

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA



Facultad de ingeniería
TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES ROBUSTOS
POR MODOS DESLIZANTES EN SISTEMAS MECÁNICOS

POR:

CARLOS VILLA HINOJOZA

DIRECTOR DE TESIS:
RAÚL RASCÓN CARMONA

Mexicali, Baja California, México, 2022

RESUMEN

El estudio e implementación de controladores en sistemas mecánicos es fundamental para su optimización y desempeño en lazo cerrado. Todo sistema mecánico en lazo cerrado requiere que sus actuadores sean manipulados por un algoritmo de control. Optimizar estos algoritmos es de gran interés para la industria, ya que representa ahorro de recursos, por ésto, continuamente se busca implementar nuevas formas de hacer los algoritmos de control más robustos, precisos y rápidos.

Este trabajo se enfoca en implementar algoritmos de control para el seguimiento de trayectoria en sistemas mecánicos, con el fin de evaluar resultados prácticos y de simulación. Este tipo de controlador Terminal Sliding Mode (TSM, por sus siglas en inglés), tiene un comportamiento robusto, ya que puede reaccionar ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas en el sistema y adaptarse para asegurar convergencia en tiempo finito. El control es basado en compensaciones de error utilizando modos deslizantes.

ABSTRACT

The study and implementation of control algorithms in mechanical systems are essential for optimizing their results. All closed-loop mechanical systems need an algorithm that controls their operation. Optimizing these algorithms has become an important aspect of the manufacturing industry since it represents a potential decrease in money and time spent on machinery; for this reason, we continually seek to implement new ways to make the control algorithms more robust, accurate, and fast.

The following thesis focuses on implementing control algorithms for monitoring trajectory in mechanical systems, to evaluate practical results and simulation. This type of controller has a robust behavior, since it can react to parametric uncertainties and external disturbances in the system and adapt to ensure convergence in finite time. Control is based on error offsets using sliding mode control.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, me gustaría agradecer a mi tutor y asesor, el Dr. Raúl Rascón Carmona. Gracias a todo su apoyo, paciencia, experiencia y conocimiento, se pudieron lograr los objetivos no solo del proyecto, si no del estudio completo de la maestría.

De igual manera, debo de agradecer a la UABC por darme todas las herramientas y facilidades que requiere un trabajo de investigación de este tipo. Sin este gran apoyo, no hubiera sido posible realizar la presente tesis.

Para finalizar, quisiera darle las gracias a mi familia y amigos que estuvieron para brindarme apoyo durante la situación mundial que nos mantenía a todos alertas. Especialmente a mi papá y mi mamá, que siempre brindaron palabras y consejos de apoyo para mantenerme enfocado. Muchas gracias a todos.

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1. Definición y formulación del problema.....	7
1.2. Antecedentes.....	8
1.3. Objetivo general.....	8
1.4. Objetivos específicos.....	9
1.5. Justificación.....	9
2. ANTECEDENTES MATEMÁTICOS.....	10
2.1. Definiciones.....	10
2.1.1 Modelado en el espacio de estados.....	12
2.2 Análisis de estabilidad.....	13
2.2.1. Conceptos de estabilidad.....	13
2.3. Estabilidad de Lyapunov.....	15
3. CONTROL ROBUSTO.....	16
3.1. Formulación de Control Robusto.....	16
3.2. Control por modos deslizantes.....	17
3.2.1. Principios de CMD de primer orden.....	18
3.2.2. Chattering.....	20
3.4. Análisis matemático.....	21
4. DISEÑO DE CONTROLADOR TERMINAL SLIDING MODE...28	
4.1. Diseño de controlador.....	29
4.2. Simulación numérica	35
5. CONTROLADOR CON ESTIMADOR.....	41
5.1. Diseño de controlador.....	41
5.2 Estimadores adaptables	43
5.3 Resultados.....	44
6. CONCLUSIÓN.....	51
7. REFERENCIAS.....	53

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Estabilidad.....	13
Figura 2: Estabilidad asintótica.....	14
Figura 3: Condición n para existencia de régimen deslizante.....	19
Figura 4: Fenómeno chattering.....	20
Figura 5: Convergencia asintótica de la posición.....	25
Figura 6: Convergencia asintótica de la velocidad.....	25
Figura 7: Variable deslizante.....	26
Figura 8: Diagrama de fase.....	26
Figura 9: Señal de control.....	27
Figura 10: Superficie deslizante propuesta y superficie deslizante convencional.....	31
Figura 11: Seguimiento de trayectoria deseada \dot{x}_d y trayectoria del sistema x_1	36
Figura 12: Derivada de la trayectoria deseada \dot{x}_d y trayectoria del sistema x_2	36
Figura 13: Superficie deslizante con convergencia en tiempo finito y las trayectorias del sistema.....	37
Figura 14: Error de seguimiento e_1	38
Figura 15: Derivada del error de seguimiento e_2	39
Figura 16: Variable deslizante s	39
Figura 17: Señal de control u	40
Figura 18: Modelo Masa Resorte amortiguador.....	41
Figura 19: Sistema Masa Resorte amortiguador.....	44
Figura 20: Gráfica del seguimiento de trayectoria de x_1	45
Figura 21: Gráfica del seguimiento de trayectoria de x_2	45
Figura 22. Gráfica del error de posición e_1	46
Figura 23. Gráfica del error de posición e_2	46
Figura 24. Gráfica de la señal de control u	47
Figura 25. Gráfica del error de velocidad e_2 contra el error de posición e_1	47
Figura 26. Gráfica del estimador de perturbación.....	48
Figura 27. Gráfica del estimador de la fricción viscosa.....	48
Figura 28. Gráfica del estimador del resorte.....	49

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Definición y formulación del problema

En la modernidad, todos los sistemas físicos pueden ser definidos con un modelo matemático que consiste de ecuaciones diferenciales, las cuales, en un caso ideal, dependen de manera continua del estado actual del sistema. Pero en la realidad, sabemos que no siempre se presenta este caso ideal, y tendremos discontinuidad en el estado del sistema, es decir, el lado derecho de la ecuación no es continua, a este tipo de sistemas se les conoce como sistemas de estructura variable (SEV), véase [11]. Algunos ejemplos de SEV son los sistemas mecánicos con rozamiento, cuando la fuerza de roce tiene un signo contrario a la dirección de movimiento, o también sistemas eléctricos con fuentes conmutadas o convertidores electrónicos, entre otros [12],[13].

Para controlar un sistema de este tipo, es necesario tener un control que también cambie de estructura, se requiere un control de estructura variable (CEV), el cual consiste en diseñar un controlador que cambie su ganancia a partir de una lógica de conmutación, véase [11]. Un método viable para crear un CEV es, plantear el objetivo de control como una función de los estados, para luego a través de conmutaciones a una alta frecuencia (infinita, o idealmente infinita), forzar a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la restricción deseada, en el espacio de estados. Modos deslizantes (Sliding Modes en inglés) se le llama a este tipo de metodología de control. Si da el caso que la frecuencia de conmutación no es infinita, lo cual es frecuente en implementación práctica, las conmutaciones crean oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento. Esta es la desventaja principal de los modos deslizantes, y se le llama "chattering", véase [7],[14].

1.2. Antecedentes

El uso de controladores por modos deslizantes a sido una rama de estudio relevante en los últimos 5 a 10 años [4]. Esto se debe a sus múltiples beneficios; es de comportamiento robusto, es decir puede llevar los errores del sistema en lazo cerrado a cero ante incertidumbres paramétricas previamente establecidas y perturbaciones externas. Brinda convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante [9]. Existen estudios recientes [1],[2] que logran convergencia en tiempo finito utilizando controladores robustos por modos deslizantes, para sistemas no lineales de primer y segundo orden. Estos estudios demuestran la estabilidad del punto de equilibrio en lazo cerrado en tiempo finito, por otra parte, a modo de ilustración, se realizan simulaciones numéricas. Para comprobar su funcionamiento de una manera experimental, se implementarán estos controladores en sistemas mecánicos, para poder evaluar y comparar los resultados teóricos y de simulación. De esta manera no solo se tendrá un entendimiento teórico de los controladores, si no se tendrán resultados experimentales, que pueden servir como base para modificar, implementar o incluso mejorar dichos controladores en futuros estudios.

1.3. Objetivo general

Diseñar un par de algoritmos de control para seguimiento de trayectoria, se demostrará estabilidad en lazo cerrado con convergencia asintótica o en tiempo finito hacia el punto de equilibrio utilizando herramientas de Lyapunov. Estos controladores serán aplicados en una clase de sistemas mecánicos, se asumirá que se tienen mediciones de posición en ambos controladores y velocidad en un solo controlador. Se llevarán a cabo simulaciones numéricas en MatLab y experimentos en un sistema mecánico.

Los algoritmos que se diseñarán son robustos ante perturbaciones externas e incertidumbre paramétrica acotada, dichos algoritmos estarán en el estado del arte.

1.4. Objetivos específicos

-Demostrar estabilidad en lazo cerrado con convergencia en tiempo finito utilizando herramientas de Lyapunov para un controlador. Demostrar estabilidad con convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio para el otro controlador.

-Llevar a cabo simulaciones numéricas por medio de Matlab.

-Realizar pruebas físicas en un sistema masa resorte amortiguador para uno de los controladores.

-Calcular tiempo de convergencia para el controlador TSM.

-Proponer modificaciones en base a resultados obtenidos.

-Implementar un estimador de perturbaciones externas.

1.5. Justificación

El diseño e implementación de controladores es una rama de la ciencia con amplio antecedente de investigación, debido a su importancia en el ámbito industrial y científico, véase [15]. Desde un punto de vista industrial, la optimización de recursos es de gran interés, siendo el tiempo y el recurso humano los más indispensables y los que se buscan optimizar como prioridad. El diseño de control da la oportunidad de tener procesos automatizados, lo cual representa ahorro en tiempo, y labor humana. Si pensamos en un sistema robusto, este es capaz de reaccionar ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas y adaptarse para funcionar de manera óptima.

2. ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Para el desarrollo del trabajo fue necesario un antecedente que permita analizar problemas de control, algoritmos, entre otros conceptos básicos de ingeniería. Este conocimiento fue obtenido a través de los maestros de la universidad en las materias obligatorias y optativas que fueron cursadas, así como de libros [9][10] y trabajos de tesis relevantes.

