UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

"COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN."

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:
José Alvaro Encinas Bringas

Director de tesis:

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Mexicali, Baja California, México. Marzo de 2012

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma de Baja California por todo lo que me ha permitido alcanzar. En particular por el apoyo a este estudio a través del Instituto y de la Facultad de Ingeniería.

Al Sindicato de Profesores de nuestra Universidad, por el apoyo brindado para lograr esta meta.

A mi esposa Isela, mis hij@s Alba Isela, María Jimena, Heriberto y Álvaro Alonso; mis niet@s, Viviana y JuanÁlvaro por la paciencia que me tuvieron al distraer la atención que se merecían y no les brindé, por estar en esto. Por mis múltiples malos ratos, perdón. A Elsa y Rodolfo Bringas, mis primos y compadres por el apoyo recibido para este logro.

A mi director de tesis, Dr. Ramiro Ávila Godoy, mi admirado guía académico, por su amistad, por su entrega, dedicación y paciencia para alcanzar esta meta.

A mis compañeros de Cuerpo Académico, Ruth Rivera y Maximiliano De las Fuentes, por todas las vivencias académicas compartidas.

A los estudiantes y compañeros profesores de la Facultad de Ingeniería que me apoyaron a lo largo del estudio.

A los lectores de esta tesis y sinodales del examen de grado, mi reconocimiento y gratitud por su dedicación y aportaciones a este trabajo:

Dr. Ramiro Ávila Godoy
Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Dr. Maximiliano De Las Fuentes Lara
Dr. José Luis Arcos Vega
Dr. Juan José Sevilla García

ÍNDICE

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

Resumen

En este documento se reporta una investigación cuyo propósito fue describir y explicar la relación existente entre la comprensión y la competencia que estudiantes de ingeniería muestran al abordar problemas matemáticos, en este caso en optimización. Esta última, una actividad esencial y característica en el ejercicio profesional de los ingenieros. Según el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2003) la comprensión es una noción relacionada con los significados personales sobre los objetos y procesos involucrados, en este caso, en la resolución de problemas (RP). Para este trabajo, la competencia está determinada por la eficacia del sujeto en la resolución de dichos problemas.

El hurgar en los significados y prácticas personales de los estudiantes para indagar sobre el papel que juegan estas nociones, requiere de una investigación de corte cualitativo cuya pretensión sea describir y explicar el por qué de las situaciones encontradas. Se diseñó un estudio dividido en dos partes: una primera fase de carácter exploratorio, para conocer sobre significados institucionales de referencia, planeados e implementados en optimización. Una segunda fase, para conocer sobre el desempeño de estudiantes frente a problemas de optimización, focalizándose en la comprensión y metacognición.

En la primera fase, se realizó el acercamiento exploratorio sobre los significados institucionales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (FIM). Se diseñó y aplicó un cuestionario a profesores para conocer sobre los libros en que se apoyan para planear su clase y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente se realizó un análisis epistémico del libro de texto y una observación no participante, grabándose en video las clases impartidas sobre el tema por uno de los profesores. Se comparó y analizó la información recabada encontrándose entre otras cosas, una fuerte influencia del texto en el trabajo del profesor; un estilo de trabajo en el aula centrado en el profesor y con un enfoque de enseñanza de corte tradicional.

En la segunda fase, en la FIM se escogieron a estudiantes de ingeniería que tomaban el curso de cálculo con los mismos profesores de la primera fase. Se seleccionaron problemas de optimización de los libros de texto en uso por esos profesores. Los problemas se aplicaron a dichos estudiantes y se les solicitó que además de su respuesta por escrito, que externaran en voz alta sus pensamientos en forma simultánea al proceso de RP. Esto último para indagar sobre la gestión metacognitiva de los estudiantes en la RP. Las grabaciones fueron transcritas.

El análisis e interpretación de las prácticas de los estudiantes se efectuó sobre las respuestas y transcripciones, con base en las nociones de objetos y procesos matemáticos del (EOS) ligadas a la comprensión así como algunas nociones referentes a los procesos metacognitivos y competencia del resolutor para resolver problemas**.** La información obtenida fue analizada en dos niveles: un primer nivel donde se describe lo encontrado tanto en las respuestas como en las transcripciones. Un segundo nivel donde se pretende explicar lo sucedido.

En un primer nivel se identificaron los objetos y procesos en las prácticas observándose en lo general, pobres significados de ellos e inclusive en algún caso, erróneos; diversos obstáculos en el proceso de resolución, especialmente la elaboración de la función que modela matemáticamente el problema. Las transcripciones muestran diversos estilos de gestión metacognitiva en la RP.

En un segundo nivel de análisis, se halla que la comprensión de un objeto matemático no basta para ser competente en la RP asociados al mismo objeto; Se encuentran evidencias de que la gestión metacognitiva de planeación, dirección y control, juega un papel decisivo en la RP; que los estudiantes con mayor desarrollo de esta gestión tienen un mejor desempeño en el proceso de resolución del problema, es decir son más competentes. La persistencia, componente de la actitud y por tanto de la competencia, en este caso hacia las matemáticas, también juega un papel importante. Se conjetura que es el contexto el que incide sobre los significados de los objetos, actitudes y gestión del resolutor.

Presentación

El presente trabajo forma parte de un programa mayor de investigación que tiene como problema central "el papel que el contexto juega en la construcción de los significados de los objetos matemáticos, tanto en la etapa del origen y desarrollo del objeto como en la de su aprendizaje en una institución educativa, en cuyo caso nuestro interés es establecer la relación entre el contexto de la enseñanza y los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos" (Ávila, Ibarra y Grijalva, 2010:337).

En este programa de investigación mayor se considera que el fin último de las investigaciones en la disciplina denominada Matemática Educativa, es mejorar la calidad de los aprendizajes en Matemáticas de los estudiantes de todos los niveles educativos, en particular, en el nivel superior en la formación de ingenieros. Para lograr este propósito, es necesario comprender los procesos que se desarrollan en las aulas, esto es, los procesos de estudio a través de los cuales se aprenden las Matemáticas y los procesos de enseñanza, entendidos éstos como los procesos a través de los cuales se activan y conducen los procesos de estudio. Se asume que llegar a comprender estos procesos genéricos y en particular el proceso de resolución de problemas escolares, permite el poder formular propuestas de mejora al proceso de enseñanza que resulten efectivas.

Se concibe a la Matemática, al menos de las siguientes tres maneras (Godino, 2003), (Godino, Batanero y Font, 2009) y cada una de estas facetas, como aspectos constituyentes de la misma.

a) Como una actividad de resolución de problemas
b) Como un lenguaje simbólico
c) Como un sistema conceptual lógicamente organizado

La actividad de matematización es representada en sus características por la noción de práctica: toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero, 1994:8). El significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan.

En una institución escolar, se tienen autoridades, profesores, estudiantes, planes de estudio, textos, aulas, normas, etc. que permiten o facilitan los procesos educativos. En el aula el profesor conduce el proceso de instrucción o enseñanza, mientras que el alumno lleva un proceso de aprendizaje. Los profesores enseñan de acuerdo a sus conocimientos del contenido, se considera que sus concepciones y creencias influyen en su método de enseñanza, partiendo del supuesto de que en lo general ellos hacen su mejor esfuerzo para lograr que sus estudiantes asimilen lo que pretenden. Un estudiante que es sometido a un proceso de instrucción sobre un determinado tema, puede o no comprender lo enseñado. Si se quiere entender el efecto de la enseñanza sobre los estudiantes, se tiene que conocer y estudiar las respuestas emitidas cuando se les enfrenta una cierta situación problémica perteneciente a ese tema. Más específicamente, estudiantes de ingeniería que cursan materias de matemáticas, y que son sometidos a un cierto proceso de enseñanza, ¿Cómo se desenvolverán frente al reto de resolver problemas del tema estudiado?

En el presente trabajo se presentan los resultados de una investigación que tuvo como objetivo central describir y explicar la relación existente entre la *comprensión* y la *competencia* que estudiantes de ingeniería muestran al abordar problemas matemáticos, en este caso en optimización. Para conocer sobre esta relación, se escogieron problemas de optimización puesto que esta noción forma parte esencial en la formación y desempeño profesional del ingeniero, de tal manera, que se enuncia su relevancia en los perfiles de egreso de programas educativos de ingeniería (UABC-FIM, 2009).

La *comprensión* es una noción con varios significados. En este trabajo se adopta la concepción pragmática de concebir comprensión como una competencia, para Font (2007):

> Este punto de vista considera que la comprensión o el saber un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula (p.4).

También se declara que la noción de competencia en este estudio es: *competencia para resolver problemas* significa el uso eficaz de los conocimientos y procedimientos matemáticos para abordar y resolver problemas matemáticos.

En el proceso de resolución de problemas matemáticos, se conjetura que estudiantes que alcanzan un buen grado de comprensión de un objeto, en este caso, de optimización, no le es suficiente para resolver correctamente, problemas pertenecientes a ese mismo campo. Se conjetura, y es una hipótesis de trabajo o investigativa que la gestión metacognitiva es una dimensión en este proceso que puede incidir fuertemente en la competencia del estudiante resolutor.

El estudio estuvo ubicado teniendo como escenario de la Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, con profesores, estudiantes, libros, clases, etc. fundamentalmente por dos razones: a) el autor es profesor de matemáticas de esa Facultad, y b) el programa doctoral denominado MYDCI al cual está inscrito este trabajo, requiere que el tema de investigación se relacione con la formación de ingenieros, en este caso, aprendizaje de matemáticas.

Si bien el acercamiento al problema está situado en una institución escolar especifica de nivel superior, en una área muy definida, la ingeniería, en materias –matemáticas-que contribuyen a la formación de profesionales en el área, se considera, que el acercamiento se puede transponer a otros niveles educativos, a otras áreas del conocimiento, dentro y fuera de la vida escolar e inclusive a la vida cotidiana, por lo que se estima no se pierde generalidad a este tratamiento.

Estructura del reporte

El capítulo uno, aborda el problema a investigar desde diversos acercamientos. El contexto que rodea al problema, se enuncia el problema y los objetivos del estudio. Asimismo se comentan trabajos de otros autores relacionados con el problema a investigar.

En el capítulo dos se presenta en una primera parte los elementos teóricos necesarios para sustentar el estudio y que resultan eficaces para analizar e interpretar los sucesos en el aula. En una segunda parte de este mismo capítulo, los elementos metodológicos utilizados para efectuar la investigación.

El Enfoque Ontológico Semiótico sobre la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) construido por Juan Díaz Godino y colaboradores, representa la estructura teórica más adecuada para este estudio, por estar interesados en las prácticas matemáticas de estudiantes, en este caso de ingeniería. Se revisa esta noción de práctica así como los objetos y procesos involucrados. Los significados personales e institucionales, también son examinados, así como las nociones de norma y metanorma. Se finaliza con la noción de comprensión ligada a elementos mencionados en este párrafo.

El Proceso de Resolución de Problemas Matemáticos es revisado como tema medular, es presentado diferenciando diversos términos sinónimos a *problema*, se hace una clasificación de problemas matemáticos y finalmente, los factores que influyen la resolución de problemas. Parte importante en la resolución de problemas son los elementos de la gestión metacognitiva del sujeto resolutor, este tema es expuesto incluyendo los procesos que integran esta actividad.

Otra noción central en este estudio, la competencia, es abordada de una manera amplia, tomándose en cuenta sus definiciones, clasificaciones, elementos que la integran y la competencia de un sujeto resolutor de problemas.

En la segunda parte de este capítulo 2, los elementos que integran la metodología son presentados. Por las características del problema a investigar, los objetivos del estudio planteados, se considera una investigación de corte cualitativo. Esto es porque el foco de la investigación está puesto en los procesos de resolución de problemas por parte de estudiantes (sujetos) y no en los resultados cuantitativos de los mismos. Además el estudio contempla el observar situaciones en el aula, interacciones entre profesores y alumnos, el entramado institucional. Parte fundamental es incorporar las voces de los estudiantes y profesores participantes, a través de sus pensamientos en voz alta, reflexiones y acciones.

La investigación se diseñó considerando una primera etapa o fase exploratoria donde se pretende obtener información sobre los profesores, sobre la manera que planean su clase, los libros de texto en los que se apoyan, sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Una segunda fase de la investigación se planeó para recabar datos sobre el desempeño de estudiantes de ingeniería al enfrentar problemas matemáticos de optimización.

En el capítulo tres se muestra el trabajo realizado en la etapa exploratoria. Se diseñó y aplicó un cuestionario a profesores para conocer sobre los libros en que se apoyan para planear su clase y sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sólo algunos regresaron el cuestionario debidamente contestado y de ellos, uno permitió una entrevista aclaratoria y el ingresar a su clase. El análisis de las respuestas al cuestionario, sugirió la conveniencia de hacer una observación no participante en el aula para conocer sobre lo que realmente se sucede en la clase, esto mediante la técnica de videograbación. Además de un análisis epistémico del libro de texto. Se analizaron los datos tomados tanto del cuestionario, como de la grabación en clase y del análisis del texto. Se comparó y analizó la información recabada encontrándose entre otras cosas, una fuerte influencia del texto en el trabajo del profesor; un estilo de trabajo en el aula centrado en el profesor y con un enfoque de tipo tradicional.

El capítulo cuatro reseña la actividad llevada a cabo con los estudiantes, incluyéndose la aplicación de los problemas y el análisis de los datos obtenidos. Se obtuvo información sobre el desempeño de estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Estos estudiantes que tomaban un curso de cálculo con los mismos profesores mencionados en la etapa exploratoria, fueron elegidos por esos mismos docentes considerándolos como de buen desempeño en su clase. Los problemas, caso específico, de optimización en cálculo, son seleccionados de los mismos libros de texto de apoyo a los profesores. En forma individual y aislada, se les aplicó los problemas pidiéndoles que anotaran en una hoja de papel su respuesta al problema. Adicionalmente, se les solicitó que expresaran en voz alta sus pensamientos en forma simultánea al proceso de resolución. Sus voces fueron grabadas y transcritas. Al finalizar cada caso, se realizó una entrevista aclaratoria sobre lo acontecido.

En el último capítulo se hace una discusión de los hallazgos y trabajos de otros autores, las respuestas a los objetivos de investigación planteados, se presentan conclusiones y algunas recomendaciones.

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo, se presenta el contexto en el cual el problema de investigación aparece, se hace una precisión de éste y sus objetivos. Se exponen resultados de algunas investigaciones relacionadas con el problema. Se finaliza el capítulo con algunas hipótesis de trabajo.

1.1 Contexto del problema

Todos los seres humanos a lo largo de su vida tienen que enfrentar un problema o conflicto. Los problemas son inherentes a la humanidad. Es en el día a día donde se resuelven problemas desde los triviales hasta los más complejos y con un cierto significado para el que los enfrenta. Situaciones como el tener que cambiar una llanta baja en la carretera, adquirir un nuevo vehículo, considerar si se quiere cambiar de carrera, buscar trabajo, hacer un posgrado, casarse, divorciarse, organizar el gasto quincenal, construir una casa, etc. Todas ellas en mayor o menor grado generan en el sujeto que las enfrenta diversos estados emotivos: confusión, temor, inseguridad, etc. Indicadores de que sucede algo que no queremos e intentamos cambiar. Seguramente que habrá muchas personas para los que los problemas triviales serán resueltos con cierta facilidad. Pero menos, serán capaces de resolver problemas de mayor complejidad, haciendo que las situaciones se impongan sobre las personas. Ante un problema de gran envergadura, en ocasiones personas siguen la política del avestruz, se esconden siendo apabulladas por él mostrando una pésima gestión. Otras, enfrentan la situación con valentía y coraje. Intentar resolver problemas complejos, supone tener claro el sentido de lo que se quiere, enfrentar riesgos, tomar decisiones, tener confianza en uno mismo, etc.

Tener buenas posibilidades de éxito en la superación de una situación que nos genera un problema supone el identificar y seleccionar la mejor alternativa de solución. En general el número y variedad de alternativas permitirá mejorar las posibilidades de triunfo. En un momento posterior, se aplica la solución escogida y darle el seguimiento necesario. Para la implementación de una alternativa de solución se debe de tener la voluntad de poner en práctica la decisión y contar con un croquis de la ruta para cumplir la meta. La idea es ir por el camino monitoreando el proceso con el propósito de evitar una desviación. Se debe constatar si se está cumpliendo el plan de acción, los tiempos, el presupuesto, la tarea, etc. Al final, es necesario evaluar los resultados de la alternativa de solución elegida y utilizada. Identificar los criterios que permitan decir que el problema ha sido resuelto y si es posible el grado de efectividad de la solución efectuada.

Hay alguna actitudes que facilitan el enfrentar a un problema de la vida cotidiana: optimismo y convicción en que todo problema puede resolverse si se tiene la voluntad de trabajar lo necesario en él; confianza en que la opinión y contribución son válidas; la voluntad de asumir riesgos, invertir tiempo y energía; y tenacidad para mantenerse en la actividad para resolverlo.

El *optimizar* es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, queremos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible; desplazarnos por el camino más corto o consumiendo lo menos posible de combustible; comprar algo que más nos convenga; construir algo empleando la menor cantidad posible de material; obtener la máxima ganancia en un negocio; cercar un terreno etc.

Un maestro de obra puede construir una casa- habitación pero el ingeniero civil buscará la construcción óptima en espacios, materiales, tiempo, recursos financieros, etc. Lo mismo para caminos, puentes, presas, etc. Situación similar se encontrará en la actividad del ingeniero eléctrico optimizando el consumo de energía en algún centro consumidor. Ó para ingenieros industriales diseñar de manera óptima un sistema de producción; de aseguramiento de la calidad; de recursos humanos; de transportación, etc. Es decir que un ingeniero en el ejercicio de su profesión se enfrenta y se espera que resuelva problemas reales, prácticos que tiene que ver con optimización.

En los términos más amplios, un *problema de optimización* es un problema, en general reflejo de una situación real, al que enfrenta el especialista, particularmente el ingeniero, en que de muchas alternativas que tiene para seleccionar, debe escoger la que le produzca el valor óptimo (máximo o mínimo). Esta alternativa que escoge y que da el mejor valor es la *solución óptima* del problema obtenida al resolverlo (Sánchez, 1996).

Instituciones de educación superior dedicadas a la formación de ingenieros, reconocen la importancia de que sus egresados estén lo suficientemente preparados para que desarrollen esta actividad tal y como se observa en los perfiles de egreso de planes de estudio de diversas licenciaturas en ingeniería. Por ejemplo, los planes de estudio vigentes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC-FIM), México (UABC, 2009).

En el sistema escolar, el estudiante ha aprendido y usado habilidades para la resolución de problemas presentados en los libros de texto de forma elaborada, cerrada y estructurada. A diferencia de los problemas del mundo real, menos estructurados y abiertos donde el estudiante no visualiza claramente los pasos a seguir para su resolución. Por tanto, se esperaría que en el sistema escolar se fomentara la resolución de problemas, si bien no estrictamente del mundo real, si que evoquen (Font, 2007) a éstos, y que sirvan para el desarrollo de las habilidades necesarias del futuro profesionista. La formación recibida en la etapa escolar, debe de capacitar al ingeniero para que el problema real de optimización que pretende resolver, pueda transformarlo en un problema técnico de acuerdo a su especialidad, posteriormente en un problema en términos matemáticos, resolverlo y darle sentido a la solución en términos reales.

La forma de enseñanza tradicional de la matemática para estudiantes de ingeniería, consiste entre otros significados, el que primero se exponga por parte del profesor algún concepto o procedimiento y posteriormente su ejemplificación y uso en ejercicios seleccionados ad hoc para el tema. Método alejado de las pretensiones de habilitar al futuro ingeniero en la solución de problemas reales, en este caso de optimización.

En la etapa de formación del ingeniero se le presenta la noción de optimización dentro de varios contenidos: cálculo diferencial de una variable, cálculo diferencial de varias variables, programación lineal, mecánica y óptica, por enlistar las más notables. Por ello es importante conocer sobre el entorno del tema de resolución de problemas de optimización tanto en la dimensión didáctica como en la cognitiva en la etapa escolar.

Estas etapas del método para resolver problemas deben ser promovidas en la currícula del futuro ingeniero con el fin de habilitarlo en el ejercicio de su profesión para que entre otras actividades, pueda identificar, caracterizar y solucionar problemas reales de optimización.

El concepto de *competencia* empezó a ser utilizado como resultado de las investigaciones de David McClelland (1994) en los años setenta, las cuales se orientaron a identificar las variables que permitieran explicar el desempeño en el trabajo. En una visión más centrada en el *proceso del trabajo* y en las condiciones productivas actuales, puede establecerse la aplicación del concepto de competencia en los mercados de trabajo a partir de las transformaciones económicas que se precipitaron en la década de los ochenta. Países como Inglaterra, Canadá, Australia, Estados Unidos y ahora toda la Unión Europea son pioneros en la aplicación del enfoque de competencia, lo consideraron como una herramienta útil para mejorar las condiciones de eficiencia, pertinencia y calidad de la educación para que en un futuro también mejore su economía.

Una primera disposición que llevó a estos países a cambiar mediante el modelo de competencia fue la inadecuada relación existente entre los programas de educación y la realidad de las empresas. A partir de este análisis se consideró que el sistema educativo valoraba en mayor medida la adquisición de conocimientos que la aplicación de estos en el trabajo. Se requería, entonces, un sistema educativo que reconociera la capacidad de desempeñarse efectivamente en el trabajo y no solamente de adquirir conocimientos. Por ello, a partir de la preocupación por el desempeño de la economía en el mercado mundial, y de la adopción del modelo de las competencias, la adopción de éstas señaló la necesidad de incluir en el esquema educativo lo que realmente ocurría en el lugar de trabajo (Argudín, 2007:29,30)

La temática de enseñanza y evaluación por competencias es de gran interés en la actualidad, debido por una parte a los procesos de integración y de coordinación de la universidades europeas en el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) que incluye los proyectos de el Proceso de Bolonia, Proyecto Tuning y el Crédito Europeo, European Credit Transfer System (ECTS). Así como también a las pruebas de evaluación aplicadas en la Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) implementado a través del Programe for International Student Assesment (PISA) a los países miembros de dicha organización. El marco teórico de PISA (2003) considera competencias en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas.

En los *principales retos*, del Programa Sectorial de Educación 2007-2012 de la Secretaría de Educación Pública (2007:9), señala la problemática de los altos niveles de reprobación y deserción y bajos niveles de aprovechamiento. Las pruebas de aprovechamiento en matemáticas aplicadas por organismos internacionales a nivel medio muestran que el sistema escolar no logra desarrollar en los estudiantes las habilidades necesarias para resolver problemas con creatividad y eficacia.

