>	I	I	I
3 b) $f(x) = x^3 - 2x$	a) Definir la derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $f'(x) = \text{tiic} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Necesitamos definir la derivada para poder calcularla	I	N	N
	b) Sustituir la función $f(x) = x^3 - 2x$ en la definición de derivada	$f(x)$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	I
	c) Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	I
	d) Eliminar los términos con $\Delta x$ y obtener $f'(x)$ como el límite	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. Los términos $\Delta x$ se ignoran para identificar los <i>tiic</i>	I	I	I

<sup>1</sup> Comprensión manifestada: I = instrumental; R = relacional; N = no manifestada (ninguna acción)

Tabla 11. Tipo de comprensión mostrada al argumentar ejercicios. Caso tradicional.

derivada como un paso inicial para resolver el ejercicio. Las justificaciones dadas por los tres estudiantes manifiestan que ninguno logra comprensión relacional. En cuanto a solucionar el problema, en la Tabla 12 mostramos los resultados sobre el tipo de comprensión manifestada.

Situación problema	Acción	Justificación (¿por qué?)	Comprensión <sup>1</sup>			
			Carlos	Raúl	Erick	
4) Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción $f(x) = -x^2 + 210x$ donde $x$ representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción / trabajador en un punto (ritmo de producción)	<b>a) Plantear el problema:</b>					
	1. Se pide el modelo para el ritmo de producción a partir de la producción: $f(x) = -x^2 + 210x$	Dentro del contexto del problema es necesario identificar lo que se pide en concreto	N	N	N	
	<b>b) Identificar variables y constantes:</b>					
	2. núm. de trabajadores $x$	Variable independiente	N	N	N	
	3. producción $f(x)$	Variable dependiente	N	N	N	
	4. ritmo de producción $f'(x)$	Variable dependiente expresada como razón de cambio de las otras dos variables.	N	N	N	
	<b>c) Relacionar variables:</b>					
	5. $f'(x)$ es el límite cuando $\Delta x$ tiende a cero o <i>tiic</i> de $[\Delta f(x)/\Delta x]$	La función del ritmo de producción es el límite o <i>tiic</i> de la razón de cambio promedio de la variable dependiente producción sobre la variable independiente núm. de trabajadores y se expresa con $f'(x)$ . Obtenemos el modelo $f'(x)$ al derivar la producción $f(x) = -x^2 + 210x$	I	N	N	
	<b>d) Formular el modelo matemático:</b>					
	6. Definir la derivada	Necesitamos definir la derivada para poder calcularla	N	N	N	
7. Sustituir $f(x) = -x^2 + 210x$ en definición de derivada	$f(x) = -x^2 + 210x$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	N		
8. Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	N		
9. Eliminar términos con $\Delta x$ para obtener el modelo: $f'(x) = -2x + 210$	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. O bien, se ignoran al considerar los <i>tiic</i>	I	I	N		
b) Determine el ritmo de la producción con 100 trabajadores	<b>e) Obtener una solución:</b>					
	10. Sustituir $x = 100$ en el modelo y calcular la solución	Utilizar el modelo construido para obtener una solución matemática al problema	I	I	N	

<sup>1</sup> Comprensión manifestada: I = instrumental; R = relacional; N = no manifestada (ninguna acción)

Tabla 12. Tipo de comprensión mostrada al argumentar en el problema. Caso tradicional.

En la primer columna se transcribe el problema a resolver. En la segunda, describimos diez acciones posibles para resolver el problema a partir de la actividad de modelación que resumimos en cinco etapas: a) plantear el problema, b) identificar variables y constantes, c) relacionar variables y constantes, d) formular el modelo, y e) obtener una solución.

La etapa de identificar variables implica identificar tres de ellas: la independiente, la dependiente y la expresada como razón de cambio; a su vez, etapa de formular el modelo, implica cuatro acciones más: definir la derivada, sustituir la función  $f(x)$ , realizar procedimientos algebraicos y eliminar términos con  $\Delta x$ . En la tercer columna se propone una justificación para cada acción. El resto de las columnas indica el tipo de comprensión que se sugiere manifiesta cada estudiante.

Al igual que en los ejercicios, encontramos que los tres estudiantes manifiestan una comprensión instrumental al solucionar el problema. Desde una perspectiva de modelación, ninguno de los tres estudiantes explicita acciones en las etapas de: a) plantear el problema, b) identificar variables y constantes, y c) relacionar variables. Observamos que sólo anotan acciones en las etapas de d) formular el modelo matemático y e) obtener una solución. Sin embargo, las justificaciones sólo se refieren al procedimiento para resolver un problema de derivadas.

De las diez acciones propuestas para solucionar el problema, Carlos sólo realiza cinco y manifiesta comprensión instrumental en sus justificaciones. Raúl realiza sólo cuatro acciones necesarias para derivar y obtener una solución, y sus justificaciones son de tipo instrumental. Erick no realiza ninguna acción. Observamos que los tres estudiantes no realizaron acciones típicas de las etapas iniciales de modelación, por lo que sugerimos que no forman parte de su estrategia para solucionar problemas de este tipo. De manera global encontramos que los Carlos, Raúl y Erick sólo manifiestan comprensión instrumental en las acciones que realizaron. Carlos muestra dicha comprensión en 13 de 18 posibles argumentaciones o el 72.2 por ciento. Raúl la manifiesta sólo en 10 argumentaciones o el 55.5 por ciento, y Erick en 6 o el 33.3 por ciento de las justificaciones.

Aplicamos un segundo examen para analizar la capacidad del estudiante en reconocer significados propios de un enfoque hacia la modelación. Nuestro objetivo es observar si los estudiantes poseen significados propios de la comprensión relacional con dicho enfoque. Los resultados indican que los estudiantes no poseen tal andamiaje. Antes de presentar dichos

resultados, presentamos nuestra manera de elaborar el cuestionario de comprensión. Sugerimos que el diseño de dicho cuestionario debe partir de la configuración epistémica de la derivada (véase Tabla 13) con los significados del enfoque hacia la modelación. En consecuencia, proponemos dicha configuración con base en las notas para el curso de cálculo diferencial que fueron elaboradas bajo la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación.

El cuestionario consta de 19 reactivos de opción múltiple, de los cuales, 13 examinan la comprensión relacional. Las respuestas incluyen significados de una enseñanza tradicional como la descrita en este caso, y del enfoque hacia la modelación. Sugerimos que un estudiante dispone de una comprensión relacional con dicho enfoque, si elige para sus respuestas los significados correspondientes. Esto es, si es capaz de reconocer significados del enfoque hacia la modelación en los conceptos, propiedades y argumentos examinados. El cuestionario elaborado se aplicó el ocho de mayo a los siete estudiantes que conformaron el grupo, luego se entrevistó a los tres estudiantes seleccionados sobre el por qué de sus respuestas. Con ello confirmamos la presencia en su estructura cognitiva de los significados elegidos.

Los resultados indican que los estudiantes disponen de mínimos significados de la comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación. En las últimas tres columnas de la Tabla 14 presentamos el tipo de significados elegidos por Carlos, Raúl y Erick. Identificamos con el número uno los significados que corresponden a un enfoque hacia la modelación y con el número cero los que no lo son. Observamos que Carlos reconoce el significado de un sólo concepto de los siete examinados, mientras que Raúl manifiesta disponer el significado de dos conceptos y Erick ninguno. En cuanto a las tres propiedades y los tres argumentos examinados ninguno de los tres estudiantes manifiestan disponer de significados con el enfoque hacia la modelación. Esto sugiere poca capacidad para comprender el por qué de las acciones desde una perspectiva de modelación.

COMPONENTE PRACTICO (comprensión instrumental)	<b>SITUACIONES</b>	<b>ACCIONES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Problemas contextualizados en los que se quiere determinar en un punto, la relación por unidad entre dos cantidades de variación.</li> <li>▪ Problemas descontextualizados sobre el cálculo de una razón de cambio en un punto o del cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva.</li> <li>▪ Situaciones de naturaleza continua.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Descontextualizar el problema a través de un planteamiento, identificación de variables y constantes, relaciones entre ellas y la formulación de un modelo.</li> <li>▪ Obtención de una solución e interpretarla.</li> <li>▪ Elaboración de dibujos o gráficas para representar y aclarar relaciones entre variables.</li> <li>▪ Aplicación de reglas de derivadas.</li> <li>▪ Realización de procedimientos algebraicos.</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>CONCEPTOS</b>	<b>PROPIEDADES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Previos: Modelo de, modelo para, razón por unidad, cantidad, unidad de medida, velocidad media, velocidad instantánea.</li> <li>▪ Emergentes: Punto en la continuidad, unidad de medida infinitesimal, razón de cambio promedio, razón de cambio en un punto, <i>tiic</i>, modelo para la relación a uno entre dos cantidades de variación, pendiente de la tangente a la curva, límite de la razón de cambio promedio, permanencia, razón de cambio como velocidad, relación por unidad</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Es constante para un punto.</li> <li>▪ Independencia del tamaño del intervalo.</li> <li>▪ Para funciones de segundo grado, hay <i>coincidencia</i> entre la razón de cambio promedio de un intervalo y la razón de cambio del punto central.</li> <li>▪ No se puede obtener directamente, se tiene que derivar a partir de una razón de cambio promedio, ya sea por los <i>tiic</i> o a través del límite.</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>ARGUMENTOS</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ A partir de la velocidad de un cuerpo en caída libre, comprobar que la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.</li> <li>▪ Comprobar que la velocidad promedio obtenida a partir de diferentes posiciones del punto <math>t</math>, incluye a la velocidad instantánea de dicho punto, misma que se puede identificar a través de los <i>tiic</i>.</li> <li>▪ Generalizar esta situación a cualquier función para obtener la razón de cambio en un punto.</li> </ul>	
COMPONENTE DE DESARROLLO	<b>LENGUAJE</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Verbal</i>: Derivada, relación a uno entre cantidades de variación, división de dos variaciones, razón de cambio en un punto, pendiente de la recta tangente a la curva, el límite de la razón de cambio promedio, términos independientes del tamaño del intervalo en el cociente de la razón de cambio promedio.</li> <li>▪ <i>Gráfico</i>: Dibujos sobre la razón de cambio en un punto, gráficas en que se muestra la pendiente de la recta tangente a la curva.</li> <li>▪ <i>Simbólico</i>: <math>v_p = s'(t_p) = \frac{s(t + (1 - k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}</math>, <math>f'(x_p) = f'(x + k\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}</math>,  <math>f(x), f(x_p), f'(x) = \text{ticc} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]</math> <math>f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]</math></li> </ul>	

Tabla 13. Configuración epistémica de la derivada con el enfoque hacia la modelación.

Entidad primaria	Noción	Pregunta	Significado declarado <sup>1</sup>		
			Carlos	Raúl	Erick
Conceptos	Modelo de	1	0	0	0
	Razón de cambio promedio	2	0	1	0
	Velocidad media	3	0	1	0
	Razón por unidad	4	0	0	0
	Punto	5	0	0	0
	Derivada como <i>modelo para</i>	7	0	0	0
	Relación a uno entre dos variaciones	11	1	0	0
Propiedades	Independencia del tamaño del intervalo	6	0	0	0
	De derivación de la razón de cambio en un punto	9	0	0	0
	Propiedad de <i>coincidencia</i>	10	0	0	0
Argumentos	Derivada como razón de cambio en un punto	15	0	0	0
	Demostración de $v_{(c)} = v_m$	16	0	0	0
	Importancia del punto de cálculo	17	0	0	0
Número de respuestas con significados del enfoque hacia la modelación:			1	2	0
Porcentaje respuestas con significados del enfoque hacia la modelación:			7.6	15	0

<sup>1</sup> Con el “uno” indicamos el significado declarado propio del enfoque hacia la modelación. Con “cero” indicamos un significado que no pertenece a dicho enfoque, o un significado no declarado.

Tabla 14. Significados de la comprensión relacional con un enfoque hacia la modelación. Caso tradicional.

### 7.3. La derivada y la realidad cotidiana.

La segunda proposición que guía nuestro estudio es que la didáctica propuesta para el aprendizaje de la derivada, acerca dicha noción a contextos de la realidad cotidiana. Nos pareció apropiado preguntar de manera directa sobre este punto, tanto en el cuestionario de comprensión como en la entrevista realizada para profundizar en las respuestas. Esto lo

realizamos en las preguntas 12 y 13 del cuestionario y son preguntas de tipo abierto. En la primera de ellas preguntamos al estudiante por dos ejemplos de la derivada que encuentre en su medio ambiente. En la segunda les pedimos dos contraejemplos, o sea, dos ejemplos que parecen de derivadas pero que no lo son. Creemos que las respuestas deben girar en torno a situaciones que implican la medición instantánea de una variable que expresamos con una razón de cambio. Resumimos los resultados obtenidos con Carlos, Raúl y Erick en la Tabla 15.

De manera global apreciamos que los estudiantes no identifican el uso de derivadas en situaciones cotidianas. Carlos y Erick no presentaron ningún ejemplo. Raúl proporcionó ejemplos correctos al responder con la velocidad y aceleración instantáneas en la pregunta 12. Sin embargo, estos ejemplos los escribió en una hoja aparte del cuestionario y al realizar la entrevista, afirmó que no encontró ejemplos. Tanto Carlos como Raúl provienen de otras escuelas de ingeniería y nos parece significativo el que no hayan proporcionado respuestas más completas.

Pregunta	Instrumento	Estudiante		
		Carlos	Raúl	Erick
Pregunta 12: Proporciona dos ejemplos de derivada	Cuestionario	Sin respuesta	Velocidad y aceleración instantáneas	Sin respuesta
	Entrevista	“No la ... [respondí]”	“Los ejemplos eso si no los encontré ... no los puse”	“No la contesté ... no encontré un ... [ejemplo]”
Pregunta 13 Proporciona dos ejemplos que parecen derivada pero no lo son	Cuestionario	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta
	Entrevista	“Ni la trece”	“Esa si no la puse ... no le encontré cómo .. qué pudiera ser”	“Tampoco ... [encontré un ejemplo]”

Tabla 15. Resultados sobre la derivada y la realidad. Caso tradicional.

Para profundizar en la importancia que tiene para los estudiantes el acercar la derivada a la realidad, a cada uno le preguntamos ¿cómo enseñarías cálculo? Las respuestas sugieren diversidad de intereses. Las respuestas de Carlos indican que no tiene una idea clara de la noción de derivada cuando afirma: “primero tendría que saber yo” o “no puedo decir la derivada es exactamente esto”. Sin embargo, Carlos identifica la utilidad de dicha noción para calcular valores máximos o mínimos. Encontramos también que él aboga por una enseñanza

tradicional: de la definición abstracta del concepto a la realización de ejercicios de aplicación. Dicha didáctica fue criticada por Freudenthal al proponer didácticas con base en actividades de matematización (Gravemeijer y Terwel, 2000). El lector puede encontrar la transcripción de esta parte de la entrevista para cada estudiante en el Apéndice I.

En el caso de Raúl nos parece que posee unos significados más completos y definidos para la derivada. Él se refiere a dicha noción como la pendiente de la tangente en lo gráfico y como razón de cambio al aplicarla a un problema. Así mismo, Raúl dice que enseñaría la derivada como “algo más práctico”, que pueda saber “cómo usarlo”. Entendemos que con estas expresiones Raúl se interesa por una derivada en mayor contacto con contextos cotidianos, y sugiere que la enseñanza debe ir en esta dirección.

La entrevista con Erick dio un giro en torno a los aspectos que le gustaría aprender. Él se interesa más por los aspectos teóricos evaluados a través del cuestionario, y afirma que son “cosas que no vemos”. La experiencia de Erick con el cálculo es más limitada que la de Carlos y de Raúl, ya que se limita a lo visto en preparatoria y a este curso en ingeniería industrial. Al preguntarle por la derivada como algo real, observamos que Erick asocia la realidad a la existencia física, y por tanto, para él la derivada es un razonamiento. Él se muestra incapaz de relacionar las velocidades instantáneas de la realidad física con la derivada. El interés de Erick por los aspectos teóricos sugiere que él da importancia a acercar derivada y realidad física, aún cuando no puede encontrar ninguna relación entre ellas. De acuerdo con estos datos, proponemos que los tres estudiantes tienen una percepción débil de la derivada como algo real.

#### **7.4. Habilidades de modelación.**

La tercer proposición que guía el estudio es que la didáctica propuesta promueve el desarrollo de habilidades de modelación. De acuerdo con la matemática en contexto y nuestros argumentos en el capítulo de la modelación en la escuela, las habilidades de modelación comprenden: a) plantear un problema, es decir, clarificar lo que se quiere lograr haciendo las suposiciones y simplificaciones pertinentes, b) Determinar las variables y constantes que describen el problema, c) identificar las relaciones entre tales variables y constantes, d) formular el modelo matemático y e) obtener una solución e interpretarla. En consecuencia,

pedimos a los estudiantes solucionar un problema para contar con indicadores de dichas habilidades.

De acuerdo con la matemática en contexto debemos utilizar un problema real tomado de la práctica de la ingeniería, o bien, real para el estudiante que lo solucionará. Ante la dificultad para encontrar un problema de la ingeniería adecuado para nuestro estudio, decidimos adaptar un problema de administración de inventarios (véase Apéndice D). Dicho problema requiere determinar como varían los costos totales para un tamaño específico de pedido o ritmo de variación del costo total de un componente de fabricación. En el problema se incluye información sobre las principales variables. Para resolverlo, el estudiante debe identificar el objetivo, las variables y sus relaciones, y construir un modelo matemático por medio de una derivada. Tomamos cada actividad como un indicador de las habilidades de modelación que posee un estudiante. De manera específica se analizan las siguientes habilidades:

- a) Plantear el problema: Identificar cuánto varía costo total anual para un tamaño de pedido específico o ritmo de variación de dicho costo. Esto es, obtener una razón de cambio (costo total anual/tamaño de pedido) en un punto.
- b) Determinar variables: el tamaño de pedido ( $Q$ ) es la variable independiente, el costo total anual ( $C_T$ ) es la variable dependiente, la segunda variable dependiente es la razón de cambio entre el costo total anual y el tamaño de pedido y se pide su valor instantáneo o ritmo de variación del costo. Otras variables son: costo de pedido para una orden ( $C_O$ ), costo anual de almacenamiento para un componente ( $C_A$ ), demanda anual ( $D$ ), inventario promedio ( $I_P$ ), costo anual por pedidos y costo anual de almacenamiento.
- c) Relacionar variables: El costo total anual ( $C_T$ ) es una variable dependiente del tamaño del pedido ( $Q$ ). El ritmo de variación del costo total anual ( $C'_T$ ) es la razón de cambio en un punto entre el costo total anual y el tamaño del pedido. El costo total anual ( $C_T$ ) es igual al costo anual por pedidos ( $C_{AP}$ ) más el costo anual por almacenamiento ( $C_{AA}$ ); a su vez, el costo anual por pedidos es igual al número de pedidos al año por el costo de cada pedido ( $\frac{D}{Q}C_O$ ) y el costo anual de

almacenamiento es igual al inventario promedio por el costo anual de almacenar una unidad ( $\frac{Q}{2}C_A$ ).

- d) Formular el modelo: Elaborar la función que modela el costo total anual:

$$C_T = \frac{D}{Q}C_o + \frac{Q}{2}C_A. \text{ Obtener la razón de cambio en un punto entre dicho costo y el}$$

$$\text{tamaño de pedido como una derivada: } C'_T = \frac{C}{2} - \frac{D}{Q^2}C_o$$

Esta parte de la investigación incluye la solución del problema de inventarios y una entrevista sobre los resultados mostrados. Aplicamos el examen y aclaramos las dudas sobre el mismo a los estudiantes. De manera adicional, el profesor del curso ofreció a los estudiantes diez puntos adicionales en la calificación, para interesarlos en solucionar el problema. Mostramos los resultados en la Tabla 16.

Los resultados anteriores los complementamos con una entrevista en la que pedimos a cada estudiante que explicara sus respuestas. Los resultados de Carlos nos parecieron contrarios a su desempeño en clase, ya que no escribió nada en su examen. En este caso, la entrevista nos proporcionó la mayor información. Con respecto a las habilidades de modelación, encontramos que Carlos no puede plantear el problema, como él afirma: “nomás no... no lo... no lo supe plantear”. A pesar de ello, observamos en sus respuestas que tiene una idea global de lo que se pidió. En relación con la habilidad de determinar variables, encontramos que Carlos identifica el tamaño del pedido como variable independiente y el costo total anual como variable dependiente, pero no identifica la variable dependiente expresada como razón cambio costo total anual / tamaño de pedido, para la cual, se desea determinar un valor instantáneo o ritmo de variación del costo total. Identificar estas tres variables es esencial para reconocer que es una situación que se soluciona con derivadas. Carlos discrimina el resto de las variables con excepción del costo anual por almacenamiento.

Con respecto a la habilidad de relacionar las variables, Carlos reconoce la dependencia que tiene el costo total anual del tamaño del pedido, pero no identifica que el ritmo de variación es la derivada de dicho costo. Con respecto al resto de relaciones que permiten solucionar el problema, observamos que Carlos pasó por alto que el inventario promedio es la mitad de la cantidad ordenada. Una vez superado este obstáculo, Carlos explica con claridad

Habilidades de modelación	Resultados <sup>1</sup>		
	Carlos	Raúl	Erick
<b>a) Plantear el problema:</b>			
Identificar como varía el costo total para un tamaño de pedido específico	0	0	1
<b>b) Determinar variables</b>			
Tamaño del pedido (Q) (variable independiente)	1	1	1
Costo total anual ( $C_T$ ) (variable dependiente)	1	1	1
Ritmo de variación del costo ( $C'_T$ ) o cómo varía el costo total anual / tamaño de pedido (segunda variable dependiente)	0	0	0
Costo anual de almacenar un componente ( $C_{AA}$ )	1	1	1
Demanda anual del componente (D)	1	1	1
Costo anual por pedidos ( $C_{AP}$ )	1	1	1
Costo anual por almacenamiento ( $C_{AA}$ )	0	1	1
Costo por ordenar un pedido ( $C_O$ )	1	1	1
<b>c) Relacionar variables</b>			
$C_T = C_{AA} + C_{AP}$	1	1	1
$C_{AP} = (D/Q)C_O$	1	0	1
$C_{AA} = (Q/2)C_A$	0	0	1
$C'_T =$ derivada de $C_T$	0	0	0
<b>d) Formular el modelo</b>			
$C_T = (Q/2)C_A + (D/Q)C_O$	0	0	1
$C'_T = C_A/2 - (D/Q^2)C_O$	0	0	0

<sup>1</sup> Identificamos con “uno” la acción realizada y con “cero” la acción nula.

Tabla 16. Habilidades de modelación. Caso tradicional.

cómo obtener el costo total. Con respecto a la habilidad de formular el modelo, Carlos no realiza ninguna de las dos tareas básicas: determinar la función o modelo del costo total y derivarlo para obtener el ritmo de variación de dicho costo. En resumen, Carlos manifiesta incapacidad en las habilidades de modelación. Sólo muestra cierta habilidad para identificar la variable independiente y la dependiente, habilidades insuficientes para solucionar situaciones

que implican derivadas. Esto porque Carlos no identifica la variable dependiente expresada como razón de cambio.

Al realizar la entrevista con Raúl para profundizar en la identificación de las habilidades mostradas, hallamos que él percibe algo de lo que se desea cuando afirma: “lo que yo entendí... es que ocupabas una ecuación para encontrar el *menor* costo”. Sin embargo, él no hace ningún planteamiento específico: “es que no le encontré así bien”. Pensamos que Raúl discrimina el problema como uno de máximos y mínimos, por lo que se interesa en una ecuación de costo para derivar y obtener el mínimo costo. En cuanto a la habilidad de determinar variables y constantes, encontramos que Raúl identifica dos variables independientes y una dependiente. Como variables independientes él reconoce el tamaño de pedido y el número de pedidos, y como variable dependiente, el costo total anual. Raúl falla en identificar la segunda variable dependiente expresada como razón de cambio costo total anual / tamaño de pedido. En consecuencia no identifica el ritmo de variación del costo total como lo que pide el problema. De cuatro relaciones necesarias para obtener el ritmo de variación del costo total, Raúl sólo relaciona que éste con la suma de los costos anuales por ordenar y de almacenamiento. En consecuencia, él es incapaz de relacionar el ritmo de variación con la derivada del costo total anual. Con respecto a la habilidad de formular el problema, Raúl solo formula una función de costo total anual incorrecta. Estos datos señalan pocas habilidades de modelación en Raúl.

Erick sólo escribe la función de costo total anual en el examen y no especifica las etapas de plantear el problema, determinar y relacionar variables, y formular el modelo. A pesar de ello, de los tres estudiantes Erick identifica correctamente lo que pide el problema: “saber cómo varía el costo total ... cuánto se incrementa o disminuye para el tamaño de ... de pedido dado”. Erick reconoce también que “siempre es difícil plantear algo... es la parte difícil de esto”. En relación con habilidad de determinar las variables, él reconoce el tamaño del pedido como variable independiente y el costo total anual como variable dependiente, pero al igual que Carlos y Raúl, falla en identificar la variable dependiente expresada como razón de cambio. En cuanto al resto de las variables necesarias para solucionar el problema, Erick las reconoce todas.

Erick discrimina las relaciones entre el costo total anual, el costo anual por ordenar y el costo anual de almacenamiento. Él falla en reconocer que el ritmo de variación del costo total

es la derivada del costo total anual, y por lo tanto, no resuelve el problema. Erick manifiesta mayor habilidad para formular el modelo que sus compañeros, ya que elabora la función de costo total anual, aunque no la derivó para resolver el problema. De acuerdo con estos resultados, Erick muestra habilidad para plantear el problema, menor habilidad para identificar las variables de una situación típica de derivadas. Así mismo, él muestra habilidad para relacionar las variables y en menor grado, la habilidad para formular el modelo matemático. En el siguiente capítulo mostramos los resultados del caso de la matemática en contexto. Ellos se obtuvieron con los mismos instrumentos descritos en el caso tradicional y en la mayor parte, se presentan los resultados de ambos casos juntos para facilitar su comparación.

**Sumario.** En el presente capítulo hemos visto el contexto en que estudiamos el caso tradicional. En dicho contexto elegimos para nuestro estudio, al grupo vespertino que lleva el curso de cálculo diferencial en el período 2006 – 1, dicho grupo forma parte del tronco común del programa de ingeniero industrial e ingeniero industrial en electrónica. Tales programas se encuentran en el CESUES unidad San Luis Río Colorado. El aprendizaje de la modelación matemática en ambas carreras no lo encontramos explícitamente definido, y se hace referencia indirecta en otros documentos como el campo de trabajo y el perfil del egresado. Por su parte, el curso de cálculo diferencial pretende proporcionar sólo conocimientos introductorios para funciones de una variable. La enseñanza en dicho curso es de tipo tradicional centrado en la exposición y solución de ejercicios, con un papel expositivo por parte del profesor y pasivo por parte de los alumnos. Realizamos una observación no participante, audio y video grabamos las clases, y analizamos los significados negociados con el enfoque ontológico semiótico. Elegimos para dicho análisis la clase en que se introdujo la noción de derivada.

Para evaluar los efectos de nuestra propuesta didáctica en la comprensión relacional, determinamos la configuración epistémica implementada para la noción de derivada. En ella caracterizamos los significados que forman el andamiaje de la comprensión relacional. Para inferir el tipo de comprensión lograda por los estudiantes, aplicamos un examen en que les pedimos justificar sus acciones al solucionarlo. Encontramos una comprensión instrumental en la mayor parte de sus justificaciones. También aplicamos un cuestionario sobre comprensión, copara evaluar la disponibilidad de significados propios del enfoque hacia la modelación. Inferimos que no disponen de tales significados.

La percepción de los estudiantes sobre la derivada como objeto matemático en contacto con la realidad, decidimos inferirla a través de preguntas directas en el cuestionario de comprensión. En él, pedimos ejemplos de situaciones cotidianas en que se utiliza la derivada y dos contra ejemplos, o situaciones que aparentemente implican derivadas pero que no lo hacen. Encontramos que Carlos no tiene una idea clara de la noción, Raúl se interesa por didácticas que pongan la derivada en mayor contacto con la realidad, al igual que Erick. En resumen, inferimos una débil percepción de la derivada como algo real.

Por último, mostramos la manera en que obtenemos indicadores de las habilidades de modelación de cada estudiante. Para esto, pedimos a cada uno de ellos solucionar un problema de administración de inventarios que requiere determinar un ritmo de variación del costo. Encontramos que sólo Erick mostró habilidad para plantear el problema, y en menor grado, habilidades para determinar variables, relacionarlas y formular el modelo. Ninguno de los tres estudiantes es capaz de reconocer la variable dependiente que expresamos como razón de cambio, y que es esencial para identificar una situación típica de derivadas.

## VIII. Resultados: Caso de la matemática en contexto

En el capítulo anterior describimos los principales hallazgos de nuestro estudio para el caso tradicional. En el presente capítulo proporcionamos los resultados del caso de la matemática en contexto. Estos se describen en la misma secuencia de las proposiciones del estudio, pero agregamos los resultados del caso tradicional para efectos de comparación. De igual forma que en el capítulo anterior, el lector encontrará en los apéndices mayor detalle de los resultados que aquí se presentan.

En esta sección presentamos el caso de la matemática en contexto de manera similar al caso tradicional, esto es, presentamos el contexto y los resultados obtenidos. Estos últimos los describimos en secciones acordes a las proposiciones del estudio: comprensión relacional, derivada y realidad, y habilidades de modelación.

### 8.1. El contexto.

En el periodo 2006-1 se programa el curso de Cálculo diferencial para ingeniería industrial de lunes a viernes en horarios de 8:00 a 8:50 hr. y de 17:00 a 17:50 hr. Seleccionamos el grupo del horario matutino para implementar nuestra propuesta didáctica. La principal razón para ello, fue la disposición positiva del profesor. Sin embargo, éste pertenece al área de agronomía y manifestó que tenía cerca de tres años sin impartir la asignatura. Su designación como profesor del curso se debió a cuestiones de tipo administrativo, y al hecho de que varios profesores estén realizando estudios de posgrado. Ante esta situación implementamos nuestra propuesta personalmente bajo una observación de tipo participante. Las sesiones fueron audio y video grabadas con una cámara colocada al fondo del aula y una grabadora al frente de la misma.

El grupo a observar se integró por 19 estudiantes, en su mayoría, jóvenes provenientes de preparatoria que llevarían su primer curso de cálculo diferencial en la universidad. El profesor les explicó que después del tema de funciones, verían un material nuevo, parte de una investigación para el aprendizaje de la derivada. Esta duraría de dos a tres semanas y sería impartido por otro profesor. Nuestra propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la derivada consta de dos partes: a) una introductoria a los modelos matemáticos y a las

operaciones básicas con este enfoque. Con ello pretendemos que el estudiante construya un andamiaje para acceder a la derivada, y b) una parte dedicada al aprendizaje de la derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. La primera parte de la intervención se realizó del 13 al 28 de febrero y la segunda parte, se implementó del uno al 22 de marzo, tiempo en el que se desarrollaron diez sesiones.

Al inicio de la intervención no se ofreció ningún estímulo adicional al alumno y el material se presentó como algo extra. Pensamos que esto fue causa de un interés menor en el estudio y el aprendizaje. Al comentar esta situación casi al final de la intervención, el profesor decidió asignarle participación en la calificación. Con ello esperamos motivar el interés natural para un curso. Para el análisis de los resultados elegimos un equipo de cuatro alumnos que identificamos como Gaby, Cristy, Juan y José para cuidar su verdadera identidad. Les seleccionamos porque observamos en ellos interés por el aprendizaje, así como una asistencia y participación mayor que el resto del grupo. Las clases fueron video grabadas por el profesor del curso y el contenido temático propuesto sufrió algunas modificaciones sobre la marcha.

De acuerdo con la matemática en contexto, para iniciar un tema se elige un problema de la ingeniería, y lo resolvemos en un proceso de modelación. Iniciar el estudio de las operaciones básicas en dichas condiciones es complejo. Decidimos por tanto, utilizar las etapas de la matemática en contexto como un procedimiento para solucionar problemas con modelación matemática. Pensamos que esto familiariza al estudiante con un marco de referencia para solucionar problemas vía modelación. Pretendimos que dicho marco funcionara como andamiaje en la segunda parte de nuestra propuesta, al estudiar la derivada. Enfocamos el análisis de los efectos en la comprensión relacional y habilidades de modelación en esta segunda parte de la intervención didáctica, debido a la complejidad del análisis. En las siguientes secciones sugerimos la configuración epistémica implementada para la derivada, los significados declarados con respecto a la comprensión relacional, así como las habilidades de modelación manifestadas por los estudiantes.

### **8.2. Comprensión relacional.**

En las proposiciones de nuestro estudio sugerimos que la didáctica de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación favorece la comprensión relacional de la derivada. En la esta tiene un significado de *modelo para* la razón de cambio en un punto o relación a

uno entre dos cantidades de variación en un punto. Esto nos lleva a analizar los significados implementados y declarados por los estudiantes en las categorías de conceptos, proposiciones y justificaciones para la noción de derivada. Al identificar dichos significados contamos con un indicador sobre el andamiaje de que dispone un estudiante en comprensión relacional.

**8.2.1. Configuración epistémica implementada.** Ante la complejidad que implica realizar un análisis epistémico para caracterizar los significados implementados de cada clase de la intervención didáctica, describimos en la Tabla 17 los temas de las primeras ocho sesiones. El análisis epistémico sólo lo realizamos para la clase del 16 de marzo en que se estudia la noción de derivada. Para esto, separamos el texto en unidades naturales, y con base en el significado que transmiten, las agrupamos en unidades epistémicas. Cada una de ellas presenta un estado epistémico. Todas las unidades epistémicas que transmiten un significado global, las agrupamos en configuraciones epistémicas. Con base en ellas, es posible proponer la configuración epistémica implementada de la derivada. A continuación describimos las primeras tres configuraciones epistémicas que encontramos para la clase del 16 de marzo, el resto, puede revisarse en el Apéndice J.

Fecha	Tema desarrollado en clase
1 de marzo	Presentación del problema y filmación de una caída libre
2 de marzo	Obtención de datos de posición
7 de marzo	Obtención de la velocidad media
8 de marzo	Razón de cambio promedio y en un punto
9 de marzo	Relación entre velocidad promedio y en un punto
13 de marzo	Demostración de $v_m = v_{ic}$
14 de marzo	Determinación del modelo para velocidad en un punto
15 de marzo	Identificación de los términos independientes del intervalo

Tabla 17. Contenidos implementados del uno al 15 de marzo. Caso matemática en contexto.

**Configuración epistémica uno.** Esta configuración se inicia con el recuerdo de la tarea pendiente, a la que hemos identificado como la primer unidad epistémica (véase Tabla 18). Consideramos que la trayectoria presenta un estado situacional al presentar un problema pendiente a resolver, el de obtener la velocidad del punto medio  $v_{ip}$  en términos de las variables y constantes  $t$ ,  $k'$ ,  $k$  y  $\Delta t$ . El propósito didáctico es que la velocidad en el punto de cálculo  $t$  sea identificable en  $v_{ip}$ . El hecho de que los alumnos no hayan trabajado origina la segunda unidad epistémica en el que se desarrollan las acciones para obtener  $v_{ip}$ , por lo que proponemos un estado actuativo.

Proponemos como tercer unidad epistémica el periodo en que obtenemos la velocidad del punto medio a partir de una función de posición  $s(t)$ . Dicha velocidad es una función semiótica de la razón de cambio. Sugerimos un estado de tipo lingüístico para esta unidad. En la cuarta unidad epistémica, de naturaleza proposicional, justificamos la propiedad de independencia de la velocidad  $v_t$  del tamaño del intervalo  $\Delta t$ . Tal velocidad la identificamos con los términos que no varían en el cociente de la razón de cambio promedio y se introduce la notación *tiic* para referirse a dichos términos. Finalmente, proponemos una quinta unidad de tipo lingüístico para la primer configuración epistémica. En dicha unidad introducimos las expresiones con que se generaliza la velocidad  $v_{ip}$  como una razón de cambio, obtenida a partir de cualquier función de posición  $s(t)$ . Proponemos que la configuración epistémica que engloba estas cinco unidades presenta un carácter global de tipo conceptual. En tal configuración identificamos la velocidad  $v_t$ , a partir de la velocidad del punto medio, obtenida como razón de cambio promedio.

**Configuración epistémica dos.** Identificamos esta configuración con un carácter global de tipo proposicional. En ella sostenemos que la razón de cambio promedio tal como se define en la derivada como límite, proporciona la velocidad del punto medio y no la velocidad del punto  $t$  que deseamos determinar. Integramos esta configuración con las unidades epistémicas seis, siete y ocho. En la sexta unidad encontramos un estado proposicional cuando explicamos que la velocidad en el punto  $t$ ,  $v_t$ , se identifica en la velocidad del punto medio  $v_{ip}$ , sin importar la posición del punto  $t$  en el intervalo  $\Delta t$ . En la séptima unidad epistémica interpretamos la razón de cambio como la velocidad del punto medio  $v_{ip}$  obtenida a partir del punto de cálculo  $t$ , ubicado al inicio del intervalo  $\Delta t$ . Para esta unidad proponemos un estado conceptual.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
1-10		1	Recordatorio a los alumnos que iban a obtener la velocidad $v_{pp}$ en términos de $t$ , $k$ , $k'$ , y $\Delta t$	E1: situacional	Conceptual: Se formula como identificar $v_t$ a partir de $v_{pp}$ a través de los <i>tiic</i> (y sus significados como razones de cambio).
11-32		2	Se obtiene la velocidad $v_{pp}$ en términos de $t$ , $k$ , $k'$ , y $\Delta t$	E2: actuativo	
33-39	CE-1	3	Se presenta $v_{pp}$ como la razón $s'(t)$ obtenida a partir de la función de posición $s(t)$	E3: lingüístico	
40-43	8:17:57 a 8:24:40	4	Se señala la propiedad de independencia del tamaño del intervalo como una forma de identificar $v_t$ y se introduce la expresión <i>tiic</i>	E5: proposicional	
44		5	Se introduce la notación general para calcular $v_{pp}$ como una razón de cambio obtenida a partir de una función de posición $v_{pp} = s'(t_p) = \frac{s(t + (1 - k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}$	E3: lingüístico	
45-62		6	Se explica que $v_t$ se puede identificar en $v_{pp}$ calculada a partir de $t$ sin importar su posición dentro de $\Delta t$	E5: proposicional	Proposicional: Se explica que la razón de cambio promedio proporciona la velocidad del punto medio y no la del punto de cálculo
63-91	CE-2 8:24:40 a 8:31:18	7	Se interpreta $v_{pp}$ como $\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ cuando se calcula con el punto $t$ al inicio del intervalo, por su semejanza con la fórmula de la derivada como límite	E4: conceptual	
92-94		8	Se generaliza el concepto y se introduce la notación para cualquier función y variable $f'(x_p) = f'(x + k\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	E3: lingüístico	
73-82		9	Se insiste en como poder identificar $v_t$ a partir de $v_{pp}$ y los alumnos manifiestan no entender la pregunta	E1: situacional	Conceptual: Se formula la razón de cambio en un punto de manera general
83-92		10	Se recuerda entonces el problema de la caída libre como un ejemplo donde se puede identificar $v_t$ ya que $v_{pp} = v_{lc}$	E1: situacional	
93-94	CE-3	11	Se explican de nuevo las nociones de $t_p$ , $t$ y $v_{pp} = v(t + k'\Delta t)$	E4: conceptual	
95-102	8:32:33 a 8:42:23	12	Se vuelve al problema y se indica que se quiere identificar $v_t$ a partir de $v_{pp}$	E1: situacional	
103-107		13	De nuevo se explica como obtener $v_t$ a través de los <i>tiic</i> utilizando el problema de la caída libre	E2: actuativo	
108-117		14	Se introduce una expresión general para obtener la razón de cambio en un punto $x$ : $f'(x) = \text{ticc} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$	E3: lingüístico	

Tabla 18. Primeras tres configuraciones epistémicas de la clase del 16 de marzo. Caso matemática en contexto.

Finalmente, en esta configuración identificamos una octava unidad epistémica con un estado lingüístico. En esta unidad deducimos la expresión con que generalizamos la derivada del punto medio, como una razón de cambio promedio entre la variación de la función y la variación de la variable. Expresamos que dicha derivada contiene la derivada del punto  $x$  y su diferencia con la derivada del punto medio  $x_p$ .

**Configuración epistémica tres.** Esta configuración está integrada por las unidades epistémicas de la nueve a la 14. En ellas exponemos que la razón de cambio promedio con el punto de cálculo al inicio, es la razón de cambio del punto medio, y argumentamos la manera de identificar la razón de cambio en un punto a través de los *tiic*. Por tanto, proponemos un significado global conceptual para esta tercer configuración epistémica.