2.1. Definiciones

Los siguientes conceptos, vistos en [10], son definiciones básicas que ayudan a analizar sistemas de control:

Sistema

Es un conjunto de elementos que trabajan en unión y realizan una tarea específica. Estos no se restringen forzosamente a fenómenos físicos. Esto puede utilizarse para describir fenómenos abstractos y dinámicos. Debido a lo anterior, el término sistema se debe de tomar en cuenta con un sentido amplio que englobe sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Planta

Se le denomina planta al sistema real físico en el que se implementa un controlador. Este puede ser un sistema electrónico, eléctrico o mecánico. Cualquier parte de algún equipo, o elementos que cumplan alguna función. Para este trabajo la planta será un sistema mecánico.

Control en lazo cerrado

La acción de control depende de la salida del sistema, la cual se retroalimenta y se modifica para poder llegar al resultado deseado.

Control en lazo abierto

La acción de control es independiente de la salida del sistema. No utiliza retroalimentación para definir si su salida llega a su valor deseado.

Variable controlada

Esta variable puede definirse como la señal que es controlada y medida. La señal de control o variable manipulada es la condición o la cantidad que el algoritmo de control ajusta para cambiar el valor de la variable controlada. Regularmente, la variable controlada es la señal de salida. Al usar un controlador se busca obtener una medición de la variable controlada y una variable que corrige las desviaciones de medición con respecto al valor esperado.

Perturbaciones

La perturbación es una señal que normalmente afecta negativamente la salida de un sistema. Cuando ésta aparece dentro del sistema se denomina interna, y cuando aparece fuera del sistema, es perturbación externa.

Chattering

El chattering es la principal desventaja del control por modos deslizantes. Las variables deslizantes convergen en tiempo finito, pero las variables de estado solo convergen asintóticamente, lo cual crea una oscilación no deseada en la señal sobre la variable controlada.

2.1.1 Modelado en el espacio de estados

El modelo para un sistema de n estados es representado con la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(x, u, t) \quad (1)$$

donde x es un vector de la forma $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$.

Cuando el sistema varía en el tiempo, se le denomina sistema no autónomo ya que t está explícita en la ecuación.

En un sistema no lineal y variante en el tiempo se tienen dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) - \text{Ecuación de estado} \\ y(t) &= g(x, u, t) - \text{Ecuación de salida} \end{aligned} \quad (2)$$

Si se alinean las expresiones de estado y de salida alrededor del estado de operación, se llega a las expresiones de estado y salida linealizadas siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde la matriz de estado se conoce como la variable A , y la matriz de entrada, B , la matriz de estado se conoce como C mientras que la matriz de transmisión directa se denomina D .

2.2 Análisis de estabilidad

Los siguientes conceptos son importantes para comprender la estabilidad obtenida en los controladores de este trabajo:

2.2.1. Conceptos de estabilidad

Estabilidad

Con motivo de definir el concepto de estabilidad, se define $x = 0 \in R^n$ como punto de equilibrio, establecido en el sentido de Lyapunov si para cada valor $\epsilon > 0$ se puede encontrar un valor $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad t \geq 0 \quad (4)$$

donde $x(t)$ es la solución de (5), la cual empieza en su condición inicial $x(0)$ en t_0 . Esto significa que el origen tiene estabilidad si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas. Se puede ver gráficamente en la Figura 1.

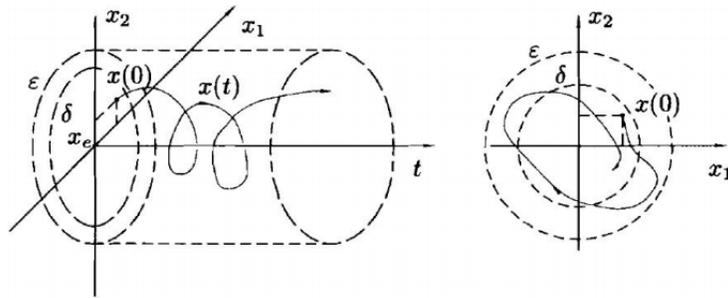


Figura 1: Estabilidad

Estabilidad asintótica

Es dicho que el origen $x = (0) \in \mathbb{R}^n$ tiene equilibrio asintóticamente estable, gráficamente plasmado en la Figura 2 si este logra lo siguiente:

- El origen demuestra estabilidad.
- El origen es atractivo, lo cual implica la existencia de un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta' \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (5)$$

La estabilidad asintótica resulta ser de forma global cuando:

- El origen demuestra estabilidad.
- El origen es atractivo globalmente, osea:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

su punto de equilibrio es asintóticamente estable de manera global si es igual a uno con condiciones asintóticas para todas sus condiciones iniciales. Gráficamente se expresa en la Figura 2.

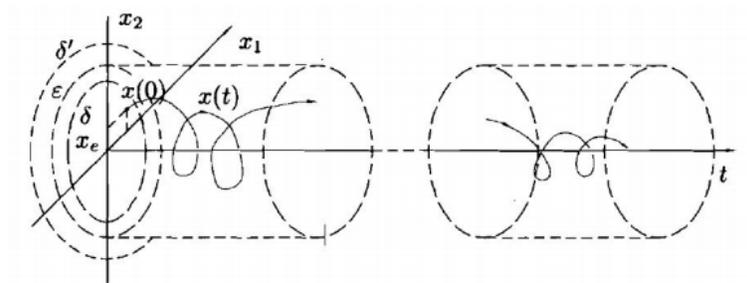


Figura 2: Estabilidad asintótica

2.3. Estabilidad de Lyapunov

Los sistemas lineales y no lineales pueden ser estudiados con fundamentos de estabilidad de Lyapunov, estos son definidos por medio de expresiones

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) \in R^n \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

Esta teoría dice que cualquier condición inicial $x(0) \in R^n$ que se encuentre como parte del atractor, si el sistema tiene un equilibrio asintótico constantemente, la energía guardada del modelo en el campo de atracción decrece a medida que evoluciona el tiempo hasta que se alcanza el número mas pequeño en su punto de equilibrio.

3. CONTROL ROBUSTO

El comportamiento robusto en un controlador se encuentra cuando el algoritmo es capaz de retroalimentarse y ajustar su funcionamiento para poder tener un desempeño deseado a pesar de perturbaciones externas. Es de gran interés para la literatura del control buscar crear algoritmos de control robusto, ya que estos aseguran estabilidad en el sistema [6].

3.1. Formulación de Control Robusto

Al crear un algoritmo de control, se define un modelo matemático que representa a un sistema de un sistema real. Durante el modelado de dinámica de un sistema, siempre existirá varianza entre el modelo matemático y el sistema real. Estas diferencias se deben a diferencias en los parámetros de la planta o parámetros no conocidos, este tipo de diferencias se conocen como incertidumbres paramétricas. Factores externos, por ejemplo; dinámicas no modeladas, condiciones ambientales, estática o señales no deseadas pueden también ser factores que afectan al sistema real. El control robusto consiste en diseñar una ley de control que permita llegar a los resultados deseados del sistema en lazo cerrado a pesar de las perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

Los sistemas de control robusto además de cumplir con estabilidad nominal, también tienen las siguientes propiedades [10]:

Estabilidad Robusta

Se mantiene estabilidad en el sistema a pesar de la presencia de perturbaciones o incertidumbres paramétricas.

Comportamiento robusto

El algoritmo de control es capaz de cumplir su función a pesar de la existencia de perturbaciones externas en la planta como de incertidumbre paramétrica en el modelo.

3.2. Control por modos deslizantes (CMD)

Los controladores por modos deslizantes utilizan conmutaciones de frecuencias altas (teóricamente infinitas) para restringir la dinámica del sistema a una de orden reducido, que representa el comportamiento deseado. La dinámica de orden reducido es el resultado de la restricción del libre movimiento natural del sistema a un conjunto, la dinámica en el conjunto generalmente esta diseñada para ser estable. Por lo tanto, el movimiento restringido en el conjunto, cuando existe, puede verse como un movimiento deslizante a lo largo de una hiper-superficie deseada hacia el origen, es por eso que esta fase de movimiento se llama movimiento deslizante.

Ventajas principales de control por modos deslizantes:

- Compensaciones teóricamente exactas con respecto a las incertidumbres establecidas.
- Dinámica de orden reducida cuando se ha alcanzado la superficie deslizante.
- Convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante.

Desventajas del control por modos deslizantes:

- Chattering: Oscilaciones sobre la recta a seguir, las variables deslizantes convergen en tiempo finito, pero las variables de estado solo convergen asintóticamente (cerca de la trayectoria a seguir).
- Esto es principalmente causado por dinámicas cascada no modeladas que incrementan el grado relativo del sistema y agregan perturbación al modo deslizante ideal del sistema.

3.2.1. Principios de CMD de primer orden

Es considerado un sistema no lineal SISO por sus siglas en inglés (Single Input – Single Output)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u \\ y &= h(x, t)\end{aligned}\tag{8}$$

cuando y y u resultan de salida y entrada respectivamente, y $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado. El proceso de CMD se divide en dos fases:

Primero se define una expresión de los estados del sistema, esta es la superficie deslizante σ , que se adapte a la meta de control donde $\sigma : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$. Normalmente se utilizan variables de estado, o variables de error con un fin de control de seguimiento de trayectoria, con una cierta cantidad de números para sus derivadas, $\sigma = \sigma(x, \dot{x}, \dots, x^k)$. La expresión σ requiere ser definida de tal forma que se acerque a cero, $\sigma = 0$, para llevar a los estados dentro de la superficie deslizante. Su representación comúnmente usada consta de una combinación lineal de la forma $\sigma = \dot{x} + c_0x$, tal que c_0 es una constante positiva.