La sociedad en la actualidad reclama a sus profesionistas nuevas competencias laborales y en general a los ciudadanos también nuevas competencias que en el pasado no se requerían. Muchas universidades en diferentes países incluyendo al nuestro están rediseñando sus modelos curriculares, los perfiles de sus egresados incluyendo una serie de competencias profesionales.

En particular la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) que es una universidad pública estatal y que atiende a la mayor parte de los estudiantes de nivel superior en el estado de Baja California, ha adoptado el modelo educativo centrado en el aprendizaje del estudiante (fuente: Coordinación de Formación Básica). De acuerdo con lo declarado por la UABC, la filosofía de este modelo está basada en el *Informe de la Comisión Internacional para el Desarrollo de la Educación* (1992) de la UNESCO, destacando los siguientes principios: aprender a aprender; aprender a hacer; aprender a vivir juntos; y aprender a ser.

Desprendiéndose de este modelo educativo, se diseñan los planes y programas académicos. Los rasgos de vinculación sociolaboral, de movilidad académica, modalidades educativas modernas influyen en los propósitos de la labor educativa. Educación a lo largo de la vida, un enfoque constructivista, humanista, valoración del esfuerzo, participación responsable, competencias académicas y profesionales, actitud emprendedora, creatividad e innovación.

El modelo curricular de la UABC está basado en las competencias profesionales y que tiene como propósitos principales: centrar el aprendizaje en el alumno; formación integral de los estudiantes; mantener actualizados y pertinentes los contenidos; cerrar brechas entre la universidad y sociedad. La metodología de desarrollo curricular propuesta por la Coordinación de Formación Básica para la creación o modificación de un Programa Educativo inicia con un estudio de factibilidad, la elaboración de un perfil de egreso, unidades de aprendizaje y mapa curricular. Los pasos concretos para ejecutarla son:

1. Problemáticas y competencias generales (Perfil del egresado).
2. Identificación de competencias específicas.
3. Análisis de competencias específicas en conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores.
4. Establecimiento de las evidencias del desempeño.
5. Identificación de unidades de aprendizaje.
6. Elaboración del mapa curricular.

Como se puede observar lo institución en sus documentos curriculares de referencia, la noción de competencia forma parte esencial en los planes y programas de las licenciaturas que ofrece, en particular, las de ingeniería.

La UABC para el semestre 2011-1 (UABC, 2011) cuenta con una población estudiantil total de 49,584, de los cuales 47,943 son a nivel licenciatura y 1,641 a nivel posgrado. La población está distribuida en siete campi a lo largo del estado y de los cuales los más numerosos son Mexicali, Tijuana y Ensenada.

Se cuenta con 9,000 estudiantes de alguna licenciatura en ingeniería en la Universidad. De los cuales 3,700 se encuentran cursando la etapa básica, misma que corresponde aproximadamente a los tres primeros semestres de la carrera. En particular, la Facultad de Ingeniería del campus Mexicali (FIM), cuenta con 3,800 alumnos de los cuales 1,640 cursan la etapa básica. En esta Facultad se imparten 12 programas de licenciatura en ingeniería: Civil, Topógrafo, Computación, Eléctrico, Electrónica, Mecánico, Industrial, Mecatrónica, Bioingeniería, Energías Renovables, Aeroespacial y Sistemas Computacionales.

Estos estudiantes son atendidos por profesores de los cuales 63 imparten matemáticas. En la FIM, se tiene en promedio 30 profesores que imparten materias de cálculo diferencial, integral y multivariable por semestre, de los cuales el 80% son profesionistas del área de las ingenierías, mientras que el resto son Matemáticos y Físicos, con proporciones similares entre ellos. Del total de profesores, poco más de la tercera parte tiene grado de maestría, y de éstos, tres cuartas partes son en ciencias y tecnología, mientras que los demás tienen maestrías en el área de la educación. Se tiene un profesor que imparte cálculo con estudios de doctorado.

Los estudiantes que ingresan a ingeniería provienen en su mayor parte del subsistema nivel medio superior: Colegio de Bachilleres de Baja California, Cbatis, y escuelas preparatorias de origen privado. La mayor parte de ellos de origen urbano, concordando con las características poblacionales del estado y de un nivel socioeconómico mediano, donde la mayor parte ya tienen acceso a computadora e internet.

El paquete básico de matemáticas para un estudiante de ingeniería abarca cursos tales como Probabilidad y Estadística, Algebra Lineal y Métodos Numéricos por una parte; y por otra, las materias que tienen que ver con los aspectos de la variación y el cambio, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Multivariable y Ecuaciones Diferenciales.

1.2 El problema y objetivos de investigación

Partiendo de que en las investigaciones en matemática educativa el propósito último es mejorar los resultados de la enseñanza de la matemática, es decir que un objetivo común a esas investigaciones es aportar elementos que puedan ser utilizados por los profesores de matemáticas en particular o por los sistemas educativos en general, para lograr que los alumnos adquieran un conocimiento más sólido de la matemática, que se vea reflejado en un uso más eficaz de los conceptos y procedimientos de la disciplina, en el análisis e interpretación de un cierto campo de problemas. Se asume que para poder mejorar la enseñanza, es necesario entender de mejor manera los procesos de estudio a través de los cuales las personas aprenden, en especial los que se generan en las aulas escolares en donde se lleva a cabo el proceso de interacción entre profesor y estudiantes. Respecto a estos procesos son muchas las interrogantes que requieren ser contestadas, todas ellas relacionadas con el querer saber ¿qué es lo que ocurre en las aulas y por qué?

La actividad de resolución de problemas es una de las facetas y aspecto constituyente fundamental de la matemática según el EOS (Godino, 2003), por tanto todo estudio dirigido en la dirección de conocer más sobre esta actividad será de interés para la comunidad de matemática educativa y para las instituciones escolares.

Organizaciones de países tales como la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) que agrupan a las principales naciones del orbe, incluida la nuestra, han reconocido la importancia de la resolución de problemas matemáticos y de ciencias en los sistemas educativos. De tal manera que han instituido pruebas a nivel internacional para valorar el estado en el que se encuentran los mencionados sistemas en los países miembros de su organización.

En el marco teórico de esta prueba (PISA, 2003), se hace hincapié en la competencia matemática de tal manera que el término *competencia matemática* se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda (PISA, 2003:26). En esta declaración se hace mención de la existencia de una relación entre la competencia para resolver problemas y la comprensión. La pregunta es ¿Qué tipo de relación es la existente entre ambas? Si se comprende, ¿se es competente? Si se es competente, ¿se comprende? ¿Existe una mutua interdependencia? Si se comprende, ¿basta para ser competente? ¿Qué se requiere para que un estudiante sea competente en la resolución de problemas matemáticos de optimización?

El estudiar la relación entre comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados y la competencia del sujeto en la resolución de problemas matemáticos en lo general, es un problema muy amplio y abierto que requiere acotamiento con la finalidad de poder diseñar una investigación lo suficientemente definida para recabar datos de utilidad y que puedan abonar a estas interrogantes.

La ingeniería es una disciplina profesional que tiene un alto impacto en la vida productiva de un país, por tal razón los gobiernos y las instituciones de educación superior están preocupadas y ocupadas en la formación de más y de ingenieros más competentes. Dentro de la actividad profesional ingenieril, la actividad de optimizar juega un papel central en ese ejercicio.

Por estas razones se ha decidido estudiar el juego de la comprensión y la competencia en la actividad de resolución de problemas matemáticos, en este caso de optimización, y dentro de una institución escolar formadora de ingenieros. Por lo que esta decisión involucraría a estudiantes de ingeniería en plena actividad o quehacer matemático frente a este tipo de problemas.

Por lo que se plantea:

La pregunta central de investigación:

¿Qué relación existe entre la comprensión que tienen estudiantes de ingeniería de los conceptos, procedimientos y procesos que se utilizan en la resolución de problemas de optimización y su competencia en la resolución de esos problemas?

Se estaría entendiendo en este momento como *competencia* de un sujeto como su capacidad para usar de manera eficaz los conocimientos y procedimientos para abordar y resolver problemas matemáticos. El término *eficaz* significa que logra hacer efectivo un propósito; tiene que ver con resultados, con lograr objetivos. Por tanto la eficacia es la capacidad para obrar y conseguir un resultado determinado. Se estaría considerando en ser competente como el sujeto que logra, en este caso resolver un problema. Pero también se tendría como no competentes o incompetentes y un cierto grado de competencia de la persona que se podría observar en el modo en que utiliza sus conocimientos y habilidades para, en este caso resolver problemas.

La comprensión o el saber de un concepto o procedimiento por un sujeto, por ejemplo, la estaríamos entendiendo como el ser capaz de reconocerlo, junto con sus propiedades y representaciones así como el relacionarlo con otros. Un sujeto en un momento dado podrá comprender totalmente o parcialmente o de una manera nula el concepto o procedimiento.

Será necesario examinar sobre la comprensión que los estudiantes puedan manifestar sobre los conceptos y procedimientos intervinientes en la resolución de problemas; ubicar la competencia del sujeto resolutor; comparar ambas nociones en los casos a estudiar y basándose en todo lo anterior, describir lo que sucede en la actividad de resolución de problemas así como el intentar explicar o conjeturar de por qué sucede lo hallado. Unido a lo anterior la conveniencia de explorar previamente el escenario de aplicación ya que esto podría dar pistas o sugerencias para el mejor entendimiento del problema a estudiar.

Objetivo general de la investigación:

Establecer la relación existente entre la competencia de estudiantes para resolver problemas de optimización y su comprensión de los conceptos, procedimientos y procesos que se utilizan en su resolución.

Objetivos específicos:

Un objetivo particular ligado a la comprensión es:

Objetivo 1): Describir las prácticas de estudiantes al resolver problemas de optimización mediante la identificación de los objetos y procesos matemáticos intervinientes en ellas y su efecto en la competencia de esos mismos resolutores.

Como resultado de una revisión exploratoria de investigaciones relacionadas con el tema, tratadas en la siguiente sección, se decide examinar las estrategias de orden metacognitivo utilizadas por los estudiantes y que se presentarían en la resolución de los mismos problemas. Por lo que se propuso el objetivo:

Objetivo 2): Describir la gestión metacognitiva y sus componentes de estudiantes en el proceso de resolución de problemas de optimización y su influencia en la competencia de los mismos resolutores.

1.3 Investigaciones relacionadas

En esta sección se comentan algunos trabajos correspondientes a publicaciones recientes que involucran el tema de estudio en esta investigación.

Un problema docente que podríamos calificar como clásico en las instituciones donde se enseña matemáticas, en particular en el nivel superior y en la formación de ingenieros, denominado por Bosch y Gascón (2004), como *problema de Polya* y que constituye el tema esencial de la corriente dentro de la didáctica que se basa en la resolución de problemas matemáticos como centro de su actividad (PBL) se puede formular en términos escolares: “Ya que los estudiantes dominan las técnicas básicas o elementales y poseen los conocimientos matemáticos necesarios, ¿cómo conseguir que sean capaces de construir y utilizar adecuadamente *estrategias complejas* para resolver problemas matemáticos complejos? (Bosch y Gascón, 2004:3).

Varios trabajos de connotados investigadores (Kilpatrick, 1985; Bell, 1976; Lesh y Landau, 1983; Schoenfeld, 1985; Gascón, 1989) dan evidencia que el abordaje de un problema no rutinario para el estudiante y que este seleccione y use una estrategia de resolución que sea eficaz, es muy difícil para la gran mayoría de estudiantes.

La actividad de resolución de problemas puede plantearse en tres niveles (Bosch, 2004): a) nivel puntual, b) nivel local y c) nivel general.

Para el *nivel puntual* el problema está relativamente aislado del resto del contenido. La gran mayoría de las investigaciones se han hecho en este nivel. La situación presentada usualmente es un grupo de alumnos en situación escolar que tienen que resolver un problema no rutinario, suponiendo que disponen de los conocimientos necesarios para ello. El objetivo de la observación consiste en el análisis de la cognición o pensamiento matemático de los alumnos, por lo que podemos decir que dichas investigaciones atribuyen al problema de Pólya un carácter esencialmente cognitivo (Schoenfeld, 1985). De lo anterior, se han planteado problemas de investigación del tipo siguiente: ¿En qué forma interactúa el conocimiento matemático con las estrategias, el control, las creencias y las prácticas? ¿Los mecanismos de control dependen del dominio matemático considerado? ¿Cómo se integran la dimensión cognitiva y la afectiva?

Para el *nivel más general*, donde se hablaría de *problemas de aritmética*, *problemas de cálculo* o *problemas de matemáticas* surge la paradoja de que los problemas se descontextualizan y se aíslan tal cual en el nivel local. Las investigaciones de (Pólya, 1962-65; Schoenfeld, 1985) muestran el fracaso al intento de resolver el problema docente en el nivel genérico: el enseñar a resolver *problemas de matemáticas* así como el correspondiente problema de investigación didáctica: el intento de explicar las dificultades que tienen las escuelas para conseguir que sus alumnos sean capaces de resolver problemas no rutinarios. Para Chevallard, Bosch y Gascón (1994) el problema de Pólya puede verse como un efecto de la atomización del currículo escolar de matemáticas.

Por último abordamos el denominado *nivel local*. Bosch y Gascón, seleccionan el nivel local como una unidad de análisis de acuerdo con la teoría de la transposición didáctica de Chevallard. Esta unidad será el puente entre la teoría y los datos empíricos recabados. Para ellos el *problema de Polya* se puede re-escribir como: ¿Cómo diseñar y gestionar un proceso didáctico que permita que los alumnos resuelvan a lo largo de proceso de estudio, todo tipo de problemas matemáticos desde los más rutinarios hasta los más abiertos?

Existiría la necesidad de considerar todas las etapas de la transposición del conocimiento: el sabio, el a enseñar, el enseñado y el aprendido para conformar este nivel de análisis local.

Los trabajos tradicionales de meta cognición presentan problemas aislados a los sujetos de estudio. Los problemas en la vida real, de trabajo o escolar no están solos sino que pertenecen a un campo de problemas de donde emergió el Objeto Matemático. Por tanto en esta investigación los problemas aislados-no rutinarios no tienen sentido fuera de esta unidad de análisis.

El tema de *optimización* como objeto de estudio, es ubicado en la línea de investigación de nombre *Resolución de Problemas*. En el trabajo de Uldarico Malaspina de 2002 denominado *optimización matemática* plantea la importancia de abordar este tipo de problemas. En su publicación de 2007, analiza en el contexto de dos problemas de optimización, la relación entre intuición y rigor en la resolución de problemas usando el enfoque ontosemiótico y su concepción de los diversos tipos de objetos matemáticos.

Salvador Moreno y Carlos Cuevas (2004), desarrollan una investigación sobre interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial en la cual muestran que, debido a una interpretación errónea sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas no rutinarios proporcionan respuestas inverosímiles; es decir, respuestas que contradicen la solución intuitiva del problema planteado e imposibles de llevar a cabo. Observaron que la resolución del problema por parte de los estudiantes es de una manera mecanizada, sin considerar información crucial sobre el dominio de la función a optimizar. Además con conocimientos parciales o erróneos de los previos necesarios para la resolución de los problemas. Estudio aplicado a estudiantes y a profesores de ingeniería. Se considera que pudo haber sido más amplio tanto en tipos de problemas como en el tipo de cuestionamientos de los autores.

En el mismo año, Contreras y Luque (2004), publican una trabajo denominado *Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo*, basándose en las teorías de los juegos de contextos de Douady y la de los registros de representación semiótica de Duval, analizan las respuestas que estudiantes ofrecen a un problema de maximización de áreas, a la óptica de los contextos y los registros de representación y ponen en relieve, el asignar un sentido a la actividad de optimización independiente del cálculo diferencial .

Las investigaciones sobre *resolución de problemas* se pueden iniciar con una descripción histórica relativamente reciente- sin perder de vista que personajes como Sócrates o Descartes – habían tocado el tema, con el estudio del filosofo Dewey plasmado en su obra *How we think* (1910) citado por (Cruz, 2002:30), (Sánchez y Fernández, 2003:159) y Rodríguez (2005:11), presenta un primer análisis de los actos del pensamiento viéndolo como un proceso, abre las puertas para que estudios posteriores se hagan sobre el mismo. Propone cinco etapas o niveles:

- El encuentro con una dificultad y toma conciencia de su existencia.
- Localización y precisión de la misma.
- Planteamiento de una posible solución.
- Desarrollo lógico de las consecuencias derivadas.

Rodríguez (2005:15) y (Sánchez y Fernández, 2003:160) mencionan al británico Graham Wallas en su obra *The art of Thought* (1926), donde sugiere cuatro etapas basadas en introspección para explicar el proceso creador:

- Preparación. Recolección de información e intentos preliminares de solución.
- Incubación. Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir. Cita la experiencia de Arquímedes en la bañera.
- Iluminación. (Insight) Aparece la clave para la solución. Fase misteriosa donde se sugiere descansar la mente en otras actividades para que esta aparezca.

- Verificación. Se comprueba la solución para estar seguros si la idea realmente funciona y resuelve el problema.

Estos trabajos estuvieron basados en la concepción de la resolución de problemas como actividad por antonomasia del pensamiento. Como se observa para antes de George Polya las etapas del proceso de resolución de problemas en general estaban delineadas, una aportación original de él es resaltar el área de resolución de problemas en este caso, Matemáticas. Además de una serie de sugerencias (heurísticos) para progresar en cada fase.

George Polya (1965:19) en su libro *How to solve it,* propuso cuatro fases para la resolución de un problema matemático. El trabajo de Polya es el origen más reciente en nuestra disciplina de los estudios sobre estos temas. Las etapas propuestas son;

- Comprender el problema.
- Concebir un plan.
- Ejecución del plan
- Visión retrospectiva

Schoenfeld citado por (Cruz, 2002:31), (Sánchez y Fernández, 2003:162), (Santos Trigo, 1996:34, 2008:6) y (Rodríguez (2005:64-74) basó su trabajo en los estudios de Polya y plantea un marco para el análisis del comportamiento durante la resolución de problemas

Schoenfeld en su libro *Mathematical Problem Solving* (1985) tomando en cuenta resultados de varios estudios, donde se aplicaban problemas a estudiantes, se grababa, se filmaba y se revisaban apuntes, llegó a la conclusión de que para resolver problemas se deben de tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. : (a) Dominio del conocimiento o recursos cognitivos que el sujeto dispone; (b) Estrategias cognitivas o métodos heurísticos para explorar en la situación; (c) Estrategias metacognitivas o control, y que tiene que ver con la eficiencia con que el sujeto utilizan el conocimiento del que disponen (d) Un sistemas de creencias, que corresponden a la perspectiva del individuo hacia la naturaleza de la disciplina y sobre su trabajo en ella.

El movimiento de *Problem Solving* (*PS*) inicialmente pretendía responder a los trabajos de Polya por el camino de la enseñanza de heurísticas generales. El término *Problem Solving* arribó hasta el cuarto Congreso Internacional de Educación Matemática-International Congress on Mathematical Education (ICME) 4 en Berkeley, 1980 y apareció bajó la categoría de *aspectos pocos comunes en los planes de estudio*. En el ICME 5 (Adelaida 1984) la resolución de problemas fue uno de los más abordados y a partir de allí juega un rol central en tales eventos

Continuando con investigaciones sobre lo anterior, en el trabajo de Schoenfeld (1985) entra el término *metacognición* en el área de las matemáticas y más específicamente en el área de *Problem Solving.*

El uso popular del término *metacognición* es originalmente basado en las investigaciones de Flavell en el campo de la sicología (Flavell, 1976, 1977, 1979). Es aceptado en forma generalizada su distinción en dos aspectos diferentes: a) C*onocimiento metacognitivo* que corresponde a un conocimiento declarativo o conciencia individual del sujeto de sus propios procesos cognitivos y b) *Habilidades metacognitivas* que se refieren a un conocimiento procedimental que es requerido para la regulación de procesos cognitivos, que incluye planeación, selección y monitoreo de estrategias cognitivas, evaluar o revisar el resultado de esas actividades y revisar planes y estrategias (Brown, 1978,..).

Esther Rodríguez (2005), bajo la dirección de Bosch y Beltrán presenta una tesis doctoral en la Universidad Complutense de Madrid, sobre Metacognición, Resolución de Problemas y Enseñanza de las Matemáticas así como la publicación en 2008 en ZDM de Rodríguez, E., Bosch, M., y Gascón, J., donde reformulan la, metacognición dentro de la resolución de problemas desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard y hacen una revisión del estado de las investigaciones sobre el tema..

De acuerdo a Lester (1994) durante los ochentas las investigaciones en *Problem Solving* (*PS*) estuvieron basadas en la noción de metacognición, relación afectos/creencias al PS, y entrenamiento o capacitación metacognitiva. En la década de los noventas estas nociones han sido reemplazadas por otros términos relacionados aspectos socioculturales y de contexto.

Numerosos investigadores enfatizan que las deficiencias en aspectos metacognitivos son una causa fundamental para las fallas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos, por ejemplo, Kilpatrick (1985), Lester y Garofalo (1982), Schoenfeld (1985,1992). Y es que a pesar de que los estudiantes tengan los conocimientos y estrategias necesarias no siempre son capaces de desempeñarse bien ante un problema (Kilpatrick, 1985).

Otros trabajos consideran que las dificultades en la resolución de problemas está relacionada con falta de habilidad para monitorear y regular su propio proceso cognitivo, Lester y Garofalo (1982), Schoenfeld (1985) y Kaune (2006).

La gran mayoría de los estudios sobre metacognición en matemáticas, apoyan la idea de que los componentes de la metacognición están estrechamente relacionados e interactúan.

Dunlonsky (1998) afirma que el conocimiento de la interacción entre proceso metacognitivos necesita exploración adicional si se quiere ser mejorado el rol de la metacognición en la resolución de problemas.

La falta de definición clara y precisa de los aspectos metacognitivos generan que las investigaciones sobre estos temas consideren diferentes elementos al ser llevadas a cabo.

Trabajos recientes como los de Gusmao, Font y Cajaraville (2009), donde se analizan desde un punto de vista cognitivo y metacognitivo las practicas matemáticas en la resolución de problemas, basándose en el Enfoque Ontosemiotico (EOS) de Godino y colaboradores y además proponiendo una configuración metacognitiva, se quedan en el análisis puntual y aislado de problemas según Bosch (2004), ya que no consideran para sus explicaciones el contexto de enseñanza.

Recientemente la prestigiada revista ZDM The International Journal on Mathematics Education en el año 2010 dedicó el volumen 42(2) al tema Metacognition Research in Mathematics Education editada por Gloria Stillman y Zemira Mevarech, donde en su editorial mencionan que la metacognición ha resultado ser un campo fértil para la investigación por muchos años, desde los setentas a partir de Flavell (1976) y que hasta la fecha se asegura hay mucho por aprender sobre este tema estando abiertas diversas direcciones para hacer investigación en este campo de investigación en matemáticas lo sea por muchos años.