Proponemos que la novena unidad tiene un estado epistémico situacional, ya que insistimos en identificar la velocidad  $v_t$  a partir de la velocidad  $v_{tp}$  calculada con la razón de cambio promedio. Los estudiantes manifiestan no entender la pregunta y procedemos entonces a recordar cómo obtener la velocidad en un punto a partir del problema de la caída libre. El recuerdo origina la unidad diez, también con un estado situacional. Ahí recordamos que el punto de cálculo está al centro del intervalo y que esto sólo ocurre con funciones de segundo grado. En la unidad 11 establecemos que para funciones de otro grado es necesario introducir la noción de punto medio, y repasamos lo pertinente de la configuración epistémica anterior. Así mismo recordamos las nociones de punto de cálculo  $t$ , velocidad del punto medio  $v_{tp}$  como la velocidad de  $t + k'\Delta t$ . Para esta unidad 11 proponemos un estado epistémico conceptual.

Proponemos la unidad 12 con un estado situacional, cuando de nuevo insistimos en que el problema es identificar la velocidad del punto  $t$  o  $v_t$ , para situaciones en que el punto de cálculo  $t$  no coincide con el punto medio  $t_p$ . La unidad 13 la iniciamos al explicar de nuevo como obtenemos la velocidad del punto  $t$  a través de los *tiic* en la razón de cambio promedio con  $t$  al inicio del intervalo, tal como está definida en la derivada. Proponemos un estado actuativo para esta unidad, ya que mostramos las acciones con que obtenemos la velocidad del punto  $t$ . Finalmente, proponemos la unidad epistémica 14 con un estado lingüístico cuando expresamos de manera general, la razón de cambio en un punto obtenida con los *tiic*. Observamos una didáctica expositiva en esta tercer configuración epistémica.

A partir del análisis epistémico de la clase del 16 de marzo, encontramos una trayectoria epistémica con cinco configuraciones. Con base en ellas proponemos la configuración epistémica implementada para la derivada de la Tabla 18.

**8.2.2. Significados declarados.** Recordaremos que de acuerdo con Godino (2003) la comprensión relacional se infiere a través de las explicaciones dadas por el estudiante al justificar sus acciones, o a través del uso de un examen sobre comprensión. En consecuencia, aplicamos los dos instrumentos que utilizamos en el caso tradicional para inferir la comprensión lograda en el grupo de la matemática en contexto (véanse Apéndices B y C). El 5 de abril se aplica el primer instrumento, en él pedimos al estudiante que justifique sus acciones al resolver dos ejercicios y un problema con derivadas. Para el análisis seleccionamos a cuatro alumnos, Gaby, Cristy, Juan y José, que a nuestro criterio mostraron mayor interés en el aprendizaje (Ausubel, 2002). Resumimos los resultados encontrados en la Tabla 20. El segundo instrumento es el cuestionario sobre comprensión relacional con un enfoque hacia la modelación. Con dicho cuestionario inferimos la presencia de un andamiaje de significados con dicho enfoque, propios de la comprensión relacional. El 24 de abril aplicamos tal instrumento al grupo de la matemática en contexto. El lector interesado puede revisar los exámenes de los estudiantes en el Apéndice K.

En el primer instrumento o el examen para analizar las justificaciones dadas por los estudiantes, para el caso de la matemática en contexto encontramos que la mayor parte de ellos muestra una comprensión instrumental. Uno de alumnos no realizó ninguna acción, dos manifiestan una comprensión instrumental en casi todas sus acciones y una manifiesta una comprensión relacional en la mitad de ellas. Esto último es el caso de Gaby. Ella proporciona una justificación global y afirma que la derivada se obtiene a partir de su definición, en la que “ $h$  tiende a cero”, lo que “quiere decir que existe una razón de cambio, y que la función tiene un límite”. Proponemos que esta afirmación implica una comprensión relacional para la primera y última acción sugerida para resolver cada ejercicio (véase Tabla 20). Sin embargo, dicha comprensión no corresponde a un enfoque de modelación, por lo que no se considera en los resultados globales de la Tabla 22.

COMPONENTE PRACTICO (comprensión instrumental)	<b>SITUACIONES</b>	<b>ACCIONES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Problemas contextualizados en los que se quiere determinar velocidad media, instantánea, (<math>v_m, v_p, v_t, s'(t)</math>) como razones de cambio con funciones de segundo grado</li> <li>▪ Problemas descontextualizados en los que se quiere determinar velocidad media, instantánea, (<math>v_m, v_p, v_t, s'(t)</math>) como razones de cambio con funciones de tercer grado a partir de los <i>tiic</i>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Descontextualizar el problema a través de un planteamiento,</li> <li>▪ Identificación de variables y constantes, de relaciones entre ellas</li> <li>▪ Formulación de un modelo para velocidades medias e instantáneas (<math>v_m, v_p, v_t, s'(t)</math>) como razones de cambio con funciones de segundo o tercer grado a través de los <i>tiic</i></li> <li>▪ Cálculo de velocidades instantáneas</li> <li>▪ Elaboración de dibujos o gráficas para aclarar y representar relaciones entre variables.</li> <li>▪ Realización de procedimientos algebraicos y cálculos en calculadora, etc.</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>CONCEPTOS</b>	<b>PROPIEDADES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Previos</i>: Modelos y sus tipos, modelos matemáticos, la operaciones básicas como modelos para, razón por unidad, cantidades, unidades de medida, velocidad media e instantánea.</li> <li>▪ <i>Emergentes</i>: punto en la continuidad, punto de cálculo, punto medio, velocidad media como razón de cambio promedio y como velocidad del punto central, velocidad del punto medio <math>v_{pm}</math>, razón de cambio promedio, razón de cambio en un punto, derivada como <i>tiic</i>, modelo para la relación a uno entre dos cantidades de variación. La pendiente de la tangente a una curva.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Propiedad de independencia del tamaño del intervalo.</li> <li>▪ <math>v_t</math> se puede identificar en <math>v_{pm}</math> independientemente de su posición dentro de <math>\Delta t</math></li> <li>▪ Propiedad de coincidencia <math>f'(x) = f'(x_c)</math></li> <li>▪ No se puede obtener directamente, se tiene que <i>derivar</i> de una razón de cambio promedio, ya sea por medio de los <i>tiic</i> o del límite.</li> </ul>
	<b>ARGUMENTOS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ A partir de la velocidad de un cuerpo en caída libre, comprobar que la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.</li> <li>▪ Justificar que la velocidad se puede considerar como una razón de cambio.</li> <li>▪ Comprobar que la velocidad promedio obtenida a partir de diferentes posiciones de un punto <math>t</math>, incluye a la velocidad instantánea de dicho punto, misma que se puede identificar a través de los <i>tiic</i>.</li> <li>▪ Generalizar esta situación a cualquier función para obtener la razón de cambio en un punto.</li> <li>▪ Comprobación gráfica de que el límite de la razón de cambio promedio es la pendiente de la tangente a la curva.</li> </ul>
COMPONENTE DE DESARROLLO	<b>LENGUAJE</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <i>Verbal</i>: Derivada, relación a uno entre cantidades de variación, razón de cambio en un punto, pendiente de la recta tangente a la curva, el límite de la razón de cambio promedio, términos independientes del tamaño del intervalo en el cociente (<i>tiic</i>) de la razón de cambio promedio.</li> <li>▪ <i>Gráfico</i>: Dibujos en los que se esquematizan las razones de cambio en un punto, gráficas en las que se obtiene la pendiente de la recta tangente a una curva.</li> <li>▪ <i>Simbólico</i>: <math>f(x), f(x_p), v_{tp} = s'(t_p) = \frac{s(t + (1-k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}</math>,  <math>f'(x_p) = f'(x + k \cdot \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}</math>,  <math>f'(x) = \text{tiic} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]</math></li> </ul>	

Tabla 19. Configuración epistémica de la derivada. Caso matemática en contexto.

Situación problema	Acción	Justificación (¿por qué?)	Comprensión <sup>1</sup>						
			C. Trad.			C. M en C.			
			Carlos	Raúl	Erick	Gaby	Cristy	Juan	José
3 a) Encuentre la derivada de las funciones: a) $f(x) = 6x^2$	a) Definir la derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $f'(x) = \text{tiic} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Necesitamos definir la derivada y realizar el procedimiento para obtenerla.	I	N	N	R	I	N	N
	b) Sustituir la función $f(x) = 6x^2$ en la definición de derivada	$f(x) = 6x^2$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	I	I	I	I	N
	c) Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	I	I	I	I	N
	d) Eliminar los términos con $\Delta x$ y obtener $f'(x)$ como el límite	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. Los términos $\Delta x$ se ignoran para identificar los <i>tiic</i>	I	I	I	R	I	I	N
3 b) $f(x) = x^3 - 2x$	a) Definir la derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $f'(x) = \text{tiic} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Necesitamos definir la derivada para poder calcularla	I	N	N	R	I	N	N
	b) Sustituir la función $f(x) = x^3 - 2x$ en la definición de derivada	$f(x)$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	I	I	I	I	N
	c) Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	I	I	I	I	N
	d) Eliminar los términos con $\Delta x$ y obtener $f'(x)$ como el límite	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. Los términos $\Delta x$ se ignoran para identificar los <i>tiic</i>	I	I	I	R	I	I	N

<sup>1</sup> Comprensión manifestada: I = instrumental; R = relacional; N = no manifestada (ninguna acción)

Tabla 20. Tipo de comprensión mostrada al argumentar ejercicios. Ambos casos.

Gaby no proporciona ninguna justificación en el resto de las acciones para solucionar los ejercicios, sin embargo realiza cada una de ellas. Es decir, ella manifiesta una comprensión instrumental, esto es, que “sabe hacer” las acciones para resolver los ejercicios. Cristy muestra

una comprensión instrumental en todas sus justificaciones al solucionar los ejercicios. Ella realiza seis acciones o pasos de solución y proporciona una justificación detallada de cada uno. Sin embargo tales justificaciones son operativas, esto es, ella dice lo que se debe hacer, pero no por qué. Un ejemplo de sus justificaciones es “sustituir en la fórmula de la derivada, todo lo que valga  $x$  en la función, se va a sustituir en la fórmula”.

Juan proporciona un argumento global para todas sus acciones al igual que Gaby, pero menos detallado. Él escribe la frase: “porque es la razón de cambio en un punto” como única justificación para los pasos realizados. Proponemos que dicha justificación manifiesta una comprensión instrumental, ya que es una explicación insuficiente del por qué de cada acción. Juan no realiza la primer acción propuesta para resolver los ejercicios pero sí el resto. En el caso de José, encontramos que éste no realizó ninguna acción.

En las justificaciones dadas por los estudiantes al resolver el problema 4, inferimos que Gaby muestra mayor comprensión relacional que sus compañeros (véase Tabla 21). Esto es, ella dice el por qué en siete de diez acciones realizadas. Por su parte, Cristy sólo explica el por qué en una de sus acciones, Juan no dice el por qué de sus acciones y José no realiza ninguna acción. Desde otra perspectiva, Gaby es la única que explicita sus acciones en etapas de modelación y las describe como “planteamiento del problema”, “variables y constantes”, “relaciones” y “solución”.

Gaby proporciona una justificación global que nos sugiere que ella comprende lo que debe hacer y el por qué al solucionar un problema. En dicha justificación ella señala que el problema pide determinar la razón de cambio “producción / trabajador” (productividad) en un punto y valorarla cuando el número de trabajadores es 100. Gaby también identifica las variables producción y número de trabajadores. Además, en su justificación, ella escribe que la razón de cambio en un punto es la derivada de la función de producción obtenida con los *tiic*. Con base en dicha justificación pensamos que ella sabe el por qué de sus acciones al plantear el problema, identificar variables, relacionarlas, y al formular el modelo. Esto es, proponemos que Gaby muestra comprensión relacional.

Situación problema	Acción	Justificación (¿por qué?)	Comprensión <sup>1</sup>						
			C. Trad.			C. M en C.			
			Carlos	Raúl	Erick	Gaby <sup>2</sup>	Cristy	Juan	José
4) Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción $f(x) = -x^2 + 210x$ donde $x$ representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción / trabajador en un punto (ritmo de producción)	<b>a) Plantear el problema:</b>								
	1. Se pide el modelo para el ritmo de producción a partir de la producción: $f(x) = -x^2 + 210x$	Dentro del contexto del problema es necesario identificar lo que se pide en concreto	N	N	N	R	N	N	N
	<b>b) Identificar variables y constantes:</b>								
	2. núm. de trabajadores $x$	Variable independiente	N	N	N	R	N	N	N
	3. producción $f(x)$	Variable dependiente	N	N	N	R	N	N	N
	4. ritmo de producción $f'(x)$	Variable dependiente expresada como razón de cambio de las otras dos variables.	N	N	N	R	N	N	N
	<b>c) Relacionar variables:</b>								
	5. $f'(x)$ es el límite cuando $\Delta x$ tiende a cero o <i>tiic</i> de $[\Delta f(x)/\Delta x]$	La función del ritmo de producción es el límite o <i>tiic</i> de la razón de cambio promedio de la variable producción sobre la variable número de trabajadores y se expresa con $f'(x)$ . Obtenemos el modelo $f'(x)$ al derivar la producción $f(x) = -x^2 + 210x$	I	N	N	R	N	N	N
	<b>d) Formular el modelo matemático:</b>								
	6. Definir la derivada	Necesitamos definir la derivada para poder calcularla	N	N	N	R	I	N	N
7. Sustituir $f(x) = -x^2 + 210x$ en definición de derivada	$f(x) = -x^2 + 210x$ proporciona el cambio o variación en la función	I	I	N	R	I	I	N	
8. Realizar procedimientos algebraicos para reducir la expresión a términos con $x$ y $\Delta x$	Requerimos el cociente de la razón de cambio promedio para derivar la función de la razón de cambio en un punto $x$	I	I	N	I	I	I	N	
9. Eliminar términos con $\Delta x$ para obtener el modelo: $f'(x) = -2x + 210$	Los términos $\Delta x$ deben tender a cero para acercarnos al límite y poder identificarlo. O bien, se ignoran al considerar los <i>tiic</i>	I	I	N	I	I	I	N	
b) Determine el ritmo de la producción con 100 trabajadores	<b>e) Obtener una solución:</b>								
	10. Sustituir $x = 100$ en el modelo y calcular la solución	Utilizar el modelo construido para obtener una solución matemática al problema	I	I	N	I	R	I	N

<sup>1</sup> Comprensión manifestada: I = instrumental; R = relacional; N = no manifestada (ninguna acción)<sup>2</sup> Aunque mostró comprensión relacional, no es propia de un enfoque de modelación

Tabla 21. Tipo de comprensión mostrada al argumentar en el problema 4. Ambos casos.

Cristy manifiesta una comprensión instrumental al justificar sus acciones en el inciso a) del problema, sin embargo en el inciso b), ella manifiesta comprensión relacional. Proponemos que Cristy comprende que la derivada es un modelo para la razón de cambio en un punto. Así en el inciso a), en que se pide un modelo para la razón de cambio producción/trabajadores, ella sólo desarrolla las acciones para obtener una derivada y las justifica desde una comprensión instrumental. En el inciso b), Cristy indica que la derivada obtenida en el inciso a) es el modelo del ritmo de producción, y que los trabajadores son la variable  $x$ . Con dicha información ella hace las operaciones pertinentes y obtiene una respuesta en el inciso b) del problema. Con base en sus justificaciones no tenemos indicadores del por qué de sus acciones en la primer parte del problema, por lo que decidimos proponer que ella manifiesta una comprensión instrumental.

Juan presenta una situación muy parecida a la de Cristy. En el inciso a) del problema, él argumenta que la razón de cambio producción/trabajadores en un punto es una derivada, por tanto, él realiza todos los pasos para obtener dicha derivada sin mayor justificación. Con base en ello, proponemos que Juan manifiesta una comprensión instrumental. En el inciso b) del problema, él sólo escribe que la derivada es la “razón de cambio producción/trabajadores y que “se puede decir que el ritmo es de 10 productos por trabajador”. La diferencia con Cristy es que ella hace referencia a que la derivada proporciona un modelo del ritmo de producción. Con base en los argumentos de Juan, proponemos que él manifiesta una comprensión instrumental. Encontramos que Cristy y Juan no realizan acciones de plantear el problema, identificar variables y relacionarlas, propias de una actividad de modelación,

Entre los dos ejercicios y el problema a resolver, sugerimos 18 acciones posibles. El tipo de comprensión manifestada en los argumentos dados por los estudiantes y el número de acciones no realizadas, las resumimos para ambos casos en la Tabla 22. En ella observamos que Gaby muestra mayor comprensión relacional de entre todos los estudiantes analizados.

En la Tabla 23 mostramos los resultados obtenidos con el cuestionario de comprensión. Con dicho instrumento inferimos si Gaby, Cristy, Juan y José disponen del andamiaje de significados propios de la comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación. Los datos indican que dichos estudiantes disponen de insuficiente cantidad de significados para desarrollar una comprensión relacional con tal enfoque.

		Caso Tradicional			Caso Matemática en Contexto			
		Carlos	Raúl	Erick	Gaby	Cristy	Juan	José
Número	Argumentos que manifiestan comprensión <i>instrumental</i>	13	10	6	11	12	10	0
	Argumentos que manifiestan comprensión <i>relacional</i> con un enfoque de modelación	0	0	0	7	1	0	0
	Acciones no realizadas	5	8	12	0	5	8	18
Porcentaje	Argumentos que manifiestan comprensión <i>instrumental</i>	72.2	55.6	33.3	61.1	66.7	55.6	0
	Argumentos que manifiestan comprensión <i>relacional</i> con un enfoque de modelación	0	0	0	38.9	5.5	0	0
	Acciones no realizadas	27.8	44.4	66.7	0	27.8	44.4	100

Tabla 22. Tipo de comprensión mostrada en argumentos. Ambos casos.

En el caso de Gaby, encontramos que sólo identifica tres significados de los trece evaluados con respecto a la comprensión relacional. En la categoría de conceptos ella manifiesta significados correctos para la noción de razón por unidad y la noción de derivada como *modelo para*. Esta última la consideramos como la noción central de nuestra propuesta y sólo Gaby la identifica correctamente. En la categoría de propiedades, sólo señala de manera correcta, que la razón de cambio en un punto tiene que ser derivada, esto es, no se puede obtener directamente. En la categoría de argumentos y en el resto de los reactivos Gaby no acierta a aquellos significados propios del enfoque hacia la modelación. Esta situación es contraria a lo que ella manifestó en sus argumentos al solucionar los ejercicios y el problema del primer examen.

Cristy presenta una situación extrema, ya que no acierta en elegir ningún significado propio del enfoque hacia la modelación, lo que es congruente con lo expresado en sus argumentos en el primer examen. Juan logra la mayor cantidad de significados propios del enfoque hacia la modelación de todos los estudiantes, él acierta en cuatro de los 13 reactivos, cantidad relativamente baja. En la categoría de conceptos Juan señala los significados correctos para las nociones de velocidad media, razón por unidad y punto. Sin embargo, él falla al significar la derivada como *modelo para* y la relación a uno entre dos variaciones,

nociones centrales en nuestra propuesta. En cuanto a las propiedades, Juan significa correctamente la propiedad de coincidencia, esto es, que la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio del punto central en las funciones de segundo grado. En la categoría de argumentos Juan no realiza ninguna argumentación.

Entidad primaria	Noción	Pregunta	Significado declarado <sup>1</sup>						
			Caso Tradicional			Caso Matemática en Contexto			
			Carlos	Raúl	Erick	Gaby	Cristy	Juan	José
Conceptos	Modelo de	1	0	0	0	0	0	0	0
	Razón de cambio promedio	2	0	1	0	0	0	0	0
	Velocidad media	3	0	1	0	0	0	1	1
	Razón por unidad	4	0	0	0	1	0	1	1
	Punto	5	0	0	0	0	0	1	0
	Derivada como <i>modelo para</i>	7	0	0	0	1	0	0	0
	Relación a uno entre dos variaciones	11	1	0	0	0	0	0	0
Propiedades	Independencia del tamaño del intervalo	6	0	0	0	0	0	0	0
	De derivación de la razón de cambio en un punto	9	0	0	0	1	0	0	1
	Propiedad de <i>coincidencia</i>	10	0	0	0	0	0	1	0
Argumentos	Derivada como razón de cambio en un punto	15	0	0	0	0	0	0	0
	Demostración de $v_{(tc)} = v_m$	16	0	0	0	0	0	0	0
	Importancia de la posición del punto de cálculo	17	0	0	0	0	0	0	0
Número de respuestas con significados del enfoque hacia la modelación:			1	2	0	3	0	4	3
Porcentaje respuestas con significados del enfoque hacia la modelación:			7.6	15.4	0.0	23.0	0.0	30.7	23.0

<sup>1</sup> Con el “uno” indicamos el significado declarado propio del enfoque hacia la modelación. Con “cero” indicamos un significado que no pertenece a dicho enfoque, o un significado no declarado.

Tabla 23. Significados de la comprensión relacional con un enfoque hacia la modelación. Ambos casos.

José acierta en tres significados del enfoque hacia la modelación. En la categoría de conceptos significa de manera correcta las nociones de velocidad media y razón por unidad.

José falla en el resto de nociones de esta categoría. El otro acierto él lo tiene al indicar la propiedad de derivación de la razón de cambio, al igual que Gaby, esto es, señala que la razón de cambio en un punto tiene que ser derivada.

Ninguno de los cuatro estudiantes de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación realiza un argumento. Encontramos además dos situaciones contradictorias, Cristy no acierta ningún significado de dicho enfoque pero al resolver el inciso b) del problema en el primer examen, ella manifiesta una comprensión relacional al describir la derivada como un modelo. En su caso, José manifiesta tener significados del enfoque hacia la modelación que debería ser un andamiaje para una comprensión relacional, sin embargo, él no realiza ninguna acción en el primer examen. De manera global, los resultados en el cuestionario de comprensión, nos sugieren que los estudiantes de ambos casos, no disponen de significados suficientes para la comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación.

### **8.3. La derivada y la realidad cotidiana.**

En la segunda proposición de nuestro estudio sugerimos que la didáctica propuesta acerca la noción de derivada a los contextos de la realidad cotidiana. Indagamos sobre ello en las preguntas 12 y 13 del cuestionario de comprensión, al igual que en el caso tradicional. Las respuestas de los estudiantes del caso tradicional y el de la matemática en contexto son presentadas en la Tabla 24. Para profundizar en el conocimiento construido realizamos entrevistas enfocadas sobre tales preguntas, y la forma en que les gustaría enseñar el tema de derivada.

Sugerimos que los ejemplos deben incluir situaciones en la que es necesario realizar mediciones instantáneas, para dimensiones o variables que sólo expresamos con una razón de cambio. Los contra ejemplos deben entonces, incluir situaciones en las que medimos dimensiones expresadas como razones de cambio, pero dicha medición no es instantánea o en un punto. De entre ambos casos, la respuesta más correcta la proporcionó Raúl, sin embargo, al momento de la entrevista declaró no recordar lo que hizo. Cristy también proporciona ejemplos correctos, pero los toma de la pregunta 14 del mismo examen. El resto de los estudiantes no da respuestas correctas. Esto nos sugiere que ambas didácticas no favorecen que los estudiantes identifiquen situaciones problema de la realidad cotidiana, que se resuelven con derivadas. A continuación describimos nuestros principales hallazgos con

respecto a Gaby, Cristy, Juan y José. El lector puede encontrar la transcripción de esta parte de la entrevista para cada estudiante en el Apéndice L.

Pregunta	Respuesta por alumno						
	Caso tradicional			Caso matemática en contexto			
	Carlos	Raúl	Erick	Gaby	Cristy	Juan	José
Pregunta 12: Proporciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente	Sin respuesta	“Velocidad y aceleración instantáneas”	Sin respuesta	“Al lanzar una pelota en caída libre, ¿cuál es su velocidad promedio? Calcular la producción de $x$ producto, por un número $x$ de empleados, en un intervalo de tiempo $\Delta t$ ”	“La caída libre de una pelota. El ejemplo a) de la pregunta 14”	“La velocidad con la que venga a la escuela Km/hr. Las cosas que hago en el día entre las horas que tardo en hacerlas”	“El tiempo de tu casa a la escuela en una semana. Las veces que vota que vota un balón a la misma altura”
Pregunta 13: Proporciona dos ejemplos que parecen derivada pero no lo son	Sin respuesta	Sin respuesta	Sin respuesta	“Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 cm cuando la temperatura aumenta en 10 °c, no es una derivada, es una razón por unidad”	“c) y d) pregunta 14”	“Las horas que estoy en la escuela al día. Las horas que duremos en el día”	“El pago de un trabajador a la quincena. El punto de ebullición”

Tabla 24. Respuestas sobre la derivada y la realidad en el cuestionario de comprensión. Ambos casos.

Gaby no identifica de manera clara situaciones reales en que apliquemos la derivada, a la vez, que se interesa por didácticas más prácticas, que acercan dicha noción con la realidad. En los ejemplos proporcionados, ella menciona el problema de la caída libre estudiado en clase y el problema del ritmo de producción que venía en el primer examen. En el primer ejemplo Gaby menciona incurre en un error al escribir que se busca una velocidad media. Al indagar sobre la diferencia entre esta velocidad y la velocidad instantánea, encontramos que

ella no puede explicar la diferencia entre ellas expresadas como razón de cambio promedio y en un punto. Gaby tampoco puede explicar en forma precisa sus respuestas en los contra ejemplos que dio de la derivada. Ella toma como contra ejemplo la situación señalada en la pregunta dos del cuestionario de comprensión, que refiere a una razón por unidad. Gaby sostiene que esa situación es un ejemplo que parece de derivada pero que no lo es, aunque no explica el por qué, ni la diferencia entre dicha noción y la razón por unidad.

Los ejemplos y contraejemplos proporcionados por Gaby no fueron los más apropiados ni pudo justificar sus elecciones. Sin embargo, al preguntarle como enseñaría el tema de derivada, ella aboga por el uso de escenarios reales: “Pues ya no más fórmulas ¿no?, [...] primero explicaría el porqué de una derivada, qué es una derivada y el porqué y la función que [...] tiene esta derivada, que tienen las derivadas en las situaciones reales, en la vida diaria”. También Gaby manifiesta que la derivada es algo real para ella: “la derivada es algo real ... pienso yo” y que esto lo miró en con la matemática en contexto: “aquí pues vimos de que, la derivada es algo real, es ... que hay muchas situaciones que la podemos aplicar”.

Cristy manifiesta dificultad al identificar el uso de la derivada en situaciones reales, relacionadas con la medición de variaciones instantáneas. Aún así, cree entender su significado en una situación real, o bien en situaciones no contextualizadas. A la vez, muestra interés por la didáctica propuesta complementada con la didáctica tradicional y una mejor distribución de los contenidos en el tiempo. Al proporcionar ejemplos de situaciones que se resuelven con derivadas, Cristy recurre al problema de la caída libre visto en clase y a los ejemplos a), c) y d) de la pregunta 14 del cuestionario de comprensión. En la entrevista observamos que ella busca variables y una función que se pueda derivar, como principal criterio para elegir un ejemplo de derivada. Al indagar sobre el por qué eligió dichos ejemplos, ella no recordó el por qué.

En el caso de los contra ejemplos, Cristy selecciona las incisos c) y d) y considera de nuevo la presencia de variables y funciones dentro de una situación para considerarla ejemplo de derivada. Acierta al afirmar que el inciso c) de la pregunta 14 no es un ejemplo de derivada, pero sólo argumenta: “yo me imaginé que no” se trata de un ejemplo de derivada. Cristy no acierta al anotar el ejemplo del inciso d) como un contra ejemplo de derivada. Al preguntarle sobre esto, ella concluye que dicho contra ejemplo se puede resolver con otros métodos sin utilizar derivadas. Sin embargo, la situación descrita en el inciso d) es un ejemplo típico de

aplicación de derivadas. Esto nos sugiere que Cristy no relaciona claramente la derivada con situaciones en las que se requieren calcular razones entre dos variaciones en un punto o en un instante dado.

A pesar de las deficiencias anteriores, Cristy dice que “entiende” lo que está pasando al trabajar con los problemas de derivada vistos en las clases del maestro del curso, y que eso se debe a la “teoría” que vimos durante nuestra intervención: “con usted me di cuenta en un caso real... que está pasando no, y... y ahorita también con lo que nos está explicando el maestro ya sé donde está la derivada en [...] la curva y esto y el otro... porque nada más hacíamos las fórmulas y está bien, ok, está bien, pero no sabía que, o sea no entendía... no entendía”

En cuanto a la enseñanza de la derivada, Cristy se preocupa más por distribuir mejor los contenidos temáticos, sugiere mezclar una didáctica contextualizada con una no contextualizada bien delimitada en tiempo: “yo... repartiría bien, los temas, [...] de aquí a acá, voy a dar teoría y para que entiendan bien, [...] voy a dar ejemplos, de aquí parto con las fórmulas y de aquí ya sigo con los demás temas, eso es lo que haría yo”

Juan asocia la derivada con situaciones en que se obtiene una razón de cambio, pero sus ejemplos y contra ejemplos sugieren que él tiene una confusión similar a la de Gaby y Cristy. En cuanto a la enseñanza de la derivada, Juan tiene interés en didácticas que ayuden a entender para que sirve la derivada y lo que se está haciendo con ella. También encontramos que él afirma que la derivada es algo real, es decir, es algo que ayuda a resolver un problema real.

Juan proporciona ejemplos y contra ejemplos creados por él, sin embargo, apreciamos que se confunde de manera muy parecida a Gaby y a Cristy. Juan anota como ejemplo la velocidad con la que viene a la escuela y las cosas que hace en el día entre o divididas por las horas utilizadas. Al indagar sobre el primer ejemplo Juan se aclara asimismo, que su ejemplo es una velocidad promedio, y sólo puede interpretarla como una razón de cambio promedio. Algo similar le ocurre con el otro ejemplo. Pensamos que tomó las situaciones en que se requiere una razón de cambio promedio como ejemplos que se solucionan con derivadas.

Como contraejemplos Juan señala las horas que está en la escuela al día entre las horas que dura en el día. Tenemos la impresión de que trata de decir que es una razón por unidad y no una razón de cambio, en cuyo caso, su contra ejemplo es correcto. Al preguntarle por la forma en que enseñaría la derivada, Juan se interesa por didácticas que promueven la

comprensión relacional, como él afirma: “saber para qué te sirve, no nomás para, [...] hacerlo, y eso que, lo que hiciste no sepas ni qué es, o sea que supieran qué es lo que están haciendo nomás [...] no, nomás, que ya, la pura fórmula ten y vámonos, como si, ¿si me entiende...?” . Aunque no en una forma muy decidida, Juan acepta que la derivada tiene que ver con los hechos reales: “¿Real, real, real?, pues si te ayuda a resolver problemas yo digo que es real”.

A nuestro parecer, Juan y Gaby son los estudiantes que muestran mayor interés durante nuestra intervención, sin embargo, encontramos en su aprendizaje serias deficiencias para asociar la derivada con la realidad cotidiana.

José muestra significados muy diferentes a sus compañeros. La derivada la asocia a fenómenos de variación, y no a mediciones instantáneas para una razón de cambio. Él aboga más por una enseñanza tradicional como ocurre actualmente, y piensa que la derivada no tiene que ver con la realidad. En cuanto a los ejemplos proporcionados, José señala el tiempo que hace de su casa a la escuela, y las veces que vota un balón a la misma altura. Durante la entrevista observamos que el significado que José otorga a la derivada está en términos de variaciones o cambios, sin precisar que se trata de una razón entre ellos en un punto. Esto último es algo que encontramos en los cuatro estudiantes.

En el caso de los contra ejemplos encontramos que José menciona situaciones que involucran un cambio nada más, sin describir las condiciones que implica el uso de una derivada. Al preguntarle cuando un cambio implica una derivada, no encuentra un ejemplo pertinente: “como puede ser, pues yo diría que, como por ejemplo que, mm... no, no encuentro”. Contrario a lo esperado, José indica que la derivada no tiene contacto con la realidad y señala que utilizaría una didáctica como la actual, que a nuestro parecer es más propia de la enseñanza tradicional.

En resumen, observamos una seria deficiencia en los estudiantes para identificar situaciones reales que pueden solucionarse con la derivada, en ambos casos de estudio. En el caso tradicional Raúl es el único que identifica situaciones correctas, al señalar a velocidades y aceleraciones instantáneas. Sin embargo, durante la entrevista él manifestó no acordarse de dichos ejemplos. Carlos y a Erick no proporcionan ningún ejemplo ni contra ejemplo de la derivada. En el caso de la matemática en contexto se señalaron situaciones que en su mayoría se relacionan con una razón de cambio promedio, en particular las indicadas por Gaby y Juan. Cristy se apoya en ejemplos de la pregunta 14 del cuestionario y acierta en uno de ellos, pero

en la entrevista ella no explica el por qué de sus elecciones. José, muestra significados más pobres al asociar la derivada con situaciones en las que se producen cambios o variaciones simples. Es significativo que ninguno de ellos, relacionó el uso de la derivada con situaciones reales que involucran mediciones instantáneas de variables expresadas con razones de cambio.

En cuanto a la manera en que se enseñaría la derivada, en el caso tradicional encontramos que Carlos aboga por una enseñanza tradicional, partiendo del concepto hacia las aplicaciones. Raúl, se interesa más por los significados gráficos y de razón de cambio con mayor número de aplicaciones, pero no hace referencia a situaciones contextualizadas. Por su parte Erick, tiene interés por los aspectos teóricos que le fueron preguntados en el cuestionario de comprensión. En el caso de la matemática en contexto, Gaby indica que ella explicaría el porqué de la derivada y sus usos en ambientes reales, para identificar las situaciones que se resuelven con dicha noción. Cristy, se preocupa más por la distribución de los contenidos con una didáctica que combina aspectos de la matemática en contexto y de la didáctica tradicional. Juan tiene interés en didácticas que promuevan la comprensión relacional, y permitan entender el porqué de las acciones con la derivada, con un mayor contacto con la realidad. José, por su parte, señala que utilizaría una didáctica tradicional. En resumen, Carlos, Raúl y José se interesan en didácticas tradicionales, mientras que Gaby, Juan y Erick, en didácticas que favorecen la comprensión relacional. Cristy prefiere una combinación de ambas didácticas.

En cuanto a la percepción de la derivada como algo real, en el caso tradicional sólo preguntamos a Erick por ello, su respuesta fue que la consideraba más como un razonamiento. En el caso de la matemática en contexto, Gaby y Juan manifiestan que la derivada es algo real, a Cristy no se le hizo dicha pregunta pero manifiesta que la estudió en un caso real y en el caso de José, indica que no la considera algo real. En estos datos encontramos que tres de los cuatro estudiantes del caso de la matemática en contexto, esto es, Gaby, Cristy y Juan, significan la derivada en la realidad, mientras que esto no ocurre con ningún estudiante del caso tradicional.

#### **8.4. Habilidades de modelación.**

En la tercer proposición de nuestro estudio se propone que la didáctica de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación favorece a las habilidades de modelación. Para tener un indicador de esto, aplicamos el instrumento en que pedimos a los estudiantes del caso tradicional solucionar un problema de administración de inventarios

(véase Apéndice D). En dicho instrumento analizamos si el estudiante muestra las habilidades siguientes:

- e) Plantear el problema: Identificar cuánto varía costo total anual para un tamaño de pedido específico o ritmo de variación de dicho costo. Esto es, obtener una razón de cambio (costo total anual/tamaño de pedido) en un punto.
- f) Determinar variables: el tamaño de pedido ( $Q$ ) es la variable independiente, el costo total anual ( $C_T$ ) es la variable dependiente, la segunda variable dependiente es la razón de cambio entre el costo total anual y el tamaño de pedido y se pide su valor instantáneo o ritmo de variación del costo. Otras variables son: costo de pedido para una orden ( $C_O$ ), costo anual de almacenamiento para un componente ( $C_A$ ), demanda anual ( $D$ ), inventario promedio ( $I_P$ ), costo anual por pedidos y costo anual de almacenamiento.
- g) Relacionar variables: El costo total anual ( $C_T$ ) es una variable dependiente del tamaño del pedido ( $Q$ ). El ritmo de variación del costo total anual ( $C'_T$ ) es la razón de cambio en un punto entre el costo total anual y el tamaño del pedido. El costo total anual ( $C_T$ ) es igual al costo anual por pedidos ( $C_{AP}$ ) más el costo anual por almacenamiento ( $C_{AA}$ ); a su vez, el costo anual por pedidos es igual al número de pedidos al año por el costo de cada pedido ( $\frac{D}{Q}C_O$ ) y el costo anual de almacenamiento es igual al inventario promedio por el costo anual de almacenar una unidad ( $\frac{Q}{2}C_A$ ).
- h) Formular el modelo: Elaborar la función que modela el costo total anual:  
 $C_T = \frac{D}{Q}C_O + \frac{Q}{2}C_A$ . Obtener la razón de cambio en un punto entre dicho costo y el tamaño de pedido como una derivada:  $C'_T = \frac{C}{2} - \frac{D}{Q^2}C_O$

La aplicación del instrumento mencionado o examen sobre habilidades de modelación, la complementamos con una entrevista enfocada en las respuestas dadas por los estudiantes. En el caso de la matemática en contexto, al aplicar dicho examen y aclarar dudas sobre el mismo, un estudiante describió su planteamiento del problema en voz alta, y preguntó si era

correcto, esto generó un acuerdo simultáneo entre el grupo. En consecuencia, en el análisis decidimos eliminar el planteamiento del problema dado por los alumnos seleccionados, ya que no es posible asegurar que sea una aportación propia. Los resultados obtenidos para ambos casos los mostramos en la Tabla 25.

Habilidades de modelación	Resultados <sup>1</sup>						
	Caso Tradicional			Caso Matemática en Contexto			
	Carlos	Raúl	Erick	Gaby	Cristy	Juan	José
<b>a) Plantear el problema:</b>							
Identificar como varía el costo total para un tamaño de pedido específico	0	0	1	2	2	2	2
<b>b) Determinar variables</b>							
Tamaño del pedido (Q) (variable independiente)	1	1	1	1	1	1	1
Costo total anual ( $C_T$ ) (variable dependiente)	1	1	1	0	0	1	1
Ritmo de variación del costo ( $C'_T$ ) o cómo varía el costo total anual / tamaño de pedido (segunda variable dependiente)	0	0	0	0	0	0	0
Costo anual de almacenar un componente ( $C_{AA}$ )	1	1	1	1	1	1	1
Demanda anual del componente (D)	1	1	1	1	1	0	1
Costo anual por pedidos ( $C_{AP}$ )	1	1	1	1	0	1	1
Costo anual por almacenamiento ( $C_{AA}$ )	0	1	1	1	0	1	1
Costo por ordenar un pedido ( $C_o$ )	1	1	1	1	1	1	1
<b>c) Relacionar variables</b>							
$C_T = C_{AA} + C_{AP}$	1	1	1	0	0	1	1
$C_{AP} = (D/Q)C_o$	1	0	1	1	0	0	0
$C_{AA} = (Q/2)C_A$	0	0	1	0	0	0	0
$C'_T =$ derivada de $C_T$	0	0	0	0	0	0	0
<b>d) Formular el modelo</b>							
$C_T = (Q/2)C_A + (D/Q)C_o$	0	0	1	0	0	0	0
$C'_T = C_A/2 - (D/Q^2)C_o$	0	0	0	0	0	0	0

<sup>1</sup> Identificamos con “uno” la acción realizada y con “cero” la acción nula

<sup>2</sup> No consideramos el planteamiento del problema porque se acordó en el grupo

Tabla 25. Habilidades de modelación. Ambos casos.

En el caso de Gaby, encontramos un esfuerzo por solucionar el problema siguiendo las etapas de la matemática en contexto. Sin embargo, ella no identifica el costo total anual como la variable dependiente cuya función hay que derivar. También observamos que no identifica la variable dependiente cuya razón de cambio en un punto se desea obtener, esto es, el ritmo de variación del costo. Proponemos que Gaby sigue pasos instrumentales para resolver el problema, y que no muestra habilidad para identificar las variables típicas de las situaciones que solucionamos con derivadas.

Gaby sólo identifica la relación entre las variables que determinan el costo anual por pedidos. Ella no identifica las relaciones necesarias para obtener el costo anual de almacenamiento, el costo total anual y en particular, que el ritmo de variación es la derivada de dicho costo total. Gaby declara no saber cómo relacionar las variables: “tenía mi idea pero realmente no, no, no sabía”, y afirma que no comprendió que pide el problema: “es que no le entendí profe, la verdad no... o di... o sea no le entendí a que era lo que quería”. En consecuencia Gaby es incapaz de formular el modelo. Esto nos indica que ella no dispone de las habilidades de modelación analizadas.

Cristy afirma que no se sentía bien cuando hizo el examen y es quien realiza menos acciones para resolver el problema. Ella sólo identifica cuatro variables: costo por ordenar un pedido, costo anual de almacenamiento por unidad, demanda anual y el tamaño del pedido. Cristy falla en identificar las variables dependientes: el costo total anual y el ritmo de variación de dicho costo. Estas dos variables son básicas para solucionar el problema con la derivada. En consecuencia se muestra incapaz de relacionarlas y de formular un modelo. A pesar de ello, se esfuerza por construir un modelo y trata de aplicar la regla de derivadas para la división de funciones. Cristy comenta que no captó bien el problema y que intentó construir un modelo. Con base en estos datos, sugerimos que Cristy no muestra las habilidades de modelación estudiadas.