Su segunda parte requiere crear una ley de control que mueva las trayectorias del modelo a la superficie deslizante, dicho de otra manera, que el control tenga la capacidad de mover el valor deslizante a cero en tiempo finito. Con este fin, el control $u(x)$ es una expresión discontinua que cuando llega a la superficie deslizante conmuta entre dos valores, llevando las trayectorias del sistema a la superficie $\sigma = 0$, invirtiendo su signo en expresión del valor de $\sigma(x)$

$$u \begin{cases} u^+(x) & \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \sigma(x) < 0. \end{cases}\tag{9}$$

Con dichas restricciones, el modelo controlado será capaz expresarse por medio de dos subsistemas continuos, que dependen del signo de $\sigma(x)$

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x) & \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x) & \sigma(x) < 0. \end{cases}\tag{10}$$

Dichas condiciones son suficientes y críticas para asegurar la convergencia y la estabilidad cerca de la superficie de deslizamiento. La atracción local en la superficie de deslizamiento puede ser representado por condiciones de accesibilidad que pueden ser $\sigma = 0$, como se puede ver en la Figura 3, llegando a las expresiones:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x}(f+gu) < 0 \quad y \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x}(f+gu) > 0$$

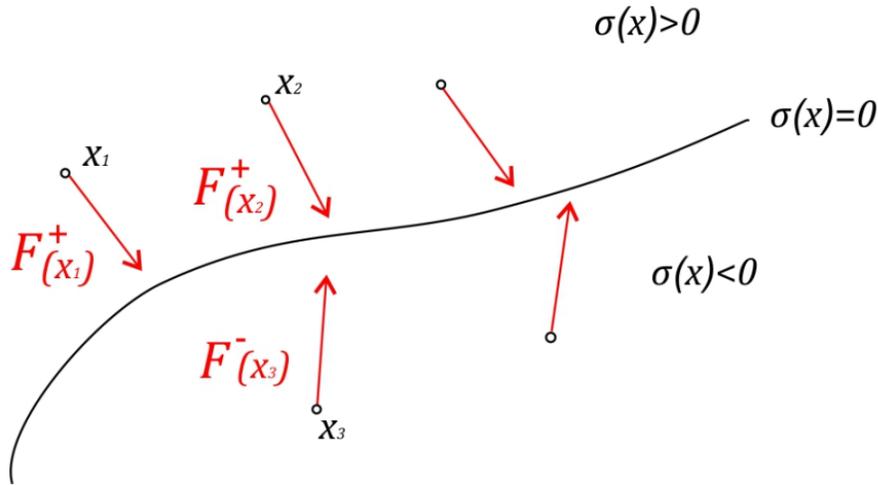


Figura 3: Condición n para existencia de régimen deslizante en $\sigma = 0$.

Dichas especificaciones son suficientes y vitales para la convergencia a la superficie deslizante y la estancia en una vecindad de la misma. La atracción local de la superficie deslizante se puede expresar por la condición de alcanzabilidad, la cual es posible expresar de forma más clara con:

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \tag{11}$$

3.2.2 Chattering

Durante experimentación, un algoritmo de control no llega a los resultados planteados teóricamente, entonces no se puede tener un modo deslizante ideal. Existe una falta de continuidad a la hora de que se retroalimenta el sistema de control, lo cual se debe a pequeños errores en la operación de los actuadores, lo cual provoca retrasos en el tiempo. Estos pequeños retrasos se trasladan a oscilaciones sobre la superficie deslizante, y puede observarse en la siguiente figura (Figura 4).

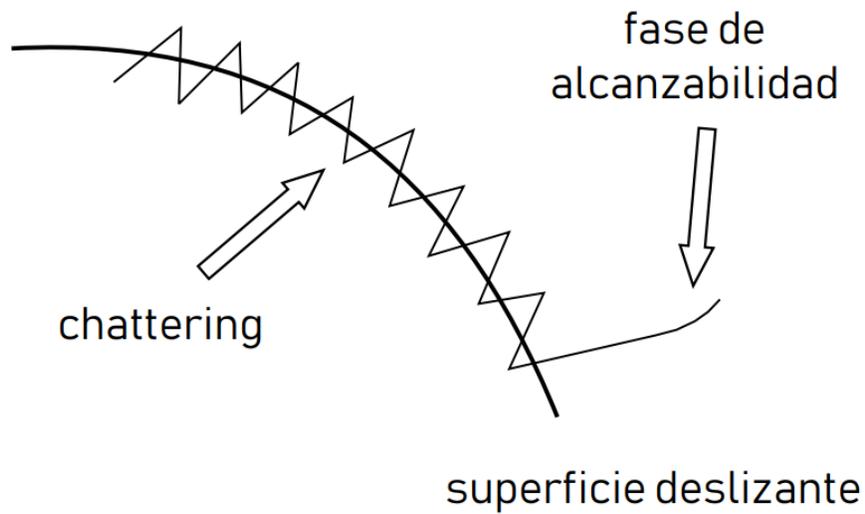


Figura 4: Fenómeno chattering.

El fenómeno presentado representa una desventaja, hasta afecta a la señal de salida del proceso, es capaz de provocar altas frecuencias no modeladas que disminuyen el rendimiento del sistema y pueden hacer que sea inestable, por este motivo se han creado diferentes maneras para reducir o borrar por completo el fenómeno. De dichos métodos mencionados, uno de estos consta de un esquema de regulación en una vecindad en la superficie deslizante, en el que se cambia la expresión signo por una acercación continua con una alta ganancia en el límite, como ejemplo podemos ver las funciones sigmoid o la expresión de saturación como se muestra en la figura 5. A pesar de que el chattering puede ser eliminado por completo, la robustez del control puede ser afectada gracias a esto. Existen múltiples planteamientos de métodos para reducir o eliminar por completo el chattering, como las siguientes [20] y [21].

3.4 Análisis matemático

Cuando se busca crear un algoritmo de control por modos deslizantes, el primer paso a realizar siempre será definir la planta, posteriormente se hace un proceso básico de determinación de la superficie de deslizamiento, seguido de leyes de control que incluyen las trayectorias del sistema sobre la superficie de deslizamiento y las llevan al punto de partida, como se describe en la sección 2.2. Para ilustrar este proceso, se considerará una planta de dos integradores (para ilustrar el método, en este caso se ignorará el término de perturbación):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u(t)\end{aligned}\tag{12}$$

donde x es el vector de estado con la forma $x = [x_1, x_2]^T$, $u(t) \in \Re$ es la ley de control que retroalimenta. De acuerdo a la primera etapa, se plantea una superficie deslizante que mueva las trayectorias del sistema al origen asintóticamente:

$$\sigma = cx_1 + x_2 \quad (13)$$

donde c es una constante de valor positivo. La superficie deslizante esta en $\sigma = 0$ debido a esto la expresión se plantea como $cx_1 + x_2 = 0$, teniendo $x_2 = -cx_1$, esto resulta en una ecuación diferencial homogénea $cx_1 + \dot{x}_1 = 0$ cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0)e^{-ct} \\ \dot{x}_1 &= -cx_2(0)e^{-ct}. \end{aligned} \quad (14)$$

Con el fin de realizar la parte dos y llegar a una acción de control que contenga las trayectorias en el origen, se establece la condición de alcanzabilidad $\dot{\sigma} < 0$

$$\dot{\sigma} = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = cx_2 + u. \quad (15)$$

Haciendo sustitucion $\dot{\sigma}$ de la expresión en la condición de alcanzabilidad, concluyendo lo siguiente:

$$\sigma(cx_2 + u) < 0 \quad (16)$$

y se selecciona una acción de control que mantenga valida la desigualdad:

$$u = -cx_2 - k\text{sign}(\sigma) \quad (17)$$

donde $k > 0$. Sustituyendo en la expresión se confirma que la superficie

deslizante que se esta utilizando mueve las trayectorias del sistema al origen y las contiene en $\sigma = 0$

$$\dot{\sigma} = -k \mid \sigma \mid < 0 \quad (18)$$

El sistema en lazo cerrado (27) tiene la capacidad de ser controlado utilizando la acción de control (32) con la superficie deslizante vista en (28).

Cuando el sistema incluye una perturbación $w(t)$, que no se conoce pero se sabe que esta acotada en su parte superior por la constante $M > 0$ que cumple la condición (34) para cualquier $t \geq 0$

$$\sup_{t \geq 0} |\omega(t)| \leq M. \quad (19)$$

La ley de alcanzabilidad está dada por:

$$\dot{\sigma} = -k|\sigma| + \omega(t)\sigma \leq -(k - M)|\sigma| < 0. \quad (20)$$

Lo anterior implica que mientras $k > M$ se cumpla, todas las trayectorias convergen hacia la superficie deslizante.

Gracias a que las trayectorias terminan en la superficie deslizante en tiempo finito, puede probarse estabilidad asintótica del punto de equilibrio en lazo cerrado y puede ser calculada de esta manera: se propone una expresión de Lyapunov

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (21)$$

de donde se obtiene $\sigma = 2\sqrt{V(\sigma)}$. La estabilidad asintótica a través del punto de equilibrio $\sigma = 0$ puede ser comprobada satisfaciendo lo siguiente:

1. $V < 0$ para $\sigma \neq 0$
 2. $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$
- (22)

La derivada de V es calculada como:

$$\dot{V}(\sigma) = \dot{\sigma}\sigma \quad (23)$$

sustituyendo (33) llegamos a lo siguiente

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2k\sqrt{V(\sigma)} < 0 \quad (24)$$

donde es posible ver que la derivada temporal es definida negativa. Separando las variables e integrando los dos lados de la expresión en el parámetro de tiempo de 0 a t

$$-\frac{1}{2k} \int_{V(t_0)}^{V(t_r)} \frac{dV}{\sqrt{V(\sigma)}} \leq \int_{t_0}^{t_r} dt \quad (25)$$

resulta con un tiempo definido t_r donde las trayectorias llegan a la superficie deslizante:

$$t_r \leq t_0 + \frac{|\sqrt{V(t_0)}|}{k}. \quad (26)$$

Con fines ilustrativos, se hace la simulación para demostrar los resultados de la aplicación del CMD de primer orden (32) en un modelo de doble integrador (28). Teniendo condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -2$, ganancia $k = 2$ y el parámetro $c = 1$.

Lo obtenido en la simulación puede observarse en las Figuras 5 - 9.

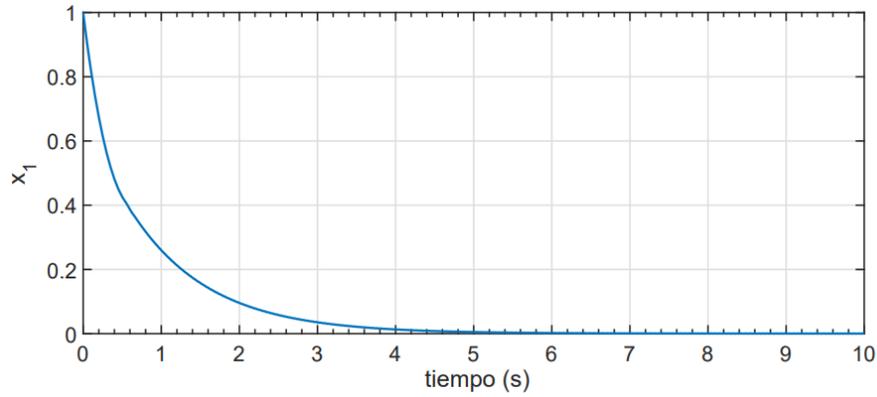


Figura 5: Convergencia asintótica de la posición

En las Figuras 5 y 6 se demuestra la convergencia asintótica de las variables de estado (posición y velocidad) hacia cero. En el eje de las y se tienen las respectivas variables mientras que en el eje de las x se tiene el tiempo medido en segundos [s].