1.4 Hipótesis de trabajo

Partiendo del contexto, del problema a estudiar, experiencias personales de los investigadores involucrados en este estudio y trabajos relacionados se pueden plantear las siguientes hipótesis de trabajo:

1. La experiencia dice que si no se alcanzan buenos niveles de competencia en la resolución de problemas, es porque las significaciones no son lo suficientemente eficaces, el diseño de procesos no son los adecuados y el nivel de conciencia no es también el más adecuado. Se esperaría que los resultados del estudio se compruebe o rechace esta conjetura.
2. Investigaciones arrojan indicios de que la gestión metacognitiva de los procesos involucrados en la resolución de problemas podría jugar un papel muy decisivo. Se esperaría que en los resultados se compruebe o rechace esta conjetura.

Hipótesis explicativa:

Los significados de los objetos y procesos matemáticos, en particular de optimización, están determinados por el contexto en el que surgen y se desarrollan, contexto del que un elemento especialmente importante, son los sistemas de prácticas desarrolladas previamente por el sujeto (individuo o institución) que son determinantes en la interpretación de las situaciones problémicas, objeto de estudio, y en el diseño de las estrategias con que se abordan y resuelven, atribuyendo diferentes propiedades a los objetos en juego y siguiendo procedimientos diversos.

Los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos, están determinados por el contexto de la enseñanza, entendido este como el conjunto de elementos presentes en el proceso de estudio, entre los que están incluidos, entre otros, las situaciones problémicas, que lo desencadenan, así como los sistemas de prácticas utilizados por los sujetos participantes en el proceso, al analizar y tratar de resolver dichas situaciones.

Se sospecha que eso es producto de una serie de circunstancias en las que se desarrollan esos procesos, es decir el contexto. En este trabajo no se estaría intentando justificar esta hipótesis, sino que se esperaría que los resultados obtenidos sólo la refuercen. Esta pretensión va más allá de este estudio y correspondería al propósito del programa de investigación mayor.

Tampoco se estaría pensando en lo que se debiera de cambiarse para mejorar, tal como más ejercicios, alternativas de enseñanza, sino que se considera los ajustes al contexto requieren gran modificación.

En este estudio el uso que se le da al término contexto, es de una naturaleza más amplia que la noción restringida de *enseñanza en contexto*. Aquí se considerarían las situaciones problémicas de optimización, objeto de estudio, pero además la manera de representarlas mediante alguna manifestación lingüística, los argumentos que se utilizan, y en general el conjunto de circunstancias en el que se lleva a cabo el proceso de estudio, incluyendo al sujeto cognoscente y su sistema conceptual antecedente. El contexto incluye, además, profesores, programas de estudio, libros de texto, normas escolares, en general la institución.

1.5 Justificación

En la disciplina denominada Matemática Educativa las investigaciones que se desarrollan tienen como propósito el mejorar la calidad de los aprendizajes en matemáticas. Antes de proponer mejoras a los correspondientes procesos de instrucción, es necesario comprender los procesos que se desarrollan en el aula. Se asume que en la medida de que se conoce mejor la problemática se podrán formular propuestas más efectivas en la enseñanza.

Un estudio como el presente, enfocado en conocer el desempeño de estudiantes de ingeniería ante problemas curriculares en optimización, queda enclavado en las investigaciones desarrolladas para conocer los procesos dentro del aula. Será el propósito de investigaciones futuras, el hacer propuestas para la mejora de la enseñanza del tema de optimización en la formación de ingenieros.

Desde el punto de vista teórico, esta investigación pretende conocer en mayor medida el papel que juegan las nociones de comprensión y metacognición en la competencia para resolver problemas ya que existe información incompleta al respecto.

Al término del presente estudio se hacen aportaciones de distinta naturaleza.

a) Implicaciones didácticas. El conocer sobre el proceso de resolución de problemas por parte de estudiantes de ingeniería, permitió identificar algunos aspectos de la didáctica específica de matemáticas para ingenieros que requieren ser atendidos por docentes o administradores escolares.

- Se identificó fuerte influencia de los textos escolares sobre las concepciones y método de enseñanza del profesor, por lo que se sugiere la elaboración de textos o manuales que contengan, por ejemplo, el enfoque por competencias adoptado en nuestra Universidad, para con ello lograr que los correspondientes Significados Institucionales (SI) de Referencia se manifiesten en el trabajo del docente en el aula, (SI) Implementados.
- Se detectó un marcado predominio de la Representación Analítica en el método de enseñanza. Es necesario incorporar las Representaciones Gráfica y Numérica para asignar más significados a los objetos que se pretenden enseñar.
- Se observó en clase, la no promoción del *pensamiento variacional,* para este caso identificar las magnitudes que varían, las relaciones entre ellas, la construcción de la función, etc. lo cual es indispensable para en poder abordar de manera competente la resolución de problemas de optimización.
- Se detectó un hecho no contemplado de inicio, que tiene implicaciones en la evaluación cotidiana del desempeño de estudiantes en cursos de matemáticas. Al aplicar los problemas y valorando la práctica escrita y sus pensamientos en voz alta, en varios casos lo escrito era muy poco y no revelaba lo que estaba en los pensamientos de los resolutores. Si se restringe la evaluación solo a lo escrito, aparece un elemento de injusticia.

b) Relevancia Social. Los egresados de ingeniería, se insertan en la vida productiva tanto de nuestra región como del país. La mejora del aprendizaje de las matemáticas en su etapa de formación se espera implique que el egresado sea más competente, al menos en los proceso de optimizar recursos en su vida laboral.

c) Implicaciones Teóricas. Esta investigación está apoyada en cuatro elementos teóricos: a) El Enfoque Ontosemiótico (EOS), b) La Resolución de Problemas (RP), c) Gestión Metacognitiva (GM), y d) Competencia. El EOS, teoría en construcción a partir de 1994 lidereada por Godino, Font, Batanero y demás autores tanto españoles como iberoamericanos, pretende conjuntar el conocimiento matemático con su instrucción. De aquí se han tomado las nociones de Práctica Matemática, Objetos y Procesos Matemáticos, Normas, Significados Personales e Institucionales y finalmente Comprensión.

En específico la noción de *Comprensión* es tratada por el EOS tal y como se aprecia en las secciones 2.1 y 2.3.4 de este documento, con dos significados: i) la *comprensión* personal de un Objeto Matemático es la construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto (Godino 2003:124). Esto es válido para cualquiera de los objetos primarios: problemas, lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. El comprender un objeto es comprender todos sus componentes. Las prácticas personales significativas atribuyen una finalidad, entonces la comprensión del objeto exige que el estudiante identifique un para qué del objeto. ii) Un segundo significado se encuentra en Font (2007) donde la *comprensión* se puede ver desde dos puntos de vista teóricamente divergentes, como un proceso mental o como una competencia. Las investigaciones de tipo cognitivo, entienden la comprensión como proceso mental. Las de tipo antropológico o social consideran la *comprensión* como una *competencia*. La comprensión vista como competencia según Font (2007: 4) la *comprensión* o el *saber* un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula. Desde este punto de vista se dice que un sujeto *comprende* un determinado objeto matemático cuando reconoce y lo usa de manera eficaz en las prácticas matemáticas relacionadas.

El análisis de las prácticas de los estudiantes y de sus pensamientos al resolver problemas en este caso de optimización, sugirió que el que un estudiante comprenda un objeto no es suficiente para que su uso sea eficaz, es decir competente para la resolución de problemas. Emergió de los análisis la *gestión metacognitiva* como un elemento muy influyente en el proceso. Asimismo, la *actitud*, vista como componente de la competencia, en este caso actitud hacia las matemáticas y en específico la persistencia en la resolución de problemas también se mostró como un elemento muy influyente en el proceso. Lo anterior se considera es una aportación a la teoría del EOS.

Alcances del estudio: Espacialmente, el estudio se ubicó en la Facultad de Ingeniería, campus Mexicali (FIM), de la Universidad Autónoma de Baja California, México. Tanto en la etapa exploratoria, como en la segunda. Esto debido a que el investigador labora en esta institución y se pretende aportar elementos para la mejora de la enseñanza en ella.

El tema de optimización enseñado mediante cálculo de una variable, se ubica al finalizar el curso de Cálculo del Tronco Común para ingeniería. Aunque el tema de optimización es estudiado en otras materias y cursos más avanzados. Por tanto, la atención estuvo centrada en estudiantes de primer semestre de diversas ingenierías. Textos y entrevistas a profesores y acceso al aula también pertenecen al Tronco Común.

Si bien en un nivel global estuvo centrado en la FIM, se conjetura por experiencias y comunicaciones personales que no se pierde generalidad para transponerlo a otras instituciones.

Temporalmente, la toma única de datos para la investigación se ubicó en el año 2009, no haciendo alguna toma posterior.

CAPÍTULO 2.
ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo dos, se presentan los elementos teóricos y metodológicos que dan el sustento necesario para efectuar la investigación, tanto en su diseño como en el análisis e interpretación de los datos recabados para cumplir con los objetivos investigativos planteados.

Primeramente se presentan las nociones de Prácticas, Objetos y Procesos Matemáticos, los Significados Personales e Institucionales y las Normas y Metanormas que participan en los procesos de resolución de problemas de acuerdo con la óptica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) de J.D. Godino.

Posteriormente el aspecto central del Proceso de Resolución de Problemas y sus elementos.

El tema de la Metacognición es tratada de acuerdo a diversos autores. Finalmente se abordan las nociones de comprensión y de competencia.

En una segunda parte se plantea el diseño de la investigación presente, tanto en su primera etapa como en la segunda.

2.1 Comprensión

En esta sección 2.1 se presentan los elementos teoricos que están ligados a la comprensión matemática: prácticas, significados, objetos y procesos matemáticos.

2.1.1 Prácticas Matemáticas

Se parte de concebir a la Matemática, al menos de las siguientes tres maneras (Godino, 2003), (Godino, Batanero y Font, 2009) y cada una de estas facetas, como aspectos constituyentes de la misma.

a) Como una actividad de resolución de problemas

b) Como un lenguaje simbólico

c) Como un sistema conceptual lógicamente organizado

Al considerar a las matemáticas como una dimensión o aspecto de la cultura humana el estudio de su desarrollo puede ser abordado por una faceta de la antropología. (Godino, 2003:20) (Chevallard, 1991)

La concepción en este trabajo de la Matemática como actividad de resolución de problemas está determinada, a su vez, por la concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos, lo mismo que por nuestra concepción sobre el origen y desarrollo de dichos objetos.

Se asume que el origen y desarrollo de los objetos matemáticos y, como consecuencia, su naturaleza, son antropológicos y pragmáticos, lo cual significa que asumimos que tales objetos surgen y evolucionan como resultado de la actividad humana desarrollada en relación con cierto tipo de *situaciones problémicas*. Pragmáticos porque se considera que el significado de las expresiones lingüísticas dependen del contexto en que se usan y que las entidades abstractas no pueden ser observadas científica o empíricamente.

Con la expresión *situaciones problémicas* se designa a las situaciones en las que un individuo o conjunto de individuos está interesado en realizar una cierta tarea o contestar una cierta pregunta sin tener suficientes elementos para hacerlo, razón por la cual ese individuo o conjunto de individuos no está, en ese momento, en condiciones de llevar a cabo la tarea planteada o de contestar la pregunta formulada.

El conjunto de actividades realizadas para resolver la situación problémica, constituye un *sistema de prácticas* que, cuando corresponden a un sujeto, se denomina *sistema de prácticas personales*. Una práctica específica se dice que es *significativa* o que tiene sentido, si para ese individuo o institución, esa práctica desempeña una función en la consecución del objetivo de resolver el problema.

Un conjunto de individuos que comparten el uso de un conjunto de prácticas prototípicas y las utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas constituyen una *institución* y por ello, a tal conjunto de prácticas se le denomina *sistema de prácticas institucionales*.

La noción de práctica que se presenta sintetiza las características de la actividad de matematización: Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero, 1994:8).

Las prácticas matemáticas se pueden considerar como la unión de: una práctica actuativa que permite la lectura y producción de textos matemáticos y de una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica actuativa) que pueden ser reconocidas como matemáticas por un interlocutor experto (Godino y Font, 2008).

2.1.2 Significados Institucionales y Personales

De los sistemas de prácticas que un individuo utiliza para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, emergen los *objetos matemáticos personales*. Dichos sistemas de prácticas constituyen *los significados personales* que ese individuo tiene de tales objetos.

De los sistemas de prácticas que un conjunto de individuos utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, emergen los *objetos matemáticos institucionales.* Dichos sistemas de prácticas constituyen los *significados institucionales* de los objetos matemáticos que esa institución tiene de tales objetos.

Al hablar de sistemas de prácticas tanto personales como institucionales, se está suponiendo, de manera implícita, que la realización de dichas prácticas se lleva a cabo con el soporte y condicionamiento de un conjunto de elementos y factores materiales, biológicos y socioculturales que hacen posible, potencian o limitan el desarrollo de la actividad matemática. Este sistema de elementos podemos describirlo como el trasfondo ecológico de las prácticas matemáticas.

Por otra parte, la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas y su utilización en el análisis didáctico nos lleva a introducir una tipología básica de significados que se presenta a continuación:

Con relación a los significados institucionales se propone los siguientes tipos (Godino, 2003):

- Referencial: Constituido por el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (la determinación de dicho significado holístico –global- incluye el desarrollo histórico-epistemológico del objeto en cuestión, así como la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto).
- Pretendido: Constituido por el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Implementado: En un proceso de estudio específico, está constituido por el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: Constituido por el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Respecto a los significados personales se propone los siguientes tipos:

- Global: Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativo a un objeto matemático.
- Declarado: Denomina al sistema de prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: Corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. (En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen).

2.1.3 Objetos matemáticos

Es conveniente aclarar que cuando se habla de objetos matemáticos se hace en sentido metafórico, que permite darle categoría de objeto a todo aquello sobre lo que se puede pensar o hablar, lo cual permite considerar objetos a *entidades* de muy diversa índole tales como los símbolos, las actividades, los sucesos, las ideas y prácticamente cualquier cosa.

Esta diversidad de los objetos matemáticos lleva a proponer los siguientes tipos de objetos primarios (Godino, 2003):

- *Situaciones problémicas*: problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra o intra matemáticas, ejercicios, son las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Lenguaje* : términos, expresiones, notaciones, gráficos, ... en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Conceptos- definición* : introducidos mediante definiciones o descripciones
- *Proposiciones*: propiedades de los objetos mencionados, enunciados sobre conceptos, ...
- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* :enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías,...

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

Las *situaciones problémicas* son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

Los objetos matemáticos se pueden clasificar (Godino, 2002) de acuerdo a las facetas duales con que se presentan en el quehacer matemático y que atienden a una dialéctica entre ellas :

1. Personal-institucional. Si las prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos se consideran *objetos institucionales*, mientras que si son específicos de una persona se consideran como *objetos personales*.
2. Ostensivo-no ostensivo. Ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos tienen una naturaleza no-ostensiva. Cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos).
3. Expresión-contenido. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.
4. Extensivo-intensivo. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$).
5. Unitario-Sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

La noción de *sistema de prácticas* es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones (Fig. 2.1), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

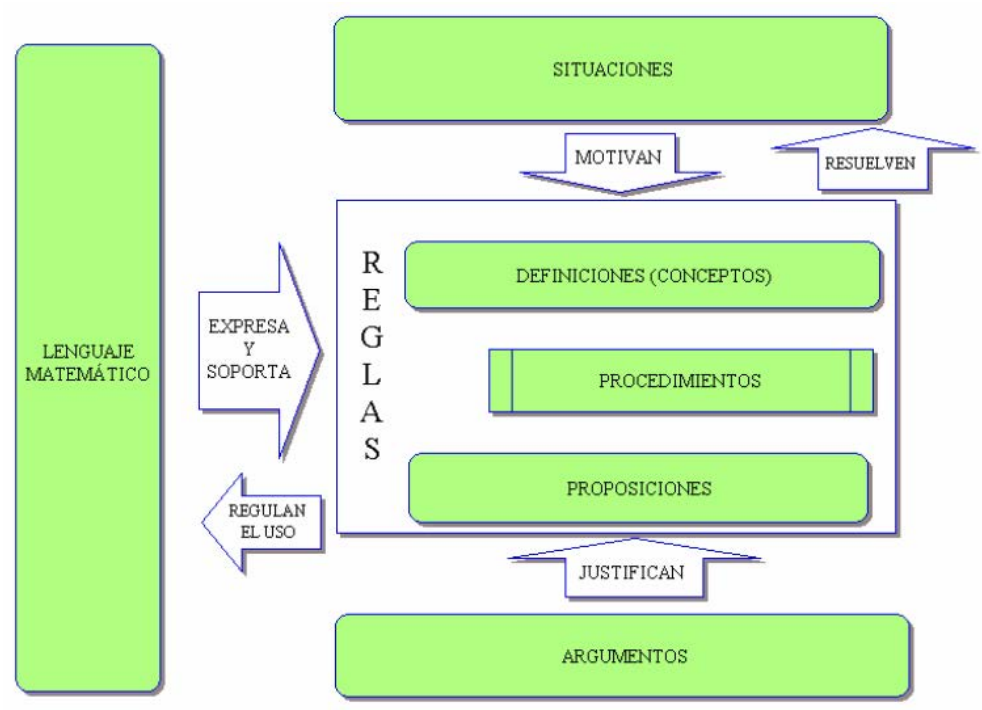


Fig. 2.1 Configuración de Objetos Matemáticos. (Font, 2007).

La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como "secuencias de prácticas". Los objetos matemáticos emergentes constituyen la cristalización o reificación resultante de tales procesos (dialéctica instrumento – objeto de Douady, 1986; dualidad objeto – proceso de Sfard, 1991).

2.1.4 Procesos matemáticos

La manera de interpretar en este trabajo los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, nos proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación.

En la siguiente Tabla 2.1 se presentan los procesos matemáticos y sus correspondientes objetos.

PROCESO	OBJETO
1. Algoritmización	Algoritmo (Procedimiento, Técnica, Método)
2. Argumentación (Justificación, Demostración)	Argumento
3. Particularización (Ejemplificación)	Extensivo
4. Generalización	Intensivo
5. Idealización (Esquematización)	No ostensivo
6. Materialización	Ostensivo
7. Representación (Gráfica, simbólica, comp..)	Expresión
8. Reificación (Síntesis, Encapsulación)	Unitario
9. Descomposición (Análisis, Desencapsulación)	Sistémico
10. Personalización	Personal
11.Institucionalización	Institucional
12.Comunicación (Comprensión de enunciados y producción de textos)	Lenguaje matemático (Verbal, Simbólico, Gráfico)
13. Significación	Contenido
14. Enunciación (Expresar Conjeturas, Propiedades, dar definiciones,..)	Proposiciones (Propiedades, Teoremas…)
15. Definición	Concepto (Definiciones, Conceptos previos, emergentes)
16. Problematización	Situación-problema

Tabla 2.1 Objetos y Procesos.

En los sistemas de prácticas se forman estructuras o configuraciones de objetos y procesos matemáticos que de manera integral se observa en la figura 2.2.

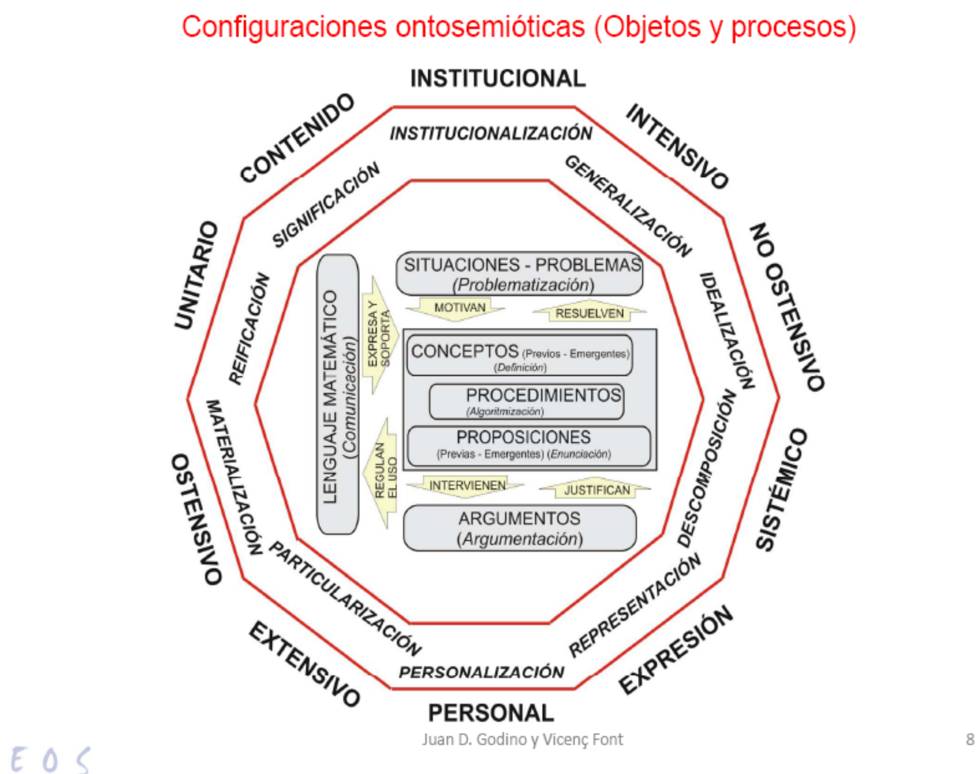


Figura 2.2. Configuración de Objetos y Procesos (Godino 2006).

2.1.5 Normas y Metanormas

Toda actividad social, en particular la educación, es una actividad regulada ya sea de manera explícita o de forma implícita. Desde las políticas curriculares, fijadas explícitamente por la autoridad gubernamental y educativa hasta los comportamientos en el aula entre profesor y estudiantes, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, tradiciones o costumbres. Todos estos elementos reguladores del fenómeno educativo, se corresponderán genéricamente a las normas de los procesos de estudio (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009).

Estas normas en la literatura han sido estudiadas y recibido diversos nombres dependiendo de la etapa o momento o nivel del proceso: contrato didáctico de Brousseau (1988); patrones de interacción, normas sociales, y sociomatemáticas de Yackel y Cobb (1996) entre otros.