Con base en su participación en clase Juan es, en nuestra percepción, uno de los estudiantes con mayor comprensión de lo estudiado con la didáctica propuesta. Sin embargo, sus resultados en el examen de habilidades de modelación son más bajos de lo esperado. En cuanto a determinar variables, Juan identifica el tamaño de pedido como variable independiente, y el costo total como variable dependiente, sin embargo, no describe el ritmo de variación como una segunda variable dependiente, expresada con una razón de cambio.

Identificar estas tres variables es esencial en situaciones que se resuelven con derivadas. Juan identifica el resto de las variables del problema con excepción de la demanda anual.

Con respecto a las habilidades de relacionar variables y formular el modelo, Juan sólo identifica las relaciones para determinar el costo total anual y falla en discriminar que el ritmo de variación es la derivada de dicho costo. Esto le impide a Juan obtener una respuesta al problema. El análisis de las acciones de Juan nos indica que no dispone de las suficientes habilidades de modelación, aún cuando logra identificar la variable independiente y una dependiente.

José es el último estudiante de nuestro análisis y en cuanto a determinar variables y constantes, él encuentra dos variables independientes: el número de pedidos ( $D/Q$ ) y el número de unidades o tamaño del pedido ( $Q$ ). Él determina como variable dependiente el costo total anual a partir de estas variables, pero, no discrimina como segunda variable dependiente al ritmo de variación del costo, o bien, cómo varía con el tamaño del pedido. En consecuencia no puede construir un modelo para dar respuesta al problema. Esto es, José falla en relacionar las variables y formular el modelo. Este actuar de José, nos indica que tampoco dispone de las habilidades de modelación analizadas.

En resumen, ninguno de los estudiantes de ambos casos, identifica la variable dependiente que se expresa como razón de cambio en un punto, o ritmo de variación del costo. Ello les impide solucionar el problema. Esto sugiere que no disponen de la suficiente habilidad para identificar las tres variables que caracterizan una situación a resolver con derivadas. Encontramos que los estudiantes del caso tradicional muestran mayor habilidad para relacionar las variables, y que en ambos casos, ninguno identifica todas las relaciones básicas para solucionar el problema. Sólo Erick del caso tradicional muestra mayor habilidad para determinar relaciones entre variables y formular el modelo, al determinar la función del costo total anual. Sin embargo, él no deriva dicha función para obtener el ritmo de variación del costo total. Pensamos que esto último se debe a que Erick no identifica la variable dependiente que se expresa como razón de cambio. Por último, los estudiantes de la matemática en contexto explicitan las etapas de modelación al solucionar sus problemas, cosa que no hacen los estudiantes del caso tradicional.

**Sumario.** En este capítulo describimos los resultados obtenidos en el caso de la matemática en contexto. En dicho caso implementamos de manera personal la didáctica propuesta al grupo vespertino del curso de Cálculo diferencial en el periodo 2006 – 1, en los programas de ingeniero industrial e ingeniero industrial en electrónica. La intervención didáctica tiene dos partes, en la primera estudiamos las operaciones básicas como modelos simbólicos y en la segunda, estudiamos la noción de derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. La matrícula en el grupo de estudio es de 19 estudiantes, de los cuales, seleccionamos cuatro para realizar la investigación, Gaby, Cristy, Juan y José. Dichos estudiantes mostraron mayor interés en clases, lo que es un requisito para aprendizajes significativos de acuerdo con Ausubel (2002). Los resultados los presentamos en cada una de las proposiciones que guían nuestro estudio y los resumimos para ambos casos.

Inferimos la comprensión relacional lograda por los estudiantes a partir de los significados implementados y los declarados en dos instrumentos de investigación: el examen en que pedimos argumentar acciones y el examen de comprensión. Ambos instrumentos fueron los mismos aplicados a los estudiantes del caso tradicional. En las argumentaciones dadas por los estudiantes, encontramos que Gaby manifiesta comprensión relacional en el 61.1 por ciento, Cristy en el 5.5 por ciento, mientras que el resto de los estudiantes no muestra comprensión relacional. Esto es, casi todos los estudiantes de ambos casos manifiestan comprensión instrumental. Algo similar ocurre con los resultados en el examen de comprensión, que indican la falta de significados para una comprensión relacional en todos los estudiantes.

Los estudiantes muestran una seria deficiencia para identificar situaciones reales que pueden solucionarse con la derivada. En el caso de la matemática en contexto, Gaby y Juan relacionan la derivada con situaciones en que se presentan razones de cambio promedio. Cristy no relaciona la derivada con situaciones específicas y José la relaciona con situaciones de variación. En el caso tradicional, Carlos y Erick no hay ejemplos ni contra ejemplos de la derivada en la realidad y Raúl, manifiesta no hacerlo aún cuando sus ejemplos en el examen son correctos.

En cuanto a habilidades de modelación, ninguno de los estudiantes es capaz de reconocer todas las variables que caracterizan una situación típica de derivadas. En el caso de la matemática en contexto, los estudiantes manifiestan menor capacidad en habilidades de

modelación, que en el caso tradicional. Sólo Erick muestra habilidades para plantear el problema, y en menor grado, determinar variables, relacionarlas y formular el modelo.

## IX. Conclusiones

El presente capítulo se organiza en tres secciones. En la primera describimos la interpretación que hemos hecho sobre los resultados en la comprensión relacional, la derivada y la realidad, y en habilidades de modelación, obtenidos con la didáctica propuesta. En la segunda sección presentamos las conclusiones que consideramos pertinentes en cada cada objetivo de investigación. En la tercera, describimos las limitaciones del estudio, así como las recomendaciones que consideramos relevantes para investigaciones posteriores.

### **9.1. Interpretación de resultados.**

Nos propusimos tres objetivos en el estudio: a) desarrollar una propuesta conceptual para la derivada con el enfoque hacia la modelación, b) elaborar una didáctica para el aprendizaje de la derivada con base en la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación, y c) implementar y evaluar los efectos en la comprensión relacional y en habilidades de modelación de la didáctica propuesta. En esta sección presentamos la interpretación de los resultados logrados al implementar dicha didáctica.

**9.1.1. Comprensión relacional.** La primera proposición que guió el estudio, es que la propuesta didáctica favorece la comprensión relacional. Para el análisis utilizamos el enfoque ontológico semiótico de Godino (2003). Este enfoque nos proveyó de tres elementos de análisis: las configuraciones epistémicas implementadas, argumentos de los estudiantes al solucionar un problema, y significados del enfoque hacia la modelación reconocidos por los estudiantes. Con base en el primer elemento, en el caso de la matemática en contexto encontramos una configuración epistémica más compleja, orientada a la construcción de significados de la derivada como razón de cambio, y como *modelo para* la relación a uno entre dos variaciones. En consecuencia era previsible que los estudiantes contaran con un andamiaje de significados, mismo que se manifestaría en el segundo y tercer elemento de análisis.

Los argumentos dados por los estudiantes al resolver un problema con derivadas, indican que éstos no cuentan con el esperado andamiaje de significados, propio de una

comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación. Esto es, de los cuatro estudiantes del caso de la matemática en contexto sólo Gaby muestra comprensión relacional en buena parte (38.9%) de los argumentos proporcionados al obtener derivadas. José no realizó ningún paso, y Cristy y Juan muestran casi sólo comprensión instrumental en sus argumentos, al igual que los estudiantes del caso tradicional, Carlos, Raúl y Erick.

El tercer elemento de análisis, el cuestionario de comprensión, tampoco evidencia en los estudiantes la existencia de un andamiaje de significados para la comprensión relacional. De los 13 reactivos sobre conceptos, propiedades y argumentos propios del enfoque hacia la modelación, Gaby, Juan y José reconocen entre cero y tres conceptos o propiedades, mientras que Carlos, Raúl y Erick del caso tradicional reconocen entre cero y dos. Ningún estudiante de ambos casos fue capaz de reconocer un argumento propio de una comprensión relacional. Con base en estos resultados, no apreciamos diferencias sustanciales entre ambos casos.

**9.1.2. Derivada y realidad.** Cuando planteamos nuestra pregunta de investigación, nos interesamos por los efectos en la comprensión relacional y en habilidades de modelación. En ese momento no previmos analizar el efecto de dicha didáctica para acercar la derivada a la realidad. Sin embargo, esto último lo incorporamos en las proposiciones del estudio (Yin, 2003), y dedicamos una sección a describir los resultados. Éstos nos sugieren que con la didáctica propuesta los estudiantes perciben menos árido el conocimiento o menos aislado, tal como sostiene la teoría de la matemática en contexto (Camarena, 1999). Dichos estudiantes manifiestan haber aprendido la derivada en un caso real. Esto ocurrió con Gaby, Cristy y Juan, tres de los cuatro alumnos del caso de la matemática en contexto. En contraparte, en el caso tradicional observamos que los estudiantes no asocian el concepto de derivada a una situación real.

**9.1.3 Habilidades de modelación.** En la tercer proposición del estudio sugerimos que la propuesta didáctica favorece el desarrollo de habilidades de modelación. Sin embargo, encontramos que los estudiantes del caso tradicional muestran mayor habilidad para plantear el problema, identificar variables, relacionarlas, y formular el modelo, aún cuando no reconocen las etapas de modelación. Un aspecto que puede incidir en estos resultados es que Carlos y Raúl han llevado cursos de cálculo en otras instituciones. Otro aspecto puede ser la

capacidad individual para el análisis matemático, como nos parece en el caso de Erick, quién llevó el curso de cálculo por primera vez en la universidad y mostró mayores habilidades al solucionar el problema.

También encontramos que los estudiantes del caso de la matemática en contexto, con mayor frecuencia describen las etapas de modelación como pasos para solucionar el problema. Mientras que los estudiantes del caso tradicional no describen ninguna de tales etapas de modelación.

## 9.2 Conclusiones.

En esta sección presentamos nuestras conclusiones en cada uno de los objetivos del estudio.

**9.2.1. Primer objetivo.** Como primer objetivo nos propusimos elaborar una propuesta conceptual para la noción de derivada en ingeniería, con el enfoque hacia la modelación. Con respecto a ello concluimos lo siguiente:

- Consideramos que hemos logrado una aportación importante al apartarnos de la noción de límite para significar la derivada. Con ello evitamos los problemas asociados al aprendizaje de la derivada como el límite de una razón de cambio. Dificultad señalada por varios autores como Bloch y Schneider (2004), David Tall (1985), Ana Sierpinska (en Dolores, 2000), Artigue (1995) entre otros, en el nivel internacional; y por Simón Mochón (1994), Cordero (2001), Dolores (2000) entre otros, en el nivel nacional.
- Con nuestra propuesta conceptual podemos utilizar contextos de medición cotidianos para significar la derivada. Esto es, podemos iniciar con problemas en que requerimos hacer mediciones instantáneas para variables expresadas con una razón de cambio, tales como la velocidad, tasa de crecimiento, productividad, entre otras. Tales mediciones son presentadas en contextos de modelar con base en cantidades.
- Consideramos que la propuesta conceptual es una alternativa que amplía el conocimiento sobre la derivada. Encontramos que la razón de cambio promedio es

igual a la razón de cambio de un punto alrededor del centro del intervalo de cambio, la cual, difiere de la razón de cambio del punto al inicio de dicho intervalo. Esta diferencia hace necesario reducir el intervalo al infinito para que ambas razones de cambio sean casi iguales, lo que lleva a la noción cultural de derivada como límite.

- Por último, con respecto a este primer objetivo, señalamos el carácter evolutivo de nuestra propuesta a lo largo de la investigación. La revisión de las notas del curso de cálculo (véase Apéndice A) y del capítulo IV muestra el inicio y el final del proceso de evolución. Concluimos que este carácter evolutivo afectó sensiblemente los resultados obtenidos.

**9.2.2. Segundo objetivo.** Una vez que contamos con la propuesta conceptual, el siguiente objetivo fue diseñar la didáctica de la matemática en contexto con base en dicha propuesta. Nuestras conclusiones son:

- La didáctica de la matemática en contexto no es fácil de realizar, tal como lo indica Camarena (1999). De acuerdo con dicha didáctica, debe iniciarse con la selección de un problema real. Dicho problema debe ser elegido de las ciencias de la ingeniería o bien, de la ingeniería misma. En el caso de la derivada, los problemas típicos incluyen tres dimensiones o variables. Una independiente, una dependiente con función conocida, y otra dependiente expresada como razón de cambio entre las otras dos variables, y para la cual, se requiere una medición instantánea. Aparte de estas condiciones, nuestra propuesta conceptual requiere que la función de la variable dependiente sea de segundo grado. Todas estas condiciones no son fáciles de lograr en los problemas reales de la ingeniería.
- Consideramos que son mínimos los problemas que podemos utilizar con la matemática en contexto y nuestra propuesta conceptual. Sólo encontramos la caída libre de un objeto como un problema ideal, cercano a contextos cotidianos de los alumnos. La búsqueda que realizamos nos indica que los problemas de ingeniería, son más complejos en términos matemáticos. Encontramos difícil utilizar tales problemas para diseñar una propuesta didáctica para el aprendizaje de la derivada.

**9.2.3. Tercer objetivo.** El último objetivo fue implementar la didáctica de la matemática en contexto con base en la propuesta conceptual de la derivada, y conocer qué efectos produce en la comprensión relacional y en habilidades de modelación. Con respecto a ello concluimos:

- La intervención didáctica presenta condiciones muy distintas a las de un curso normal de cálculo diferencial, mismas que afectaron los resultados. El profesor de la asignatura presentó el material a estudiar como parte de una investigación, y no como parte formal del curso. Lo cual afectó de manera sensible el interés y la participación de los estudiantes. Aunado a esto, agregamos que la propuesta tuvo un carácter evolutivo o de mejora sobre la marcha, con cierta inestabilidad en el contenido y en los conceptos. Así mismo, la intervención duró un periodo prolongado para solucionar el problema planteado.
- Con base en nuestro análisis concluimos que la propuesta didáctica tiene efectos mínimos en la comprensión relacional de la derivada, situación contraria a la proposición inicial del estudio. Esto es, los estudiantes no construyen un andamiaje de significados propios para una comprensión relacional con el enfoque hacia la modelación y no significan la derivada como *modelo para*. Los estudiantes tampoco identifican las tres variables de una situación típica de modelación con derivadas.
- En cuanto a la segunda proposición, concluimos que la propuesta didáctica ayuda a que el estudiante asocie la derivada con la realidad. Consideramos este hecho como un avance con respecto a la didáctica del caso tradicional, que se utiliza en los cursos de cálculo de ingeniería industrial en CESUES. Así mismo señalamos que la asociación de la derivada con la realidad lograda con la didáctica propuesta, no llega a una comprensión profunda sobre lo que implican los aspectos conceptuales en situaciones reales.

- Con respecto a la tercer proposición, concluimos que las didácticas de ambos casos no favorecen el desarrollo de las habilidades de modelación. En particular, no ayudan a que los estudiantes identifiquen las relaciones entre variables que implican una derivación, y con base en las cuales, tomarían la decisión de derivar.

### 9.3 Limitaciones y recomendaciones.

Con base en los resultados y la experiencia lograda en este estudio, señalamos las siguientes limitaciones del estudio, y sugerimos algunas recomendaciones que consideramos pertinentes para investigaciones posteriores.

**9.3.1. Limitaciones.** El estudio es una modesta aportación a la educación matemática en el que notamos dos importantes limitaciones. La primera de ellas, es que nuestras interpretaciones condicionan los hallazgos reportados. Limitación inherente a la investigación cualitativa. En segundo término, tenemos la naturaleza de la investigación y los tiempos de ejecución. Esto es, el enfoque hacia la modelación es una postura sencilla en evolución. Muchas de sus ideas fueron revisadas y reestructuradas durante el estudio, con los consecuentes ajustes “sobre la marcha”. La carrera entre el tiempo para madurar dichas ideas y el tiempo para ejecutar el estudio, repercutió en la calidad de los instrumentos, el contenido de la propuesta, y en particular, la falta de un estudio piloto. Sin embargo, pese a ello, pensamos que la información generada es útil en obtener una respuesta a la pregunta de investigación.

### 9.3.2. Recomendaciones para la propuesta didáctica.

- Reducción los contenidos: La intervención fue diseñada en dos etapas, una para el estudio de las operaciones básicas como modelos simbólicos y otra para el estudio de la derivada como *modelo para*. Sugerimos eliminar la primer etapa, ya que ella parece ineficaz para ayudar a significar la derivada como *modelo para*. En consecuencia, la propuesta debe iniciar con el problema de la caída libre de un objeto limitado a obtener velocidades instantáneas con funciones de segundo grado, para luego discutir sobre cómo modelar la continuidad y formular la derivada como *modelo para*. Todo ello con la didáctica de la matemática en contexto.

- Enfatizar la construcción de significados: En las etapas de modelación de identificar variables y sus relaciones, la negociación de los significados debe girar en torno a esclarecer las tres variables de una situación típica de derivadas. En la etapa de formular el modelo, debe insistirse en construir el significado de la derivada como *modelo para*.
- Uso de representaciones gráficas: En la didáctica implementada nos centramos en construir el significado de la derivada como razón de cambio en un punto, y evitamos representaciones gráficas para minimizar significados como pendiente a la tangente a la curva. Esto fue contraproducente de acuerdo a los resultados del cuestionario de comprensión. Proponemos por tanto, incorporar el uso de representaciones gráficas en las que el estudiante determine de manera gráfica razones de cambio o la pendiente de la tangente, antes de formular el modelo. Esto permitirá un conocimiento previo para significar la derivada como *modelo para*.
- Sesiones de consolidación: Sugerimos consolidar los significados construidos, a través de dos o tres sesiones con ejercicios de obtención de derivadas con funciones de segundo grado. Lo anterior como una preparación para el estudio de derivadas con funciones mayores de segundo grado.

### 9.3.3. Recomendaciones de orden metodológico.

- Capacitación del profesor: Proponemos capacitar al profesor a través de un taller sobre el nuevo material, en que él se desempeñe como estudiante. Esto le permitirá conocer mejor la propuesta e implementarla en su curso de cálculo diferencial. Lo anterior a causa de que los estudiantes mostraron menor interés por aprender al participar en una investigación.
- Integración del material en el curso: Recomendamos que el material propuesto forme parte de los contenidos a estudiar, justo después del tema del límite de una función y antes de la derivada como límite. Nuestra propuesta podría nombrarse “la derivada como *modelo para*”. Con dicha ubicación en los contenidos pretendemos que el estudiante cuente con una explicación del por qué de los procesos infinitos, y asocie la derivada a situaciones reales.

- Evaluación: Los estudiantes tienden a aprender aquello en que son evaluados. Por tanto, recomendamos que la evaluación realizada en los cursos considere las etapas de modelación: Plantear el problema, identificar variables y constantes, entre otras. Con esto pretendemos que se favorezcan habilidades de modelación.
- Instrumentos de medición: Sugerimos que los instrumentos sean revisados y corregidos para adaptarse a los cambios propuestos. La naturaleza evolutiva de los aspectos conceptuales generó imprecisiones en las nociones teóricas. Hemos corregido la mayoría de dichas imprecisiones durante el desarrollo de la investigación, y en consecuencia, los instrumentos de medición también requieren considerar tales correcciones.

#### ***9.3.4. Recomendaciones para CESUES.***

- Investigación en competencia matemática: Dado el reciente énfasis internacional para que los estudiantes aprendan a aplicar el conocimiento matemático a situaciones reales (Blum, 2002; OECD, 2003; Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). Pensamos que es necesario continuar investigando sobre la manera de lograr tales aprendizajes. Ello debe generar un modelo institucional específico para las competencias en matemáticas con base en la investigación científica.
- Matemática en contexto para las ingenierías: Uno de los principales logros de la didáctica propuesta es que los estudiantes manifiestan que aprendieron la derivada en una situación real. Esto es deseable en el aprendizaje de todos los contenidos matemáticos. En consecuencia consideramos recomendable que se utilice la didáctica de la matemática en contexto en las carreras de ingeniería.
- Ampliar la propuesta del enfoque hacia la modelación: Aunque dicho enfoque ha mostrado cierto potencial para construir significados en contextos de modelación, es una propuesta que requiere ampliarse a otros contenidos importantes para ingeniería como derivadas de funciones sinusoidales, exponenciales, la integral, entre otros.

## Referencias

- Anaya, M., Cavallaro, M. y Domínguez, M. (2007). Modelling: Difficulties for novice engineering students. En Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.) *Mathematical Modelling, Education, Engineering and Economics. ICTMA 12* (pp. 424 - 432). Chichester, UK: Horwood Publishing.
- Aroshas, S., Verner, I. y Berman, A. (2007). Integration of applications in the technician calculus course. En Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.) *Mathematical Modelling, Education, Engineering and Economics. ICTMA 12* (pp. 433 - 442). Chichester, UK: Horwood Publishing.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Iberoamérica.
- Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. México: Paidós.
- Barbosa, J. (2003). What is mathematical modelling?. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 227-234). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Berlinski, D. (1995). *A tour of the calculus*. New York, EE. UU.: Vintage Books.
- Berry, J. & Houston, K. (1995). *Mathematical Modelling*. Great Britain: Edward Arnold.
- Berry, J., Burghes, D., Huntley, I., James, D. & Moscardini, A. (Eds.). (1986). *Mathematical modelling methodology, models and micros*. Great Britain: Ellis Horwood.
- Biembengut, M. S. y Hein, N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática*, 11(1), 119-134.
- Biembengut, M. S. y Hein, N. (2007). Modelling in engineering: Advantages and difficulties. En Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.) *Mathematical Modelling, Education, Engineering and Economics. ICTMA 12* (pp. 415 - 423). Chichester, UK: Horwood Publishing.
- Bigge, M. (1975). *Teorías de aprendizaje para maestros*. México: Trillas.

- Biza, I., Souyoul, A. y Zachariades, T. (2005). *Conceptual change in advanced mathematical thinking*. Investigación presentada en el Fourth Congress of European Society for Research in Mathematics Education. Resumen recuperado el 20 de junio 2005 en <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/14/wg14listofpapers.htm>
- Bloch, I. & Schneider, M. (2004) *A various milieu for the concept of limit: from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof*. Investigación presentada en el 10th. International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 12. Recuperado el 4 de marzo 2005 en <http://www.icme-organiser.dk/tsg12/>.
- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45 - 56). EE. UU.: Springer.
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 149-171. Recuperado el 19 de octubre 2002, de la base de datos Ebscohost.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*. EE. UU.: Springer.
- Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York, EE. UU.: Dover Publications.
- Brown, J., Collins, A. & Duguid (1989). Situated cognition and the culture of learning [Versión electrónica], *Educational Researcher*, 18, 32-42. Recuperado el 13 agosto 2007 en <http://www.exploratorium.edu/ifi/resources/museumeducation/situated.html>
- Camacho, A. (2002). Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite [Versión electrónica], *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5, 5-26.
- Camarena, P. (1999). Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas en Ingeniería. Memorias del *Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas* (pp. 950-954). México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional.
- Camarena, P. (2001). *Modelos matemáticos como etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería* (Reporte de investigación CGPI-IPN-200731). México: ESIME-IPN.

- Camarena, P. (2002). La matemática en el contexto de las ciencias y los modelos matemáticos. *Memoria del Tercer Congreso de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas* (pp. 296-302). México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional.
- Camarena, P. (2002a). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. Primera parte. *Innovación educativa*, 2(10), 23-27.
- Camarena, P. (2002b). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. Segunda y última parte. *Innovación educativa*, 2(11), 5-11.
- Camarena, P. (2003). Un indicador para el desarrollo de competencias profesionales del futuro ingeniero. *Memoria del Séptimo Congreso de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas* (pp. 1- 6). México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional.
- Camarena, P. (2003a). Los modelos matemáticos en el contexto de los circuitos eléctricos y la metacognición. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 496-501.
- Camarena, P. (2003b). La matemática en contexto y la resolución de problemas. *Innovación educativa*, 3(17), 16-28.
- Camarena, P. (2003c). Las heurísticas disciplinarias y la matemática en contexto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 571-577.
- Camarena, P. (2004). La matemática en el contexto de las ciencias. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(1), 57-61.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica [Versión electrónica]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(1), 1-9. Recuperado el 5 de octubre de 2006 en <http://cimate.uagro.mx/cantoral/>
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis [Versión electrónica]. *Epsilon*, 14(3), 42, 353-369. Recuperado el 5 de octubre de 2006 en <http://cimate.uagro.mx/cantoral/>
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(001), 27-40.
- Cantoral, R. y Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos ejemplos [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 83-102.

- Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 265-292.
- Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 133-154.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: Iberoamérica.
- Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C. (2005). *Guía del sustentante para el examen general para el egreso de la licenciatura en ingeniería industrial*. México: Autor.
- Cervantes, M. (1996). *Un enfoque de modelos para matemáticas. Modelos Básicos*. Manuscrito no publicado.
- Cervantes, M. (2003). *El enfoque de modelos simbólicos como alternativa didáctica para la enseñanza de las matemáticas*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Baja California, Mexicali, México.
- Cervantes, M. y Arcos, J. (2005). La comprensión de las operaciones matemáticas básicas con la didáctica de modelación simbólica. Ponencia presentada en el *VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Hermosillo, Sonora, México.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, L. (2000). *Research Methods in Education*. Londres: Routledge Falmer.
- Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas II*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana [Versión electrónica], *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.
- Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5 (2). Recuperado el 6 de noviembre 2005 en <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>
- Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México D. F.: McGraw Hill.

- Dolores, C. (1999). Una introducción de la derivada a través de la variación [Versión electrónica], *Cuadernos Didácticos*, 6, 47-89. Recuperado el 5 de octubre de 2006 en <http://cecte.ilce.edu.mx/docs/mate/derivada.pdf>
- Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada [Versión electrónica]. En Cantoral, R. (Coord.), *El futuro del cálculo infinitesimal*. México: Iberoamérica. Recuperado el 16 de junio 2005 en <http://www.cimateuagro.org/>.
- Dolores, C. (2000a). La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional [Versión electrónica], *Academia*, 2(20), 9-17. Recuperado el 16 de junio 2005 en <http://www.cimateuagro.org/>.
- Dolores, C., Guerrero, L., Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales [Versión electrónica], *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(1), 73-78. Recuperado el 16 de junio 2005 en <http://www.cimateuagro.org/>.
- Doorman, M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht University, Freudenthal Institute. Recuperado el 21 de junio 2006 en <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0311-094207/index.htm>.
- Dunham, W. (2005). *The calculus gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton, NJ, EE. UU.: Princeton University.
- English, L. (2003). Mathematical modeling with young learners. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.). *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA 11* (pp. 3-18). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Futrell, M., Lynch, S. & Hunter-Boykin, H. (1997). Reaching all students of diverse needs and cultures. *Reform in math and science education: Issues for teachers*. Recuperado el 5 de mayo 2003 en: <http://www.enc.org/professional/research/journal/mathandscience/>
- Gil, G. (s.f.). *El proyecto internacional para la producción de indicadores de resultados educativos de los alumnos (proyecto PISA) de la OCDE*. Recuperado el 28 de septiembre 2004 en <http://ince.mec.es/pub/pisa.htm>.
- Giraldo, V. & Carvalho, L. (2004). *The role of computational descriptions and conflicts in the teaching of the concept of derivative*. Investigación presentada en el 10th. International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 12. Recuperado el 4 de marzo 2005 en <http://www.icme-organiser.dk/tsg12/>.

- Gobierno del Estado de Sonora. (1983). Ley 28 que crea el Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora. *Boletín Oficial del Gobierno del Estado de Sonora*, 27, 14-26. Hermosillo, Sonora. México: Autor.
- Godino, J. D. (1996). Significado y comprensión de los objetos matemáticos [Versión electrónica]. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME conference*, 2, 417-424. Valencia, España. Recuperado el 23 de marzo de 2001 en <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/pme20es.htm>
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática [Versión electrónica], *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(23), 237-284. Recuperado el 21 de febrero 2005 en [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_tfs.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_tfs.htm).
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática* [Versión electrónica]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 21 de febrero 2005 [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_tfs.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_tfs.htm).
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos [Versión electrónica], *Recherches en Ddidactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado el 19 de abril 2002 en <http://www.ugr.es/~jgodino/semiotica.htm>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en didáctica de las matemáticas [Versión electrónica], *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10. Recuperado el 19 de abril 2002 en <http://www.ex.ac.uk/~Pernest/pome10/art7.htm>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Versión electrónica]. En I. Vale y J. Portela (Eds.) *Actas del IX seminario de investigación en educación matemática (SIEM) de la sociedad portuguesa de investigación en educación matemática*. Guimaraes, España. Recuperado el 26 de marzo 2001 en <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/funciones.html>
- Godino, J. D. y Recio, A.M. (1998). Un modelo semiótico para analizar las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática [Versión electrónica]. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Prodeedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education (Research forum)*, 3, (1-8). University

- of Stellenbosh, South Africa. Recuperado el 26 de marzo 2001 en <http://www.ugr.es/~jgodino/>
- Grabiner, J. (2005). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Mineola, New York. USA: Dover Publications.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177. Recuperado el 3 de agosto 2005, en la base de datos Ebscohost.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling and instructional design. En Cobb, P., Yackel, E. and McClain, K. (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instruccional design* (pp. 225-274). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129. Recuperado el 1 de agosto 2005, en la base de datos Ebscohost.
- Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory, *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796. Recuperado el 3 de agosto 2005 en Ebscohost.
- Greer, B. y Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies – overview. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 219 - 224). EE. UU.: Springer.
- Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.), *Mathematical modelling, education, engineerig and economics*, ICTMA 12. Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Häkiöniemi, M. (2005). *Is there a limit in the derivative? – exploring student's understanding of the limit of the difference quotient*. Investigación presentada en el Fourth Congress of European Society for Research in Mathematics Education. Resumen recuperado el 20 de junio 2005 en <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/14/wg14listofpapers.htm>
- Hamson, M. (2003). The place of mathematical modeling en mathematics education. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 215-226). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Hernández, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós.

- Hens, H. (2003). Working and learning in the real world: A mathematics education. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 71-80). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Hofe, R. (1998). *Problems with the limit concept on a case study of a calculus lesson within a computer-based learning environment*. Recuperado el 20 de junio 2005 en <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/gdm/Paperspdf1997/vomHofe.pdf>
- Hoffmann, L. (1985). *Cálculo aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. México, D. F.: McGraw-Hill.
- Houston, K. (2003). ICTMA: The first 20 years. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical Modelling: A Way of Life. ICTMA 11* (pp. 255-267). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Houston, K. & Neill, N. (2003). Assessing modelling skills. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA 11* (pp. 156-164.) Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación Superior. (2003). *Los resultados de las pruebas PISA, elementos para su interpretación*. México, D. F.: Autor. Recuperado en <http://www.inee.edu.mx/>
- Izard, J., Haines, C., Crouch, R., Houston, K. y Neill, N. (2003). Assessing the impact of teaching mathematical modelling: some implications. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA 11* (pp. 165-177) Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Jablonka, E. (2007). The relevance of modelling and applications: Relevant to whom and for what purpose? En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 193 - 200). EE. UU.: Springer.
- Jackson, A. (1994). What is the IMU?. In *IMU Bulletin 38*. Recuperado el 29 de nov. 2004 en [http://www.mathunion.org/Publications/Bulletins/38/what\\_is\\_imu/what\\_is\\_imu.html](http://www.mathunion.org/Publications/Bulletins/38/what_is_imu/what_is_imu.html).
- Jiang, Q., Xie, J. & Ye, Q. (2007). Mathematical modelling modules for calculus teaching. En Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.), *Mathematical modelling, education, engineerig and economics, ICTMA 12* (pp. 288-293). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.

- Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 503 -510). EE. UU.: Springer.
- Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school – examples and experiences. In: Henn, Hans-Wolfgang & Kaiser, Gabriele (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*. Festband für Werner Blum. Hildesheim, Franzbecker, (99-108). Recuperado el 9 de marzo 2005 en:  
[http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Personal/Gkaiser/pdf-publist/16\\_Kaiser.pdf](http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/Personal/Gkaiser/pdf-publist/16_Kaiser.pdf)
- Kaiser-Mesmer, G. (1986). Modelling in calculus instruction – empirical research towards an appropriate introduction of concepts. En Berry, J., Burghes, D., Huntley, I., James, D. & Moscardini, A. (Eds.). *Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros*. Great Britain: Ellis Horwood.
- Krick, E. V. (1995). *Introducción a la ingeniería y al diseño en la ingeniería*. México: Limusa.
- Lamon, S. (2003). Powerful modelling tools for high school algebra students. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA 11* (pp. 81-96) Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Lave, J.& Wenger, E. (1991). *Situated learning, legitimate peripheral participation*. Great Britain: Cambridge University.
- Lehto, O. (1995). IMU - Past and present. In *IMU Bulletin 39*. Recuperado el 29 de noviembre 2004 en <http://www.mathunion.org/Publications/Bulletins/39/past+present.html>.
- Lesh, R. (2003). How mathematizing reality is different from realizing mathematics. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 37-52). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Lesh, R. & Doerr, H. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. En Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instruccional design* (pp. 361-384). Mahwah, NJ, EE. UU.: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development, *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (2&3), 157-189. Recuperado el 15 de noviembre 2004, en la base de datos Ebscohost.
- Lesh, R. y Lehrer, R: (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical thinking and learning*, 5 (2&3), 109-129. Recuperado el 15 de noviembre 2004, en la base de datos Ebscohost.
- Lesh, R., Carmona, G. y Post, T. (2002). Models and modeling. *Proceedings of the Annual Meeting for the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education, 1-4*. Recuperado el 15 de noviembre 2004, en la base de datos en Ebscohost.
- Lingefjård, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – necessity or unnecessarily. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 333 – 340). EE. UU.: Springer.
- Lingefjård, T. (2007a). Mathematical modelling in teacher education. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 475 - 482). EE. UU.: Springer.
- Lingefjård, T. y Holmquist, M.. (2003). Learning mathematics using dynamic geometric tools. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life, ICTMA 11* (pp. 255-267). Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach*. San Francisco: Jossey Bass.
- Mochón, S. (1994). *Quiero entender cálculo*. México: Iberoamericana
- Moskowitz, H. y Wright, G. P. (1982). *Investigación de operaciones*. México: Prentice-Hall .
- Muller, E. y Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics – overview. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 267 - 274). EE. UU.: Springer.
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 1 - 33). EE. UU.: Springer.

- Organisation for Economic Co-operation and Development, (2003). *The PISA 2003 assessment framework- Mathematics, Reading, Science and Problem Solving knowledge and skills*. Recuperado el 28 de septiembre 2004 en <http://www.pisa.org>.
- Orton, A. (1998). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Morata.
- Pinet, R. (2001). *Dinámica sobre la tierra*. Universidad Autónoma de Baja California. Mexicali, B. C. México: UABC.
- Pozo, J. (2003). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account [Versión electrónica], *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35(1), 277-302. Recuperado el 9 de febrero 2005 en <http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML>.
- Radford, L. (1998a). On culture and mind: A post-vygotskian semiotic perspective UIT an example from Greek mathematical thought. Paper of 23rd. *Annual Meeting of the Semiotic Society of America*, Victoria College, University of Toronto, October 15-19. Recuperado el 9 de febrero 2005 en <http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML>.
- Radford, L. (2004). Semiótica cultural y cognición. Conferencia plenaria en la *Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México. Recuperado el 9 de febrero 2005 en <http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML>.
- Ríoaseco, M. y Romero, R. (1997). La contextualización de la enseñanza como elemento facilitador del aprendizaje significativo. Actas del *Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo*. Burgos. España. 15-19 sep. Recuperado el 16 de mayo de 2006 en <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2271945>
- Rodríguez, M. L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. Memorias del *Primer Congreso Internacional Sobre Mapas Conceptuales*. Navarra, España. Recuperado el 9 de junio de 2005 en <http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf>
- Roorda, G., Vos, P. y Goedhart, M. (2007). The concept of the derivative in modelling and applications. En Haine, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.) *Mathematical Modelling, Education, Engineering and Economics, ICTMA 12*, (pp. 288-293). Chichester, UK: Horwood Publishing.

- Slack, N., Chambers, S., Harland, C., Harrison, A. y Johnston, R: (1999). *Administración de Operaciones*. México, D. F.: CECOSA.
- Steen, L. A., Turner, R. y Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 285 - 294). EE. UU.: Springer.
- Swetz, F. (1991). When and how can we use modeling?. In Austin, J. D. (Eds.) *Applications of Secondary School Mathematics, 20-24*. Reston, VA., USA: National Council of teacher of mathematics.
- Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 170-176. Berkeley, Great Britain. Recuperado el 22 de febrero 2005 en <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>
- Tall, D. (1985). Understanding the calculus [Versión electrónica], *Mathematics Teaching*, 110, 49-53. Recuperado el 22 de febrero 2005 en <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics*. Bergen, Norway. Recuperado el 7 de agosto 2007 en <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>
- Tall, D. & Mejia, J. (2004). Reflecting on post-calculus reform [Versión electrónica], Ponencia presentada en el *10th. International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 12*. Recuperado el 4 de marzo 2005 en <http://www.icme-organiser.dk/tsg12/>.
- Tarp, A. (2004). Applying math-matics, mathe-matism or meta-matics. Paper of *The 10th. International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group 20*. Copenhagen, Dinamarca. Recuperado el 9 de marzo 2005 en <http://www.icme-organisers.dk/tsg20/papers.html>
- Titscher, S., Meyer, M., Wodak, R. & Vetter, E. (2000). *Methods of text and discursive analysis*. Londres: Sage Publications.
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (1996). *Mathematics education research: Past, present and future*. UNESCO Principal Regional Office for Asia and the Pacific. Bangkok, Thailand: Autor.

- Usiskin, Z. (2007). The arithmetic operations as mathematical models. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 257 - 264). EE. UU.: Springer.
- Van Del Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistics mathematics education: An example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54, 9-35. Recuperado 1 de agosto 2005, en la base de datos Ebscohost.
- Wenzelburger, E. (1993). *Cálculo diferencial*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Vargas, R. (1998). *Reestructuración industrial, educación tecnológica y formación de ingenieros*. México: ANUIES
- Vigotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. México: Paidós.
- Wilkins, J. L. (2000). Preparing for the 21st century: The status of quantitative literacy in the United States. *School Science and Mathematics*, 100(8), 405-418.
- Yanagimoto, A. (2003). Environment Problems and Mathematical Modeling. En Lamon, S. J., Parker, W. & Houston, K. (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life. ICTMA 11* (pp. 53-60) Chichester, Great Britain: Horwood Publishing.
- Yin, R. K. (2003). Case study research, design and methods (3a. ed.). *Applied social research methods series: Vol 5*. Thousand Oaks, CA, EE. UU.: Sage.
- Zúñiga, L. (2004). *Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería*. Tesis doctoral no publicada. Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

**Apéndice A: Notas del curso**



**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**  
Las operaciones básicas y la derivada  
bajo un enfoque hacia la modelación

Mdae. Maximiliano Cervantes S.

Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora  
Unidad San Luis Río Colorado  
Ingeniería Industrial  
Marzo 2006

Nota del autor:

Este documento es parte del proyecto de investigación “*La didáctica del enfoque hacia la modelación en el aprendizaje de la derivada y el desarrollo de habilidades de modelación*”. El proyecto es dirigido por el Dr. René Pinet Plasencia y por la Dra. Patricia Camarena Gallardo y se realiza en el Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora como parte de los estudios de doctorado en ciencias educativas en el Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo de la Universidad Autónoma de Baja California. Prohibida su reproducción.

INDICE

1.	Modelos y modelación. Una nota introductoria .....	4
2.	<i>Modelos para relaciones de unión o separación de cantidades</i> .....	7
2.1	La suma.....	7
2.2	La resta.....	9
2.3	La multiplicación .....	12
2.4	La división.....	15
2.5	Potencias y raíces .....	18
3.	<i>Modelos para relaciones de variación: dependencia, variación media, en punto y total</i> .....	22
3.1	La razón y la razón por unidad.....	22
3.2	La razón de cambio promedio y en un punto.....	25
3.3	El Límite de una función.....	39
3.3.1	No siempre se tiene un límite.....	42
3.4	La derivada.....	44
3.4.1	La recta tangente.....	46
3.4.2	Diferenciales .....	49
3.4.3	Algunas reglas de derivadas .....	50
3.4.4	Funciones derivables.....	56
3.4.5	Problemas que implican el uso de derivadas.....	56
3.4.6	Cuando no se tiene una función.....	58

### 3. Modelos para relaciones de variación: Dependencia, variación media, en punto y total<sup>1</sup>.

En este curso nos interesamos básicamente en las relaciones de cantidades que están variando, que aunque son un poco más difíciles de establecer son muy importantes en ingeniería, pues con frecuencia interesa conocer como varían ciertas cantidades en determinado momento, y en que otros alcanzan su expresión máxima o mínima, tal como pudiera ser tensión dentro de una viga o columna sometida a ciertos esfuerzos, la presión del agua que actúa sobre la cortina de una presa, el nivel de producción que minimiza los costos de una fábrica, a qué velocidades un automóvil consume menor gasolina, etc.

