

# Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología



## **Análisis Rotodinámico de Turbina hidráulica Mediante Simulación Numérica.**

Tesis que presenta

**Fernando Cebrera Bueno**

Para obtener el grado de

**Ingeniero Aeroespacial**

Tijuana, Baja California, México, Noviembre 24 del 2022

# Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología

## **Análisis Rotodinámico de Turbina hidráulica Mediante Simulación Numérica.**

TESIS

Que para obtener el grado de ingeniero aeroespacial  
presenta:

**Fernando Cebrera Bueno**

Aprobado por:

---

M. en C. Mauricio Leonel Paz González

---

Dr. Oscar Adrián Morales Contreras

---

M. en C. Juan Antonio Paz González

---

Dr. Juan Antonio Ruiz Ochoa

---

Dr. Antonio Gómez Roa

## **Dedicatoria**

*A mis padres, familia, amigos y profesores.  
¡Sin ustedes no hubiera sido posible!*

## **Agradecimientos**

A mis padres, mi hermana y mi familia en general, les doy las gracias por apoyarme emocional y económicamente a lo largo de estas poco más de dos décadas y estar para mí siempre que lo necesité.

A todos mis profesores y profesoras, en especial al profesor Mauricio Paz, mi asesor de tesis, por su atención y guía durante el proceso.

A mis amigos por su apoyo moral a lo largo de toda la carrera y por nunca dejarme olvidar el potencial que tenía. En especial al equipo con quienes inicie este proyecto, Rogelio, Miguel, Alan, Pastor.

## Contenido

Sección	Página
Introducción	1
Justificación	1
Antecedentes	2
Marco Teórico	5
Marco Metodológico	60
Resultados	77
Conclusión	86
Bibliografía	87

# Introducción

El presente trabajo consiste en el análisis del comportamiento rotodinámico de una turbina hidráulica con el fin de validar la viabilidad de su diseño desde el punto de vista de las vibraciones mecánicas, ya que, dado el caso en el que la amplitud de las mismas fuese lo suficientemente grande, podría producirse una colisión con la carcasa que contiene el rotor.

La primera sección del documento plantea los antecedentes y bases teóricas en el campo de estudio de la roto-dinámica. Además de introducir diversos modelos analíticos, el marco teórico presenta varios conceptos clave para poder comprender el comportamiento de la turbina.

En la segunda sección del documento se detalla la metodología utilizada para llevar a cabo el análisis roto-dinámico del ensamble del rotor en ANSYS, para generar dicha metodología se toma como base un manual oficial de ANSYS en el cual se muestran distintos casos de análisis para diferentes tipos de geometría, habiendo disponibles métodos para trabajar con geometrías unidimensionales, bidimensionales, y tridimensionales, siendo el método descrito para estos últimos el tomado como base para analizar el modelo en el presente trabajo.

Por último, la sección final del documento se enfoca en describir los resultados obtenidos mediante el análisis e interpretar los mismos, en esta etapa se pueden encontrar las interpretaciones dadas a los distintos resultados modales obtenidos, es en base a la interpretación de dichos resultados modales que se llega a la conclusión del documento.

# Justificación

Es muy común que la turbo-maquinaria en general se vea afectada por vibraciones, esto pese a no tener componentes que trabajen de manera recíproca, esto se debe en buena parte a que resulta imposible producir componentes perfectos (como ejes o discos perfectamente balanceados), por lo que las pequeñas masas de desbalance presentes en los componentes hacen necesario tomar en cuenta los efectos que la inercia de estas tiene sobre el resto del sistema del rotor. A lo anterior se le suman los efectos que puede tener la mala alineación del eje del rotor o la no linealidad de la rigidez del rotor produce lo que se conoce como una respuesta forzada o respuesta síncrona al desbalance.

Por último otra fuente de vibración un tanto menos frecuente, pero con la que es más difícil lidiar, proviene de los eigenvalores o frecuencias naturales de la máquina y sus rodamientos; pudiendo presentar vibraciones aun en la ausencia de una fuente externa de desbalance o excitación. Los efectos de estas frecuencias naturales suelen ser anulados o disipados por el amortiguamiento en las estructuras estáticas, sin embargo, en la maquinaria rotativa esos efectos tienden a verse

incrementados con el tiempo. Esto se conoce como inestabilidad autoexcitada o inestabilidad rotodinámica.

Habiendo quedado expuesto lo anterior se vuelve más claro que es importante realizar un estudio acerca del comportamiento dinámico del ensamble rotor de la turbina, como parte del proceso de diseño de la misma, esto con el fin de asegurar que haya eigenvalores presentes en el rango de trabajo de la máquina; y en caso de haberlos, poder descartar que la amplitud y forma de los mismos presente cualquier clase de peligro para la segura operación del aparato o una reducción significativa en la vida del mismo.

## Antecedentes

El desarrollo de la teoría de vibraciones, como una subdivisión de la mecánica, vino como un resultado natural del desarrollo de las ciencias básicas que la componen, la mecánica y las matemáticas; las cuales fueron fundadas por los antiguos filósofos griegos en el primer milenio antes de cristo. El termino vibración lleva en uso desde tiempos de Esquilo. Pitágoras de Samos condujo varios experimentos de vibración con martillos, cuerdas, tubos y cascarones. Estableció el primer laboratorio de vibraciones, el primero conoció en la historia de la humanidad. Además, inventó el monocordio, un instrumento puramente científico para conducir investigaciones científicas en cuerdas tensas y establecer un estándar para la medición de vibraciones.

El hecho de que los sistemas (lineales) tienen frecuencias a las cuales producen movimiento era conocido por los músicos, sin embargo, fue Pitágoras quien descubrió que se trataba de una ley natural para sistemas vibratorios. Más aun, logro probar, mediante sus experimentos con martillos, que las frecuencias naturales son propiedades del sistema que no dependen de la magnitud de la excitación.

El inicio de la llamada era de la mecánica continua está marcado por los trabajos de Galileo y Newton. Aún más, está marcado con las etapas tempranas de mecanización y la revolución industrial. El uso de energía química, asociado con la alta potencia por unidad de volumen de maquinaria introdujo numerosos problemas de vibración. En conjunto con el desarrollo del cálculo infinitesimal y la mecánica continua llevó al rápido desarrollo de la teoría de vibraciones para la mitad del siglo 19.

Los modos de vibración y los puntos nodales fueron observados por primera vez por J. Sauver (1653-1716), quien identifico la frecuencia natural fundamental y los tonos armónicos. Daniel Bernoulli (1750) explico los resultados obtenidos experimentalmente mediante el principio de superposición de los armónicos, e introdujo la idea de expresar la respuesta vibratoria como la suma de armónicos simples. El problema de la cuerda vibratoria fue resuelto por Lagrange (1759) considerándolo como una secuencia de masas pequeñas.

La ecuación de onda fue introducida por D' Alembert en una memoria de la academia de Berlín (1750). El la utilizó también en su memoria para vibración longitudinal de las columnas de aire en

órganos. Los resultados experimentales para esta clase de problemas fueron obtenidos anteriormente por Pitágoras. Euler (1744) obtuvo la ecuación diferencial para la vibración lateral de barras, de igual forma determinó las funciones que ahora conocemos como *funciones normales* y la ecuación que ahora llamamos *ecuación de frecuencia* para vigas con extremos libres, empotrados o simplemente soportados, mientras que Daniel Bernoulli le proporcionó la evidencia experimental. Euler y James Bernoulli intentaron resolver el problema de las placas y cascarones vibratorios analíticamente. Euler (1767) consideró que las membranas consistían de dos sistemas de cuerdas tensadas perpendiculares entre sí, obteniendo así la ecuación diferencial para una membrana. Jaques Bernoulli (1759-1789) obtuvo la ecuación diferencial para una placa vibratoria, bajo la consideración de que la misma consistía de dos sistemas de vigas perpendiculares entre sí.

La solución para las ecuaciones diferenciales del movimiento de un sólido elástico fue tratada por Poisson (1829) y Clebsch (1862), fundando así la teoría general de vibraciones. Lord Rayleigh (1889) escribió el primer tratado sistemático sobre vibraciones, formalizó la idea de las funciones normales, tal y como fue presentada por Daniel Bernoulli y Clebsch, e introdujo la idea de fuerzas y coordenadas generalizadas. Posteriormente introdujo de manera sistemática los métodos de energético y aproximado en el análisis de vibraciones, sin resolver ecuaciones diferenciales, idea que a su vez continuó siendo desarrollada por W. Ritz (1909). Rayleigh introdujo una corrección para la vibración lateral de vigas debido a la inercia rotatoria y Timoshenko (1916) una para la deformación por corte [1]. Todo el trabajo anterior sirvió para cimentar las bases de la rotodinámica.

La rotodinámica es el estudio de la dinámica de la maquinaria rotativa. La rotodinámica difiere de las vibraciones mecánicas convencionales debido a la presencia de momentos giroscópicos, fuerzas de acoplamiento cruzado y la posibilidad de la inestabilidad giratoria. La existencia de todos estos diferenciadores se debe a la rotación del ensamble del rotor [2].

La dinámica de los cuerpos en rotación ha llamado la atención desde ya hace bastante tiempo. Desde finales del siglo 19, la teoría de las vibraciones ha sido extensamente desarrollada, y ha habido un rápido progreso en la construcción de maquinaria de alta velocidad, particularmente la empleada en locomotoras y turbinas de vapor. El giro en los ejes fue anticipado por W. A. Rankine, quien postuló que la operación de un eje por encima de su velocidad crítica era imposible. Extensas investigaciones analíticas fueron llevadas a cabo por Dunkerley y Reynolds. De Laval observó y resolvió experimentalmente la mayoría de los problemas de rotodinámica, experimentando con turbinas de vapor en el último cuarto del siglo 19. El problema del giro fue resuelto por A. Föpl, quien explicó analíticamente porque la operación por encima de la velocidad crítica es posible, como fue demostrado experimentalmente por De Laval. Su análisis es en ocasiones, erróneamente, acreditado a Jeffcott, siendo el rotor de De Laval llamado ocasionalmente “rotor de Jeffcott”. Los primeros trabajos de Rankine, Jeffcott y Stodola identificaron algunos de los aspectos fundamentales sobre la dinámica de los ejes en rotación.

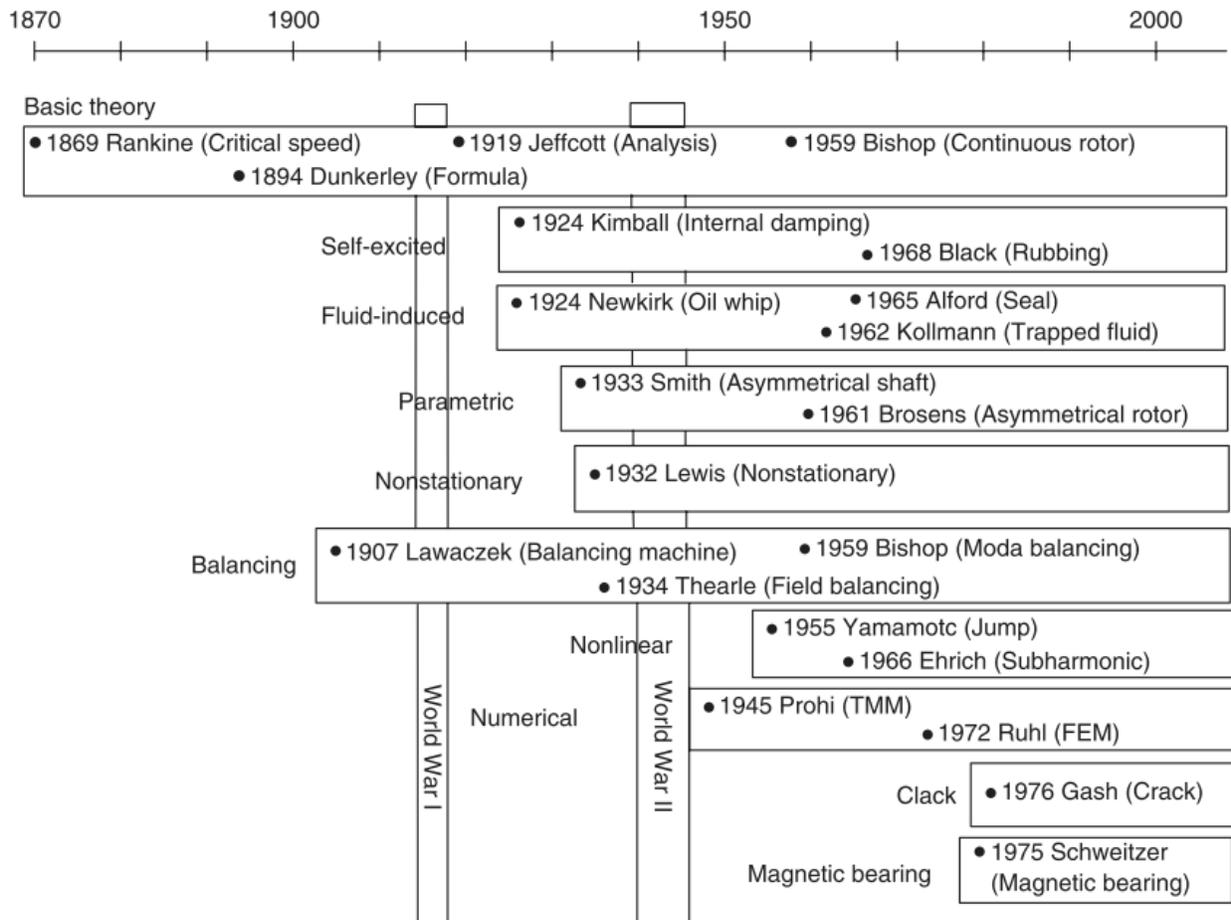


Figura 1. Historia de la Rotodinámica.

En la década de 1920 la industria comenzó a diseñar máquinas capaces de operar con cargas más altas y a velocidades por encima de la primera velocidad crítica, lo anterior introdujo los problemas modernos de la rotodinámica, los cuales fueron tratados por B. L. Newkirk, H. D. Taylor y A. Stodola. Las vibraciones en ejes y vigas de ingeniería fueron estudiadas inicialmente por Frahm, en particular la vibración torsional en los ejes de barcos [3].

El análisis de los sistemas de rodamientos a gran escala ha avanzado lentamente desde la década de 1940. El cálculo de las velocidades críticas no amortiguadas de rotores de turbinas fue planteado por Prohl a mediados de la década de 1940, el cual esperó al desarrollo de la computadora digital para mejorar el tiempo de cálculo de los a mano utilizados inicialmente. La estabilidad de los rodamientos y el balanceo de rotores fueron los temas de discusión en la década de 1950. Durante la siguiente década obtener las características apropiadas de un rodamiento para llevar a cabo un análisis se convirtió en todo un desafío, y muchos diseños de rodamientos requerían interpolaciones de tablas. Esta fue la década en la que los rodamientos basculantes fueron introducidos, permitiendo así la operación a velocidades más altas. También fue la década en la que las computadoras permitieron graficar la respuesta elíptica de desbalance del rotor por primera

vez. El concepto de estabilidad del rotor para modelos de rotores simples era lo más avanzado que había. Los mecanismos de inestabilidad en los rotores de turbinas fueron introducidos por Alford. Al poco tiempo esto permitió desarrollar un procedimiento capaz de estimar la velocidad umbral de inestabilidad en compresores centrífugos, redefiniendo los parámetros básicos en términos de las etapas de compresión, en lugar de las etapas de la turbina axial estudiadas por Alford [4].

El desarrollo de métodos para detección y monitoreo de grietas comenzó a principios de la década de 1970 en la industria de generación. Dimarogonas, en dos reportes internos del departamento de turbinas de General Electric, desarrolló la teoría de vibración para ejes con fisuras un esquema que, junto con la extensión a vigas con fisuras y hojas de turbina, serían incluidos en un libro de texto. Pafelias continuó el trabajo de Dimarogonas después de 1972 y, en un reporte formal de General Electric publicado en las Technical Information Series, utilizó métodos teóricos, extensas pruebas de laboratorio y experimentos de campo para desarrollar una metodología para la detección de grietas basada en la segunda armónica y la subarmónica de media velocidad crítica. Posteriormente escribió un par de reportes sobre el desarrollo de instrumentación electrónica capaz de monitorear y emitir alertas sobre las grietas en los rotores, consiguiendo su implementación como un instrumento de supervisión de turbinas. Los reportes escritos por Pafelias fueron ampliamente distribuidos, dando pie a trabajos bastante sustanciales dentro de la industria de la turbomaquinaria. Desde la década de 1980 se han venido desarrollando trabajos de investigación bastante importantes en la materia [5].

## Marco Teórico

En general, la maquinaria rotativa consiste en discos de distintas formas, ejes cuyos diámetros cambian en función de su posición longitudinal y baleros situados en varias posiciones. En análisis de vibraciones, un sistema de rotor muy complejo es simplificado y se adopta un modelo matemático adecuado. En este proceso de modelado es importante saber cuáles son los parámetros importantes para el sistema.

Las máquinas rotativas son clasificadas de acuerdo a sus características de la siguiente manera: Si la deformación del eje en rotación es despreciable en rango de velocidades en que opera, se considera un *rotor rígido*. Si el eje se deforma de manera considerable en alguna velocidad rotacional que se encuentre dentro de su rango de trabajo, se trata de un *rotor flexible*. No es posible determinar a cuál de las anteriores categorías pertenece el rotor solo tomando en cuenta sus dimensiones. En rotodinámica, las velocidades rotacionales que producen respuestas de resonancia debido a la excentricidad de la masa se conocen como *velocidades críticas*. La deformación del rotor se vuelve mayor cuando la velocidad rotacional del mismo se acerca a una velocidad crítica. Por lo tanto, el rango de la velocidad a la que se opera, en relación con la velocidad crítica termina por determinar si el rotor es rígido o flexible.

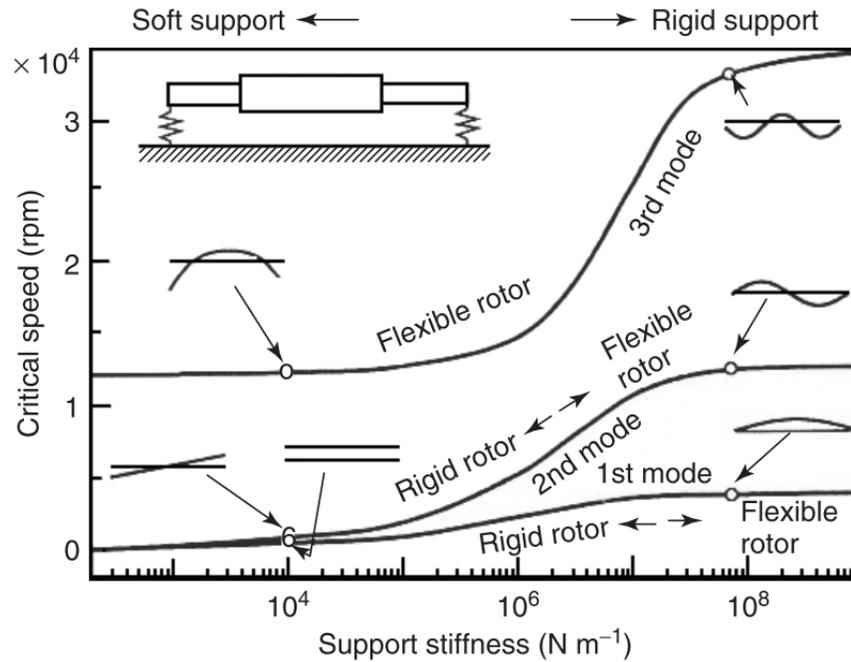


Figura 2. Velocidades críticas y formas modales graficadas contra la rigidez de los rodamientos.

La figura 1, llamada *diagrama de velocidades críticas* muestra las variaciones de las velocidades críticas y los modos de vibración contra la rigidez de los rodamientos para un rotor simétrico. La parte izquierda de la figura representa los valores para rotores que se encuentran soportados sobre rodamientos suaves o poco rígidos. En el primer y segundo modo los rotores no se deforman de manera considerable, sin embargo, los componentes que los sujetan sufren deflexiones; en este caso el rotor es considerado un rotor rígido. Conforme la rigidez de los soportes se reduce la frecuencia natural de dichos modos de aproxima a cero. En el caso del tercer modo el rotor se deforma y se considera, por lo tanto, un rotor flexible. Dependiendo del tipo de modo que se esté discutiendo el mismo sistema puede considerarse como uno de rotor rígido o flexible. En la parte derecha de esta primera imagen la deformación ocurre en los tres modos y por lo tanto el sistema se considera flexible en cada modo.

En algunos modelos se considera que los discos son rígidos y la masa del eje elástico se encuentra concentrada en las posiciones de los discos. Tal modelo es llamado *sistema de parámetros agrupados*. Si un rotor flexible con masa distribuida y rigidez es considerado el modelo es conocido como un *sistema de parámetros distribuidos* o *sistema de rotor continuo*. El tratamiento matemático para este último es más complicado que el primero, dado que es gobernado por ecuaciones diferenciales parciales.

En ocasiones los rotores son clasificados en sistemas de ejes verticales y horizontales. Otro sistema empleado para clasificar rotores se basa en su velocidad, donde se les puede considerar como *rotores de alta velocidad* o *rotores de baja velocidad*. En dichos casos el termino velocidad hace referencia a la velocidad rotacional. El límite entre los sistemas de alta y baja velocidad no se

encuentra definido de manera clara y difiere dependiendo de la situación, en algunos casos la mayor velocidad crítica es considerada el límite [6].

El modelo de rotor más simple es el de un solo grado de libertad. La figura 3 muestra tres tipos distintos de modelos de rotor. En el inciso a) se considera que los rodamientos son flexibles y el rotor (el eje y el disco) rígido.

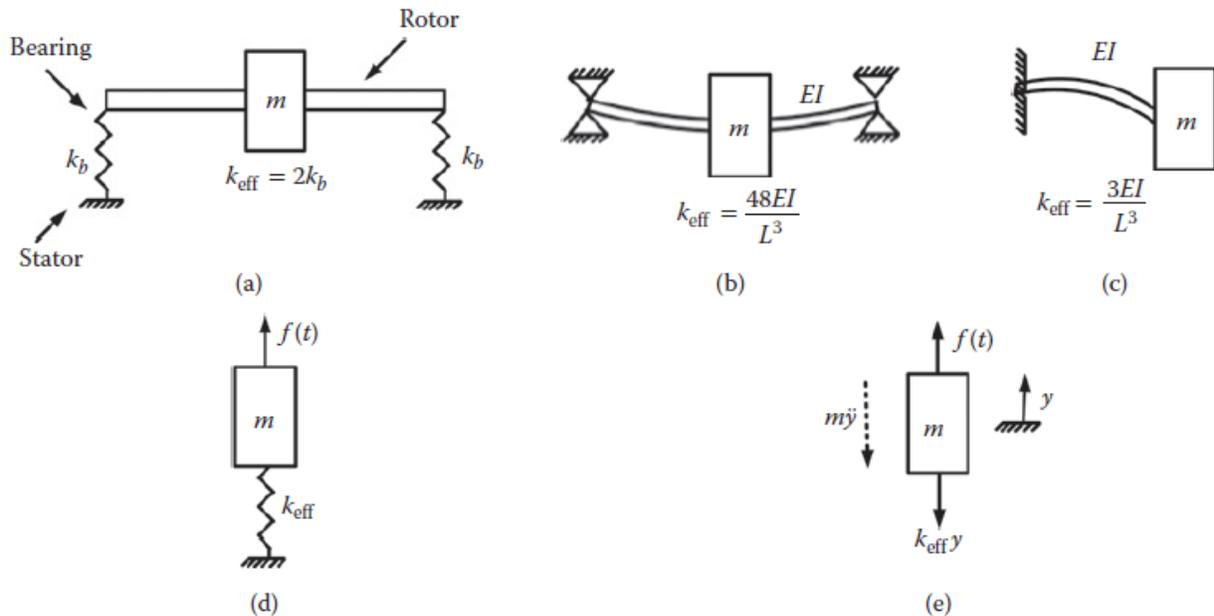


Figura 3. Sistemas de rotores simples sujetos a vibraciones transversales y su modelado: (a) un rotor rígido montado en baleros flexibles; (b) un eje flexible con un disco rígido montado en baleros rígidos; (c) un rotor en voladizo con un disco rígido; (d) un sistema masa-resorte de equivalente con un solo grado de libertad; y (e) el diagrama de cuerpo libre de la masa del disco.

En los incisos b) y c), se considera que el rodamiento y el disco son rígidos y el eje flexible. Aquí  $k_b$  es la rigidez de cada rodamiento,  $E$  el módulo de elasticidad o módulo de Young del material del eje,  $I$  (el cual es igual a  $d^4/64$ , donde  $d$  es el diámetro del eje),  $L$  es la longitud del eje y  $m$  la masa del disco.

En todos los casos mencionados anteriormente se considera que la masa de todo el sistema está compuesta únicamente por la masa de los discos, los cuales están montados sobre ejes delgados desprovistos de masa. Todos los casos pueden idealizarse asumiendo únicamente un grado de libertad que representa la vibración transversal (también llamada lateral o flexión) del rotor, como se muestra en el inciso d), donde  $k_{eff}$  es la rigidez efectiva de los rodamientos del eje en la manera que lo experimenta la masa del disco, y  $f(t)$  es la fuerza externa en la masa del disco (debido al desbalance). De la manera en que se plantea aquí se considera que solo existe un movimiento de traslación que ocurre de manera transversal, sin embargo, también es posible considerar otro movimiento de traslación que ocurre de manera simultánea en un plano perpendicular al actual, así como movimientos de inclinación.