Una organización de la gran variedad de normas regulatorios es la propuesta por (Godino, Font, Wilhelmi y De castro, 2009) y está basada en el trabajo de Godino, Contreras y Font (2006) sobre las diferentes facetas del proceso de instrucción matemática:

- Normas epistémicas. Corresponde al conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución. regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. Nos dicen que matemáticas se deben de aprender. Por ejemplo, en las situaciones-problema, es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo, ¿qué es un problema? ¿cuándo se ha resuelto un problema? ¿qué reglas conviene seguir para resolver un problema?, etc. Las respuestas a estas preguntas no son absolutas, sino relativas a la institución donde se da el proceso de estudio.
- Normas Cognitivas. Normas que regulan el comportamiento matemático de los alumnos. Estas normas cognitivas personales pueden concordar o no con las normas epistémicas de la institución.
- Normas interaccionales. Se refiere a los modos de interacción entre el docente y los alumnos. Para alcanzar las metas del proceso de instrucción y de aprendizaje, aparecen reglas, hábitos y convenios. Estas incluyen la convivencia en el aula.
- Normas mediacionales. Reglas que gobiernan el uso de recursos tales como libros, computadoras, calculadoras, internet, el tiempo, espacios, etc.
- Normas afectivas. Se dice que el alumno debe de estar motivado para el estudio de las matemáticas, no tener fobia y una actitud favorable. Una norma afectiva es que el docente debe buscar situaciones-problémicas que motiven al estudiante a resolverla y se reforce con ello su autoestima.

- Normas ecológicas. Normas que relacionan lo que sucede en la escuela con la sociedad. Una regla es que la sociedad encarga a la escuela a que eduque a sus ciudadanos y se integren a ella.

Se puede considerar a una *metanorma* desde dos puntos de vista: a) normas que se aplican a otras normas. Por ejemplo, la regla que dice que hay que respetar las reglas. b) normas que son comunes a varias normas. Por ejemplo la regla que dice que no hay que copiar en los exámenes es válida en normas aplicables a todos los niveles de educación. (D'Amore, Font y Godino, 2007).Estos mismos autores, organizan las metanormas de acuerdo al rol jugado por las normas que a su vez regulan: metanormas metaepistémicas, metanormas metainstruccionales y metanormas metacognitivas.

Las metaepistémicas que regulan las epistémicas, se pueden ejemplificar, como: Las definiciones, deben de ser claras y precisas y no incluir lo que se define; los teoremas se deducen de los postulados; hay que distinguir entre comprobar y demostrar una proposición, etc.

Las metainstruccionales regularían las normas asociadas a los procesos de instrucción. Algunos casos: hay que procurara cumplir la planificación de la instrucción; se debe tratar de obtener la mayor idoneidad instruccional posible, etc.

La metacognitiva que se relaciona con los procesos cognitivos de aprendizaje y desempeño de sujetos (alumnos) dentro de un proceso de instrucción o fuera de él. Reglas ilustrativas son: Para resolver un problema debería: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo, revisar la solución; el profesor debe resolverme las dudas, el profesor debe darme a conocer los criterios de evaluación del curso, etc. (D'Amore, Font y Godino, 2007:13). En la sección 2.4 se amplía esta metanorma metacognitiva, con el nombre más frecuentemente utilizado en la literatura que es metacognición.

2.1.6 Comprensión Matemática

Dentro de la disciplina de la Didáctica de las Matemáticas, la noción de comprensión ha sido estudiada por reconocidos investigadores Skemp (1976), Sierpinska (1994), Piere y Kieren (1994), Godino (2002,2003), Font (2007).

Uno de los pioneros de esta disciplina fue el psicólogo y profesor de matemáticas inglés Richard Skemp en su clásico trabajo de 1976, titulado *Relational understanding and instrumental understanding* el cual identifica y analiza ambos tipos de comprensión para el caso de niños de escuela primaria resolviendo productos de fracciones.

Ana Sierpinska en 1994, introduce la diferencia entre acto y proceso de comprensión. Ya no se dirá si se comprende o no comprende algún objeto o procedimiento matemático sino que se entenderá como un proceso continuo formado por una serie de actos de comprensión. Un acto de comprensión es la superación de un obstáculo cognitivo. El modelo del pensamiento de Sierpinska enfatiza un sentido de comprensión más bien ligado a los procesos sicológicos de aprendizaje. Por otra parte, ¿cómo hacer observable estas nociones?

Menciona Godino (2003:120), el problema de la comprensión está íntimamente ligado a como se concibe el propio conocimiento matemático……Se requiere responder a preguntas tales como:

- ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender?
- ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada objeto?
- ¿Qué aspectos o componentes de los objetos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas?

Para Godino (2002,2003) la noción de *comprensión* personal de un objeto "es la construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto" (2003:124). Puesto que los objetos matemáticos están formados por diversos elementos que componen los significados institucionales, el comprender un objeto será comprender todos sus elementos. Tales como:

- Situaciones –problema. Reconocer qué tipo de problemas involucra el objeto a comprender.
- Lenguaje matemático. Conocer los símbolos, gráficas, etc. ligadas al objeto.
- Procedimientos y algoritmos utilizados en la resolución de problemas donde aparece el objeto.
- Definiciones diversas del objeto.
- Propiedades y relaciones con otros objetos.
- Argumentos usados en la comprobación o generalización de las soluciones de problemas.

Puesto que las prácticas personales significativas se atribuye un fin, entonces la comprensión del objeto exige que el estudiante identifique un para qué del objeto.

Para Font (2007) la comprensión se puede ver desde dos puntos de vista teóricamente divergentes, como un proceso mental o como una competencia. Las investigaciones de tipo cognitivo, entienden la comprensión como proceso mental. Las de tipo antropológico o social consideran la comprensión como una competencia. Desde este punto de vista se dice que un sujeto *comprende* un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

La comprensión vista como competencia según Font (2007: 4) “la comprensión o el saber un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula.”

Para efectos de esta investigación, la noción de ***comprensión*** de un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características y relacionarlo con los restantes objetos matemáticos. Es decir no estaríamos considerando el aspecto de *uso*.

2.2 Proceso de Resolución de Problemas Matemáticos

En esta sección se presentan diversos significados del término *problema*, se clasifican los problemas, y revisa el proceso mismo de resolución de problemas, tanto en los elementos o factores intervinientes, como en los modelos del mismo proceso.

El proceso de resolución de problemas matemáticos, es complejo ya que en su ejecución intervienen a su vez otros procesos básicos tanto de naturaleza cognitiva como metacognitiva. A decir de Godino y su grupo de investigación: “La *resolución de problemas* … debe ser considerada más bien como un hiper-proceso matemáticos al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios”. Esto es que se establecen conexiones entre los objetos y además que este hiper proceso integra diversos procesos matematicos basicos. La realización efectiva de los procesos de estudio y de resolución de problemas requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación que conllevan procesos metacognitivos" (Godino, Batanero y Font, 2007).

2.2.1 Significado de los términos problema, tarea-problémica y situación-problema.

La dificultad de definir la noción de problema está relacionada con la relatividad del esfuerzo de un sujeto cuando este intenta resolver un problema. Para algunos sujetos puede ser muy difícil resolverlo pero para otros será muy sencillo. Por ejemplo, un problema de optimización seleccionado de un libro de texto para estudiantes de ingeniería puede ser accesible su resolución para ellos, sin embargo para un estudiante de secundaria o preparatoria será seguramente muy complicado. Por lo tanto la existencia de un problema implica una tarea matemática y su interacción con un sujeto. Schoenfeld (1985) usa el término problema para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla.

Para Polya (1962) se tiene un problema cuando se busca conscientemente alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. Esto considera: a) Estar consciente de una dificultad, b) tener deseo de resolverla y c) la no existencia de un camino inmediato para resolverlo. Es decir que una persona o institución quiere o necesita encontrar una solución a la situación-problema; la no existencia de un procedimiento que garantice la solución completa de la tarea y la presencia de diversos caminos de solución y de posibles varias soluciones.

Sardury (1987) cita algunos representantes de la escuela problémica rusa: Rubinstein (1966:109) destaca el carácter activo del sujeto. Un problema debe comprenderse como determinada situación problemática hecha consciente por el sujeto. Esaulov (1972) y Ball (1970) dan definiciones muy cercanas entre sí poniendo como elemento central el aspecto psicológico del sujeto. Autores tales como Fridman (1977), elimina la componente sicológica y se centra en el contenido objetivo. El problema es visto como un sistema material que para su caracterización no requiere del sujeto.

Según Lester (1983), un problema es una tarea para la cual: el individuo que se enfrenta a ella quiere o necesita encontrar una solución. No hay un procedimiento accesible. Y el individuo debe de intentar una solución.

Santos Trigo (1996:35-36), expresa la existencia de varias componentes para poder identificar un problema: La existencia de un interés. La inexistencia de una solución inmediata. La presencia de diversos caminos o métodos de solución.

El contenido del problema para Sardury (1987:10-11), es que en cada problema con texto se hace intervenir objetos y sujetos (personas, sucesos, cosas, animales…) que ejecutan sirven de medio o sufren la acción que se desarrolla en el problema. Dichos objetos y sujetos reflejan, usualmente hechos reales.

La pretensión de resolver la *situación problémica*, provoca en el individuo o comunidad, un *estado psicológico de conflicto cognitivo*, que denominamos *estado problémico* y que corresponde a lo que queremos decir cuando, coloquialmente, se expresa que el sujeto (individuo o comunidad) tiene un problema. Este estado psicológico se origina como consecuencia de querer resolver el problema surgido al tratar de realizar la tarea planteada o contestar la pregunta formulada y no poder. Esta contradicción lo activa intelectualmente haciéndolo poner en juego sus conocimientos previos constituidos por sistemas conceptuales y esquemas para la acción; para interaccionar con la situación problémica tratando de interpretarla y resolverla.

Al interaccionar con la situación problémica, el sujeto realiza una serie de actividades cognitivas de muy diversa índole, algunas de las cuales son ostensibles (observables), por ejemplo: *hacer un diagrama, efectuar una operación, comunicar una idea*, etc. y otras son acciones interiorizadas no ostensibles, tales como hacer comparaciones, analogías, conjeturas, deducciones, inducciones, generalizaciones, entre otras muchas. Todas estas acciones están encaminadas, en un primer momento, a tratar de entender la situación, en un segundo momento, a tratar de formular una estrategia de acción para resolver el conflicto, en un tercer momento, a llevar a cabo las acciones planeadas para dar respuesta a lo pedido y, en un cuarto momento, a formular y validar la solución obtenida. Estas acciones dan lugar al enriquecimiento del significado de los objetos mentales puestos en juego en la interacción y, como consecuencia, a la evolución de dichos objetos o al surgimiento de nuevos objetos derivados de los previamente construidos.

En este trabajo, el término *situación-problema* se corresponde con el contenido objetivo del problema, jugando un papel semejante la expresión *tarea-problémica*. El término *problema* comprende la *situación-problema* y el *sujeto* (resolutor) que lo ha hecho suyo y que intenta resolverlo. Se debe de estar consciente que en la literatura, especializada o no, se hace uso indistinto del término *problema* tanto como equivalente a *situación-problema* o como sinónimo de la versión amplia del mismo.

2.2.2 Clasificación de problemas

El contenido o contenido objetivo de los problemas matemáticos (situación-problema) se puede clasificar de acuerdo a su complejidad intrínseca en dos grandes grupos:

a) Rutinarios o Bien Estructurados o cerrados. Generalmente encontrados en los libros de texto que usualmente se resuelven mediante el empleo de procesos bien definidos. Aparecen claramente formulados.

b) No Rutinarios o Mal Estructurados o abiertos. Problemas generalmente provenientes de la vida real, con varios métodos de solución, varias soluciones y que requieren más que la aplicación de reglas o algoritmos para resolverlos. Aparecen mal formulados por lo que se requiere que el resolutor lo reformule y desarrolle una serie de estrategias.

Polya (1962) sugiere otro tipo de clasificación: aquellos problemas donde se pide encontrar algo y otros donde algo debe ser probado. No se está interesado en esta última opción por el tipo de investigación llevada a cabo.

Para Font (2007:11) los problemas en términos del contexto pueden ser clasificados en:
a) problemas escolares no contextualizados, corresponden a los de contexto matemático o intra-matemático, b) problemas de contexto evocado, refiere a situaciones problemas propuestas por el texto o profesor en el aula y que permite imaginar una situación real donde se da el hecho, c) problema de contexto simulado, tiene su origen en un contexto real y corresponde a una

representación de ese contexto, por ejm .cuando alumnos simulan situaciones de compra-venta dentro del aula y d) problemas reales, refiere a la práctica real de la matemática .

En función de la complejidad de los procesos necesarios para su resolución (Font, 2007:12), se pueden clasificar entre problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos y procedimientos previamente estudiados a los que denominaremos *problemas escolares de contexto evocado de aplicación* y problemas que implican actividades complejas de modelación *problemas escolares de contexto evocado de consolidación*. Existe una gradación continua de ubicación de problemas entre los más sencillos denominados de aplicación y los más complejos llamados consolidación. Se puede imaginar una línea recta donde el cero correspondería a los problemas sencillos y el uno a los más difíciles. En este trabajo y basado en lo anterior se utilizan los siguientes índices de dificultad:

a) Bajo, Fácil o Sencillo. Correspondería al cero o cercano a él, de la recta. Son los *problemas escolares de contexto evocado de aplicación*

b) Regular, Mediano o intermedio. Correspondería a la mitad o su cercanía, de la recta.

c) Alto, Difícil o Complejo. Correspondería al uno o cercano a él, de la recta. Son los *problemas escolares de contexto evocado de consolidación.*

También se pueden identificar los problemas si tienen texto en lenguaje natural para formularlos o sin texto, por ejemplo de manera simbólica.

Respecto a los datos incluidos en un problema, pueden existir datos en exceso, es decir superfluos; falta de ellos, deficitarios en datos; y datos contradictorios.

El marco teórico de PISA (2003:40-44) clasifica los problemas en tres niveles, empezando por lo más sencillo:

a) Primer nivel: *Reproducción.* Reproducción del conocimiento estudiado, ejecución de procedimientos rutinarios, formulas establecidas y realización de cálculos.

b) Segundo nivel: *Conexión*. Problemas que ya no son de totalmente rutinarios pero que aun incluyen situaciones familiares.

c) Tercer nivel: *Reflexión*. Razonamiento y generalización para resolver problemas originales.

Por su manera de resolverlos, ya sea mediante un algoritmo, es decir con una serie de pasos bien definido o con el método heurístico o estrategias con un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza un resultado óptimo.

2.2.3 Factores intervinientes

Se puede iniciar una descripción histórica relativamente reciente- sin perder de vista que personajes como Sócrates o Descartes – habían tocado el tema, con el estudio del filosofo Dewey plasmado en su obra How we think (1910) citado por (Cruz, 2002:30), (Sánchez y Fernández, 2003:159) y Rodríguez (2005:11), presenta un primer análisis de los actos del pensamiento viéndolo como un proceso, abre las puertas para que estudios posteriores se hagan sobre el mismo. Propone cinco etapas o niveles:

- El encuentro con una dificultad y toma conciencia de su existencia.
- Localización y precisión de la misma.
- Planteamiento de una posible solución.
- Desarrollo lógico de las consecuencias derivadas.

Rodríguez (2005:15) y (Sánchez y Fernández, 2003:160) mencionan al británico Graham Wallas en su obra *The art of Thought* (1926), donde sugiere cuatro etapas basadas en introspección para explicar el proceso creador:

- Preparación. Recolección de información e intentos preliminares de solución.
- Incubación. Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o dormir. Cita la experiencia de Arquímedes en la bañera.
- Iluminación. (Insight) Aparece la clave para la solución. fase misteriosa a la Wallas sugiere descansar la mente para en otras actividades para que esta aparezca.
- Verificación. Se comprueba la solución para estar seguros si la idea realmente funciona y resuelve el problema.

Estos trabajos estuvieron basados en la concepción de la resolución de problemas como actividad por antonomasia del pensamiento. Como se observa para antes de Polya las etapas del proceso de resolución de problemas en general estaban delineadas, una aportación origina de él es resaltar el área de resolución de problemas en este caso, Matemáticas. Además de una serie de sugerencias (heurísticos) para progresar en cada fase.

George Polya (1965:19) en su libro *How to solve it*, propuso cuatro fases para la resolución de un problema matemático. Por ser el origen más reciente en nuestra disciplina de los estudios sobre estos temas se transcribe el resumen de su propuesta que se encuentra en la página 19 del mencionado texto:

Comprender el problema.

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan.

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?

- Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Schoenfeld citado por (Cruz, 2002:31), (Sánchez y Fernández, 2003:162), (Santos Trigo, 1996:34, 2008:6) y (Rodríguez (2005:64-74) basó su trabajo en los estudios de Polya y plantea un marco para el análisis del comportamiento durante la resolución de problemas. Schoenfeld es el primer autor en considerar la metacognición en el proceso de resolución de problemas.

Schoenfeld en su libro *Mathematical Problem Solving* (1985) tomando en cuenta resultados de varios estudios, donde se aplicaban problemas a estudiantes, se grababa, se filmaba y se revisaban apuntes llegó a la conclusión de que para resolver problemas se deben de tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. : (a) Dominio del conocimiento o recursos cognitivos que el sujeto dispone; (b) Estrategias cognitivas o métodos heurísticos para explorar en la situación; (c) Estrategias metacognitivas o control, y que tiene que ver con la eficiencia con que el sujeto utilizan el conocimiento del que disponen (d) Un sistemas de creencias, que corresponden a la perspectiva del individuo hacia la naturaleza de la disciplina y sobre su trabajo en ella.

a) Recursos cognitivos (Inventario). Los recursos son los conocimientos previos o de base con los que cuenta el resolutor, entre otros: conceptos, procedimientos, conocimiento del lenguaje simbólico, teoremas, definiciones, procedimientos, conocimiento intuitivo sobre el problema, etc. asociados con un dominio matemático particular o tema. Es de mencionar que también puede existir conocimiento previo erróneo o defectuoso.
b) Estrategias cognitivas (Heurísticas). Involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Por ejemplo, dibujar un diagrama, elaborar una tabla, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. Dice Schoenfeld (1985:23) que las estrategias heurísticas son aproximaciones para una prospera resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan al individuo a comprender mejor un problema o progresar hacia su solución.
c) Estrategias metacognitivas (Control). Para el investigador Santos Trigo (2008:6) las estrategias metacognitivas involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?)

Schoenfeld centra sus investigaciones en una faceta de la metacognición: control y que concibe como la selección, en cada momento, de los pasos adecuados: la elección de técnicas y heurísticas más adecuados a cada problema. Trata de cómo un sujeto controla su trabajo para la resolución del problema. Si ante un problema puede ver varios caminos posibles para solucionarlo, el resolutor tiene que ser capaz de darse cuenta si el seleccionado está funcionando o no; ya sea retrocediendo o intentar otro camino. Algunas acciones que involucran el control:

- Entendimiento. El resolutor debe tener claro acerca de lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
- Considerar varias formas de solución y seleccionar alguna. Es decir diseñar la

estrategia de solución.

- Ejecutar el diseño o estrategia y estar dispuesto a cambiarlo en su momento.
- Monitorear el proceso y tomar la decisión de cambiar de estrategia cuando esté fallando la seleccionada.
- Revisar el proceso de resolución.

En general, el control se asocia a una dimensión metacognitiva, por cuanto el individuo debe de estar consciente de la activada que está desarrollando y, por consiguiente, de su dirección y regulación.

d) Sistemas de creencias. Las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas (Santos, 2008:6), entendidas como la concepción individual y los sentimientos que modelan las formas en que el individuo conceptualiza y actúa sobre la matemática. Esto afecta, por ejemplo, cuando un estudiante toma un problema y a los cinco minutos lo abandona o no; es decir lo que el piense que es un problema puede incidir incluso en el tiempo que este le dedique a la resolución de un ejercicio. Schoenfeld cita a Lampert (1990) sobre las creencias de los estudiantes: una creencia muy difundida entre estudiantes y docentes es que la matemática tiene que ver con la certeza; saber matemáticas significa el ser hábil para dar respuestas correctas rápidamente; esto se atribuye a la experiencia escolar, en la cual hacer y conocer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor y la verdad matemática es validada cuando la respuesta es ratificada por el profesor.

Se puede considerar, que conscientes o no, las creencias modelan el comportamiento del resolutor frente a un problema.

Schoenfeld plantea algunas creencias sobre la matemática obtenidas de diversos estudios:

- Los problemas matemáticos tienen una y sólo una respuesta correcta.
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en clase.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas podrán resolver cualquier problema que se les asigne en cinco minutos o menos.

- La matemática escolar poco tiene que ver con el mundo real.

Estas creencias son abstraídas de las experiencias personales y de la comunidad de práctica de la matemática, por ejemplo una escuela, a donde pertenece el sujeto.

Esther Rodríguez (2005:51) relata que las investigaciones referidas a las *creencias* han abandonado el campo de lo metacognitivo para ocupar un espacio entre lo cognitivo y lo afectivo. El campo de las creencias es complejo y los diferentes elementos que la componen: actitudes, creencias afectivas y de otro tipo, tienen límites poco precisos.

Para el enfoque Ontosemiótico, las creencias corresponden con normas y metanormas mencionadas en una sección 2.2.

Para Santos Trigo este marco de explicación del fracaso o éxito en la resolución de problemas ha sido referencia relevante en el desarrollo de otros marcos conceptuales y perspectivas.

De acuerdo con las propuestas de Polya y Schoenfeld, se presenta el modelo para la resolución de problemas (RP) que se seguirá en este trabajo:

a) Etapa de la comprensión del problema: El resolutor lee el enunciado. Interpreta la información, ¿qué quiere el problema? ¿Qué datos suministra y condiciones?

b) Etapa del diseño de un plan: El resolutor utilizando sus experiencias pasadas, particularmente la enseñanza recibida, diseña o escoge un plan o estrategia de solución.

c) Etapa de la ejecución del plan: El resolutor pone en marcha su plan de solución.

d) Etapa de la comprobación de la solución: El resolutor intenta comprobar o validar el resultado obtenido y puede preguntarse si este método se puede aplicar a otros problemas.

2.2.4 Gestión metacognitiva

El movimiento de *Problem Solving* inicialmente pretendía responder a los trabajos de Polya por el camino de la enseñanza de heurísticas generales. Continuando con investigaciones sobre lo anterior, en el trabajo de Schoenfeld (1985) entra el término *metacognición* en el área de las matemáticas y más específicamente en el área de *Problem Solving.*

El uso popular del término *metacognición* es originalmente basado en las investigaciones de Flavell en el campo de la sicología (Flavell, 1976, 1979). Es aceptado en forma generalizada su distinción en dos aspectos diferentes:

a) C*onocimiento metacognitivo* que corresponde a un conocimiento declarativo o conciencia individual del sujeto de sus propios procesos cognitivos y

b) *Habilidades metacognitivas* que se refieren a un conocimiento procedimental que es requerido para la regulación de procesos cognitivos, que incluye planeación, selección y monitoreo de estrategias cognitivas, evaluar o revisar el resultado de esas actividades y revisar planes y estrategias (Brown, 1978,..).?

Las habilidades metacognitivas pueden ser inferidas desde el comportamiento de los estudiantes o sus expresiones, es decir desde actividades metacognitivas concretas.