Distinguiamos al menos cuatro tipos de relaciones de variación: de dependencia, de variación media e instantánea y de variación total. Las relaciones de dependencia las tenemos cuando se da una dependencia entre dos cantidades, en las que el valor de una cantidad independiente determina el valor de otra dependiente. Así si la cantidad independiente varía, también lo hará la dependiente. El concepto matemático de función se constituye en un *modelo para* esta dependencia y la describe a través de una representación. Algunos ejemplos son:

$$\text{a) } f(x) = 6x - 1 \quad \text{b) } h(t) = 5t^2 + 3 \quad \text{c) } f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

Las relaciones de variación media se presentan cuando dos cantidades están variando y se establece una variación promedio entre ellas durante todo el intervalo de variación. Por otro lado, las relaciones de variación instantánea se presentan en un "instante" de las variaciones, es decir en un punto de medición. El concepto de derivada modela esta relación de variación instantánea y permite identificar qué valor tiene en un momento, o en qué momento la cantidad dependiente ha llegado a un valor extremo, esto es, en que momento una tensión llega a ser máxima por ejemplo, o la presión del agua sobre la cortina de una presa, o bien, en que nivel de producción los costos se minimizan. En el análisis de las relaciones de variación entre dos cantidades es necesario una revisión de ciertas nociones.

#### 3.1 La razón y la razón por unidad.

Hay diversas situaciones en las que podemos establecer una relación entre cantidades en la que una es varias veces o bien, parte de otra. Así si se tiene un acervo de 5000 libros para la carrera de ingeniería y se tiene una matrícula de 500, 300 ó 200 alumnos para la carrera de ingeniería, la relación que hay entre la cantidad de libros y la de alumnos es de 50 a 5 ( $5000/500 = 50/5$ ), o de 50 a 3 ( $5000/300 = 50/3$ ) o de 50 a 2 ( $5000/200 = 50/2$ ).

Algo similar pudiéramos hacer a la inversa, al identificar la relación entre la cantidad de alumnos y la de libros, en este caso la relación sería de 5 a 50 ( $500/5000 = 5/50$ ), de 3 a 50 ( $300/5000 = 3/50$ ) o bien, de 2 a 50 ( $200/5000 = 2/50$ ). Estos dos tipos de relaciones son modeladas por el concepto de razón: "La razón de un número  $a$  a un número  $b$ , distinto de cero, es el cociente que se obtiene al dividir  $a$  entre  $b$ "

Ahora veamos un caso particular de estas relaciones. Supongamos que en cada caso del ejemplo anterior deseamos tener una relación de la cantidad del numerador por una unidad de la cantidad del denominador, esto es, una relación de  $a$  a una unidad de  $b$ . Veamos el siguiente ejemplo:

Situación Típica:

<sup>1</sup> Sólo se proporcionan los temas 3.1 y 3.2 en que se presenta la derivada como razón de cambio de acuerdo con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación.

1) Dos placas de acero provenientes de diferentes fabricantes, son sometidas a tracción en una máquina para conocer su resistencia. La placa A tiene una sección transversal de  $2.50 \text{ cm}^2$  y cede a la tracción cuando se le aplica una fuerza de 2875 Kg. La placa B con una sección transversal de  $1.75 \text{ cm}^2$  cede a los 2100 Kg. ¿Cuál presenta mayor resistencia a la tracción?

Planteamiento del problema:

Se pide determinar que placa tiene mayor resistencia a partir de los datos de tensión y sección transversal.

VARIABLES Y CONSTANTES:

Sección transversal A:  $2.50 \text{ cm}^2$   
Fuerza de tracción en A: 2875 Kg  
Sección transversal B:  $1.75 \text{ cm}^2$   
Fuerza de tracción en B: 2100 Kg.  
Resistencia a la tracción en A:  $t_A$   
Resistencia a la tracción en B:  $t_B$

Relaciones entre las variables:

La resistencia a la tracción es mayor entre más fuerza se requiera para que la placa se rompa y es menor entre mayor sea la sección que se opone a la fuerza. Esto es, la resistencia es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la sección transversal.

Representación o modelo:

- a) ¿cuál es mayor?
  
- b) ¿Qué significan estas relaciones?

La resistencia a la tracción es un concepto que sólo se puede describir a través de dos cantidades: una de fuerza y una de área que se opone a esa fuerza. Estas cantidades se relacionan de una manera particular con la resistencia, a mayor fuerza requerida para romper la placa, mayor es la resistencia. Por otro lado entre mayor área de material se requiere para que la placa se rompa, su resistencia es menor. Así una buena unidad de medida para la resistencia es la razón fuerza/área:  $\text{Kg}/\text{cm}^2$ . En el inciso a) se tiene una razón entre la fuerza y el área que no permite identificar cuál de las dos resistencias es mayor. En el inciso b) se tiene una razón *por unidad* (o tasa) que permite conocer que tanta fuerza se requiere por unidad de área, es decir, al tener una unidad en el denominador se establece una *relación a uno* que permite establecer relaciones de tamaño. Así la placa B tiene mayor resistencia que la placa A. De esta forma, la *razón por unidad* o *unitaria* funciona como un *modelo para las relaciones a uno* entre dos cantidades. En física y en ingeniería muchos conceptos se describen mediante razones: velocidad (distancia recorrida/tiempo), presión (fuerza/área), densidad (masa/volumen) y se comparan mediante razones por unidad:  $\text{km}/\text{hr}$ ,  $\text{lb}/\text{pulg}^2$ ,  $\text{g}/\text{cm}^3$ , etc.

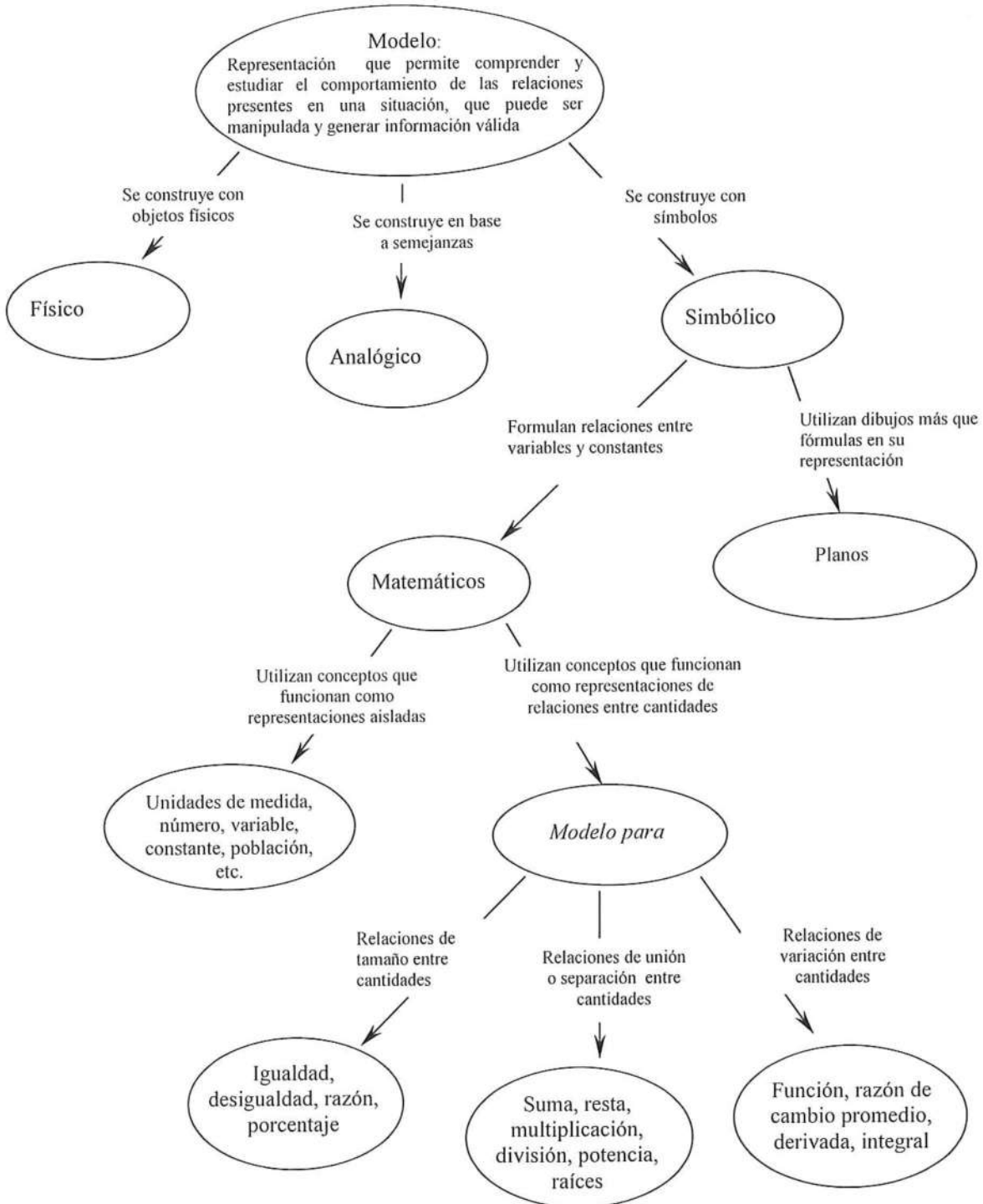
Ejercicios.

Realice los ejercicios y problemas siguientes utilizando una razón unitaria. En su caso, explique su respuesta.

1. ¿Cuál es la velocidad de un automóvil que recorre 630 Km en 7 hr? ¿Cuál es la velocidad en millas?
2. ¿Cuál es la presión a que se somete el aceite de un pistón hidráulico que levanta un auto de 2500 libras, si el área de contacto del pistón es de 14.3 pulg<sup>2</sup>?
3. Desarrolle una interpretación correcta para las siguientes representaciones
  - a) 40 toneladas/m<sup>2</sup>
  - b) 40 toneladas/almacén
  - c) 40 toneladas /día
  - d) 10 días/trabajador
  - e) 50 libras/bolsa
  - f) 50 Lb-ft/motor
  - g) 50 Lb-ft/hombre
  - h) 10 días/mes
  - i) 5 millas/auto
  - j) 24 semanas/ 3 semanas
  - k) 10 000 dl / 2 casas
4. Ud. dispone de 4 horas para llegar a una ciudad y no sabe cual es la distancia exacta que tiene que recorrer. ¿Cuál es la velocidad que debe tener para llegar en 4 horas?
5. Su equipo de trabajo fue asignado para limpiar el patio posterior de su escuela. Si no sabe el área exacta, ¿cuántos m<sup>2</sup> deberá limpiar cada uno de los 5 integrantes de equipo?. Incluya unidades.
6. Se tienen 2300 libras para "empastar" o reparar. Si no sabe cuántos voluntarios se presentarán, ¿cuántos libros deberá empastar cada voluntario?. Incluya unidades. ¿Cómo sería la representación si sabe que son 10 voluntarios pero no conoce cuántos libros se van a reparar?
7. La barda de la escuela tiene 8 ft de alto pero se desconoce la distancia total a lo largo. Tampoco sabe cuántos pintores vendrán a ayudarlo. Represente con un modelo los ft<sup>2</sup> que tendrá que pintar. Incluya unidades.
8. Una pieza de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga, si el área que soporta esta fuerza es de 19.63 cm<sup>2</sup> ¿cuál es la carga que tiene que soportar por cada cm<sup>2</sup> de área?
9. La pendiente de una carretera es la distancia que asciende por cada unidad de longitud. Determine la pendiente promedio de una carretera que asciende 50 m en 3 Km.
10. El calor de fusión de un material sólido es la cantidad de calorías necesario para fundir un gramo de dicho material. Determine el calor de fusión del hielo si 2000 calorías funden 25 gramos de hielo.
11. Si se traza un mapa con una escala de 1.5 cm a 15 kilómetros, ¿qué distancia representan 9 centímetros?

### 3.2 Razón de cambio promedio y en un punto.

Hasta ahora hemos revisado los conceptos que nos sirven como *modelo para* situaciones en las que se presentan relaciones de tamaño, o bien, de unión o separación entre cantidades:



En esta parte del curso no analizaremos la función como un *modelo para* la relación de dependencia entre dos cantidades, sino más bien, nos enfocaremos a la razón de cambio promedio y a la razón de cambio en un punto. Para analizar la primera resuelva el problema que se presenta en la siguiente situación típica.

Situación Típica:

1) Con frecuencia en ingeniería industrial se presentan problemas asociados a las velocidades de un objeto, como la velocidad de una pieza en una máquina, de bandas de producción, de fluidos, cajas en transportadoras de rodillos, etc. Con el fin de analizar los problemas de objetos en movimiento resuelva el siguiente problema.

Un objeto se deja caer en caída libre. ¿Cuál es la velocidad promedio durante las primeras cinco décimas de segundo? ¿Cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento? ¿cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$ s; en cualquier momento  $t$  si la posición del objeto sigue la función  $s(t) = t^3$ ?

a) Para la primera pregunta:

Planteamiento del problema:

Variables y constantes:

Obtención de datos:

Puntos de medición	
tiempo $t$ (seg)	distancia o posición (m)

De los textos se tiene que para la caída libre, la función de posición es  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ , aproximadamente,  $s(t) = 5t^2$

Relaciones entre las variables:

Representación o modelo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Solución matemática:

Interpretación de la solución:

La velocidad promedio como razón de cambio promedio.

Hemos visto que la velocidad de un objeto define como el resultado de dividir dos cantidades de variación: una distancia recorrida o desplazamiento entre una variación de tiempo; también puede ser considerada como un cambio de posición entre un cambio de tiempo. Nos referimos a ella como velocidad promedio y se modela con la siguiente expresión:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Donde  $v_m$  representa la velocidad que permite recorrer la distancia  $\Delta s$  en una variación de tiempo  $\Delta t$ , es decir, se trata de una velocidad constante durante toda la variación de tiempo. Al considerar que el cociente de una cantidad  $a$  entre otra  $b$  diferente de cero proporciona una razón por unidad entre esas cantidades, podemos ver la razón  $\Delta s/\Delta t$  como una razón por unidad entre dos variaciones: una de posición entre una de tiempo. De manera general si tenemos una variable  $f(x)$  que depende de otra variable independiente  $x$ , la *razón de cambio* (función/variable) se define como el cociente:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dicha razón de cambio es un *modelo para* las relaciones de razón por unidad entre dos cantidades de variación. Volviendo a nuestro problema encontramos que la distancia recorrida es un cambio de posición cuya cantidad es de  $(1.25 - 0.0)$  m y que el tiempo transcurrido es un cambio de tiempo cuya cantidad es de  $(0.5 - 0.0)$  s, de esta manera, la velocidad media o *razón de cambio promedio* para el intervalo de 0 a 0.5 segundos de caída libre es:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(1.25 - 0.0)m}{(0.5 - 0.0)s} = 2.5 \text{ m/s}$$

Esto es, una razón de cambio posición/tiempo de 2.5 m por cada segundo de tiempo de caída libre. Otros ejemplos de conceptos que se expresan como una razón de cambio son los conceptos de

aceleración  $a$  y productividad ( $a = \Delta v / \Delta t$ ;  $p = \Delta P / \Delta t$ ). Conceptos como la resistencia a la tracción, densidad y presión ( $\tau = F/A$ ,  $\rho = m/v$ ,  $P = F/A$ ), aunque son una razón por unidad no son razones de cambio, ya que no modelan variaciones. Volvamos ahora a la segunda pregunta de nuestro problema.

b) ¿Cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$ s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento  $t$ ?

Planteamiento del problema:

Para las mismas condiciones anteriores, ahora se pide calcular la velocidad para el tiempo  $t = 0.4$ s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento  $t$ . Pero ¿Cuál es el tiempo  $t = 4$  s? ¿ $t = 0.6$  s? ¿cualquier momento  $t$ ?

Desde una perspectiva de modelación, la respuesta está en la manera en que determinamos una cantidad de tiempo. Dado que éste es continuo, necesitamos emplear un segmento de ese tiempo como unidad de medida y luego contar cuántas unidades tenemos. Así cuando hablamos de un tiempo  $t = 0.4$  s, nos referimos al momento en que se mide una cantidad de tiempo igual a cuatro décimas de segundo. Dicha cantidad es constante, no varía con la unidad de medida que se utilice (décimas, centésimas, milésimas, ...diezmillonésimas...infinitésimas de segundo):

$$t = 0.4 \text{ s} = 0.40 \text{ s} = 0.400 \text{ s} = \dots = 0.4000000 \text{ s} = \dots = 0.4000000000\dots \text{ s}$$

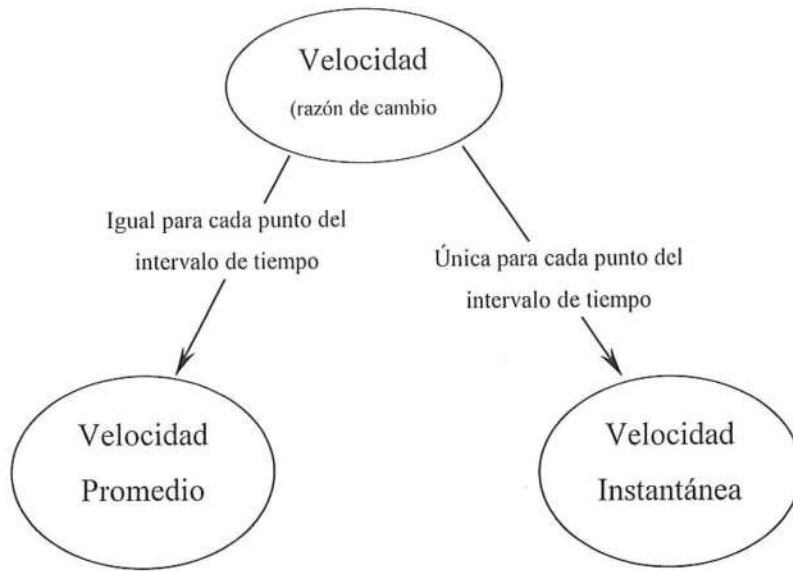
Otro aspecto relacionado con el momento  $t = 0.4$  s es cuánto dura. La respuesta también está en la unidad de medida que se utilice. Si se utilizan décimas, el momento  $t = 0.4$  s dura una décima de segundo, puesto que no se tendrá ninguna otra cantidad hasta que se complete otra décima de segundo. Si para aumentar la precisión se utilizan centésimas de segundo, el momento  $t = 0.4$  s durará una centésima de segundo, puesto que ahora se necesitará que transcurra una centésima de segundo para obtener la siguiente cantidad ( $t = 0.41$  s). Si nuestro interés es continuar mejorando la precisión y utilizamos milésimas de segundo, el momento  $t = 0.400$  s durará una milésima de segundo, puesto que sólo después de una milésima se obtendrá la siguiente cantidad ( $t = 0.401$  s). Puede llevar al infinito la reducción de la unidad de medida, así el momento  $t = 0.4$  s durará un instante infinitesimal. Pero la unidad de medida nunca puede ser cero porque no se tendría una unidad con que medir y determinar cantidades.

Definimos entonces el tiempo  $t$  como el instante en que se tiene una cantidad de tiempo medida con unidades infinitesimales. A dichos instantes también se les conoce como puntos o valores puntuales de la variable tiempo.

Definimos ahora la velocidad promedio  $v_m$  para el intervalo de tiempo  $\Delta t$  en el que un objeto recorre la distancia  $\Delta s$  como una velocidad constante para cada instante del intervalo  $\Delta t$  con la que se recorre la distancia  $\Delta s$ :  $v_m = \Delta s / \Delta t$

Identificaremos por el momento como *velocidad instantánea* a la velocidad que lleva el objeto en un instante o punto del tiempo en el intervalo  $\Delta t$ . De este modo, lo que se desea en esta parte del problema es construir un modelo para encontrar la velocidad instantánea en que el tiempo es igual a cuatro, seis décimas de segundo, o en cualquier instante  $t$ .

Las relaciones entre estos conceptos las podemos observar en el siguiente esquema:



Variables y constantes:

Distancia recorrida:  $\Delta s = s_2 - s_1$

Tiempo transcurrido:  $\Delta t = t_2 - t_1$

Constante de gravedad:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Datos:

De la sección anterior tenemos los siguientes datos de tiempo y posición:

$t$ (s)	$s(t)$ (m)	$v$ (m/s)

y podemos extender nuestros datos a las velocidades promedio en cada décima de segundo:

$\Delta t$ (s)	$\Delta s$ (m)	$v_m$ (m/s)

Relaciones entre variables:

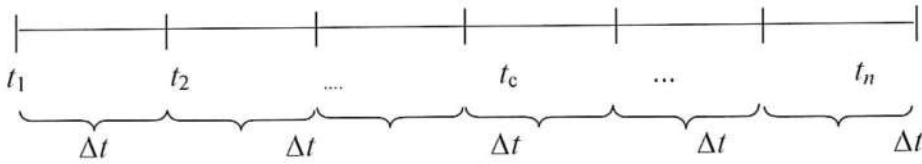
Para obtener una velocidad es necesario separar la cantidad distancia recorrida en partes iguales a la cantidad tiempo utilizado para tener una razón de cambio que nos modele la razón por unidad posición/tiempo del problema. Pero no es posible determinar la cantidad de distancia recorrida con la información sobre la posición que se tiene en un solo punto del tiempo. Se requieren dos para conocer la distancia recorrida.

Con lo que disponemos sólo podemos calcular velocidades promedio. También podemos observar que el intervalo de 0.0 a 0.5 décimas de segundo está formado por cinco intervalos de una décima de segundo cada uno. Si calculamos la velocidad promedio para cada intervalo, encontramos que la velocidad promedio de todo el intervalo es igual a la velocidad promedio del intervalo que corresponde a la tercer décima de segundo. Podemos ver que este tercer intervalo se encuentra al centro del intervalo de 0.0 a 0.5 segundos. También encontramos que la velocidad de cada intervalo de una décima se incrementa en forma constante de un metro sobre segundo.

Esto nos sugiere que si un intervalo de tiempo está formado por intervalos menores iguales y sus velocidades se incrementan en forma constante, la velocidad promedio de todo el intervalo es igual a la velocidad promedio de un intervalo menor situado al centro del mismo. Si este intervalo menor es del tamaño de una unidad de medida infinitesimal, estaremos hablando de un punto. Así la velocidad promedio de un intervalo es igual a la velocidad instantánea de un punto de tiempo ubicado al centro del mismo, cuando estas velocidades se incrementan en forma constante.

Para ver si esta condición es una propiedad para las velocidades que se incrementan de manera constante en intervalos de tiempo iguales, hagamos el siguiente análisis:

Si en lugar de décimas de segundo utilizamos el intervalo  $\Delta t$  para medir el tiempo, como una unidad de medida infinitesimal, al inicio del intervalo tendremos un tiempo  $t_1$  y al final un tiempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . Si dentro de un intervalo cualquiera de tiempo tenemos  $n$  intervalos infinitesimales, entonces tendremos  $n + 1$  cantidades o puntos de tiempo:



En cada punto tendremos al objeto en una posición  $s(t)$  y con una velocidad  $v(t)$ . También tendremos que en cada instante  $\Delta t$  ocurre un cambio de velocidad  $\Delta v$ . Al inicio de dicho cambio tendremos una velocidad  $v_1$  y al final una velocidad  $v_2 = v_1 + \Delta v$ . Si representamos la velocidad obtenida en el primer punto del tiempo con  $v_{(t_1)} = v_1$ , la velocidad del segundo instante con  $v_{(t_2)} = v_2$  y así sucesivamente, para todo el intervalo de tiempo tendremos  $n + 1$  velocidades instantáneas. La velocidad promedio de todo el intervalo será igual al promedio de todas las velocidades instantáneas para estas condiciones:

$$v_m = \frac{\sum v_i}{n+1} = \frac{v_{(t_1)} + v_{(t_2)} + \dots + v_{(t_c)} + \dots + v_{(t_{n+1})}}{n+1}$$

y  $v_{(t_2)} = v_{(t_1)} + \Delta v$ ;  $v_{(t_3)} = v_{(t_1)} + 2\Delta v$ ;  $v_{(t_{n+1})} = v_{(t_1)} + n\Delta v$

y en virtud de su posición:  $v_{(t_c)} = v_{(t_1)} + \frac{n}{2} \Delta v$

Luego:

$$v_m = \frac{\sum v_i}{n+1} = \frac{v_{(t_1)} + (v_{(t_1)} + \Delta v) + (v_{(t_1)} + 2\Delta v) + (v_{(t_1)} + 3\Delta v) + \dots + (v_{(t_1)} + n\Delta v)}{n+1}$$

$$v_m = \frac{\sum v_i}{n+1} = \frac{v_{(t_1)} + v_{(t_1)} + \Delta v + v_{(t_1)} + 2\Delta v + v_{(t_1)} + 3\Delta v + \dots + v_{(t_1)} + n\Delta v}{n+1}$$

$$v_m = \frac{\sum v_i}{n+1} = \frac{v_{(t_1)}(n+1) + (\Delta v + 2\Delta v + 3\Delta v + \dots + n\Delta v)}{n+1}$$

$$v_m = \frac{\sum v_i}{n+1} = \frac{v_{(t_1)}(n+1) + \frac{n}{2}(n+1)(\Delta v)}{n+1} = v_{(t_1)} + \frac{n}{2} \Delta v = v_{(t_c)}$$

Con esta demostración confirmamos que para estas condiciones, la velocidad promedio de un intervalo de tiempo cualquiera es igual a la velocidad instantánea del punto  $t_c$  que se encuentra al centro del mismo:  $v_m = v_{t_c}$

Representación o modelo:

Aunque aún no hemos desarrollado un modelo para obtener la velocidad en un punto cualquiera  $t$ , la reflexión previa nos lleva a que podemos elaborar un modelo para la velocidad o razón de cambio posición/tiempo en un punto  $t_c$ , construyendo un intervalo de tiempo cualquiera alrededor del mismo de tal forma que quede colocado en el centro. Si el punto

inicial lo representamos con  $t_1$  y el final con  $t_2$  y calculamos la velocidad promedio obtenemos un modelo para la velocidad en un punto cualquiera  $t_c$ :

$$v(t_c) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

para poner este modelo como una función de  $t_c$  hacemos:  $t_1 = t_c - \frac{1}{2}\Delta t$  y  $t_2 = t_c + \frac{1}{2}\Delta t$

así nuestro modelo para la velocidad instantánea o razón de cambio posición/tiempo en un punto  $t_c$  es:

$$v(t_c) = \frac{s\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right) - s\left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right) - \left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)}$$

$$v(t_c) = \frac{s\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right) - s\left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}$$

para nuestro problema, la función de posición es  $s(t) = 5t^2$  dada en metros. Si colocamos esta función en el modelo anterior, tendremos un modelo que nos proporcione la velocidad instantánea de la pelotita en cualquier momento de la caída libre:

$$v(t_c) = \frac{s\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right) - s\left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}$$

$$v(t_c) = \frac{5\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right)^2 - 5\left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)^2}{\Delta t} = \frac{5\left(t_c^2 + t_c\Delta t + (\Delta t)^2\right) - 5\left(t_c^2 - t_c\Delta t + (\Delta t)^2\right)}{\Delta t}$$

$$v(t_c) = \frac{5t_c^2 + 5t_c\Delta t + 5(\Delta t)^2 - 5t_c^2 + 5t_c\Delta t - 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{10t_c\Delta t}{\Delta t} = 10t_c$$

así el modelo de velocidad instantánea para nuestro problema es  $v(t_c) = 10t_c$  (m/s).

Solución matemática:

Lo que se nos ha pedido es encontrar la velocidad instantánea en que el tiempo es  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s y para cualquier momento  $t$ . Si hacemos el valor  $t = t_c$ , podemos calcular la velocidad en  $t$  utilizando el modelo anterior. Así tenemos:

$$v(t = 0.4 \text{ s}) = 10(0.4) = 4.0 \text{ m/s}$$

$$v(t = 0.6 \text{ s}) = 10(0.6) = 6.0 \text{ m/s}$$

$$v(t) = 10t \text{ (m/s)}$$

Interpretación de la solución:

¿Qué significa esto? Si consideramos que  $v(t_c) = 10t_c$  es el resultado de dividir la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido, lo que tenemos es una razón de cambio posición/tiempo en un punto  $t_c$ . Esto quiere decir que en el momento  $t = 0.4$  s la razón de cambio posición/tiempo es de cuatro metros por un segundo de variación. Si esa razón se mantuviera por dos segundos, la variación de posición sería el doble: ocho metros. Como ejercicio encuentre la velocidad instantánea para cada décima de segundo de caída de la pelotita. Volvamos a nuestro problema y tratemos de resolver la tercer pregunta.

- c) ¿cuál es la velocidad que lleva el objeto en el tiempo  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento  $t$  si la posición del objeto sigue la función  $s(t) = t^3$ ?

Planteamiento del problema:

Se pide determinar la velocidad que lleva el objeto en  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s; en cualquier momento  $t$  como en el caso anterior pero con una función de posición  $s(t) = t^3$ . Esto nos lleva a que no es posible utilizar el modelo construido para las condiciones de la segunda pregunta, ya que la velocidad no se incrementa de manera constante para iguales intervalos de tiempo y por lo mismo, la velocidad promedio de un intervalo no es igual a la velocidad promedio del punto central. Lo mismo podría decirse considerando a la velocidad como una razón de cambio. En consecuencia nuestro problema es indagar la velocidad en un punto  $t$  aun cuando no dispongamos de un punto  $t_c$  cuya velocidad es igual a la velocidad promedio del intervalo.

Variables y constantes:

Distancia recorrida:  $\Delta s = s_2 - s_1$   
 Tiempo transcurrido:  $\Delta t = t_2 - t_1$   
 Constante de gravedad:  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$   
 Tiempo  $t$   
 Tiempo  $t_c$

Relaciones entre las variables:

La pregunta inmediata en la solución de este nuevo problema es ¿qué ocurre si el punto  $t$  tiene un valor diferente de  $t_c$ ? Sabemos que no podremos utilizar el modelo desarrollado, ¿pero qué relaciones podríamos encontrar si  $t$  está en diferentes posiciones dentro del intervalo? ¿Qué pasa si  $t$  se encuentra al inicio del intervalo por ejemplo? ¿a un cuarto? ¿a tres cuartos? Lo único de que disponemos para indagar este tipo de relaciones es el modelo que hemos desarrollado:

$$v(t_c) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s\left(t_c + \frac{1}{2}\Delta t\right) - s\left(t_c - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t}$$

Como siempre tendremos la velocidad del punto central en el intervalo. Este modelo lo podemos poner en función del punto  $t$  y de su posición representando a  $t_c$  en términos de tales valores. Si  $t$  se encuentra al inicio del intervalo,  $t_c$  es:

$$t_c = t + \frac{1}{2}\Delta t; \text{ luego: } t_1 = t \quad y \quad t_2 = t + \Delta t$$

tenemos:

$$v(t_c) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \text{y como } t_c = t + \frac{1}{2} \Delta t$$

$$v\left(t + \frac{1}{2} \Delta t\right) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Si sustituimos nuestra función de posición  $s(t) = 5t^2$  obtenemos:

$$v(t_c) = v\left(t + \frac{1}{2} \Delta t\right) = \frac{5(t + \Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t} =$$

$$v(t_c) = v\left(t + \frac{1}{2} \Delta t\right) = \frac{5t^2 + 5(2t\Delta t) + 5(\Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$$

de donde tenemos que la velocidad en el punto  $t_c$  es  $10t + 5\Delta t$  y sabemos que el primer término es la velocidad del punto  $t$ .

Si el punto  $t$  se encuentra ahora a un cuarto del inicio, tendremos que:

$$t_c = t + \frac{1}{4} \Delta t; \text{ luego: } t_1 = t - \frac{1}{4} \Delta t \text{ y } t_2 = t + \frac{3}{4} \Delta t$$

y:

$$v(t_c) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s\left(t + \frac{3}{4} \Delta t\right) - s\left(t - \frac{1}{4} \Delta t\right)}{\Delta t} \quad \text{y como } t_c = t + \frac{1}{4} \Delta t$$

$$v\left(t + \frac{1}{4} \Delta t\right) = \frac{s\left(t + \frac{3}{4} \Delta t\right) - s\left(t - \frac{1}{4} \Delta t\right)}{\Delta t}$$

nuevamente, si sustituimos la función de posición  $s(t) = 5t^2$ :

$$v(t_c) = v\left(t + \frac{1}{4} \Delta t\right) = \frac{5\left(t + \frac{3}{4} \Delta t\right)^2 - 5\left(t - \frac{1}{4} \Delta t\right)^2}{\Delta t} =$$

$$v(t_c) = v\left(t + \frac{1}{4} \Delta t\right) = \frac{5\left(t^2 + \frac{6}{4}t\Delta t + \frac{9}{16}\Delta t^2\right) - 5\left(t^2 - \frac{2}{4}t\Delta t + \frac{1}{16}\Delta t^2\right)}{\Delta t} = 10t + \frac{5}{2}\Delta t$$

nuevamente obtenemos que la velocidad en el punto  $t_c$  es la velocidad del punto  $t$  más otra cantidad de velocidad. Si repetimos este proceso para posiciones del punto  $t$  igual a la mitad, a tres cuartos del inicio del intervalo y al final del mismo tenemos los siguientes resultados:

Posición de $t$	$t_c$	$v(t_c)$
0	$t + \frac{1}{2}\Delta t$	$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$
$\frac{1}{4}$	$t + \frac{1}{4}\Delta t$	$\frac{s(t + \frac{3}{4}\Delta t) - s(t - \frac{1}{4}\Delta t)}{\Delta t} = 10t + \frac{5}{2}\Delta t$
$\frac{1}{2}$	$t$	$\frac{s(t + \frac{1}{2}\Delta t) - s(t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t} = 10t$
$\frac{3}{4}$	$t - \frac{1}{4}\Delta t$	$\frac{s(t + \frac{1}{4}\Delta t) - s(t - \frac{3}{4}\Delta t)}{\Delta t} = 10t - \frac{5}{2}\Delta t$
1	$t - \frac{1}{2}\Delta t$	$\frac{s(t) - s(t - \Delta t)}{\Delta t} = 10t - 5\Delta t$

En estos resultados encontramos que la velocidad en el punto  $t$  es el término  $10t$  y que este aparece como un término constante en cualquier posición de  $t$  dentro del intervalo e independiente del tamaño del mismo. Dichos términos los representaremos con la expresión *tiic* (términos independientes del intervalo en el cociente) y con ellos podemos identificar la velocidad en el punto  $t$  aunque no sea igual al punto  $t_c$  como hasta ahora lo hemos hecho. Esto nos lleva a que si calculamos la velocidad del punto central a partir de un punto  $t$  que se encuentra al inicio del intervalo, tendremos que:

$$v(t_c) = v(t + \frac{1}{2}\Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \quad \text{y:}$$

$$v(t) = \text{tiic} \left[ \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right]$$

que en nuestro problema equivalen a:

$$v(t_c) = v(t + \frac{1}{2}\Delta t) = 10t + 5\Delta t \quad \text{y:}$$

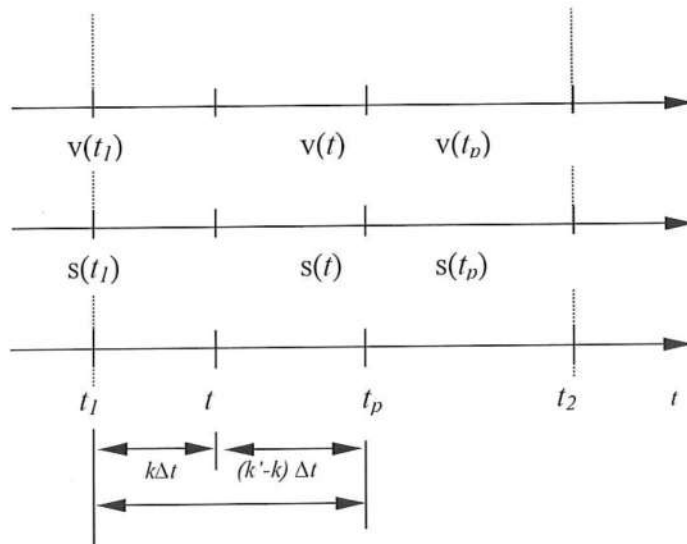
$$v(t) = \text{tiic} [10t + 5\Delta t] = 10t$$

Como esta velocidad se obtuvo a partir de la función de posición  $s(t)$ , la expresamos también como la "razón de cambio posición/tiempo en un punto obtenida a partir de la función  $s(t)$ ", esto es:

$$s'(t_c) = v(t_c) = 10t + 5\Delta t \quad \text{y} \quad s'(t) = v(t) = \text{tiic}[10t + 5\Delta t] = 10t$$

Ahora nuestro problema es extrapolar estas relaciones a una situación en la que el valor  $t_c$  no se encuentra al centro del intervalo de medición, como ocurre con la función  $s(t) = t^3$

Podemos aplicar estas relaciones al caso en el que la razón de cambio promedio del intervalo sea igual a la razón de cambio de un punto  $t_p$  que no necesariamente se encuentra al centro del intervalo. Podemos auxiliarnos con el siguiente dibujo en el que se representan los tiempos  $t$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , y  $t_p$  con las respectivas posiciones y velocidades de un objeto en movimiento, así como las posiciones de  $t$  y  $t_p$  dentro del intervalo de variación  $\Delta t$ , donde representamos la relación  $(t - t_1)/(t_2 - t_1)$  como  $k$  y la relación  $(t_p - t_1)/(t_2 - t_1)$  como  $k'$ , así la posición del punto  $t$  es  $k\Delta t$ , y y del punto  $t_p$  es  $k'\Delta t$ .



si representamos  $t_p$ ,  $t_2$  y  $t_1$  en términos de  $t$  y construimos un modelo para la velocidad como la razón de cambio posición/tiempo encontramos que:

$$\begin{aligned} t_p = t + (k'\Delta t - k\Delta t) &\Rightarrow t_p = t + (k' - k)\Delta t; \\ \text{y:} & \\ t_2 = t + (\Delta t - k\Delta t) &\Rightarrow t_2 = t + (1 - k)\Delta t \end{aligned}$$

Representación o modelo:

Sustituyendo en la razón de cambio promedio posición/tiempo, el modelo de velocidad en el punto  $t_p$  es:

$$s'(t_p) = v(t_p) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$s'(t_p) = v(t_p) = v(t + (k' - k)\Delta t) = \frac{s(t + (1 - k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}$$

Este modelo ya no está sujeto a las condiciones de tener una velocidad constante entre intervalos de tiempo constantes. Puede utilizarse con cualquier función de posición. Ahora si ponemos el punto  $t$  al inicio del intervalo,  $t = t_1$  y  $k$  es igual a cero, el modelo para la velocidad en  $t_p$  y en  $t$  queda:

$$s'(t_p) = v(t_p) = v(t + k'\Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$s'(t) = v(t) = \text{tiic} \left[ \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right]$$

Así si nuestra función de posición es  $s(t) = t^3$ , el modelo para la velocidad en el punto  $t$  es:

$$s'(t_p) = v(t_p) = v(t + k'\Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$s'(t_p) = v(t_p) = \frac{(t + \Delta t)^3 - (t)^3}{\Delta t} = \frac{t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + t^3 - t^3}{\Delta t}$$

$$s'(t_p) = v(t_p) = \frac{3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2$$

de donde obtenemos que:

$$s'(t) = v(t) = \text{tiic} \left[ \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right] = \text{tiic} \left[ 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 \right] = 3t^2$$

$$s'(t) = 3t^2$$

De manera general, si tenemos una variable independiente  $x$  y una función  $f(x)$ , la razón de cambio función/variable en el punto  $x_p$  obtenida a partir de  $f(x)$  está dada por:

$$f'(x_p) = v(x + k'\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y la razón de cambio función/variable en el punto  $x$  obtenida a partir de  $f(x)$  está dada por:

$$f'(x) = \text{tiic} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Esta razón de cambio funciona como un *modelo para* la relación a uno (razón por unidad) entre dos variaciones que existe en un punto. También se conoce como la derivada de una función  $f(x)$  aunque no es su definición formal. Volvamos a nuestro problema.