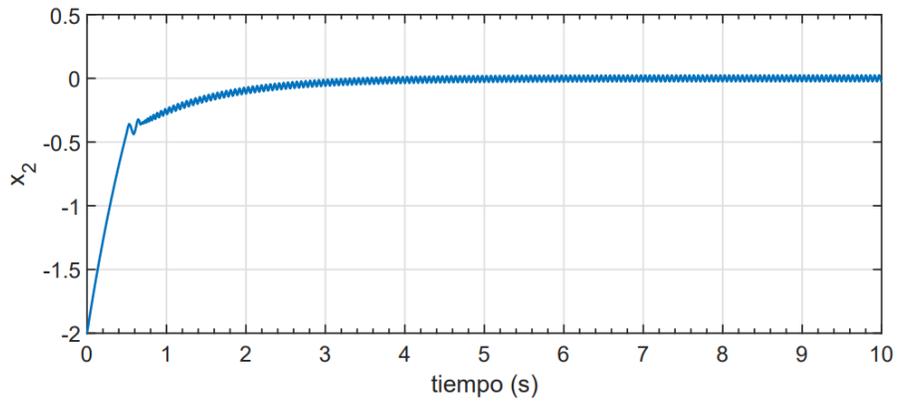


Figura 6: Convergencia asintótica de la velocidad

En la Figura 6 se puede observar la convergencia asintótica de la velocidad. Es posible apreciar la presencia del fenómeno chattering, ya que la trayectoria oscila sobre cero.

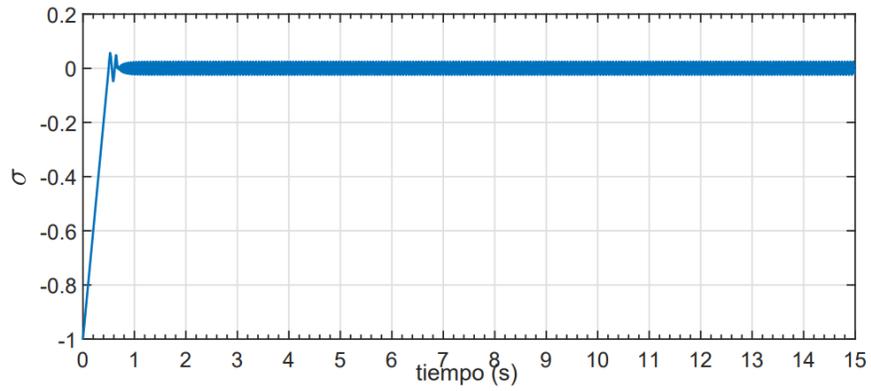


Figura 7: Variable deslizante

La Figura 7 ilustra la convergencia en tiempo finito de la variable a la superficie deslizante, igual que una pequeña franja con alta frecuencia.

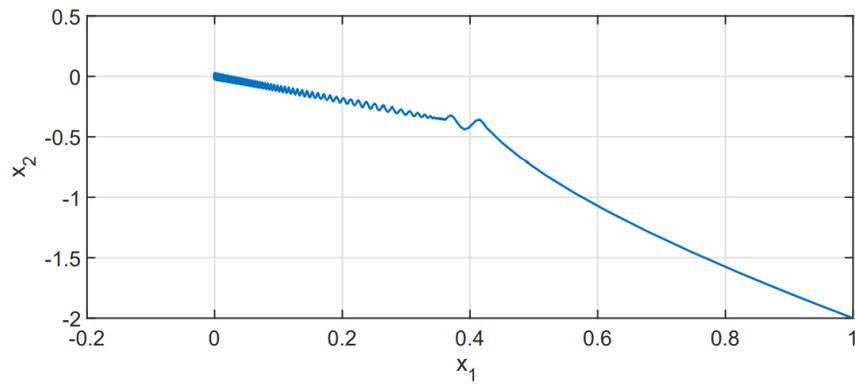


Figura 8: Diagrama de fase

La Figura 8 muestra la fase de alcance (cuando la trayectoria del sistema se dirige hacia la superficie de deslizamiento) y la fase de deslizamiento (cuando la trayectoria se mueve al punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado).

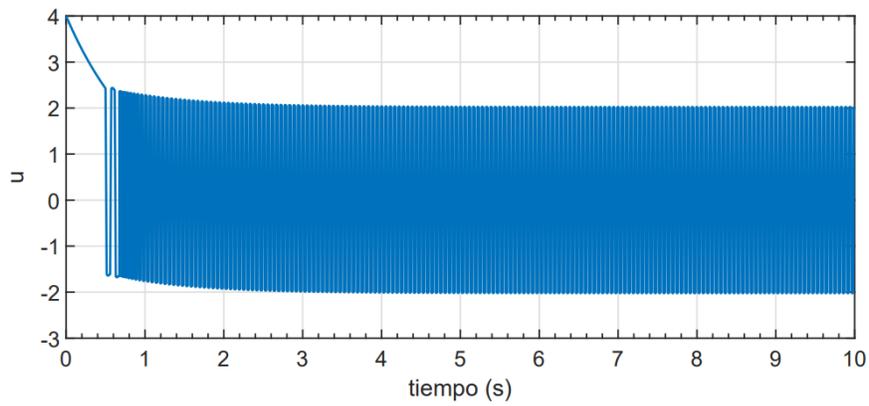


Figura 9: Señal de control

Finalmente, la Figura 9 muestra la señal de control que representa la señal enviada al actuador del sistema, donde también se ven las bandas de alta frecuencia. En el eje de las y se tiene a la señal de control u mientras que en el eje de las x se tiene el tiempo, el cual se mide en segundos [s.]

4.DISEÑO DE CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES

Como fue definido previamente, los controladores por modos deslizantes utilizan conmutaciones de frecuencias altas (teóricamente infinitas) para restringir la dinámica del sistema a una de orden reducido, que representa el comportamiento deseado. Este segmento desarrollará un controlador por modos deslizantes el cual será probado con simulaciones en MATLAB. Teóricamente, este debe de lograr convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante, al igual que compensaciones exactas con respecto a incertidumbres paramétricas y una dinámica de orden reducida cuando se alcanza la superficie deslizante.

En 1993 S. T. Venkataraman y S. Gulati se dieron la tarea de desarrollar este concepto, con su significado original en inglés "Terminal Sliding Mode", al cual haremos referencia a continuación TSM, en donde usaban el concepto de "terminales atractores" para mover las trayectorias al origen en tiempo finito. Con ésta técnica encontramos un mejor control de las trayectorias, debido a que podemos establecer el tiempo en que estas llegan a la superficie deslizante y después al punto de equilibrio. Entre algunas de sus propiedades, el control TSM tiene la capacidad de hacer converger el estado al punto de equilibrio en un tiempo finito y es insensible a la incertidumbre del sistema y las perturbaciones externas. Con éstas características, el control TSM es muy útil para manipuladores de robots de alta precisión. Sin embargo, el tipo o método de control tiene la principal desventaja de tener probabilidad de singularidad en su algoritmo. Para solucionar este problema se creó un nuevo algoritmo denominado "Non-singular Terminal Sliding Mode" (NTSM), donde al cambiar el algoritmo e implementar algunos cambios a las condiciones, se logra la convergencia deseada sin perder singularidad.

4.1 Diseño del controlador

La finalidad será analizar un controlador no continuo inspirado en control por sliding modes de primer orden y control por terminal sliding mode (TSM) para solucionar el objetivo de control de seguimiento de trayectoria para el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u + w(t) \end{aligned} \quad (27)$$

Donde se considera que x es el vector de estado de la forma $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u \in \mathfrak{R}^2$ es la señal de entrada, la función no lineal $f(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}$ es el sistema nominal, $g(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}$ es una función ya conocida y $w(t)$ es un valor asignado a las perturbaciones externas. El término $w(t)$ no es conocido, aunque, su límite superior se encuentra limitado por una constante conocida $M > 0$ que cumpla la ecuación (43) para cualquier t .

$$\sup_t |w(t)| \leq M \quad (28)$$

Dado que el lado derecho de la ecuación (42) no es continuo, la solución de ésta ecuación se define en el sentido de Filippov. El lado derecho continuo viene dado por la función de signo definida en la ecuación (44).

$$\text{sign}(x_2) \begin{cases} 1 & x_2 > 0 \\ [-1, 1] & x_2 = 0 \\ -1 & x_2 < 0. \end{cases} \quad (29)$$

El objetivo de control es diseñar una ley de control u tal que en el sistema en lazo cerrado (42) se cumpla con la ecuación (45), dicho controlador está diseñado para resolver el problema de seguimiento de trayectoria donde la trayectoria deseada es la variable x_d .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x_d(t)| = 0. \quad (30)$$

Para esto se plantea un controlador con una composición de variables inspirado en controladores de estado deslizante de primer orden, definiendo las siguientes variables de error

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_d \\ e_2 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_d = x_2 - \dot{x}_d(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Se vuelve a escribir el sistema (42) de acuerdo a la ecuación (46) tomando en cuenta a la variable de error como un vector $e = [e_1, e_2]^T$ en el nuevo sistema en la ecuación (47).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f(e) + g(e)u + w(e, t) - \ddot{x}_d. \end{aligned} \quad (32)$$

Para éste sistema, se plantea un control con términos de compensación

$$u = -g(e)^{-1}[\tilde{f}(e) - \tau - \ddot{x}_d] \quad (33)$$

donde $g(e)$ no puede ser singular para que sea posible conseguir su inversa, $\tilde{f}(e) = f(e) + \Delta f(e)$ es un término de compensación aproximado para la función no lineal $f(e)$, $\Delta f(e)$ representa una incertidumbre paramétrica, el error entre $f(e)$ y $\tilde{f}(e)$. El término $\Delta f(e)$ es considerado acotado en su límite superior por la constante N .

Posterior a sustituir los términos de compensación de (48) en el sistema (47) se obtiene el sistema en lazo cerrado, se puede observar en la ecuación (49).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\Delta f(e) + \tau + w(e, t). \end{aligned} \quad (34)$$

En el control de estado deslizante, se propone una superficie de ruptura, que mueve la trayectoria del sistema asintóticamente a cero. En cambio, se utiliza el método TSM, donde la trayectoria se acerca al origen en un tiempo finito. El aumento de la superficie de deslizamiento depende de e_2 y se puede observar en la expresión (50).

$$s \begin{cases} e_2 - |e_1|^\gamma & e_1 < 0 \\ e_2 + |e_1|^\gamma & e_1 \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

La expresión (50) puede ser sintetizada e ilustrada como una sola expresión de la siguiente manera

$$s = e_2 + |e_1|^\gamma \text{sign}(e_1) \quad (36)$$

donde $0 < \gamma < 1$.