La gestión del proceso de resolución de un problema a cargo de un resolutor es un aspecto muy importante del mismo proceso. El monitoreo del progreso de resolución y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones también son aspectos importantes en la resolución de problemas. A estas actividades se les identifica como estrategias metacognitivas.

Para la realización de una práctica, como por ejemplo resolver un problema que le represente un cierto grado de dificultad importante, un resolutor pondrá en funcionamiento una configuración cognitiva , procesos –pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión de los componentes de la configuración a lo largo del proceso de resolución : comprensión, planificación/organización, supervisión/control, regulación y revisión/evaluación que pueden ser más o menos automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles, etc.

Teniendo en cuenta varias investigaciones sobre las habilidades metacognitivas presentes en la resolución de problemas de matemáticas se consideran los siguientes componentes en los procesos metacognitivos: (Flavell, 1976; Polya, 1965; Schoenfeld, 1985; Gónzales, 1999; Carrel, Gajdusek y Wise, 2001; Mateos, 2001; Schraw 2001; Gusmao, 2006, entre otros).

1) (Proceso de) comprensión. Para empezar a resolver un problema, el resolutor, debe comprender primero lo que se solicita en el enunciado, debe tomar conciencia de todos los aspectos que se han de tener en cuenta para la resolución de la situación/problema.

Dichos aspectos guiarán el desarrollo de las acciones posteriores. Después, teniendo en cuenta las exigencias y condiciones impuestas por la tarea, debe decidir o elegir las estrategias y pasos que supuestamente le llevarán a la solución

2) (*Proceso de) organización/ planeación.* La selección y planeación de estrategias matemáticas para resolver un problema depende fuertemente del tipo de técnicas matemáticas que están disponibles para los estudiantes, que depende de la posibilidad para localizar el problema matemático considerado inicialmente.

3) (*Proceso de) Supervisión/monitoreo.* Dado un plan que puede ser el adecuado o no, una acción *supervisiva* es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo ¿estoy siguiendo correctamente el plan previsto?. Estos tipos de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de supervisión puntual o constante de los planes, estrategias o acciones emprendidas. Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento.

Esta dimensión de la metacognición implica la posibilidad de reflexionar sobre las acciones cognitivas que están en marcha y examinar sus consecuencias; las personas evidencian conocimiento metacognoscitivo en su dimensión supervisiva cuando, estando abocados a la solución de un problema o a la realización de alguna otra tarea académica , efectivamente piensan acerca de su conducta como si un supervisor (ejecutivo) estuviera monitoreando sus pensamientos y acciones; quienes han desarrollado habilidades metacognoscitivas piensan activamente acerca de lo que ellos están haciendo cuando están dedicados a la realización de alguna tarea y son capaces de ejercer control sobre sus propios procesos cognitivos (Kagan y Lang, 1978; p. 181)

4) (*Proceso de) Regulación/Control* En una acción *regulativa* se supone que el resolutor implícitamente o explícitamente se hace cuestionamientos del tipo si no estoy logrando las metas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender. Se da cuenta de que se equivocó y sobre todo se pregunta *cuándo* o *dónde* se equivocó.

Estas dimensiones de la metacognición son evidenciables de varios modos, por ejemplo: i) Una vez que se ha detectado la existencia de algún problema, se aprecia su dificultad y, en función de ésta última, se ajustan los esfuerzos cognitivos que hay que desarrollar.

ii) Se mantiene una flexibilidad de pensamiento, de modo que sea posible ensayar diferentes opciones o caminos hacia la solución del problema, sin apegarse a sólo una de dichas opciones; esto es lo que permite abandonar rápidamente soluciones incorrectas e ineficientes y reemplazarlas por otras mejores.

Por contraste, un indicio de mal funcionamiento metacognoscitivo se presenta cuando la persona persiste en un procedimiento aún cuando, recurrentemente, conduzca a la misma solución incorrecta; esto es lo que se llama caer en un círculo vicioso. Esto podríamos notarlo si revisamos las hojas donde los sujetos han resuelto los problemas y vemos el mismo intento fallido dos o más veces. Esto es análogo a tratar de colocar juntas dos piezas de un rompecabezas y perseverar con ellas aún cuando ellas, obviamente, no ajustan.

Un indicio de metacognición es ser capaz de dejar de lado una estrategia que no esté trabajando y ensayar una nueva.

iii) Elaborar planes de acción cognitiva, es decir, diseñar estrategias que, potencial o eventualmente, podrían conducir a la solución del problema que se está tratando de resolver. 5) (*Proceso de) evaluación/verificación.* En una acción *evaluativa/verificativa* se supone (considera) que el resolutor explícitamente hace cuestionamientos del tipo ¿estoy respondiendo correctamente a la tarea? ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?. Estos tipos de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación/verificación final de las acciones emprendidas.

2.3 Competencia

En esta sección se revisa la noción de competencia, sus componentes, clasificación y la competencia en la resolución de problemas.

2.3.1 Noción de Competencia

El concepto de competencia empezó a ser utilizado como resultado de las investigaciones de David McClelland (1994) en los años setenta, las cuales se orientaron a identificar las variables que permitieran explicar el desempeño en el trabajo. Una primera respuesta fue la demostración de la ineptitud de los tradicionales *tests* y pruebas para el éxito en el desempeño laboral. McClelland logró elaborar un marco referencial cuyas características diferenciaban los distintos niveles de rendimiento de los trabajadores a partir de una serie de entrevistas y observaciones. La forma en que describió tales factores se ajustó mas en las peculiaridades y comportamientos de las personas que desempeñaban los empleos, que en las tradicionales descripciones de tareas y atributos de los puestos de trabajo. En una visión más centrada en el *proceso del trabajo* y en las condiciones productivas actuales, puede establecerse la aplicación del concepto de competencia en los mercados de trabajo a partir de las transformaciones económicas que se precipitaron en la década de los ochenta. Países como Inglaterra, Canadá, Australia, Estados Unidos y ahora toda la Unión Europea son pioneros en la aplicación del enfoque de competencia, lo consideraron como una herramienta útil para mejorar las condiciones de eficiencia, pertinencia y calidad de la educación para que en un futuro también mejore su economía.

Una primera disposición que llevó a estos países a cambiar mediante el modelo de competencia fue la inadecuada relación existente entre los programas de educación y la realidad de las empresas. A partir de este análisis se consideró que el sistema académico valoraba en mayor medida la adquisición de conocimientos que la aplicación de estos en el trabajo. Se requería, entonces, un sistema educativo que reconociera la capacidad de desempeñarse efectivamente en el trabajo y no solamente de adquirir conocimientos. Por ello, a partir de la preocupación por el desempeño de la economía en el mercado mundial, y de la adopción del modelo de las competencias, la adopción de éstas señaló la necesidad de incluir en el esquema educativo lo que realmente ocurría en el lugar de trabajo (Argudín, 2007:29,30)

La temática de enseñanza y evaluación por competencias es de gran interés en la actualidad, debido por una parte por los procesos de integración y de coordinación de la universidades europeas en el Espacio Europeo de educación Superior (EEES) que incluye los proyectos de el proceso de Bolonia, proyecto tuning y el crédito europeo, European Credit

Transfer System (ECTS). Por otra parte las pruebas de evaluación aplicadas en la Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) implementado a través del Programe for International Student Assesment (PISA) a los países miembros de dicha organización. El marco teórico de PISA (2003) considera competencias en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas.

La sociedad en la actualidad reclama a sus profesionistas nuevas competencias laborales y en general a los ciudadanos también nuevas competencias que en el pasado no se requerían. Muchas universidades en diferentes países están rediseñando sus modelos curriculares, los perfiles de sus egresados incluyendo una serie de competencias.

Para la Universidad del Deusto España (UD) (2008: 23) en España, se entiende por competencia en un sentido amplio como el buen desempeño en contextos diversos y auténticos basados en la integración y activación de conocimientos, normas, técnicas, procedimientos, habilidades y destrezas, actitudes y valores.

Para la Universidad Autónoma de Baja California la competencia: Es la capacidad de un sujeto para desarrollar una actividad profesional o laboral, con base en la conjunción de conocimientos, habilidades, actitudes y valores, requeridos para esa tarea (UABC, Diseño Curricular: 31)**.**

Para la redacción de una competencia de acuerdo al criterio de elaboración de una carta descriptiva de una materia o unidad de aprendizaje en la UABC (Diseño Curricular), es necesario que esta exprese lo **Qué** va a aprender el estudiante o lo que va a hacer o lo que va a enseñar; **Cómo** lo va a aprender o como lo va a hacer o como lo va a enseñar; **Para qué** requiere aprenderlo o para que requiere hacerlo o para que lo va a enseñar; **Con qué** actitud y valor lo hará. En el **Qué** expresado en verbo en infinitivo se expresa una capacidad; en el **Para qué**, se da una finalidad, una intención una utilidad; y **Con qué,** actitudes, valores o comportamientos: constancia, disciplina, respeto, puntualidad, etc.

Otra versión de redacción (Soto, 2007) de una competencia incluye el ámbito, **Dónde,** en qué lugar, área, población; requerimientos, **Qué necesita**, conocimientos, habilidades, destrezas.

De acuerdo con la literatura, los elementos que conforman una competencia son: conocimiento, habilidad, actitud y valor.

Yolanda Argudín (2007) en libro sobre Educación Basada en Competencias amplia esta clasificación y del cual se basa lo siguiente:

Conocimientos

Para la UABC representan los saberes necesarios para el desempeño de la competencia específica, pudiendo ser estos teóricos, de procedimiento, de reconocimiento de técnicas, terminología o datos que son requeridos para actuar sobre una realidad determinada.

Se pueden dividir en generales, específicos y de la disciplina. La educación superior, por lo general, orienta el aprendizaje hacia los conocimientos disciplinares en campos específicos; los alumnos pueden elegir libremente algunas materias, pero la mayoría de sus cursos se centran en los conocimientos del campo que estudian. De este modo, y por lo común, el alumno obtiene un cúmulo de información sobre su disciplina; no obstante, cuando se enfrenta al mundo laboral, con frecuencia tiene dificultades para integrar toda esta información, a tal punto que no puede resolver problemas en el desafío del trabajo cotidiano.

La realidad no se divide como en las parcelas disciplinarias de las instituciones a nivel superior. El egresado, que únicamente ha sido expuesto a los conocimientos específicos de una determinada área, vive una evidente desventaja cuando se enfrenta a los complejos problemas reales y laborales porque no ha aprendido a aplicar sus conocimientos fuera del aula.

Habilidades

Para la UABC se refieren a procesos de pensamiento lógico formal, tales como la deducción, el análisis, la síntesis, la diferenciación, etc.

La definición de los conceptos *habilidades* y *competencias* varía considerablemente. Paul Attewell (1990) en su artículo *Qué es una habilidad*, dice que es un concepto sumamente complicado: *habilidad* es la destreza para hacer algo, pero la palabra también se relaciona, por ejemplo, con el desarrollo mismo de una habilidad, y *habilidad* suele utilizarse como sinónimo de *competencia*, que de esta manera remite a expertos, a maestría en el desempeño y excelencia.

Las habilidades se componen de un conjunto de acciones relacionadas. No se desarrollan aisladamente, se asocian a los conocimientos y a los valores y unos a los otros se refuerzan. Se desarrollan en secuencia, las básicas deben incrementase antes que las habilidades avanzadas.

Las competencias en relación con las habilidades determinan qué tan efectivamente se desempeñan las habilidades y qué tanto se desarrollaron en secuencia para alcanzar una meta.

Las habilidades en la construcción de competencias, por lo general se habla de: *razonamiento* como la principal habilidad del pensamiento, mediante el cual se puede hacer inferencias o juicios así como relacionar, comparar y sintetizar.

La *resolución de problemas* constituye un marco ideal que integra toda la actividad de pensar. Cuando no se sabe qué hacer, que creer o que querer, es cuando se entiende que uno se encuentra frente a un problema. Para comprender una situación problema se necesitan las habilidades pertenecientes a las capacidades de conceptualizar, reflexionar de hacer juicios. Así como indagar y comprobar hipótesis. La resolución de problemas implica elegir con eficacia entre diferentes opciones o alternativas para tomar una decisión. La toma de decisiones exige un juicio eficiente para escoger sobre la mejor opción, la que más ventajas ofrezca.

Se pueden señalar como habilidades básica del pensamiento: abstraer distinguir, imaginar, sintetizar, observar, modelar, transformar, construir analogías, visualizar y formar o reconocer patrones. Estas habilidades básicas integran habilidades más complejas como: la resolución de problemas, la investigación, la autoevaluación, entre otras.

Se pueden considerar como habilidades básicas del razonamiento: analizar, anticipar, regular, resumir, deducir, inferir, inducir, justificar, sintetizar, razonar, fundamentar, generalizar, identificar, interpretar, distinguir, transferir, explicar, clasificar, comparar, codificar, reconocer, reconstruir, argumentar, categorizar, diagnosticar, hacer analogías, hacer juicios, demostrar, relacionar, verificar, valorar y concluir.

Destrezas

Para la UABC son aquellas relacionadas principalmente con la coordinación psicomotriz necesaria para operar máquinas, aparatos, instrumentos de laboratorio o de cualquier tipo.

Valores

Para la UABC los *valores* son los principios éticos que rigen el comportamiento del ser humano. Las universidades refuerzan los valores de los estudiantes en varios aspectos positivos. Para Astin (1993), un valor es un principio abstracto y generalizado del comportamiento que provee normas para juzgar algunas acciones y metas específicas. Estos valores pueden ser personales o de grupo sintiendo un fuerte compromiso emocional hacia estas acciones y metas. Los valores son el contexto en el que las habilidades y la aplicación de los conocimientos se basan.

El proponer que los estudiantes construyan competencias, en ningún momento significa que deban abandonar sus valores, por lo contrario, es muy importante que desarrollen un pensamiento crítico, como un puntal para el crecimiento en valores.

Actitudes

Para la UABC las *actitudes* hacen referencia a las disposiciones de comportamiento que caracterizan el actuar del individuo.

Las *actitudes* son comportamientos que responden a la disciplina y a los valores. Según la tesis doctoral de María del Mar García (2011) el autor McLeod (1992) estableció tres componentes del dominio afectivo en el aprendizaje matemático y la resolución de problemas: emociones, actitudes y creencias. Estas componentes fueron explicitadas por Gómez-Chacón (2003);

Las emociones son rápidos cambios de sentimientos y de fuerte intensidad, incluyendo lo fisiológico, cognitivo y mediacional. Actitudes, moderada y estable predisposición evaluativa que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Creencias, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales con una fuerte estabilidad.

De entre los tres elementos se abundará más sobre la *actitud.* García (2011:70) describe algunas características de *las actitudes*:

- Son un conjunto organizado de convicciones y creencias (componente cognitiva). Representa lo que una persona suele considerar como verdadero/falso, bueno/malo, deseable/indeseable.
- Son una predisposición o tendencia a responder de un modo determinado (componente comportamental)
- Tienen un carácter estable y permanente. Dentro de una cierta estabilidad pueden cambiar.
- Son aprendidas. En su aprendizaje intervienen factores muy diversos: ambiente social y familiar, escolar, medios de comunicación, grupos, personalidad, etc.
- Desempeñan un papel dinamizador del conocimiento y en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se suele tender a conocer aquello a lo que se tiene una actitud favorable y alejarse de lo asociado a elementos negativos.
- Son transferibles, es decir se pueden llevar a diferentes situaciones y otros modos.

Se puede decir que la actitud es aprendida o adquirida y por tanto se puede modificar, implican una carga afectiva y emocional, una faceta es de tipo comportamental, es decir observable y son transferibles.

Gómez-Chacón plantea la actitud como una predisposición evaluativa (positiva/negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta por tanto de tres componentes: una cognitiva, que son las creencias subyacentes a dicha actitud; una afectiva, que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o rechazo de la tarea o de la materia; y una intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento.

Si el objeto es la matemática, este mismo autor distingue entre dos tipos de actitudes:

- Actitudes hacia la matemática
- Actitudes matemáticas

En el primer caso se pueden incluir aspectos tales como: actitud hacia la matemática y matemáticos, hacia el trabajo matemático, hacia la asignatura de matemáticas, hacia los métodos de enseñanza. En este rubro se pueden considerar tres componentes: cognitiva o creencias del sujeto; afectiva, gusto por las matemáticas; y comportamental en implicación en el trabajo en matemáticas. Esta última componente que es observable, eso la hace particularmente importante para nuestro estudio para el grado de involucramiento en la resolución de problemas.

Actitudes matemáticas, tienen un carácter cognitivo- entendido no como creencia sino como un proceso intelectual que precede al aprendizaje -y comportamental. Se refieren al modo de utilizar capacidades tales como flexibilidad del pensamiento, perseverancia, precisión y creatividad, que son importantes en el trabajo de matemáticas.

Algunas actitudes matemáticas deseables en estudiantes son (Garcia:78) : la curiosidad, la flexibilidad para tratar situaciones, gusto por la certeza, autonomía de comportamiento, actitud positiva hacia el trabajo y esfuerzo continuo, disfrutar pensando incluso cuando no se obtengan resultados, confianza en las propias capacidades para afrontar problemas o aceptar responsabilidades.

2.3.2 Clasificación

Las competencias pueden ser clasificadas de acuerdo con UD (2008) y el Informe Final del Proyecto Tuning (González y Wagenaar, 2003) en a) *genéricas* o transversales y en b) competencias *específicas*.

a) Las genéricas tienen una función de medio o herramienta para obtener un determinado fin. Estas competencias buscan integrar las capacidades humanas, el conocimiento y los valores y actitudes de uso; promueven su autonomía personal, laboral y profesional; lleven implícito el aprender a aprender. Las competencias genéricas se pueden organizar en i) instrumentales, ii) interpersonales y iii) sistémicas. A su vez las instrumentales se pueden descomponer en cognitivas, metodológicas, tecnológicas y lingüísticas. Las interpersonales en individuales y sociales. Las sistémicas en organización, capacidad emprendedora y liderazgo.

Es de mencionar que estas competencias a su vez están formadas por otras más particulares, por ejemplo, las competencias cognitivas en pensamiento analítico, crítico, reflexivo, lógico, analógico, creativo, entre otras; las competencias metodológicas en gestión del tiempo, resolución de problemas, planificación, entre otras; las competencias lingüísticas en comunicación verbal, comunicación escrita e idioma extranjero.

b) Las competencias *específicas* se han dividido en i) competencias profesionales que deben poseer los futuros graduados y son para desenvolverse en el mundo laboral y las ii) competencias relacionadas con la disciplina o área del conocimiento que deben adquirir los estudiantes.

i) competencias profesionales. De entre este tipo de competencias se puede ejemplificar con las de algunas ingenierías.

Por ejemplo, se presenta el caso de la licenciatura en ingeniería mecánica ofrecida en la UABC, en el plan de estudios 2009, en la sección correspondiente a PERFIL DE EGRESO se lee :

> El Ingeniero Mecánico posee conocimientos y habilidades para diseñar, analizar, proyectar, instalar, operar y mantener sistemas mecánicos, térmicos, hidráulicos y neumáticos, así como optimizar el aprovechamiento de la energía, y el adecuado manejo de las propiedades mecánicas de los materiales, ... Será competente para**:**
>
> Diseñar y evaluar componentes mecánicos y sus procesos de manufactura, para optimizar y eficientar los procesos de diseño y manufactura en la industria, atendiendo a las normas internacionales y nacionales de una manera responsable, creativa, considerando el ahorro de energía y comprometidos con el medio ambiente.
> Diseñar y seleccionar sistemas de producción térmicos industriales, basado en los procesos termodinámicos, para optimizar las condiciones de operación; con una actitud creativa, innovadora y crítica.
> Diseñar, construir y evaluar sistemas de conducción de fluidos, así como de los equipos que intervienen en los procesos, para eficientar y optimizar la conducción del fluido reduciendo su consumo de energía y los materiales utilizados, aplicando responsablemente las normas y de manera profesionales en el desarrollo de dichos sistemas.

ii) competencias disciplinares. Para nuestra disciplina, la matemática, que forma parte esencial en la formación de los ingenieros se pueden mostrar algunos acercamientos a las mismas.

En el marco teórico para las pruebas de Pisa “El término *competencia matemática* se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda.” (Pisa, 2003:26).Según PISA las *competencias matemáticas* se pueden sintetizar como:

1. Pensar y razonar

2. Argumentar

3. Comunicar

4. Modelar

5. Formular y resolver problemas

6. Representar

7. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas

8. Utilizar ayudas y herramientas

En un sentido restringido la competencia matemática es pues una capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas especificas. En un sentido más amplio, el término competencia se usa en el diseño curricular en la cual abarca todos los elementos del objeto matemático, es decir que competencia curricularmente hablando, incluye el término de comprensión. (Godino,2002)

Competencias Relacionadas con el Pensamiento Variacional:

- Para la percepción de las variables
- Para el establecimiento de las relaciones de dependencia
- Para utilizar las diferentes representaciones de la variación
- Para analizar, determinar y describir la variación de una cantidad en función de otra u otras.

2.3.3 Competencia de Resolución de Problemas

Para la UD (2008: 142) la competencia para resolver problemas en general es un proceso mediante el cual se identifica, analiza y definen los elementos significativos que constituyen un problema para resolverlo con criterio y de forma efectiva.

La competencia para un primer nivel de dominio es: (*Qué)* Identificar y analizar un problema (para) para generar alternativas de solución, (*cómo)* aplicando los métodos aprendidos.

La conforman seis indicadores con cinco descriptores para cada uno. Los indicadores son:

1. Identifica lo que es y no es un problema y toma la decisión de abordarlo. Los descriptores van desde no distinguir que es un problema; distinguirlo con dificultad; identificarlo correctamente identificarlos con facilidad; hasta identificarlo con facilidad y estar consciente de ello.

2. Lee y escucha activamente. Hace preguntas para definir el problema.

No reacciona; realiza algunas preguntas; realiza preguntas adecuadas; tiene agilidad para preguntar; y formula preguntas claves.

3. Recoge la información significativa que necesita para resolver los problemas.

No recoge información; la recoge incompleta; recoge la necesaria; recoge información acertada; y recoge información muy significativa y la analiza y reflexiona.

4. Sigue un método para identificar las causas de un problema.

No identifica las causas del problema: Identifica algunas causas; Identifica las causas; Identifica y jerarquiza; y identifica causas y modela.

5. Presenta diferentes alternativas de solución ante un mismo problema y las evalúa

No presenta alternativas; presenta alguna alternativa; presenta algunas alternativas; hace buen análisis de las alternativas; y elige la mejor alternativa.

6. Diseña un plan de acción para la aplicación de la solución escogida.

No escoge una solución; escoge una solución; detalla los pasos a seguir; escoge una buena solución y diseña el plan; y destaca por la selección y por el diseño del plan de acción.