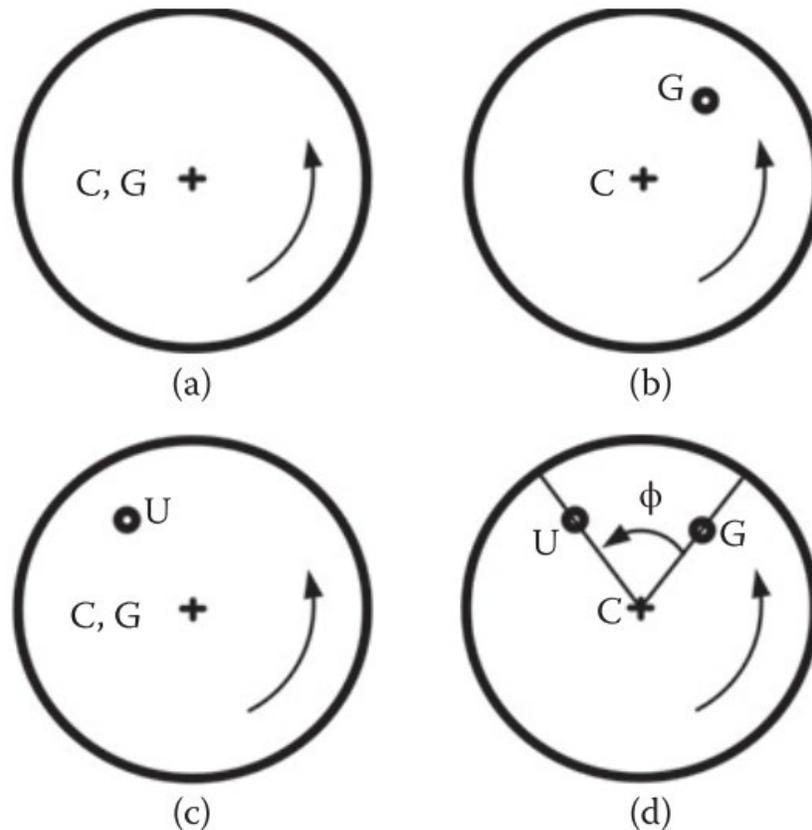


Figura 4. Diferentes tipos de desbalance en un mismo plano. a) Los centros geométricos y de gravedad del rotor son coincidentes. b) Los centros de geométrico y de gravedad del rotor no son coincidentes. c) Una masa de desbalance adicional, cuya ubicación no es coincidente con los centros de geométrico y de gravedad, se encuentra presente. d) Los centros geométrico y de gravedad, así como la masa de desbalance adicional no son coincidentes.

Teóricamente hablando, si un rotor se encuentra perfectamente balanceado, no debería existir fuerza de desbalance alguna, tal y como se muestra en el inciso a) de la figura 4, donde C y G son el centro de rotación (o centro geométrico) y el centro de gravedad del rotor respectivamente. Sin embargo, en la práctica resulta imposible manufactura un rotor perfectamente balanceado. En los incisos b), c) y d) se muestran varios casos en los que U representa la ubicación de una masa de desbalance adicional, como lo pudiera ser un pequeño tornillo sujeto al disco.

El desbalance puede ser el resultado de las tolerancias de manufactura, el desgaste operacional, distorsiones térmicas, reparaciones, etc. El desbalance del rotor produce una fuerza sinusoidal a la velocidad que cambia junto con la velocidad de giro del rotor. Por lo tanto, la fuerza de desbalance (en la dirección vertical representada por el eje y) es modelada de la siguiente manera:

$$f_y = m\omega^2 e \sin \omega t$$

(1)

Donde  $m$  es la masa del rotor,  $\omega$  su velocidad de rotación y  $e$  la excentricidad del rotor ( $e = CG$ ), el producto de  $me$  es típicamente conocido como desbalance,  $U$ . Esta fuerza de desbalance cambia su dirección a la vez que el rotor gira, con un ángulo  $\omega t$ , por lo que la fuerza de desbalance varía sinusoidalmente a razón de  $\sin \omega t$ , con respecto a un marco de referencia fijo, en el cual el eje Y se encuentra en dirección vertical.

Adicional al caso descrito anteriormente, es posible encontrar uno adicional en el que la fuerza esta descrita por el término  $\cos \omega t$  (para el cual el eje X se encuentra en la dirección horizontal) o de manera más general  $\cos(\omega t - \phi_0)$  con  $\phi_0$  como una fase inicial del desbalance con respecto a algún eje de referencia conveniente (siendo este el eje X) en un tiempo  $t = 0$ . Esta fuerza desbalance aparecerá cuando el sistema es un rotor excéntrico, basados en las definiciones anteriores, esto significa que los centros de rotación y gravedad del rotor no coinciden. Dicho tipo de desbalance es conocido como *desbalance residual* o *inherente*.

Cuando no se trata de rotor excéntrico, tal que  $C$  y  $G$  sean coincidentes, y se encuentre presente una pequeña masa de desbalance  $m_i$ , adjunta a un radio relativamente grande  $r_i = C \cdot U$  como se muestra en el inciso c) de la figura 4, la fuerza de desbalance debe escribirse de la siguiente manera:

$$f_y(t) = m_i \omega^2 r_i \sin \omega t \quad (2)$$

Este tipo de desbalance,  $m_i r_i$ , es llamado *de prueba, corrección o adicional*, y es frecuentemente utilizado para estimar la fuerza de desbalance residual experimentalmente mediante procedimientos de balanceo dinámico. Cuando se trata de un rotor excéntrico y una pequeña masa de desbalance de prueba se encuentra adjunta al rotor como se observa en el inciso d) de la figura 4, la fuerza de desbalance total se expresa de la siguiente forma:

$$f_y(t) = m \omega^2 e \cdot \sin \omega t + m_i \omega^2 r_i \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Donde  $\phi$  es la diferencia de fase angular entre los diferentes vectores de las fuerzas de desbalance debido a la excentricidad del rotor y la masa de desbalance de prueba. Cuando el rotor se encuentra girando en sentido antihorario, como se muestra en el inciso d) de a figura 4., el desbalance de prueba (CU) se encuentra liderando el ángulo de fase con respecto a la masa de desbalance residual (CG). Si el desbalance tiene una fase inicial  $\phi_0$  la expresión anterior tomaría la siguiente forma:

$$f_y(t) = m\omega^2 e \cdot \sin(\omega t + \phi_0) + m_i + \omega^2 r_i \sin(\omega t + \phi_0 + \phi) \quad (4)$$

La siguiente imagen (Figura 5) muestra las convenciones positivas, así como las variables utilizadas para definir la ubicación de un sistema de rotor en un instante dado,  $t$ , en el cual la fase inicial ( $\phi_0$ ) se considera cero. Para representar la velocidad angular constante se utiliza  $\omega$ , la localización del desbalance con respecto al tiempo está dada por  $\theta = \omega t$ . En general  $\dot{\theta} \neq \omega t$ , siendo el primer término la derivada de la posición angular con respecto al tiempo) cuando el rotor tiene cierta aceleración angular.

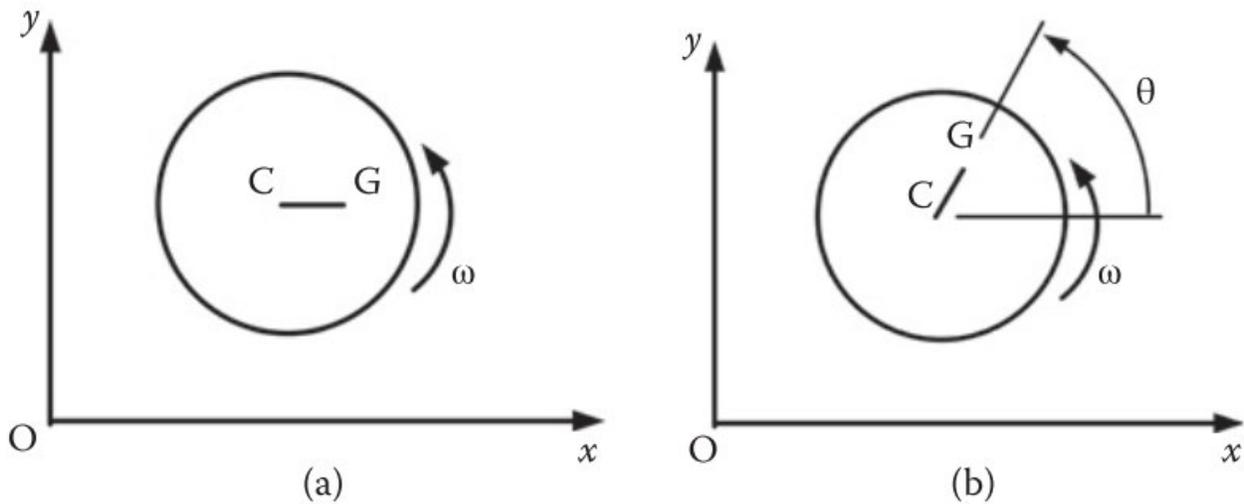


Figura 5. Localización del desbalance en el rotor en un instante particular: a) en un tiempo  $t=0$  y b) en un tiempo  $t$ .

Por ejemplo, para una aceleración constante  $\ddot{\theta} = \alpha$  y sin condiciones iniciales, tendremos que  $\dot{\theta} = \alpha t$  y  $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$ . Para el presente caso  $\alpha = 0$ , eso es  $\theta = \omega t$ .

En el modelo de rotor más sencillo se considera que la fuerza centrífuga actúa como una fuerza externa; por lo tanto, se puede asumir que el centro de gravedad se encuentra en el centro de rotación C del disco. Subsecuentemente, podemos ver que la fuerza centrífuga en realidad se origina de la fuerza de inercia debido a que el centro de gravedad está desfasado con respecto al desbalance. Si aplicamos la Segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la masa del rotor como se muestra en la Figura 3 inciso e), igualando la suma de las fuerzas externas a la masa del rotor multiplicada por la aceleración en el centro de gravedad de la masa del rotor obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum F_y = m\ddot{y} \quad (5)$$

O

$$-k_{eff}y + m\omega^2 e \sin \omega t = m\ddot{y}$$

(6)

Donde  $k_{eff}$  es la rigidez efectiva del sistema del rotor (como se observa en la Figura 3.) y  $k_{eff}y$  es la fuerza restauradora que actúa de manera opuesta al movimiento, de ahí el signo negativo. La ecuación anterior es la forma estándar de la ecuación de movimiento de un solo grado de libertad para un sistema masa-resorte, y puede reescribirse de la siguiente manera:

$$m\ddot{y} + k_{eff}y = m\omega^2 e \sin \omega t$$

(7)

Debe hacerse notar que este representa una variedad bastante amplia de sistemas de rotores, y que la rigidez efectiva podría cambiar dependiendo del tipo de sistema de rotor que se considere. En algunas ocasiones incluso es posible que la masa y el desplazamiento cambien, pero la forma de la ecuación diferencial permanecerá igual [7].

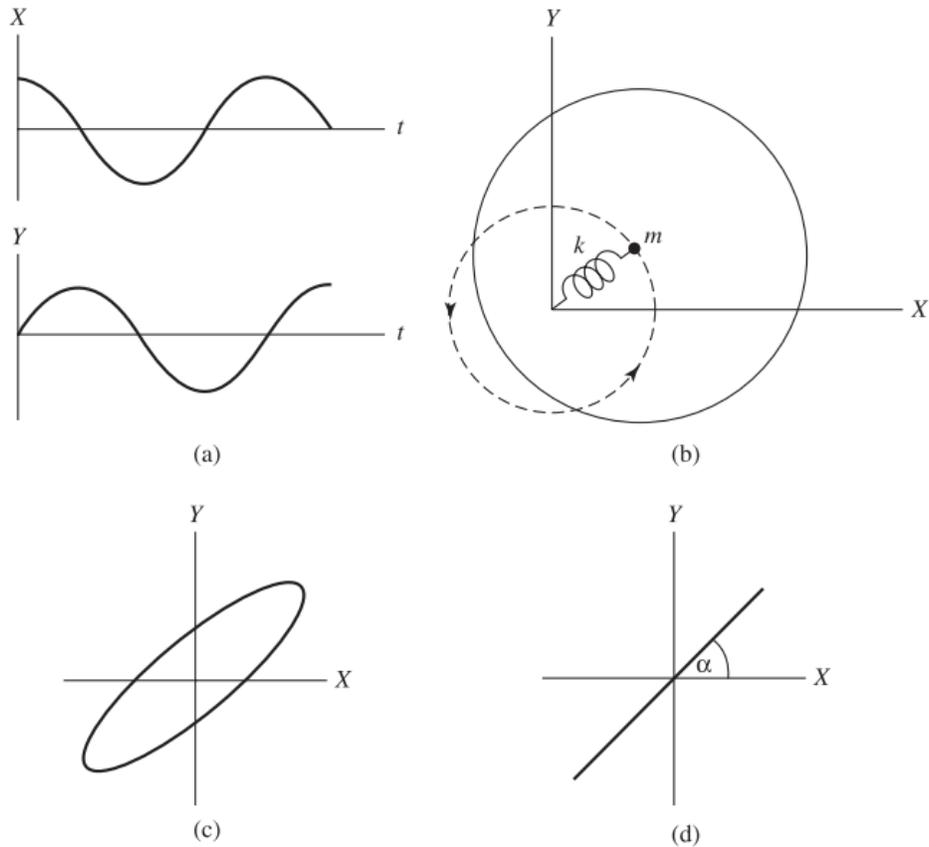


Figura 6. Maneras en las que las vibraciones en los ejes X y Y se combinan para producir orbitas. a) desplazamientos con respecto al tiempo, b) orbita circular, c) orbita elíptica y vibración traslacional.

Modelos como el descrito anteriormente son de ayuda para tratar de comprender el comportamiento de las frecuencias naturales del primer modo, sin embargo, tienen series limitaciones cuando se trata de análisis rotodinámicos más avanzados. Primeramente, el único grado de libertad del modelo masa resorte solo le permite efectuar movimientos de traslación en una dirección, mientras que el sistema rotor-rodamiento puede efectuar orbitas de giro con complejas forma y patrones. Este defecto puede superarse parcialmente añadiendo un segundo grado de libertad al sistema, permitiéndole vibrar en dos direcciones simultáneamente, por ejemplo, en X y Y.

La combinación de vibraciones en ambas direcciones ortogonales puede producir diferentes tipos de movimiento por parte de la masa. El tipo de movimiento producido depende de las amplitudes relativas y la relación de fase del movimiento en X y Y, como se observa en la Figura 6 inciso a). Si la vibración solo posee una frecuencia, los movimientos producidos serán orbitas circulares, figura 6 inciso b), elípticas (Figura 6 inciso c)) y movimientos en línea recta a cualquier ángulo con respecto al eje X (Figura 6 inciso d)).

El modelo de dos grados de libertad que se observa en la figura 7 fue utilizado por Rankine en 1869 para el primer análisis publicado de rotodinámica, en un intento para explicar el comportamiento de las velocidades críticas de los sistemas rotor-rodamiento.

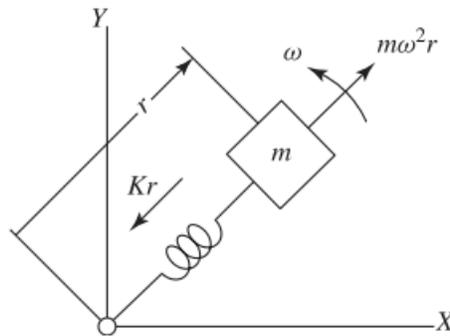


Figura 7. Modelo de Rankine.

El sistema consistía en una masa rígida girando en una órbita circular con un resorte elástico actuando en la dirección radial, como se observa en la figura 7. Rankine empleó la Segunda Ley de Newton de manera incorrecta en el sistema coordinado, predijo que las máquinas rotativas jamás serían capaces de superar su primera velocidad crítica.

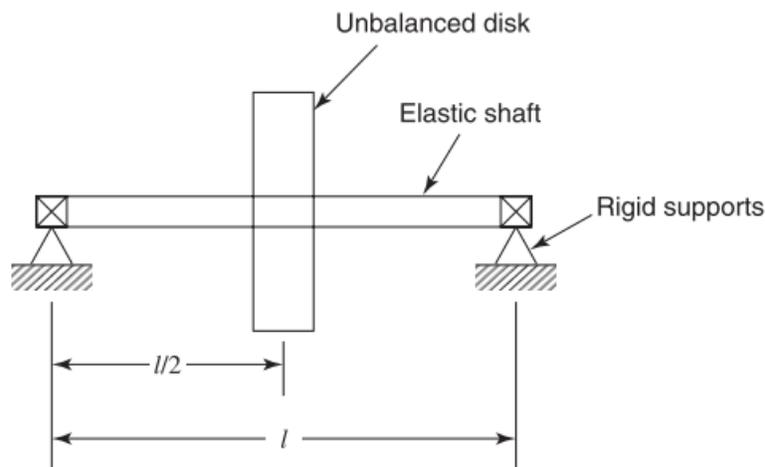


Figura 8. Rotor de Jeffcott, también conocido como Rotor de Prohl.

A pesar de que el sistema masa-resorte de dos grados de libertad es capaz de mostrar las orbitas de un sistema rotor-rodamiento, este no es capaz de proporcionar una representación del desbalance rotativo del rotor. Debido a que los sistemas perfectamente balanceados jamás se presentan en casos reales; y a que es el desbalance rotativo el que excita el tipo de vibraciones



la velocidad de giro. El ángulo  $\beta$  permanece constante, de tal manera que la velocidad de giro y la velocidad rotacional tengan la misma magnitud, manteniendo así, un giro síncrono. Por lo tanto, el desbalance del rotor  $\mathbf{U}$  lidera al vector de giro  $\mathbf{V}$  por un ángulo constante,  $\beta$ . Puede apreciarse que en el inciso b) de la misma figura la razón de cambio con respecto al tiempo del ángulo  $\beta$  es la velocidad de rotación del rotor relativa al vector de giro  $\mathbf{V}$ , de tal forma que la velocidad del eje es la suma de  $\dot{\beta}$  y  $\dot{\phi}$ .

La rotación entre ambos tipos de movimientos de rotación nos provee el factor de clasificación más básico para un análisis del espectro de frecuencias. El análisis de velocidades críticas y respuesta al desbalance lidia únicamente con giros síncronos, mientras que la inestabilidad rotodinámica trata casi exclusivamente con giros no síncronos.

La figura 10 muestra una perspectiva del giro de un rotor de Jeffcott con coordenadas que describen su movimiento. El centro de masa del disco desbalanceado se encuentra ubicado en el punto señalado como  $\mathbf{M}$ , mientras que el punto  $\mathbf{C}$  muestra la ubicación del centro geométrico del disco. Es debido a lo anterior que la magnitud del desbalance estático se denota mediante la siguiente expresión  $u = \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{M}}$ , se expresa en unidades de longitud y la deflexión debida a las cargas dinámicas es  $u = \bar{\mathbf{O}} \cdot \bar{\mathbf{C}}$ . Este análisis desprecia las cargas debidas a la aceleración producida por la gravedad.

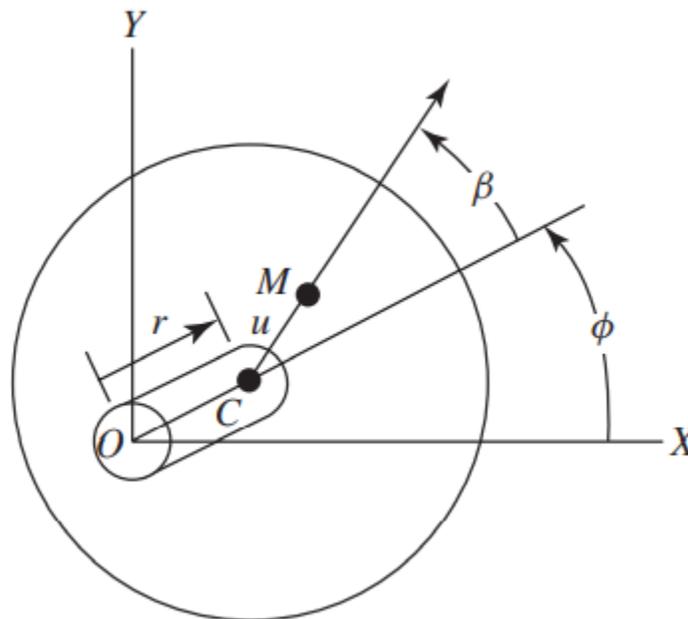


Figura 10. Vista de un Rotor de Jeffcott-Prohl con coordenadas.

El eje tiene una rigidez al pandeo expresada por  $k$ , el disco tiene una masa de  $m$  ( $\frac{\text{masa} \cdot \text{tiempo}^2}{\text{distancia}}$ ) y el arrastre debido al aire producido en el disco giratorio puede aproximarse mediante un coeficiente

de amortiguamiento viscoso,  $c$  ( $\frac{\text{fuerza} \cdot \text{tiempo}}{\text{distancia}}$ ). El sistema dinámico tiene tres grados de libertad, si se asume velocidad constante, dicho número se reduce a dos. Las coordenadas polares presentan una ventaja a la hora de representar las soluciones de giros síncronos en términos constantes que pueden ser fácilmente interpretadas, sin embargo, su principal desventaja consiste en la no linealidad que presentan las ecuaciones de movimiento, volviéndolas poco adecuadas para el análisis de la inestabilidad rotodinámica.

Las coordenadas Cartesianas X y Y (del centro del eje) en conjunto con el ángulo  $\beta$  producen ecuaciones diferenciales lineales. Además, las soluciones obtenidas en términos de estas coordenadas como funciones que varían con respecto al tiempo se correlacionan mejor con las mediciones obtenidas por los sensores de proximidad típicamente utilizados para medir el desplazamiento en los rotores instalados.

Las ecuaciones diferenciales y sus soluciones en ambos sistemas coordenados se presentan a continuación, dichas ecuaciones desprecian el efecto de la gravedad y asumen velocidad rotacional constante en el eje.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento expresadas en coordenadas polares tienen la siguiente forma:

$$\ddot{r} + \frac{c}{m}\dot{r} + \left(\frac{k}{m} - \dot{\phi}^2\right)r = \omega^2 u \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (8)$$

$$r\ddot{\phi} + \left(2\dot{r} + \frac{c}{m}r\right)\dot{\phi} = \omega^2 u \cdot \sin(\omega t - \phi) \quad (9)$$

La solución para el giro síncrono es la siguiente:

$$r_s = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \quad (10)$$

$$\omega_s t - \phi_s = \beta_s \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{m \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)} \right) \quad (11)$$

La amplitud constante del giro  $r_s$  y el ángulo de fase  $\beta_s$  satisfacen las dos primeras ecuaciones diferenciales para cualquier velocidad rotacional ( $\omega$ ) constante. Las gráficas típicas para  $r_s$  y  $\beta_s$  se muestran en la figura 11 para dos valores diferentes de amortiguamiento. En cambio, al ser expresadas en coordenadas cartesianas, las ecuaciones de movimiento vistas anteriormente toman la siguiente forma:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = m\omega^2 u \cdot \cos \omega t \quad (12)$$

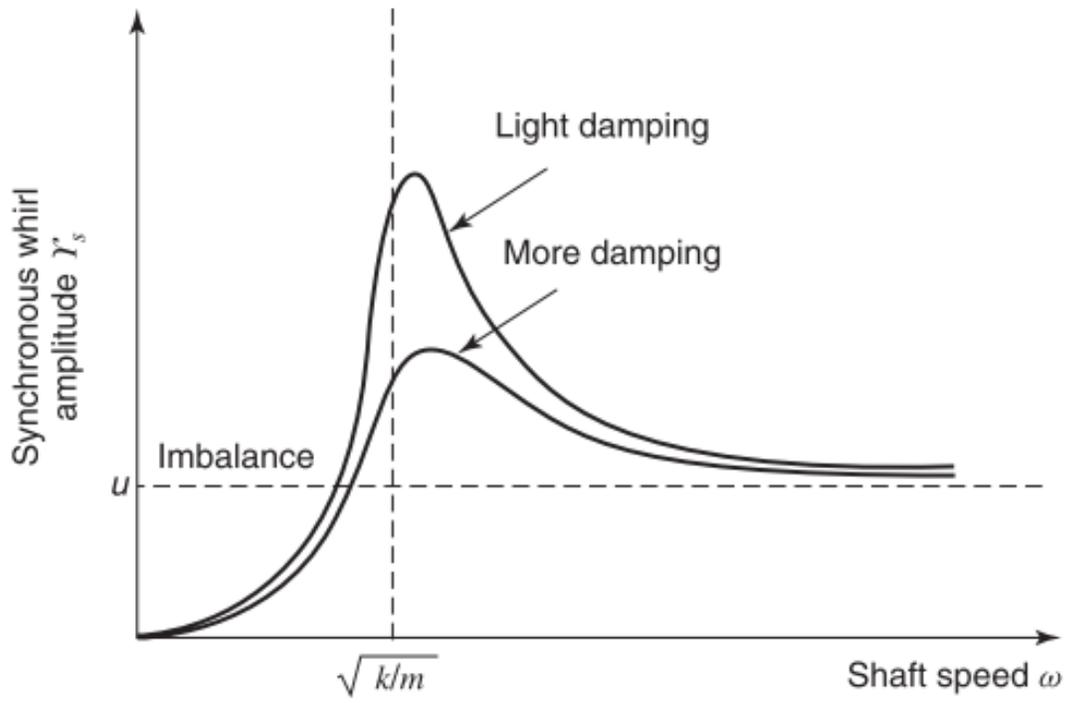
$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = m\omega^2 u \cdot \sin \omega t \quad (13)$$

Es así que la solución para el giro síncrono toma la siguiente forma:

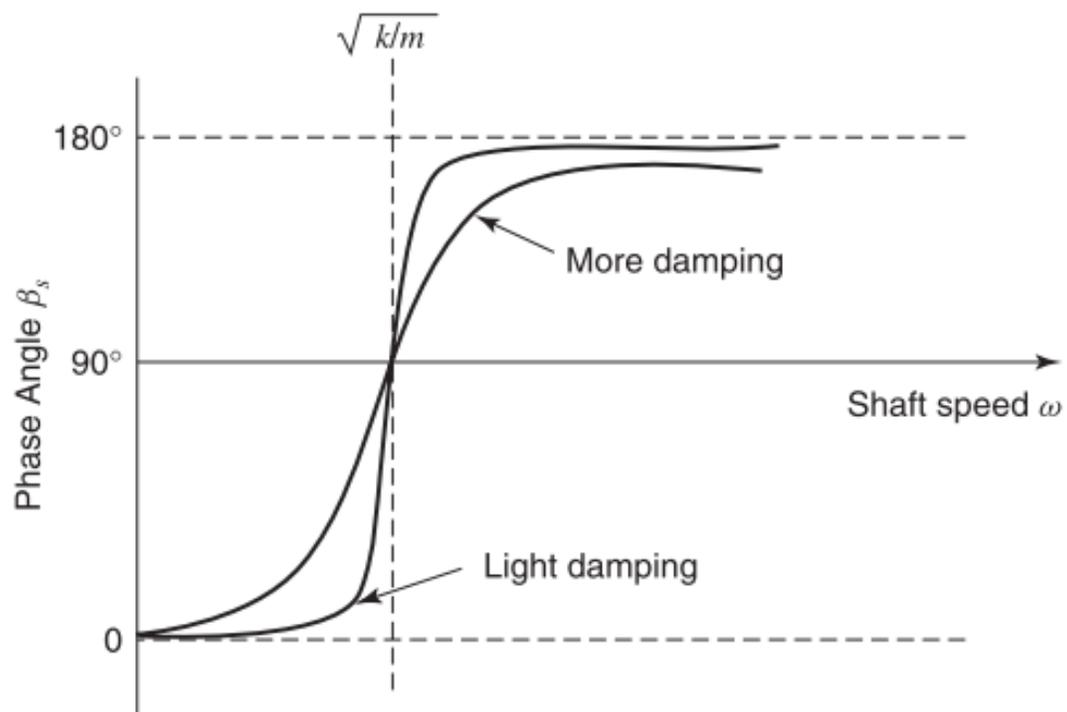
$$X = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \cos(\omega t - \beta_s) \quad (14)$$

$$Y = \frac{\omega^2 u}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \sin(\omega t - \beta_s) \quad (15)$$

$$\beta_s = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{m \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)} \right) \quad (16)$$



(a)



(b)

Figura 11. Respuesta de un rotor de Jeffcott-Prohl en: a) amplitud y b) fase.