La Figura 10 muestra la superficie de deslizamiento propuesta (rojo) y la superficie de deslizamiento CMD convencional (azul). CMD dirige las trayectorias asintóticamente al origen, mientras que en el controlador propuesto llegan en tiempo finito.

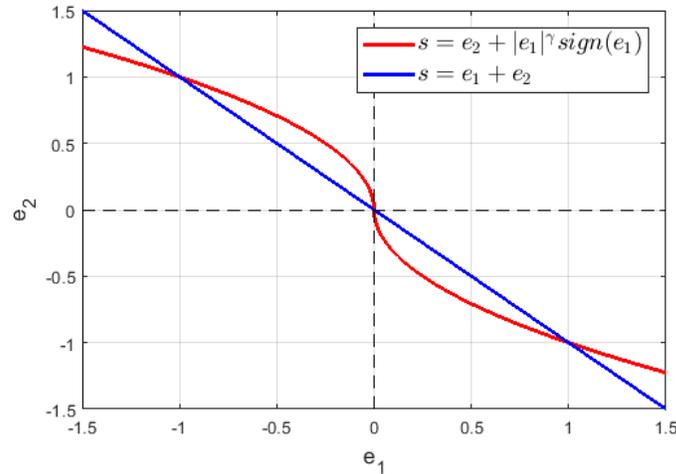


Figura 10. Superficie deslizante propuesta (línea roja) y superficie deslizante convencional (línea azul).

A continuación analizaremos como es que las trayectorias (e_1, e_2) convergen hacia la superficie deslizando desde cualquier condición inicial, para ello buscaremos satisfacer la ley de alcanzabilidad $s\dot{s} < 0$ necesaria para que las trayectorias converjan hacia la superficie deslizando y no escapen de ella, procederemos a realizar el análisis en dos casos: $e_1 \geq 0$ y $e_1 < 0$, después sintetizaremos ambos casos en una sola expresión

- si $e_1 \geq 0$:
derivando la superficie deslizando s tenemos,

$$\dot{s} = \tau + w(e, t) - \Delta f(e) - \ddot{x}_d + \gamma|e_1|^{\gamma-1} \text{sign}(e_1)e_2 \quad (37)$$

a partir de la ecuación anterior podemos proponer τ de tal forma que se cumpla la ley de alcanzabilidad $s\dot{s} < 0$ como

$$\tau = \ddot{x}_d - \gamma \text{sign}(e_1)|e_1|^{\gamma-1}e_2 - \beta \text{sign}(s) \quad (38)$$

- si $e_1 < 0$:
realizamos el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo

$$\dot{s} = \tau + w(e, t) - \Delta f(e)\ddot{x}_d - \gamma|e_1|^{\gamma-1} \text{sign}(e_1)e_2 \quad (39)$$

por lo que τ se diseña como

$$\tau = \ddot{x}_d + \gamma \text{sign}(e_1)|e_1|^{\gamma-1}e_2 - \beta \text{sign}(s). \quad (40)$$

Los controladores presentados en los dos casos anteriores se pueden sintetizar en una sola expresión de la siguiente forma

$$\tau = \ddot{x}_d + \gamma \text{sign}(e_1)|e_1|^{\gamma-1}e_2 - \beta \text{sign}(s), \quad (41)$$

por otra parte la ley de alcanzabilidad queda acotada por la expresión

$$s\dot{s} \leq -(\beta - (M + N))|s| < 0 \quad \forall t \geq t_r \quad (42)$$

dicha expresión es definida negativa mientras $\beta > (M + N)$, es decir la amplitud de la ganancia discontinua necesita ser mayor a la suma de las cotas superiores de la perturbación externa y de la incertidumbre paramétrica para que las trayectorias (e_1, e_2) converjan hacia la superficie deslizante.

Ahora analizaremos el tiempo que tardan en llegar e_1 y e_2 a cero, primeramente obtendremos el tiempo que llamaremos t_r , el cual es el tiempo que tardan en llegar las trayectorias (e_1, e_2) hasta la superficie deslizante desde cualquier condición inicial, una vez obtenido t_r nos enfocaremos en calcular \bar{t}_r que es el tiempo que tardan las trayectorias en llegar a cero. Para dicho propósito utilizaremos la siguiente función cuadrática

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad (43)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} \leq -(\beta - (M + N))|s| \quad (44)$$

la ecuación (56) la podemos representar como

$$\dot{V}(s) = -\sqrt{2}(\beta - (M + N))V(s)^{1/2} \quad (45)$$

para obtener t_r procedemos a integrar ambos lados de la desigualdad (56)

$$\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{dV}{-\sqrt{2}(\beta - (M + N))V(s)^{1/2}} \geq \int_{t(0)}^{t_r} dt \quad (46)$$

obteniendo que

$$V(t) = 0 \text{ para } t_r \leq \frac{\sqrt{2}V(0)^{1/2}}{\beta - (M + N)} \quad (47)$$

esto es considerando que $t(0) = 0$, el tiempo de convergencia t_r obtenido de (59) lo podemos reescribir como

$$V(t) = 0 \text{ para } t_r \leq \frac{|s(0)|}{\beta - (M + N)}. \quad (48)$$

Una vez que las trayectorias (e_1, e_2) están sobre la superficie deslizante, la dinámica de orden reducido obtenida a partir de $s = 0$ donde s está dada en (36), queda de la siguiente manera

$$\dot{e}_1 = -|e_1|^\gamma \text{sign}(e_1), \quad e_1(t_r) = e_{1r} \quad (49)$$

el punto de equilibrio de (61) es el origen; hay que tener en cuenta que la condición inicial de e_1 es evaluada en t_r , que es cuando las trayectorias tocan la superficie deslizante. Se puede probar que la trayectoria de (61) se van al origen en tiempo finito utilizando la siguiente función cuadrática

$$V(e_1) = |e_1| > 0 \quad (50)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1) &= -|e_1|^\gamma < 0 \\ \dot{V}(e_1) &= -V(e_1)^\gamma \end{aligned} \quad (51)$$

a partir de (63) se puede garantizar estabilidad del punto de equilibrio que es el origen en tiempo finito, ahora obtendremos esa expresión de tiempo que llamaremos \bar{t}_r , lo podemos hacer de integrar directamente (61) aunque resulta más sencillo hacerlo al integrar (63),

$$\int_{V(t_r)}^{V(t)} \frac{dV}{-V^\gamma} = \int_{t_r}^{\bar{t}_r} dt \quad (52)$$

obteniendo que

$$V(t) = 0 \text{ para } \bar{t}_r = \frac{|e_1(t_r)|^{1-\gamma}}{1-\gamma} + t_r. \quad (53)$$

por lo que sustituyendo en (53) el tiempo t_r de (60) tenemos el tiempo en que e_1 y e_2 se van a cero

$$\bar{t}_r \leq \frac{|e_1(t_r)|^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{|s(0)|}{\beta - (M + N)}. \quad (54)$$

4.2. Simulación numérica

Para ilustrar los resultados obtenidos en ésta sección vamos a aplicar el controlador (33) en un sistema doble integrador, cuyas condiciones iniciales están dadas por $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 1$, el sistema del doble integrador es dinámico por lo que las unidades son adimensionales, la trayectoria deseada esta dada por $x_d = \sin(t)$ y su derivada $\dot{x}_d = \cos(t)$, agregaremos una perturbación externa $w(t) = 0,5 \sin(t)$ la cual es de amplitud considerable con respecto a la amplitud de x_d . Las ganancias del controlador están dadas por $\beta = 1$ y $\gamma = 0,5$. Los resultados de simulación son los siguientes.

En la Figura 11 podemos observar el estado x_1 convergiendo a la trayectoria deseada x_d , aunque no se puede observar a simple vista, la convergencia es en tiempo finito. En la Figura 12 tenemos la derivada de la trayectoria deseada \dot{x}_d y el estado x_2 del sistema en lazo cerrado. En la Figura 13 vemos el plano fase donde las trayectorias (e_1, e_2) convergen a la superficie deslizante s . En la Figura 14 se muestra el error e_1 que queremos llevar a cero en un tiempo finito \bar{t}_r , este tiempo lo podemos calcular con los datos obtenidos de la Figura 16, donde vemos que la superficie deslizante s tiene como condición inicial $s(0) = 1$, y se va a cero aproximadamente en un tiempo de 1.43 segundos llamado t_r por lo que $e_1(t_r)$ es aproximadamente 0.387, obsérvese la Figura 14, estos datos los podemos sustituir en la ecuación (54) para obtener el tiempo en que el error e_1 se va a cero arrojándonos que $\bar{t}_f \leq 3.2442$ segundos, lo cual es evidente observando la Figura 14. Finalmente en la Figura 15 se muestra la convergencia en tiempo finito del error e_2 y en la Figura 17 se muestra la señal de control discontinua que se utilizó para llevar los errores a cero en un tiempo finito.

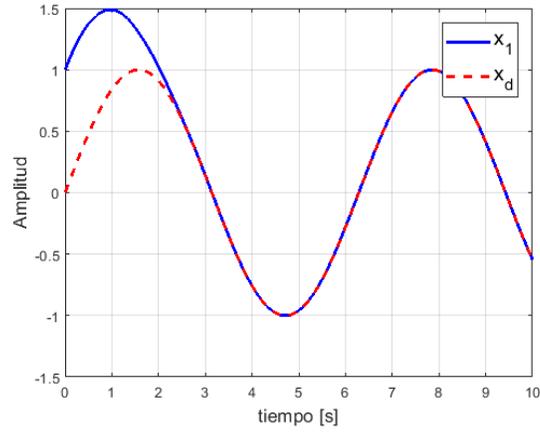


Figura 11. Seguimiento de trayectoria: la trayectoria deseada es \dot{x}_d (línea punteada roja) y la trayectoria del sistema x_1 (línea azul), (simulación).