Para el marco teórico de PISA (2003) la Competencia Matemática se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un significado del término competencias se refiere a procesos que deben activarse para conectar el mundo real, donde surgen los problemas con las matemáticas y resolver la cuestión planteada, lo cual permite concretar mediante diversos tipos de capacidades de análisis, razonamiento y comunicación que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. El modelo funcional postulado en PISA, establece que los sujetos abordan distintas cuestiones y plantean y resuelven problemas mediante herramientas matemáticas. La metodología está centrada en encontrar respuestas antes que probar y se llama actividad de matematización. Que estaría formada por una fase de matematización horizontal que se refiere a:

- Identificar las matemáticas relevantes para el problema
- Representar el problema de modo diferente
- Comprender la relación entre los lenguajes natural y simbólico
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos
- Traducir el problema a un modelo matemático

Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso continúa. La siguiente fase se le denomina matematización vertical e incluye:

- Utilizar diferentes representaciones
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos
- Argumentar y generalizar

La siguiente fase de validación y reflexión, es para interpretar resultados y el proceso completo.

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos
- Reflexionar sobre los argumentos y explicar y justificar resultados
- Comunicar el proceso y la solución
- Criticar el modelos y sus límites

2.3.4 Distinción entre comprensión y competencia

Godino en su artículo sobre una Perspectiva Semiótica de la Competencia y Comprensión Matemática (Godino, 2002:1) dice parafraseando a D'Amore (2001), que desde el punto de vista pragmático, el significado de un término o expresión se debe buscar en su uso en los distintos contextos donde se pone en juego. En la vida académica y cotidiana, términos como *competencia* y *comprensión* tienen una gran diversidad de significados.

Un significado de *comprensión* personal de un objeto "es la construcción o apropiación del significado institucional de dicho objeto" (Godino, 2003:124). Puesto que los objetos matemáticos están formados por diversos elementos que componen los significados institucionales, el comprender un objeto será comprender todos sus elementos. Tales como:

- Situaciones –problema. Reconocer qué tipo de problemas involucra el objeto a comprender.
- Lenguaje matemático. Conocer los símbolos, gráficas, etc. ligadas al objeto.
- Procedimientos y algoritmos utilizados en la resolución de problemas donde aparece el objeto.
- Definiciones diversas del objeto.
- Propiedades y relaciones con otros objetos.
- Argumentos usados en la comprobación o generalización de las soluciones de problemas.

Otros significado de *comprensión* propuesto por Font (2007), donde considera la comprensión como una competencia:

> la comprensión o el saber de un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los

restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípica que son propuestas en el aula (p.16).

Para efectos de esta investigación, la *comprensión* de un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características y relacionarlo con los restantes objetos matemáticos. Es decir el aspecto de *saber* y no se estaría considerando el aspecto de <uso> o de *saber hacer*, relacionado con la *competencia.*

Un significado y que se utiliza en el diseño curricular de la UABC, de *competencia* matemática es la capacidad que tiene un sujeto para realizar una tarea matemática específica mediante el uso de conocimientos, habilidades, actitudes y valores (UABC, Diseño curricular: 11).

Para efectos de esta investigación el significado de *competencia matemática* corresponde al uso eficaz de los conocimientos y procedimientos matemáticos para abordar y resolver problemas. Si se amplía la noción de objeto matemático propuesta por el EOS, lo anterior se reescribiría como: El uso eficaz de los objetos matemáticos para resolver abordar y problemas.

Considerando la noción de comprensión, se reescribiría la competencia como:

El significado de la *competencia* matemática como el uso eficaz de la *comprensión* de un objeto matemático para abordar y resolver problemas.

En matemáticas la nociones de comprensión y competencia están íntimamente relacionadas, pero puede haber en la práctica de la enseñanza una separación y descoordinación entre ambas facetas. Pueden hacerse cuestionamientos como éstos, ¿Depende el saber hacer del saber qué? ¿Es posible la acción de resolver problemas sin comprensión?. Al parecer la resolución de problemas será más eficaz si existe buena comprensión, de saber porque se hacen de esa manera las cosas. La comprension favorece que la actividad matemática sea más flexible y adaptable y generalizable, (Godino, 2003).

La comprensión, según Skemp (1976) la opción instrumental viene siendo sinónimo de competencia (Godino, 2002:1). Para Godino y Barallobres (2001), son nociones complementarias y son dialécticas.

La hipótesis de trabajo en esta investigación es que si se comprende un objeto matemático -la componente conocimiento de la competencia- no es suficiente para que el sujeto sea competente para realizar una tarea, por ejemplo resolver un problema matemático de optimización.

2.4 Elementos metodológicos

La *investigación cualitativa* es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos.

La investigación cualitativa tiene algunas características distintivas: su atención al contexto, la experiencia humana tiene lugar en contextos particulares, de tal manera que los fenómenos y acontecimientos no pueden ser comprendidos si se separan del mismo. El contexto de investigación es natural y no es construido ni modificado. La persona que investiga juega un rol muy importante ya que es un instrumento de la investigación. A través de la interacción con la realidad recoge datos sobre ésta.

El foco de la atención de este tipo de investigaciones está puesto en las descripciones de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos observables, incorporando la voz de los participantes, sus actitudes, creencia, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos. (Sandín, 2003:121-125).

El proceso de *investigación cualitativa* según Rodríguez, Gil, y García (1999: 61-77), está conformada por cuatro fases fundamentales: preparatoria, trabajo de campo, analítica e informativa. Estas fases, pueden traslaparse e ir a ellas en varias ocasiones.

La etapa preparatoria su vez está formada por dos etapas: una etapa reflexiva y otra de diseño de la investigación. En la etapa reflexiva, el investigador de acuerdo a su experiencia anterior, identifica un problema que es de interés para su investigación; se plantea preguntas de investigación; revisa la información posible sobre el mismo, trata de establecer el estado de la cuestión. Parte final de esta etapa reflexiva es la adopción o construcción de un marco teórico en el que desarrollará el estudio y que va a utilizar como referencia para todo el proceso. La etapa de diseño se organiza intentando responder a cuestionamientos tales como: ¿Cuál es el diseño más adecuado para estudiar el problema? ¿Qué o quién será estudiado? ¿Cómo? ¿Con que técnicas se recogerán datos? ¿Cómo se analizarán los datos? Para ello puede darse una inmersión inicial en el campo o escenario del estudio. Para Hernández, Fernández-Collado y Baptista, (2006:686) el diseño en una investigación cualitativa significa la forma de abordaje general que se utilizará en el proceso de investigación. Es el plan o estrategia para alcanzar los objetivos planteados para resolver el problema.

La segunda fase, se conforma por dos etapas: una etapa de acceso al campo y otra de recogida de datos. Al accesar al campo el investigador se debe sensibilizar sobre el mismo, mimetizarse, observar los eventos que ocurren en el ambiente, algunos hacen estudios piloto o exploratorios, que le permitan seleccionar de mejor manera los sujetos que pertenecen al escenario y serán sus informantes y establecer vínculos con estos participantes. Es a estos sujetos a los que habrá que entrevistar, encuestar o aplicarles cualesquier otra técnica para la recogida de datos. Es factible que en esta etapa, se regrese una y otra vez a recoger datos debido a diversas razones, tales como aclaraciones, buscar nuevos informantes, etc.

Una tercera fase, analítica, si bien situada después del trabajo de campo, en numerosas ocasiones existe traslape con la anterior. El análisis de datos cualitativos puede ser considerado como un proceso que en su forma general está constituido por tareas u operaciones comunes a la mayoría de tratamiento de datos cualitativos: organización y reducción de datos, disposición y transformación de datos y obtención de resultados y verificación de conclusiones. En general los datos pueden ser muy variados, fotos, videos, expresiones verbales, textos escritos, gestos, etc. Con frecuencia el investigador cualitativo construye su propio análisis.

La cuarta y última fase, informativa, termina con la presentación y difusión de los resultados. Es deber el de compartir la comprensión adquirida del problema con el resto de la comunidad. El informe no es de un tipo único depende de la audiencia, los intereses y el contexto. La mejor forma de divulgar los hallazgos es la de publicarlas en revistas especializadas pasando por las tesis de grado o posgrado. Se acepta que una investigación ha terminado cuando se presenta un informe final sobre la misma y en términos generales debe de contener: planteamiento del problema y revisión de literatura; metodología que incluye el diseño, el acceso al campo, selección de informantes, estrategia de recogida de datos; registro y análisis de datos;

resultados y conclusiones; referencias bibliográficas y posiblemente datos originales en algún anexo.

Los *estudios exploratorios* según Hernández, Fernández-Collado y Baptista, (2006:100) sirven para familiarizarnos con situaciones relativamente desconocidas, para obtener información más completa respecto a un contexto particular. En sí mismo no constituyen un fin, sino que ayudan a identificar contextos y situaciones de estudio. Son estudios flexibles y más dispersos que los otros tipos.

La observación, en un sentido amplio abarca todos los procedimientos utilizados en las ciencias para examinar las fuentes donde se encuentran los hechos y datos objetos de estudio y la obtención y registro de datos (Sierra, R., 1994:365). La observación se puede clasificar según el procedimiento en: directa, de forma simple o experimental; documental; y mediante encuesta, cuestionario y entrevista.

La *etnografía* se entiende como el método de investigación por el que se aprende el modo de vida de una unidad social concreta (Rodríguez, Gil, y García, 1999:44). Una familia, una escuela, una clase, un claustro de profesores con ejemplos de unidades sociales educativas que pueden describirse etnográficamente. La obligación más importante del etnógrafo es permanecer donde la acción tiene lugar, sin importar los instrumentos, aparatos de registro o técnicas utilizadas. La técnica de observación es la simple a través de sus sentidos o a través de artefactos grabadores, en cuyo caso deberán interferir el mínimo posible.

Con el fin de alcanzar los objetivos planteados en esta investigación, se decide organizar el trabajo, primeramente planeando una etapa para explorar el contexto institucional en donde en una segunda etapa posterior se desarrollará el estudio central sobre resolución de problemas por parte de estudiantes de esa institución.

2.4.1 Diseño de la primera fase

En esta etapa exploratoria se pretende obtener información general sobre los profesores, sobre la manera que planean su clase, los libros de texto en los que se apoyan, la concepción y creencia que tienen sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Se decide elaborar un cuestionario como una técnica para recabar la información antes mencionada. Se aplicará varios de los profesores de la materia. Ya contestado, se pretende concertar una entrevista aclaratoria con cada uno de los profesores que lo contesten.

El *escenario o campo* es el contexto físico y social en el que tienen lugar los fenómenos objetos de la investigación (Rodríguez, Gil y García, 1998:103). En la investigación de corte cualitativo es preciso que el investigador se integre en la situación estudiada permaneciendo de forma prolongada en el campo con cada sujeto o grupo, entrando y saliendo cada vez que se requiera más información.

El escenario ideal para la investigación es aquel en cual el observador obtiene fácil acceso, puede establecer una buena relación con los informantes y recoge con cierta facilidad los datos necesarios.

El método a utilizar en la toma de datos en esta fase de la investigación, será primeramente elaborar el cuestionario arriba mencionado, posteriormente entregarlo a varios profesores pertenecientes a una institución de educación superior para ser respondido. Después de recoger y revisar las respuestas, y de ser necesario programar una entrevista de tipo aclaratorio sobre el mismo con cada profesor.

La actividad de planeación de una clase por parte del profesor se encuentra localizada entre los significados institucionales de referencia y los significados institucionales implementados.

Los significados de referencia cuya definición es compartida por diversos documentos tales como: carta descriptiva de la materia, libro de texto, plan de estudios, etc. Y sujetos tales como el profesor de la materia, el coordinador de la misma, del área, autoridades, etc.

Los significados institucionales implementados, corresponde a la práctica efectivamente desarrollada por el profesor en clase.

De acuerdo con la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1991), el objeto matemático a enseñar en este caso -optimización- sufre cambios desde su referencia hasta su aparición en escena en clase, pasando por las creencias, concepciones y conocimientos del profesor (sus significados personales). El cuestionario pretende arrojar luz sobre estos significados del docente en la etapa de planeación.

La selección de *sujetos informantes* (Rodríguez, Gil, y García, 1999:135) en investigación cualitativa, es deliberada e intencional. La selección de informantes es una tarea continua en las que se ponen en juego diversas estrategias conducentes a determinar cuáles son las personas que pueden aportar información más relevante al propósito de la investigación. No se seleccionan al azar para completar una muestra, sino que se ajustan a criterios o atributos establecidos por el investigador. Esto a diferencia del enfoque cuantitativo donde todos los miembros de la población tienen el mismo valor como informantes.

Un *cuestionario* es una forma de encuesta (Hernández, Fernández-Collado, y Baptista, 2006) (Rodríguez, Gil, y García, 1999), con la característica de que no exige la presencia del encuestador al momento de estarse contestando. La función del encuestador es escribir algunas preguntas sobre lo que quiere conocer, acercarlas a aquellos sujetos seleccionados para dar información sobre la problemática investigada, que lo contesten y lo regresen.

Al diseñar un cuestionario se debe tomar en cuenta tanto el contenido como el formato. En cuanto al formato, se debe considerar el titulo, instrucciones, tipo de preguntas, opciones de respuestas, etc. Este tipo de instrumentos en términos generales es para aplicarse a relativamente muchos sujetos y que les exija relativamente poco tiempo el contestarlo. Por lo que en estos instrumentos de recogida de datos no se puede profundizar en gran medida.

De acuerdo con su forma las preguntas pueden clasificarse en (Hernández, Fernández-Collado, y Baptista, 2006) (Rodríguez, Gil, y García, 1999): abiertas, se formulan para ser respondidas en el propio lenguaje del encuestado y sin un límite preciso de contestación; cerradas, ya sea dicotómicas, tipo si-no, o de opción múltiple, donde se le presenta al encuestado un abanico de posibilidades de las que escoger la respuesta.

El propósito del cuestionario será conocer sobre la planeación de la clase, libros utilizados y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática por profesores de Cálculo Diferencial para su clase de optimización. Constará de seis partes:

A: Datos del profesor: preguntas que indagan sobre la escolaridad y experiencia docente.

B: Planeación de la clase: cuestionamientos sobre la planeación semestral, temática y diaria de la clase, y sobre los elementos en los que se basan sus decisiones.

C: El contenido de la materia: Se pretende conocer la concepción del docente sobre el contenido, para de allí elaborar posibles explicaciones en sus decisiones de planeación.

D: El libro de texto: los cuestionamientos buscan encontrar el motivo de la selección del autor tanto de temas como problemas o ejercicios.

E y F: La enseñanza y aprendizaje de la matemática: El objetivo de las preguntas es hurgar en los significados del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje (creencias y concepciones).

Habrá preguntas de opción SI o No, solicitando siempre que toda respuesta sea argumentada. Otras, son de respuesta abierta.

La *entrevista* es una técnica mediante la cual una persona (el entrevistador) solicita información de otra o de un grupo (entrevistados) sobre un problema determinado y una interacción verbal (Rodríguez, Gil, y García, 1999:167).

Las entrevistas se dividen en estructuradas, semiestructuradas o no estructuradas (Hernández, Fernández-Collado, y Baptista, 2006:597). Las primeras, el entrevistador lo hace en base a una serie de preguntas bien definidas, en esto se parece a un cuestionario. Las semiestructuradas se basan en una guía de preguntas pero el entrevistador tiene libertad de introducir nuevas preguntas para clarificar el tema. Las abiertas, las cuales se fundamentan en una guía general y existe plena libertad de manejo por parte del entrevistador.

La utilización de grabadora en la entrevista para registrar con fidelidad las interacciones verbales que se producen entre las partes. Permiten prestar más atención a lo que opina el entrevistado. La grabadora no debe ser un elemento de distracción de la entrevista y debe ser previa autorización del interrogado (Rodríguez, Gil, y García, 1999:182).

2.4.2 Diseño de la segunda fase

En la etapa posterior a la exploratoria, se pretende obtener información sobre el desempeño de estudiantes en el proceso de resolución de problemas de optimización con la finalidad de alcanzar los objetivos planteados en la investigación.

Se seleccionarán problemas propuestos al final de la sección correspondiente del tema de máximos y mínimos u optimización de los libros de texto y de consulta utilizados por profesores de la Facultad de Ingeniería (FIM) para impartir el curso de Cálculo Diferencial. Los problemas seleccionados deben de formar parte de las actividades rutinarias de la práctica docente en la Facultad, al igual que otros más. No se considerarán problemas muy sofisticados o no rutinarios para que estos estuvieran en la zona próxima de los estudiantes. Pudiera considerarse que los problemas seleccionados sean muy elementales o sencillos, pero cabe el riesgo de que los resolutores queden mudos o con la hoja en blanco ante el intento de resolver el problema.

Los problemas a seleccionar serán del tipo escolar de contexto evocado por ser los más comunes en la práctica docente de la FIM.

Se identificarán estudiantes considerados, por sus profesores, como exitosos en su curso de Cálculo Diferencial que se imparte en primer semestre para todas las ingenierías en la FIM y en particular en el tema de optimización. Además estudiantes de semestre más avanzado para comparar posibles modificaciones en su gestión metacognitiva.

La selección de *sujetos informantes* (Rodríguez, Gil, y García, 1999:135) en investigación cualitativa, es deliberada e intencional. La selección de informantes es una tarea continua en las que se ponen en juego diversas estrategias conducentes a determinar cuáles son las personas que pueden aportar información más relevante al propósito de la investigación.

No se seleccionan al azar sino para completar una muestra, sino que se ajustan a criterios o atributos establecidos por el investigador. Esto a diferencia del enfoque cuantitativo donde todos los miembros de la población tienen el mismo valor como informantes.

Una técnica para obtener información sobre la actividad metacognitiva de los sujetos al intentar resolver un problema, es la del *pensamiento en voz alta* (Baker,1982) la cual consiste en hacer que el sujeto describa su pensamiento mientras está pensando, pidiéndole que hable en voz alta mientras está intentando resolver un determinado problema. El propósito que se busca al utilizar esta técnica es establecer el grado de conciencia que la persona tiene de su propio pensamiento y de sus estrategias que utiliza para planificar, supervisar y evaluar su ejecución, mediante las expresiones verbales que emite durante la ejecución de la tarea.

Se aplicará a cada estudiante un problema para su resolución en forma individual y aislada, solicitándoles que anoten en papel sus respuestas, sin borrar sus posibles errores. Además se les pedirá que externen en voz alta sus pensamientos en forma simultánea al proceso de resolución del problema. Las voces será grabadas y transcritas.

Al final del momento de resolución, el investigador interactuará con el estudiante de manera personal sobre las dificultades y tensiones tenidas.

De tal manera que para cada aplicación de un cierto problema a un estudiante, se obtendrá para su posterior análisis dos documentos: a) las hojas de respuesta al problema escritas por el estudiante-resolutor, y b) las hojas resultado de la transcripción de las grabaciones de los pensamientos en voz alta.

El proceso para analizar la actividad resolutora de problemas de los estudiantes consistirá en:

a) Estudiar la producción escrita de cada estudiante resultado del intento de resolver el problema que se le presente. El análisis de estos productos permitirá identificar los objetos y procesos matemáticos utilizados en la resolución.

b) El análisis de la transcripción de lo externado oralmente al estar resolviendo el problema, permitirá identificar los procesos de regulación metacognitiva.

CAPÍTULO 3.
PRIMERA FASE: ETAPA EXPLORATORIA

Este capítulo tres inicia con la exposición del método seguido para desarrollar el presente estudio.

Primordialmente, se presentan los resultados obtenidos sobre el estudio exploratorio llevado a cabo en el contexto en donde en una etapa posterior se recogerán datos sobre la resolución de problemas matemáticos, en particular de optimización pertenecientes al Cálculo Diferencial.

Se describe el acceso al escenario o campo de estudio, después la selección de profesores de la materia de interés para aplicarles un cuestionario sobre sus actividades de planeación docente. A partir de lo encontrado en las respuestas al cuestionario, se decidió hacer un estudio epistémico sobre el libro de texto y una observación no participante en el aula donde se impartió la clase de optimización. Finalmente, un análisis comparativo sobre lo hallado y algunas conclusiones y conjeturas.

3.1 Método de la investigación.

Es un estudio de corte cualitativo, tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández-Collado, y Baptista, 2006; Rodríguez, Gil y García, 1998; Sandín, 2003; y Sierra, R., 1994), aplicando técnicas de etnografía, la formulación de cuestionario, guión de entrevista, de grabación de voz alta, y el análisis de datos se realizó de acuerdo al Enfoque Ontosemiotico EOS (Font, V. y Godino, J.D. 2006; Font, V., Planas, N., y Godino, J., 2010; Godino, J.D., 2003; Godino, J.D, Contreras, A. y Font, V., 2006).

En lo que se refiere a la metodología es la *cualitativa* (Ver sección 2.4) ya que el propósito de este estudio es conocer sobre el desempeño de estudiantes en el proceso de resolución de problemas, en sus procesos metacognitivos, en sus significados personales e institucionales.

Se siguieron las cuatro etapas para el proceso de de investigación cualitativa descritas en la sección 2.4:

a) Primera fase o preparatoria: Inicialmente, en la fase reflexiva, se identificó el problema a investigar, de acuerdo a la experiencia del que esto escribe y del director de tesis. Se elaboraron las correspondientes preguntas y objetivos de investigación. Finalmente se adoptaron los cuatro elementos teóricos para apoyar el estudio: El enfoque Ontosemiótico (EOS), Resolución de Problemas, La Metacognición y La Competencia.

Dentro de esta misma primera etapa, en la fase de diseño o bosquejo de la investigación a desarrollar y considerando los objetivos, se optó por un *diseño no experimental, seccional descriptivo* ya que se pretendió hacer una toma observación de los objetos de investigación tal y como existen en la realidad, sin intervenir o manipularlos. Se pretende describir lo que sucede en la problemática expuesta.

b) Segunda fase: En el acceso al escenario (FIM), se llevó a cabo un estudio *exploratorio* sobre la institución donde se llevaron a cabo la toma de datos posteriores. Para el acercamiento se diseñó ex profeso y aplicó un *cuestionario* a profesores de matemáticas de la FIMcon la finalidad de conocer sobre sus concepciones, creencias y métodos de enseñanza y apoyos bibliográficos. Sólo cuatro profesores regresaron el cuestionario respondido y uno permitió una *entrevista* aclaratoria. A raíz de esta entrevista, se le solicitó autorización al mismo docente para hacer una *observación no participante* en su clase y *videograbar* la misma. Se llevó a cabo esta actividad y se transcribió el video tomado.