Solución matemática:

Lo que se nos ha pedido es encontrar la velocidad instantánea en que el tiempo es  $t = 0.4$  s;  $t = 0.6$  s y para cualquier momento  $t$  cuando la posición sigue una función  $s(t) = t^3$ . Hemos encontrado que en esos casos la velocidad instantánea para  $t$  es  $s'(t) = v(t) = 3t^2$ . Sustituyendo los valores de  $t$  tenemos:

$$v(t = 0.4 \text{ s}) = 3(0.4)^2 = 0.48 \text{ m/s}$$

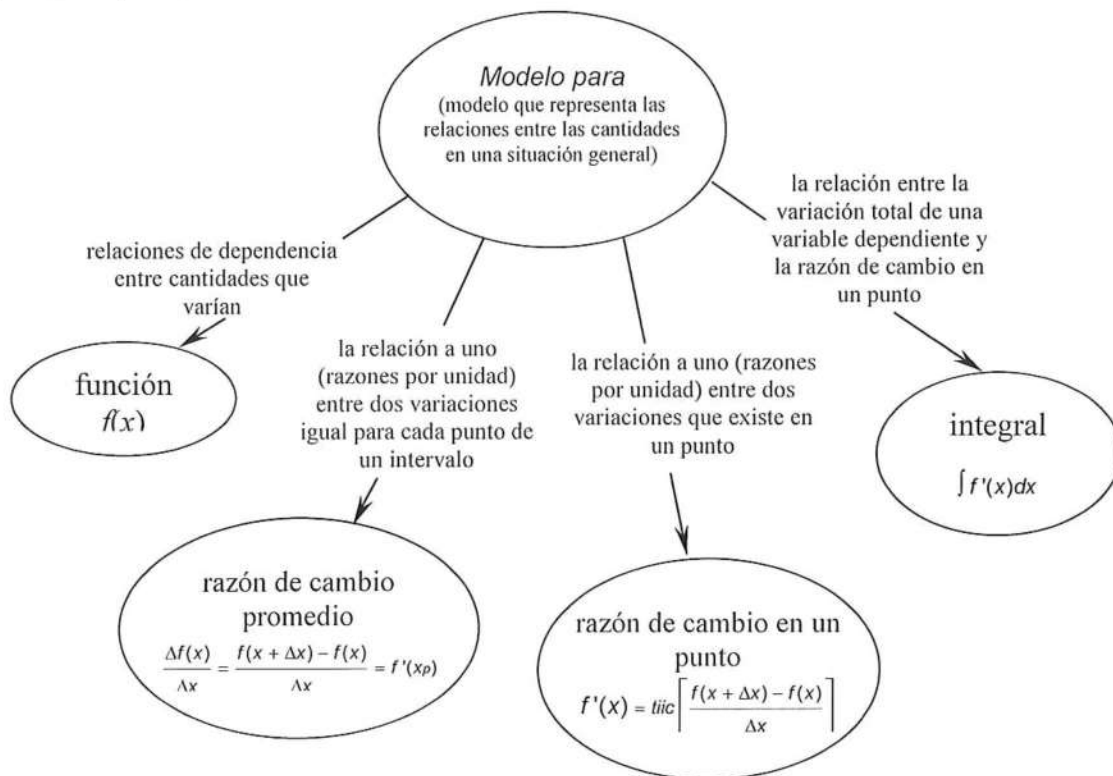
$$v(t = 0.6 \text{ s}) = 3(0.6)^2 = 1.08 \text{ m/s}$$

$$v(t) = 3t^2 \text{ (m/s)}$$

Interpretación de la solución:

¿Qué significa esto? Si consideramos que  $v(t) = 3t^2$  es el resultado de dividir la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido, lo que tenemos es una razón de cambio posición/tiempo en un punto  $t$ . Esto quiere decir que en el momento  $t = 0.4$  s la razón de cambio posición/tiempo es de 0.48 metros por un segundo de variación. Si esa razón se mantuviera por dos segundos, la variación de posición sería el doble: 0.96 metros.

Podemos resumir las razones de cambio promedio y en un punto descritas con este problema en el siguiente esquema:



En la solución del problema anterior hemos visto que la razón de cambio promedio es igual a la razón de cambio de un punto  $x_p$  y que la razón de cambio de cualquier punto  $x$  dentro del intervalo, es igual a los términos independientes del tamaño del intervalo en el cociente (*tiic*) de la razón de cambio promedio. De manera general podemos utilizar estas relaciones para encontrar la razón de cambio en un punto.

Ejemplo:

Encuentre la razón de cambio en punto  $f'(x)$  obtenida a partir de la función  $f(x) = 4x^2 + 2x$ . Para ello obtenemos la razón de cambio promedio, igual a la razón de cambio en el punto  $x_p$ :

$$f'(x_p) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{si } f(x) = 4x^2 + 2x$$

$$f'(x_p) = \frac{4(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - [4(x)^2 + 2(x)]}{\Delta x}$$

$$f'(x_p) = \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 2(x + \Delta x) - 4(x)^2 - 2(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_p) = \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4x^2 - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x_p) = \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x + 2 \quad \text{y:}$$

$$f'(x) = \text{tiic}[8x + 4\Delta x + 2] = 8x + 2$$

12. Para las siguientes funciones encuentre  $f'(x)$ :

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = 7x^2$

c)  $f(x) = x^2 + 5x$

d)  $f(x) = 2x^3 + x$

e)  $f(x) = x^3 + 3x + 1$

Apéndice B: Examen sobre argumentaciones



CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
Cálculo diferencial e int.	2o. PARCIAL	Límite y derivada	01 A
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:

Prof. Ing. Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

- Encuentre los límites siguientes: a)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}$
- En un circuito eléctrico la intensidad  $i$  de la corriente está en función del voltaje suministrado  $V$  y de una resistencia variable del circuito  $R$  de acuerdo con el modelo  $i = V/R$ . Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de  $5v$ , determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a)  $R = 2$  b)  $R = 0.65$
- Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a)  $f(x) = 6x^2$       b)  $f(x) = x^3 - 2x$
- Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción  $f(x) = -x^2 + 210x$  donde  $x$  representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.

Pasos para la solución del problema	Justificación de cada paso

Apéndice C: Cuestionario sobre comprensión



CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA

UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
Cálculo diferencial e int.	2o. PARCIAL	Teoría	01 A
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:

Prof. Ing. Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores

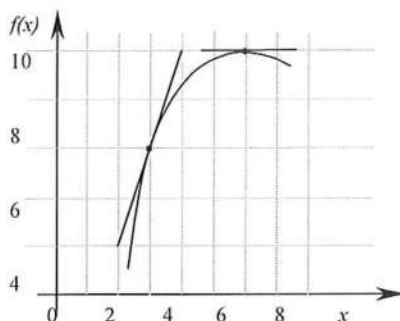
10. Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:
- a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$       b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 c) La razón de cambio promedio      d) Ninguna de las anteriores
11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f(2) = 20$ . Esto significa que:
- a) La función varía en 20 unidades      b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$       d) Ninguna anterior
12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:
13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:
14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:
- a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$  ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?
15. Argumenta porqué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.

17. Porqué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y

no como  $f'(x) = \text{tiic} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ;

Para la función de la siguiente gráfica:



18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6   b) 4   c) 2   d) 0
19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10   b) 4   c) 2   d) 0

**Apéndice D: Examen sobre habilidades de modelación**



CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>3r. Parcial</b>	Contenido: <b>Aplicación</b>	Grupo: <b>02 A</b>
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:

*Ing. Emmanuel Viera*

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	50 unidades/año	75 unidades/año	25 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

## **Apéndice E: Configuración epistémica implementada, caso tradicional**

### ***Configuración epistémica implementada.***

Aplicamos el análisis epistémico de Godino y Batanero a las transcripciones de la clase del 20 de febrero en que se presenta la derivada como límite. Dicho análisis consiste en separar el texto en unidades naturales y agruparlas en unidades epistémicas de acuerdo a la entidad primaria del significado negociado. La trayectoria epistémica propuesta para dicha clase es descrita a través de las Tablas E1, E2 y E3, correspondientes a tres secciones en que se dividió la clase. A continuación mostramos las configuraciones epistémicas que determinamos cada sección.

***Configuración epistémica uno.*** Esta configuración es iniciada con la unidad epistémica uno (véase Tabla E1), al recordar el significado de recta tangente y de recta secante, y termina al reconocer que una parábola es la gráfica de una función de segundo grado. Creemos que en la primer unidad epistémica la trayectoria presenta un estado conceptual, al poner en juego la definición de recta secante y recta tangente. Observamos que la definición se limitó a los puntos de la circunferencia, y no a la curva que describe una función.

La segunda unidad epistémica nos sugiere un estado lingüístico en que es presentada la forma gráfica de describir los conceptos negociados. Esto es, el profesor dibuja la circunferencia con una recta secante y una tangente. Luego, él dirige la clase al tema de funciones en la tercer unidad epistémica, y afirma que el grado de una función es identificado por su exponente, aunque no aclara que debe ser el mayor, lo que puede generar conflictos semióticos.

En la cuarta unidad epistémica, se realiza un repaso de la propiedad gráfica de las funciones de segundo grado, como una curva parabólica. En este punto el profesor trata de asociar las funciones a sus curvas características como una propiedad con el ejemplo de la función de segundo grado  $x^2 + 3x$ . Estas cuatro unidades epistémicas las agrupamos en la configuración epistémica uno, y sugerimos que, de manera global tiene un carácter esencialmente conceptual, previo para la construcción del concepto de derivada. Pensamos que los principales significados negociados incluyen los conceptos de recta secante, recta

tangente, grado de una función, representaciones notacionales y gráficas de funciones de segundo grado.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
1-17	CE-1	1	Recordatorio del concepto de recta secante y recta tangente a una curva	E4: conceptual	Conceptual: Se pretende que los alumnos recuerden conceptos previos para introducir la noción de derivada.
18-23		2	Presentación gráfica de recta tangente y recta secante en una circunferencia	E3: lingüístico	
24-25		3	Recordatorio de que el grado de una función es determinado por su mayor exponente	E5: proposicional	
26-32		4	Reconocimiento de que la gráfica de una función cuadrática: $x^2 + 3x$ es una parábola	E5: proposicional	
33-34	CE-2	5	Planteamiento del problema de obtener la tangente a una parábola	E1: situacional	Conceptual: Se formula la derivada como una función que permite obtener la pendiente de la tangente a una curva.
35-47		6	Introducción de gráficas y notaciones para la variable independiente, su incremento y función $x, x + \Delta x, f(x)$	E3: lingüístico	
48-52		7	Introduce notación para el incremento en la función $[f(x + \Delta x) - f(x)]$	E3: lingüístico	
56-65		8	Se propone que la secante se convierte en tangente cuando el incremento tiende a cero	E5: proposicional	
66-67		9	Describe la acción para obtener la función que proporciona la inclinación o pendiente de la tangente	E2: activo	
68		10	Se introduce la fórmula para obtener la pendiente de la tangente: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	E3: lingüístico	
69-72		11	Se define la derivada como la función que proporciona la <i>pendiente de la tangente</i>	E4: conceptual	
73-82	CE-3	12	Descripción de situaciones en que es útil la derivada, equivocadamente menciona que sirve para obtener una velocidad media	E1: situacional	Situacional: Se pretende que los alumnos identifiquen situaciones que justifican el estudio de la derivada
83-92		13	Mención de la derivada como <i>velocidad en un punto</i> y su utilidad en problemas de optimización.	E1: situacional	
93-94		14	Se insiste en que la fórmula de la derivada proporciona una tangente	E4: conceptual	

Tabla E1: Trayectoria epistémica de la clase del 20 de febrero. 1ra. sección. Caso tradicional

**Configuración epistémica dos.** De manera global en esta configuración se formula la derivada como la pendiente de la tangente a la curva y abarca de la unidad epistémica cinco a

la 11. En la unidad epistémica cinco se propone el problema de obtener la recta tangente a una parábola. En la seis, el profesor presenta la gráfica y las notaciones correspondientes. En la unidad epistémica siete, se introduce la notación para el incremento de la función. En la ocho, el profesor explica que la pendiente de la secante se transforma en la pendiente de la tangente a la parábola cuando el incremento tiende a cero. La expresión de un alumno: ¡órale! nos sugiere que se ha generado un acto de comprensión. En la unidad epistémica nueve, el profesor describe la acción para obtener la función de la pendiente a la curva, por lo que dicha unidad tiene un estado actuativo. En la diez, se formaliza la acción a través de la fórmula de la derivada como el límite de un cociente. En la unidad epistémica 11 se presenta un estado conceptual, ya que el profesor define la derivada con dicha fórmula para una función de cualquier grado.

En esta configuración se formula el concepto de derivada sin mayor discusión por los alumnos. Entre los significados puestos en juego, encontramos la situación problema de determinar la tangente a una parábola, el uso de notaciones  $x$ ,  $f(x)$ ,  $\Delta x$ ,  $f(x + \Delta x)$ , la derivada como una fórmula para la pendiente de la tangente, y como un límite. De manera global, sugerimos un significado conceptual para esta configuración epistémica, ya que se pretende definir la derivada.

**Configuración epistémica tres.** Sugerimos un carácter esencialmente situacional para la configuración epistémica tres. El profesor menciona diversas situaciones problema en las que se utiliza la derivada para su solución, como una justificación para el estudio. En la unidad epistémica 12 el profesor pregunta a los estudiantes sobre el porqué aprender derivadas, él insiste en que los alumnos recuerden lo aprendido en preparatoria. En la unidad epistémica 13, el profesor expone la situación en que se requiere calcular la velocidad de un objeto en caída libre, como un caso de aplicación de la derivada. También él expone la situación en que se requiere minimizar el material de una lata como otro caso de aplicación, y menciona el ahorro de tiempo obtenido a través del cálculo como una justificación para su aprendizaje. En la unidad epistémica 14, el profesor insiste en situaciones en que la derivada proporciona la tangente a la curva.

**Configuración epistémica cuatro.** Se inicia con la presentación de un problema prototípico para solucionar. Se trata de obtener la pendiente de la tangente por medio de la derivada de una función lineal,  $f(x) = 2x - 6$ . Esta configuración básicamente tiene dos momentos que se caracterizan por las unidades epistémicas 16 y 17.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
95-96	CE-4 5:20:52 a 5:24:18	15	Se presenta el problema de obtener la tangente de una función lineal [ $f(x) = 2x - 6$ ] a través de la derivada	E1: situacional	Actuativo: Se pretende que los alumnos conozcan el procedimiento para obtener la derivada de una función lineal
97-102		16	Inicia la práctica introduciendo la función lineal en la fórmula de la derivada como límite	E2: actuativo	
103-113		17	Se desarrollan las prácticas algebraicas necesarias para obtener la solución	E2: actuativo	
115	CE-5 5:24:18 a 5:36:23	18	Ahora propone el problema de obtener la derivada de la función cuadrática: $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$	E1: situacional	Actuativo: Se pretende que los alumnos conozcan ahora el procedimiento para obtener la derivada de una función cuadrática, se mencionan posibles aplicaciones para justificar su estudio.
116-123		19	Inicia la práctica introduciendo la función cuadrática en la fórmula de la derivada como límite	E2: actuativo	
124-128		20	Se insiste en el significado del objeto derivada como tangente	E4: conceptual	
129-154		21	Se desarrollan las prácticas algebraicas necesarias para obtener la solución	E2: actuativo	
155-166		22	Recordatorio de que el incremento en $x$ debe ser cero para tener la tangente en un punto	E4: conceptual	
170-203		23	Se mencionan problemas de optimización, valores máximos y tasas de crecimiento económico como justificación para el estudio de la derivada	E1: situacional	
204-214		24	Se hace referencia a la exactitud de las matemáticas	E5: proposicional	
219-226		25	Se desarrollan prácticas algebraicas para terminar de obtener la solución	E2: actuativo	
227-228	CE-6 5:36:23 a 5:44:48	26	Se presenta el problema de obtener la derivada de $f(x) = 3x^2 - 2$ a los alumnos	E1: situacional	Actuativo: Se pide a los alumnos que resuelvan una situación no contextualizada
229		27	El alumno introduce la función en la fórmula de la derivada como límite	E2: actuativo	
231-268		28	Se desarrollan las prácticas algebraicas de solución con la ayuda del profesor	E2: actuativo	

Tabla E2: Trayectoria epistémica de la clase del 20 de febrero. 2a. sección. Caso tradicional

En el primer momento el profesor introduce la función lineal en la fórmula obtenida para la derivada como el límite del cociente  $\Delta f(x)/\Delta x$  y olvida utilizar la notación  $f'(x)$ . En el

segundo, se realizan las prácticas matemáticas algebraicas requeridas para obtener la función derivada. La interacción es en su mayor parte de tipo instrumental o procedimental para aclarar cuestiones algebraicas. No observamos negociaciones de tipo conceptual. Sugerimos que esta configuración es eminentemente actuativa y los significados implementados incluyen: situación no contextualizada para obtener la derivada de una función lineal, procedimientos algebraicos para obtención de la derivada, la derivada como tangente. Aspectos notacionales de la variable, la función y la derivada como límite.

**Configuración epistémica cinco.** Al igual que la configuración epistémica cuatro, la configuración cinco es dedicada a ejemplificar el procedimiento para obtener la derivada. En este con funciones de segundo grado, esto es, para  $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ . Dicha configuración comprende las unidades epistémicas de la 18 a la 25. La configuración epistémica se inicia al pedir la derivada de la función cuadrática señalada y continúa durante los dos momentos descritos en la configuración epistémica cuatro. Primero el profesor introduce la función cuadrática en la fórmula de derivada como límite y segundo, procede a su solución por medio de prácticas algebraicas. De nuevo se descuida el uso de la notación  $f'(x)$  para la derivada.

En la unidad epistémica 20 el profesor hace un recordatorio del significado de la derivada, como la pendiente de la tangente a la curva. También, él hace referencia a las reglas para derivar que se verán en un momento posterior. Sugerimos que la unidad epistémica 21 presenta un estado epistémico actuativo que se caracteriza por las prácticas algebraicas hasta que se tiene  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 8x + \Delta x - 3$ . A partir de tal momento creemos que se presenta la unidad epistémica 22 con un estado epistémico conceptual. Esto es, la negociación de los significados nos sugiere que el profesor utiliza dicha expresión para referirse a una secante que se transforma en una tangente cuando el incremento en  $x$  vale cero. Observamos que un alumno pregunta sobre ello, al parecer, más bien con la intención de confirmar lo que ha escuchado más que de profundizar. Se inicia entonces la unidad epistémica 23 en que el profesor comenta sobre situaciones de optimización para justificar el aprendizaje de la derivada, tales como la de minimizar material para la construcción de una lata de atún, cilindros de gas. También él presenta la situación en que se requiere obtener el valor instantáneo para variables expresadas con una razón de cambio, como el problema de determinar la altura máxima en un tiro parabólico y tasas de crecimiento poblacional. La

unidad epistémica 25 muestra un estado actuativo cuando el profesor realiza los pasos algebraicos con que obtiene la derivada de la función. Creemos que los significados puestos en juego dentro de esta configuración incluyen: a) situacionales: situación problema no contextualizada con función de segundo grado, problemas de optimización, valores máximos; b) actuativos: procedimientos algebraicos de solución; c) lingüísticos: notaciones simbólicas para variable, función y derivada como límite.

**Configuración epistémica seis.** Después de mostrar las prácticas para obtener la derivada con dos ejemplos, el profesor anota en la pizarra la función  $f(x) = 3x^2 - 2$  e invita a que alguien pase a resolverlo, con lo que inicia la configuración epistémica seis. Ésta abarca las unidades epistémicas 26, 27 y 28. La primer unidad presenta un estado epistémico situacional y se caracteriza por la presentación de una situación problema descontextualizada. La unidad 27 se presenta cuando un alumno pasa e imita el primer paso mostrado para obtener una derivada, esto es, sustituir la función en la fórmula de derivada como límite. La unidad epistémica 28 comprende la interacción entre el profesor y el alumno sobre los pasos algebraicos del procedimiento de solución. Pensamos que los significados implementados en esta configuración incluyen: a) una situación descontextualizada y b) prácticas actuativas para la obtención de la derivada.

**Configuración epistémica siete.** Las configuraciones epistémicas siete y ocho, corresponden a la tercer sección en que se dividió la clase como se muestra en la Tabla E3. En estas dos configuraciones notamos un giro en la estrategia didáctica, ya no se trata de mostrar ejemplos y sus procedimientos de solución, sino de inducir dos reglas de derivación a partir de la observación directa de lo realizado. La configuración epistémica siete abarca de las unidades epistémicas de la 29 a la 33. Tal configuración se inicia al anotar en la pizarra las tres funciones que se han derivado, y termina con un ejemplo para derivar con las reglas mostradas. La unidad epistémica 29 consiste en presentar los tres casos resueltos e introducir la notación  $y'$  en cada uno de ellos. Creemos que el profesor confía en que la mayor parte del grupo tiene antecedentes de cálculo y conoce sobre las reglas para derivar, por lo que únicamente las presenta como una especie de propiedad de los procedimientos. En la unidad epistémica 30 el profesor pregunta: ¿qué podemos observar de todo esto? y se inicia la

interacción sobre posibles reglas de derivar, para no utilizar el procedimiento algebraico. En la unidad epistémica 31 se negocia que la derivada de una constante es cero y de una función exponencial  $y = kx^n$  es  $y' = nkx^{n-1}$ , y al introducir las notaciones respectivas da origen a la unidad epistémica 32 de tipo lingüístico. No se realizan las acciones argumentativas que demostrarían la verdad matemática de tales reglas, sino que se introducen como propiedades algebraicas. Al final identificamos otra unidad epistémica con un estado actuativo al aplicar la regla para derivar  $y = 3x^3$ . Creemos que esta configuración epistémica tiene un carácter global proposicional por la forma en que se introducen las mencionadas reglas.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
276-278	CE-7 5:44:48 a 5:48:59	29	Se presentan los tres casos iniciales y se introduce la notación $y'$ para las derivadas obtenidas	E3: lingüístico	Proposicional: Se pretende que los alumnos conozcan las reglas de derivación como una propiedad del procedimiento de obtención de la derivada
279-305		30	A partir de la observación sobre lo obtenido se negocia la inducción de dos reglas para derivar	E4: conceptual	
306-319		31	Se acuerdan las reglas de derivación para $y = k$ , $y = kx^n$	E4: conceptual	
320-324		32	Se introducen las notaciones para ambas reglas $y' = 0$ , $y' = nkx^{n-1}$	E3: lingüístico	
325-332		33	Se resuelve un ejemplar del tipo de problemas ( $3x^3$ ) aplicando la segunda regla	E2: actuativo	
333-334	CE-8	34	Se presenta el ejemplar $f(x) = 3x^2 - 7$ para su solución	E1: situacional	Argumentativo: Se pretende demostrar que la aplicación de las reglas establecidas proporcionan la derivada de una función.
335-341		35	Se desarrollan prácticas de solución aplicando las reglas de derivación acordadas	E2: actuativo	
342-347		36	Se aborda el procedimiento de derivación como límite como una forma de comprobar lo obtenido con la regla	E6: argumentativo	
348-352		37	Se menciona el procedimiento como la "regla de los cuatro pasos"	E3: lingüístico	
353-397		38	Se desarrollan las prácticas algebraicas necesarias para obtener la solución y comprobar la solución obtenida previamente	E2: actuativo	

Tabla E3: Trayectoria epistémica de la clase del 20 de febrero. 3ra. sección. Caso tradicional

Encontramos como significados implementados: a) situacionales: situación descontextualizada; b) actuativos: procedimientos algebraicos; c) lingüísticos: notación para la derivada  $y'$  y para las reglas de derivación; d) conceptuales: reglas de derivación; d) proposicionales: las reglas como propiedades de los procedimientos de solución.

**Configuración epistémica ocho.** Después de presentar las dos reglas de derivación, la estrategia del profesor es obtener la derivada de la función  $f(x) = x^3 - 7x$  a través del uso de las reglas mostradas y de los procedimientos para la derivada como límite, como una forma de comprobación de la veracidad de la regla. A esta parte la identificamos como la configuración epistémica ocho con un estado global argumentativo. Dicha configuración inicia con un estado situacional en que se pretende derivar la función señalada en la unidad epistémica 34. En la unidad 35 se pide a un alumno que proporcione la derivada, lo que éste hace a partir de las reglas estudiadas. La unidad 36 se presenta cuando el profesor aclara que la derivada de  $7x$  es 7. El profesor argumenta que el resultado es correcto y demuestra que se obtiene el mismo resultado con el procedimiento algebraico. En la unidad epistémica 37 él menciona que tal procedimiento es conocido como el método de los cuatro pasos e insiste en que se trata de obtener la tangente. Después la clase presenta un estado actuativo cuando la interacción se centra en el desarrollo de las prácticas algebraicas y se origina la unidad epistémica 38. Identificamos los siguientes significados en esta configuración: a) situacionales: situación problema descontextualizada; b) actuativos: uso de reglas de derivación y de procedimientos algebraicos de derivación como límite; c) lingüísticos: variable, función, método de los cuatro pasos.

**Configuración epistémica implementada.** El análisis epistémico sugerido muestra la complejidad de los significados puestos en juego. Proponemos una trayectoria en la que es notoria la falta de prácticas demostrativas, y en la que posible apreciar los principales momentos de naturaleza epistémica a lo largo de la sesión. A través del carácter global de las ocho configuraciones propuestas, observamos una estrategia didáctica que se inicia con dos momentos conceptuales: a) un recuerdo de las definiciones de recta secante y recta tangente y b) la formulación de la derivada con un significado geométrico, como el de una función que permite encontrar la pendiente de la tangente a la curva, con poco o nula referencia a su significado como razón de cambio. La tercer configuración nos muestra un momento situacional donde el profesor comenta situaciones en las que se utiliza la derivada sin que éstas sean una situación problema a resolver por los alumnos, pero que tiene la función de motivar el estudio. Después de ello el desarrollo de la clase presenta un tramo de momentos actuativos

en los que se muestra el procedimiento de solución, dos ejemplos resueltos por el profesor y un ejercicio resuelto por los alumnos en el pizarrón. Finalmente la clase presenta un momento proposicional en el que se introducen dos reglas de derivación, y un momento argumentativo en el que se muestra que lo obtenido con las reglas es lo mismo que lo obtenido sin ellas. Así en el período de poco menos de una hora, se hace un recorrido de las definiciones de rectas secante y recta tangente hasta dos reglas de derivación. A partir del análisis realizado sugerimos la configuración epistémica implementada para la derivada que se muestra en la Tabla E4.

COMPONENTE PRÁCTICO (comprensión instrumental)	<b>SITUACIONES</b>	<b>ACCIONES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Determinar la tangente a una parábola o a una curva</li> <li>▪ Problemas descontextualizados para calcular la derivada de una función lineal, de una función cuadrática, de n grado</li> <li>▪ Problemas de optimización</li> <li>▪ Problemas para encontrar valores máximos o tasas de crecimiento poblacional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Obtención de una solución e interpretarla.</li> <li>▪ Aplicación de las reglas de derivadas.</li> <li>▪ Introducción de la función en la fórmula de derivada como límite.</li> <li>▪ Realización de procedimientos algebraicos de solución para la derivada como límite</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>CONCEPTOS</b>	<b>PROPIEDADES</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Previos: <i>recta secante, recta tangente, función, grado de una función, parábola, límite de una función</i></li> <li>▪ Emergentes: <i>derivada como fórmula para la pendiente de la tangente a una curva, derivada como límite de una familia de secantes, derivada como promedio, como velocidad en un punto, como tangente a la curva. Reglas de derivación.</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Se obtiene cuando <math>\Delta x</math> tiende a cero.</li> <li>▪ Es el límite de un cociente.</li> <li>▪ Reglas de derivación como propiedades</li> </ul>
COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL (Comprensión relacional)	<b>ARGUMENTOS</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Comprobación gráfica de que el límite de la secante es la pendiente de la tangente a la curva.</li> <li>▪ Comprobación procedimental de que la regla produce el mismo resultado que el procedimiento algebraico para la derivada como límite.</li> </ul>	
COMPONENTE DE DESARROLLO	<b>LENGUAJE</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Verbal: <i>Derivada: pendiente de la recta tangente a la curva, el límite de las secante cuando <math>\Delta x</math> tiende a cero. Método de los cuatro pasos.</i></li> <li>▪ Gráfico: <i>gráficas en las que se obtiene la pendiente de la recta tangente a una curva.</i></li> <li>▪ Simbólico: <math>x, f(x), f'(x), y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \dots, y' = 0; y' = nkx^n</math></li> </ul>	

Tabla E4: Configuración epistémica implementada de la derivada. Caso tradicional

**Apéndice G: Transcripción de la clase del 20 de febrero**

Caso: Tradicional.  
Sesión: 20 de febrero 17:00 hrs.  
Tema: Derivada como limite  
La derivada como tangente a la curva

**5.10.00 p.m. [CE-1] [Hora de inicio de la clase según grabación]**

[El maestro anota en el pizarrón: recta tangente y recta secante]

1. M: [UE-1] Si recuerdan lo que son los dos términos esos, ¿no?
2. M: Los han de haber visto en matemáticas, recta tangente y secante
3. A: No me acuerdo ni de...
4. M: ¿Desde cuando se ven?
5. M: Creo que se ven desde que empiezan allá con geometría en secundaria ¿no?, segundo o algo así
6. M: Lo que es una recta tangente y lo que es una recta secante,
7. M: ¿Alguien sabe lo que es cada una de estas? ... por recta tangente ...
8. A: La recta tangente es la que toca un solo punto de una circunferencia
9. M: ¿De una qué?
10. A: Un solo punto de la circunferencia
11. M: Un solo punto, ¿no? [lo anota en el pizarrón]
12. A: Un solo punto.
13. M: Y ¿la secante? [mientras todavía escribe]
14. A: Aah...Los dos puntos
15. M: ¿Toca uno?
16. A: Los dos puntos
17. M: Como dice el compañero ¿no? [Lo escribe en el pizarrón] [UE-1]
18. M: [UE-2] Si yo tengo una circunferencia y
19. M: trazo una recta y toca un punto de la circunferencia
20. M: A eso le llamo una tangente [lo dibuja al tiempo que explica].
21. M: Si trazo otra raya que toque dos puntos...

22. A: Secante [susurrando]
23. M: ...de esa circunferencia entonces es una secante. [UE-2]
24. M: [UE-3] En matemáticas como ustedes ya habrán mirado hay muchas funciones ¿no?
25. M: Funciones de segundo orden, tercer orden, etcétera, etcétera, cuarto, quinto, que el orden más que nada lo va a dar lo que es el exponente o el grado de la ecuación o la función [UE-3]
26. M: [UE-4] Muchas de las ecuaciones que miramos aquí, pues son cuadráticas ¿no?
27. M: Por ejemplo una función que es  $x^2 + 3x$ ,
28. M: Es una función de segundo orden.
29. M: Esta función de segundo orden yo siempre sé, que las de segundo orden me dan una ¿qué? [pregunta al momento que dibuja ejes cartesianos]
30. A: Parábola [varios al mismo tiempo]
31. M: Una parábola. [al tiempo que dibuja una parábola el pizarrón, explica]
32. M: Que dependiendo del número [señala el término  $x^2$ ] pues puede ser más angosta o más grande, dependiendo de estos dos [señala la función] se puede mover o girar dependiendo de los datos que yo tenga aquí, o puede ser invertida. [UE-4]

**5:12:09 p.m. [CE-2]**

33. M: [UE-5] A esta parábola yo también le puedo sacar lo que es una recta tangente.
34. M: Entonces si yo saco una secante, en este caso, tengo dos puntos (5:12:19 p.m.) ... lo voy a hacer un poco más grande ¿no? para que se note un poco más. [UE-5]
35. M: [UE-6] [Dibuja una sección de parábola e introduce las notaciones  $f(x)$ ,  $f(x + \Delta x)$ ,  $x$ ,  $\Delta x$ ]
36. M: Se supone que yo tengo dos puntos aquí, en esta parábola que me va a representar esa función cuadrática, una función de segundo orden.
37. M: Si yo trazo una recta, una secante ¿que va a pasar conforme a esta distancia de aquí? [señala el intervalo entre  $x$  y  $x + \Delta x$ ] ¿cuanto se..? ¿que distancia tendría aquí?
38. M: Esto es  $x$  y esta sería pues  $x$  más un incremento, ¿no?
39. M: Quiere decir que ¿esto cuanto vale? [señala de nuevo el intervalo entre  $x$  y  $x + \Delta x$ ]

40. A:  $x + \Delta x$
41. M: No, eso sería todo esto [señala desde el origen hasta el intervalo entre  $x$  y  $x + \Delta x$ ]
42. A: Aah, es cierto
43. M: Esta es  $x$  [señala del origen a  $x$ ] y esto sería el intervalo entre  $x$  y  $x + \Delta x$  o el incremento de  $x$ , ¿Cuanto vale este pedacito nomás de aquí? [señala de  $x$  hasta  $x + \Delta x$ ]
44. A: El incremento de  $x$
45. M: Nomás incremento de  $x$ , que sería la resta de esto menos esto ¿no? [señala  $x + \Delta x$  menos  $x$ ]
46. A: Sí
47. M: Si yo lo resto sería  $x + \Delta x - x$  ¿no? y eso me da el incremento de  $x$  [escribe la ecuación en el pizarrón  $x + \Delta x - x = \Delta x$ ] que viene siendo nomás este pedazo que tengo aquí. [UE-6]
48. M: [UE-7] Si quiero hacer lo mismo con respecto a esto, esta otra parte de aquí, [señala intervalo  $f(x)$  y  $f(x + \Delta x)$ ] ¿cuánto mediría este [inaudible]?
49. A:  $\Delta x$  [varios alumnos]
50. M: No
51. A:  $\Delta y$  ¿no?
52. M: [Inaudible] Aquí no. Sería... [escribe  $f(x + \Delta x) - f(x)$  en el pizarrón] [UE-7]
53. A: Una función del tiempo
54. M: Ehh?
55. A: No
56. M: [UE-8] Ya tengo lo que es la altura y la base y si se fijan se hizo como un triangulo.
57. M: Entonces yo puedo sacar esta pendiente [señala la recta secante]
58. M: ¿Que pasa si este punto lo recorro? lo voy recorriendo [desplaza el punto  $x + \Delta x$ ]
59. A: La pendiente cambia
60. M: A ver, no, con este ejemplo, ¿qué tiende a ser esta secante? ¿a que se transforma?
61. A: A ser, este, tangente
62. M: A ser una tangente ¿no?
63. A: Órale

64. M: Quiere decir que si este incremento yo lo voy reduciendo o lo hago lo más pequeño que tienda a ser, entonces encuentro una línea tangente [5:15:13 p.m.] a una función de segundo, tercer o cuarto orden, cualquier orden.
65. M: Si yo voy, voy a sacar un incremento que sea muy pequeño, entonces encuentro esto. [UE-8]
66. M: [UE-9] Ahora para yo encontrar esta pendiente o esta inclinación pues nada más que esto [señala  $f(x + \Delta x) - f(x)$ ] dividido entre el incremento  $[\Delta x]$ .
67. M: Entonces yo digo que la ... la función, va a ser igual a: [UE-9]
68. M: [UE-10]  $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  (5:16:08 p.m.). [UE-10]
69. M: [UE-11] Entonces yo puedo sacar la ecuación de una pendiente por medio de esa formula que no es más que la derivada de una ecuación de cualquier grado, llámese cúbica cuadrada, quinto orden, etcétera, etcétera, ¿no?
70. M: O una lineal también.
71. M: La lineal es más fácil, pues ya tengo la pendiente nomás sería  $y$ , la altura, sobre  $x$ , ¿no? O  $x_1 - x_2$  sobre, ¡a no!  $y_1 - y_2$  sobre  $x_1 - x_2$ .
72. M: Es con la que sacaban las pendientes ¿no?, también en matemáticas en la secundaria que de ahí se empieza a ver, obvio más en prepa, más específico [UE-11]

**5:16:34 p.m. [CE-3]**

73. M: [UE-12] Bueno esto de la derivada ¿para que me puede servir, o que es lo que yo obtengo con esto?
74. A1: Es por lo que viene la derivada
75. A2: ¿Sirve para evaluar una función en un punto específico de ella?
76. M: ¿Sirve para que?
77. A: Evaluar una función en un punto específico de ella
78. M: ¿Qué más? ¿Qué más? Hay muchas cosas que ya conocen de esto de la derivada puesto que lo tuvieron que haber visto en prepa.
79. M: Les tuvieron que dar una noción de que es la derivada o para que me sirve.
80. M: Lo que es la derivada muchas veces viene siendo para sacar promedios,

81. M: Como la velocidad, no sé, puede ser la velocidad que hago de San Luis a... no sé, a Sonoyta, vamos a decir que son dos horas... o que es una hora de camino y que son 200 km.
82. M: Puedo sacar la velocidad promedio, no es más que la derivada, [UE-12]
83. M: [UE-13] Al igual que si dejo caer una pelota o aviento algo hacia el cielo,
84. M: Va a ir decreciendo en una forma exponencial cuadrática y
85. M: Puedo sacar la fórmula y puedo encontrar que velocidad lleva en un cierto punto, pero para eso lo que se tendría que hacer sería derivar.
86. M: Otra de las aplicaciones que es muy común lo que es en matemáticas, la derivada y todas esas cosas que se utilizan, sería para encontrar muchas veces lo que son los máximos y mínimos.
87. M: Ustedes como futuros ingenieros deben encontrar el máximo, el máximo... ya se me olvidó ¿cómo se llama? Encontrar lo máximo por el mínimo material.
88. M: Supongamos que van a hacer una lata, o que van a hacer un diseño de... de alguna caja y les dan un pedazo de metal y tienen que hacer una forma cúbica de ese material, les van a pedir que con el mínimo material hagan el volumen más grande.
89. M: Y eso lo hacen pues prácticamente todo con las derivadas, y llegando a eso, entonces van a determinar, si le cortas tantos milímetros vas a obtener tanto volumen que es el máximo.
90. M: Y no estarían echando a perder muchos hojas o perdiendo su tiempo en calcular haciéndolo a error-prueba. Ya nada más les van a decir: uhh, tanto volumen, bueno vale 5.3, si no se los comería el tiempo ¿no?.
91. M: Esa ventaja es lo que... muchas veces lo que quieres, que saquen los resultados lo más rápido. Entonces en ¿cuanto me va a salir ya todo el sistema?
92. M: Ya conforme vayamos viendo más adelante las unidades, ya que lo estemos aplicando, se van a dar cuenta, lo van a ir asentando, pero esto parte de esta fórmula ¿no? [UE-13]
93. M: [UE-14] Por que siempre miramos esta fórmula pero muchas veces no sabemos de donde sale. Lo que sale, lo que se esta buscando es que sea una tangente,
94. M: ¿cuándo voy a tener una tangente? Cuando el incremento de este tienda a cero [señalando  $f(x)$  y  $f(x + \Delta x)$ ] ¿Si? [UE-14]

5:20:52 p.m. [CE-4]

[Escribe en el pizarrón la función  $f(x) = 2x - 6$ ]

95. M: [UE-15] Vamos a suponer que tengo una ecuación lineal, que sería una línea ¿no?,  $2x - 6$ .
96. M: Si yo aplico la derivada, pues obtengo lo que es la tangente ¿no?. Ehh.. [UE-15].
97. M: [UE-16] Aplicando la fórmula que tenemos, que acabamos de obtener sería igual a esto ¿no?
98. M: Límite cuando el incremento de  $x$  tiende a cero igual, ¿qué dije antes? es  $f(x)$  más incremento ¿no? que en este caso sería  $2(x + \Delta x)$  o el incremento de  $x$ ,
99. M: ¿Que más?
100. A: Menos el 6 original
101. M: Menos 6, menos esta función de aquí, ¿no?  $f(x)$ , que vendría siendo esta parte de aquí [señala fórmula de la derivada].
102. M: Sería la función más su incremento menos [inaudible] la función que sería  $2x - 6$  sobre el incremento de  $x$  o  $\Delta x$ , como quieran llamarlo. [UE-16]
103. M: [UE-17] Lo pueden agrupar en corchetes o paréntesis si gustan y sería el valor de  $f(x)$ ,  $2x - 6$ , sobre, el incremento de  $x$  [ $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 6 - (2x - 6)}{\Delta x}$ ]. Lo que sigue..., sería..., nomás... es álgebra ¿no?
104. M: Hacer una multiplicación de este monomio por polinomio al igual que eliminar este paréntesis contra este signo, o sea una multiplicación de 2 por  $x$  y 2 por  $\Delta x$ .
105. M: Esto me da  $2x + 2\Delta x - 6 - 2x + 6$  sobre el incremento de  $x$ .
106. M: Hasta ahí una alguna duda, de lo que se ha dicho, dudas, preguntas ¿nada?.
107. M: Prosigo entonces, el límite, cuando el incremento tiende a cero, lo que sigue sería eliminar los términos que están semejantes ¿cuáles términos tengo que están semejantes?
108. A: 6 y  $2x$  [varios]
109. M: Este  $2x$  con este  $-2x$  se cancelaría ¿no?
110. A: Sí, seises [varios]

111. M: Menos 6 más seis.. y ¿que es lo único que... que queda? 2 por el incremento de  $x$  sobre el incremento de  $x$
112. A: Ohh, ¿es lo único que queda?
113. M: Sí. Entonces  $\Delta x$  sobre  $\Delta x$ , es uno, una unidad, entonces digo que, la derivada de esta función va a ser igual a 2. [UE-17]
114. M: Hasta ahí ¿hay dudas? Díganlas, alguna duda, ¿ninguna? Posteriormente vamos a ver que hay fórmulas y no tenemos que aplicar todo este procedimiento.