Para la geometría de la Figura 10 puede observarse que la deflexión del eje es:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

(17)

Si se inspeccionan las ecuaciones 10, 14 y 15 se puede observar que las soluciones satisfacen la ecuación 15, por lo tanto, el inciso a) de la figura 11 es también una gráfica típica de la amplitud de la vibración horizontal (eje x) o de la vibración vertical (eje y).

La figura 11 inciso a) muertas como es que la amplitud del giro síncrono aumenta con la velocidad conforme el sistema se aproxima a la velocidad crítica, y como es que después disminuye una vez superada la velocidad crítica y se aproxima al valor del desbalance estático a velocidades supercríticas. Por lo tanto, a altas velocidades, se puede reducir la amplitud del giro síncrono del rotor a un valor arbitrariamente pequeño mediante un balanceo de precisión del sistema; a velocidades cercanas a la velocidad crítica puede observarse que el valor más importante en la reducción de la amplitud del giro es el amortiguamiento. El inciso a) de la figura 11 también nos permite plantear la definición más útil de una velocidad crítica, siendo esta: “la velocidad a la cual la respuesta síncrona al desbalance alcanza su amplitud máxima”. Es importante destacar que el amortiguamiento incrementa ligeramente el valor de la velocidad crítica, a la vez que reduce el valor del eigenvalor de vibración libre.

Si inspeccionamos la figura 10, en conjunto con la solución mostrada en el inciso b) de la figura 11, esta nos da una explicación para el comportamiento asintótico de la amplitud de giro hacia  $U$ . Conforme la velocidad crítica es atravesada, el ángulo  $\beta_s$  pasa a través de  $90^\circ$  y se aproxima a  $180^\circ$  a velocidades altamente supercrítica. La figura 10 nos muestra cómo es que  $\beta$  es el ángulo por el cual el desbalance lidera al vector de giro. Por lo tanto, a altas velocidades el centro de masa  $M$  se acerca al interior de la órbita de giro y permanece ahí, a la vez que el centro del eje  $C$  gira alrededor del centro de masa  $M$ . Este fenómeno es conocido como *inversión de velocidad crítica* o *inversión del centro de masa*.

Es importante notar que el centro de masa se mantiene fuera de la órbita de giro solo a bajas velocidades, y que el desbalance supera al vector de giro por un desfase de exactamente  $90^\circ$  cuando la velocidad rotacional del eje iguala a la velocidad crítica no amortiguada ( $\sqrt{k/m}$ ). Este último hecho es la base del método para la medición precisa de la velocidad crítica no amortiguada, la cual, de no ser por esto, tendría una amplitud de giro ilimitada y difícil de medir [8].

Giancarlo Genta Pag.93

En el modelo de Jeffcott-Prohl, se asumía que el rotor tenía una masa puntual, y, consecuentemente no se toman en cuenta los momentos de inercia. Mientras que esta asunción simplifica en gran medida el análisis, impide la posibilidad de estudiar un fenómeno de considerable influencia en el comportamiento dinámico de los rotores, y, particularmente uno que hace que las frecuencias de

los modos a flexión dependan de la velocidad de giro, provocando, por ejemplo, que el diagrama de Campbell deje de ser una gráfica con líneas rectas y horizontales.

El modelo más simple para evaluar este comportamiento se muestra en los incisos a) y b) de la figura 12, ya sea mediante un cuerpo rígido sujeto a un eje flexible sin masa o un rotor rígido sobre montado en rodamientos flexibles. Un sistema más complejo se muestra en el inciso c), en el cual ambos, rotor y rodamientos son flexibles; como si se tratase del rotor de Jeffcott-Prohl, los tres casos coinciden si se desprecia el amortiguamiento.

El presente modelo no es muy distinto al rotor de Jeffcott-Prohl, con la única diferencia de que en lugar de haber una masa puntual en C hay un cuerpo rígido con momentos de inercia. Uno de los principales de inercia coincide, cuando el rotor no se encuentra deformado, con el eje Z mostrado en la figura 11, y su elipsoide de inercia tiene simetría axial con respecto a ese mismo eje. El principal de los momentos de inercia del cuerpo rígido con respecto al eje de rotación será referido como *momento de inercia polar*,  $J_p$ , y como *momento de inercia transversal*,  $J_t$ , con respecto a cualquier otro eje en el plano de rotación.

Si  $J_p > J_t$ , el cuerpo suele ser referido como *disco*; con la limitación siendo un disco infinitesimalmente delgado, tal que  $J_p = 2J_t$ . Si  $J_p < J_t$ , el rotor suele ser denominado como un *rotor largo*. Un caso particular es cuando  $J_p = J_t$ ; en cuyo caso, el elipsoide de inercia se deformaría formando una esfera como se mostrará después, esta configuración debe evitarse en rotores con giros de alta velocidad.

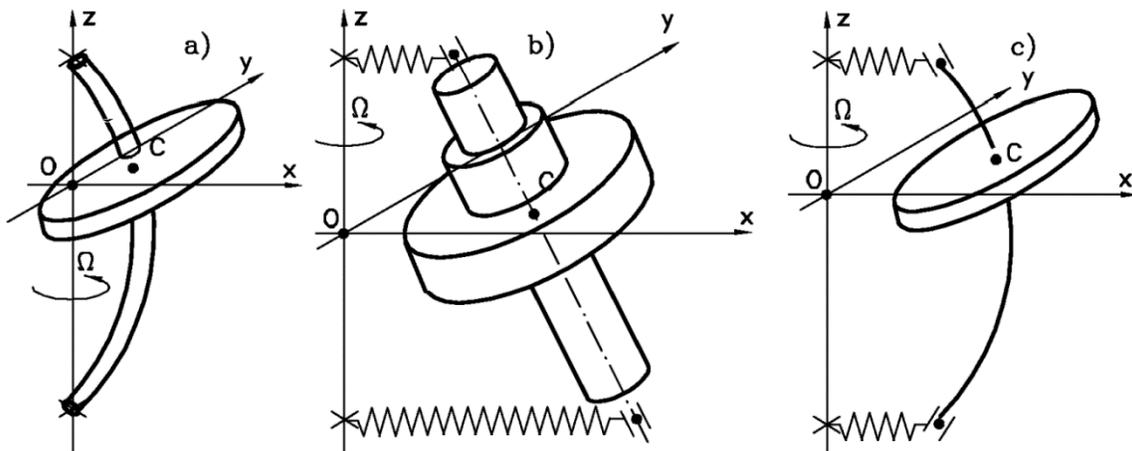


Figura 12. Rotor con 4 grados de libertad. a) Cuerpo rígido montado en un eje flexible sin masa, b) rotor rígido montado en rodamientos flexibles, y c) rotor en el cual ambos, rodamientos y eje son flexibles. En a) y c) se asume que el disco es un cuerpo rígido.

Es importante asumir que, debido a pequeños errores o defectos de manufactura, el punto en el que se ubica el centro de gravedad del rotor puede no coincidir con el centro del eje. La distancia entre estos dos puntos se conoce como excentricidad  $\epsilon$ . Además, el eje de simetría del cuerpo

rígido no coincide exactamente con el eje de rotación, siendo el ángulo entre ellos un pequeño error angular referido como  $\chi$ . Se asume que ambos errores son pequeños, causan un *desbalance estático* y un *par de desbalances* respectivamente.

Estrictamente hablando, el sistema tiene 6 grados de libertad, y 6 coordenadas generalizadas deben definirse para el estudio de su comportamiento dinámico. El desacoplamiento entre los comportamientos axiales, flexurales y torsionales observado en el rotor de Jeffcott-Prohl se mantendrá también en este caso, y un modelo con 4 grados de libertad es adecuado para el estudio del comportamiento flexural a una velocidad constante, para lo cual es necesario hacer un par de asunciones que simplifican bastante el modelo.

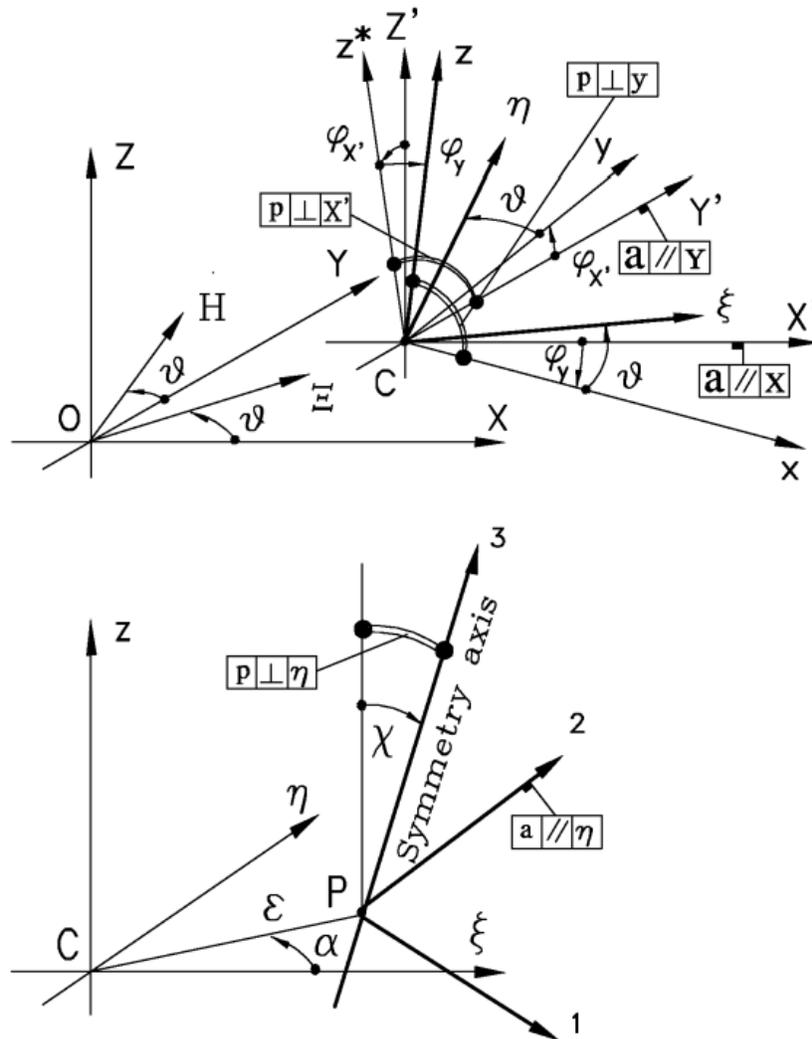


Figura 13. Marcos de referencia utilizados en el estudio del rotor con 4 grados de libertad. El símbolo encerrado en los recuadros indica si el eje (a) o plano (p, indicado con el doble arco) es paralelo o perpendicular a algún eje.

Las coordenadas generalizadas utilizadas para el modelo se definen en base al marco de referencia mostrado en el inciso a) de la figura 13.

- Marco  $OXYZ$  : Marco inercial, con origen en O y el eje Z coincidente con el eje de rotación del rotor.
- Marco  $O\Xi HZ$  con origen en O y un eje Z coincidente con el del marco de referencia anterior; con ejes  $\Xi$  y H rotando en el plano XY a una velocidad angular  $\omega$ , en caso de que se opera a una velocidad constante. Este marco será referido como *marco rotativo*.
- Marco  $CX'Y'Z'$  con origen en C: Sus ejes permanecen paralelos con los del marco  $OXYZ$  . El plano  $X'Y'$  permanece paralelo al plano XY.
- Marco  $Cxyz$  con origen en C: Su eje z coincide con el eje de rotación del cuerpo rígido en la posición deformada, y los ejes X y Y se definen mediante las siguientes rotaciones:
  - Rotando los ejes del marco  $CX'Y'Z'$  con respecto al eje  $X'$  con una magnitud de un ángulo  $\phi_{x'}$  hasta que el eje de  $Y'$  entre al plano de rotación del cuerpo rígido en su configuración deformada. Siendo los ejes obtenidos el y y z \*. La matriz de rotación que permite expresar los componentes del vector en el marco de referencia  $CX'yz^*$  a partir de los encontrados en el marco de referencia  $CX'Y'Z'$  (o en el marco inercial de referencia, debido a que las direcciones de los ejes coinciden) es:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{x'}) & \sin(\phi_{x'}) \\ 0 & -\sin(\phi_{x'}) & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix}$$

(18)

- Rotando el marco obtenido a partir de la rotación mencionada anteriormente con respecto al eje Y hasta que el eje  $X'$  entre también al plano de rotación del cuerpo rígido en su configuración deformada. Siendo el eje obtenido el eje x y el angulo de rotación  $\phi_y$ , después de las dos rotaciones mencionadas anteriormente el eje z coincide, aparte del error  $\chi$ , con el eje de simetría del cuerpo rígido en su configuración deformada. El marco de referencia  $Cxyz$  se encuentra centrado en el centro del eje del cuerpo rígido y o sigue en su movimiento giratorio, sin embargo, no rota a la velocidad rotacional  $\omega$ . En adelante será referenciado como *marco giratorio*. Siendo la matriz que expresa esta segunda rotación:

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{x'}) & 0 & -\sin(\phi_{x'}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi_{x'}) & 0 & \cos(\phi_{x'}) \end{bmatrix}$$

(19)

- Marco  $C\xi\eta z$  con origen en  $C$ : Se obtiene a partir del marco de referencia  $Cxyz$  mediante la rotación de los ejes  $x$  y  $y$  en el plano  $xy$  con una magnitud igual al ángulo de rotación  $\theta$  del rotor correspondiente a la velocidad de giro. Si la rotación ocurre a una velocidad de giro constante  $\omega$ , el ángulo  $\theta$  es igual a  $\omega t$ . El marco  $C\xi\eta z$  está en realidad fijo al cuerpo rígido, aunque no se encuentre centrado en su centro de gravedad debido a la excentricidad  $\epsilon$ , ni sea el marco principal de inercia debido al error angular  $\chi$ . De ahora en adelante será referido como *marco rotativo y giratorio*. La matriz que permite expresar un vector en el marco  $C\xi\eta z$  es:

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(20)

Donde  $\theta = \Omega t$  a velocidad de operación constante.

- Marco  $P123$ , contiene los principales ejes de inercia del cuerpo rígido: como se ha dicho anteriormente, se asume que el rotor se encuentra ligeramente desbalanceado. Debido a que la posición angular del rotor en el marco  $C\xi\eta z$  es inmaterial, se asumirá que el eje principal de inercia, correspondiente al momento de inercia  $J_p$  se encuentra en un plano paralelo al  $\xi z$ . Como se asume que el desbalance estático se encuentra en el mismo plano que el par de desbalance, no es posible asumir que la excentricidad se encuentra sobre el eje  $\xi$ , como es el caso en el rotor de Jeffcott-Prohl. Las condiciones del desbalance se encuentran resumidas en el inciso b) de la figura 13, donde se muestra como el desbalance estático lidera al par de desbalance por un ángulo de fase  $\alpha$ . Una cuarta matriz de rotación  $R_4$  que permite la transición del sistema del marco de referencia  $C\xi\eta z$  a los ejes principales del cuerpo rígido  $P123$  debe definirse

$$R_4 = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & 0 & -\sin(\chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\chi) & 0 & \cos(\chi) \end{bmatrix}$$

(21)

Las transformaciones necesarias para pasar de un marco de referencia a otro se muestran a continuación en la Tabla 1:

from	to	translation	rotation
OXYZ	CX'Y'Z'	$[ X_C \ Y_C \ 0 ]^T$	-
CX'Y'Z'	CX'yz*	-	$\mathbf{R}_1$
CX'yz*	Cxyz	-	$\mathbf{R}_2$
Cxyz	Cξηz	-	$\mathbf{R}_3$
Cξηz	P123	$[ \epsilon_\xi \ \epsilon_\eta \ 0 ]^T$	$\mathbf{R}_4$

Tabla 1 Resumen de las transformaciones entre los distintos marcos de referencia de los vectores de desplazamiento y matrices de rotación.

Si tomamos las coordenadas X, Y y Z del punto C, así como los ángulos  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ , y  $\theta$  como coordenadas del cuerpo rígido y asumimos un pequeño desplazamiento en las primeras 5 coordenadas nos permitirá simplificar en gran medida el problema; la coordenada  $\theta$  por otro lado, no puede considerarse pequeña.

La velocidad en el centro de gravedad (P en la figura 13) y la velocidad angular expresada en el sistema principal de inercia deben ser calculadas para poder determinar la energía cinética del cuerpo rígido. La posición de P puede obtenerse mediante la siguiente ecuación.

$$(\overline{P - O}) = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} + R_1^T R_2^T R_3^T \begin{Bmatrix} \epsilon_\xi \\ \epsilon_\eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

La asunción de los pequeños desplazamientos permite la linealización de las funciones trigonométricas de los ángulos  $\phi_{x'}$  y  $\phi_{y'}$  a la vez que desprecia algunos términos del mismo orden que aquellos que se desprecian al truncar funciones trigonométricas después del primer término; lo que reduce la ecuación 22 a la siguiente expresión.

$$(\overline{P - O}) = \begin{Bmatrix} X + \epsilon \cos(\theta + \alpha) \\ Y + \epsilon \sin(\theta + \alpha) \\ Z + \epsilon [\phi_{x'} \sin(\theta + \alpha) - \phi_{y'} \cos(\theta + \alpha)] \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Donde el desbalance se expresa en términos de amplitud y fase ( $\epsilon$  y  $\alpha$ ) en lugar de componentes como  $\epsilon_\xi = \epsilon \cos(\alpha)$  y  $\epsilon_\eta = \epsilon \sin(\alpha)$ .

Las ecuaciones de movimiento se obtienen siguiendo una aproximación Lagrangiana de las expresiones de las energías cinética y potencial. Las coordenadas generalizadas son 5:  $X, Y, Z, \phi_x$  y  $\phi_y$ ;  $\theta$  no se considera una coordenada Lagrangiana ya que se asume que la velocidad es constante. Solo los comportamientos laterales y axiales del sistema se consideran para el análisis, dejando de lado la dinámica torsional.

La energía cinética del sistema puede ser fácilmente computada mediante la suma de la energía cinética traslacional del centro de masa y la energía cinética rotacional.

$$\tau = \tau_t + \tau_r = \frac{1}{2} m V_p^2 + \frac{1}{2} \Omega'_{123}{}^T J \Omega'_{123} \quad (24)$$

Donde  $V_p$  es la velocidad del centro de masa,  $\Omega'_{123}$  es el vector de velocidad angular expresado en el marco de referencia 123 y:

$$J = \begin{bmatrix} J_t & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (25)$$

Es el tensor de inercia del cuerpo rígido expresado en el mismo marco de referencia.

La velocidad del centro de gravedad del rotor puede determinarse fácilmente derivando el vector  $(\overline{P-O})$  con respecto al tiempo, recordando que  $\dot{\theta} = \Omega$  y el ángulo  $\alpha$  es constante, al hacerlo obtenemos la siguiente expresión:

$$V_P = \left\{ \begin{array}{c} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} + \epsilon [(\Omega \phi_{x'} - \dot{\phi}_y) \cos(\theta + \alpha) + (\Omega \phi_y + \dot{\phi}_{x'}) \sin(\theta + \alpha)] \end{array} \right\} \quad (26)$$

En la tercera fila de la ecuación 26 hay dos términos: El primero representa la velocidad en la dirección axial causada por el desplazamiento del punto C en la misma dirección, y el segundo de estos representa la velocidad en la dirección axial causada por la excentricidad y las rotaciones de la sección transversal del eje. Es fácil verificar que el último término produce un acoplamiento

entre los comportamientos axial y flexural del rotor; sin embargo, si la excentricidad es pequeña, esta se vuelve despreciable comparada con el primer término. A continuación, se muestra el desarrollo de una expresión en la cual se desprecian todos los términos que contengan productos de la excentricidad o el error angular en los casos en los que estas tengan valores lo suficientemente pequeños como para ser despreciados, y no obteniendo, por lo tanto, un acoplamiento axial-flexural. La velocidad traslacional cinética es, por tanto:

$$T_t = \frac{1}{2} m \{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 + \epsilon^2 \Omega^2 + 2\epsilon \Omega [ -\dot{X} \sin(\Omega t + \alpha) + \dot{Y} \cos(\Omega t + \alpha) ] \} \quad (27)$$

La velocidad angular  $\Omega'_{123}$  puede obtenerse mediante la suma de los tres vectores de la velocidad angular actuando en diferentes direcciones:  $\dot{\phi}_x$  a lo largo del eje X,  $\dot{\phi}_y$  a lo largo del eje Y y  $\dot{\theta}$  a lo largo del eje Z. Utilizando las matrices de rotación relevantes, los componentes de la velocidad angular a lo largo de los ejes principales de inercia del rotor  $\Omega'_{123}$  son:

$$\Omega'_{123} = R_4 \left[ R_3 \left( R_2 \left( \begin{matrix} \dot{\phi}_{x'} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)_{x'y'z'} + \begin{matrix} 0 \\ \dot{\phi}_y \\ 0 \end{matrix} \right)_{xyz'} \right] + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix} \Big|_{\xi\eta z} \quad (28)$$

Recordando las asunciones de pequeños desplazamientos la ecuación 28 para a tener la siguiente forma:

$$\Omega'_{123} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi}_x \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \sin(\theta) - \chi \Omega \\ -\dot{\phi}_{x'} \sin(\theta) + \dot{\phi}_y \cos(\theta) \\ \dot{\phi}_{x'} [\chi \cos(\theta) + \phi_y] + \dot{\phi}_y \chi \sin(\theta) + \Omega \end{matrix} \right\} \quad (29)$$

Como los componentes de  $\Omega'_{123}$  son referidos a los principales ejes de inercia, despreciando todos los términos pequeños, la energía cinética rotacional puede ser computada como:

$$T_r = \frac{1}{2} \left\{ J_t (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2 + \chi^2 \Omega^2) + J_p (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\phi}_x \dot{\phi}_y) + 2\Omega \chi (J_p - J_t) [\dot{\phi}_x \cos(\theta) + \dot{\phi}_y \sin(\theta)] \right\} \quad (30)$$

Las únicas fuerzas y momentos actuando en el cuerpo rígido en P que serán consideradas son aquellas provocadas por la reacción elástica del eje. Debido a que se asume que el comportamiento del eje es lineal, las fuerzas y momentos se encuentran enlazadas a las coordenadas generalizadas mediante la matriz de rigidez del eje; además, el comportamiento lateral del rotor se dé nuevo desacoplado de los comportamientos axial y torsional, quedando acopladas únicamente las fuerzas y desplazamientos en el plano  $xy$ , así como las rotaciones relacionadas. La situación en el plano  $xz$  es similar a aquella en el plano  $yz$ , pero si los mismos elementos de la matriz de rigidez son utilizados debido a la simetría axial del eje; las diferentes convenciones en ambos planos obligan al uso de signos opuestos para los elementos con subscritos 12 y 21 en las matrices de rigidez relacionadas a ambos planos:

$$K_{xz} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$K_{yz} = - \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} \\ -K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Las matrices de rigidez  $K_{xz}$  y  $K_{yz}$  puede obtenerse de diferentes maneras, por ejemplo, utilizando las fórmulas que se presentan en varios libros de análisis de esfuerzos, o mediante el método del elemento finito. También es posible obtenerlas mediante la inversión de la matriz de flexibilidad:

$$K = B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (33)$$

Donde los varios términos  $\beta_{ij}$  son los coeficientes de influencia del sistema. En el caso presente,  $\beta_{11}$  es el desplazamiento del punto P causado por una unidad de fuerza o el desplazamiento

causado por una unidad de torque,  $\beta_{22}$  es la rotación provocada por una unidad de torque. El cálculo de las matrices de flexibilidad y rigidez se muestra a detalle a continuación.

La energía potencial es, por tanto:

$$u = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} X \\ \phi_y \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_{xz} \begin{Bmatrix} X \\ \phi_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} Y \\ \phi_{x'} \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_{yz} \begin{Bmatrix} Y \\ \phi_{x'} \end{Bmatrix}$$

(34)

Mediante la introducción de la función de LaGrange  $\mathcal{T} - u$  en la ecuación de Lagrange y llevando a cabo ciertas derivadas, se obtienen las ecuaciones de movimiento del rotor no amortiguado con 4 grados de libertad:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + K_{11}X + K_{12}\phi_y = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) \\ m\ddot{Y} + K_{11}Y - K_{12}\phi_{x'} = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) \\ J_t\ddot{\phi}_{x'} + J_p\Omega\dot{\phi}_y - K_{12}Y + K_{22}\phi_{x'} = -\chi\Omega^2(J_t - J_p) \sin(\Omega t) \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{x'} + K_{12}X + K_{22}\phi_y = \chi\Omega^2(J_t - J_p) \cos(\Omega t) \end{cases}$$

(35)

La cuales pueden expresarse de en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{\phi}_y \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\phi}_{x'} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{Y} \\ \dot{\phi}_{x'} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} & -K_{12} \\ 0 & 0 & -K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \phi_y \\ Y \\ \phi_{x'} \end{Bmatrix} \\ = \Omega^2 \begin{Bmatrix} m\epsilon \cos(\Omega t + \alpha) \\ \chi(J_t - J_p) \cos(\Omega t) \\ m\epsilon \sin(\Omega t + \alpha) \\ -\chi(J_t - J_p) \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

(36)

Si se utiliza  $-\phi_{x'}$  en lugar de  $\phi_{x'}$  como la coordenada generalizada para las rotaciones con respecto al eje X, la matriz de rigidez asume un patrón más regular con todos los términos positivos y la matriz giroscópica antisimétrica que contiene los momentos polares de inercia es reemplazada por

su transpuesta. También es posible, de igual manera, definir un conjunto de coordenadas complejas que nos permiten expresar las ecuaciones de movimiento en una forma más compacta:

$$\begin{cases} r = X + iY \\ \phi = \phi_y - i\phi_x, \end{cases} \quad (37)$$

Notemos que, definiendo un sistema coordenado complejo de esta manera, la parte real del sistema coordenado se referirá al comportamiento de nuestro sistema en el plano  $xz$ , mientras que la parte compleja hará referencia al comportamiento en el plano  $yz$ . Además, el signo (-) en la definición de  $\phi$  se encarga de las distintas convenciones de signos en ambos planos de flexión, todas las definiciones alternativas de  $\phi$ , por ejemplo:

$$\phi = \phi_x + i\phi_{x'} \quad (38)$$

Nos llevaría a un escenario con ecuaciones más complicadas, con una mezcla de características que ocurren en ambos planos, perdiendo de esta manera la mayoría de las ventajas de utilizar coordenadas complejas.