Posteriormente se regresó al mismo escenario, la FIM, para aplicar a los *sujetos informantes* estudiantes elegidos un *instrumento* en este caso problemas de optimización, escogidos ex profeso para la toma de información. Se les pidió a los resolutores que además de escribir en papel sus respuestas sin borrar o tachar sus posibles errores, *expresar en voz alta sus pensamientos* (Ver sección 2.4), para identificar su gestión metacognitiva. Estas expresiones en voz alta fueron *grabadas* y transcritas. La aplicación fue en forma individual y aislada.

c) Tercera fase o fase analítica. El tratamiento de los datos recabados tanto en la etapa exploratoria: respuestas al cuestionario, análisis del libro de texto y videograbaciones; también en la etapa posterior: respuestas escritas a los problemas, fueron organizados primordialmente siguiendo el criterio de la clasificación de Objetos Matemáticos Primarios o Básicos del EOS: Lenguaje, Situaciones, Conceptos, Procedimientos, Proposiciones y Argumentos. Así como donde procedía, algunos procesos matemáticos también propuestos por el EOS: Comunicación, Materialización, Significación, Argumentación, etc.

En las transcripciones de los pensamientos, se utilizaron para ordenar esa información los elementos de gestión metacognitiva: Comprensión, Planeación, Monitoreo, Regulación y Verificación.

d) Cuarta fase o fase informativa. Esta última fase, corresponde el informe o reporte escrito de la investigación, en este caso la presente tesis doctoral, artículos publicados y presentaciones en congresos.

3.2 Acceso al escenario

De acuerdo con a lo expuesto en la sección 2.4.1, el escenario es el contexto físico y social en el que tienen lugar los objetos a investigar.

Para esta investigación, el escenario más apropiado resultó ser la Facultad de Ingeniería, dependiente de la Universidad Autónoma de Baja California, en la ciudad de Mexicali (FIM). Se solicitó autorización al Coordinador del Área - el portero- para entrevistar mediante un cuestionario a algunos profesores y además un listado de ellos.

3.2.1 Selección de profesores informantes

Los sujetos informantes pertenecientes al contexto educativo arriba definido FIM, se eligen porque cumplen ciertos requisitos que no cumplen otros miembros.

En este primer acceso al campus de la Facultad de Ingeniería (FIM), la intención fue identificar y seleccionar de entre los 63 profesores de matemáticas, más en específico de los 30 de cálculo y 12 de cálculo diferencial, seis (50 %) que fueran típicos representantes de esos profesores. Con antigüedad o experiencia mayor a10 años, de profesión ingenieros, con maestría en algún tema técnico. Se seleccionaron seis profesores de cálculo con estas características.

3.3 Recogida de datos

En esta sección se presenta la información recogida de los sujetos seleccionados- profesores de cálculo- y se hace una presentación sobre lo encontrado. Primero se describe el instrumento, en este caso un cuestionario para la toma de datos.

3.3.1 El cuestionario

El propósito del cuestionario que se presenta en el *Anexo 1*, denominado CUESTIONARIO SOBRE LA PLANEACIÓN DE LA ACTIVIDAD DOCENTE fue conocer sobre la planeación de la clase, libros utilizados y concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática por profesores de Cálculo Diferencial para su clase de optimización. Consta de seis partes y con 50 preguntas:

A: Datos del profesor(a), reactivos del uno al seis: preguntas que indagan sobre la escolaridad y experiencia docente.

B: Planeación de la clase, reactivos del siete al 21: a su vez se hacen cuestionamientos sobre la planeación semestral, temática y diaria de la clase. Inquiriendo sobre los elementos en los que se basa para su preparación de clase. Existen preguntas de opción SI o No solicitando el que se argumente sobre la selección hecha. Otras, son de respuesta abierta y con mayor razón se pide el argumentar. Esta información particularmente, deberá ser contrastada con lo que efectivamente se implementó para identificar los conflictos entre lo planeado y lo implementado

C: El contenido de matemáticas I (Cálculo Diferencial), reactivos del 22 al 23: Se busca la concepción del docente sobre el contenido de la materia que imparte para de allí elaborar posibles explicaciones en sus decisiones de planeación.

D) El libro de texto, reactivos del 24 al 37: las diversas cuestiones buscan encontrar el motivo de la selección del libro de texto y el por qué. Ciertas preguntas están planteadas en términos de la clasificación de Objeto Matemático de Godino (2003): Lenguaje, problema, conceptos, procedimientos y argumentos. Esto facilitó el análisis comparativo con el estudio del texto seleccionado por el profesor.

E: La enseñanza de la matemática, reactivos del 38 al 39: El objetivo de las preguntas es hurgar en los significados del profesor sobre la enseñanza (creencias y concepciones) para también a su vez sea una posible fuente de explicaciones para la práctica del docente.

F: Cómo se aprende matemáticas, reactivos del 40 al 50: Los cuestionamientos van dirigidos a conocer la concepción que el profesor tiene sobre lo que es aprender matemáticas. Esto debe influir también en las escogencias para su práctica en clase. Los últimos dos reactivos 49 y 50 se refieren a la concepción del profesor sobre el conocimiento matemático y que se supone de influir en sus decisiones de cómo enseñar y como aprenden los estudiantes.

3.3.2 Respuestas al cuestionario

El cuestionario se entregó a seis profesores de Cálculo Diferencial adscritos a la FIM de la UABC, de los cuales sólo cuatro los regresaron debidamente contestados. Estos profesores los llamaremos a partir de aquí VH, PF, MA y MO. Se menciona que de estos cuatro casos, sólo uno, VH, concedió una entrevista posterior aclaratoria (*Anexo 2*) sobre sus respuestas, además permitió el acceso al aula donde impartiría el tema de optimización. A continuación se presentan los cuatro casos.

El *profesor PF* tiene 30 años de experiencia docente y ha impartido Matemáticas I (Cálculo Diferencial) durante 10 semestres. Cuenta una licenciatura en ingeniería y una maestría en ingeniería. Es profesor de tiempo completo en la facultad de ingeniería. Planea su clase semestralmente basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto de Stewart y en preparaciones de clases anteriores, primordialmente. En menor medida, aportes de colegas, academia y coordinador. Usa la computadora e Internet para planear su clase y darle seguimiento pero no como un medio de enseñanza. La creencia que tiene el profesor es que el decide qué y cómo impartirá su clase. La distribución que planea para su clase es: 0% para revisión de la tarea (dice hacerlo antes o después de clase), repaso de temas 5%, exposición del tema 25 %, resolución de ejercicios 65%. Temáticamente, planea su clase basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto y en preparaciones de clases anteriores.

El *profesor MA* tiene 25 años de experiencia docente y ha impartido Matemáticas I (Cálculo Diferencial) durante 30 semestres. Cuenta una licenciatura en ingeniería. Es profesor de tiempo parcial en la facultad de ingeniería. Planea su clase semestralmente basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto de Leithold y en preparaciones de clases anteriores. Usa la computadora e Internet para planear su clase y darle seguimiento. La calculadora graficadora para algunas experiencias docentes. La percepción que tiene el profesor es que él decide qué y cómo impartirá su clase. La distribución que planea para su clase es: 0% para revisión de la tarea, repaso de temas 10%, exposición del tema 40 %, resolución de ejercicios 40% y cuestionamientos a los estudiantes, 10 %. Temáticamente, planea su clase basándose en el libro de texto.

La *profesora MO* tiene 16 años de experiencia docente y ha impartido Matemáticas I (Cálculo Diferencial) durante 4 semestres. Cuenta una licenciatura en matemáticas aplicadas y una maestría en Enseñanza de la Matemáticas. Es profesora de tiempo parcial en la facultad de ingeniería. Planea su clase semestralmente basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto de Stewart y en otros textos, en preparaciones de clases anteriores y en el coordinador. Usa la computadora e Internet para planear su clase y darle seguimiento. Usa tecnología tipo calculadora graficadora y pizarrón electrónico como un medio de enseñanza.

La percepción que tiene la profesora es que decide qué y cómo impartirá su clase pero modulada por la carta descriptiva. Temáticamente, planea su clase basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto y en preparaciones de clases anteriores.

El *profesor VH* tiene 34 años de experiencia docente y ha impartido Matemáticas I (Cálculo Diferencial) durante 30 semestres. Cuenta una licenciatura en ingeniería y una maestría en ingeniería. Es profesor de tiempo completo en la facultad de ingeniería. Planea su clase semestralmente basándose en la carta descriptiva o programa de la materia, en el libro de texto de Leithold y en preparaciones de clases anteriores, primordialmente. En menor medida, aportes de colegas, academia y coordinador. Usa la computadora e Internet para planear su clase y darle seguimiento pero no como un medio de enseñanza. La percepción que tiene el profesor es que finalmente él decide qué y cómo impartirá su clase. La distribución que planea para su clase es: 0% para revisión de la tarea (dice hacerlo antes o después de clase), repaso de temas 5%, exposición del tema 25 %, resolución de ejercicios 65%.

3.3.3 Entrevista aclaratoria

A los cuatro profesores que entregaron contestado el cuestionario se les solicitó una entrevista aclaratoria sobre las respuestas vertidas. Sólo el profesor VH aceptó y esta se llevó a cabo en el cubículo del investigador, la cual fue grabada y transcrita.

A continuación se transcriben algunas preguntas y respuestas que se consideran importantes obtenidas en esta entrevista aclaratoria, la cual se encuentra completa en el ANEXO 3. Las respuestas al cuestionario fueron organizadas en términos de los seis tipos de objetos matemáticos propuestos por Godino (2003): Situaciones-problémicas, lenguaje, conceptos, argumentos, propiedades y procedimientos así como algunas concepciones y creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Conceptos:

Pregunta: ¿le dedicas tiempo al estudio de definiciones y conceptos?

Respuesta: si claro, lo primero que se parte, vamos a definir que es un máximo relativo, que es un mínimo relativo… las condiciones que se dan para que se considere relativo… porque hay otros que serían los absolutos ¿no? entonces hay unas definiciones que me baso en el Leithold que marca claramente un concepto del otro…si..

P: ¿Cuándo presentas un concepto… una definición… tocas algún tema o problema de la vida real que induzca a la entrada de ese tema?… ¿de esa definición?... o…

R: no… normalmente me voy guiando por… el material que he seleccionado… y ya por la experiencia, improviso respecto a ejemplos que se me vienen a la mente, y obviamente normalmente trato de que sean ejemplos de la vida real…

Argumentos, Propiedades:

P: Respecto al manejo de de teoremas y argumentos, ¿acostumbra a demostrar los teoremas propuestos por el Leithold?

R: No, las demostraciones las evito porque el trabajo está orientado hacia lo que es el trabajo de ingeniería…entonces lo que más me interesa a mí, yo como soy ingeniero es el que los muchachos entiendan el concepto y sobre todo entiendan como lo van a aplicar en problemas de la vida real…

Procedimientos:

P: para los procedimientos, por ejemplo para resolver máximos y mínimos, ¿cómo los planeas? Los procedimientos…

R: bueno, trato de… en primera instancia explicarles el procedimiento que… el libro que uso como referencia plantea… y en ocasiones… yo establezco un procedimiento parecido, pero a veces suele ser más sencillo para ellos de seguirlo… y yo les pregunto entonces que seleccionen el que consideren más fácil para ellos… les doy… pues dos

P: respecto a las estrategias para resolver problemas, haces, ¿las haces explicitas de alguna manera o tu dejas que ellos mismos las encuentren, las busquen, o propones lo que el libro trae?

R: eh, siempre en primera instancia me baso en el libro… pero después si encuentro que yo puedo presentarles un camino a seguir que sea más sencillo para ellos, lo hago ¿no? y… si o sea lo importante es la reacción de ellos ante un problema ¿no?, lo que se les haga más sencillo y que se les pueda quedar… que les quede claro, que le entiendan, ese es el camino que seguimos…

P: ok… eh… para las funciones de los procedimientos máximos y mínimos… o se pueden representar gráficamente, numéricamente, analíticamente, o algún concepto, máximos y mínimos por ejemplo… ¿acostumbras a usar varias representaciones?

R: si… lo podemos ver de manera grafica, de manera analítica y en algunos casos de manera numérica, pero como ese quita mucho tiempo ese es lo que menos utilizo lo haría nomás para que se dieran cuenta de que se pueden utilizar esos métodos, para que vean el problema con todas sus posibilidades, pero lo que me quita mucho tiempo… lo… lo omito…

Situaciones-problémicas:

P: ¿Qué libro de texto utiliza para su clase?

R: Cálculo de Leithold.

P: ¿Por qué seleccionó el libro de Leithold respecto a los otros textos?

R: Por qué tiene una muy buena variedad de problemas… y están seleccionados de tal manera que van aumentando el grado de dificultad de los problemas… lo que es bueno para el estudiante

P: ¿Cómo selecciona del texto los ejemplos de problemas a usar en clase?

R: Pues los que parezcan más accesibles al estudiante, que los puedan entender, que los puedan visualizar, para que más fácil se le quede grabado…la aplicación del conocimiento.

P: Los problemas, ya sea ilustrativos o comunes que presenta el libro, ¿Son los adecuados?

R: Si, yo creo que es una de las fortalezas del libro ¿no? los problemas propuestos que son para que el alumno los desarrolle… son una muy buena cantidad, y diversos… es lo más importante del libro…

P: ¿Los reelabora para su presentación? ¿Los presenta tal cuál?

R: Los presento tal cual…

P: ¿y eso por qué?

R: porque son problemas que están diseñados… este… por gente muy preparada… me parecen adecuados no veo para que modificarlos…

P: ok… o sea que consideras pues que alguien ya se tomó la molestia durante mucho tiempo de buscar las bondades de este ejercicio y consideras que es lo correcto pues… que difícilmente lo puedes mejorar…

R: así es..

P: Sobre los problemas de optimización que presenta el texto, ¿Es claro su enunciado?

R: si es claro…

P: ¿El nivel de complejidad es correspondiente a lo presentado en la teoría?

R: si… si están, si está bien hechos respecto al material presentado en teoría.

P: ya sea ilustrativos… o comunes que presente el libro... ¿Son los adecuados? ¿Para la teoría el concepto?

R: si, yo creo que es una de las fortalezas del libro ¿no? los problemas propuestos que son para que el alumno los desarrolle… son una muy buena cantidad, y diversos… es lo más importante del libro…

Lenguaje:

P: respecto a los problemas en general o problemas de máximos y mínimos de optimización, los problemas que tienen enunciados, que tienen un lenguaje… ¿haces algún trabajo especial para interpretar… el enunciado de esos problemas?

R: no, no, simplemente cuando llegamos a esos temas, los leo… y si, los alumnos batallan mucho para la interpretación de esos problemas… entonces trato de irles enseñando como saber traducir… ese lenguaje al lenguaje matemático…

Concepciones y creencias:

P. ¿Para Usted qué son las matemáticas?

R: Son herramientas que se utilizan para ayudar a la solución de problemas de la vida real….

P: ¿Cuál opción podríamos utilizar? De acuerdo con tu forma de pensar…

R: pues… se inventa… yo creo que la matemática es un concepto mental… que el hombre crea para poder avanzar cuando la solución de problemas de la vida real no encuentra el camino para poder avanzar en esa solución, es que tiene que hacer uso de un ejercicio mental… genera un modelo matemático… con la intención de poderlo aplicar en la solución de un problema en el cual está imposibilitado para resolverlo… lo cual indica que las matemáticas se van inventando a medida que las necesidades se van… las necesidades, la solución de problemas de la vida real lo van requiriendo. Hay otras ocasiones en que pueden inventarse matemáticas no para resolver un problema sino porque es un simple ejercicio mental que con lógica que tal vez en su momento no tiene una aplicación pero posteriormente tal vez se le puede encontrar…

P: ¿Cómo considera que los estudiantes aprenden matemáticas?

R: enseñándolos a razonar… y haciendo muchos ejercicios…

P: ¿Qué significa para Usted que un estudiante sepa matemáticas?

R: que sepa en primera instancia interpretar el problema… detectar cual, eh… concepto debe de aplicar… y seguir el procedimiento de manera adecuada

P: ¿Cuál es la manera en que los estudiantes aprenden a optimizar? es decir… para encontrar… resolver problemas de optimización…

R: bueno primero… hay que asegurarse que entiendan el concepto… que… sepan identificar cual de los procedimientos van a seguir… que sepan seguir el procedimiento de manera adecuada… sobre todo que sepan cómo se aplica en problemas de la vida real

P: ¿Qué significa para Usted que un estudiante comprenda un concepto?

R: que me lo pueda explicar y que me diga para que se utiliza…

P: según… según tu criterio… ¿Cuál es la relación o las diferencias o las similitudes entre la idea de comprender algo… y ser competente en algo?..

R: bueno es que el comprender implica el llegar hasta un nivel de habilidad… eh habilidad mental y el ser competente implica no solamente comprender sino tener la experiencia de haber ejercitado varias situaciones diferentes, donde aplique el concepto pero de diversas maneras, entonces el ser competente implica que primero tuvo que haber sido… comprendido los conceptos.

P: bien… respecto al contenido del curso de matemáticas I te parece que, en general que los temas son los adecuados, que si falta algo, que si sobra algo, la extensión, la profundidad, la forma o presentación de los temas… ¿considera que es el adecuado?

R: pues en términos generales está bien, lo único que considero es que debería estar basado en un texto… cualquiera que él fuera… porque eso sirve de guía tanto al maestro como para los alumnos…

P: o sea, el contenido de la materia, debiera de estar, algo así como seguir el contenido de un libro de texto…

R: no necesariamente seguir pero sino estar plasmado en un libro, para que sea la referencia del maestro y de los alumnos… del contenido del libro se pueden seleccionar los temas que se consideren apropiados… que normalmente los libros incluyen los mismos temas… a veces los mueven de lugar… entonces eh… el… al final de cuentas los temas se cubren ¿no? no creo que sea tan grave eso… lo importante es agarrar un libro… un libro que se considere adecuado, con muchos ejercicios, con variedad… y pero que sobre todo sea una guía para el maestro y para los alumnos… creo que eso es muy importante…

3.3.4 Los libros de texto

A partir de la entrevista aclaratoria con el profesor VH en lo referente a sus comentarios sobre los libros de texto –en su caso el de Leithold- se decide hacer una revisión de tipo epistémica sobre el mismo para conocer aun más sobre la posible influencia del texto sobre la actividad docente del mencionado profesor.

Se presenta la información recabada del texto, primero en temas generales y después organizada con el criterio de los objetos matemáticos primarios propuestos por el EOS.

a) Descripción general del texto: El libro de texto es, *El Cálculo* de Louis Leithold, séptima edición, 1998, conocido por EC7. Se revisó su contenido genérico, su prólogo, la secuencia de temas y su discurso explicativo. Se analizaron las secciones correspondientes a *optimización* mediante la tipología de la teoría onto-semiótica de los objetos matemáticos.

El libro consta por orden de presentación de: carátula, contenido, el prólogo, aspectos históricos del cálculo, preparación para el estudio del cálculo, 14 capítulos, 11 anexos, 12 secciones suplementarias, dos tablas, cinco formularios, el alfabeto griego y respuestas a problemas impares.

En el prólogo describe las últimas modificaciones hechas al texto particularmente el uso de calculadoras, la inclusión del tema de modelos matemáticos, ejercicios así como aspectos pedagógicos.

En aspectos históricos hace una breve semblanza de media página del desarrollo del cálculo. La sección de preparación, está dirigida a los estudiantes del cálculo y les hace una invitación a su estudio.

Los capítulos del uno al tres se revisan dentro del curso denominado Matemáticas I, del cuatro al ocho en Matemáticas II y del nueve al 14 en Matemáticas III.

Por el tema de nuestro interés –Optimización en una variable-, solo se desagregarán los contenidos de los primeros tres capítulos.

Capítulo 1. Funciones, límites y continuidad

1.1 Funciones y sus gráficas

1.2 Operaciones con funciones y tipos de funciones

1.3 Funciones como modelos matemáticos

1.4 Introducción gráfica los límites de funciones

1.5 Definición de límite de una función y teoremas de límites

1.6 Límites laterales

1.7 Límites infinitos

1.8 Continuidad de una función en un número

1.9 Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo

1.10 Continuidad de las funciones trigonométricas y teorema de estricción

Capítulo 2. Derivada y diferenciación

2.1 Recta tangente y derivada

2.2 Diferenciabilidad y continuidad

2.3 Derivada numérica

2.4 Teoremas sobre diferenciación de funciones algebraicas y derivadas de orden superior

2.5 Movimiento rectilíneo

2.6 Derivada como tasa de variación

2.7 Derivadas de las funciones trigonométricas

2.8 Derivada de una función compuesta y regla de la cadena

2.9 Derivada de la función potencia para exponentes racionales y diferenciación implícita

2.10 Tasas de variación relacionadas

Capítulo 3. Comportamiento de las funciones y sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

3.1 Valores máximos y mínimos de funciones

3.2 Aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado

3.3 Teorema de Rolle y teorema del valor medio

3.4 Funciones crecientes y decrecientes, y criterio de la primera derivada

3.5 Concavidad, puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada

3.6 Trazo de las graficas de funciones y de sus derivadas

3.7 Límites al infinito

3.8 Resumen para el trazo de las gráficas de funciones

3.9 Aplicaciones adicionales sobre extremos absolutos

3.10 Aproximaciones mediante el método de Newton, de la recta tangente y de diferenciales

Cada capítulo inicia con una página denominada *sección preliminar* que incluye el contenido del capítulo y un comentario sobre el mismo. Al finalizar, aparece una sección llamada *REVISIÓN DEL CAPÍTULO X*, que considera una parte *sugerencias para la revisión del capítulo x* donde se hace una serie de cuestionamientos sobre conceptos y posteriormente otra parte *ejercicios de repaso para el capítulo x*, en el cual se enlistan varias docenas de problemas correspondientes a lo revisado en el capítulo. Cada una de las secciones que conforman el cuerpo central del capítulo, contiene una serie de definiciones, teoremas, ejemplos ilustrativos, ejemplos y finalmente una serie de ejercicios propuestos cuyas respuestas impares se hallan al final del libro.

b) Análisis general del texto

Análisis del *PRÓLOGO: El Cálculo 7* (EC7) es una obra diseñada tanto para los cursos de especialización en matemáticas como para los estudiantes cuyo interés primario radica en la ingeniería, las ciencias físicas y sociales, o los campos no técnicos. El autor define para qué y para quién va dirigido su libro. La exposición está adecuada a la experiencia y madurez del principiante. El autor cree que el nivel es el adecuado. Las explicaciones, los abundantes ejemplos desarrollados así como la gran variedad de ejercicios, continúan siendo las características distintivas del texto.