5:24:18 p.m. [CE-5]

[Escribe en pizarrón  $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ ]

115. M: [UE-18] Vamos a ver una función cuadrática ¿ehh? o una función de segundo orden. La función sería  $4x^2 - 3x + 5$ . [UE-18]
116. M: [UE-19] Si aplico la misma terminología que estuvimos haciendo sería límite cuando el incremento tiende a cero, sería:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 5}{\Delta x}$  ¿que más sigue?
117. A1: Por  $4x$
118. A2: Menos
119. M: Menos
120. A: Ajá,  $-4x$ , menos  $4x^2$
121. A1: Menos  $3x$ , cinco, sobre  $\Delta x$  todo
122. M: Todo sobre  $\Delta x$ , ¿no?
123. M: Es aplicando la fórmula  $\Delta x$  la que teníamos hace un momento nomás que la borre, que decía  $f(x + \Delta x) - f(x)$  sobre el  $\Delta x$ . [UE-19]
124. M: [UE-20] Cuando el límite de la función tiende a cero, lo que estoy encontrando en vez de una recta secante sería una tangente ¿qué es la tangente?
125. M: No es más que la derivada de una función.
126. M: Y vuelvo a lo mismo, puede ser una función de cualquier orden ¿no?, primero, segundo, tercer orden.
127. M: Posteriormente vamos a ver qué es lo que esta pasando con los exponentes y

128. M: Deducir por qué la derivada de una constante es cero, por qué la derivada de  $x^n$  es  $n$  por  $x^{n-1}$  y etcétera, etcétera, y las trigonométricas ¿no? [UE-20]
129. M: [UE-21] Lo que aquí sigue pues es lo... ya es pura álgebra nada más,
130. M: Elevar este binomio al cuadrado, hacer esta multiplicación de un monomio por un polimio o un binomio y eliminar estos paquetes por medio del signo.
131. M: Pues eso de elevar al cuadrado ¿que tengo que multiplicar?
132. A:  $x^2$  ... 4 por  $x^2$
133. M: Ajá [anota en pizarrón  $4(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)$ ]
134. A: Más  $2x \Delta x + x\Delta x + 4x^2$
135. M: Que no es más que el primer término elevado al cuadrado, más el doble producto del primero por el segundo término, más el segundo término al cuadrado, que es un binomio al cuadrado, o como decía él, puedes poner  $(x + \Delta x)$  por  $(x + \Delta x)$  ¿no?
136. M: Van a salir cuatro términos, se reducen y ya, o aplicas la fórmula que algunas veces la dan en la secundaria o en la prepa todavía algún maestro lo maneja: binomio al cuadrado es igual al primer término elevado al cuadrado más el doble producto del primero por el segundo término más el segundo término al cuadrado y obtenemos esto.
137. M: Lo que sigue, continuamos,
138. M: Entonces vamos a multiplicar este  $-3$  por  $x + \Delta x$ , que sería  $-3x - 3\Delta x + 5 - 4x^2 + 3x - 5$  sobre  $\Delta x$ .
139. M: Si nos fijamos todavía sigo teniendo paréntesis ¿no?
140. M: Lo que prosigue sería eliminar esto, multiplicando el 4 por cada uno de los términos que tengo dentro del paréntesis. Eso quedaría... $4x^2$  ¿no?...
141. M: 
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4x^2 - 3x - 3\Delta x + 5 - 4x^2 + 3x - 5}{\Delta x}$$
 [anota en el pizarrón]  
(5:28:06 p.m)
142. M: Pues vamos a hacer lo mismo, buscar los términos que son semejantes a los cuales yo pueda restar o sumar dependiendo sea el caso.
143. M: Pueden empezar por, por donde quieran, no necesariamente tenemos que llevar un orden, lo que si tengo que sumar todas las  $x^2$  con las que tengan  $x^2$ , ¿no?,

144. M: Por ejemplo podemos empezar con esta, entonces  $4x^2$ ... la única sería con esta ¿no?, una es positiva otra es negativa entonces se cancelan.

145. A:  $3x$

146. M: ¿Con cual quieren proceder? ¿con el  $3x$ ? Este  $3x$  negativo con este positivo. (Inaudible). Aquí esta  $5 - 5$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x + \cancel{5} - 4x^2 + \cancel{3x} - \cancel{5}}{\Delta x}$$

147. M: Estos términos de aquí no son semejantes, [señala  $8x\Delta x$  y  $3\Delta x$ ] no los puedo sumar, puesto que este es  $x\Delta x$  y este es  $\Delta x^2$  y este es nada más  $\Delta x$ , ninguno es semejante.

148. M: [Anota  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$ ]

149. M: Si pueden ver en los términos tengo ... en todos, tengo un factor común que en este caso es el  $\Delta x$ , está en todos.

150. M: Ehh... aquí no hay ningún factor común en cuestión de los coeficientes puesto que este es 8, 4 y 3, y 3 es número primo y no hay múltiplos ni del 3 ni el 4.

151. M: Si hubiera sido el puro 4 y el 8, hubiera tomado el 4 como uno de los múltiplos, en este caso ¿no?

152. M: Entonces, puedo factorizar y decir que el incremento de  $x$  va a multiplicar a  $8x + 4\Delta x - 3$  sobre el  $\Delta x$ .

153. M: Incremento de  $x$  entre incremento de  $x$  eso me da una unidad y la unidad multiplicada por lo que tengo aquí en paréntesis, eso me da lo mismo ¿no?

154. M: [Anota  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 8x + 4\Delta x - 3$ ] [UE-21]

155. M: [UE-22] Bien si yo le doy el valor al incremento de  $x$ , cero,

156. M: Porque lo que yo quiero es que esa secante se vaya reduciendo hasta que sea una línea tangente,

157. M: Le tengo que dar el valor del incremento, porque no quiero que tenga un incremento sino que se vaya decreciendo,

158. M: Su incremento debe de valer cero, si esto vale cero se va a cancelar

159. A: Profe, una pregunta. O sea, usted tiene una función pero la estás tomando puntos, como que ellos te van a definir la pendiente de la recta...
160. M: Sí.
161. A: Pero, o sea, lo que tu estás realmente evaluando es nomás un punto...
162. M: Un punto.
163. A: Por eso es que se va..., por eso tiende a cero...
164. M: Cero.
165. A: Una tangente. Es todo
166. M: Entonces encuentro derivada de esta función, que sería  $8x - 3$ . [UE-22]
167. M: Hay alumnos que... no sé si han llevado ya este curso,
168. M: Pero rápidamente se dan cuenta del resultado que voy a obtener, otros no, que dicen ¿de donde sale? ¿no?
169. M: Posteriormente todo este proceso que esta aquí se simplifica estando usando ya las fórmulas y llegamos a un punto,
170. M: [UE-23] Posteriormente cuando queramos ya aplicarlo esto, como lo que les decía,
171. M: Lo que es la lata de atún, cuando yo quiero saber lo que es el volumen, y quiero encontrar un máximo o un mínimo, ehh... [dibuja un cilindro, dos circunferencias y un rectángulo en el pizarrón] (5:32:02 p.m.)
172. M: Es lo que dicen ustedes una latita de atún, eso no se como va o como quieran llamarlo,
173. M: Esa lata de atún esta constituida por dos círculos que es el área que serían las tapaderas y aparte el, lo que es el como hoja de la lata
174. M: Si yo aplico la derivada y
175. M: Sacando las ecuaciones de volumen y área y me dicen quiero un volumen de 100 mililitros, me dicen quiero un volumen de 100 mililitros con esta...
176. M: Con un cilindro, para meter un... o una lata de cualquier otro alimento o lo que sea y
177. M: Que me calcules el área más pequeña usando el mayor volumen,
178. M: ¿cuál es la idea de la empresa?
179. M: Bueno de que... no se desperdicie tanto material.

180. M: Entonces, si yo puedo hacer esto, me voy a dar cuenta de que puedo aplicar estas fórmulas de derivada y llegar a esto,
181. M: Entonces puedo decirles y se van a dar cuenta de que el radio, el radio de esto, va a ser igual a la altura de la base.
182. A: O sea que...
183. M: Calculándolo
184. A: El volumen esta en función de lo que vale el radio.
185. M: Y de la altura, del material.
186. M: Es curioso, cuando más adelante lo vamos a ver van a ver que ya tengan todo esto van a decir: ¡Ahh! ¡Que chistoso!
187. M: Entonces la lata de atún esta no la hicieron a lo tonto, es calculado, con medida, tengo tanto de altura, tanto de radio, y
188. M: La persona que diseñó le está pagando mucho dinero la empresa.
189. M: Al igual como van a calcular, como pueden ser los cilindros de gas o algo, o cualquier otro volumen que ustedes se lo imaginen,
190. M: O lo mismo que es en contabilidad o en otras áreas que no tienen, que no nomás en ingeniería, se calcula.
191. M: Para lo que es física, pues es indiscutible ¿no?
192. M: Para la deducción de muchas fórmulas de interés, como por ejemplo lo que es (inaudible) lo que es el tiro parabólico,
193. M: Es muy común a veces un problema de un maestro... que nos puso en el TEC,
194. M: Un problema sobre el tiro parabólico, no daba mucho (inaudible) nada más daba, no daba ni ángulo,
195. M: Tenía la velocidad con la que va a salir el proyectil y tenía la distancia hasta la pared, o sea 100 metros y una velocidad de 500 metros sobre segundo.
196. M: El problema este es ¿a que distancia y en qué ángulo lo podía colocar para pegar en el punto más alto de la pared?
197. M: Ya me están pidiendo un punto muy alto, lo más alto,
198. M: Que cuando estamos refiriéndonos a esto estamos, ya estamos hablando de máximos y mínimos, que son aplicaciones de la derivada y

199. M: A veces no entendemos que esto me puede servir para otras cosas no nomás para pasar la materia y se acabó,
200. M: Sino que vienen muchas variantes y muchas aplicaciones en la vida diaria.
201. A: ¿A poco tiene aplicación para la administración o la economía esto? ¿Sí?
202. M: Sí, como la tasa de crecimiento, son exponenciales y
203. M: Puedes decir: ¡Ahh, en tanto tiempo voy a tener tanta población! [UE-23]
204. M: [UE-24] Claro, hay que.. a veces disminuimos ciertas variaciones ¿no?
205. M: Por ejemplo cuando estamos calculando el tiro parabólico
206. M: Despreciamos lo que es el viento, ya en la realidad eso me va a dar algunos cambios ¿no?
207. M: Al igual con la... la tasa de crecimiento pues ahí [inaudible] ya no me va a dar el valor exacto ¿no?
208. M: Pero en condiciones normales se supone que estos datos me van a arrojar valores...
209. A: Cercanos...
210. M: Exactos. Estas variaciones me van a dar...
211. M: No es que las matemáticas sean inexactas, son exactas, pero hay que renunciar a otras cosas entonces, para tener exactitud.
212. M: Por que siempre la pregunta es ¿es exacto? ¿es exacto?
213. M: Como el Pi, no hay una persona que no haya descubierto todavía cuál es el valor cercano a Pi [inaudible].
214. M: Para dividir una cosa en fracciones alguien dijo pues 0.3333, cuando una persona encontró que es mejor poner  $1/3$ . Y esta especificando la exactitud. [UE-24]
215. M: Al igual esto nos va a servir para muchas... muchas aplicaciones ¿no? Las vamos a ir viendo ¿no?
216. M: Y más cuando veamos los temas de esas aplicaciones, máximos y mínimos, se van a dar cuenta de esto como se aplica ya y...
217. M: Hasta ahorita ¿alguna duda o pregunta aparte de lo que dijo el compañero? Dudas, preguntas...
218. A: No
219. M: [UE-25] Sobre lo que haya quedado en confusión. ¿Prosigo?
220. A: ¿Por qué se elimina?

221. M: ¿Por que se eliminó que?  
222. A: El cuatro...  
223. M: Por que esto vale cero  
224. A: El incremento tiende a cero  
225. A1: ¿El incremento tiende a cero?  
226. M: Ajá, cuatro por cero, pues es cero. [UE-25]

5:36:23 p.m. [CE-6]

[Escribe en pizarrón:  $f(x) = 3x^2 - 2$ ]

227. M: [UE-26] Es similar al que hicimos ¿no? ¿Alguien que quiere pasar a hacerlo?  
[inaudible] Alguien que guste pasar a hacerlo. ¿No? [un alumno pasa]
228. M: Está fácil al cabo! [UE-26]
229. A: [UE-27] Escribimos la función... que vamos a denotar... [escribe en el pizarrón  
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x) - 2 - 3x^2 - 2}{\Delta x}$$
 y desarrolla el procedimiento de solución] [UE-27]
230. M: [Explica que no va a dar clases]
231. A: [UE-28] El último 2 de ahí ¿que no es positivo?
232. M: ¿Cuál?
233. A: Él último 2.. el de..
234. M: ¡Ahh! Lo cambiaste, era positivo.
235. A: ¡Ahh! Si es cierto, entonces... [hace las correcciones]
236. M: Ponle nomás positivo a todos, el de abajo también, ése, y si se cancela con el otro dos, por que en ese caso hubiera quedado -4.
237. A: Ehh... Ahí maestro, no tuvo que haber eliminado el  $3x^2$ , el negativo lo tuvo que eliminar el primero [inaudible]
238. M: Sí, mira, eliminaste este, era este producto, no este. Era el primer término  $3x^2$ , esos dos, el primero que tenías,  $3x^2$  y habías eliminado  $3\Delta x$
239. A: ¡Ahh! OK [corrige]
240. M: El  $3x^2$  este lo debías eliminar con este. Sobre el  $\Delta x$
241. M: Debes buscar el factor común, en este caso  $\Delta x$
242. A: Y 3 ¿no?

243. M: Bueno, también.
244. A: [Inaudible, revisa con maestro ejercicio]
245. M: [Inaudible, revisa ejercicio de alumno]
246. A: Esto tiende a cero... igual a 2 [anota  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = 3\Delta x + 2$  y obtiene  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} = 2$ ]
247. M: Nada más que... era
248. A: Le faltó multiplicar...
249. M: ...ajá...
250. A: ...por el 2
251. M: Permíteme, este 3 multiplica a este y a este...
252. A: ¡Ahh! Si es cierto...
253. M: Entonces no te quedaría... tu crees que... estos  $\Delta x$  se cancelan, entonces ¿que te quedan?  $3\Delta x$  y 3 por 2.
254. A: Si es cierto
255. M: Entonces nomás aquí sería el 6 ¿no? Nomás era agregarle en vez del 2 un 6
256. A: Más 6
257. M: Eso tiende a cero, pues, y 3 por cero, cero
258. A: Ahí le falta X ¿no?  $2x$
259. M: A ¿x? Donde le...
260. A: Era  $2x$
261. A1: En el 2
262. A2: Allá...
263. M: Arriba, ese 2 era  $x$
264. A1:  $2x$
265. A2: ¡Aah!
266. A3: Si por que la  $x$  no era el común.
267. M: No, era...
268. A: Era el  $3\Delta x$  [UE-28]
269. M: ¿Preguntas? ¿Dudas? Ochoa ¿dudas? [inaudible] ¿Qué estas llevando tu Ochoa? ¿Cálculo avanzado?
270. A: No, profe

271. M: ¿No?  
272. A: Pues ahí dice en la mañana, yo que sé, jejeje  
273. M: Beto, ¿puedo borrar?  
274. A: Sí, sí...  
275. M: Adael, ¿me prestas tu cuaderno?

5:44:48 p.m. [CE-7]

[Escribe en el pizarrón las funciones  $y = 2x - 6$ ,  $y = 4x^2 - 3x + 5$  y  $y = 3x^2 - 2$ ]

276. M: [UE-29] Este son los que hicimos ¿no? ahorita.  
277. A: Sí  
278. M: Y los resultados que obtuvimos de esto, que sería  $y'$  o la derivada de  $y$  como quieran decirle, es lo mismo, prima o derivada... [anota  $y'$  para cada resultado]  
[UE-29]  
279. A: [UE-30] En la primera sería 2...  
280. M: Nos dio 2. ¿En esta 8...? [anota en el pizarrón las derivadas  $y' = 2$ ,  $y' = \dots$ ]  
281. A: -3  
282. M:  $8x - 3$  y en esta .. (inaudible)  
283. A: 6  
284. M:  $x$  ¿no? [termina anotando  $y' = 2$ ,  $y' = 8x - 3$ ,  $y' = 6x$ ]  
285. A:  $6x$   
286. M: ¿Qué podemos observar de esto? ¿Qué observan?  
287. A: Hey profe, ¿no podemos hacer así, sin hacer todo el movimiento?  
288. M: Sí  
289. A: O nomás, nomás... (inaudible) ¿cómo le puedo explicar?  
290. A: O sea, allí donde esta el  $3x^2$ , pues se... el 3 y el 2 se multiplican por  $6x$ , o sea, no sé como explicarle pero... se le elimina... la constante ¿no?  
291. M: Ahí va, ahí va...  
292. A: Se elimina la constante  
293. M: ¿Hay alguien que le quiera ayudar? Ochoa...  
294. A1: Así, el.. el... ¿cómo se llama?  
295. A2: Exponente

296. A1: El 2, exponente, multiplica al 3 y al exponente le quitas uno.
297. M: Primero, ¿qué pasa con esos números?
298. A: Se elimina, se eliminan... [Varios alumnos]
299. A1: Como son constantes se eliminan
300. A2: Por que son constantes pues...
301. M: Entonces quiere decir que la derivada de una constante es...
302. A: Cero [Varios alumnos]
303. M: Es lo primero que vemos ¿no?,
304. M: Que la derivada de cualquier constante es cero ¿no?
305. M: Cualquier coeficiente, dos, mil, tres mil ó  $-5$  ó  $1/4$  ó  $1/3$ , Pi, esos números que son constantes, al momento de derivarlos van a ser cero. [UE-30]
306. M: [UE-31] Y lo que dijo Ochoa es muy cierto, no van a tener... no necesitan hacer todo esto, por que primero [inaudible] observando que está pasando pues.
307. M: Ahora, ¿que era lo que estaban diciendo ustedes? Ehh...  $x$  a la  $n$  ¿no? [anota  $y = x^n$ ]
308. A: El exponente
309. M: ¿Que pasa?
310. A: Multiplica... El exponente multiplica
311. M: Ajá, multiplica ¿a quien?
312. A: Al coeficiente del... al coeficiente  $x$ , ¿no?
313. M: Lo voy a poner así, constante, ¿no? [anota  $y = kx^n$ ]
314. A: Ah sí...
315. M: Entonces la derivada de esto, va a ser igual a ¿qué?
316. A:  $A n$  por  $k$
317. M:  $n$  por  $k$ , ¿qué más? [anota  $y' = nk$ ]
318. A: Y  $n - 1$
319. A1: Pero no... [UE-31]
320. M: [UE-32] [anota  $y' = nkx^{n-1}$ ] Y ahí sale ¿no?
321. M: Son las dos únicas que miramos hasta ahorita, ¿no? Ni modo.
322. M: Entonces ya no tuve que hacer todo el procedimiento como decía Ochoa.
323. M: Si yo me fijo que la derivada de una constante, [anota  $y = k$   $y' = 0$ ] pues es cero, y la derivada de esta función,  $k$ , una constante, con un valor  $x$  elevado a un

exponente, va a ser lo mismo que  $nkx$  a la  $n - 1$  [señalando  $y' = nkx^{n-1}$ ] [5:48:13 p.m.]

324. M: Entonces, si yo quiero derivar una función como estas que estuve haciendo, puedo obtener los resultados sin necesidad de hacer cada uno de los procedimientos. [UE-32]
325. A: [UE-33] Por ejemplo, ahí si fuera cúbica, nomás sería, en la  $x$ ,  $3x^3$  ¿no? Si fuera cúbica fuera nueve.. si ¿no?, nueve...  $9x^2$ , ¿no?
326. M:  $9x^2$
327. A: ¿En cual? ¿En la primera?
328. A1: En la de abajo
329. A2: En el medio
330. M: En esta
331. A: ¡Ohh! Sí, perdón
332. M:  $9x^2$ , si fuera cúbica... ¿Preguntas hasta ahorita? [UE-33]

5:48:59 p.m. [CE-8]

333. M: [UE-34] Podemos hacer [inaudible] para ver si es cierto ¿no? ¿Hacemos una cúbica, como dice Ochoa? Vamos a ver... ahh...  $x^3$  menos tres, no, menos  $7x$ .
334. M: [Anota en el pizarrón  $y = x^3 - 7x$ ] Seguro que ustedes ya saben cual va a ser el resultado ¿no? ¿Cuál sería Ochoa, la derivada? [UE-34]
335. A: [UE-35]  $3x^2 - 7$
336. M: Puesto que en este caso  $x$ , vale uno ¿no?
337. A: Sí, pero... porque  $x$  vale uno...
338. M: Acuérdense de que cuando yo tengo una variable  $x$ ,  $x$ ,  $p$ , si no tiene exponente se entiende que es uno, no lo tengo que poner pero se entiende que es uno y sería uno por  $-7$  es  $-7$ , y luego seguiría  $n - 1$ , entonces ¿uno menos uno?
339. A: Cero
340. M: Cero y cualquier valor o cualquier cantidad elevada a cero, siempre nos da uno ¿no?
341. M: Cualquier potencia elevada a la cero, es uno, entonces 1 por 7, es 7 y ya obtuve la derivada. [UE-35]

342. M: [UE-36] Ahora, si volvemos a lo que estábamos haciendo anteriormente, aplicando la fórmula, yo tengo que esto va a ser igual a... ¿cómo sería?... aplicando el límite del incremento cuando tiende a cero, va ser igual a  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - 7(x + \Delta x) - x^3 + 7x}{\Delta x}$  (5:50:46 p.m.) que es lo que estábamos haciendo ahorita ¿no?
343. M: No puse paréntesis a la multiplicación, menos por más, me da menos, discúlpeme ¿no? por... perdón. Menos por más es menos y... menos por menos es más.
344. M: Y le quité el paréntesis.
345. M: Lo que sigue sería evaluar este trinomio, binomio al cuadrado, un binomio al cubo, perdón y luego multiplicar el  $-7$  por cada uno de los términos que están dentro del paréntesis y volver a hacerlo mismo,
346. M: Reducir términos que sean semejantes, irlos cancelando, y luego ir... tratando siempre de sacar el factor común, en este caso el [inaudible], para eliminarlo con este incremento, y
347. M: Luego lo que sigue sería posteriormente sustituir el incremento de  $x$ , [UE-36]
348. M: [UE-37] Que algunos maestros, no sé si lo manejaron, la regla de los cuatro pasos, algo así le decían,
349. M: ¿Si lo manejaron así algunos de ustedes? Ya cuando... es común a veces, cuando están viendo derivadas se meten con esto primero
350. A: No
351. M: Unos pasos en que se veía... pues darle el incremento de  $x$  ¿no? y luego evaluarlos, factorizar y luego al último dividir y darle valor al incremento de  $x$ , es cero,
352. M: Porque el incremento yo quiero que sea cero, para encontrar una recta, para encontrar una tangente. [UE-37]
353. M: [UE-38] ¿Cómo quedaría este trinomio... ese binomio al cubo?
354. A: El cubo del primero...
355. M: ¿Se lo saben bien?
356. A: Sí [Varios alumnos]
357. A1: Más el doble producto...

358. M: Hay varias formas eh, una... lo voy a hacer yo aparte ¿no? Esto es básico, para que no se vayan así ¿no? [anota  $(x + \Delta x)^3 = (x + \Delta x)^2(x + \Delta x)$ ]
359. A: Un binomio al cuadrado por un binomio...
360. M: Es lo mismo, yo creo que a veces son...
361. M: No es necesario utilizar todas las cosas de memoria todo es de... pensar: ¡Ahh! Pues es al cubo, ¡esto si lo sé! y armar un (Inaudible) o un binomio y se acabó y
362. M: Obtenemos un binomio al cubo, en vez que el triple del primero, que el cubo del de este... y hay como muchas formas más, ¿no?
363. M: Entonces hay que valerse de otras reglas,
364. M: Porque esto no es más que leyes de exponentes, leyes de exponentes que miraron en matemáticas para ingeniería, que fue el primer tema,
365. M: Es lo mismo, esto es igual a esto, y
366. M: Esto pues yo sé que es  $(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)$  y esto ya lo multiplico por  $(x + \Delta x)$
367. M: Y es lo que estaban diciendo que es el cubo del primer término más el triple producto al cuadrado [inaudible], de ahí sale, que sería  $x^3$ ,
368. M: Esto está multiplicando y posteriormente va a pasar para allá, más  $2x^2\Delta x$  y luego más  $x\Delta x^2 + \Delta x x^2 + 2x\Delta x^2 + \Delta x^3$ . [completa  $x^3 + 2x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x x^2 + 2x\Delta x^2 + \Delta x^3$ ]
369. M: Lo único que hice, multipliqué este,  $x$ , por cada uno, y luego el  $\Delta x$  por cada uno de los que tengo ahí y obtengo todo esto.  $x^3$ ,
370. M: Supongo que sería... no..., a ver es este con... con este ¿no?, más 3... si puedo...
371. M: ¿Es lo que ibas a decir no?
372. A: Sí
373. M: Esto, por regla es, el cubo del primer término, en este caso es  $x$ , más el triple producto del producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple del cuadrado del segundo por el primero, más el cubo por del segundo término.
374. M: Lo van a aprender por regla o pues, van a usar esta técnica o algo
375. M: Regresamos a esto entonces ¿no? Límite del  $\Delta x$  cuando tiende a cero:  

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 7x - 7\Delta x - x^3 + 7x}{\Delta x}$$
 Ya está.
376. M: Esto, este valor lo sustituí acá ¿no? donde está el binomio al cubo.
377. M: Ahora vamos a hacer lo mismo, buscar términos que son semejantes

378. A: Y ahí ¿ es +7 o es -7?
379. M: ¿Dónde?
380. A: En este 7
381. M: ¿Cuál? ¿Cuál?
382. A: Es +7
383. M: ¡Ahh! Es +7
384. A: ¿Es +7?
385. Al: Sí
386. M: Se acuerdan que es menos  $f(x)$  ¿no?
387. A: Sí [Varios alumnos]
388. M: Y el menos, pues abarca a los dos, nomás que yo no lo puse allá, lo multipliqué directamente.
389. M: Todavía lo puedo... lo pongo ¿no?
390. M: Para que no se enreden. Ya multiplicado me va a dar este negativo y este positivo.
391. M: Vuelvo a lo mismo, busco términos que sean semejantes, esta  $x^3$  con esta  $-x^3$  se cancelan, el  $-7x$  con el más  $7x$  se cancelan,
392. M: ¿qué otro se va a cancelar? ¿es el único?
393. A: Sí
394. M: Único, nada más, ¿no? Entonces vamos ahora en que el límite, incremento de  $x$  tiende a cero va a ser igual a  $3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2$ ... perdón... al cubo...
395. M: ¿Dudas? ¿dudas hasta ahorita?
396. M: Factoricé lo que es el incremento de  $x$ , para cancelarlo, entonces me queda el límite cuando el incremento de  $x$  tiende a cero como  $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 7$ .
397. M: Si yo le doy el valor cuando tiende a cero, pues estos se van a cancelar por que  $3x$  por cero es cero,  $\Delta x^2$  es cero por cero me da cero, y lo que me queda es  $3x^2 - 7$ , que es lo que vimos ahorita. [UE-38]
398. M: Y ya, sin necesidad de hacerlo todo esto,
399. M: Pero ¿que pasa? que con la observación, ¡ahh! ¡mira! pues se multiplica, que fue lo que dijeron acá, sería  $n$  por  $k$  y el exponente  $n$  le restamos uno, y aquí está pues, todo.

400. M: Entonces la derivada de una constante es cero y  $x^n$  pues no es más que  $nx^{n-1}$ .  
¿Alguna duda o algo que les gustaría decir? ¿no? ... nos vemos mañana ...

**5:58:00 p.m. [Termina sesión]**

Apéndice H: Exámenes presentados en el caso tradicional

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **2o. PARCIAL** Contenido: **Límite y derivada** Grupo: **02** **A**

Nombre del alumno: **Carlos** Fecha: **27/04/2024** Puntos:

Prof. Ing. Emanuel Viera

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

Pasos para la solución del problema	Justificación de cada paso
<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math> b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5V, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math> b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	<p>Se factoriza y eliminamos términos.</p> <p>Se sustituye <math>x = 9</math></p> <p>Se usa la ley de L'Hôpital <math>\frac{(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}</math></p> <p>Se desarrolla binomios y multiplicaciones.</p> <p>Se factoriza y se trae <math>\Delta x</math> como producto común para dividirlo entre el <math>\Delta x</math> y queda lo demás multiplicado por 1.</p> <p>Se sustituye y <math>\Delta x = 0</math> y se obtiene el resultado.</p>

Figura H1: Pasos y justificaciones de Carlos en el ejercicio 3, incisos a), b).

4.  $f(x) = -x^2 + 210x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + 210(x+\Delta x) + x^2 - 210x}{\Delta x}$$

$$\frac{-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 210x + 210\Delta x + x^2 - 210x}{\Delta x}$$

$$\frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 210\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(210 - 2x - \Delta x)}{\Delta x} \rightarrow \boxed{210 - 2x} \quad \text{a)}$$

$$\frac{210 - 2x}{210 - 200} = \boxed{10} \quad \text{b)}$$

Se determina la razón del cambio, derivando la función original.

Se sustituye  $x = 100$

Figura H2: Pasos y justificaciones de Carlos en el problema 4, incisos a), b).

**cesues**  
CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Límite y derivada</b>	Grupo: <b>02</b>
Nombre del alumno: <b>Raúl</b>		Fecha:	Puntos: <b>A</b>

*Prof. Ing. Emanuel Viera*

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math>      b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de <math>5v</math>, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math>      b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	
Pasos para la solución del problema	Justificación de cada paso

Figura H3: Examen de Raúl con soluciones aparte.

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x-3}}$  =  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x+9)(x-9)}{(x-3)^{1/2}} = \frac{(9+9)(9-9)}{(9-3)^{1/2}} = \frac{(18)(0)}{(6)^{1/2}} = \infty$

1 b)  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^3 - 5x - 4} = \sqrt[3]{(9)^3 - 5(9) - 4} = \sqrt[3]{81 - 45 - 4} = \sqrt[3]{32} = \boxed{3.17}$

3 a)  $F(x) = 6x^2$

Paso #1: aplica la fórmula  $F(x+\Delta x) = 6(x+\Delta x)^2 = 6(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) = 6x^2 + 12x\Delta x + 6\Delta x^2$

Paso #2:  $F'(x) = \frac{6(x+\Delta x)^2 - 6x^2}{\Delta x} = \frac{6x^2 + 12x\Delta x + 6\Delta x^2 - 6x^2}{\Delta x}$

Paso #3: multiplicas el polinomio por la etc  $= \frac{12x\Delta x + 6\Delta x^2}{\Delta x}$

Paso #4: Reducir términos semejantes  $= \frac{12x\Delta x + 6\Delta x^2}{\Delta x}$

Paso #5: Factorizar  $\Delta x$   $= \frac{(12x + 6\Delta x)\Delta x}{\Delta x}$

Paso #6: eliminar  $\Delta x$  porque da de 0  $\boxed{12x}$

Figura H4: Pasos y justificaciones de Raúl en el ejercicio 3, inciso a).

3. b)

$$f(x) = x^3 - 2x$$

Paso #1.- aplicar la fórmula

$$\frac{(x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) - x^3 + 2x}{\Delta x}$$

Paso #2.- elevar el binomio y multiplicar el otro binomio

$$\frac{\cancel{x^3} + \Delta x^3 + 2x^2\Delta x + 2x\Delta x^2 + x\Delta x^3 + \cancel{x^3} - 2x - 2\Delta x - \cancel{x^3} + 2x}{\Delta x}$$

Paso #3.- fact  $\Delta x$

$$\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x^2 + 2x^2 + 3x\Delta x + x\Delta x^2 + x^2 - 2)}{\cancel{\Delta x}}$$

Paso #4.- eliminar  $\Delta x$

$$\boxed{3x^2 - 2}$$
  

$$\begin{array}{r} x+y \\ x+y \\ \hline x^2+2xy+y^2 \\ x+y \\ \hline x^3+ax^2y+xy^2+x^2y+2y^2x+y^3 \\ x^3+y^3+ax^2y+2yx^2+xy^2+x^2y \end{array}$$

Figura H5: Pasos y justificaciones de Raúl en el ejercicio 3, inciso b).


$2 - i = V/R$   
 $V = 5$   
 2. a)  $R = 2$   
 $i = 5/2$

2. b)  $R = .05 - 13/20$   
 $i = 5/(13/20)$   
 $i = \frac{5(20)}{13}$   
 $i = \frac{100}{13}$

4. a)  $F(x) = -x^2 + 210x$   
 $F'(x) = \frac{- (x + \Delta x)^2 + 210(x + \Delta x) - (-x^2 + 210x)}{\Delta x}$   
 $F'(x) = \frac{- (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 210x + 210\Delta x + x^2 - 210x}{\Delta x}$   
 $\frac{-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 210x + 210\Delta x + x^2 - 210x}{\Delta x}$   
 $\frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 210\Delta x}{\Delta x}$   
 $\frac{-2x - \Delta x + 210}{1}$   
 $F'(x) = -2x + 210$

4. b)  $-2(100) + 210$   
 $-200 + 210$   
 $10$

Figura H6: Pasos y justificaciones de Raúl en el problema 4, incisos a), b).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **2o. PARCIAL** Contenido: **Límite y derivada** Grupo: **02** A

Nombre del alumno: **Erick** Fecha: Puntos:

Prof. Ing. Emanuel Viera

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math> b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^3 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = VR</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5v, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math> b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	<p style="text-align: center;">Pasos para la solución del problema</p> <p style="text-align: center;">Justificación de cada paso</p> <p style="font-size: 0.8em;">3. a) <math>f(x) = 6x^2 \rightarrow f'(x) = 12x</math>  <math>f'(x) = 12x</math>  <math>f'(x) = 12(6) = 72</math>  <b>[12]</b></p> <p>b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math>  <math>f'(x) = 3x^2 - 2</math>  <math>f'(x) = 3(100)^2 - 2</math>  <math>f'(x) = 30000 - 2</math>  <math>f'(x) = 29998</math>  <b>[3x^2 - 2]</b></p>
---	--

Se transcribe la justificación para mayor claridad:

“En la ubicación de cada “x” colocamos  $x + \Delta x$  realizamos las operaciones. Después sacamos la  $\Delta x$  como factor y la eliminamos con la que está dividiendo, las demás  $\Delta x$  se eliminan ya que tienden a cero y lo que nos queda es la derivada”

Figura H7: Pasos y justificaciones de Erick en el ejercicio 3, inciso b). No resolvió el problema 4.



CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Teoría derivada</b>	Grupo: <b>02</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>- Carlos</b>		Fecha: <i>[Handwritten Signature]</i>	Puntos:	
Prof. Ing. Emanuel Viera				

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto x dentro del intervalo Δx, la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto x e intervalo Δx es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en x más otros términos con Δx
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - Δx = 0 y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque Δx tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores
- Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:

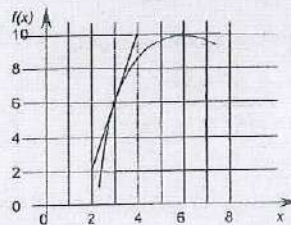
Figura H8: Respuestas de Carlos en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

- a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
~~b) La razón de cambio promedio~~
- b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
d) Ninguna de las anteriores
11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f'(2) = 20$ . Esto significa que:  
~~a) La función varía en 20 unidades~~  
c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
d) Ninguna anterior
12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:
13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:
14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
~~d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?~~
15. Argumenta por qué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.

17. Por qué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ;

Para la función de la siguiente gráfica:



18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
a) 6  
b) 4  
~~c) 2~~  
d) 0
19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
a) 10  
b) 4  
c) 2  
~~d) 0~~

Figura H9: Respuestas de Carlos en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
<b>Cálculo diferencial e int.</b>	<b>2o. PARCIAL</b>	<b>Teoría derivada</b>	<b>02</b>
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:
<b>Raúl</b>			<b>A</b>

*Prof. Ing. Emanuel Viera*

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

1. Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - a) Una fórmula
  - b) Un modelo de
  - c) Un modelo para
  - d) Ninguna anterior
2. Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - a) Una razón por unidad
  - b) Una derivada
  - c) Una razón de cambio promedio
  - d) Ninguna de las anteriores
3. Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - a) Una velocidad instantánea
  - b) Una velocidad media
  - c) Una razón por unidad
  - d) Ninguna anterior
4. La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - a) La rapidez de variación
  - b) Una razón por unidad
  - c) Una razón de cambio promedio
  - d) Ninguna de las anteriores
5. Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - a) Un intervalo infinitamente pequeño
  - b) Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - c) Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - d) Ninguna de las anteriores
6. Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - a)  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - b) Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - c) La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - d) Ninguna de las anteriores
7. La derivada como *modelo para* representa:
  - a) La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - b) La pendiente de la recta tangente a la curva
  - c) La razón de cambio en un punto
  - d) La rapidez de variación
8. La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - a)  $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - b) Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - c) Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - d) Ninguna de las anteriores
9. La razón de cambio en un punto:
  - a) No existe porque en un punto no hay variación
  - b) Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - c) Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - d) Ninguna de las anteriores
10. Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:

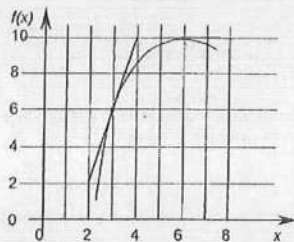
Figura H10: Respuestas de Raúl en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

- a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
 c) La razón de cambio promedio
- b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 d) Ninguna de las anteriores
11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades  
 c)  $f'(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 d) Ninguna anterior
12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:
13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:
14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
 a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?
15. Argumenta porqué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.

Por que el crecimiento de la población este debe por una ecuación

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.
17. Porqué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \text{tác} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ;

Para la función de la siguiente gráfica:



18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0
19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

Figura H11: Respuestas de Raúl en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
<b>Cálculo diferencial e int.</b>	<b>2o. PARCIAL</b>	<b>Teoría derivada</b>	<b>02</b>
Nombre del alumno:	Fecha:		Puntos:

**Erick**

08/05/06

Prof. Ing. Emanuel Viera

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

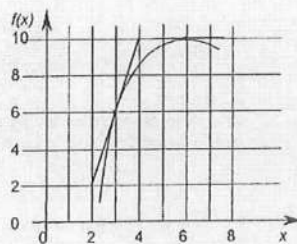
- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores
- Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:

Figura H12: Respuestas de Erick en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

- a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 c) La razón de cambio promedio  
 d) Ninguna de las anteriores
11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f'(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades  
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
 d) Ninguna anterior
12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:
13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:
14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
 a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?
15. Argumenta porqué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.


16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.
17. Porqué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ;

Para la función de la siguiente gráfica:



18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0
19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

Figura H13: Respuestas de Erick en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
<b>Cálculo diferencial e int.</b>	<b>3r. Parcial</b>	<b>Aplicación Deriv.</b>	<b>02 A</b>
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:
<b>Carlos</b>			

*Ing. Emmanuel Viera*

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

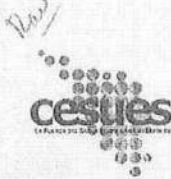
Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	50 unidades/año	75 unidades/año	25 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

Figura H14: Respuestas de Carlos en examen de modelación (ninguna).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**

UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>3r. Parcial</b>	Contenido: <b>Aplicación Deriv.</b>	Grupo: <b>02</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>Raúl</b>		Fecha:	Puntos:	

*Ing. Emmanuel Viera*

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	50 unidades/año	75 unidades/año	25 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

*x es el # de pedidos y es tamaño del pedido*  
*z es el costo total*

$x \cdot y = 1000$

$1.2y + 20(x) = z$

Figura H15: Respuestas de Raúl en examen de modelación.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**

UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
<b>Cálculo diferencial e int.</b>	<b>3r. Parcial</b>	<b>Aplicación Deriv.</b>	<b>02 A</b>
Nombre del alumno:		Fecha:	Puntos:
<b>Erick</b>		<b>(19)</b>	

Ing. Emmanuel Viera

(11-6) Adhiva 2

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	50 unidades/año	75 unidades/año	25 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

$$\text{COSTO TOTAL} = \frac{1000}{x} (20 \text{ DLLS}) + \frac{x}{2} (1.2 \text{ DLLS}) \quad x = \text{TAMAÑO DE PEDIDO}$$

Figura H16: Respuestas de Erick en examen de modelación.

### **Apéndice I: Entrevistas sobre derivada y realidad. Caso tradicional.**

Las preguntas 12 y 13 del cuestionario de comprensión, en las que se pide a los estudiantes mencionar situaciones cotidianas como ejemplos y contra ejemplos de la derivada, fueron complementadas con parte de las entrevistas. En ellas se preguntó ¿cómo enseñarías cálculo? Al ver que Carlos y Erick no mencionaron situaciones reales en sus respuestas, en las siguientes entrevistas agregamos la pregunta ¿para ti la derivada es algo real? con el fin de apreciar cómo el estudiante relaciona derivada y realidad.

Las respuestas dadas por Carlos nos sugieren que tiene una idea imprecisa de la noción de derivada. Para enseñar dicha noción él afirma: “primero tendría que saber yo”. A pesar de ello Carlos identifica la utilidad de la derivada en el cálculo de valores máximos o mínimos. En la transcripción siguiente además observamos que Carlos propone una didáctica tradicional para la enseñanza de la derivada, esto es, del concepto abstracto a las aplicaciones. Dicha didáctica fue criticada por Freudenthal quien abogó por las actividades de matematización. En la transcripción identificamos con M del nombre del entrevistador y con C el nombre de Carlos, el estudiante entrevistado:

- M: Si tu enseñaras cálculo, si enseñaras la derivada ¿cómo enseñarías? ¿Cómo crees que sería una buena manera?
- C: Pues... primero... primero tendría que definirla... tendría que... primero tendría que saber yo... pero suponiendo que ya sé... tendría que definirla y este... pasar a lo que son ejemplos abstractos sin aplicaciones y después ya empezar con ejemplos aplicados, pero ver bastantes ejemplos aplicados porque no se... no se alcanza...
- M: Ahorita con lo que has llevado no... ahorita con lo que has llevado no, este ¿no lo podrías definir tú... no lo podrías o no la entiendes?
- C: Pues así como... sé algunas aplicaciones para que me puede servir, me puede servir para encontrar valores máximos o mínimos de ...cuando ocupe... por ejemplo ahorrar un material o tener dimensiones que me maximicen volúmenes o cosas así... sé que la puedo usar para eso...pero como... no puedo decir la derivada es exactamente esto.