Partamos de las siguientes formas de las ecuaciones de movimiento, si tomamos la segunda de estas ecuaciones y la multiplicamos por la unidad imaginaria  $i$  y sumándola a la primera ecuación, para después multiplicar la tercera ecuación por  $-i$  y sumársela a la cuarta.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{X} - m\epsilon\dot{\theta}^2[\ddot{\theta}\sin(\theta + \alpha) + \dot{\theta}^2\cos(\theta + \alpha)] = F_x \\ m\ddot{Y} - m\epsilon\dot{\theta}^2[-\ddot{\theta}\cos(\theta + \alpha) + \dot{\theta}^2\sin(\theta + \alpha)] = F_y \\ m\ddot{Z} = F_z \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{x'} - \chi(J_t - J_p)[\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta)] = M_x + \phi_y M_z \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{x'} - \chi(J_t - J_p)[\ddot{\theta}\sin(\theta) + \dot{\theta}^2\cos(\theta)] = M_y \\ (J_p + J_t\chi^2 + m\epsilon^2)\ddot{\theta} + m\epsilon[\ddot{X}\sin(\theta) + \ddot{Y}\cos(\theta)] - \chi(J_t - J_p)[\ddot{\phi}_{x'}\cos(\theta) + \ddot{\phi}_y\sin(\theta)] = M_z \end{array} \right. \quad (39)$$

Dicho proceso nos permitirá reducir las ecuaciones de movimiento a la siguiente forma:

$$\begin{cases} m\ddot{r} + K_{11}r + K_{12}\phi = m\epsilon\Omega^2 e^{(\Omega t + \alpha)} \\ J_t\ddot{\phi} - i\Omega J_p\dot{\phi} + K_{12}r + K_{22}\phi = \chi\Omega^2(J_t - J_p)e^{i\Omega t} \end{cases} \quad (40)$$

La cual poder expresarse de una manera incluso más compacta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - i\Omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \Omega^2\mathbf{f}e^{i\Omega t} \quad (41)$$

El vector de coordenadas complejas, las matrices de masa, giroscópica y de rigidez, así como el vector de desbalance en la ecuación 41 son respectivamente:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} r \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_t \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} m\epsilon e^{i\alpha} \\ \chi(J_t - J_p) \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Nótese que todas las matrices son simétricas cuando se utilizan coordenadas complejas, en cambio, cuando se utilizan coordenadas reales la matriz giroscópica es antisimétrica.

La presencia de amortiguamiento puede ser explicada de una manera bastante sencilla si los modelos de amortiguamiento viscoso o histerético se toman en cuenta. Como en el caso del modelo desarrollado por Jeffcott y Prohl, es importante distinguir entre el amortiguamiento rotativo y no rotativo y utilizar dos matrices de amortiguamiento. En caso del amortiguamiento viscoso, la ecuación de movimiento para el sistema amortiguado es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_n + \mathbf{C}_r - i\Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - i\Omega\mathbf{C}_r)\mathbf{q} = \Omega^2\mathbf{f}e^{1\Omega t} \quad (47)$$

Donde la estructura de las matrices  $\mathbf{C}_n$  y  $\mathbf{C}_r$  es similar a la de la matriz de rigidez.

De nuevo el amortiguamiento rotativo produce la presencia de una matriz circulatoria, en la cual las coordenadas reales son antisimétrica y las coordenadas complejas es simétrica pero imaginaria.

Las condiciones de desbalance ya fueron resumidas previamente en el inciso b) de la figura 13, con el eje principal de inercia correspondiendo con el momento de inercia  $J_p$  del cuerpo rígido en un plano paralelo al plano  $\xi z$  y con su desbalance estático liderando al desbalance acoplado por un ángulo de fase  $\alpha$ . Esto suele ser suficiente para el estudio de un rotor isotrópico debido a que la posición del rotor en el marco de referencia  $C\xi\eta z$  es inmaterial. Sin embargo, en muchos casos la posición de los ejes  $\xi$  y  $\eta$  se encuentra fija con respecto al rotor en lugar de depender del desbalance acoplado, que generalmente se asume, lidera al plano paralelo al plano  $\xi z$  por un ángulo  $\beta$ .

El vector de fuerzas generalizadas provocado por el desbalance toma entonces la siguiente forma:

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{l} m\epsilon e^{i\alpha} \\ \chi(J_t - J_p)e^{i\beta} \end{array} \right\} \quad (48)$$

Como se puede observar en la ecuación 20, ambas ecuaciones se desacoplan si  $K_{12} = 0$ , por ejemplo, si los grados de libertad traslacionales se desacoplan elásticamente de los rotacionales, el movimiento traslacional ocurrirá de tal forma que el eje del rotor permanezca paralelo al de los rodamientos, dicho tipo de movimiento se conoce como *giro cilíndrico*, en cambio, cuando el movimiento rotacional se da con respecto al centro de masa se le conoce como *giro cónico*. Ambos tipos de movimiento se pueden apreciar en la figura 14.

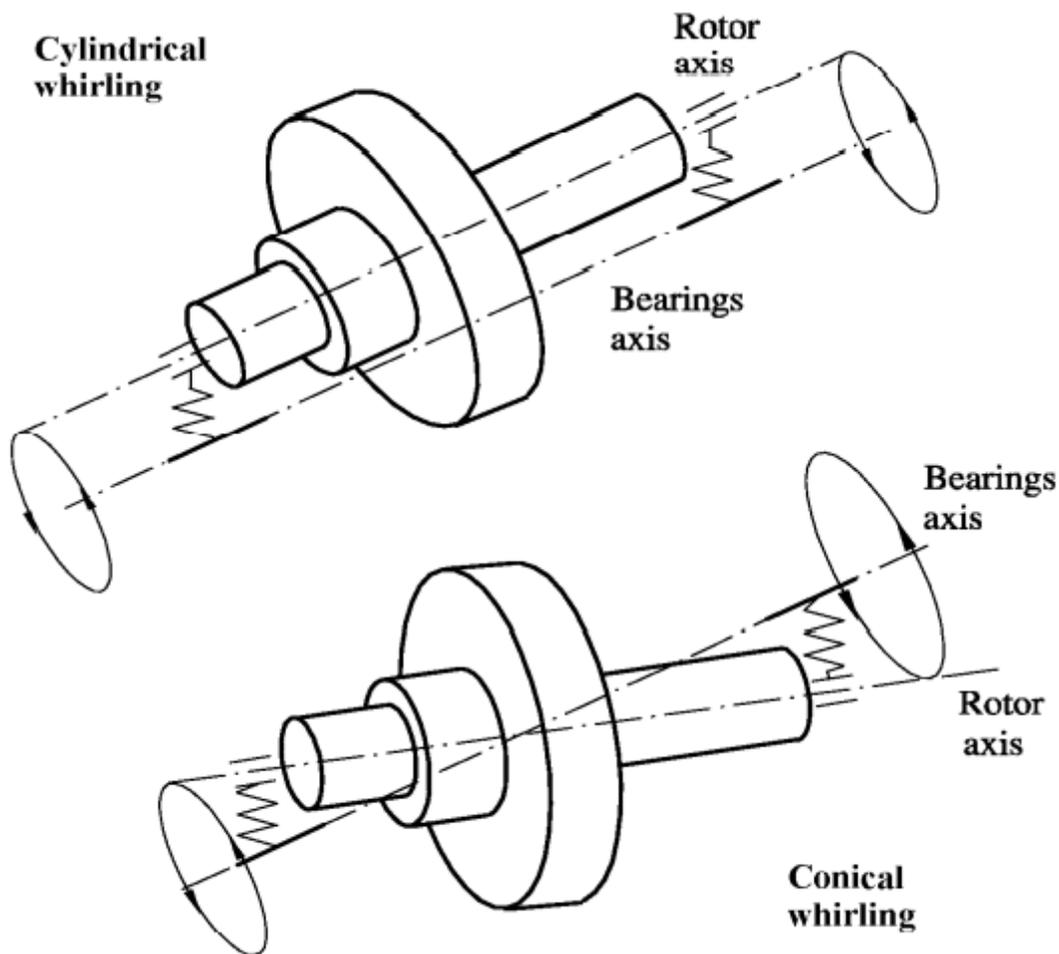


Figura 14. Giro cilíndrico y cónico de un rotor rígido montado sobre rodamientos flexibles, el término eje de los rodamientos se refiere a la posición no deformada del rotor.

Esto puede ocurrir, por ejemplo, en el caso de un rotor rígido que se encuentre montado en un par de rodamientos, cuyo centro de masa se encuentre justo a mitad de la longitud del eje, la cual no es una situación extraña en la práctica; lo anterior, reduce la ecuación de movimiento a la siguiente expresión:

$$\begin{cases} m\ddot{r} + K_{11}r = m\epsilon\Omega^2 e^{i(\Omega t + \alpha)} \\ J_t\ddot{\phi} - i\Omega J_p\dot{\phi} + K_{22}\phi = \chi\Omega^2 (J_t - J_p)e^{i(\Omega t + \beta)} \end{cases}$$

(49)

La primera de estas ecuaciones es idéntica a la del rotor de Jeffcott-Prohl, la segunda, en cambio, describe el comportamiento del sistema giroscópico más simple que puede concebirse. El giro libre

del sistema no amortiguado puede estudiarse mediante el empleo de la ecuación homogénea asociada con la ecuación de la segunda fila de la ecuación 49, mediante la introducción de una solución del tipo  $\phi = \phi_0 e^{st}$ , resultando su solución en una ecuación lineal algebraica de la siguiente forma:

$$\phi_0(J_t S^2 + i s J_p \Omega + K_{22}) = 0 \quad (50)$$

La ecuación característica cuyo resultado tiende a las frecuencias de giro es:

$$(J_t S^2 + i s J_p \Omega + K_{22}) = 0 \quad (51)$$

Cuyas soluciones son:

$$s = \frac{i J_p \Omega \pm \sqrt{-J_p^2 - 4 J_t K_{22}}}{2 J_t} = i \frac{J_p \Omega \pm \sqrt{J_p^2 \Omega^2 + 4 J_t K_{22}}}{2 J_t} \quad (52)$$

Recordando que  $s = \sigma + i\omega$ , nuestra solución resulta:

$$\begin{cases} \omega = \frac{J_p \Omega \pm \sqrt{J_p^2 \Omega^2 + 4 J_t K_{22}}}{2 J_t} \\ \sigma = 0 \end{cases} \quad (53)$$

O, en su forma no dimensional:

$$\begin{cases} \omega^* = \frac{\delta\Omega^*}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2\Omega^{*2}}{4} + 1} \\ \sigma^* = 0 \end{cases}$$

(54)

Donde:

$$\delta = \frac{J_p}{J_t}$$

(55)

Puede tener valores que vayan de 0 a 2. La frecuencia de giro no dimensional  $\omega^* = \omega/\omega_0$  y la velocidad de giro  $\Omega^* = \Omega/\omega_0$  son obtenidas mediante la frecuencia natural del sistema en reposo  $\omega_0 = \sqrt{K_{22}/J_t}$ . La ecuación 54 ha sido graficada para diferentes valores de  $\delta$  en la figura 15.

Las principales características del diagrama de Campbell son las siguientes:

- Las curvas no son rectas horizontales, a menos que  $\delta = 0$ , como puede ser el caso cuando el efecto giroscópico se desvanece.
- La frecuencia de los giros hacia atrás disminuye en su valor absoluto conforme aumenta la velocidad, y el mismo tiende a 0 cuando  $\Omega \rightarrow \infty$ .
- La frecuencia de los giros delanteros incrementa conforme aumenta la velocidad, y la curva relevante tiene una asíntota inclinada cuya ecuación es:  $\omega = \delta\Omega$ .
- Si  $\delta > 1$ , por ejemplo, si se trata de un rotor similar a un disco, no existe intersección de la curva con la línea  $\omega = \Omega$ , lo cual significa que no hay velocidad crítica.
- Si  $\delta < 1$ , o, en otras palabras, nuestro rotor es un rotor largo, la curva interseca la línea  $\omega = \Omega$  y existe una velocidad crítica asociada a un movimiento cónico. El valor de esta velocidad crítica puede obtenerse mediante la introducción de la siguiente expresión:  $\omega = \Omega = \Omega_{cr}$  en la siguiente ecuación:

$$J_t s^2 + i s J_p \Omega = 0$$

(56)

Obteniendo como resultado la siguiente expresión:

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{K_{22}}{J_t - J_p}} = \sqrt{\frac{K_{22}}{J_t} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta}}}$$

(57)

- Si  $\delta = 1$ , como en el caso de un rotor esférico, la curva no llega a intersectarse con la línea  $\omega = \Omega$ , pero tiende asintóticamente hacia esta cuando  $\Omega \rightarrow \infty$ . Para este caso no existe una velocidad crítica asociada al movimiento cónico, pero la situación es en cierta forma similar a la de un campo de inestabilidad, aunque no permite la vibración autoexcitada, la respuesta al desbalance crece de manera continua a la vez que la velocidad se incrementa, ninguna configuración auto centrada puede alcanzarse a alta velocidad.

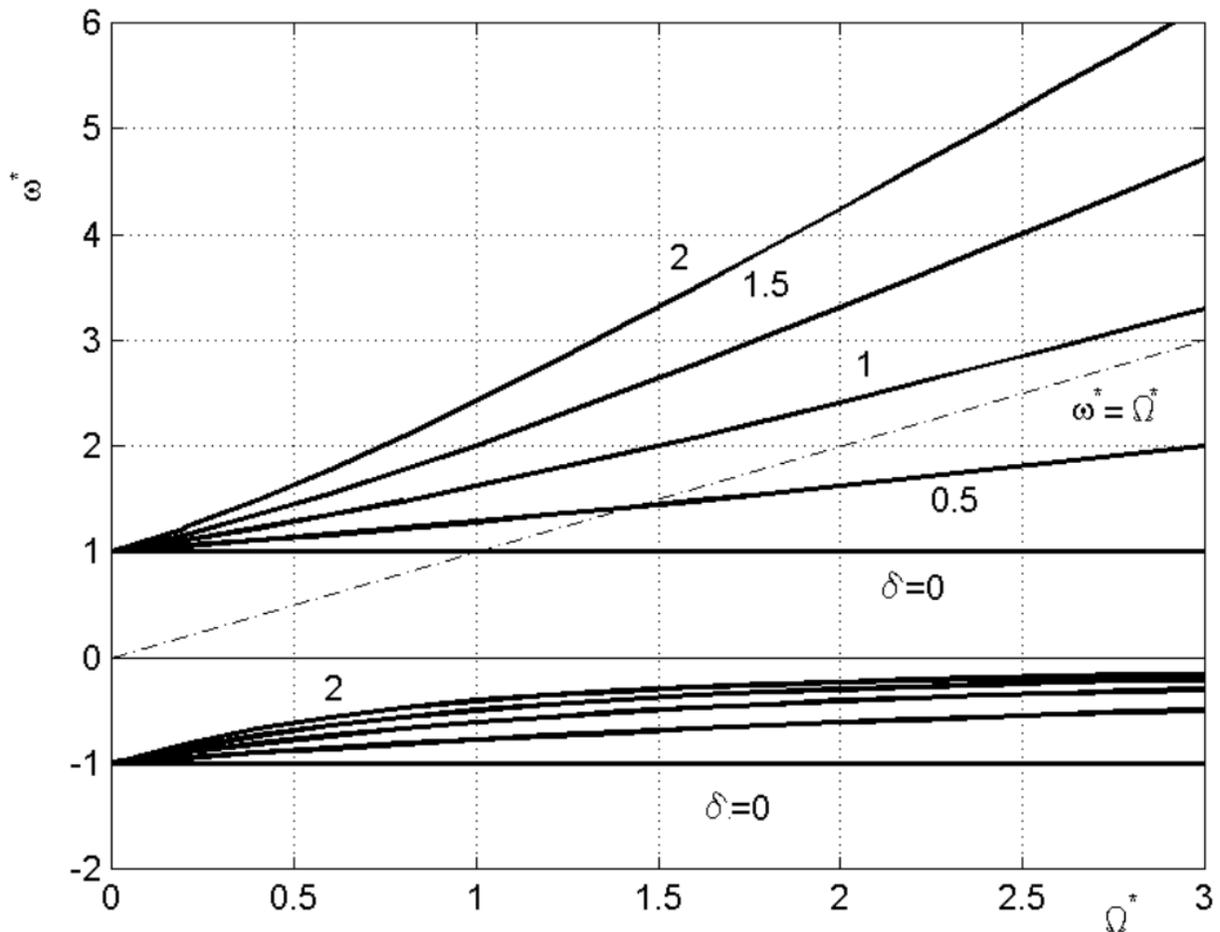


Figura 15. Diagrama de Campbell no dimensional para los movimientos rotacionales de un rotor con 4 grados de libertad en el cual los movimientos traslacionales y rotacionales no están acoplados. Para graficarlo se consideraron 5 valores de  $\delta = 0, 0.5, 1, 1.5$  y  $2$ .

El diagrama de Campbell completo para un rotor con desacoplamiento completo entre los giros cilíndricos y cónicos puede, por tanto, ser obtenido mediante la superposición de la gráfica en la figura 15 con el rotor de Jeffcott-Prohl, obteniendo así una gráfica como la que se observa en ambos incisos de la figura 16.

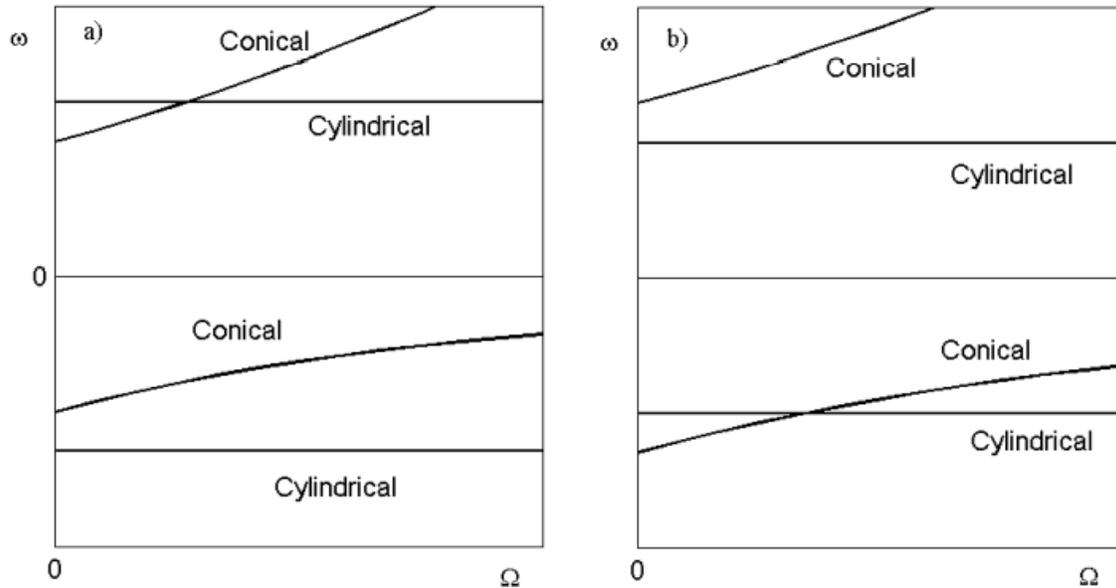


Figura 16. Diagrama de Campbell para un rotor con un desacoplamiento completo entre los modos cónico y cilíndrico. En un caso la frecuencia del modo cilíndrico se encuentra por encima a), y en el otro por debajo b) del modo cónico.

La primera gráfica se refiere a un caso en el cual la frecuencia natural en un punto muerto del modo cilíndrico es más alta que la del modo cónico, por ejemplo:  $\sqrt{K_{11}/m} > \sqrt{K_{22}/J_t}$ . En este caso, ambas ramas de la gráfica se intersectan en el primer cuadrante. La figura 16 en cambio hace referencia a un caso en el cual la frecuencia natural en un punto muerto del modo cilíndrico es más baja que la del modo cónico, por ejemplo:  $\sqrt{K_{11}/m} < \sqrt{K_{22}/J_t}$ , y en el que la intersección se da en el cuarto cuadrante.

Si se utilizan coordenadas reales en lugar de complejas, las ecuaciones de movimiento se vuelven:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + K_{11}X = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) \\ m\ddot{Y} + K_{11}Y = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) \\ J_t\ddot{\phi}_{x'} + J_p\Omega\dot{\phi}_y + K_{22}\phi_{x'} = -\chi\Omega^2(J_t - J_p)\sin(\Omega t) \\ J_t\ddot{\phi}_y - J_p\Omega\dot{\phi}_{x'} + K_{22}\phi_y = \chi\Omega^2(J_t - J_p)\cos(\Omega t) \end{cases}$$

(58)

Las primeras dos ecuaciones son idénticas a las utilizadas en el rotor de Jeffcott, las otras dos pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} J_t & 0 \\ 0 & J_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_y \\ \ddot{\phi}_{x'} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -J_p \\ J_p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_{x'} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{22} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_{x'} \end{Bmatrix} = \chi(J_t - J_p)\Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Si se asume una solución del tipo  $\phi_x = \phi_{x_0} e^{st}$ ,  $\phi_y = \phi_{y_0} e^{st}$ , la ecuación homogénea da como resultado la ecuación característica:

$$\det \begin{bmatrix} s^2 J_t + K_{22} & -s\Omega J_p \\ s\Omega J_p & s^2 J_t + K_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (60)$$

Por ejemplo:

$$s^4 J_t^2 + s^2 (2J_t K_{22} + \Omega^2 J_p^2) + K_{22}^2 = 0 \quad (61)$$

Cuya solución es:

$$s^2 = -\frac{K_{22}}{J_t} - \frac{\Omega^2 \delta^2}{2} \pm \Omega \delta \sqrt{\frac{K_{22}}{J_t} + \frac{\Omega^2 \delta^2}{4}} \quad (62)$$

O, en términos de  $s$  :

$$s = \pm i \left( \frac{\Omega \delta}{2} \pm \sqrt{\frac{K_{22}}{J_t} + \frac{\Omega^2 \delta^2}{4}} \right)$$

(63)

La cual coincide con la ecuación 54. La única diferencia entre ambas soluciones es que aquellas encontradas mediante la aproximación con coordenadas reales son el doble en número, y su signo pierde todo significado [9].

Una estructura rotativa consiste, generalmente, de varias partículas, y el ensamble de las ecuaciones de movimiento para todas las partículas resulta en las ecuaciones de equilibrio de todo el sistema mecánico. En el caso de una estructura con varios (por ejemplo,  $n$ ) partículas, cada una con coordenadas generalizadas  $g_i$  conteniendo los desplazamientos nodales traslacionales ( $u_i, v_i, w_i$ ) y rotacionales ( $\varphi_i, \Psi_i, \theta_i$ ):

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_i \\ \dots \\ g_n \end{Bmatrix}$$

(64)

$$\{g_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_i \\ \Psi_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

(65)

Se escoge que el orden de los componentes del desplazamiento nodal sea seguido de las rotaciones, pero no es una necesidad. La mayoría de los softwares comerciales utilizan este orden, pero la elección no tiene nada que ver con las siguientes discusiones.

El equilibrio del sistema mecánico es un sistema completo (a veces llamado de segundo tipo) de ecuaciones de movimiento de LaGrange de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \{\dot{g}_i\}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \{g_i\}} + \frac{dD}{d\{\dot{g}_i\}} = \frac{dW}{d\{g_i\}}; i = 1, 2, \dots n.$$

(66)

En las ecuaciones  $L$  es el potencial de LaGrange, también conocido como Lagrangiano. Es la diferencia entre la energía cinética y potencial de una partícula:

$$L = T - U$$

(67)

$D$  es la energía de disipación, y  $W$  es el trabajo de las fuerzas no disipativas. La energía potencial de la partícula no es dependiente del tiempo; por lo tanto, su contribución al primer término de la ecuación es cero. Por lo tanto, la forma más usual e intuitiva de la ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \{\dot{g}_i\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{g_i\}} + \frac{\partial U}{\partial \{g_i\}} + \frac{dD}{d\{\dot{g}_i\}} = \frac{dW}{d\{g_i\}}; i = 1, 2, \dots n.$$

(68)

Esta ecuación se enfoca únicamente en la energía cinética, debido a que todas las ecuaciones derivadas son directamente aplicables con la apropiación aumentada con otros términos. El lado izquierdo de la ecuación contiene otro término dependiente de la velocidad, reflejando las fuerzas disipativas en el sistema, y el lado izquierdo de la ecuación contiene las contribuciones de las fuerzas no disipativas al equilibrio.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int (\{\sigma\}_0 + \{\sigma\})^T (\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}_l) dV \\ &= \frac{1}{2} \int (\{\sigma\}_0^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}_0^T + \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}_l) dV \end{aligned}$$

(69)

Aquí la integral se aplica al volumen de la estructura, y  $\{\sigma\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  son esfuerzos y deformaciones lineales de la estructura respectivamente. Los vectores  $\{\sigma\}_0$  y  $\{\varepsilon\}_l$  representan los esfuerzos iniciales y las grandes deformaciones respectivamente. A continuación, se ignorarán el primer y

último producto como cantidades pequeñas de segundo orden, los términos restantes se separan en dos integrales de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2} \int (\{\sigma\}_0^T \{\epsilon\}_l) dV + \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (70)$$

Aquí introducimos la relación lineal esfuerzo-deformación  $\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}$ , donde:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (71)$$

Y

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix} \quad (72)$$

El término  $[E]$  es la matriz de material que contiene el módulo de Young y la relación de Poisson. La segunda integral de la ecuación 70 representa la energía potencial elástica de la estructura:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dV \quad (73)$$

La deformación lineal es una función de los desplazamientos nodales generalizada como:

$$\{\epsilon\} = [B]\{g\} \quad (74)$$

Donde  $[B]$  es la matriz de las funciones de forma, dependiente del tipo de elementos (de coraza o solidos) utilizados en el modelado de la geometría. Con estas nuevas cantidades introducidas, la expresión de la energía potencial elástica toma la siguiente forma:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \{g\}^T [B]^T [E] [B] \{g\} dV \quad (75)$$

Considerando nuestro enfoque a la ecuación de movimiento de LaGrange completa, la derivada de la componente que representa la energía potencial elástica, después de la cancelación multiplicando por 2, se vuelve:

$$\frac{dU_E}{d\{g\}} = \int [B]^T [E] [B] dV \{g\} = [K] \{g\} \quad (76)$$

Esto da como resultado la matriz de rigidez de elemento finito convencional de la estructura, el vector de grandes deformaciones de la traslación de cualquier punto  $\{\rho\} = [u \ v \ w]^T$  de la estructura es:

$$\{\epsilon\}_l = \left\{ \begin{array}{l} \{\rho\}_x^T \{\rho\}_x \\ \{\rho\}_y^T \{\rho\}_y \\ \{\rho\}_z^T \{\rho\}_z \\ \{\rho\}_x^T \{\rho\}_y + \{\rho\}_y^T \{\rho\}_x \\ \{\rho\}_x^T \{\rho\}_z + \{\rho\}_z^T \{\rho\}_x \\ \{\rho\}_y^T \{\rho\}_z + \{\rho\}_z^T \{\rho\}_y \end{array} \right\} \quad (77)$$

Donde  $\{\rho\} = \partial\{\rho\}/\partial^*$ ;  $*$  =  $x, y, z$ .