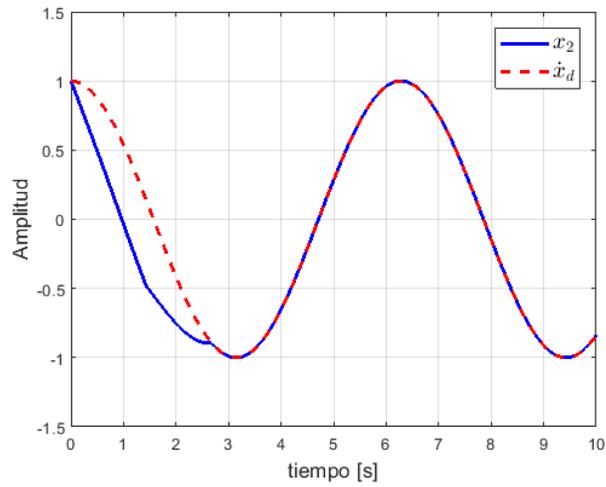


Figura 12. Derivada de la trayectoria deseada \dot{x}_d (línea punteada roja) y trayectoria del sistema x_2 (línea azul), (simulación).

En la Figura 11 se puede observar como la trayectoria deseada es alcanzada por x_1 para cumplir el seguimiento de trayectoria después de aproximadamente 2 segundos. Mientras que en la figura 12 tarda cerca de 3 segundos para alcanzar la trayectoria deseada. Estos tiempos de convergencia pueden ser reducidos con diferentes estrategias de control desde su planteamiento, y pueden ser tema de interés para futuros trabajos que busque aún más precisión en su funcionamiento.

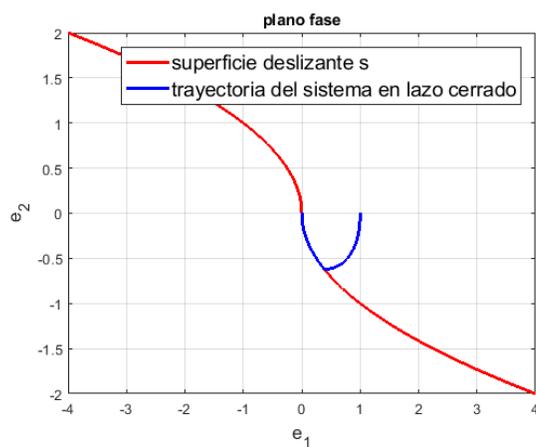


Figura 13. Superficie deslizante con convergencia en tiempo finito (línea roja) y las trayectorias del sistema (línea azul), (simulación).

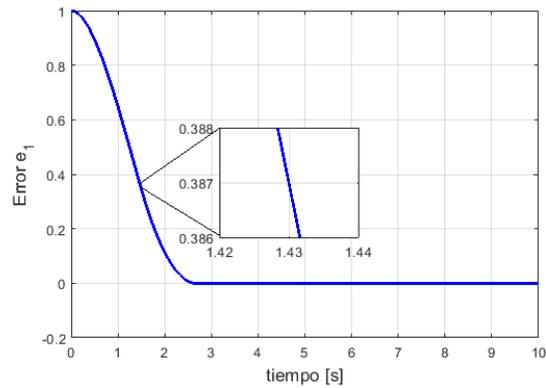


Figura 14. Error de seguimiento e_1 , (simulación).

En la Figura 14 se puede observar como después de 2 a 3 segundos, el error e_1 llega a cero. El eje de las y representa el error mientras que el eje de las x representa el tiempo medido en segundos [s].

Siempre se busca llevar el error a cero para tener el mejor desempeño posible, en este caso tenemos una simulación, la cual nunca va a ser igual a un experimento físico. En un experimento real los parámetros pueden ser definidos, pero debido a perturbaciones externas o incertidumbres paramétricas, el tiempo que dura el error en llegar a cero puede ser mayor.

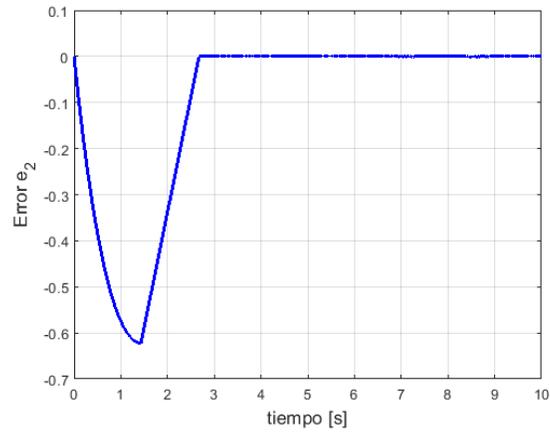


Figura 15. Derivada del error de seguimiento e_2 , (simulación).

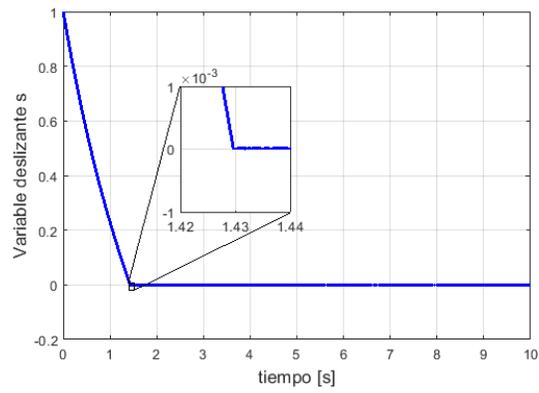


Figura 16. Variable deslizante s , (simulación).

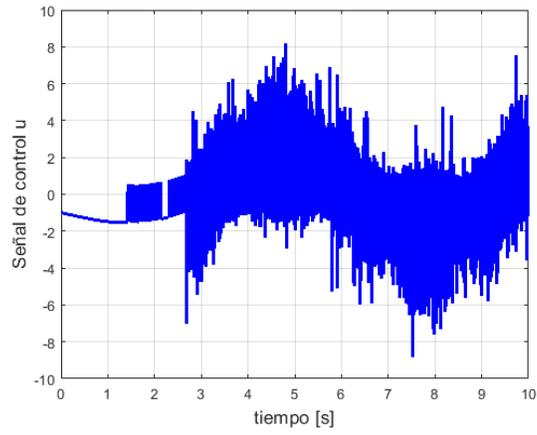


Figura 17. Señal de control u , (simulación).

En la Figura 17 se puede observar visualmente la alta frecuencia de la señal, que comienza aproximadamente al acercarse a los 2 segundos. En el eje de las y tenemos la señal de control mientras que en el eje de las x tenemos el tiempo medido en segundos [s].

5. CONTROL PROPORCIONAL PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CON ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE LA PLANTA Y PERTURBACIONES EXTERNAS

Para desarrollar el controlador debido a la facilidad de diseño, proponemos como planta un sistema masa-resorte-amortiguador (Figura 18)

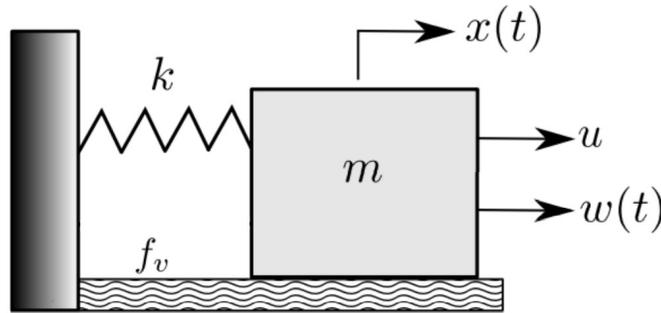


Figura 18. Modelo Masa Resorte Amortiguador

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (55)$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1 - f_v x_2 + u + w(t)$$

donde x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$ es la posición y velocidad de la masa, respectivamente. Los parámetros de la planta son, $k \in \mathbb{R}$ es la rigidez del resorte, $f_v \in \mathbb{R}$ es la fricción viscosa y $w(t) \in \mathbb{R}$ son las perturbaciones externas, cabe recalcar que todos estos parámetros se consideran desconocidos. Para la planta (55) se diseña el siguiente controlador

$$u = -k_p e_1 + \hat{k}x_d + \hat{f}_v \dot{x}_d + \ddot{x}_d - \hat{w} \quad (56)$$

donde $k_p \in \mathbb{R}$ se conoce como ganancia proporcional, el error de posición es definido como $e_1 = x_1 - x_d$ el cual deseamos que se vaya a cero a conforme el tiempo se acerque a infinito. En este caso como estamos abordando el problema de seguimiento de trayectoria, la trayectoria deseada x_d es una función

por lo menos dos veces diferenciable. Los parámetros \hat{k} , \hat{f}_v , y \hat{w} son estimaciones de la rigidez del resorte, fricción viscosa y perturbaciones externas, respectivamente. Nota, este controlador no necesita medición o estimación de la velocidad para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria. Sin embargo con el fin de probar estabilidad del sistema en lazo cerrado definiremos $e_2 = x_2 - \dot{x}_2$. Reescribiendo el sistema (55)-(56) en función de los errores e_1 y e_2 tenemos

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -(k_p + k)e_1 - f_v e_2 - \tilde{k}x_d - \tilde{f}_v \dot{x}_d + \tilde{w}\end{aligned}\quad (57)$$

donde los errores de estimación son $\tilde{k} = k - \hat{k}$, $\tilde{f}_v = f_v - \hat{f}_v$, y $\tilde{w} = w - \hat{w}$. El punto de equilibrio del sistema (57) está dado por $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = ((-\tilde{k}x_d - \tilde{f}_v \dot{x}_d + \tilde{w})/(k_p + k), 0)$. Nótese que el punto de equilibrio de (57) es el origen si los errores de estimación \tilde{k} , \tilde{f}_v y \tilde{w} son cero.

5.1 Prueba de estabilidad

Propongamos la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(t, e_1, e_2, \tilde{w}, \tilde{f}_v, \tilde{k}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \tilde{w} \\ \tilde{f}_v \\ \tilde{k} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_p + k & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \tilde{w} \\ \tilde{f}_v \\ \tilde{k} \end{bmatrix} > 0 \quad (58)$$

la cual es una función definida positiva mientras que $k_p + k > \epsilon^2$ con $\epsilon > 0$ y $\gamma_1^{-1} > 0$, $\gamma_2^{-1} > 0$, y $\gamma_3^{-1} > 0$. La derivada temporal de (59) a lo largo de las trayectorias de (57) está dada por

$$\dot{V}(t, e_1, e_2, \tilde{w}, \tilde{f}_v, \tilde{k}) = - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \tilde{w} \\ \tilde{f}_v \\ \tilde{k} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (k_p + k)\epsilon & \frac{f_v \epsilon}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f_v \epsilon}{2} & f_v - \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \tilde{w} \\ \tilde{f}_v \\ \tilde{k} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (59)$$

es una función semidefinida negativa mientras $(k_p + k)\epsilon(f_v - \epsilon) > 0,25(f_v \epsilon)^2$.