- M: Aquí vamos a cambiar un poquito los papeles... (Comentarios sobre la posibilidad de compartir el significado de la derivada después de la serie de entrevistas programadas)
- M: Bueno, pues no me queda más que darte las gracias, no se sí, hay algo que quisieras comentar. ¿De que te ha servido todo esto?
- C: Pues... de que se lo que no entiendo... no pues... o sea, me... o sea, me doy cuenta de,, de lo que todavía no entiendo acerca del tema y de lo que no... no puedo hacer todavía... ocupo mas un poquito más de profundizar en el tema... porque pues, por ejemplo el último problema pues es un problema muy común que pues si... si... pienso ser ingeniero tengo que saberlo como básico... y... y de que me lo pongan así y no sepa plantearlo pues... paso.

En el caso de Raúl nos parece que posee unos significados más completos y definidos que los que posee Carlos para la derivada. Raúl se refiere a dicha noción como la pendiente de la tangente “en lo gráfico” y como razón de cambio al aplicarla a un problema. Él aboga también por “algo más práctico” en el aprendizaje de la derivada, en que se pueda saber cómo utilizarla, tal como nos sugiere la siguiente transcripción:

- M: Si tú enseñaras la derivada
- R: Ah ah.
- M: Este... ¿cómo lo harías?¿qué dirías lo que es una derivada?¿cómo enseñarías la derivada?¿cómo te gustaría? Imagínate que estás con unos cuatro cinco compañeros tuyos, y tu eres el único que sabes de derivadas y los otros están... pues atorados, queriendo entender ¿cómo les enseñarías?
- R: Pues así como que para más fácil... yo... me... yo veo la derivada así más en lo gráfico, como para explicarla más fácil.
- M: ¿Cómo la explicarías?
- R: Mmm... pues la derivada... como... pues como la recta tangente a la curva que... de la ecuación que vas a derivar...
- M: Y para llevarlo a un problema ¿cómo es que crees que (inaudible)... que no es, que no es tan (inaudible)... que no es gráfico, cómo lo harías?

- R: Pues la derivada, ya en un problema así es como... como una variación pues... como... como una razón de cambio o algo... así... entonces tienes un problema así como que... mmm... como el de la caja por ejemplo... tienes una caja y encuentras la ecuación del volumen de la caja y ya haces tu... (inaudible) y ya encuentras el volumen máximo, cuáles ocupan ser para el volumen máximo, ya aplicas más cosas.
- M: Ah, usarías aplicaciones.
- R: Ah ah.
- M: Este... otro detalle... que más ¿cómo te gustaría que te enseñaran a ti la derivada en esa forma?
- R: Pues sí... y también aprender más de... ah más práctico... (inaudible) se siente uno medio verde en estos problemas prácticos...
- M: Eeeh. No, no te sorprendas, es parte de... es parte de, o sea esa es una de las cosas que motiva el hacer esto... Usualmente lo que se hace... y no es exclusivo del CESUES, o sea, usualmente lo que se hace en todas partes, en todo el mundo cuando se trabaja con este tema es irte sobre los ejercicios... agarras, este... das la definición, das las reglas y a trabajar.
- R: Y derivas ecuaciones y ecuaciones.
- M. Derivas ecuaciones, funciones, funciones, derivas usualmente lo que se hace y unas aplicaciones al final de eso. Aplicaciones, máximos y mínimos y dejas el tema y te vas sobre la integral. O sea, usualmente es lo que se hace. Lo que se encuentra es que, ya en la práctica.
- R: Ya no sabes como usarlo.

La entrevista con Erick dió un giro en torno a los aspectos que le gustaría aprender. Él muestra interés por los aspectos teóricos que se evaluaron a través del cuestionario sobre comprensión, y afirma que son “cosas que no vemos”. Tal como lo observamos en la siguiente transcripción. En Erick encontramos una experiencia con el cálculo más limitada que la de Carlos y Raúl. Erick sólo ha estudiado la derivada en preparatoria y en el curso de cálculo de CESUES, mientras que Carlos y Raúl lo han hecho en otras escuelas de ingeniería.

E: ¿Cómo enseñar la derivada?

M: Cómo te gustaría que la enseñaran (inaudible)... si tú (estuvieras) con CESUES enseñando este tema dentro del cálculo, ¿cómo te gustaría lo enseñaran? ¿cómo te gustaría aprenderlo? ¿Si me entiendes la pregunta? no, no... ¿de qué otra manera se puede decir?... ¿hay algunas cosas dentro de este tema de derivadas que te gustaría aprender o entender y creas que no has aprendido?

E: ¡Todo este examen! (risas).

M: Todo el aspecto teórico.

E: De lo teórico o sea son cosas que en realidad no conozco... cosas que no vemos.

Al preguntarle a Erick por la derivada como algo real, observamos que él asocia la realidad a la realidad física y la derivada a un razonamiento. Aunque dentro de esa realidad física se encuentran las velocidades instantáneas, Erick declara no encontrar la relación entre éstas y la derivada. Resumiendo, nos parece que la noción de derivada no la asocia con la realidad tangible. La transcripción de esa parte de la entrevista se muestra a continuación.

M: Ok, una derivada ¿es algo real?

E: Una derivada... la derivada para mí es en realidad, es algo lógico. Para mí real, es algo que existe o ¿no?

M: Si.

E: La derivada la puedes realizar y todo eso, pero la... para mí... la derivada es como un cálculo nada más.

M: Ajá.

E: O sea, para mi real es ese mesabanco, porque ahí está, es físico.

M: Si.

E: La derivada yo no la veo así... siento que es más como un razonamiento.

M: Ok.

E: Tal vez por eso no pude encontrar... un ejemplo de la derivada como dice en el problema... como hicimos en el examen.

M: Por ejemplo, ¿tú llevaste física?

E: Si.

M: Este... la velocidad instantánea para ti ¿es algo real?

E: ¿La velocidad instantánea?

M: Un objeto en movimiento.

E: Mmm.

M: La velocidad que lleva en un instante ¿es algo real?

E: Digamos que si.

M: Va un carro... shh... y tú dices aquí ¿qué velocidad lleva? la velocidad en un instante ¿es algo real?

E: Si.

M: Este... ¿podieras explicar que relación hay entre eso y la derivada? ¿entre una velocidad instantánea y una derivada?

E: No.

De los tres alumnos, Raúl parece tener significados más claros sobre la noción de derivada y aboga por problemas más prácticos en los procesos de enseñanza aprendizaje. Por su parte Carlos manifiesta la falta de significados claros acerca de la noción y en forma similar Erick aboga por los aspectos “teóricos” y se muestra incapaz de asociarla a la velocidad instantánea. Los resultados nos sugieren una construcción de significados muy limitada de la noción, no sólo de los tratados en este curso sino en cursos previos en los que han participado tanto Carlos como Raúl.

**Apéndice J: Configuración epistémica implementada, caso matemática en contexto.**

**Configuración epistémica implementada.**

Ante la complejidad que implica realizar un análisis epistémico para caracterizar los significados implementados de cada clase de la intervención didáctica, describimos en la Tabla J1 los temas de las primeras ocho sesiones. El análisis epistémico sólo lo realizamos para la clase del 16 de marzo en que se estudia la derivada. Para esto, separamos el texto en unidades naturales, y con base en el significado que transmiten, las agrupamos en unidades epistémicas que presentan un estado epistémico. Todas las unidades epistémicas que transmiten un significado global, se agrupan en configuraciones epistémicas. Con base en ellas, es proponemos una configuración epistémica implementada de la derivada.

Fecha	Tema desarrollado en clase
1 de marzo	Presentación del problema y filmación de una caída libre
2 de marzo	Obtención de datos de posición
7 de marzo	Obtención de la velocidad media
8 de marzo	Razón de cambio promedio y en un punto
9 de marzo	Relación entre velocidad promedio y en un punto
13 de marzo	Demostración de $v_m = v_{ic}$
14 de marzo	Determinación del modelo para velocidad en un punto
15 de marzo	Identificación de los términos independientes del intervalo

Tabla J1: Contenidos implementados del uno al 15 de marzo. Caso matemática en contexto

**Configuración epistémica uno.** Esta configuración se inicia con el recuerdo de la tarea pendiente, a la que hemos identificado como la primer unidad epistémica (véase Tabla J2). Consideramos que la trayectoria presenta un estado situacional al inicia con un problema pendiente a resolver, el de obtener la velocidad del punto medio  $v_{tp}$  en términos de variables y constantes  $t$ ,  $k'$ ,  $k$  y  $\Delta t$ . El hecho de que los estudiantes no hayan trabajado en ello, origina las acciones para obtener  $v_{tp}$ , por lo que sugerimos una segunda unidad epistémica con un estado actuativo.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
1-10	CE-1 8:17:57 a 8:24:40	1	Recordatorio a los alumnos que iban a obtener la velocidad $v_{ip}$ en términos de $t$ , $k$ , $k'$ , y $\Delta t$	E1: situacional	Conceptual: Se formula como identificar $v_t$ a partir de $v_{ip}$ a través de los $t_{iic}$ (y sus significados como razones de cambio).
11-32		2	Se obtiene la velocidad $v_{ip}$ en términos de $t$ , $k$ , $k'$ , y $\Delta t$	E2: actuativo	
33-39		3	Se presenta $v_{ip}$ como la razón $s'(t)$ obtenida a partir de la función de posición $s(t)$	E3: lingüístico	
40-43		4	Se señala la propiedad de independencia del tamaño del intervalo como una forma de identificar $v_t$ y se introduce la expresión $t_{iic}$	E5: proposicional	
44		5	Se introduce la notación general para calcular $v_{ip}$ como una razón de cambio obtenida a partir de una función de posición $v_{ip} = s'(t_p) = \frac{s(t + (1 - k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}$	E3: lingüístico	
45-62	CE-2 8:24:40 a 8:31:18	6	Se explica que $v_t$ se puede identificar en $v_{ip}$ calculada a partir de $t$ sin importar su posición dentro de $\Delta t$	E5: proposicional	Proposicional: Se explica que la razón de cambio promedio proporciona la velocidad del punto medio y no la del punto de cálculo
63-91		7	Se interpreta $v_{ip}$ como $\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ cuando se calcula con el punto $t$ al inicio del intervalo, por su semejanza con la fórmula de la derivada como límite	E4: conceptual	
92-94		8	Se generaliza el concepto y se introduce la notación para cualquier función y variable $f'(x_p) = f'(x + k\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	E3: lingüístico	
73-82	CE-3 8:32:33 a 8:42:23	9	Se insiste en como poder identificar $v_t$ a partir de $v_{ip}$ y los alumnos manifiestan no entender la pregunta	E1: situacional	Conceptual: Se formula la razón de cambio en un punto de manera general
83-92		10	Se recuerda entonces el problema de la caída libre como un ejemplo donde se puede identificar $v_t$ ya que $v_{ip} = v_{ic}$	E1: situacional	
93-94		11	Se explican de nuevo las nociones de $t_p$ , $t$ y $v_{ip} = v(t + k'\Delta t)$	E4: conceptual	
95-102		12	Se vuelve al problema y se indica que se quiere identificar $v_t$ a partir de $v_{ip}$	E1: situacional	
103-107		13	De nuevo se explica como obtener $v_t$ a través de los $t_{iic}$ utilizando el problema de la caída libre	E2: actuativo	
108-117	14	Se introduce una expresión general para obtener la razón de cambio en un punto $x$ : $f'(x) = t_{icc} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$	E3: lingüístico		

Tabla J2: Primeras tres configuraciones epistémicas de la clase del 16 de marzo. Caso matemática en contexto

Proponemos como tercer unidad epistémica el periodo en que se obtiene la velocidad del punto medio a partir de la función de posición  $s(t)$ . Dicha velocidad es una función semiótica de la razón de cambio. Sugerimos un estado de tipo lingüístico para esta unidad. En la cuarta unidad epistémica, de naturaleza proposicional, se justifica la propiedad de independencia de la velocidad  $v_t$  del tamaño del intervalo  $\Delta t$ . Dicha velocidad la identificamos con los términos que no varían en el cociente de la razón de cambio promedio y se introduce la notación *tiic* para referirse a dichos términos. Finalmente, proponemos una quinta unidad de tipo lingüístico para la primer configuración epistémica. En dicha unidad introducimos las expresiones con que se generaliza la velocidad  $v_{tp}$  como una razón de cambio, obtenida a partir de cualquier función de posición  $s(t)$ . Proponemos que la configuración epistémica que engloba estas cinco unidades presenta un carácter global de tipo conceptual. En tal configuración identificamos la velocidad  $v_t$ , a partir de la velocidad del punto medio obtenida como razón de cambio promedio.

**Configuración epistémica dos.** Identificamos esta configuración con un carácter global de tipo proposicional. En ella sostenemos que la razón de cambio promedio tal como se define en la derivada como límite, proporciona la velocidad del punto medio y no la velocidad del punto  $t$  que deseamos determinar. Integramos esta configuración con las unidades epistémicas seis, siete y ocho. En la sexta unidad encontramos un estado proposicional cuando explicamos que la velocidad en el punto  $t$ ,  $v_t$ , se identifica en la velocidad del punto medio  $v_{tp}$ , sin importar la posición del punto  $t$  en el intervalo  $\Delta t$ . En la séptima unidad epistémica interpretamos la razón de cambio como la velocidad del punto medio  $v_{tp}$  obtenida a partir del punto de cálculo  $t$ , ubicado al inicio del intervalo  $\Delta t$ . Para esta unidad proponemos un estado epistémico conceptual.

Finalmente, en esta configuración identificamos una octava unidad epistémica con un estado lingüístico. En esta unidad deducimos la expresión con que generalizamos la derivada del punto medio, como una razón de cambio promedio entre la variación de la función y la variación de la variable. Expresamos que dicha derivada contiene la derivada del punto  $x$  y su diferencia con la derivada del punto medio  $x_p$ .

**Configuración epistémica tres.** Esta configuración está integrada por las unidades epistémicas de la nueve a la 14. En ellas exponemos que la razón de cambio promedio con el punto de cálculo al inicio, es la razón de cambio del punto medio, y argumentamos la manera de identificar la razón de cambio en un punto a través de los *tiic*. Por tanto, proponemos un significado global conceptual para esta tercer configuración epistémica.

Proponemos que la novena unidad tiene un estado epistémico situacional, ya que insistimos en identificar la velocidad  $v_t$  a partir de la velocidad  $v_{tp}$  calculada con la razón de cambio promedio. Los estudiantes manifiestan no entender la pregunta y procedemos entonces a recordar cómo obtener la velocidad en un punto a partir del problema de la caída libre. El recuerdo origina la unidad diez, también con un estado situacional. Ahí recordamos que el punto de cálculo está al centro del intervalo y que esto sólo ocurre con funciones de segundo grado. En la unidad 11 establecemos que para funciones de otro grado es necesario introducir la noción de punto medio, y repasamos lo pertinente de la configuración epistémica anterior. Así mismo recordamos las nociones de punto de cálculo  $t$ , velocidad del punto medio  $v_{tp}$  como la velocidad de  $t + k'\Delta t$ . Para esta unidad 11 proponemos un estado epistémico conceptual.

Proponemos la unidad 12 con un estado situacional, cuando de nuevo insistimos en que el problema es identificar la velocidad del punto  $t$  o  $v_t$ , para situaciones en que punto de cálculo  $t$  no coincide con el punto medio  $t_p$ . La unidad 13 la iniciamos al explicar de nuevo como obtenemos la velocidad del punto  $t$  a través de los *tiic* en la razón de cambio promedio con  $t$  al inicio del intervalo, tal como está definida en la derivada. Proponemos un estado actuativo para esta unidad, ya que mostramos las acciones con que obtenemos la velocidad del punto  $t$ . Finalmente, proponemos la unidad epistémica 14 con un estado lingüístico cuando expresamos de manera general, la razón de cambio en un punto obtenida con los *tiic*. Observamos una didáctica expositiva en esta tercer configuración epistémica.

**Configuración epistémica cuatro.** El siguiente momento de la trayectoria epistémica nos sugiere una configuración con carácter global actuativo. Para esta configuración proponemos las unidades epistémicas de la 15 a la 18 (véase tabla J3). En la unidad epistémica 15 se utilizan los conocimientos previos para obtener las velocidades instantáneas para  $t = 0.4$  s,  $t = 0.6$  s y cualquier  $t$ , para una función de posición  $s(t) = t^3$ . Para esta unidad se sugiere un

estado situacional. Sugerimos que la unidad 16 es de tipo actuativo en que se realizan las acciones algebraicas que permiten obtener la velocidad del punto medio, esto es,  $v_{ip} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2$ . La interpretación del término independiente del tamaño del intervalo  $\Delta t$  la proponemos dentro de la unidad epistémica 17 con un estado conceptual. En este caso se propone que la velocidad del punto  $t$ , esto es  $v_t$  es igual a los términos independientes en el cociente obtenido, es decir,  $v_t = \text{tiic} [3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2] = 3t^2$ . Sugerimos como unidad epistémica 18 el momento de la trayectoria en que se realizan las acciones para encontrar los valores de las velocidades instantáneas para  $t = 0.4 \text{ s}$ ,  $t = 0.6 \text{ s}$ , tal como se muestra en la Tabla J3.

Unidad Natural	Confi. Epist. (tiempo)	Unidad Epist.	Descripción	Estado	Carácter global de CE
164-172	CE-4 8:42:23 a 8:52:51	15	Se aplica lo visto para calcular $v(t = 0.4 \text{ s})$ , $v(t = 0.6 \text{ s})$ , $v(t)$ introduciendo la función $s(t) = t^3$	E1: situacional	Actuativo: Se aplican los conceptos vistos para obtener $v(t = 0.4 \text{ s})$ , $v(t = 0.6 \text{ s})$ y $v(t)$
173-187		16	Realización de procedimientos algebraicos para obtener $v_{ip}$	E2: actuativo	
188-199		17	Se interpretan los <i>tiic</i> como la velocidad $v_t$ dentro de los términos que integran $v_{ip}$	E4: conceptual	
200-208		18	Se obtienen las velocidades $v_t = 0.4 \text{ s}$ , $v_t = 0.6 \text{ s}$ y $v_t = 3t^2$	E2: actuativo	
209-227	CE-5 8:52:51 a 9:02:41	19	Se plantea el problema de cómo obtener $v_t$ a partir de $v_{ip}$ sin utilizar los <i>tiic</i>	E1: situacional	Conceptual: Se introduce la noción de límite previo a la noción formal de derivada
228-255		20	Se formula que una reducción continuada del tamaño del intervalo al infinito, acerca $v_{ip}$ a $v_t$ , y se introduce la noción de límite	E4: conceptual	

Tabla J3: Trayectoria epistémica en la clase del 16 de marzo, caso matemática en contexto.

2da. sección

**Configuración epistémica cinco.** Después de obtener las velocidades requeridas, la trayectoria muestra un giro significativo, en el que se expone de manera gráfica cómo la diferencia entre  $v_t$  y  $v_{ip}$  se reduce a medida que se reduce el tamaño del intervalo  $\Delta t$ , lo que lleva a la noción de límite. A este momento de la trayectoria al final de la clase la identificamos como una quinta configuración epistémica con un carácter global de tipo conceptual, en que se presenta la noción de límite en este contexto. En ella sólo sugerimos dos unidades, 18 y 19. En la primera de ellas se presenta el problema de cómo obtener una

velocidad en un punto  $v_t$  a partir de la velocidad del punto medio  $v_{tp}$  sin recurrir a los *tiic*. Sugerimos un estado situacional para esta unidad. Para solucionar el problema se induce al grupo a considerar la reducción del intervalo  $\Delta t$ , lo cual minimiza la diferencia entre dichas velocidades. Esto genera la unidad epistémica 20 que consideramos de tipo conceptual. En ella se propone una solución a través de la reducción al infinito del intervalo  $\Delta t$ , a la vez que se señala la contradicción de origen epistémico que pretende resolver la noción de límite de Cauchy. Esto como una preparación para introducir la noción formal de derivada como el límite de la razón de cambio promedio.

A partir del análisis epistémico de la clase del 16 de marzo, encontramos una trayectoria epistémica con cinco configuraciones. Con base en ellas proponemos la configuración epistémica implementada para la derivada de la Tabla J4.

<b>COMPONENTE PRACTICO</b> (comprensión instrumental)	<b>SITUACIONES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Problemas contextualizados en los que se quiere determinar velocidad media, instantánea, <math>(v_m, v_p, v_i, s'(t))</math> como razones de cambio con funciones de segundo grado</li> <li>Problemas descontextualizados en los que se quiere determinar velocidad media, instantánea, <math>(v_m, v_p, v_i, s'(t))</math> como razones de cambio con funciones de tercer grado a partir de los <i>tiic</i>.</li> </ul>	<b>ACCIONES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Descontextualizar el problema a través de un planteamiento,</li> <li>Identificación de variables y constantes, de relaciones entre ellas</li> <li>Formulación de un modelo para velocidades medias e instantáneas <math>(v_m, v_p, v_i, s'(t))</math> como razones de cambio con funciones de segundo o tercer grado a través de los <i>tiic</i></li> <li>Cálculo de velocidades instantáneas</li> <li>Elaboración de dibujos o gráficas para aclarar y representar relaciones entre variables.</li> <li>Realización de procedimientos algebraicos y cálculos en calculadora, etc.</li> </ul>
<b>COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL</b> (Comprensión relacional)	<b>CONCEPTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Previos:</i> Modelos y sus tipos, modelos matemáticos, la operaciones básicas como modelos para, razón por unidad, cantidades, unidades de medida, velocidad media e instantánea.</li> <li><i>Emergentes:</i> Unidad de medida, punto en la continuidad, punto de cálculo, punto medio, velocidad media como razón de cambio promedio y como velocidad del punto central, velocidad del punto medio <math>v_p</math>, razón de cambio promedio, razón de cambio en un punto, derivada como <i>tiic</i>, modelo para la relación a uno entre dos cantidades de variación. La pendiente de la tangente a una curva.</li> </ul>	<b>PROPIEDADES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Propiedad de independencia del tamaño del intervalo.</li> <li><math>v_i</math> se puede identificar en <math>v_p</math> independientemente de su posición dentro de <math>\Delta t</math></li> <li>Propiedad de coincidencia <math>f'(x) = f'(x_c)</math></li> <li>No se puede obtener directamente, se tiene que <i>derivar</i> de una razón de cambio promedio, ya sea por medio de los <i>tiic</i> o del límite.</li> </ul>
<b>COMPONENTE DISCURSIVO/RELACIONAL</b> (Comprensión relacional)	<b>ARGUMENTOS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>A partir de la velocidad de un cuerpo en caída libre, comprobar que la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.</li> <li>Justificar que la velocidad se puede considerar como una razón de cambio.</li> <li>Comprobar que la velocidad promedio obtenida a partir de diferentes posiciones de un punto <math>t</math>, incluye a la velocidad instantánea de dicho punto, misma que se puede identificar a través de los <i>tiic</i>.</li> <li>Generalizar esta situación a cualquier función para obtener la razón de cambio en un punto.</li> <li>Comprobación gráfica de que el límite de la razón de cambio promedio es la pendiente de la tangente a la curva.</li> </ul>	
<b>COMPONENTE DE DESARROLLO</b>	<b>LENGUAJE</b> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Verbal:</i> Derivada, relación a uno entre cantidades de variación, razón de cambio en un punto, pendiente de la recta tangente a la curva, el límite de la razón de cambio promedio, términos independientes del tamaño del intervalo en el cociente (<i>tiic</i>) de la razón de cambio promedio.</li> <li><i>Gráfico:</i> Dibujos en los que se esquematizan las razones de cambio en un punto, gráficas en las que se obtiene la pendiente de la recta tangente a una curva.</li> <li><i>Simbólico:</i> <math>f(x), f(x_p), v_p = s'(t_p) = \frac{s(t + (1 - k)\Delta t) - s(t - k\Delta t)}{\Delta t}</math>,</li> <li><math>f'(x_p) = f'(x + k \cdot \Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}</math>,</li> <li><math>f'(x) = \text{ticc} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]</math></li> </ul>	

Tabla J4: Configuración epistémica implementada de la derivada. Caso matemática en contexto.

Apéndice K: Exámenes presentados en el caso de matemática en contexto

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

<b>Curso:</b> Cálculo diferencial e int.	<b>Examen:</b> 2o. PARCIAL	<b>Contenido:</b> Limite y derivada	<b>Grupo:</b> 01 <b>A</b>
<b>Nombre del alumno:</b> Gaby		<b>Fecha:</b> 05-09-06	<b>Puntos:</b>

tes S. Edificio J Cubiculo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math>      b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = VR</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5v, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math>      b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	<p style="text-align: center;">Pasos para la solución del problema</p> <p>1) a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \frac{(9)^2 - 81}{\sqrt{9} - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}</math> No hay límite</p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4} = \sqrt[3]{9^2 - 5(9) - 4} = \sqrt[3]{81 - 45 - 4} = \sqrt[3]{32} = 3.17</math></p> <p>2) i = V/R a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math> a) <math>i = 5v/2 = 2.5v</math>      b) <math>5v/0.65 = 7.692v</math></p> <p>3) derivada: a) <math>f(x) = 6x^2</math>      <math>f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math> <math>f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h}</math> <math>= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6[x^2 + 2xh + h^2] - 6x^2}{h}</math> <math>= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 - 6x^2}{h}</math> <math>= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12xh + 6h^2}{h} = 12x + 6h</math> <math>= 12x</math></p>
	<p style="text-align: center;">Justificación de cada paso</p> <p># Justificación del problema 3: Para encontrar la derivada de las funciones: <math>f(x) = 6x^2</math>, <math>f(x) = x^3 - 2x</math>, se utiliza la fórmula: <math>f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math>, cuando <math>h</math> tiende a 0. Esto quiere decir que existe una razón de cambio, y que la función tiene un límite.</p> <p># Justificación del prob. 4: En una situación real, se encuentra una función de producción <math>(-x^2 + 210x)</math> donde <math>x</math> representa los trabajadores en turno, se pide la razón de cambio producción/trabajador en un punto, y el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 en turno. Por lo tanto tenemos un modelo que es una representación, la cual nos indica la razón de cambio en un punto.</p>

Figura K1: Pasos y justificaciones de Gaby en el ejercicio 3, inciso a).

$b_0$   $f(x) = x^3 - 2x$       $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$   
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) - (x^3 - 2x)}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h}$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 2 = 3x^2 - 2$

**9**  $f(x) = -x^2 + 210x$   
 $x \rightarrow$  número de trabajadores en el turno  
 \* planteamiento del problema:  
 a) Cuál es el ritmo de producción?  
 b) Ritmo de producción a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en turno.

+ Variables y Constantes  
 $x \rightarrow$  número de trabajadores  
 $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow$  razón de cambio en un punto  
 $f(x) = -x^2 + 210x \rightarrow$  función de producción


+ Relaciones:  
 La función de producción se sustituye en la fórmula de razón de cambio donde  $x$  es el número de trabajadores.

+ Modelo:  
 $f(x) = -x^2 + 210x$   
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + 210(x+\Delta x) - (-x^2 + 210x)}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-(100+\Delta x)^2 + 210(100+\Delta x) - (-100^2 + 210(100))}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-100^2 - 2(100)\Delta x - \Delta x^2 + 21000 + 210\Delta x + 10000 - 21000}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-1000 - 200\Delta x - \Delta x^2 + 21000 + 210\Delta x + 10000 - 21000}{\Delta x}$   
 $= \frac{200\Delta x - \Delta x^2 + 210\Delta x}{\Delta x} = 200 + \Delta x - 210 = 410$

+ Relaciónes:  
 La función de producción se sustituye en la fórmula de razón de cambio en un punto, es decir, en el cambio de producción/trabajador, donde  $x$  es igual a 100 trabajadores.

+ Modelo:  
 $f(x) = -x^2 + 210x$       $x \rightarrow 100$   
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + 210(x+\Delta x) - (-x^2 + 210x)}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-(100+\Delta x)^2 + 210(100+\Delta x) - (-100^2 + 210(100))}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-100^2 - 2(100)\Delta x - \Delta x^2 + 21000 + 210\Delta x + 10000 - 21000}{\Delta x}$   
 $f'(x) = \frac{-1000 - 200\Delta x - \Delta x^2 + 21000 + 210\Delta x + 10000 - 21000}{\Delta x}$   
 $= \frac{200\Delta x - \Delta x^2 + 210\Delta x}{\Delta x} = 200 + \Delta x - 210 = 410$

Figura K2: Pasos y justificaciones de Gaby en el ejercicio 3, incisos b) y en el problema incisos a), b).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Limite y derivada</b>	Grupo: <b>01 A</b>
Nombre del alumno: <b>Cristy</b>	Fecha: <b>05/Abril/06</b>	Puntos:	

Similiano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math>      b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5v, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math>      b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	<p style="text-align: center;">Pasos para la solución del problema</p> <p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \frac{0}{0}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = \frac{(x+9)(x-9)}{\sqrt{9} - 3}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = \frac{(x+9)(x-9)}{3-3}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = \frac{(x+9)(x-9)}{0}</math> No tiene límite</p>
<p>2) <math>f(v) = 5V</math></p> <p><math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(v+h) - f(v)}{h}</math></p> <p><math>\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{5(v+h) - 5v}{h}</math></p> <p><math>\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{5v + 5h - 5v}{h}</math></p> <p><math>\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{5h}{h} = 5</math></p> <p>a) <math>i = \frac{V}{R}</math></p> <p><math>i = \frac{5 \text{ voltaje}}{2 \text{ resistencia}}</math></p> <p><math>i = 2.5 \text{ v/r}</math></p>	<p style="text-align: center;">Justificación de cada paso</p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{(9)^2 - 5(9) - 4}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = \sqrt[3]{81 - 45 - 4}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = \sqrt[3]{32}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 9} = 3 \frac{1}{2}</math></p> <p>b) <math>i = \frac{V}{R}</math></p> <p><math>i = \frac{5 \text{ voltaje}}{0.65 \text{ resistencia}}</math></p> <p><math>i = 7.69 \text{ v/r}</math></p>

Figura K3: Pasos y justificaciones de Cristy en los ejercicios 1 y 2 sobre límites. No se requirió solucionar estos ejercicios.

3) Derivada de las siguientes funciones

a)  $f(x) = 6x^2$

1)  $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - (6x^2)}{h}$

3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x^2 + 2xh + h^2) - 6x^2}{h}$

4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 - 6x^2}{h}$

5)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{12xh + 6h^2}{h}$

6)  $\lim_{h \rightarrow 0} 12x + 6h = 12x$

1) Escribir la fórmula de la derivada utilizando Limite

2) Sustituir la función en la fórmula de la derivada, todo lo que valga  $x$  en la función se va a sustituir en la fórmula.

3) Hacer las operaciones correspondientes en este caso tenemos que hacer la operación del Binomio al cuadrado y multiplicarlo por el 6. Después eliminamos términos.

5) Como la  $h$  tiende a 0 y se está dividiendo en la fórmula, hay que dividir o simplificar el resultado

6) Lo que como la  $h$  tiende a vale 0 todo lo que le multiplica vale 0 y lo que reste es el resultado

b)  $f(x) = x^3 - 2x$

1)  $\lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) - [x^3 - 2x]}{h}$

3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$

4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h}$

5)  $\lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 - 2 = 3x^2 - 2$

1) Escribir la fórmula de la derivada utilizando Limite

2) Sustituir la función en la fórmula de la derivada, todo lo que valga  $x$  en la función se sustituye en  $(x+h)$  o en la función

3) Hacer las operaciones correspondientes y eliminar términos. En este caso hay un binomio al cubo que se tiene que desarrollar una multiplicación por signo y número y por signo

4) Para simplificar el resultado como la fórmula dice que todo se divide en  $h$ , divide los términos en  $h$

5) Lo que queda como  $h$  tiende a 0 todo lo que se multiplica con la  $h$  vale 0 y lo que reste ese es el resultado

Figura K4: Pasos y justificaciones de Cristy en el ejercicio 3, incisos a), b).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **2o. PARCIAL** Contenido: **Límite y derivada** Grupo: **01 A**  
Nombre del alumno: **Cristy** Fecha: **05/Abr/106** Puntos:  
Miguel Alemán Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math> b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de <math>5v</math>, determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math> b) <math>f(x) = x^2 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	
Pasos para la solución del problema	Justificación de cada paso
<p>a) 1) <math>f(x) = -x^2 + 210x</math></p> <p>2) <math>f(x) = \frac{(x+\Delta x) - (x)}{\Delta x}</math></p> <p>3) <math>f(x) = \frac{-(x+\Delta x)^2 + 210(x+\Delta x) - [-x^2 + 210x]}{\Delta x}</math></p> <p>4) <math>f(x) = \frac{-x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 + 210x + 210\Delta x + x^2 - 210x}{\Delta x}</math></p> <p>5) <math>f(x) = \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2 + 210\Delta x}{\Delta x}</math></p> <p>6) <math>f(x) = -2x - \Delta x + 210 = -2x + 210</math></p> <p>b) <math>-2(x) + 210 = r</math> <math>X = \text{Trabajadores}</math>  <math>-2(100) + 210 = r</math>  <math>-200 + 210 = r</math>  <math>10 = \text{ritmo de producción}</math></p> <p>Justificación al reverso</p>	<p>1) Escribir la función</p> <p>2) Escribir la fórmula para la derivada de la razón de cambio en un punto</p> <p>3) Sustituir la función en la fórmula.</p> <p>4) Realizar las operaciones correspondientes para después eliminar términos.</p> <p>5) Los términos sobrantes dividirlos entre <math>\Delta x</math> para simplificar la ecuación.</p> <p>6) Lo que queda si hay términos con <math>\Delta x</math> se eliminan. y lo que reste es el resultado</p>

Figura K5: Pasos y justificaciones de Cristy en el problema 4, incisos a) y b).

- b) ① como ya teníamos el modelo lo primero es que lo escribimos
- ② Después si  $x$  son los trabajadores sustituimos en este caso son 100 trabajadores
- ③ hacemos las operaciones correspondientes
- ④ tenemos el cambio de ritmo de producción y ese es el resultado.

Figura K6: Justificaciones de Cristy en el problema 4, inciso b).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**

UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **2o. PARCIAL** Contenido: **Límite y derivada** Grupo: **A**  
 Nombre del alumno: **Juan** Fecha: **05/09/06** Puntos:

(653) 114 8185 61 534 1473 casu  
 r. m. maximumo Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math> b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5v. determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math> b) <math>f(x) = x^3 - 2x</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	<p>Pasos para la solución del problema</p>	<p>Justificación de cada paso</p>
<p>a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math>  <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(9)^2 - 81}{\sqrt{9} - 3} = \frac{0}{0}</math> el límite no está definido</p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math>  <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{(9)^2 - 5(9) - 4} = \sqrt[3]{32} = 52^{1/3}</math></p> <p>2) <math>i = V/R</math>  <math>\lim_{R \rightarrow 2} i = \frac{5V}{2} = 2.5V</math>  <math>\lim_{R \rightarrow 0.65} i = \frac{5V}{0.65} = 7.69V</math></p>	<p>Justificación de cada paso</p>	

Figura K7: Pasos y justificaciones de Juan en el ejercicio 1 sobre límites, incisos a), b). No requerido.

Justificación

a)  $f(x) = 6x^2$   
 $f'(x) = \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h}$   
 $= \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 - 6x^2}{h}$   
 $= 12x + 6h \xrightarrow{h \rightarrow 0}$   
 $= 12x$

→ Porq. es la razón de cambio en un punto

b)  $f(x) = x^3 - 2x$   
 $f'(x) = \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) - (x^3 - 2x)}{h}$   
 $= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$   
 $= 3x^2 + 3xh + h^2 - 2 \xrightarrow{h \rightarrow 0}$   
 $= 3x^2 - 2$

Porq. es la razón de cambio en un punto

4)  $f(x) = -x^2 + 210x$

a)  $f'(x) = \frac{-(x+h)^2 + 210(x+h) - (-x^2 + 210x)}{h}$   
 $= \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 210x + 210h - x^2 + 210x}{h}$   
 $= -2x - h + 210 \xrightarrow{h \rightarrow 0}$   
 $= -2x + 210$

Porque me pide la razón de cambio de Producción/Trabajadores en un punto y eso es una derivada.

b)  $-2(100) + 210 = 10$   
 10  $\frac{\text{Producción}}{\text{Trabajador}}$

Razón de cambio (Producción/Trabajador)  
 Según nuestra solución se puede decir que el ritmo es de 10 productos por trabajador.

Figura K8: Pasos y justificaciones de Juan en el ejercicio 3, incisos a), b), y problema 4, incisos a), b).



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
**UNIDAD SAN LUIS R. C.**

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **2o. PARCIAL** Contenido: **Límite y derivada** Grupo: **A**  
 Nombre del alumno: **José** Fecha: **5/abril/06** Puntos:  
 r. r. m. g. Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente los siguientes problemas y justifique cada paso en la columna de la derecha. Utilice el reverso de la hoja si lo considera necesario.

<p>1. Encuentre los límites siguientes: a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}</math>      b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4}</math></p> <p>2. En un circuito eléctrico la intensidad <math>i</math> de la corriente está en función del voltaje suministrado <math>V</math> y de una resistencia variable del circuito <math>R</math> de acuerdo con el modelo <math>i = V/R</math>. Si el voltaje suministrado a dicho circuito es de 5v. determine el límite de la intensidad cuando la resistencia tiende a los valores: a) <math>R = 2</math> b) <math>R = 0.65</math></p> <p>3. Encuentre la derivada de las siguientes funciones: a) <math>f(x) = 6x^2</math> b) <math>f(x) = x^2 - 2x</math> c) <math>f(x) = x^2 - 2</math></p> <p>4. Una fábrica ha encontrado que la producción global en sus diferentes líneas, medida en productos está relacionada estrechamente con el número de trabajadores por turno y sigue la función de producción <math>f(x) = -x^2 + 210x</math> donde <math>x</math> representa el número de trabajadores en el turno. a) Desarrolle un modelo para la razón de cambio producción/trabajador en un punto (ritmo de producción). b) Determine el ritmo a que cambia la producción por trabajador cuando se tienen 100 trabajadores en el turno.</p>	
<p>Pasos para la solución del problema</p> <p>① a) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \frac{(9)^2 - 81}{\sqrt{9} - 3} = \frac{0}{0}</math></p> <p>b) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x^2 - 5x - 4} = \sqrt[3]{(9)^2 - 5(9) - 4}</math>  <math>= \sqrt[3]{81 - 45 - 4} = \sqrt[3]{32} = 3.1748</math></p> <p>② <math>R = 2</math>    <math>i = \frac{5V}{R} = \frac{5V}{2} = 2.5</math>    <math>R = 0.65</math>    <math>i = \frac{5V}{0.65} = 7.69</math></p> <p><math>f'(x) = f(x+h) - f(x)</math></p>	<p>Justificación de cada paso</p>

Figura K9: Pasos y justificaciones de José en el ejercicio 1 sobre límites, incisos a), b). No requerido

The image shows a piece of lined paper with handwritten mathematical work. At the top, the function  $f(x) = -x^2 + 210x$  is written. Below it, the difference quotient formula is written as  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . The  $f(x)$  term in the numerator is written as  $f(x)$  with a small  $x$  above it. The  $f(x+h)$  term is written as  $f(x+h)$  with a small  $x$  above the  $x$  and a small  $h$  above the  $h$ . The  $f(x)$  term at the end of the numerator is written as  $f(x)$  with a small  $x$  above it. The denominator is  $h$ .

Figura K10: Pasos y justificaciones de José en el problema 4, inciso a).

**cestues**  
La Universidad de Sonora

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Teoría derivada</b>	Grupo: <b>01</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>Gaby</b>		Fecha: <b>24-04-06</b>	Puntos:	

Ing. Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores
- Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:
 

*V S*

Figura K11: Respuestas de Gaby en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 c) La razón de cambio promedio  
 d) Ninguna de las anteriores

11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades  
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
 d) Ninguna anterior

12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:  
*\*Al lanzar una pelota en caída libre, cual es su velocidad promedio, de "x" productos por tiempo*

13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:  
*\*Calcula la prestación de "x" productos por tiempo*

14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
 a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?

15. Argumenta porqué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.  
*Porque la derivada la podemos definir como la razón de cambio promedio función/variable como "modelo para" la relación a una para establecer las relaciones entre dos cantidades de variación en un punto.*

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.  $V_m = V_{ic}$

17. Porqué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \text{lim} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Para la función de la siguiente gráfica:

18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6  $f'(x) = 6x^2$   
 b) 4  $f'(x) = 4x^2$   
 c) 2  $f(x) = 2(x)^2$   
 d) 0  $f(x) = 0x^2$

19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10  $f'(x) = 10x^2$   
 b) 4  $f'(x) = 4(x)^2$   
 c) 2  $f'(x) = 2x^2$   
 d) 0  $f'(x) = 0x^2$

Handwritten calculations for question 18:  
 $f(3) = 54$   
 $f(6) = 360$   
 $f'(3) = 36$   
 $f'(6) = 144$   
 $f(3) = 18$   
 $f(6) = 72$   
 $f(3) = 0$   
 $f'(6) = 0$

Figura K12: Respuestas de Gaby en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.