La primera integral en la ecuación 70 representa la energía potencial de la estructura debido al esfuerzo inicial, expandiendo que  $\sigma ** \{\rho\}^T * \{\rho\} ** = \{\rho\}^T * \sigma ** \{\rho\} *$  para todos los términos y acomodando los resultados de la siguiente manera:

$$U_G = \frac{1}{2} \int (\{\sigma\}_0^T \{\varepsilon\}_l) dV = \int \{e\}_l^T [S]_0 \{e\}_l dV \quad (78)$$

La matriz de en medio los términos del esfuerzo inicial en la forma de:

$$[S]_0 = \begin{bmatrix} I_3 \sigma_{xx} & I_3 \sigma_{xy} & I_3 \sigma_{xz} \\ I_3 \sigma_{yx} & I_3 \sigma_{yy} & I_3 \sigma_{yx} \\ I_3 \sigma_{zx} & I_3 \sigma_{zy} & I_3 \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Donde:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

El vector  $\{e\}_l$  se encuentra relacionado a los desplazamientos mediante las derivadas de las funciones de forma de la siguiente manera:  $\{e\}_l = [B']\{g\}$ . El esfuerzo inicial es el resultado de las fuerzas externas (la fuerza centrífuga, por ejemplo) y es dependiente de la velocidad de rotación, es por tanto que la derivada de la energía potencial inicial basada en esfuerzos da como resultado:

$$\frac{dU}{d\{g\}} = \int [B']^T [S]_0 [B'] dV \{g\} = \Omega^2 [K_G] \{g\} \quad (81)$$

Esta es como resultado la matriz geométrica o de rigidez diferencial, cuyo tamaño es el mismo que el de la matriz de rigidez elástica, esto es, 6 veces el número de puntos nodales.

El siguiente termino en el lado izquierdo de la ecuación general de LaGrange se relaciona con las fuerzas disipativas que actúan en la estructura, las cuales representan la perdida de energía en la estructura. Dichas fuerzas amortiguan la energía cinética de las partículas; produciendo, por tanto, matrices de amortiguamiento. Estas fuerzas de amortiguamiento pueden ser internas o externas.

La función de disipación interna representa el amortiguamiento entre las partículas del rotor, y tiene la forma de la función de Rayleigh:

$$D_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{i,j} \{\dot{g}_i\}^T \{\dot{g}_j\} \quad (82)$$

Aquí los coeficientes definen el amortiguamiento interno ejercido entre las coordenadas generalizadas que relacionan dos puntos nodales,  $i$  y  $j$ . Si nos concentramos en un punto nodal en particular y su desplazamiento nodal traslacional en el sistema fijo, la función disipativa en dicho punto, como resultado de otros puntos es:

$$D_{\rho,i} = \frac{1}{2} d_{i,i} \{\dot{\rho}\}_i^T \{\dot{\rho}\}_i \quad (83)$$

Que puede expresarse también de la siguiente forma:

$$\{\dot{\rho}\} = [\dot{H}]\{\rho\} + [H]\{\dot{\rho}\} \quad (84)$$

Por tanto, la función disipativa del punto en el sistema coordinado rotacional será:

$$D_{\rho,i} = \frac{1}{2} d_{i,i} ([\dot{H}]\{\rho\}_i + [H]\{\dot{\rho}\}_i)^T ([\dot{H}]\{\rho\}_i + [H]\{\dot{\rho}\}_i) \quad (85)$$

Tras ejecutar un par de operaciones da como resultado:

$$D_{\rho,i} = \frac{1}{2} d_{i,i} \left( \{\rho\}_i^T [\dot{H}]^T [\dot{H}] \{\rho\}_i + \{\rho\}_i^T [\dot{H}]^T [H] \{\dot{\rho}\}_i + \{\dot{\rho}\}_i^T [H]^T [\dot{H}] \{\rho\}_i + \{\dot{\rho}\}_i^T [H]^T [H] \{\dot{\rho}\}_i \right) \quad (86)$$

Donde los dos términos del medio se cancelan entre sí por que  $[H]^T [\dot{H}] = -[\dot{H}]^T [H]$ . Además, el primer término no es dependiente de la velocidad; por tanto, la contribución de la función disipativa de LaGrange es:

$$\frac{dD_{\rho,i}}{d\{\dot{\rho}\}_i} = [D_{\rho}]_i \{\dot{\rho}\}_i \quad (87)$$

La matriz es formada de la siguiente manera:

$$[D_{\rho}]_i = d_{i,i} [I] = \begin{bmatrix} d_{i,i} & & \\ & d_{i,i} & \\ & & d_{i,i} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Tomar consideraciones similares para os desplazamientos nodales rotacionales resulta en una matriz cuya forma es la siguiente:

$$[D_{\alpha}]_i = d_{i,i} [I] = \begin{bmatrix} d_{i,i} & & \\ & d_{i,i} & \\ & & d_{i,i} \end{bmatrix} \quad (89)$$

La aumentación de ambas matrices representara a las fuerzas de amortiguamiento interno en la ecuación de movimiento de elemento finito:



$$\{\dot{\rho}\} = \Omega[\bar{H}]\{\rho\}_i + [H]\{\dot{\rho}\}_i \quad (93)$$

Por tanto, la fuerza en el sistema fijo es:

$$\{\bar{F}\}_i = -d_{F,i}\Omega[\bar{H}]\{\rho\}_i - d_{F,i}[H]\{\dot{\rho}\}_i \quad (94)$$

Porque  $[H]^T[H] = [I]$ , sucede que  $\{F\}_i = [H]^T\{\bar{F}\}_i$ , sustituir da como resultado la fuerza de amortiguamiento del sistema de la siguiente manera:

$$\{F\}_i = -d_{F,i}\Omega[H]^T[\bar{H}]\{\rho\}_i - d_{F,i}[H]^T[H]\{\dot{\rho}\}_i \quad (95)$$

Finalmente, usando las relaciones de matrices anteriores, la fuerza de amortiguamiento inducida por el rodamiento en el sistema coordenado rotativos de referencia se convierte en:

$$\{F\}_i = -\Omega d_{f,i}[P]^T\{\rho\}_i - d_{F,i}[I]\{\dot{\rho}\}_i \quad (96)$$

Esas fuerzas son funciones del desplazamiento de las partículas adyacentes y su velocidad, como podemos ver ahora. El primer término, proporcional al desplazamiento, es llamado matriz circulatoria. Es una matriz antisimétrica por virtud de su propia matriz de definición, como:

$$d_{F,i}[P]^T = \begin{bmatrix} 0 & d_{F,i} & 0 \\ -d_{F,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [K_D]_{\rho,i} \quad (97)$$

Nótese que el nombre de  $[K_D]$  se escoge para reflejar el hecho de que es un componente de amortiguamiento asociado con el termino de rigidez. El segundo término simplemente da como resultado:

$$d_{F,i}[I] = \begin{bmatrix} d_{F,i} & & \\ & d_{F,i} & \\ & & d_{F,i} \end{bmatrix} = [d_E]_{\rho,i} \quad (98)$$

En ciertos tipos de rodamientos, también existen momentos traídos por hacia el rotor por el rodamiento. Lo anterior resulta en una relación con las rotaciones nodales:

$$\{\bar{M}\}_i = \begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ 0 \end{Bmatrix} = -d_{M,i} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} = -d_{M,i} \{\dot{\alpha}\}_i \quad (99)$$

Mediante pasos idénticos a los anteriores y ensamblando las particiones traslacionales y rotacionales, se obtienen las matrices de elemento finito para la  $i_{va}$  particula:

$$[K_D]_i = \begin{bmatrix} 0 & d_{F,i} & 0 & & & \\ -d_{F,i} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & d_{M,i} & 0 \\ & & & -d_{M,i} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Similarmente los dos segundos componentes producen la matriz de amortiguamiento externo:



Donde  $\{F_p\}$  es el vector global de las fuerzas de conservación que actúan a través del volumen de la estructura.

La segunda clase de fuerzas no disipativas surge de un fenómeno físico externo que se encuentra activo, interactuando con la estructura rotativa. Una estructura que se encuentre en cualquier otro medio que no sea el vacío, experimenta fuerzas provenientes del fluido que le rodea; dicho fluido puede ser aire, como lo es en el caso de una turbina eólica, o agua como en el caso de una turbina hidráulica.

El trabajo ejercido sobre la estructura por el campo de fuerzas externas usualmente actúa en la superficie y se encuentra definido por una integral de superficie:

$$W_a = - \iint \{f_a\}\{g\}dS \tag{104}$$

Él es el término del lado derecho de la ecuación de LaGrange de la siguiente manera:

$$\frac{dW_a}{d\{g\}} = \{F_a\} \tag{105}$$

Aquí  $\{F_a\}$  es el vector global de todas las fuerzas activas que ejercen su influencia sobre la superficie de la estructura. El acoplamiento de las fuerzas externas a la superficie de la estructura rotativa esta por lo general confinado a una parte de la misma; por tanto, el vector de carga superficial activa puede encontrarse muy disperso y tener una magnitud pequeña conteniendo componentes diferentes de cero solo en posiciones específicas en las cuales se conecta con la carga externa.

El vector de fuerzas conservativas es mucho más denso dado que representa un efecto que actúa de manera uniforme sobre todas las partículas, pero en ocasiones no se encuentra completamente poblado, debido a que el volumen de fuerzas tiene cierta dirección; por ejemplo, la gravedad actúa de manera unidireccional y puede, en ciertos casos, coincidir con uno de los ejes coordenados, de tal forma que solo tendrá una componente de las 6 coordenadas generalizadas. La fuerza centrífuga  $\{F_c\}$  calculada anteriormente es también un volumen de fuerzas; sin embargo, su dirección raramente se alinea de manera directa con cualquiera de los ejes coordenados, dado que se encuentra cambiando de manera periódica.

Es posible sumar las fuerzas no disipativas de todas las partículas de la estructura, adoptando el vector final de fuerzas la siguiente forma:

$$\{F\} = \{F_c\} + \{F_p\} + \{F_a\}$$

( 106)

Este vector ocupara el lado derecho de la ecuación de equilibrio.

La ecuación de equilibrio de elemento finito en el sistema coordenado rotacional adquiera la siguiente forma:

$$[M]\{\ddot{g}\} + ([2D] + 2\Omega[C])\{\dot{g}\} + ([K] - \Omega^2[Z] + \Omega^2[K_G] + \Omega[K_D])\{G\} = \{F\}$$

( 107)

En el sistema fijo de coordenadas la ecuación de equilibrio de elemento finito es:

$$[M]\{\ddot{g}\} + ([D] + \Omega[C])\{\dot{g}\} + ([K] + \Omega[K_D])\{g\} = \{F\}$$

( 108)

La visible diferencia en esta última es la falta de las matrices de rigidez centrífuga y diferencial. El coeficiente de la matriz giroscópica también es cambiado, así como su contenido; en especial falta los términos de Coriolis, dado que dicha fuerza solo es detectable en un sistema rotativo. Con el fin en ensamblar los nodos rotativos del modelo de elemento finito es necesario ensamblar las matrices de cada modo rotativo e integrarlos a la colección global de nodos de la estructura, tal cosa resulta en un mapeo sencillo como el siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & [M]_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [M]_n \end{bmatrix}$$

( 109)

Donde todos los términos diagonales son cero. Nótese que la matriz de masa asociada con el nodo en rotación contiene la masa convencional (agrupada) y los valores de inercia rotacional, de manera similar, para la matriz giroscópica y centrífuga, se aplica el mismo mapeo simple:

$$[C] = \begin{bmatrix} [C]_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & [C]_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [C]_n \end{bmatrix}$$

( 110)

$$[Z] = \begin{bmatrix} [Z]_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & [Z]_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [Z]_n \end{bmatrix}$$

( 111)

Las matrices de amortiguamiento viscoso y estructural se ensamblan de la misma manera y de la siguiente forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D]_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & [D]_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [D]_n \end{bmatrix}$$

( 112)

$$[K_D] = \begin{bmatrix} [K_D]_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & [K_D]_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & [K_D]_n \end{bmatrix}$$

( 113)

Las matrices de elemento finito representan ahora los 6 grados de libertad convencionales, 3 traslaciones y 3 rotaciones para todas las partículas (o puntos nodales) en la estructura. Sin embargo, en situaciones prácticas la estructura tiene también un componente estacionario.

El ensamble de la ecuación de equilibrio de elemento finito es un poco más difícil cuando el acoplamiento entre la parte rotativa y estacionaria de la estructura es considerado, el vector de desfase  $\sigma$  y el vector rotacional  $\{\beta\}$  producen grados de libertad en un nodo de la parte estacionaria:

$$\{g\}_j = \begin{Bmatrix} \{\sigma_j\} \\ \{\beta_j\} \end{Bmatrix}$$

(114)

Los nodos de la parte estacionaria son representados por:

$$\{g\}_i = \begin{Bmatrix} \{\rho_i\} \\ \{\alpha_i\} \end{Bmatrix}$$

(115)

Grados de libertad. Notese que debido a la presencia de dos partículas con masas distintas es importante distinguir entre sus masas; los nuevos términos de acoplamiento influyen en el proceso de ensamblaje de la matriz global de masa como se muestra a continuación:

$$[M] = \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ & [M]_j & & [M]_{ji} & \\ & & \dots & & \\ & [M]_{ij} & & [M]_i & \\ & & & & \dots \end{bmatrix}$$

(116)

Donde las submatrices son las particiones de  $2 \times 2$  de la matriz de masa acoplada, estas son:

$$[M]_j = m_j \begin{bmatrix} [I] & [B_0] \\ [B_0]^T & [B_0]^T [B_0] \end{bmatrix}$$

(117)

$$[M]_{ji} = m_j \begin{bmatrix} [H] & [H][A] \\ [B_0]^T [H] & [B_0]^T [H][A] \end{bmatrix} \quad (118)$$

$$[M]_i = m_i \begin{bmatrix} [I] & [H][A] \\ [B_0]^T [H] & [B_0]^T [H][A] \end{bmatrix} \quad (119)$$

El acoplamiento de la matriz de masa es simétrico por que  $[M]_{ij} = [M]_{ji}^T$ , en el caso de las matrices centrífuga y giroscópica este no es el caso. El ensamble de la matriz giroscópica se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$[C] = \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ & [C]_j & \dots & [C]_{ji} & \\ & [C]_{ij} & & [C]_i & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (120)$$

Con:

$$[C]_j = \begin{bmatrix} [0] & [\bar{B}_0] \\ [0] & [B_0]^T [\bar{B}_0] \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$[C]_{ji} = \begin{bmatrix} [\bar{H}] & [\bar{H}][A] \\ [B_0]^T [\bar{H}] & [B_0]^T [\bar{H}][A] \end{bmatrix} \quad (122)$$

Y:

$$[C]_i = \begin{bmatrix} [P]^T & [P]^T[A] \\ [A]^T[P]^T & [A]^T[P]^T[A] \end{bmatrix} \quad (123)$$

Pero:

$$[C]_{ij} = \begin{bmatrix} [0] & [H]^T[\bar{B}_0] \\ [0] & [A]^T[H]^T[\bar{B}_0] \end{bmatrix} \neq [C]_{ji}^T \quad (124)$$

Similarmente, las matrices centrífugas se ensamblan de la siguiente manera:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ & [Z]_j & & [Z]_{ji} & \\ & & \dots & & \\ & [Z]_{ij} & & [Z]_i & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (125)$$

Con

$$[Z]_j = \begin{bmatrix} [0] & [\bar{B}_0] \\ [0] & [B_0]^T[\bar{B}_0] \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$[Z]_{ji} = \begin{bmatrix} [\bar{H}] & [\bar{H}][A] \\ [B_0]^T[\bar{H}] & [B_0]^T[\bar{H}][A] \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$[Z]_i = \begin{bmatrix} [\bar{H}] & [\bar{H}][A] \\ [A]^T[\bar{H}] & [A]^T[\bar{H}][A] \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$[Z]_{ij} = \begin{bmatrix} [0] & [H]^T[A] \\ [0] & [A]^T[H]^T[B_0] \end{bmatrix} \quad (129)$$

De nuevo, el acoplamiento es notablemente antisimétrico, las matrices  $C$  e  $Z$  también se multiplican por los valores de masa ( $m$ ) y velocidad rotacional ( $\Omega$ ) apropiados.

Habiendo definido lo anterior estamos en una posición desde la cual podemos emplear las ecuaciones de movimiento de elemento finito de una estructura con fines de análisis; para ellos es importante reconocer que no es necesario que ciertas partes se encuentren presentes en el análisis, dado que muchas de ellas se encuentran restringidas por condiciones de frontera que restringen su movimiento. Por ejemplo, los puntos de una estructura estacionaria adyacente y sujeta al suelo pueden no tener ningún desplazamiento nodal, por tanto, se denotan con el suscrito  $s$  a continuación. Se separan del vector global de desplazamiento de la siguiente manera.

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \{g_s\} = 0 \\ \{g_k\} \end{Bmatrix} \quad (130)$$

Donde el suscrito  $k$  denota los puntos remanentes que no son afectados por las condiciones de frontera. Las matrices estructurales que participan en la ecuación de equilibrio pueden ser simplemente separadas de la siguiente manera:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sk} \\ K_{ks} & K_{kk} \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sk} \\ D_{ks} & D_{kk} \end{bmatrix} \quad (132)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sk} \\ M_{ks} & M_{kk} \end{bmatrix}$$

(133)

Y

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_s \\ F_k \end{Bmatrix}$$

(134)

Aquí el tamaño de las matrices de separación es indicado por sus suscritos; sin embargo, estas matrices aún no están listas para ser utilizadas en un análisis.

Puede que haya algunos componentes de la estructura cuyo movimiento sea dependiente de otros componentes; por ejemplo, los componentes rígidos de la estructura tienen una relación directa con el movimiento de los componentes aledaños. Tales relaciones pueden ser descritas mediante ecuaciones como  $\{g_i\} = \{g_j\}$  o  $1\{g_i\} - 1\{g_j\} = 0$ , estas ecuaciones nos muestran la rígida relación existente entre los puntos  $i$  y  $j$ . Si juntamos dichas ecuaciones en un vector de fila con la siguiente forma:

$$1 \quad \dots \quad i \quad \dots \quad j \quad \dots \quad n$$

(135)

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$$

(136)

El vector tiene coeficientes de la relación de restricción en las ubicaciones apropiadas, y ceros en el resto de los lugares, por simplicidad en este ejemplo, el vector se muestra en términos de los puntos nodales, pero no necesariamente debe ser así; es posible tener una relación rígida entre dos puntos solo con respecto a las traslaciones, por ejemplo, y no con respecto a las rotaciones, en tal caso el vector se extendería hasta tener 6 veces su tamaño actual, de la siguiente manera:

$$i \qquad \qquad \qquad j$$

$$\begin{matrix} & \dots & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ [\dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0] \end{matrix}$$

(137)

En la práctica, muchas de esas condiciones de restricción pueden existir; asumamos que hay una cantidad  $m$  de ellas, en tal caso la relación entre el movimiento de los puntos de la estructura rígida dependientes de los puntos flexibles adyacentes es descrita por una matriz rectangular:

$$[R]_{mk} = \begin{bmatrix} [R]_{mf} & [R]_{mm} \end{bmatrix}$$

(138)

Donde la partición denotada por el suscrito  $f$  es una colección de puntos capaces de moverse libremente, y el movimiento de las  $m$  particiones remanentes es dependiente del movimiento de tales puntos libres. La definición correcta de dicho escenario demanda que la submatriz derecha, la colección de grados de libertad dependientes, sea invertible, eso permite calcular la matriz de transformación.

$$[G]_{mf} = [R]_{mm}^{-1} [R]_{mf}$$

(139)

También será necesario ingresar las matrices en el siguiente orden:

$$[K]_{kk} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fm} \\ K_{mf} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

(140)

$$[D]_{kk} = \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fm} \\ D_{mf} & D_{mm} \end{bmatrix}$$

(141)

$$[M]_{kk} = \begin{bmatrix} M_{ff} & M_{fm} \\ M_{mf} & M_{mm} \end{bmatrix} \quad (142)$$

Aquí, el conjunto de puntos de análisis que se encuentran libre de cualquier restricción fue denotado por el suscrito  $f$ , las siguientes operaciones matriciales:

$$[\bar{K}]_{ff} = [K]_{ff} + [K]_{fm}[G]_{mf} + [G]_{mf}^T[K]_{mf} + [G]_{mf}^T[K]_{mm}[G]_{mf} \quad (143)$$

$$[\bar{D}]_{ff} = [D]_{ff} + [D]_{fm}[G]_{mf} + [G]_{mf}^T[D]_{mf} + [G]_{mf}^T[D]_{mm}[G]_{mf} \quad (144)$$

Y

$$[\bar{M}]_{ff} = [M]_{ff} + [M]_{fm}[G]_{mf} + [G]_{mf}^T[M]_{mf} + [G]_{mf}^T[M]_{mm}[G]_{mf} \quad (145)$$

Producirán el conjunto libre de matrices, la transformación debe llevarse trasladarse al vector de desplazamiento de la siguiente manera:

$$\{g\}_f = [G]_{mf}\{g\}_k \quad (146)$$

Y de igual forma para la matriz del lado derecho:

$$\{F\}_f = [G]_{mf}^T\{F\}_k \quad (147)$$

El conjunto restante consiste en grados de libertad libres de puntos, que son la base del análisis de la ecuación de equilibrio.

Ejecutando una partición y reducción similares en las matrices rotodinámicas y produciendo las matrices  $[Z]_{ff}$ ,  $[K_G]_{ff}$ ,  $[K_D]_{ff}$ ,  $[C]_{ff}$ , presentando las siguientes matrices:

$$[\tilde{K}]_{ff} = [\bar{K}]_{ff} - \Omega^2[Z]_{ff} + \Omega^2[K_G]_{ff} + \Omega[K_D]_{ff} \quad (148)$$

$$[\tilde{D}]_{ff} = [\bar{D}]_{ff} + 2\Omega[C]_{ff} \quad (149)$$

$$[M]_{ff} = [\bar{M}]_{ff} \quad (150)$$

Con estas, la ecuación de equilibrio empleada para el análisis toma la siguiente forma:

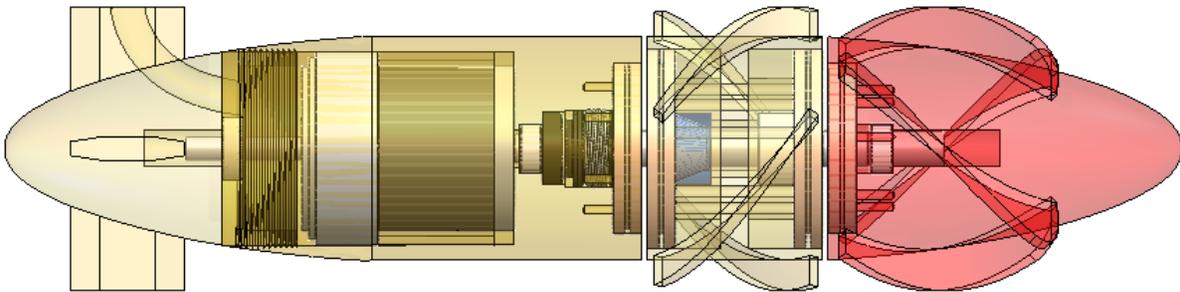
$$[M]\{\ddot{g}\} + [\tilde{D}]\{\dot{g}\} + [\tilde{K}]\{g\} = \{F\} \quad (151)$$

Denotamos las matrices que son dependientes de la velocidad de rotación mediante la tilde  $\sim$ . La ecuación 151 es una versión unificada de dos ecuaciones (con sistema coordenado fijo y rotativo), las ecuaciones 148 y 149 son para el sistema rotativo y es necesario ajustarlas antes de utilizarlas en el sistema coordenado fijo; ambas son dependientes de la velocidad de rotación, así como posiblemente del tiempo, esto último depende del escenario de acoplamiento.

Su contenido también dependerá de si el análisis se da en un marco de referencia fijo o rotativo [10].

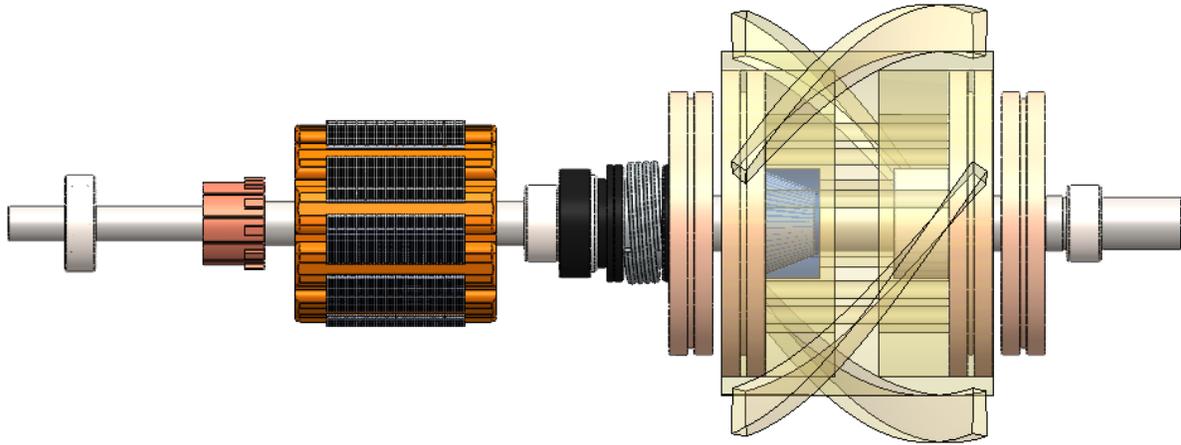
## Marco Metodológico

La turbina a analizar se encuentra compuesta por diversos componentes que podemos clasificar como fijos y rotativos, estando el primer grupo compuesto por varios subensambles que comprenden una carcasa cuyo fin es mantener a los componentes eléctricos protegidos del agua, así como bases y soportes que soportan los rodamientos sobre los cuales gira el ensamble del rotor y permiten fijar el ensamble de la turbina al segmento de tubería que la contiene. Todos los componentes rotativos, con excepción del rotor principal, se encuentran alojados dentro de la carcasa, o recubiertos por la base o corona directriz, estas últimas cumplen además otros propósitos como lo es sostener los rodamientos, alojar cableado (en el caso de la base) y direccionar el flujo de agua hacia el rotor.