Donde propusimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{w}} &= -\gamma_1(e_2 + \epsilon e_1) \\
\dot{\tilde{f}}_v &= \gamma_2 \dot{x}_d(e_2 + \epsilon e_1) \\
\dot{\tilde{k}} &= \gamma_3 x_d(e_2 + \epsilon e_1).
\end{aligned} \tag{60}$$

Podemos concluir que cumpliendo las condiciones impuestas por (58) y (59), tanto $e_1 \rightarrow 0$ y $e_2 \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow 0$, mientras que los otros estados \tilde{w} , \tilde{f}_v , y \tilde{k} son estables, es decir permanecen acotados.

5.2 Estimadores adaptables de parámetros y perturbaciones de la planta

Dado que consideramos a w , f_v y k como constantes, podemos asumir lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{w} &= -\frac{d}{dt} \tilde{w} \\
\frac{d}{dt} \hat{f}_v &= -\frac{d}{dt} \tilde{f}_v \\
\frac{d}{dt} \hat{k} &= -\frac{d}{dt} \tilde{k}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Tomando lo propuesto (60) e integrándolo por partes, dado que evitamos el uso de e_2 porque la velocidad x_2 no es medible. Nos da la siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\tilde{w} &= -\gamma_1 e_1 - \gamma_1 \epsilon \int e_1 dt \\
\tilde{f}_v &= \gamma_2 \dot{x}_d e_1 - \gamma_2 \int e_1 \ddot{x}_d dt + \epsilon \gamma_2 \int e_1 \dot{x}_d dt \\
\tilde{k} &= \gamma_3 x_d e_1 - \gamma_3 \int e_1 \dot{x}_d dt + \epsilon \gamma_3 \int e_1 x_d dt.
\end{aligned} \tag{62}$$

Tomando en cuenta (61) y (62) obtenemos los algoritmos estimadores de parámetros y perturbaciones de la planta,

$$\begin{aligned}
\hat{w} &= \gamma_1 e_1 + \gamma_1 \epsilon \int e_1 dt \\
\hat{f}_v &= -\gamma_2 \dot{x}_d e_1 + \gamma_2 \int e_1 \ddot{x}_d dt - \epsilon \gamma_2 \int e_1 \dot{x}_d dt \\
\hat{k} &= -\gamma_3 x_d e_1 + \gamma_3 \int e_1 \dot{x}_d dt - \epsilon \gamma_3 \int e_1 x_d dt.
\end{aligned} \tag{63}$$

La estabilidad de los algoritmos (63) ya fue presentada en la sección anterior.

5.3 Resultados

En la experimentación se utilizaron los siguientes parámetros, condiciones iniciales $x_1(0) = \pi/4$, $x_2(0) = \pi/4$, trayectoria de referencia $x_d = \sin(t)$, la ganancia del controlador $k_p = 3$, las ganancias del estimador de parámetros y perturbaciones $\gamma_1 = 1,575$, $\gamma_2 = 10$, $\gamma_3 = 300$, y $\epsilon = 4$. Las condiciones iniciales de todas las variables del estimador fueron puestas en cero. Los parámetros de la planta fueron puestos como $k = 15kg/s^2$ para la rigidez del resorte y $f_v = 11kg/s$ para el factor de amortiguamiento. La perturbación externa se puso como $w = 1N$.

Los resultados ilustran como el algoritmo de control es capaz de seguir las trayectorias deseadas x_1 y x_2 , podemos observar esto en la figura 20 y 21. Las líneas azules representan la trayectoria deseada, mientras que las líneas punteadas representan al seguimiento de trayectoria.

Se pueden observar los resultados prácticos en 20 - 28. En la figura 19 podemos ver una imagen del equipo utilizado, un sistema masa resorte amortiguador que se encuentra en el laboratorio de mecatrónica. Es un Rectilinear Plant Model 210 de la marca Educational Control products. Fue conectado mediante la interfaz MicroLabBox, de la marca dSPACE, que también se encuentra en el laboratorio.



Figura 19. Sistema Masa Resorte Amortiguador

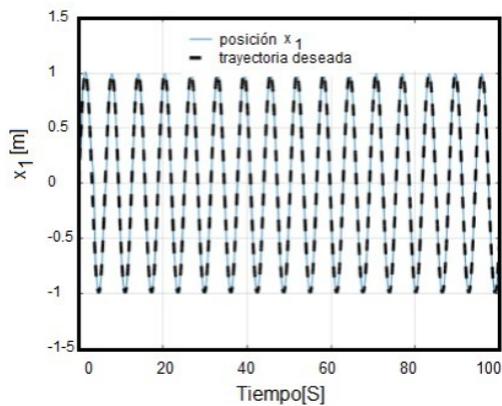


Figura 20. Gráfica del seguimiento de trayectoria de x_1

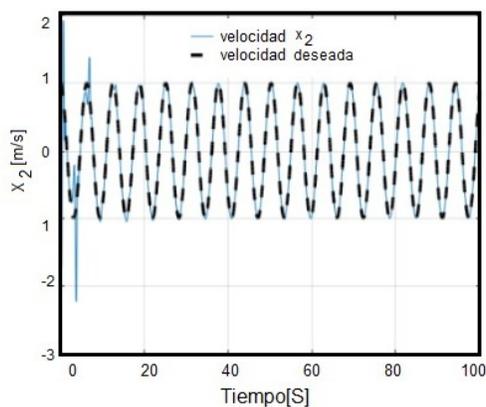


Figura 21. Gráfica del seguimiento de trayectoria de x_2

En la figura 20 y 21, pueden observarse a detalle los seguimientos de trayectoria. Las líneas negras punteadas representan las variables deseadas, mientras que las líneas azules representan la medición de posición a través del encoder y la estimación de la velocidad a través de un observador. Se puede observar que ambas siguen la trayectoria, aunque en la Figura 21, la gráfica de la posición, se puede observar como tarda en llegar a la trayectoria deseada los primeros segundos.

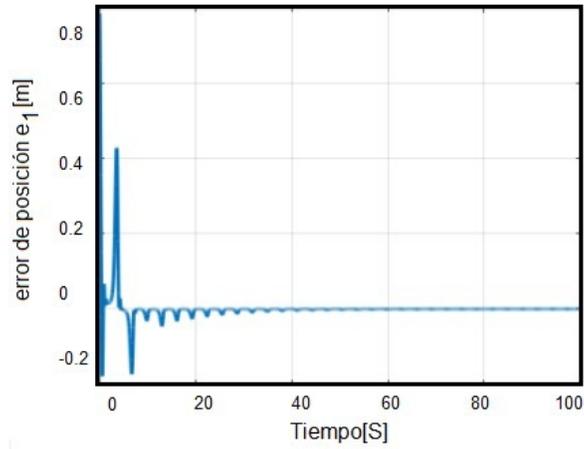


Figura 22. Gráfica del error de posición e_1

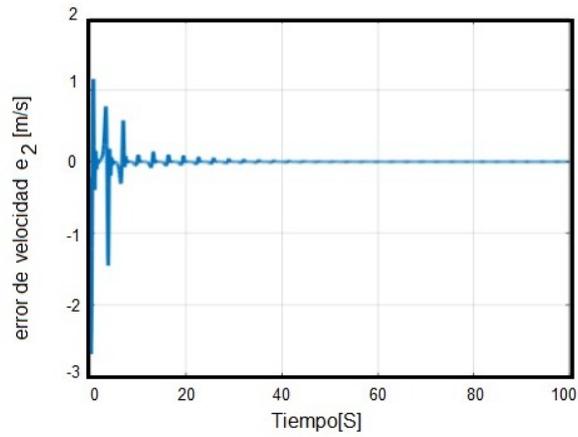


Figura 23. Gráfica Gráfica del error de posición e_2

En las Figuras 22 y 23 se puede observar como los errores van cambiando y acercándose a cero conforme pasa el tiempo. La Figura 22 demuestra el error de posición e_1 mientras que la Figura 23 muestra el error de velocidad e_2 . En el tiempo cero, los errores aún no se acercan a cero, se puede observar como oscilan antes de lograr estabilidad después de aproximadamente entre 40 y 60 segundos de comenzado el experimento.