**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso:	Examen:	Contenido:	Grupo:
<b>Cálculo diferencial e int.</b>	<b>2o. PARCIAL</b>	<b>Teoría derivada</b>	<b>01 A</b>
Nombre del alumno:	Fecha:		Puntos:
<b>Cristy</b>	<u>24/Abr/05</u>		

Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

1. Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - a) Una fórmula
  - b) Un modelo de
  - c) Un modelo para
  - d) Ninguna anterior
2. Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0,030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0,003 m/°C es:
  - a) Una razón por unidad
  - b) Una derivada
  - c) Una razón de cambio promedio
  - d) Ninguna de las anteriores
3. Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - a) Una velocidad instantánea
  - b) Una velocidad media
  - c) Una razón por unidad
  - d) Ninguna anterior
4. La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - a) La rapidez de variación
  - b) Una razón por unidad
  - c) Una razón de cambio promedio
  - d) Ninguna de las anteriores
5. Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - a) Un intervalo infinitamente pequeño
  - b) Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - c) Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - d) Ninguna de las anteriores
6. Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - a)  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - b) Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - c) La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - d) Ninguna de las anteriores
7. La derivada como *modelo para* representa:
  - a) La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - b) La pendiente de la recta tangente a la curva
  - c) La razón de cambio en un punto
  - d) La rapidez de variación
8. La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - a)  $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - b) Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - c) Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - d) Ninguna de las anteriores
9. La razón de cambio en un punto:
  - a) No existe porque en un punto no hay variación
  - b) Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - c) Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - d) Ninguna de las anteriores
10. Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:

Figura K13: Respuestas de Cristy en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$       ~~b)~~ La pendiente de la recta tangente a la curva  
 c) La razón de cambio promedio      d) Ninguna de las anteriores

11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f'(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades      b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
~~a)~~  $f'(x)$  es una función para cualquier punto  $x$       d) Ninguna anterior

12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:  
*La caída libre de una pelota, el ejemplo a de la pregunta 14*

13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:  
*el d de la pregunta 14*

14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
~~a)~~ Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5t(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?

15. Argumenta por qué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.  
*a y b son modelos de derivadas porque cuentan con una función además que la derivada es el término función/variable*

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.

17. Por qué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \text{tác} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Para la función de la siguiente gráfica:

18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6      b) 4      c) 2      ~~d) 0~~

19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10      b) 4      c) 2      ~~d) 0~~

Figura K14: Respuestas de Cristy en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.

**cesties**  
CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Teoría derivada</b>	Grupo: <b>01</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>Juan</b>		Fecha: <b>21/04/06</b>	Puntos:	

Escuela: **J. Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja**

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión 0.003 m/°C es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión 60 Km/h significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de 10 cm<sup>2</sup>, la expresión 500 N/cm<sup>2</sup> es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto  $x$  e intervalo  $\Delta x$  es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores
- Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es:
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Una derivada
  - Ninguna de las anteriores

Figura K15: Respuestas de Juan en el cuestionario de comprensión. 1a.

La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
 c) La razón de cambio promedio

b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 d) Ninguna de las anteriores

11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f'(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades  
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
 d) Ninguna anterior

12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente: *La velocidad con la que vengo a la escuela km/h. Las cosas que hago en el día entre las horas que paso en las clases.*

13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son: *Las horas que estoy en la escuela al día. Las horas que juego en el día.*

14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
 a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$  ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t+1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?

15. Argumenta por qué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.  
*Por que nos presenta una razón de cambio que es cm/min.*

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.

17. Porqué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ .

Para la función de la siguiente gráfica:

18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

Figura K16: Respuestas de Juan en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.

**cestiles** CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>2o. PARCIAL</b>	Contenido: <b>Teoría derivada</b>	Grupo: <b>01</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>José</b>	Fecha: <b>24/04/2006</b>	Puntos:		

Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Para las siguientes preguntas marque con una X el inciso que considere como la respuesta correcta. Si tiene alguna duda pregunte al profesor.

- Para el problema: "En una planta se producen 28 camiones por día y se laboran 5 días por semana. ¿Cuántos camiones se producirán para las próximas dos semanas, si la producción diaria se va a ampliar a partir de la segunda semana?". El planteamiento matemático para solucionarlo  $y = 140 + 5x$  es:
  - Una fórmula
  - Un modelo de
  - Un modelo para
  - Ninguna anterior
- Si una pieza de aluminio al calentarse se dilata 0.030 m cuando la temperatura aumenta en 10 °C, la expresión  $0.003 \text{ m}^{\circ}\text{C}$  es:
  - Una razón por unidad
  - Una derivada
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Si un objeto recorre 60 Km en el tiempo de una hora, la expresión  $60 \text{ Km/h}$  significa:
  - Una velocidad instantánea
  - Una velocidad media
  - Una razón por unidad
  - Ninguna anterior
- La pieza A de una máquina tiene que soportar una fuerza de 5000 N al levantar determinada carga. Si el área que soporta esta fuerza es de  $10 \text{ cm}^2$ , la expresión  $500 \text{ N/cm}^2$  es:
  - La rapidez de variación
  - Una razón por unidad
  - Una razón de cambio promedio
  - Ninguna de las anteriores
- Cuando se dice que una variable toma el valor de un "punto", la palabra "punto" significa que se trata de:
  - Un intervalo infinitamente pequeño
  - Una misma cantidad sin importar la unidad de medida
  - Una cantidad determinada por la unidad de medida
  - Ninguna de las anteriores
- Para diferentes posiciones del punto  $x$  dentro del intervalo  $\Delta x$ , la razón de cambio promedio obtenida a partir de dicho punto e intervalo  $\Delta x$  es:
  - $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
  - Un modelo para la relación a uno entre dos variaciones
  - La razón de cambio en  $x$  más otros términos con  $\Delta x$
  - Ninguna de las anteriores
- La derivada como *modelo para* representa:
  - La relación a uno entre dos cantidades de variación en un punto
  - La pendiente de la recta tangente a la curva
  - La razón de cambio en un punto
  - La rapidez de variación
- La derivada como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  significa que en el límite:
  - $\Delta x = 0$  y que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Que la pendiente de la recta secante es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva
  - Ninguna de las anteriores
- La razón de cambio en un punto:
  - No existe porque en un punto no hay variación
  - Se tiene que "derivar" a partir de una función
  - Es un artificio porque  $\Delta x$  tendría que ser cero para estar en el punto y si es cero, no hay razón de cambio
  - Ninguna de las anteriores
- Para las funciones de segundo grado  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  es.

Figura K17: Respuestas de José en el cuestionario de comprensión. 1a. parte.

a) La derivada del punto  $x$  ubicado al centro de  $\Delta x$   
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva  
 c) La razón de cambio promedio  
 d) Ninguna de las anteriores

11. Si  $f(x) = 5x^2$ , entonces  $f'(2) = 20$ . Esto significa que:  
 a) La función varía en 20 unidades  
 b) La pendiente de la recta tangente a la curva es de 20  
 c)  $f(x)$  es una función para cualquier punto  $x$   
 d) Ninguna anterior

12. Menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente:  
 1- el tiempo de lectura de un escrito en 3 semanas | 2- las veces que bola un balón a la misma altura.

13. Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son:  
 1- el pago de un trabajador a la quincena | 2- el punto de ebullición.

14. Indica cuál de los siguientes problemas se pueden modelar utilizando la derivada:  
 a) Se estima que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado (en miles de habitantes) está dada por la función:  $P(t) = t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de 5 años?  
 b) Un objeto se mueve sobre una línea recta de forma que después de  $t$  minutos su distancia en metros al punto de inicio está dada por  $S(t) = 10t + 5/(t + 1)$ . ¿Cuál es la velocidad en los primeros tres minutos?  
 c) El tiraje (número de periódicos producidos) está creciendo a un ritmo constante. Hace tres meses era de 3200. Actualmente es de 4400. ¿Cuál será el tiraje dentro de dos meses?  
 d) A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿Cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?

15. Argumenta por qué seleccionaste las respuestas de la pregunta 14.  
 Porque me preguntan que en cual se pueden modelar y en a y b ya me dan el modelo y en c me dan los datos necesarios para hacer un modelo ya que en d no los dan.

16. En una hoja aparte demuestre que en caída libre la velocidad media para un intervalo es igual a la velocidad instantánea del punto central del intervalo.


17. Por qué es necesario que  $\Delta x$  tienda a cero si la derivada se define como  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y no como  $f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ?

Para la función de la siguiente gráfica:  
 para encontrar su límite.

18. ¿Cuál es la derivada en  $x = 3$ ?  
 a) 6  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

19. ¿Cuál es la derivada en  $x = 6$ ?  
 a) 10  
 b) 4  
 c) 2  
 d) 0

Figura K18: Respuestas de José en el cuestionario de comprensión. 2a. parte.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: **Cálculo diferencial e int.** Examen: **3r. Parcial** Contenido: **Aplicación Deriv.** Grupo: **A**  
 Nombre del alumno: **Gaby** Fecha: **09-02-06** Puntos:  
 Año: **2005** (653) 107 4678  
 Año Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
* Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	500 unidades/año	600 unidades/año	400 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	50 1.2 dl/unidad	75 1.2 dl/unidad	25 1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

*Abateamiento del problema*  
 ¿Cómo varía el costo total (cuando se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado?  
 \* Variables y constantes:  
 - componente = 25A20D  
 \* tamaño del pedido actual: 50 unidades  
 - Costo por hacer el pedido = 20 dl/pedido  
 - Demanda anual = 800 unidades  
 \* unidades en el inventario en promedio = 400 unidades/año

*Costo anual por mantener una unidad en el inventario = 1.2 dl/unidad*

Figura K19: Respuestas de Gaby en examen de modelación. 1a. parte.

Relaciones:

Costo por hacer un pedido es de 20 dl/pedido, el tamaño actual del pedido es de 50 unidades, pero el costo del pedido es el mismo para cualquier tamaño del pedido, ya sea 100, 150, 50 unidades, el problema aquí es que entre más cantidad de producto, aumenta el costo de almacenamiento, es decir; el costo por pedido es el mismo sin importar la cantidad de producto, pero el costo por mantenerlos va a variar (de acuerdo con la cantidad de producto).

\* Tamaño del pedido: 50 unidades → Anual: 800 unidades  
 \* Costo del pedido: 20 dl/pedido  
 \* Costo de almacen: (anual)  $1.2 \text{ dl/unidad} = 960 \text{ dl/unidades}$   
 (inventario) x una unidad  
 $(1.2 \text{ dl/und}) (50 \text{ unidades}) = 60 \text{ dl/unidad}$  → tamaño actual del pedido.

Aumenta la cant. de unidad, aumenta el costo de almacen; pero el costo del pedido es el mismo.


Anual: 800 unidades  
 costo:  $\frac{800 - (\text{Unidades anual})}{50 - (\text{unidades actual})} = (16 \text{ pedidos anuales}) (20 \text{ dl/ped}) = 320 \text{ dl/pedido anual}$   
 almacen:  $\frac{800 - (\text{unidades actual})}{50 - (\text{unidades actual})} = 320 \text{ dl/pedido anual}$   
 50 unidades (actual) — 60 dl/unidad — 20 dl/pedido.  
 800 unidades (anual) — 960 dl — 320 dl/pedido anual.

Ahora, si el pedido es de 100 unidades actual.

100 (actual) = 120 dl/unidad — 20 dl/pedido  
 1000 (anual) = 1200 dl/ — 200 dl/pedido anual

El costo del pedido disminuye al aumentar la cantidad, pero el costo de almacenamiento aumenta conforme a la cantidad.

Figura K20: Respuestas de Gaby en examen de modelación. 2da. parte.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>3r. Parcial</b>	Contenido: <b>Aplicación Deriv.</b>	Grupo: <b>01 A</b>
Nombre del alumno: <b>Cristy</b>		Fecha: <b>09/05/06</b>	Puntos:

Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

(18) 658 112 8021 cel.

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

+ Post Costo

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	<del>500</del> 50 unidades/año	<del>400</del> 75 unidades/año	<del>200</del> 25 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Costo Dem. 20 dl

20x

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

1º Planteamiento del problema  
Que tanto varía el costo total para un tamaño de pedido dado.

2º Variables y constantes  
Costo por hacer un pedido  $\rightarrow x \rightarrow 20$  dl  
Demanda Anual  $\rightarrow x_2 \rightarrow 1000$  unidades  
Tamaño actual  $\rightarrow 100$  unidades  
Costo anual por mantener una unidad  $\rightarrow 1.2x$

menor pedido mayor costo anual  
mayor pedido menor costo anual  
 $10 \times 20 = 100$   
 $1.2 \times 100 = 120$   
 $20 \times 1.2 = 24$   
 $2x$

Figura K21: Respuestas de Cristy en examen de modelación. 1a. parte.

Relación Entre Variables

Modelo y Solución

$$\frac{U}{\sqrt{}} = \frac{1.2 X_1}{X_2} = \frac{1.2(1000 \text{ unidades})}{20} = 60$$
$$\frac{\text{valor} - U \text{ del } \sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

Figura K22: Respuestas de Cristy en examen de modelación. 2da. parte.



CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA

UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>3r. Parcial</b>	Contenido: <b>Aplicación Derlv.</b>	Grupo: <b>01</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>Juan</b>		Fecha:	Puntos:	

Prof. Ing. Maximiliano Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	500 unidades/año	600 unidades/año	400 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

*¿Cómo varía el costo total cuando se incrementa o disminuye?*  
 ¿Cantidad que debe pedir de cualquier componente dado?  
 200 unidades por pedido → 5 pedidos → 100 dl  
 100 unidades → 1200 dl  
 1,300 dl

Figura K23: Respuestas de Juan en examen de modelación. 1a. parte.

El <sup>deducción</sup> costo total varía de acuerdo a la unidades del pedido, entre mas pequeña sea el numero de unidades por cada pedido más grande sera el costo y en cambio entre más alto sea el numero de unidades por pedido más pequeña sera el costo.

Modelo

Costo total =  $Ct$   
 Costo por pedido =  $Cp$   
 Numero de unidades por pedido =  $Np$   
 Costo anual del inventario =  $Ci$

$$Ct = (Np)(Cp) + Ci$$

$$Ct = (10)(200) + 1200$$

$$Ct = 2000 + 1200$$


$$= 3200$$
  

$$Ct = (5)(20) + 1,200$$

$$= 100 + 1,200$$

$$= 1300$$

Figura K24: Respuestas de Juan en examen de modelación. 2da. parte.



**CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA**  
UNIDAD SAN LUIS R. C.

Curso: <b>Cálculo diferencial e int.</b>	Examen: <b>3r. Parcial</b>	Contenido: <b>Aplicación Deriv.</b>	Grupo: <b>01</b>	<b>A</b>
Nombre del alumno: <b>José</b>		Fecha: <b>(19) 9/15/2006</b>	Puntos:	

Cervantes S. Edificio J Cubículo 6 Planta Baja

(094 653 115 4709) Celular

Resuelva correctamente el siguiente problema explicando cada paso:

El departamento de administración de inventarios de Bose S.A. de C.V. ha estado enfrentado el dilema del tamaño de los pedidos que debe hacer. De acuerdo con su información, algunos componentes de sus productos son administrados bajo el sistema Just in time (JIT) pero otros deben ser ordenados en pedidos de acuerdo al agotamiento que se produce en sus almacenes. Los administradores reportan que el tamaño del pedido repercute en los costos totales de administración del inventario. Para disponer de un componente, por ejemplo el 25A32H, compras hace un pedido al proveedor Mitsuni e incurre en un costo por hacer el pedido. Entre más pedidos haga, se tienen mayores costos por pedido. Una vez que éste se ha recibido, se manda al almacén hasta que es enviado a la línea de producción. Cada día que el componente pasa en el almacén la compañía cubre un costo por mantenerlo ahí, es decir se incurre en un costo de mantenimiento.

Los administradores indican que entre menor sea el tamaño del pedido, se harán más y mayor será el costo anual por hacer los pedidos pero se tendrá menor costo por mantenerlos, pues serán pequeñas las cantidades almacenadas. Por otra parte, entre mayor sea el tamaño del pedido se tiene el proceso inverso.

Para fines prácticos, la administración ha preguntado por un indicador que le oriente sobre la cantidad que debe pedir de cualquier componente dado, para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos. En el departamento de ingeniería lo que más preocupa por el momento es saber cómo varía el costo total (cuanto se incrementa o disminuye) para un tamaño de pedido dado. Algunos datos obtenidos por el departamento para los siguientes componentes son:

	COMPONENTE		
	25A32H	25A17C	25A20D
Proveedor	Mitsuni	Mitsuni	Daewoo
Tamaño del pedido actual	100 unidades	150 unidades	50 unidades
Costo por hacer un pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido	20 dl/pedido
Demanda anual	1000 unidades	1200 unidades	800 unidades
Unidades en el inventario en promedio	500 unidades/año	600 unidades/año	400 unidades/año
Costo anual por mantener una unidad en inventario	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad	1.2 dl/unidad

Por el momento resuelva el problema que tiene el departamento de ingeniería.

Figura K5: Respuestas de José en examen de modelación. 1a. parte.

\* Planteamiento.  
 La Cantidad cantidad se debe pedir de cualquier componente para que se cubra la demanda anual pero a la vez, que los costos totales no sean excesivos.

\* Derivadas y constantes.  
 número de Pedidos =  $X$   
 Costo del Pedido =  $20 \text{ dll/pedido}$   
 Costo de mantenimiento =  $1.2 \text{ dll/unidad}$   
 número de unidades  $y$

Costo total de pedido =  $X_2$   
 Costo total por mantenimiento =  $Y_2$   
 Costo final =  $F$

\* Relación:  
 Se va a multiplicar el número de Pedidos por el costo de cada Pedido después se multiplicará el número de unidades por el costo de mantenimiento por unidad, el resultado de los 2 modelos se sumará para saber el costo total.

\* modelo:  
 $X (20 \text{ dll/pedido}) = X_2$   
 $Y (1.2 \text{ dll/unidad}) = Y_2$   
 $X_2 + Y_2 = F$

\* solución:  
 $8(20) = 160 \text{ dll}$   
 $7(20) = 140$

$\frac{1000}{8} = 125 \Rightarrow 142.85$   
 $125(1.2) = 150 \text{ dll}$   
 $7 \Rightarrow 147$   
 $311 \text{ dll} \quad 310 \text{ dll}$   
 $308 \text{ dll}$   
 $a = 313$

Figura K26: Respuestas de José en examen de modelación. 2da. parte.

Apéndice I: Entrevistas sobre derivada y realidad. Caso tradicional.

Como indicamos anteriormente, sugerimos que la didáctica propuesta acerca la noción de derivada a los contextos de la realidad cotidiana. Indagamos sobre ello al igual que con el caso tradicional, a través de las preguntas 12 y 13 del cuestionario de comprensión. Creemos que las respuestas debieron girar en torno a situaciones en la que es necesario precisar la relación cuantitativa que hay entre dos variaciones en un momento dado, o razones de cambio instantáneas. La respuesta más correcta la proporcionó Raúl, sin embargo, al momento de la entrevista declaró no recordar lo que hizo. Aunque encontramos un número mayor de ejemplos y contraejemplos en el caso de la matemática en contexto, sólo Cristy menciona dos ejemplos correctos citando incisos de la pregunta 14. Esto nos sugiere que ambas didácticas no proveen un aprendizaje que permita que a los alumnos identificar en la realidad cotidiana, situaciones problema que se solucionan aplicando la derivada. Para profundizar en el conocimiento construido, realizamos entrevistas enfocadas sobre las preguntas mencionadas y la forma en que les gustaría enseñar el tema de derivada. A continuación describimos cada una de ellas en los casos de Gaby, Cristy, Juan y José.

Al parecer Gaby no puede identificar de manera clara ejemplos reales en los que se pueda aplicar la derivada. Recurre a dos ejemplos presentados en clase, al problema determinar velocidades medias e instantáneas de un objeto en caída libre y a un problema sobre el cálculo de ritmos de producción instantáneos. En cuanto al primero, se le pregunta por la velocidad promedio para ver si encuentra una diferencia con la velocidad instantánea:

M: Ok, bien... la número 12.

G: Dice menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en el ambiente, en, en tu... medio ambiente... al lanzar una pelota en caída libre fue un ejemplo...

M: ¿Cuál es su velocidad promedio?

G. Es como por ejemplo, que te puedas saber, sacar por derivada y (inaudible) una pelota...según...

M: Otra vez, eso es... eso me recuerda lo que hicieron en la clase.

G: Ajá, dice, menciona dos ejemplos de derivada que encuentres en tu medio ambiente... dice al lanzar una pelota en caída libre, ¿cual es su velocidad

promedio?...porque al lanzar una pelota debemos de... calcular la velocidad promedio también me va (inaudible)... promedio...

M: Si.

Antes de hablar sobre la velocidad instantánea Gaby interpreta derivada como una razón de cambio, en ese momento, se le pide que precise la diferencia entre la razón de cambio promedio y la de un punto, ya que esta última se obtiene con la derivada:

G: Y la derivada también puede ser por la... razón de cambio.

M: Pero ahí hay diferencias, entre una razón de cambio en un punto y una razón de cambio promedio.

G: Pudiera ser que así... y luego dice calcular la producción de equis, equis producto, por un número equis de empleados, en un intervalo de tiempo, por ejemplo una fábrica...

M: Mm mm.

G: Cuántos productos... eh...cuántos productos se puede hacer con un determinado número de empleados en un determinado tiempo.

M: Si, me recuerda al, al...

G: A un problema que nos puso, a un problema que nos puso... en este fue (señala a otro examen)

Aunque responde con otro ejemplo, no precisa la diferencia y volvemos a insistir en ello:

M: Si, este... ¿cuál es la diferencia que tú encuentras entre una razón de cambio en un punto y una razón de cambio promedio?

G: Pues la diferencia es que la razón de cambio específica en un solo punto, que ahí... entre por ejemplo este punto y la razón de cambio entre determinado punto...

M: ¿Otro punto?

G: Ajá, y la promedio yo creo que ya es de acuerdo a la distancia... como el ejemplo de la pelotita... dice (inaudible) la razón de cambio... en ¿un punto maestro? que se puede la razón de cambio en el punto... cero seis...

M: Ok.

G: Tuvo que seguir una fórmula para sacar eso o un método, entonces dice cuál es la razón de cambio, promedio, primero te pide la razón de cambio promedio y ya sacas otra... (inaudible)... ya te está preguntando un promedio de... ah, ¿cómo es?... ah...

M: Ahí vas.

Aunque llega a precisar la razón de cambio en un punto cuando se refiere al punto “cero seis” termina por aceptar que no puede explicar la diferencia:

G: Pero... la razón de cambio promedio, está preguntando cuál es la razón de cambio promedio... es que usted lo, lo explicó eso... Es una cosa muy diferente a un punto a la promedio, porque, para un punto pues nada más vas buscando para ese punto, cual es la razón de cambio entre ese, entre ese intervalo... de tiempo no... y ya cuando te dice promedio que es otra... promedio en general... ah no lo entiendo... ¡no sé explicarlo!... dice promedio... pero sí es algo muy diferente, usted lo explicó y se tiene otra, otra fórmula algo así, en unos problemas que...

Algo similar encontramos en los contraejemplos de derivada, tampoco puede explicar en forma precisa su respuesta. Ella toma como ejemplo la situación que se describe en la pregunta dos de dicho cuestionario, que refiere a una razón por unidad, sostiene que esa situación es un ejemplo que parece de derivada pero que no lo es, aunque no explica la diferencia entre ambas nociones:

G: Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero no lo son...si una pieza de aluminio al calentarse se dilata cero punto cero treinta cuando la temperatura aumenta diez centígrados, no es una derivada, es una razón por unidad.

- M: Ok.
- G: Eso lo saqué de aquí [señala una respuesta de su examen]... ¿Porqué puse eso? profe ¿una razón por unidad y una derivada es lo mismo?
- M: No exactamente, una razón...
- G: Pero parece que, parece derivada.
- M: Parece.
- G: Parece, por ejemplo este ejemplo parece que es una derivada pero nada más es una razón por unidad, por eso..
- M: Así es.
- G: Por eso lo puse yo, porque viendo acá... no es una derivada viene siendo una razón por unidad... ¡qué también parece una derivada!, pero [inaudible] una derivada.
- M: ¿Tú puedes decirme de la diferencia entre razón por unidad y derivada?
- G: Y derivada...
- M: ¿Podrías decirme?
- G: ¡No!, creo que, no no, no puedo.

Aunque los ejemplos y contraejemplos proporcionados por Gaby no fueron los más apropiados ni pudo justificar sus elecciones, en otra parte de la entrevista aboga por el uso de didácticas más contextualizadas en escenarios reales:

- M: Así es, si tú enseñaras derivadas ¿como las enseñarías?
- G: ¿Yo?
- M: Imagínate que terminaste que saliste una excelente alumna y etcétera, etcétera, etcétera y estas dando clases, y te piden que enseñes cálculo y que enseñes el tema de la derivada.
- G. ¿Qué enseñe el tema de derivada?
- M: Sí, ¿cómo lo harías? ¿o cómo te gustaría?
- G: Pues yo, pues ya no más fórmulas ¿no?, pero primero explicaría el porqué de una derivada, qué es una derivada y el porqué y la función que hay, que... que

tiene esta derivada, que tienen las derivadas en las situaciones reales, en la vida diaria.

M: Ok.

G: Que tú miras un fenómeno que se presenta en la vida diaria y dices, ah mira: esto se puede resolver con una derivada.

M: Ok.

G: Y otra también el explicar... es... no nada más llegar y poner las fórmulas y decir, esto es así y ya, sino creo yo que también explicar... en la vida diaria.

También considera que la derivada es algo real:

M: Ok... ¿para ti la derivada sería algo imaginario?

G: No, la derivada es algo real... pienso yo.

M: No, lo que tu piensas.

G: Pienso yo, en mi opinión... [inaudible] si creo que, que la derivada, por ejemplo en la prepa ¿qué es la derivada? ¿nada más hago toda esta bola de números? y ¿en que, que lo voy, a aplicar?... y ya no, ya aquí pues vimos de que, la derivada es algo real, es... que hay muchas situaciones que la podemos aplicar.

Gaby no discierne en forma clara las nociones utilizadas en esta parte del cuestionario y de la entrevista, sin embargo, manifiesta que la derivada es algo que tiene que ver con la realidad, con la vida cotidiana y aboga por didácticas como la propuesta.

Cristy recurre al problema de la caída libre visto en clase y a los ejemplos del mismo cuestionario presentados en la pregunta 14, donde pedimos que nos indique qué problemas se modelan con una derivada. Al parecer, se guía más por la presencia de variables y funciones que por la necesidad de determinar una razón de cambio en un punto. Observamos que no puede precisar por qué eligió esos ejemplos:

M: Ok, la doce, menciona dos ejemplos de derivada ¿pusiste dos ejemplos?

C: Puse la caída libre de una pelota... y el ejemplo a) de la pregunta catorce.

M: Ah.

- C: E... [lee el problema para sí] estime que dentro de  $t$  años la población de San Luis Río Colorado en miles de habitantes está dada, por la función  $P(t)$  igual a  $t^2 + 200t + 150$ . ¿Cuál será su tasa de crecimiento dentro de cinco años?
- M: ¿Porqué pones eso como ejemplo?
- C: Mm mm... para empezar pues era una función.
- M: Ajá.
- C: Cinco años... no me acuerdo ahora.

En el caso de los contraejemplos, Cristy considera de nuevo la presencia de variables y funciones dentro de una situación para considerarla ejemplo de derivada. Acierta al afirmar que el inciso c) no es un ejemplo de derivada, pero no proporciona un discurso justificativo explicativo convincente al decir “yo me imaginé que no” se trata de un ejemplo de derivada.

- M: Ok, vamos entonces a la trece.
- C: Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero ¿que no son?
- M: Ajá.
- C: La c) y la d) [risas].
- M: La c) y la d) ¿porqué?
- C: El tiraje... el tiraje número de periódicos producidos está creciendo a un ritmo constantes. Hace tres meses era tres mil doscientos. Actualmente es cuatro mil cuatrocientos ¿cuál será el tiraje dentro de dos meses?... no tiene... no tiene variables ni nada de eso ni ninguna función ni nada pos yo... yo me imagine que no.

Para el ejemplo del inciso d) que no es un contraejemplo, su respuesta es ambigua, y concluye que se puede resolver con otros métodos sin utilizar la derivada, cuando es un problema típico. Esto nos sugiere que Cristy no relaciona claramente la derivada con situaciones en las que se requieren calcular razones entre dos variaciones en un punto o en un instante dado:

- M: Ok, y el inciso d)
- C: A medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de cero punto uno... centímetro sobre minuto ¿cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?... le había puesto primero que si era... pero déjeme encontrar porqué dije que no... pues tal vez si sea porque es... una razón de cambio ¿no?
- M: Tú dime a mí.
- C: Exactamente dos minutos... Eh dice a medida que una sierra circular metálica se calienta, su diámetro aumenta a razón de cero punto uno centímetros por minuto, o sea que cada minuto se aumenta esto.
- M: Mm mm.
- C: Entonces, ¿cuál es la variación del área de uno de sus lados exactamente a los dos minutos?... si en un minuto... se.. se... aumenta tantos centímetros ¿en dos minutos cuánto va aumentar? ¿a eso se refiere?
- M: Mm mm.
- C: Entonces... pues eso también se puede hacer con... con... [inaudible]... más sencillos.
- M: ¿Sin usar la derivada?
- C: Sin usar la derivada.

A pesar de las deficiencias anteriores, Cristy dice que “entiende” lo que está pasando al trabajar con los problemas de derivada vistos en las clases del maestro del curso, y que eso se debe a la “teoría” que vimos durante nuestra intervención:

- M: Estas son otras preguntas de tipo general... que me interesa conocer qué piensas. ¿Te acuerdas que cuando... tuvimos las clases, tuvimos el ejercicio este de la, la pelotita de la caída libre, todo esto. ¿ya habías llevado tú cálculo antes? ¿habías visto esto de la derivada antes?
- C: Derivadas e integrales sí, más no teoría.
- M: No teoría, ¿es la primera vez teoría sobre esto?
- C: Mm mm.

- M: ¿Y qué has aprendido?... ¿o qué te ha parecido?
- C: En parte está bien.
- M: Ajá.
- C: Porque... yo me acuerdo que en la prepa, pues yo hacía las fórmulas y derivaba y todo eso, pero en realidad no sabía que estaba haciendo.
- M: Ok.
- C: Y aquí me di cuenta... con usted me di cuenta en un caso real... que está pasando no y... y ahorita también con lo que nos está explicando el maestro ya sé donde está la derivada en [risas] si me explico... en la curva y esto y el otro... porque nada más hacíamos las fórmulas y está bien, ok, está bien, pero no sabía que, o sea no entendía... no entendía.

A diferencia de Gaby, Cristy muestra una preocupación mayor por la distribución de los contenidos temáticos, sugiere una mezcla de didáctica contextualizada y no contextualizada bien delimitada en tiempo. Entendemos dicha preocupación por lo extendido de nuestra intervención:

- M: Esto ...¿cómo, cómo te gustaría la derivada o que te la enseñaran?
- C: Que me la enseñaran.
- M: Ajá, ¿cómo te gustaría que fueran?
- C: Una parte de lo que pu... de lo que nos enseñó usted y otra parte de lo que nos enseñó el maestro.
- M: ¿Cuál y cuál?
- C: Por ejemplo, mmm... vamos a ver... soy por la maestra por ejemplo y y me dieron esta materia... yo lo que haría es ver un poco de teoría...
- M: Mm mm.
- C: De cómo usar la derivada y ahí empezar con las fórmulas,
- M: Así es,
- C: Si.
- M: Ajá.

- C: Pero a mi lo que se me hizo es que... como es todo un semestre nada más... siento que nos llevamos mucho tiempo con la teoría,
- M: Ajá.
- C: Y ya pues ahorita nos queda muy, muy poquito tiempo, ya terminamos con la derivadas, pero como son tan... integrales, ya, ya casi no las vamos a alcanzar a ver,
- M: Ajá.
- C: Entonces, si a mi me dieran este curso de diferencial e integral, yo... repartiría bien, los temas, diciendo bueno, de aquí a acá, voy a dar teoría y para que entiendan bien, esto y el otro, voy a dar ejemplos, de aquí parto con las fórmulas y de aquí ya sigo con los demás temas, eso es lo que haría yo.

En resumen Cristy presenta dificultad para identificar el uso de la derivada en situaciones reales, relacionadas con la medición de variaciones instantáneas. Aún así, cree entender su significado en una situación real, o bien en situaciones no contextualizadas. A la vez, muestra interés por la didáctica propuesta complementada con la didáctica tradicional y una mejor distribución de los contenidos en el tiempo.

En el caso de Juan, observamos una confusión similar a la de Gaby y Cristy al tratar de identificar dos ejemplos de la derivada en la realidad cotidiana. Juan anota la velocidad con la que venga a la escuela y las cosas que hace en el día entre las horas utilizadas. Al indagar sobre el primer ejemplo recapacita en que fue un error y trata de explicarla como razón de cambio pero se le dificulta hacerlo en forma coherente. Aunque no indagamos sobre el segundo ejemplo, observamos que en ningún momento se refiere a situaciones que impliquen la medición entre dos variaciones en un instante, sino más bien, a razones de cambio promedio:

- M: Menciona dos ejemplos, de derivada que encuentres en tu medio.
- JN: Yo puse la velocidad con la que... viajo a la escuela.
- M: Ajá.
- JN: Que es, pues la relación de kilómetros sobre hora ¿no?
- M: ¿Si te vienes a veinte kilómetros por hora eso sería una derivada?

- JN: No, eso sería una velocidad media ¿no?
- M: ¿Y como lo pones ahí como ejemplo?
- JN: Me equivoqué yo creo, porque, pero... si me vengo con una.. no sería...  
[inaudible] yo lo, relacionándola, es una razón de cambio esto pues, pero,
- M: Es una razón de cambio.
- JN: Eso es lo que lo, lo relaciono nomás, pero de ahí...
- M: Ok.
- JN: Entre las horas... así dividiendo las cosas, entre las horas, entre los tiempos que tarda, lo que hago.
- M: ¿Porqué pusiste eso?
- JN: Medio raro [risas]... pues esto también puede cambiar no... no todas las cosas las hago igual.

Como contraejemplos Juan señala las horas que está en la escuela al día y las horas que dure en el día. Tenemos la impresión de que utiliza la noción de razón de cambio como el significado central de la derivada, por lo que sostiene que esas situaciones no son ejemplos de derivada aunque pudieran parecerlo:

- M: Ok, dos ejemplos de derivada pero que no lo son.
- JN: Las horas que estoy en la escuela en el día... como de veinticuatro horas estoy tantas horas nomás en el día.
- M: ¿Y porqué no es una derivada?
- JN: Porque, le decía nomás entre, no, no... [inaudible] del puro tiempo nomás.
- M: No te entiendo ahora, yo.
- JN: Ahora no entiende usted ¿verdad?, no, o sea no, no hay una razón pues...
- M: Ah.
- JN: Es lo que...
- M: ¿Una razón de tiempo dices?
- JN: No, no es... has de cuenta que es una, es una, no hay razón ahí pues.

Al preguntarle por la forma en que enseñaría la derivada, Juan no hace alusión a la didáctica de la matemática en contexto en forma directa, sin embargo, se interesa por didácticas que promuevan la comprensión relacional, es decir, “saber para qué te sirve” y “qué es lo que se está haciendo”:

M: ...¿Si tú enseñaras la derivada, cómo la enseñarías? suponiendo que tú fueras profesor, o suponiendo que tuvieras un grupo de cuatro cinco, compañeros que te dijeran no sabemos nada de derivada, te dijeran sabes qué, ayúdanos o enséñanos, ¿cómo, cómo...

JN: ¿Cómo le enseñaría?

M: ¿Cómo te gustaría enseñarles?

JN: Pues no, no... buscar la manera más fácil de que me lo entendieran, también, aparte pues, no, nomás ah, (inaudible) así nomás, saber o sea, saber para qué te sirve, no nomás para, no nomás hacerlo, y eso que, lo que hiciste no sepas ni qué es, o sea que supieran qué es lo que están haciendo nomás... ellos como lo pueden relacionar con otra cosa, pues, no, nomás, que ya, la pura fórmula ten y vámonos, como si, si me entiende... o sea que sepan derivar pero no sepan para qué, que, cómo la puedes usar ...

M: ¿Tú sabes más o menos cómo pueden usarla? ¿en qué puede usarse?

JN: Como eso, como en este problema, pues ya la usamos mire, con la función que hicimos aquí, en el cuatro [del examen sobre justificaciones y argumentos con problemas de derivada, Apéndice B], que sacamos el modelo, ahí la usamos y depende también, la tienes que... buscar más o menos cómo... relacionar la... un cambio así, una razón de cambio o buscar así más o menos, la relación que hay.

Aunque no en una forma muy decidida, Juan acepta que la derivada tiene que ver con los hechos reales:

M: A sí... ¿para ti la derivada es algo real?

JN: ¿Real, real, real?, pues si te, ayuda a resolver problemas yo digo que es real,

M: Si pero lo puedes, o sea, lo puedes ver... como sería la pregunta...¿puedes asociar la derivada con los hechos reales? [inaudible] decir tú en estos hechos reales se está presentando una derivada.

JN: Pues en una [inaudible] pero yo digo que si.

Juan y Gaby fueron a nuestro parecer, los alumnos que mostraron mayor interés durante nuestra intervención, sin embargo, encontramos serias deficiencias para asociar la derivada con la realidad cotidiana. En lo particular, Juan, asocia la derivada con situaciones en las que se requiere obtener una razón de cambio, pero no encontramos indicaciones, de que esa razón de cambio refiera a una medición puntual. Por otra parte, Juan se interesa por didácticas que ayuden a entender para que sirve la derivada y lo que se está haciendo con ella. Además encontramos una manifestación de que para él, la derivada es algo real, en cuanto a que ayuda a resolver un problema real.

José proporciona como ejemplos de derivada el tiempo que hace de su casa a la escuela y las veces que vota un balón a la misma altura. Durante la entrevista observamos que el significado que le otorga está en términos de variaciones, cambios sin precisar que se trata de una razón entre ellos en un punto, algo que hemos encontrado en los cuatro alumnos:

M: Bien, menciona dos ejemplos, de derivada que encuentres en tu medio ambiente, entonces, ¿qué me pusiste ahí?

JS: Pues le puse el tiempo de, la casa a la escuela en, en una semana.

M: ¿Cómo está eso?

JS: Pues, este.. lo tomé, pues más o menos, lo tomé como por ejemplo, el tiempo que duro, pues de la casa a la escuela y como puedo decir, es, supongamos que veinte minutos y otro día hago, más, pero, eso no sería como una derivada, parece, eso sería nada más como, como una variación más o menos o sea...

M: ¿Qué se ocuparía para que fuera una derivada?

JS: Mmm... [inaudible]

M: No te preocupes, se trata de, nada más expliques lo que puedas explicar ..

JS: M m.

M: Tú tienes otro ejemplo aquí dice, las veces que bota un balón..

JS: A la misma altura.

M: A la misma altura.

JS: Si, es que, pues, no, no lo tomé como una derivada, sino más o menos como un cambio.

M: Ah.

JS: No lo tomé como,... pues sí, igual aquí, también no.

Encontramos la misma situación en el caso de los contraejemplos, ya que menciona situaciones que involucran un cambio nada más, sin reflexionar más en las condiciones que implica el uso de una derivada. Al preguntarle cuando un cambio implica una derivada, no encuentra un ejemplo pertinente:

M: Menciona dos ejemplos que parecen derivadas pero que no lo son [se lee la pregunta]... tú le pusiste el pago de un trabajador a la quincena... dos el punto de ebullición, ¿recuerdas porqué?

JS: Pues, pues es que, mm, cómo se dice, me he guiado por, nada más un cambio, no por, una derivada así.

M: Mm, ¿cuándo un cambio puede, referirse a una derivada?

JS: Mm, como, como puede ser, pues yo diría que, como por ejemplo que, mm... no, no encuentro.

Contrario a lo esperado, José indica que la derivada no tiene contacto con la realidad y señala que utilizaría una didáctica que a nuestro parecer es más propia de la enseñanza tradicional:

M: ¿Se te hace algo real lo de la derivada?

JS: ¿Cómo real?

M: Cómo, cómo te diré, ¿se te hace que la derivada tiene que ver con la realidad?

JS: No.

M: ¿Con problemas reales?

- JS: Pues así a simple vista, pues diría que no, pues yo digo que probablemente en algunos, en algunos sí.
- M: Si tú enseñaras derivada, la derivada, ¿cómo lo harías? ¿o cómo te gustaría enseñarlo, ese tema?
- JS: ¿Cómo? ¿qué?
- M: Si tu fueras profesor o les enseñaras a tus amigos la derivada, ¿cómo lo harías?
- JS: Pues, pues, ah... cómo lo haría... pues como, pues como, pues como regularmente cómo se están dando sí, explicar que... pues sí, (inaudible) el ejemplo ese de  $t$  dos más doscientos, más doscientos  $t$  más ciento cincuenta, pues ya empezar explicar que, pues la derivada de uno, no, ciento cincuenta no tiene, y que [inaudible] el dos se pasa a, parte [inaudible].