*Figura 17. Ensamble original de la picoturbina.*

Debido a la cantidad de recursos necesarios para analizar un ensamble con características tan complejas, y con base en las recomendaciones proporcionadas por la base teórica se decidió remover del ensamble de la turbina todos los componentes estáticos, como los son las carcasas, componentes de fijación del motor, la corona directriz, diversos tipos de soportes y los rodamientos como se muestra en la figura 18.



*Figura 18. Ensamble del rotor de la turbina.*

El resultado de despreciar los componentes fijos para fines del análisis es una geometría mucho más discreta, lo cual permitirá facilitar el proceso de mallado, teniendo así un impacto significativo en la reducción del tiempo de solución, sin embargo, eliminar los componentes estáticos no es suficiente para preparar geometría para el análisis, por lo que el siguiente paso en el preprocesamiento de nuestro modelo consiste en fusionar los componentes del núcleo del estator del generador, el; último paso del preprocesamiento en SolidWorks consiste en remover el sello mecánico que se encuentra montado sobre el eje, ya que, si bien, se encuentra rotación, su geometría resulta bastante compleja como para mallar y debido a su poca masa, el efecto que ejerce sobre el resto del sistema puede despreciarse.

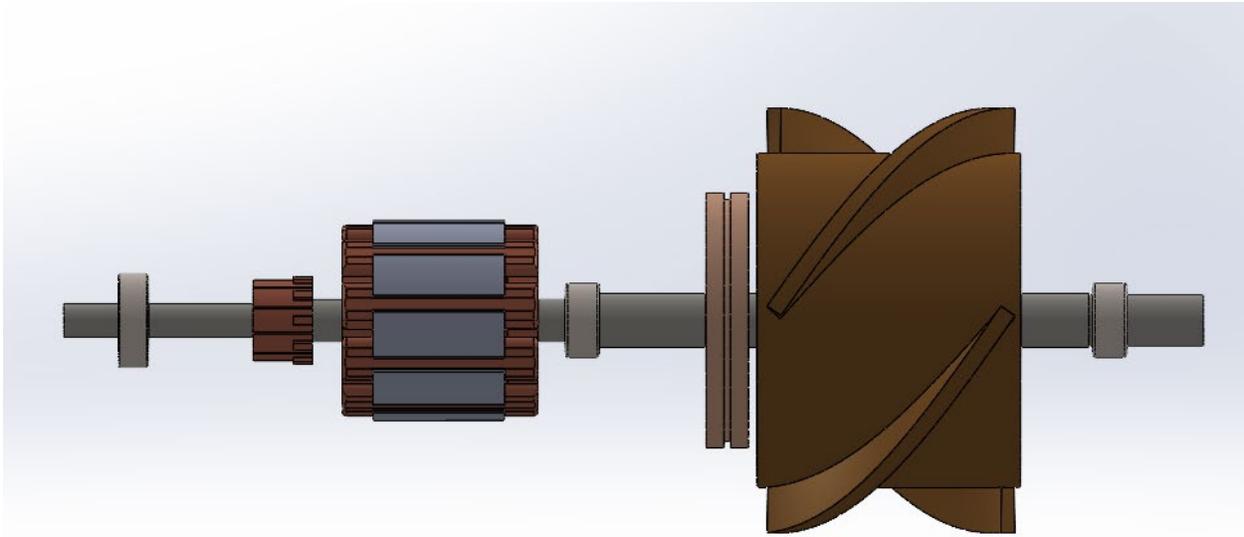


Figura 19. Ensamble del rotor simplificado, en la imagen se puede apreciar cómo es que ahora el núcleo del rotor (del generador) ahora se encuentra formado por una única pieza.

Una vez concluido con lo anterior no hay más modificaciones que puedan llevarse a cabo mediante el uso de SolidWorks, por lo que el resto de ajustes necesarios para geometría se realizaran en uno de los preprocesadores de ANSYS, DesignModeler, esta herramienta se utilizara para dividir algunas de las caras cilíndricas del eje de la turbina en múltiples caras, el fin de esto es poder aplicar una condición de frontera que representa un rodamiento sobre dichas caras.

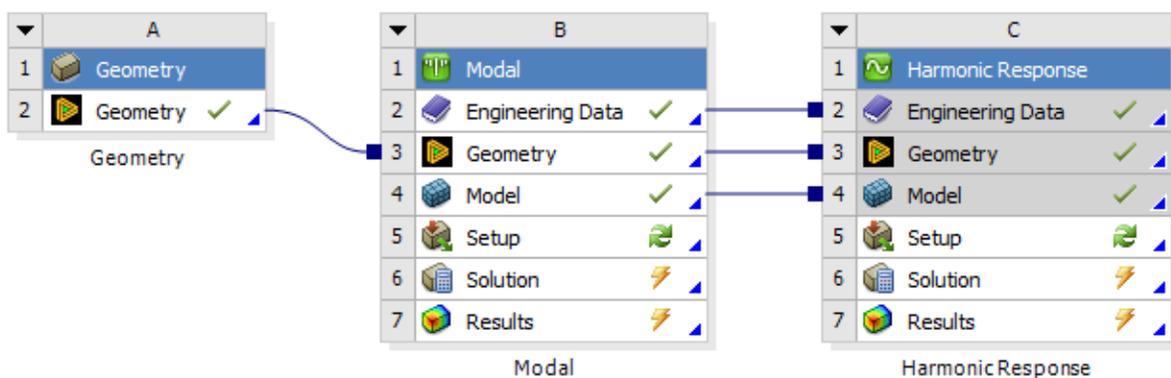


Figura 20. Diagrama del proyecto en Ansys.

Para llevar a cabo las modificaciones de ANSYS será necesario crear un nuevo proyecto dentro del software e insertar un módulo de geometría, un sistema de análisis modal y por último uno de

análisis armónico como se observa en la figura 20, esto nos permitirá ahorrar tiempo en la configuración del modelo y la selección de materiales, ya que este arreglo les permite a ambos módulos intercambiar información entre las celdas (módulos) que los componen. Esto último significa que solo será necesario configurar las celdas “Geometry”, “Engineering Data” y “Model” una sola vez, y cada cambio que se efectúe en uno de los sistemas de análisis (A, B o C) se verá reflejado en los otros sistemas.



*Figura 21. Eje del rotor, las secciones recortadas se muestran en color verde.*

Como se puede apreciar en la figura 21 las secciones en color verde se encuentran separadas del resto del eje, sin embargo, configurando las mismas dentro de una sola parte podemos hacer que el software las considere como un solo cuerpo para efectos del análisis, evitando la formulación de contactos entre las distintas secciones del eje y permitiéndonos configurar los rodamientos sobre las superficies cilíndricas que se muestran en la figura 22. Una vez completado este paso ya no será necesario modificar la geometría del rotor de ninguna manera, pudiendo proceder así a la configuración del modelo en ANSYS, este proceso se lleva a cabo en cualquiera de las celdas “Model”, dentro de las mismas habremos de configurar los materiales asignados a cada componente, la formulación de los contactos que se generan entre cada una de las partes del ensamble y la malla.



*Figura 22. Eje del rotor, las caras recortadas se muestran en color verde.*

A partir de este punto todo el trabajo se realizará dentro de un módulo de ANSYS llamado “Mechanical”, desde el cual podremos configurar las celdas “Model”, “Setup”, “Solution” y “Results”. El primer paso para la configuración del modelo consistirá en asignar los materiales para cada uno de los componentes de la turbina, la distribución de los materiales puede apreciarse en las figuras 23 y 24, mientras que la tabla 2 nos presenta una descripción más detallada (componente a componente) de esta distribución; de igual forma las propiedades mecánicas de cada uno de los materiales se muestran en las tablas 3, 4, 5 y 6.

Materials  
3/28/2022 12:51 PM  
Bronze, cast  
Copper, wrought  
Stainless Steel  
Structural Steel

Ansys  
2021 R2

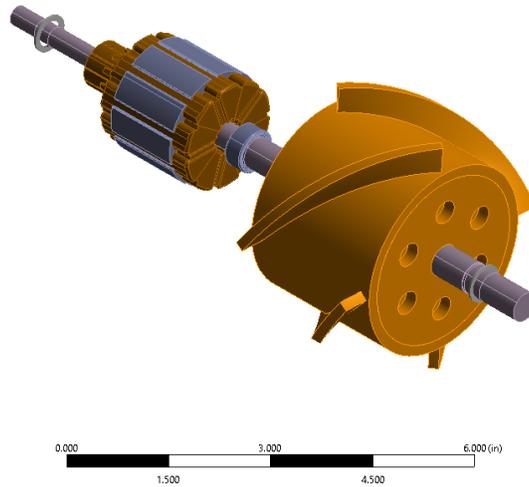


Figura 23. Distribución de materiales en el ensamble del rotor.

Materials  
3/28/2022 1:18 PM  
Bronze, cast  
Copper, wrought  
Stainless Steel  
Structural Steel

Ansys  
2021 R2

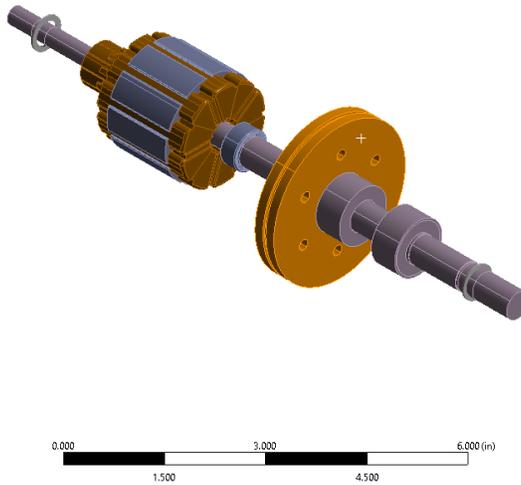


Figura 24. Distribución de materiales en el ensamble del rotor, el rotor principal y uno de sus discos se encuentran ocultos para permitir observar el resto de los componentes.

<b>Componente</b>	<b>Material</b>
<b>Rotor</b>	Bronce
<b>Discos del rotor</b>	Bronce
<b>Aros cónicos interiores</b>	Acero inoxidable
<b>Aros cónicos exteriores</b>	Acero inoxidable
<b>Colector de escobillas</b>	Cobre
<b>Balero de empuje</b>	Acero estructural
<b>Eje</b>	Acero inoxidable
<b>Cilindro aislante</b>	Acero inoxidable
<b>Laminado del rotor</b>	Acero estructural
<b>Bobina</b>	Cobre

Tabla 2. Distribución de materiales por componente.

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
<b>Densidad</b>	8810	$\frac{Kg}{m^3}$
<b>Módulo de Young</b>	$8 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>
<b>Relación de Poisson</b>	0.345	
<b>Módulo de compresibilidad</b>	$8.6022 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>
<b>Módulo de cizalladura</b>	$2.974 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>

Tabla 3. Propiedades del bronce.

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
<b>Densidad</b>	8940	$\frac{Kg}{m^3}$
<b>Módulo de Young</b>	$1.31 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Relación de Poisson</b>	0.345	

<b>Módulo de compresibilidad</b>	$1.4886 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Módulo de cizalladura</b>	$4.8699 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>

Tabla 4. Propiedades mecánicas del cobre.

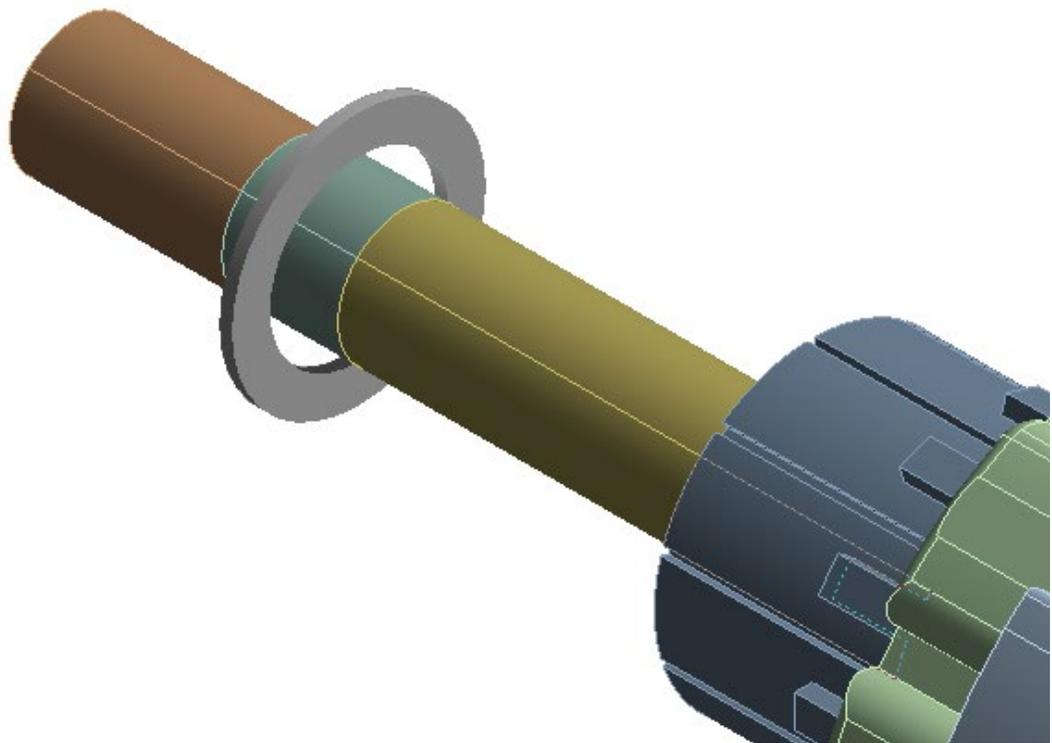
<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
<b>Densidad</b>	7750	$\frac{Kg}{m^3}$
<b>Módulo de Young</b>	$1.93 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Relación de Poisson</b>	0.31	
<b>Módulo de compresibilidad</b>	$1.693 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Módulo de cizalladura</b>	$7.3664 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>

Tabla 5. Propiedades del acero inoxidable.

<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidad</b>
<b>Densidad</b>	7850	$\frac{Kg}{m^3}$
<b>Módulo de Young</b>	$2 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Relación de Poisson</b>	0.3	
<b>Módulo de compresibilidad</b>	$1.6667 \times 10^{11}$	<i>Pa</i>
<b>Módulo de cizalladura</b>	$7.6923 \times 10^{10}$	<i>Pa</i>

Tabla 6. Propiedades del acero estructural.

Una vez que se han asignado los materiales a cada componente podemos seguir configurando el análisis de manera descendente en el árbol del proyecto, no es necesario realizar cambio alguno en el apartado de los sistemas coordenados, por lo que se puede avanzar hasta la sección de conexiones una vez expandida la carpeta encontraremos en su interior otra carpeta llamada contactos, en ella se encuentran las configuraciones de cada una de las zonas de contacto de nuestra geometría, no será necesario hacer cambio alguno dentro de dicha carpeta; sin embargo esta sección requiere que insertemos un par de conexiones que nos ayudaran a modelar el comportamiento de los rodamientos. Las figuras 25 y 26 nos permiten apreciar la ubicación de los rodamientos trasero y delantero respectivamente.



*Figura 25. Ubicación del rodamiento trasero en eje.*

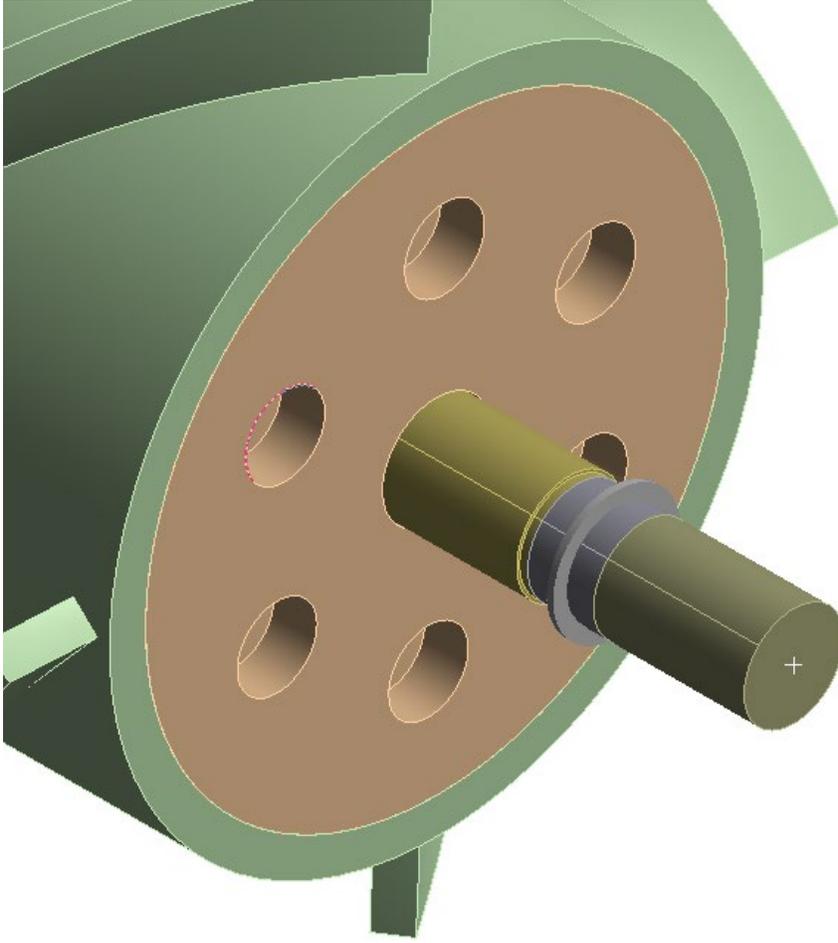


Figura 26. Ubicación del rodamiento delantero en el eje.

Estas conexiones tipo rodamiento fueron aplicadas en las zonas del eje que se seccionaron al inicio del preprocesamiento, su propósito es el de sustituir los rodamientos geométricos que formaban parte del ensamble original mediante el modelado de su comportamiento, para que esto sea posible es necesario proporcionarle ciertos datos al software siendo el más importante de estos la rigidez, el valor de esta fue calculado mediante el método descrito por Friswell, Penny, Garvey y Lees en la referencia [11], la siguiente expresión nos permitirá aproximar el valor de la rigidez en un rodamiento rígido de bolas como los que se utilizan en el ensamble de la turbina.

Se ha demostrado que la deflexión  $\delta$  (en metros) de una sola bola de acero, o rodillo, sujeto a compresión entre dos placas planas, por una fuerza  $f$  (en Newtons) está dada por:

$$\delta = 4.36 \times 10^{-8} d^{-\frac{1}{3}} f^{\frac{2}{3}}$$

(152)

Para una bola de diámetro  $d$  (en metros), y:

$$\delta = 3.06 \times 10^{-10} l^{-0.8} f^{0.9} \quad (153)$$

Para un rodillo de longitud  $l$  (en metros).

Estas aproximaciones son suficiente para baleros (rodamiento completo) cuyos elementos rodantes tienen un radio pequeño comparado con los de las carreras interna y externa del balero. La deflexión de un rodamiento completo (balero) que consiste en varios elementos de rodado puede derivarse distribuyendo la fuerza aplicada sobre todos los elementos del balero que soportan la carga. Es así que la rigidez vertical de un rodamiento de bolas,  $df/dy$ , puede aproximarse mediante:

$$k_{vv} = k_b n_b^{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{3}} f_s^{\frac{1}{3}} \cos^{\frac{5}{3}} \alpha \quad (154)$$

Donde  $n_b$  representa el número de bolas de acero de diámetro  $d$  en la carrera,  $\alpha$  es el ángulo de contacto,  $f_s$  es la carga vertical estática que actúa sobre el rodamiento,  $k_b$  es una constante cuyo valor es:  $k_b = 13 \times 10^6 N^{\frac{2}{3}} m^{-\frac{4}{3}}$  [11]. Si se asume que la carga es vertical, la relación entre la rigidez horizontal  $k_{uu}$  y la rigidez vertical  $k_{vv}$  puede ser determinada en base a los siguientes valores:

Rodamientos de bolas		Rodamientos de rodillos	
$k_{uu}/k_{vv}$	Bolas	$k_{uu}/k_{vv}$	Rodillos
0.46	8	0.49	8
0.64	12	0.66	12
0.73	16	0.74	16

Tabla 7. Valores de  $k_{uu}/k_{vv}$  con respecto al número de elementos rodantes para rodamientos de bolas y rodillos.

Sabiendo que  $n_b = 15$ ,  $d = 1.77 \times 10^{-3} m$ ,  $f_s = 2.99 N$  y  $\alpha = 0^\circ$  anterior podemos determinar la rigidez para nuestros rodamientos:

$$k_{vv} = \left(13 \times 10^6 N^{\frac{2}{3}} m^{-\frac{4}{3}}\right) (15)^{\frac{2}{3}} (1.77 \times 10^{-3} m)^{\frac{1}{3}} (5.98 N)^{\frac{1}{3}} \cos^{\frac{5}{3}}(0^\circ) = 13.779 \times 10^6 \frac{N}{m}$$

( 155)

$$k_{uu} = 0.73k_{vv} \approx 10.059 \times 10^6 \frac{N}{m}$$

( 156)

Una vez obtenida la magnitud de la rigidez en los rodamientos procederemos a utilizar dicho valor para construir la matriz de rigidez dentro de Ansys,

$$K = \begin{bmatrix} k_{uu} & k_{uu} \\ k_{uu} & k_{uu} \end{bmatrix}$$

( 157)

$$K = \begin{bmatrix} 10.059 \times 10^6 \frac{N}{m} & 10.059 \times 10^6 \frac{N}{m} \\ 10.059 \times 10^6 \frac{N}{m} & 10.059 \times 10^6 \frac{N}{m} \end{bmatrix}$$

( 158)

La malla es quizá uno de los factores más relevantes al realizar un análisis de elemento finito, por lo que para asegurar una buena calidad de la misma fue necesario realizar ciertas modificaciones a la malla estándar generado por el software, con el fin de asegurar que la calidad de la misma no impacte de manera negativa los resultados obtenidos por el Solver. Para ello se aplicó una serie de controles de malla, los cuales permiten restringir el tamaño de los elementos que la componen a un valor máximo; el valor de dichos controles, así como los componentes a los que fueron asignados se muestra en la siguiente tabla:

Componente	Tamaño de elemento
Eje	0.5mm
Núcleo del rotor	1mm
Bobina	
Colector de escobillas	
Rotor principal	
Discos del rotor	
Aros cónicos	
Balero de empuje	

Tabla 8. Tamaños de elemento utilizados para crear la malla.

Tras aplicar los controles de tamaño ya mencionados se procedió a generar la malla; dado que dicho proceso es automático solo fue necesario esperar a que concluyera. La malla es uno de los factores que más influyen en la calidad de un resultado obtenido mediante el método del elemento finito, por lo que es importante asegurar que la misma tenga una calidad aceptable; Ansys nos permite monitorear distintas métricas con el fin de medir la calidad de nuestra malla, una de ellas es la calidad del elemento, esta métrica relaciona varias de las características geométricas del elemento con el fin de crear una métrica de calidad compuesta que va de 0 a 1, siendo 1 el valor con mayor calidad y 0 el de menor, a su vez, también es posible evaluar otras métricas, como las relaciones de aspecto, Jacobiana y la oblicuidad, las métricas de la malla generada pueden observarse en la siguiente tabla.

Métrica	Valor
Calidad de los elementos	0.84528
Relación de aspecto	1.838
Relación Jacobiana	0.99428
Oblicuidad	0.2129
Cantidad de elementos	6149315
Cantidad de nodos	4149036

Tabla 9. Métricas de la malla, todos los valores mostrados con excepción de la cantidad de elementos y nodos son promedios.

Los pasos finales para llevar a cabo la simulación consisten en configurar las celdas “Modal” y “Harmonic Response”, que en última instancia son las que nos permitirán llevar a cabo el análisis rotodinámico. Para comenzar este proceso nos trasladamos a la primera de estas dos celdas, nos dirigimos al apartado “Analysis Settings”, el cual nos permite configurar los parámetros con los

que se llevara a cabo la simulación, una vez ahí el primer paso fue indicarle al Solver cuantos modos de vibración debe encontrar, posteriormente se activó el amortiguamiento en el modelo y finalmente, en la sección de controles rotodinámicos se activaron las opciones “Coriolis Effect” y “Campbell Diagram” y se le indico al software que utilizase 3 puntos para graficar el diagrama de Campbell.