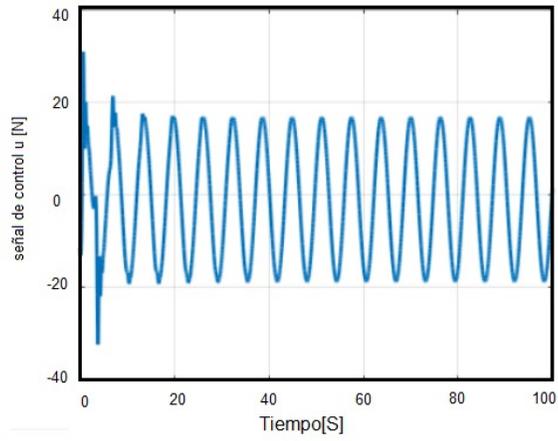


Figura 24. Gráfica de la señal de control u

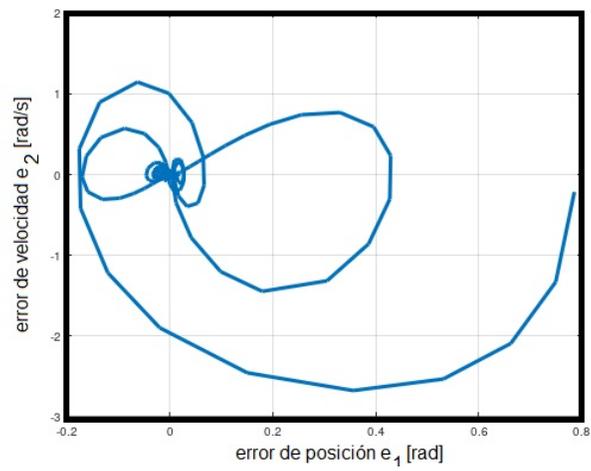


Figura 25. Gráfica del error de velocidad e_2 contra el error de posición e_1

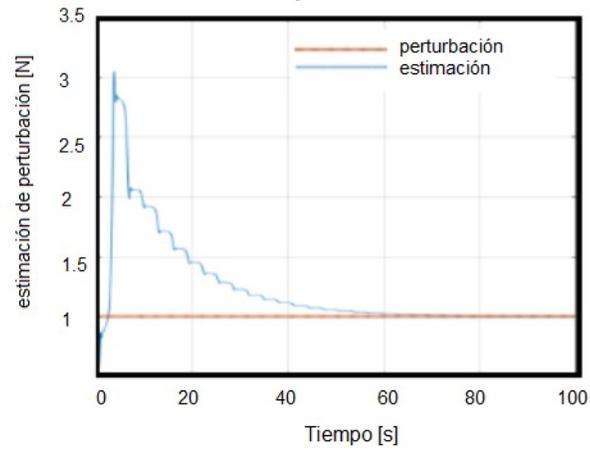


Figura 26. Gráfica del estimador de perturbación

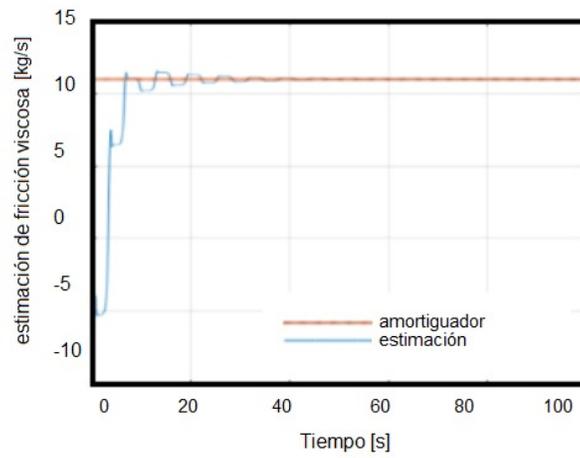


Figura 27. Gráfica del estimador de la fricción viscosa

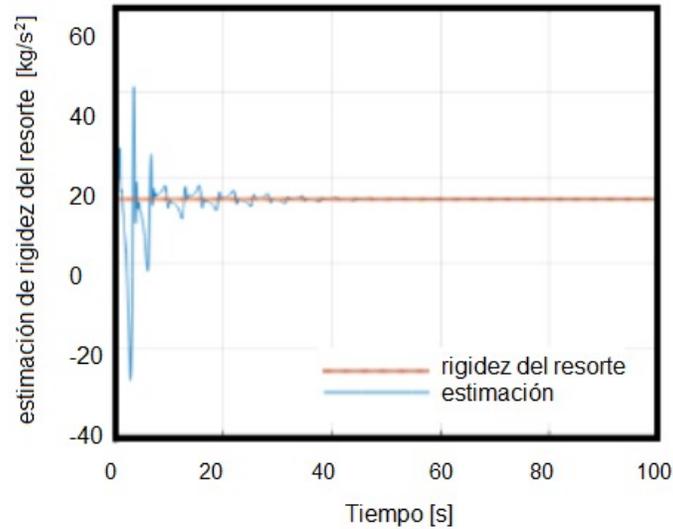


Figura 28. Gráfica del estimador del resorte

En las Figuras 26 - 28 se pueden ver las gráficas de los estimadores que se implementaron. La Figura 26 es de la estimación de perturbación externa, la Figura 27 es de la estimación de la fricción viscosa, y la Figura 28 es la de la estimación de la rigidez del resorte. Con éstas imágenes es sencillo identificar visualmente el tiempo estimado que requieren los estimadores para poder llegar al valor deseado, en los primeros segundos la estimación oscila hasta llegar a su punto de equilibrio. La estimación de perturbación tarda aproximadamente 60 segundos en acercarse a $1N$, la fricción viscosa tarda aproximadamente 40 segundos para llegar a 10 kg/s y la rigidez del resorte tarda aproximadamente 40 segundos en llegar a 20 kg/s^2 .

Las ilustraciones resultantes del experimento comprueban la capacidad del algoritmo de control de llegar a los resultados deseados. Las incertidumbres paramétricas se pueden encontrar por ejemplo en la operación del motor, el cual tiene una cierta potencia establecida para su modelo, pero con el tiempo este va disminuyendo su efectividad. Un control de comportamiento robusto es capaz de cumplir su objetivo de control a pesar de esas incertidumbres paramétricas, al igual que de perturbaciones externas que se pueden presentar. Como área de oportunidad de mejora para futuros trabajos, se puede buscar un tiempo de convergencia aun menor, ya que en algunas de las gráficas se puede observar más tiempo para llegar a la trayectoria deseada que en otras.

6. CONCLUSIÓN

La aportación principal de esta tesis, fue proponer un controlador robusto con estimación de parámetros de planta y perturbaciones externas. Para el cual se utilizó un sistema masa - resorte - amortiguador como planta.

A lo largo de este trabajo se estudiaron controladores con comportamiento robusto, como el control Terminal Sliding Mode (TSM), y un controlador proporcional con estimación de parámetros. Aunque el controlador Terminal Sliding Mode ya existe dentro de la literatura [18], el análisis fue realizado de manera propia, la metodología utilizada para obtener el tiempo de convergencia del error de posición a cero es algo que no se puede encontrar en el libro.

Para probar estabilidad en los dos controladores propuestos en esta tesis se utilizó el método directo de Lyapunov como método prioritario. Esto con el fin de analizar sus características de robustez ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas. El controlador Terminal Sliding Mode estudiado usa la teoría de Lyapunov para probar que las trayectorias convergen hacia el punto de equilibrio en un tiempo finito, su aplicación en sistemas mecánicos se vuelve en un trabajo sencillo ya que el controlador solamente consta de dos ganancias sintonizables. Es de gran importancia tener un comportamiento robusto como característica del controlador, el algoritmo TSM compensa perturbaciones acotadas una vez que las trayectorias se encuentran sobre la superficie deslizante. El rendimiento comparado con el controlador por modos deslizantes de primer orden es superior, logrando alcanzar un error de posición cero en tiempo finito. En cambio, el controlador por modos deslizantes de primer orden tiene convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio del sistema. Por otra parte el otro controlador abordado en esta tesis, el controlador proporcional para seguimiento de trayectorias con estimación de parámetros de la planta y perturbaciones externas, logra convergencia asintótica del error de posición a cero, esto se logra sin utilizar mediciones de velocidad en el controlador ni en el estimador de parámetros y perturbaciones, este controlador es muy versátil ya que solo cuenta con una

ganancia sintonizable, por su lado el estimador se puede dividir en estimador de parámetros el cual tiene tres ganancias sintonizables y el estimador de perturbaciones tiene dos ganancias sintonizables.

Los experimentos y simulaciones ilustran como los controladores propuestos fueron capaces de llegar a sus objetivos de control y permanecer estables (en tiempo finito o asintóticamente según sea el controlador utilizado) el sistema en lazo cerrado.

El avance que se puede proponer para trabajar a partir de esta aportación, sería buscar mejoras y optimizaciones de desempeño, buscando suavizar la señal de control para el caso del controlador TSM y mejorar los tiempos de convergencia hacia el punto de equilibrio y hacia los parámetros estimados en el caso del controlador proporcional con estimación de parámetros.

Hablando del aspecto personal de la investigación, fue un gran reto primero llegar al conocimiento necesario para poder entender y realizar todos los ejercicios, programas, y simulaciones. Para posteriormente buscar crear los algoritmos de control que son propuestos en la presente tesis. Las habilidades mentales y personales requeridas para poder realizar un trabajo de este tipo son muy únicas y sin duda resultan ser herramientas de vida más allá de conocimiento teórico. De igual manera, la situación mundial fue un gran reto que se atravesó en el camino. La pandemia resultó como problema que hizo más lento prácticamente todo lo relacionado al trabajo, desde comunicación con encargados de posgrado, entrega o revisión de avances, hasta estado mental personal y de los involucrados. Pero con esto, también quedan grandes lecciones acerca de mantenerse plantado en la tierra para poder realizar las cosas a pesar de la adversidad.

7. REFERENCIAS

1. I. Furtat, A. Fradkov, State Feedback Finite Time Sliding Mode Stabilization Using Dirty Differentiation, Science Direct, IFAC, 2017.
2. I. Furtat, Y. Orlov, Finite-time sliding mode stabilization using dirty differentiation and disturbance compensation, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019.
3. Y. Orlov, Y. Aoustin, Finite Time Stabilization of a Perturbed Double Integrator—Part I, IEEE Transactions on Automatic Control, 2011.
4. A. T. Azar and Q. Zhu, Advances and applications in sliding mode control systems, Springer, 2016.
5. Fernando Reyes Cortes, Control de Robots Manipuladores, Alfaomega, 2011.
6. P. D. Escobar Ponce, I. Cruz, and D. Israel, Comparación mediante simulación de tres controladores basados en las estrategias de control tipo pid y modo deslizante aplicadas al seguimiento de trayectoria de un vehículo autónomo sumergible, B.S. thesis, 2018.
7. S. Mobayen and S. Javadi, Disturbance observer and finite-time tracker design of disturbed third order nonholonomic systems using terminal sliding mode, Journal of Vibration and Control, vol. 23, 2017.
8. B. Jumbo and E. Manuel, “Diseño y simulación de controladores dinámicos por modo deslizantes aplicado a procesos no lineales aproximados a un modelo de primer orden con retardo ,” B.S. thesis, 2018.
9. M. Augustine, Intro to Sliding Modes, Research Gate, 2019.
10. K. Ogata. Ingeniería de control moderna. Prentice Hall, 2010.

11. C. A. Evangelista, “Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden,” Ph.D. dissertation, Facultad de Ingeniería, 2012.
12. Y. Hong, Y. Xu, and J. Huang, “Finite-time control for robot manipulators,” *Systems control letters*, vol. 46, no. 4, pp. 243–253, 2002.
13. C. A. Zamora, J. A. Moreno, and S. Kamal, “Control integral discontinuo para sistemas mecánicos,” in *Congreso Anual de Asociación Mexicana de Control Automático*, 2013.
14. V. Utkin, “Chattering Problem in sliding control mode systems”, *IFAC, Analysis and Design of Hybrid Systems* 2006.
15. O. P. Ardila, “Estado actual y futuro de la ingeniería de control,” vol. 4, no.2, 2010.
16. G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, E. Usai, “A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems”, *INT. J. Control*, Vol. 76, 875–892, 2003.
17. K. Starkov, “Control de movimiento en sistemas mecánicos subactuados,” Ph.D. dissertation, 2008.
18. Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, “Sliding mode control and observation”. Springer, 2014, vol. 10.
19. Michelle Maceas, Juan Diego Sánchez, *Héctor Botero, .^Estrategias de Control y Estimación de Estado por Modos Deslizantes para un Horno Eléctrico”, *Universidad Nacional de Colombia*, 2013.
20. Boiko, L. Fridman, R. Iriarte, A. Pisano y E. Usai. «Parameter tuning of secondorder sliding mode controllers for linear plants with dynamic actuators». En: *Automatica* 42.5 (2006), págs. 833-839.
21. J. Burton y A Zinober. «Continuous approximation of variable structure control». En: *International journal of systems science* 17.6 (1986), págs. 875-885.
22. A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988.