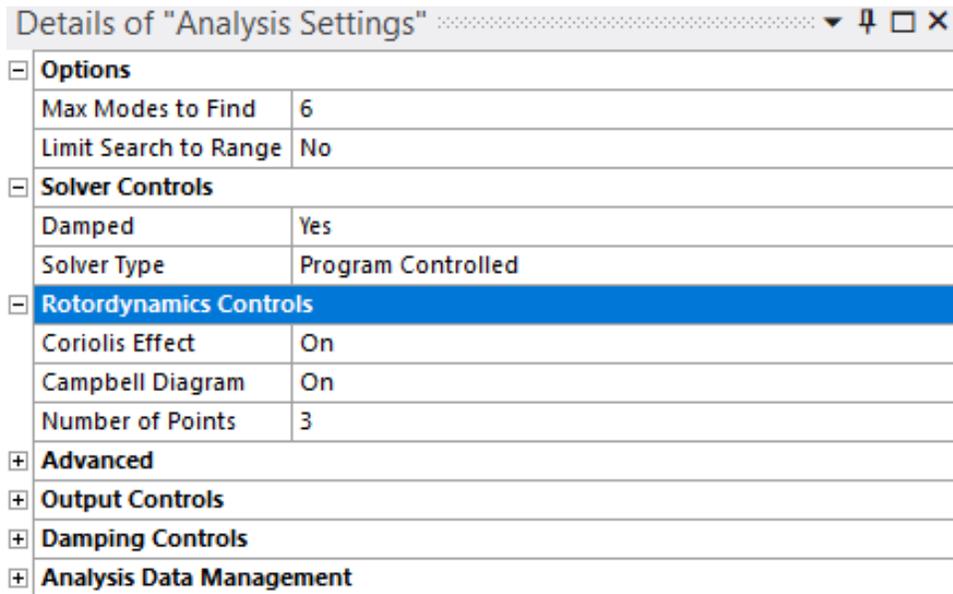
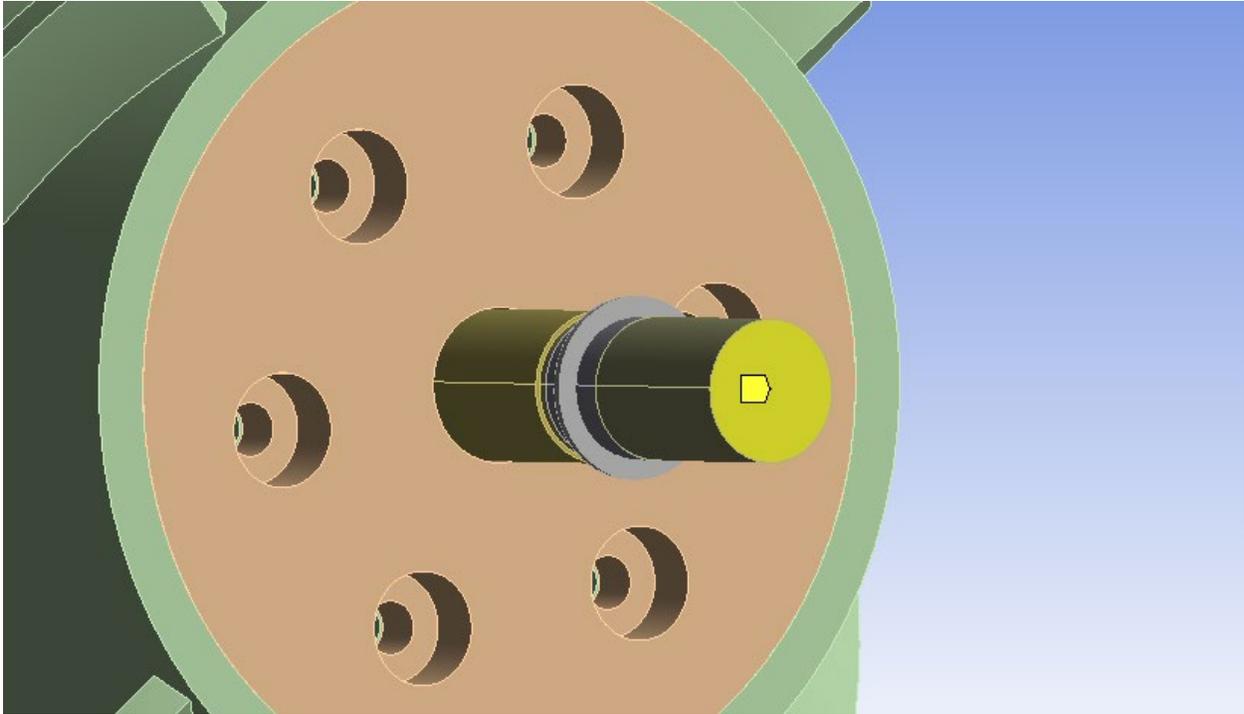


Figura 27. Configuración del sistema de análisis modal.

Después de configurar el apartado que se muestra en la imagen anterior comenzaron a insertarse las condiciones iniciales y de frontera del modelo, la primera de estas consiste en una velocidad rotacional que se aplica a la totalidad del ensamble del rotor de la turbina, esta velocidad rotacional cuenta con tres magnitudes a evaluar, estas magnitudes corresponden a los tres puntos que se configuraron para el diagrama de Campbell, dicho valores son: 0, 1800 y 3600 RPM. La cantidad de modos a encontrar se dejó en la cantidad predeterminada, 6 modos, esto significa que el Solver habrá de calcular, mapeando un rango de frecuencias indefinido hasta encontrar los 6 primeros modos de vibración de nuestra estructura, la cual consiste en el ensamble del rotor.

Lo anterior significa que nuestro diagrama de Campbell habrá de graficar las velocidades críticas para el rango dado por estas velocidades.



*Figura 28. Zona de aplicación de la condición de frontera en la cara frontal del eje del rotor.*

Se aplicó una condición de frontera en la cara frontal del eje, el propósito de esta es limitar los grados de libertad del modelo de tal forma que el mismo se asemeje más a la realidad, esto se logra restringiendo el movimiento a lo largo del eje X (que coincide con el eje de rotación de la turbina), esto evita que exista una traslación en esta dirección; esta misma condición de frontera se utiliza para evitar que el eje se deforme torsionalmente sobre su eje de rotación, previniendo así la mayoría de los modos torsionales, esto se hace mediante la restricción de la rotación en el eje X, el cual es coincidente con el eje de rotación.

Como se puede observar en la figura 29 las componentes de traslación y rotación en el eje X fueron restringidas para prevenir su movimiento, sin embargo, es importante hacer notar que el comportamiento de esta condición de frontera es deformable, por lo que aplicando la fuerza suficiente es posible vencer estas restricciones, este será el caso de la rotación en X, la cual será vencida una vez que el rotor alcance un modo torsional, lo anterior puede sonar un tanto confuso, sin embargo lo que se busca es evitar que la inercia en combinación con la rápida aceleración en el análisis produzca un modo torsional falso al excitar el rotor de una manera distinta a como ocurre en realidad.

Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Face
Coordinate System	Global Coordinate System
<input type="checkbox"/> X Coordinate	0. mm
<input type="checkbox"/> Y Coordinate	-9.924e-017 mm
<input type="checkbox"/> Z Coordinate	5.5134e-018 mm
Location	Click to Change
Definition	
Type	Remote Displacement
<input type="checkbox"/> X Component	0. mm
Y Component	Free
Z Component	Free
<input type="checkbox"/> Rotation X	0. °
Rotation Y	Free
Rotation Z	Free
Suppressed	No
Behavior	Deformable
Advanced	
Pinball Region	All

Figura 29. Configuración de la condición de frontera mostrada en la Figura 28.

Llegado este punto se ha concluido la configuración del análisis Modal de la estructura, los siguientes pasos se desarrollarán en el apartado de configuración del módulo de Respuesta armónica, resultando la mayoría de ellos bastante similar a lo hecho hasta este punto.

Se comenzará por configurar las opciones de análisis del Solver, en el apartado opciones (mostrado en la Figura 30) se le indicara al Solver el rango de frecuencias en el cual debe evaluar la respuesta del sistema, este rango va desde los 0 hasta los 500 Hz y tiene una resolución de 1 Hz, el mismo se eligió basándose en pruebas modales anteriores que contaban con una resolución menor, las cuales mostraron que los primeros 6 modos de vibración se encuentran dentro de ese rango de frecuencias. El método de solución elegido será el método completo, basándonos en las recomendaciones dadas por el manual de rotodinámica de Ansys [12].

El segundo paso consiste en añadir de nuevo la condición de frontera que se explicó anteriormente, misma que es mostrada en las figuras 28 y 29, esto con el mismo fin que en el análisis modal, esto se puede hacer mediante las funciones Copiar y Pegar con las que el software cuenta, el proceso para realizarlo es idéntico a como se hace de manera usual en otros programas de computadora. Una vez añadida esta condición será necesario insertar un objeto más en el árbol, este es diferente a todo lo añadido hasta este punto, el mismo consiste en un Script de comandos en lenguaje APDL, el lenguaje de diseño paramétrico de Ansys.

El propósito de este Script es añadir una serie de cargas armónicas bajo las cuales reaccionara la estructura, se eligió una pequeña carga, cuya magnitud es marginal, basándonos en la

recomendación dada en uno de los manuales de rotodinámica de Ansys [12], en el cual se realiza un análisis similar al estudiado en este caso.

<b>Step Controls</b>	
Multiple RPMs	No
<b>Options</b>	
Frequency Spacing	Linear
<input type="checkbox"/> Range Minimum	0. Hz
<input type="checkbox"/> Range Maximum	500. Hz
<input type="checkbox"/> Solution Intervals	500
User Defined Frequencies	Off
Solution Method	Full
Variational Technology	Program Controlled

Figura 30. Configuración del sistema de análisis de respuesta armónica.

El Script de comandos y su contenido se muestran en la figura 31, el mismo está basado un Script similar proporcionado en el manual de rotodinámica de Ansys [12].

La estructura del código es la siguiente, la primera fila del mismo es únicamente un comentario, la parte funcional del Script comienza en la segunda línea en esta se define la magnitud de la fuerza de desbalance que se aplicara, el valor de la misma al igual que el resto del Script se tomó de la referencia [12], en tercer fila se crea una variable correspondiente al nodo donde se aplicara la fuerza, mientras que en los renglones 4 y 5 se aplica la fuerza en los ejes Y y Z según corresponda.

El mismo proceso se repite para dos nodos más, terminando en la fila 13 del Script de comandos, la sección empleada del Script de comandos termina en la fila 21.

```
Commands
1 !Set the harmonic loads
2 F0 = 7.20078e-4/2
3 ndsconf11 = node(0.914,0,0)
4 F,ndsconf11,fy,F0
5 F,ndsconf11,fz,, -F0
6
7 ndsconf12 = node(1.22,0,0)
8 F,ndsconf12,fy,F0*2
9 F,ndsconf12,fz,, -F0*2
10
11 ndsconf13 = node(1.52,0,0)
12 F,ndsconf13,fy,F0
13 F,ndsconf13,fz,, -F0
14
15 ndspalier1 = node(0.305,0,0)
16 ndspalier2 = node(2.13,0,0)
17
18 ALLSEL
19 CM,ALLELEM,ELEM
20
21 FINISH
22
23 !set the analysis type
24 /SOLU
25 hropt,full
26 kbc,1
27 SYNCHRO,,ALLELEM
28 CMEGA,ALLELEM,1.0
```

Figura 31. Script de comandos utilizado para la solución de la sección armónica del análisis.

Llegados a este punto se ha concluido con la configuración de ambos módulos de análisis, lo único que resta a partir de este punto es resolver el análisis, este proceso se encuentra automatizado y basta con presionar el botón Solve.

## Resultados

Esta sección presenta los resultados obtenidos a partir del trabajo realizado en las secciones anteriores, tal como se planteó en la justificación del presenta trabajo, la importancia de evaluar el comportamiento dinámico de la turbina reside en que nos permitirá encontrar las velocidades críticas del ensamble de nuestro rotor, lo cual nos permitirá saber el rango de velocidades en el cual será seguro operar el aparato. De igual forma, en el caso de fuese necesario situar el rango de operación de la turbina en una zona con velocidades críticas, los resultados obtenidos nos permitirán conocer con qué clase de vibraciones estamos tratando, los modos de las mismas, su amplitud y esfuerzos, pudiendo inclusive predecir el tiempo de vida del aparato cuando este se encuentra sujeto a dichos esfuerzos.

Tal información abre la puerta a distintas medidas que pueden tomarse para asegurar la viabilidad del diseño; pudiendo, en caso de ser necesario, rediseñar el rotor con el fin de reducir características poco deseables, como altos esfuerzos reversibles que propicien la formación de grietas, amplitudes de vibración cuya magnitud pueda producir colisiones. A continuación, se presentan los 6 primeros modos de vibración de la turbina:

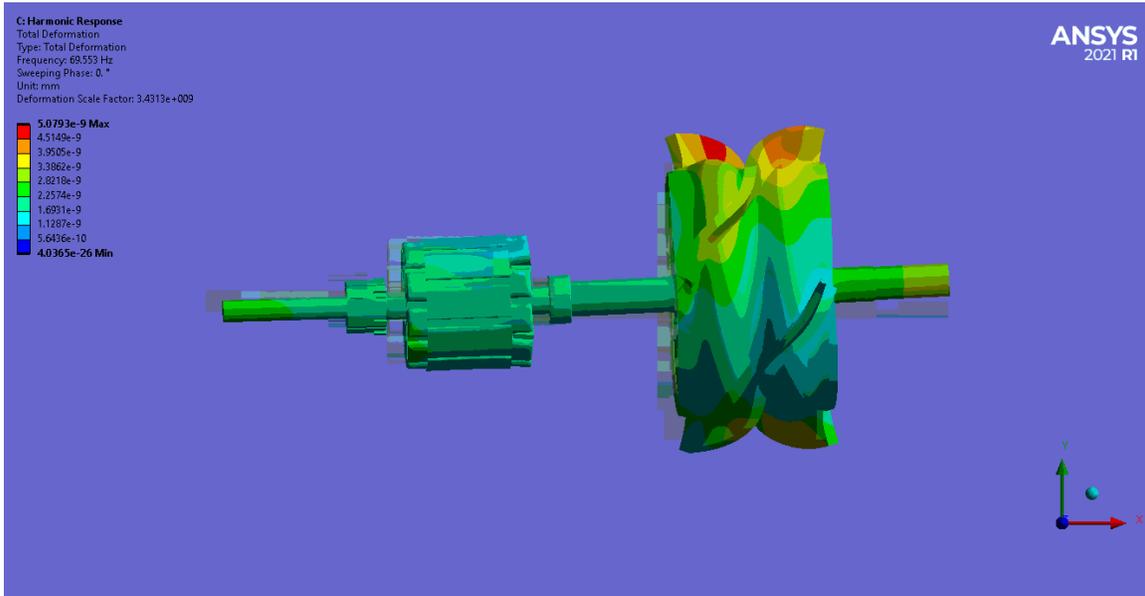


Figura 32. Primer modo de vibración del rotor (vista lateral).

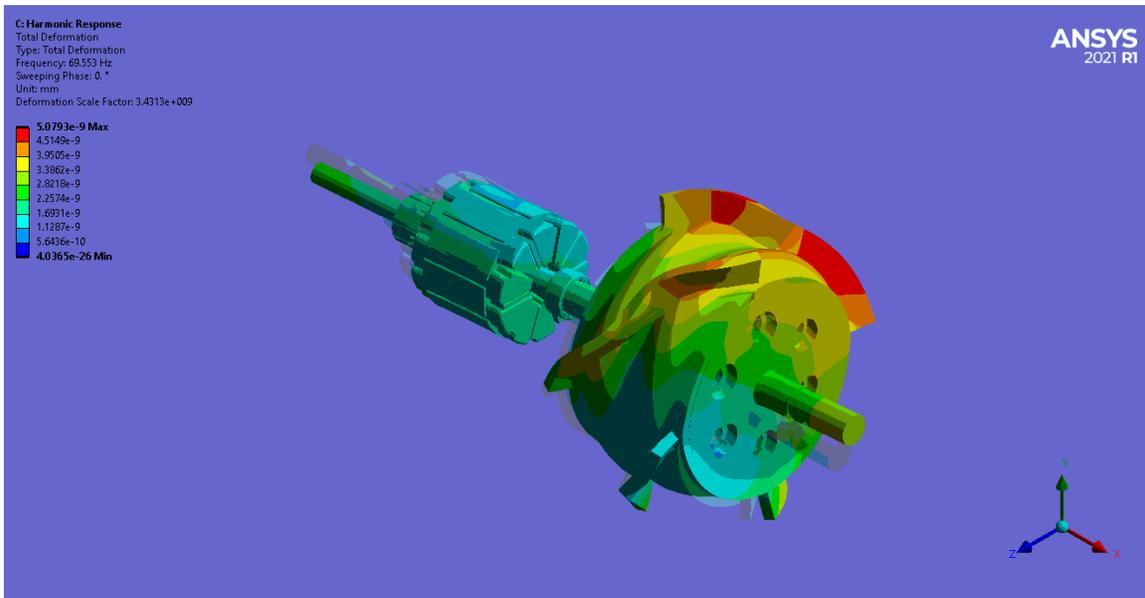


Figura 33. Primer modo de vibración (vista isométrica).

Como se puede apreciar en las figuras 32 y 33 la deformación en el rotor, producida por el primer modo de vibración, en combinación con el movimiento rotativo tendera a producir una órbita cónica. Al observar la animación producida por Ansys en base a los resultados obtenidos, todo parece indicar que el rotor exhibe un comportamiento flexible, mientras que en este primer modo los rodamientos parecen deformarse a una escala mucho menor.

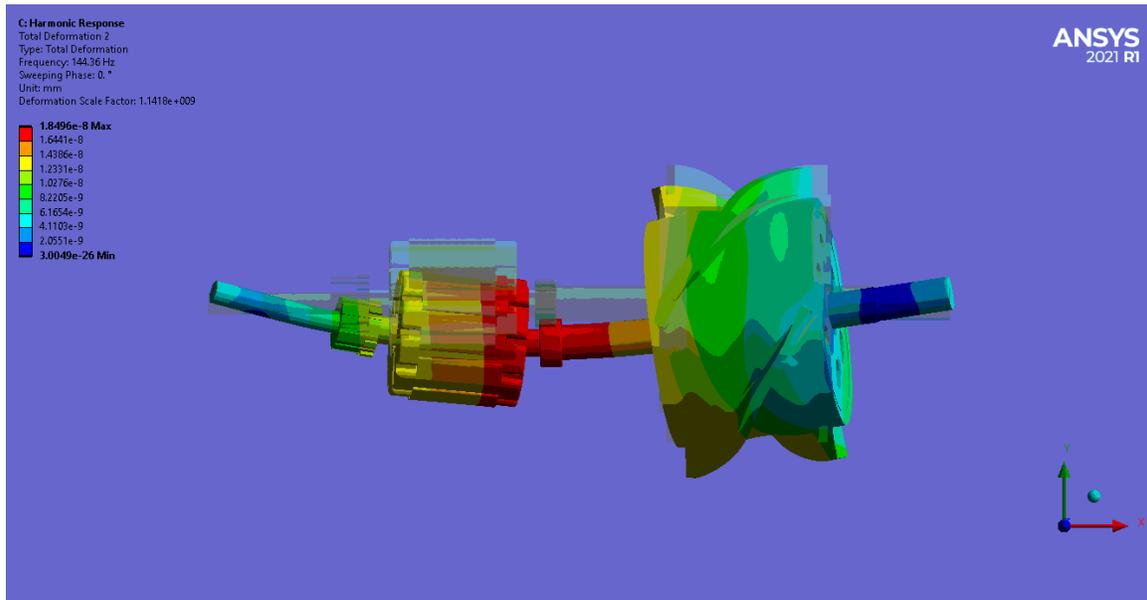


Figura 34. Segundo modo de vibración (vista lateral)

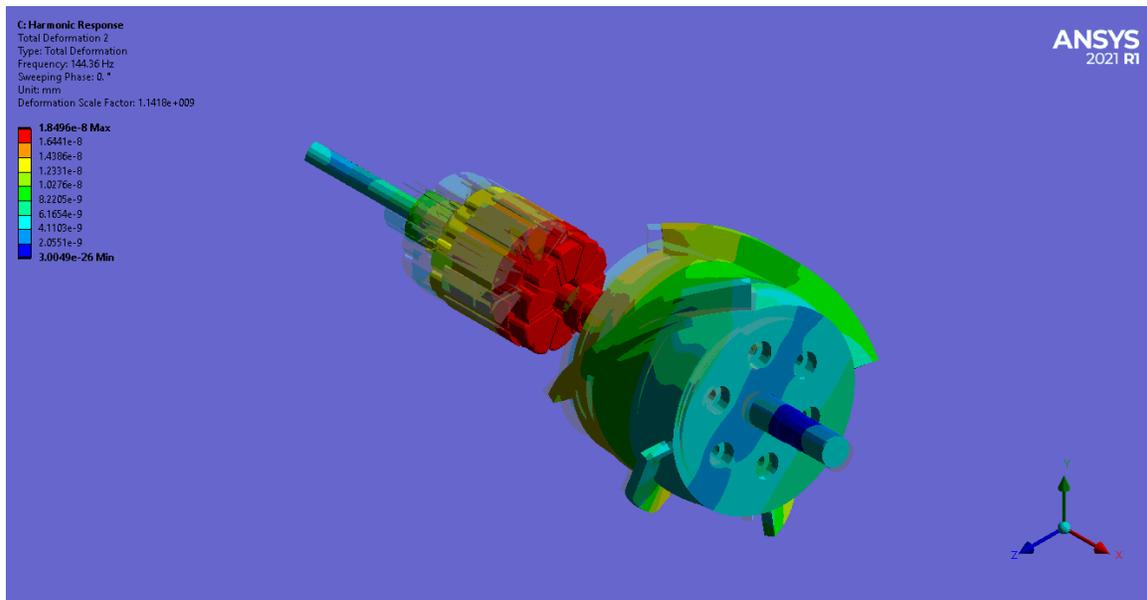


Figura 35. Segundo modo de vibración (vista lateral)

Los resultados obtenidos para el segundo modo de vibración parecen indicar la presencia de un modo de vibración lateral con orbitas circulares, tal comportamiento es más apreciable en la figura 34, en la que se puede apreciar como el ensamble del rotor se flexiona con respecto al eje de rotación, dicho movimiento en combinación con la rotación a la que se encuentra sujeto el conjunto tenderá a producir orbitas circulares; de igual forma se puede apreciar que los rodamientos se comportan de manera más rígida que en el modo anterior.

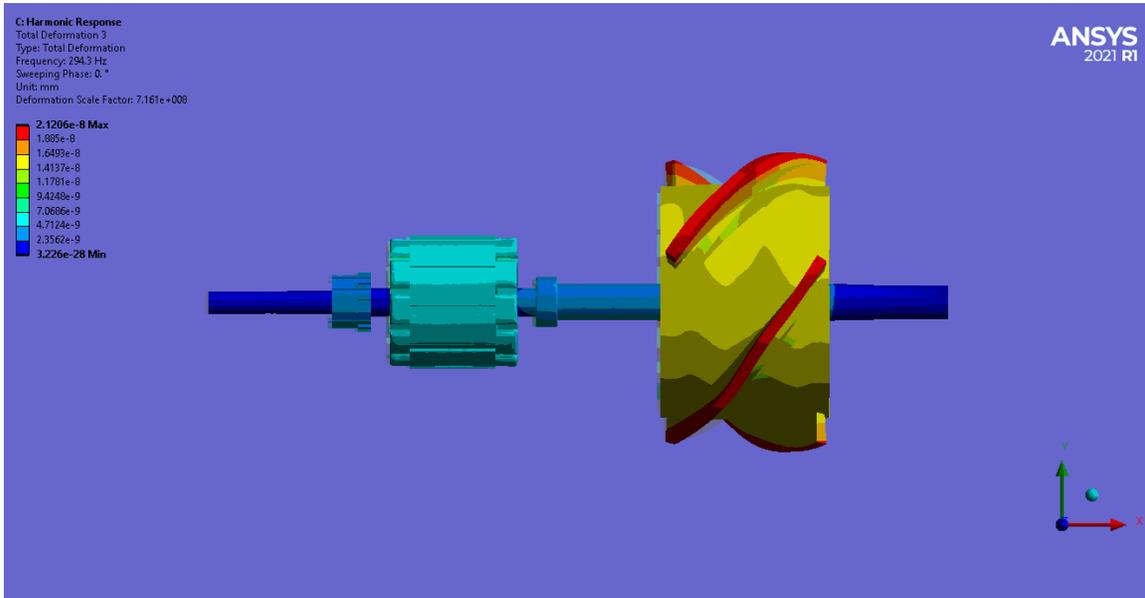


Figura 36. Tercer modo de vibración (vista lateral).

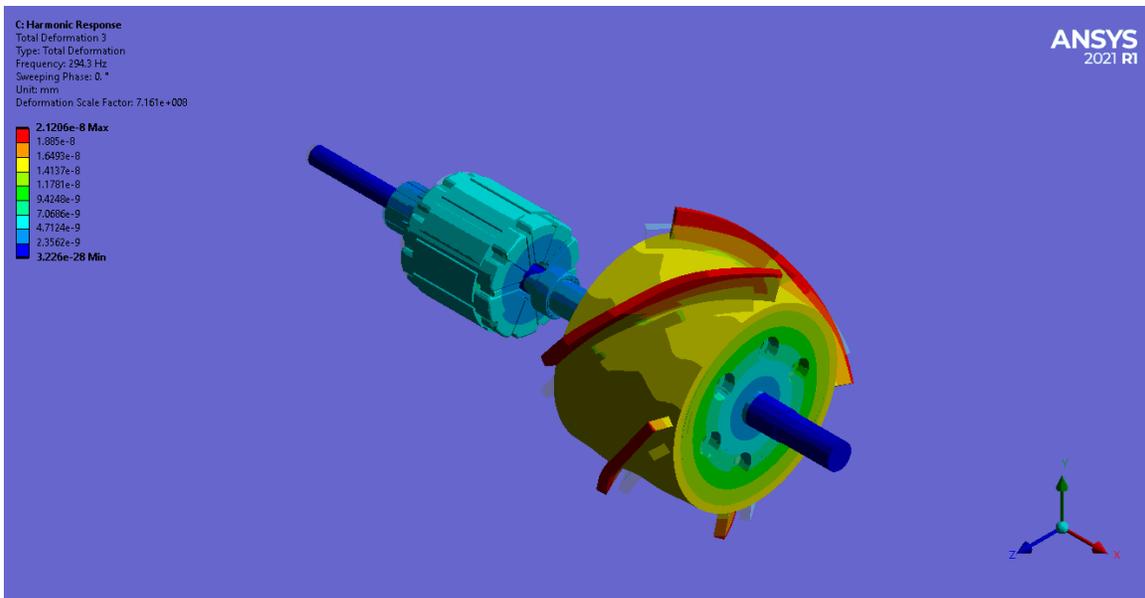


Figura 37. Tercer modo de vibración (vista isométrica).

El tercer modo de vibración es quizá el más peculiar de todos, pese a que en apariencia no exhibe vibración, los contornos que señalan la magnitud del desplazamiento de los nodos nos permiten identificarlo como un modo torsional, de ahí que la magnitud de los desplazamientos aumente conforme nos alejamos del eje de rotación. Los modos de este tipo son muy difíciles de identificar durante la operación de la turbina, ya que esta deformación torsional se produce mientras que el ensamble del rotor se encuentra rotando.

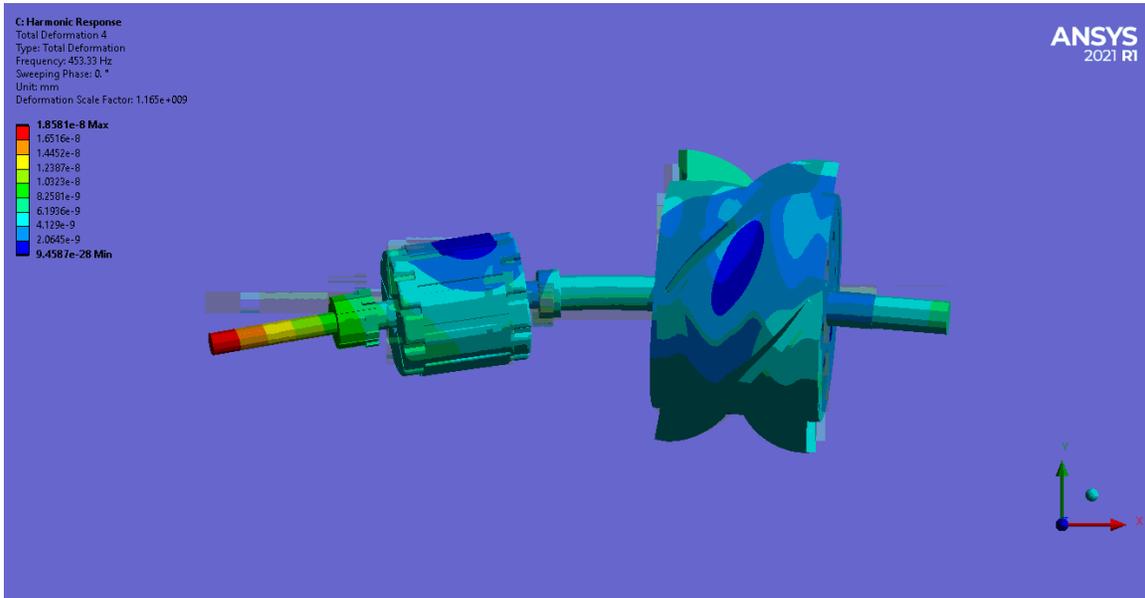


Figura 38. Cuarto modo de vibración (vista lateral).

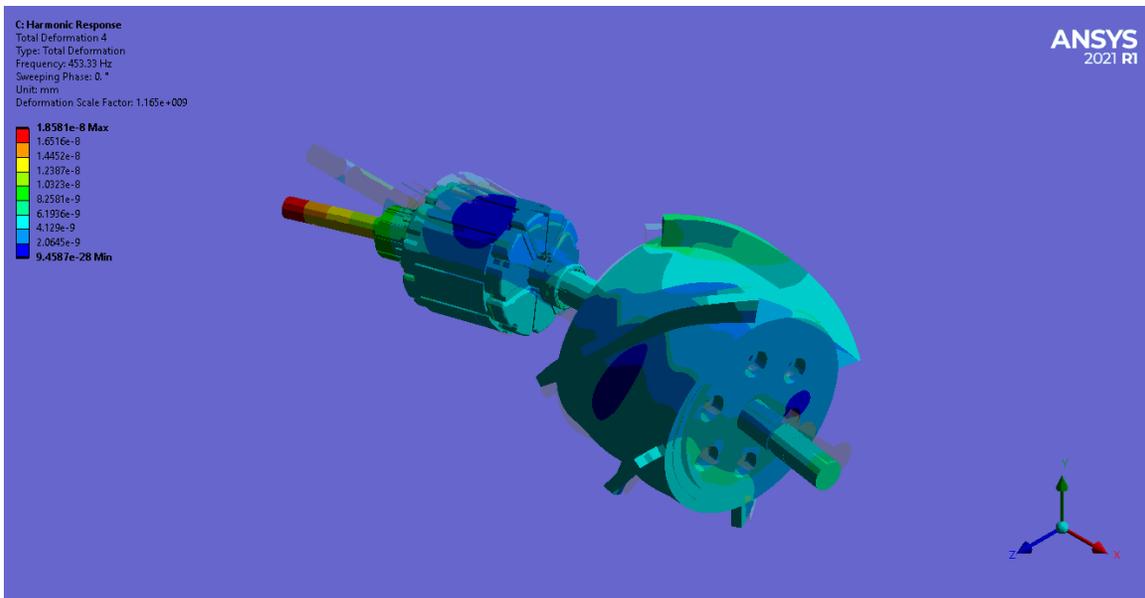


Figura 39. Cuarto modo de vibración (vista isométrica).

De la misma manera en que ocurre en el segundo modo de vibración, el cuarto modo parece presentar el comportamiento típico de un modo con vibración lateral, cuyas orbitas son circulares; sin embargo es importante señalar que no está del todo claro que tipo de pertenecen las presentadas por estos dos modos, ya que, en ausencia del movimiento rotativo, la flexión producida por un modo con orbitas elípticas presenta características similares a la de un modo con orbitas circulares, tal como se muestra en la figura 6.

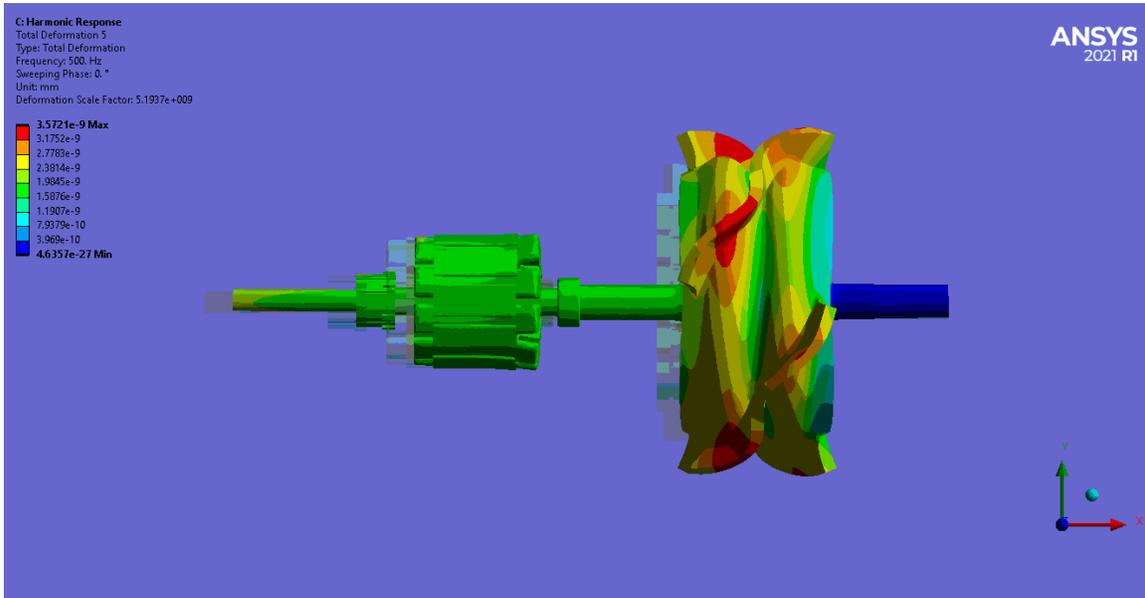


Figura 40. Quinto modo de vibración (vista lateral).

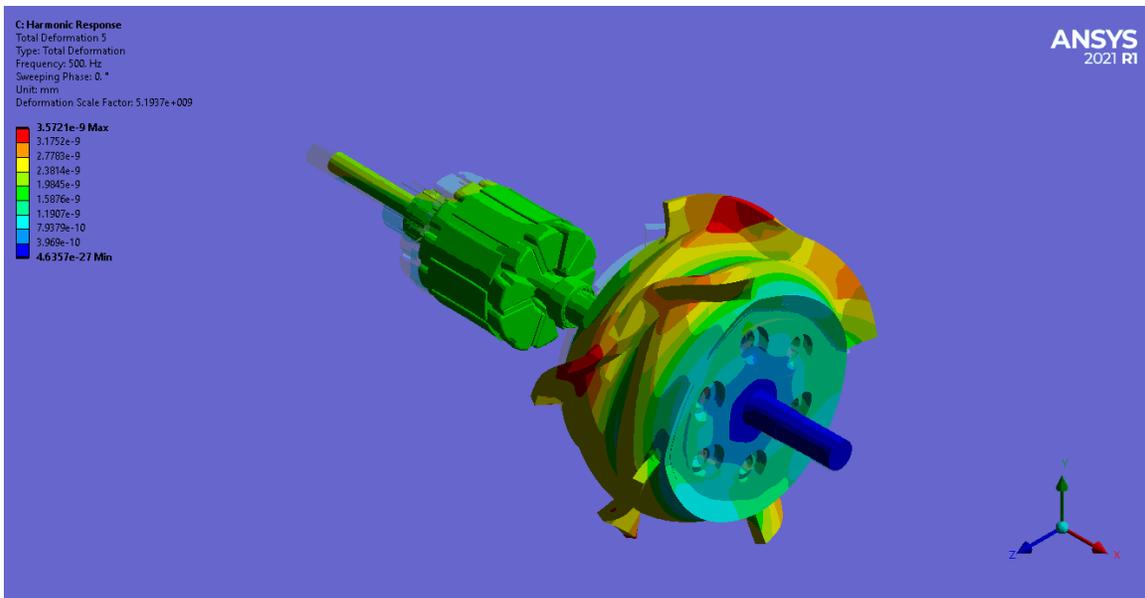


Figura 41. Quinto modo de vibración (vista isométrica).

Este modo es quizá el que exhibe el comportamiento más complejo de los 6 analizados, mientras que ambos rodamientos parecen mostrar un comportamiento rígido, y la porción delantera de la flecha ni siquiera presenta deformación, el resto de la turbina parece deformarse axialmente con respecto a su eje de rotación, resultando en una compresión del ensamble sobre su mismo eje. Lo anterior lleva a especular que pudiese tratarse de algún modo torsional combinado con un modo de otra clase.

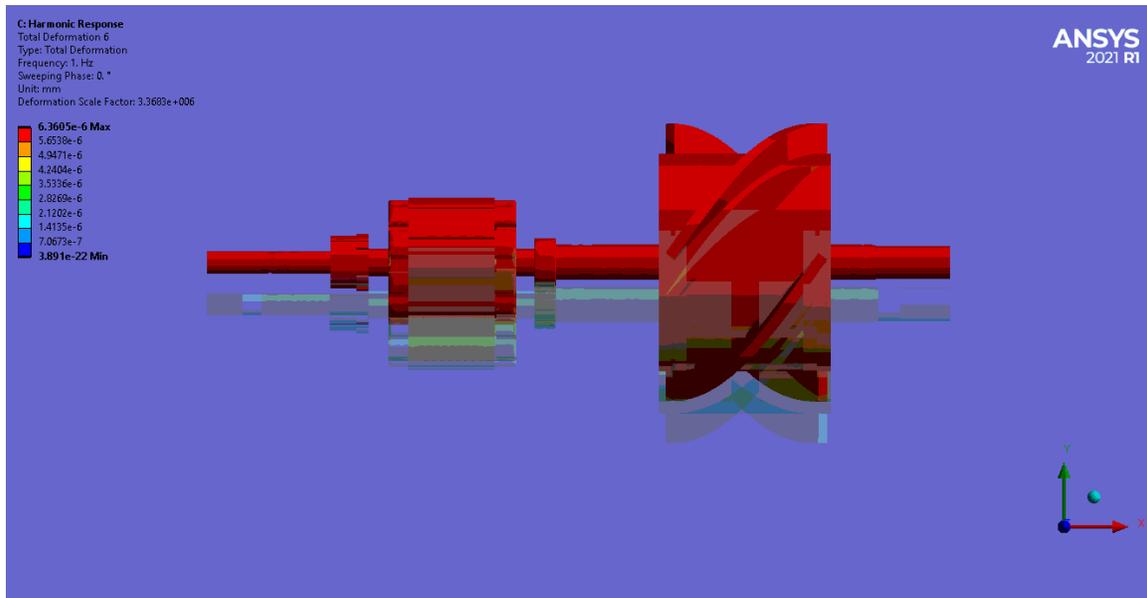


Figura 42. Sexto modo de vibración (vista lateral).

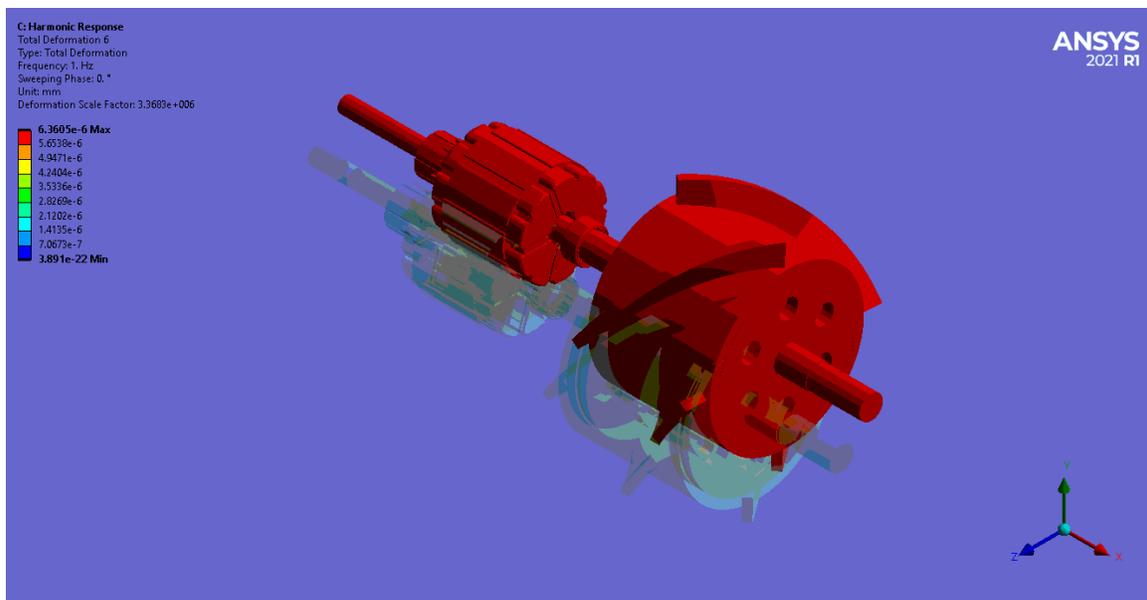


Figura 43. Sexto modo de vibración (vista isométrica).

Este último modo presenta el comportamiento típico propio de un modo cilíndrico, el desplazamiento que exhibe en el cual el eje del rotor parece no deformarse mientras que se desplaza es característico de un modo de rotor rígido sobre rodamientos flexibles, este modo posee la vibración de mayor amplitud, sin embargo, el que esta se encuentre en el orden de los nanómetros permite descartarla como un peligro para el funcionamiento seguro de la turbina.

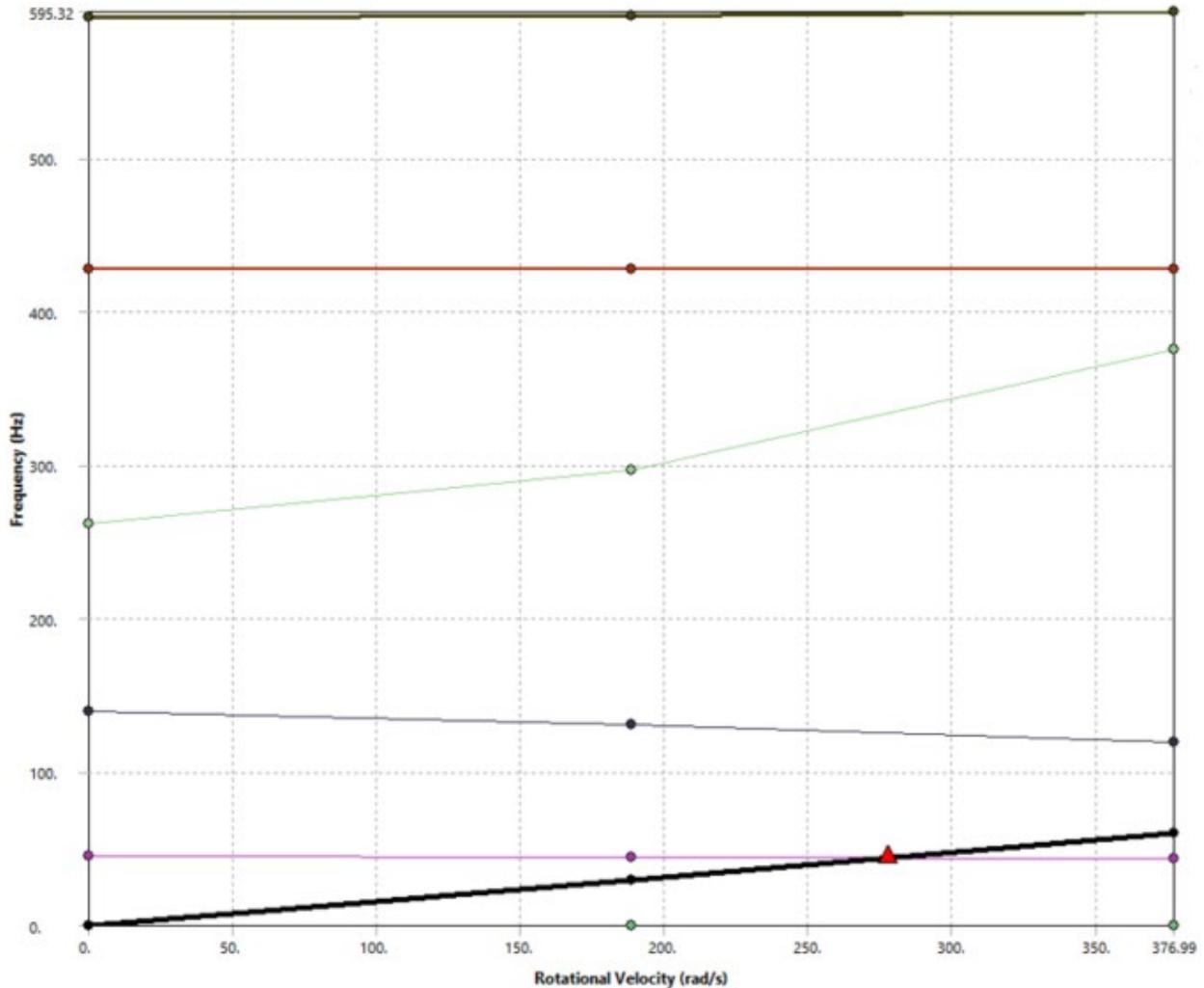


Figura 44. Diagrama de Campbell para el sistema de rotor.

La figura 44 nos presenta el diagrama de Campbell de nuestro sistema, mediante la observación del mismo podemos confirmar la presencia de una velocidad crítica en el dominio que representa el rango de trabajo de nuestro sistema, esta velocidad crítica se presenta a una frecuencia de 44 Hz o 2650 revoluciones por minuto.

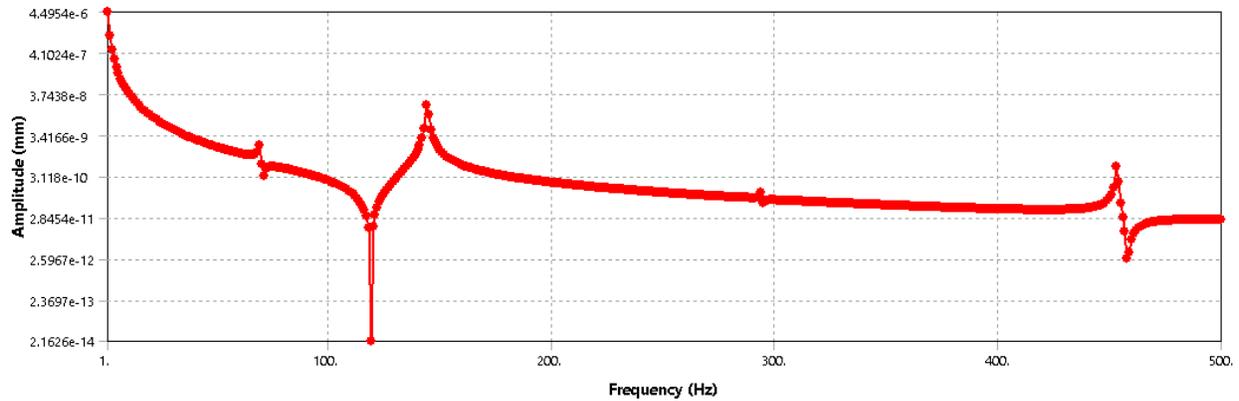


Figura 45. Grafica de respuesta a la frecuencia por parte de la amplitud en el eje Y del plano normal al eje de rotación.

Por último, en esta sección, nos es posible apreciar que la mayoría de los desplazamientos presentados por la turbina, en un rango de frecuencias que va de 0 a 500 Hz, o 30000 rpm, son demasiado pequeños como para presentar una amenaza al correcto funcionamiento de la turbina. Más aun, dado que se pretende que la misma opere en un rango que va desde las 0 a las 3600 rpm, o 0 a 60 Hz, podemos esperar que esta puede operar con seguridad a pesar de la posible presencia de velocidades críticas dentro del mismo rango.

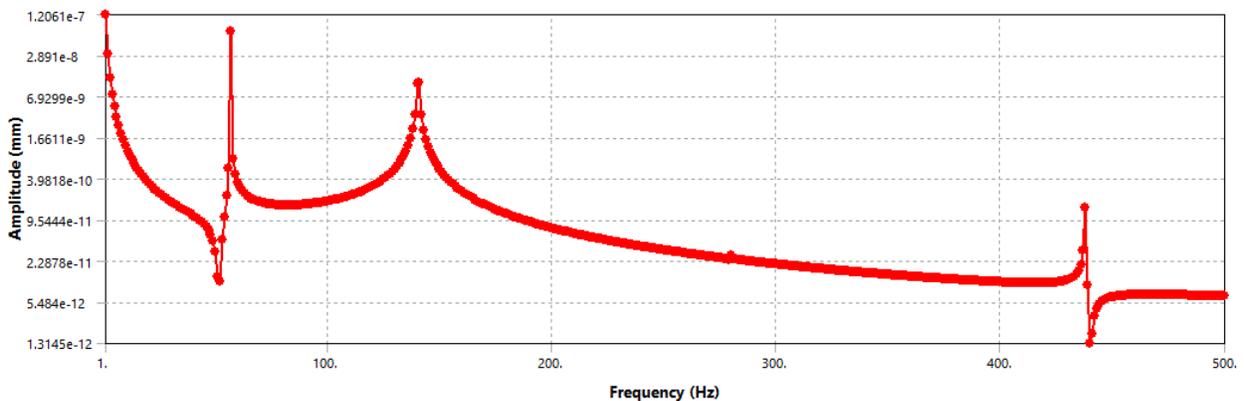


Figura 46. Grafica de respuesta a la frecuencia por parte de la amplitud en el eje Z del plano normal al eje de rotación

Como podemos notar al comparar ambas graficas (para amplitudes en Y y Z) al desplazamiento en ambos ejes tiene amplitudes similares, por lo que la afirmación hecha anteriormente con respecto a que tan seguro seria operar la turbina aun con una velocidad critica dentro del rango de operación puede considerarse válida para las deformaciones en este eje.

## Conclusión

La redacción de esta tesis, en conjunto con el trabajo de investigación que la misma involucra, permitió ampliar el uso de herramientas de simulación en el diseño de esta pico-turbina hidráulica, lo cual permitió validar la presente propuesta de diseño frente a los peligros que presenta el incremento de la amplitud de la vibración del rotor cuando este se encuentra operando en un rango en el que existen velocidades críticas. El análisis realizado en esta ocasión se enfoca únicamente en el comportamiento mecánico del sistema, abordando el problema solo desde la perspectiva de la mecánica de sólidos, lo cual, si bien puede considerarse suficiente para el caso de este sistema en particular, desprecia los efectos de amortiguamiento producidos por el fluido circundante; estos a su vez pueden llegar a producir, en el caso de sistemas de mayor escala, una reducción o aumento en la amplitud de las vibraciones de dicho sistema.

Es en base a esto que consideraría necesario, que si se busca escalar este diseño, o, analizar el comportamiento de un sistema de mayores dimensiones se debe llevar a cabo mediante un análisis multifísico, preferentemente uno resuelto de tal manera que permita a ambas partes, mecánica de sólidos y de fluidos, intercambiar información de manera continua entre iteraciones, de tal manera que se puedan obtener resultados que reflejen la respuesta a ambas físicas de manera más cercana a la realidad.

Mediante el uso de los módulos de análisis mencionados anteriormente se obtuvieron datos que permiten comprender el comportamiento del sistema dentro del rango de frecuencia en el que este opera. En base a la observación del diagrama de Campbell, figura 44, sabemos que existe una velocidad crítica en el rango de operación de la turbina, sin embargo, los resultados obtenidos para la respuesta a la frecuencia en los dos ejes del plano normal a la rotación de la turbina, las amplitudes en Y y Z, indican que la amplitud de las vibraciones en el rango de operación de la turbina, incluyendo las frecuencias adyacentes a la velocidad crítica, es demasiado baja como para suponer un peligro para la operación del sistema.

Teniendo en cuenta los puntos expresados con anterioridad, puedo afirmar que el análisis llevado a cabo en el presente diseño es lo suficientemente cercano a la realidad como para considerarse confiable, y por extensión, la operación del equipo es segura en el rango de velocidades propuesto.

## Bibliografía

- [1] M. J. Goodwin, Ed., “ROTORDYNAMICS ’ 92,” in *Proceedings of the International Conference on Rotating Machine Dynamics.*, 1992, doi: 10.1007/978-1-4471-1979-1.
- [2] J. Vance, F. Zeidan, and B. Murphy, *Machinery Vibration and Rotordynamics*, 1st ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.
- [3] A. D. Dimarogonas and S. A. Paipetis, *Analytical Methods in Rotordynamics*, Second. Patras: Springer.
- [4] K. Gupta, Ed., “IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics,” 2009, doi: 10.1007/978-94-007-0020-8.
- [5] A. D. Dimarogonas, “Vibration of cracked structures: A state of the art review,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 55, no. 5, pp. 831–857, 1996, doi: 10.1016/0013-7944(94)00175-8.
- [6] Y. Ishida and T. Yamamoto, *Linear and Nonlinear Rotordynamics A Modern Treatment with Applications*, Second. Berlin: Wiley-VCH, 2012.
- [7] R. Tiwari, *Rotor Systems: Analysis and Identification*. Boca Raton: CRC Press, 2017.
- [8] J. M. Vance, *Rotordynamics of Turbomachinery*, 1st ed. College Station: Wiley-VCH, 1998.
- [9] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, 1st ed., vol. 1. 2005.
- [10] A. Vollan and L. Komzsik, *Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method*. 2012.
- [11] M. I. Friswell, J. E. T. Penny, S. D. Garvey, and A. W. Lees, “Dynamics of rotating machines,” *Dyn. Rotating Mach.*, pp. 1–526, 2015, doi: 10.1017/cbo9780511780509.
- [12] Ansys, *Harmonic Analysis : Introduction to ANSYS Rotordynamics*. 2013, pp. 1–20.