Leithold escribe que esto es lo que lo distingue respecto a otros textos. Afirma que entre la sexta y la presente séptima edición ha habido como nunca cambios tanto en la irrupción en el uso de la tecnología como la aparición del movimiento de la reforma del cálculo. De la cual se guía con siete puntos:

- Punto 1. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, *no* para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas teóricos.
- Punto 2. Las definiciones y teoremas deben establecerse formalmente, *no* informalmente.
- Punto 3. Los estudiantes deben estar consientes de que las demostraciones de los teoremas son necesarias.
- Punto 4. Cuando se presenta una demostración, debe ser bien motivada y cuidadosamente explicada, de modo que sea entendible para cualquiera que haya alcanzado un dominio promedio de las secciones anteriores del libro.
- Punto 5. Cuando se establece un teorema sin demostración, la discusión debe aumentarse mediante figuras y ejemplos; en tales casos, debe enfatizarse el hecho de que lo que se presenta es un ejemplo ilustrativo de la proposición del teorema y *no* una demostración del mismo.
- Punto 6. Debe darse importancia a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida real.
- Punto 7. Debe destacarse la redacción en matemáticas.

En el punto uno, con esta declaración las matemáticas para el autor corresponden a lo analítico-algebraico y son un conjunto de definiciones, teoremas, (la teoría). En el dos, aclara lo que para él es verdaderamente importante: definiciones y teoremas y su formalismo. Los puntos tres, cuatro y cinco son dedicados al tema de la demostración de los teoremas, revelando con ello la importancia que el autor le da. El sexto hace una petición de darle importancia a la modelación matemática de la vida real, aunque a lo largo del texto no se aprecia haberlo logrado. El séptimo, invita a prestar atención a la redacción en matemáticas.

Respecto al uso de calculadora graficadora el autor señala que ha incluido un *poderoso y fascinante instrumento* pero en su filosofía que enumera en tres puntos queda de manifiesto que: se debe trabajar analíticamente y después apoyarse numérica o gráficamente con la calculadora o viceversa trabajar numérica o gráficamente pero confirmar analíticamente. A su decir la calculadora nunca desplazará el trabajo analítico o simbólico negando la posibilidad de que esta sea un medio por sí mismo para la enseñanza.

En esta séptima edición incluye por vez primera la modelación de funciones seguramente influenciado por una reforma del cálculo en ese entonces recién iniciada. Lo que indica que el texto no estaba en principio escrito para el abordamiento de problemas de la vida real o cotidiana.

El autor diferencia el *ejemplo* del *ejemplo ilustrativo* considerando que el primero es usado para la resolución de ejercicios y el segundo para ilustrar concepto, definiciones o teoremas.

Estas operaciones implican la determinación de la *derivada* y de la *integral definida*, cada una con base en la noción de *límite*, probablemente el concepto más importante del cálculo En este comentario epistemológico el autor declara que la formalización del cálculo realizado por Cauchy y Riemann considerando la noción de límite como fundamental, implica que se esperaría un texto de corte formal.

Análisis de *Aspectos históricos del cálculo:* En un párrafo de cuarto de página, Leithold apunta "la invención de Cálculo se atribuye a Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos". Para el autor, epistemológicamente la ciencia en particular se inventa. La palabra *inventar* según el diccionario Océano Práctico (2007:437) significa: Hallar o descubrir una cosa nueva o no conocida. Esta palabra revela la concepción del autor sobre la naturaleza de matemática: ya existe es cosa de hallarla o descubrirla y corresponde a una ontología matemática (Godino, 2003) que corresponde con la visión platónica de los OM los cuales existirían realmente de manera independiente de la humanidad. Esto implica que se trata sólo de descubrir la matemática que ya existe en un mundo ideal. Esta concepción incluye una visión absolutista de las matemáticas considerándolas perfectas e inmutables.

Análisis de *Preparación para el estudio del cálculo:* Inicia con un comentario motivacional hacia el estudio del Cálculo con los debidos prerrequisitos en álgebra, geometría, trigonometría, y geometría analítica, sugiriendo al estudiante un cierto orden en su revisión. El resto de la página, se dedica a presentar el uso de la calculadora graficadora, la diferencia entre *dibujar la gráfica* (a mano) y *trazar la gráfica* (con calculadora o computadora). Propone utilizar una calculadora mejor que una computadora por ser más práctico.

Análisis del *Capítulo 1: Visión preliminar:* Después de enlistar el contenido del capítulo, el autor hace comentarios sobre el mismo. Las dos primeras secciones son dedicadas al estudio de funciones. La tercera sección se la dedica al tema de modelar funciones. Las operaciones de Derivación e Integración implican la determinación de la *derivada* y de la *integral definida*, cada con base en la noción de *límite*. “Probablemente el concepto más importante en Cálculo.” En esta declaración el autor pone en primer plano la noción de *límite*, dedicando cuatro secciones a su estudio. Además revela su concepción de un cálculo formal.

Se lee en la primera página del texto y que marca el inicio del tema de funciones, el autor le dedica un párrafo de 10 renglones para presentar y motivar el fundamental –según su propia declaración- concepto de función. Exhibe casos donde existe una relación entre variables, por ejemplo distancia recorrida-tiempo, salario personal-trabajo, etc. Posteriormente el autor escribe intentando institucionalizar pero cambiando abruptamente el lenguaje: Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X a un conjunto Y de números reales y, donde el número *y* es único para cada valor especifico de *x*.

Seguidamente mediante cinco ejemplos ilustrativos en un contexto estrictamente matemático y algebraico explica esta afirmación, preparando el camino para la definición formal del concepto de función.

> 1.1.1 Definición de función: Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x,y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes recibe el nombre de contradominio de la función.

Definición dentro del ámbito conjuntista. Después, mediante un ejemplo ilustrativo y dos ejemplos ejercita esta definición. El resto de la primera sección se dedica a graficas de una función.

Al finalizar se presentan los *ejercicios 1.1*, totalizando 63. De los cuales los primeros 10 se dedican a cuestionar si una expresión es función, valuar funciones y operaciones básicas entre ellas en un contexto algebraico. De la 11 a la 46, de da una función y se pide dibujar a mano y determinar su dominio y su contradominio. Del 47 al 63, propone funciones definidas en trozos, escalón, signo, solicitando dibujos y operaciones entre ellas.

La parte 1.2 se dedica a las operaciones básicas entre funciones.

La sección 1.3, Funciones como modelos matemáticos, de acuerdo con el autor por primera vez es incorporada al texto. Esta actividad matemática está íntimamente relacionada con la resolución de problemas de optimización, y aborda el tema planteando cinco *sugerencias para resolver problemas que implican una función como modelo matemático:*

1. Lea el problema cuidadosamente hasta que lo entienda. Para comprenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que involucre una situación similar en la que las cantidades son conocidas. Otra ayuda es dibujar un diagrama si es posible.

2. Determine las cantidades conocidas y desconocidas. Utilice un símbolo, digamos x para la variable independiente y un símbolo por decir f para la función que se obtendrá...

3. Anote cualquier hecho numérico conocido acerca de la variable y del valor de la función.

4. A partir del paso 3, determine dos expresiones algebraicas en términos de la variable y del valor de la función. De estas dos expresiones forme una ecuación que defina la función.

5. A fin de terminar el problema, una vez que se ha aplicado el modelo matemático, para determinar las cantidades desconocidas, escriba una conclusión, la cual consiste de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema...

Presenta el texto seis ejemplos donde aplica las sugerencias anteriores sobre presión-volumen, función costo, depredador-presa, caja de cartón, recipientes cilíndricos y propagación de rumores. En todos ellos presenta el enunciado del problema, su solución y una conclusión. En cuatro se apoya en figuras o gráficas.

Al finalizar la sección, se tiene el bloque de *ejercicios 1.3*, con 28 cuestionamientos para obtener una función como modelo matemático. Ejercicios con temáticas semejantes a los ejemplos de la sección. En casi todos ellos el inciso a) corresponde a encontrar o determinar un modelo matemático. El inciso b) o c) en algunos casos, solicita ya sea el dominio de la función a algún dato numérico relacionado.

El resto del capítulo 1, cuatro secciones, se dedica a la revisión del tema de límites de funciones tanto en forma grafica como analítica y numérica. Además tres secciones se emplean para la continuidad de funciones.

Al finalizar, aparece una sección llamada *REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1*, que incluye una parte *sugerencias para la revisión del capítulo 1* donde se hace 45 cuestionamientos sobre conceptos y posteriormente otra parte *ejercicios de repaso para el capítulo 1*, donde se enlistan 116 problemas correspondientes a lo revisado en el capítulo.

Sobre las sugerencias, de las más repetidas siete inician con la palabra *defina y* 13 con *invente.*

Análisis de *Capítulo 2: Visión preliminar:* Después de enlistar el contenido del capítulo, el autor hace comentarios sobre el mismo. La primera sección es dedicada al estudio de la derivada y su interpretación geométrica. La segunda, a la relación entre diferenciabilidad y continuidad. Seguidamente, presenta el concepto y procedimiento de la derivación numérica, posteriormente los teoremas de diferenciación de funciones algebraicas y trascendentes. Otras secciones no menos importantes, el movimiento rectilíneo, tasa de variación y tasas de variación relacionadas.

Se observa que en las últimas secciones mencionadas, los temas son tratados como una aplicación de la derivada de una función. Es decir que el orden de enseñanza dado por el autor, primero el concepto y posteriormente su uso o aplicación.

En la primera sección 2.1 RECTA TANGENTE Y DERIVADA, se define la recta secante y tangente a una curva en términos del cociente de un incremento de los valores de la función y el incremento de la variable independiente. Seguidamente define la derivada de una función como el límite de un cociente de incrementos. Posterior a la definición, se muestran tres ejemplos y un ejemplo ilustrativo. Al finalizar la sección, se dedica un espacio a la notación simbólica para la derivada de una función. Es de realzar el comentario hecho en el texto: "Se debe recordar que cuando $\frac{dy}{dx}$ se utiliza como notación para la derivada de una función, a dy y dx no se les ha dado significado independiente hasta ahora en el texto, aunque posteriormente se definirán por separado. De modo que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada y no debe considerarse como una razón."

La sección 2.2 es dedicada a diferenciabilidad y continuidad. La 2.3 Derivada numérica para calcular la derivada en forma puntual. Las secciones 2.4, 2.7, 2.8 y 2.9 se dedican a presentar los teoremas de derivación. En la sección 2.5 se revisa el movimiento rectilíneo, dando un enfoque a la derivada como razón de cambio de posición o de velocidad, seguidamente se revisa en forma genérica el significado de razón de cambio y en la 2.10, tasas de variación relacionada.

Al finalizar el capítulo, el texto presenta una sección denominada REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2, donde mediante cuestionamientos hace una serie de sugerencias para la revisión del mismo. Este capítulo, tiene 58 sugerencias. De ellas, 5 inician con la palabra *Defina;* 6 con la palabra *Invente;* 4 de *Enuncie;* tres con *Establezca* y el resto preguntas abiertas.

Análisis de *Capítulo 3:Visión preliminar:* La sección 3.1 se dedica a valores máximos y mínimos de funciones, 3.2 aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado. La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y sus gráficas. Se inicia la sección 3.1 con la definición y determinación de valores de función máximos y mínimos. Las aplicaciones del mundo real de máximos y mínimos se presentan en muchos campos diversos como lo averiguará cuando estudie las secciones 3.2 y 3.9. Al inicio del tema de máximos y mínimos, sección 3.1 el autor hace una introducción de un párrafo de cinco renglones antes de entrar a definir conceptos, mostrando la secuencia que se observa lo largo de todo el texto: Definición del concepto→ teorema →demostración →ejemplo ilustrativo →ejemplo.

Define valor máximo relativo: La función f tiene un valor máximo relativo en el número *c*, si existe un intervalo abierto que contiene a *c*, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo. Y valor mínimo relativo: La función f tiene un valor mínimo relativo en el número *c*, si existe un intervalo abierto que contiene a *c*, en el que f está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

Enseguida se enuncia el teorema: Si f(x) existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y además f'(c) existe, entonces f'(c)=0. La demostración del teorema se da al final de la sección. En seguida el autor presenta cuatro ejemplos ilustrativos del teorema.

Se da la definición de número crítico: Si *c* es un número del dominio de la función *f*, y si f'(c)=0 o f'(c) no existe, entonces c es un número crítico de *f*. Esta definición es trabajada mediante tres ejemplos.

Posteriormente se define: La función f tiene un valor máximo absoluto en un intervalo**,** si existe algún número *c* en el intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x del intervalo. El número *f (c)* es el valor máximo absoluto de *f* en el intervalo. Y la función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo, si existe algún número *c* en el intervalo tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x del intervalo. El número *f (c)* es el valor mínimo absoluto de *f* en el intervalo. Las anteriores definiciones son ilustradas mediante seis ejemplos.

Después el teorema del valor extremo: Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a,b]$. Se presentan dos ejemplos relacionados al teorema.

Al terminar la sección 3.1 propone 61 ejercicios, prevaleciendo la instrucción de *dibujar* una función o *determinar* valores extremos. Ejercicios sin contexto.

La sección 3.2 estudia las aplicaciones del teorema del valor extremo a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado.

La sección 3.2 muestra las aplicaciones de extremos a problemas. Al inicio Leithold escribe: Ahora se aplicará el teorema del valor extremo a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado. Para el autor, su objetivo no es resolver problemas sino aplicar algún teorema, mostrando una vez más que la lógica del libro obedece a la estructura matemática no la de por ejemplo la de PBL (Problem Based Learning)

El autor escribe que un teorema se emplea para resolver ejemplos de aplicaciones en este caso de extremos absolutos. Usa un *ejemplo ilustrativo* son realizados en un tono descriptivo mientras que los seis *ejemplos* son lo que normalmente se llaman ejercicios.

Al terminar la sección 3.2 propone 36 ejercicios.

Al finalizar el capítulo el libro presenta una sección denominada REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3, donde mediante cuestionamientos hace una serie de sugerencias para la revisión del mismo. Este tiene 53 sugerencias. De ellas, 6 inician con la palabra *Defina;* 12 con la palabra *Invente;* una de *Describa*; tres con *Explicar;* 6 con *Enuncie* y el resto preguntas abiertas.

Sección 3.1: Valores máximos y mínimos de funciones

LENGUAJE
Verbal: Variable, función, derivada, extremos, valor, máximo, mínimo, relativo, absoluto, intervalo, número crítico. Gráfico: Se presentan 20 gráficas de funciones en R^2 para mostrar ejemplos y no-ejemplos de los diversos conceptos de la sección. Simbólico: Expresiones tales como: $a < c < b$, $f(c) \le f(x)$, $f^{'}(c) = 0$, $f(x) = (x-1)^3 + 2$, $f(x) = \left\{ \begin{matrix} x+1 & si\, x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & si 1 \le x \end{matrix} \right\}$ Discurso explicativo: Definición del concepto→ teorema →demostración →ejemplo ilustrativo →ejemplo. ejemplos ilustrativos : ejecutados en tono descriptivo ejemplos: corresponde al típico ejercicio
SITUACIONES PROBLEMICAS
Problemas en un ambiente algebraico- gráfico en contexto matemático sobre determinación de extremos absolutos y relativos. ejemplos ilustrativos :10 ejemplos: 5

(P. escolares contexto matemático, Font, 2007)

CONCEPTOS
Previos: Magnitudes variables, funciones: dominio, modelado, derivada.
Emergentes: Máximo y mínimo relativo, número crítico, máximo y mínimo absoluto,
PROCEDIMIENTOS
Identificación de extremos relativos y de extremos absolutos.
PROPIEDADES (PROPOSICIONES)
Si f(x) tiene un extremo relativo en *c* y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c)=0$
ARGUMENTOS
Argumentos algebraicos

Tabla 3.1 Configuración epistémica de la sección 3.1.

Sección 3.2 Aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado.

LENGUAJE
Verbal: Variable, función, derivada, extremos, valor, máximo, mínimo, absoluto, intervalo, número crítico. Gráfico: Se presentan gráficas de funciones en R^2 para mostrar el comportamiento de la función en los extremos. Simbólico: Expresiones tales como: $[0,10]$, $V(x)=170x-54x^2+4x^3$, $V'(x)=170-108x+12x^2$ $170-108x+12x^2=0$ Icónico: Se presentan figuras para ilustrar los problemas contextualizados.
SITUACIONES
Problemas en contextos extra-matemáticos sobre determinación de extremos absolutos: problemas de volumen de cuerpos, distancias o áreas mínimas y ganancias. ejemplos ilustrativos :1 ejemplos: 6 (P. escolares contexto evocado de aplicación, Font, 2007) Sección 3.2 y final del capítulo: Algunos problemas propuestos de consolidación (P. escolares contexto evocado de consolidación, Font, 2007) Ninguno

(P. escolares contexto evocado de introducción, Font, 2007) Ninguno Ninguno (P. escolares contexto simulado, Font, 2007) (P. en contexto real, Font, 2007)
CONCEPTOS
Previos: Magnitudes variables, funciones: dominio, modelado, derivada. máximo y mínimo relativo, número crítico, máximo y mínimo absoluto
Emergentes: Ninguno
PROCEDIMIENTOS
Obtención de extremos absolutos en problemas contextualizados.
PROPIEDADES (PROPOSICIONES)
Si f(x) tiene un extremo relativo en *c* y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c)=0$
ARGUMENTOS
argumentos algebraicos

Tabla 3.2 Configuración epistémica de la sección 3.2.

3.3.5 Las clases

El curso de Cálculo Diferencial se ofrece en el primer semestre de todos los programas educativos de licenciatura en ingeniería. Consta de tres horas a la semana para la teoría de la materia y dos horas a su práctica. El programa de la materia comprende inicialmente el tema de funciones y sus diversas representaciones: analítica (su fórmula), numérica (su tabla) o gráfica (su figura); después, las aproximaciones o límites a valores de funciones; razones de cambio como antecedente inmediato al tema central de tangentes y derivadas de funciones. Posteriormente, valores extremos de una función y la llamada aplicación a problemas de diversa índole que implican el optimizar funciones.

El mismo profesor VH que permitió la entrevista aclaratoria del cuestionario, también tuvo buena disposición para aceptar que se observara de una manera no participante en su clase.

Las cuatro sesiones de clase en el aula del profesor VH y sus 35 alumnos de Cálculo Diferencial sobre el tema de optimización, fueron grabadas con una cámara de video. Un estudiante de semestre avanzado manipuló la cámara, mientras el investigador observaba de una manera no participante. Cada sesión de clase tuvo una duración de 50 minutos.

La inquietud por conocer sobre la actividad docente en el aula, correspondiente a los significados realmente implementados, nace de la entrevista aclaratoria ya que en ella hace hincapié en una concepción sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo, misma que generó el interés de conocer si realmente la efectuaba.

Las grabaciones en video fueron transcritas y se analizaron considerándose la noción de trayectoria epistémica, docente y la idoneidad del proceso propuestos por Godino, J.D, Contreras, A. y Font, V. en 2006, en su trabajo denominado *Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.*

Se presentan resultados de analizar el desarrollo de esta actividad docente mediante el formato de idoneidad de procesos de instrucción (Godino, 2006).

a) Idoneidad Epistémica: Grado de representatividad de los SI implementados, respecto a la referencia

Componentes	Descriptores
Sits-problema	• Predominio de problemas evocados de aplicación. • Ninguno de problemas de introducción. • Ninguno de problemas de consolidación o de la vida real.
Lenguaje	• Uso de expresiones verbales, graficas, simbólicas. • Escasa actividad de traducción y conversión entre ellos. • Nivel adecuado de lenguaje al estudiante.
Definiciones, proposiciones Procedimientos.	• Las definiciones y procedimientos no son claramente enunciados y precisados.
Argumentos	• Escaso uso de explicaciones y comprobaciones. • No demuestra teoremas, solo ilustra algunos.

Tabla 3.3 Idoneidad Epistémica.

b) Idoneidad Cognitiva: Grado en que los SI implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Proximidad de los SP logrados con los implementados.

Componentes	Descriptores
Conocimientos Previos	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios. • Los significados pretendidos se pueden alcanzar.
Adaptación	• No se incluyen actividades de refuerzo.
Aprendizaje	• La evaluación continua en clase muestra apropiación parcial de conocimientos y competencias pretendidas.

Tabla 3.4 Idoneidad Cognitiva.

c) Idoneidad Mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de recursos materiales y temporales necesarios.

Componentes	Descriptores
Recursos materiales	• No se utiliza computadoras o calculadoras-graficadoras o Internet. • Usa un sólo libro de texto.
Alumnos	• Son 35 alumnos. • Horario diario de trabajo. • El aula tiene las condiciones necesarias.
Tiempo	• No invierte más tiempo a lo más importante respecto a lo menos importante.

Tabla 3.5 Idoneidad Mediacional.

d) Idoneidad Emocional: Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

Componentes	Descriptores
Intereses y necesidades	• Las tareas en clase no eran de mucho interés para los alumnos. • No se alusión alguna a la utilidad del tema en la vida profesional y cotidiana.
Actitudes	• No se promueve fuertemente la implicación en la actividad del grupo. • No se favorece la argumentación.
Emociones	• No se promueven las cualidades estéticas de las matemáticas. • No se promociona la autoestima.

Tabla 3.6 Idoneidad Emocional.

e) Idoneidad Interaccional: Grado en que la interacción promueve el aprendizaje.

Componentes	Descriptores
Interacción docente-discente necesidades	• El profesor no hace una presentación adecuada del tema: algo desorganizado, habla rápido, no enfatiza en lo más importante. • Se interpreta poco los silencios o expresiones faciales de alumnos ante la exposición. • No se da una fuerte promoción a la participación amplia de los estudiantes. • El profesor es muy actuante en el proceso. • Fijador de reglas: definiciones, enunciados, ejemplos y ejercicios.
Interacción entre discentes	• No se favorece el diálogo entre estudiantes.
Autonomía	• No se promueven momentos en que los estudiantes asuman la responsabilidad de resolver por ejemplo un problema.
Evaluación	• Observación escasa del progreso cognitivo de los alumnos.

Tabla 3.7 Idoneidad Interaccional.

f) Idoneidad Ecológica: grado de adaptación curricular, profesional y conexiones disciplinarias.

Componentes	Descriptores
Adaptación al currículo	• Los significados medianamente corresponden al currículo.
Innovación didáctica	• No hay integración de nuevas tecnologías en clase. • No se promueve la investigación.
Adaptación socio-profesional	• Los significados escasamente contribuyen a una buena formación socio-profesional.
Conexiones disciplinarias	• Los significados se relacionan medianamente con otros contenidos.

Tabla 3.8 Idoneidad Ecológica.

A continuación y con el fin de ilustrar se presenta un tramo de la trascripción de la clase de Cálculo Diferencial del profesor VH sobre el tema de máximos y mínimos:

(*En el aula el profesor H y 35 alumnos, después de dedicar 15 minutos al inicio del tema de valores máximos y mínimos relativos, plantea un ejemplo ilustrativo)*

(16:14) *Ejm. 1, p.198 del texto de Leithold.*

(*Determine los extremos relativos de...)*

1. P: Hay un ejemplo, el ejemplo que dice $f(x) = x^2 - 4x + 5$; vamos a hacerlo...
$f(x) = x^2 - 4x + 5$...
2. ¿Cómo lo graficarían éste?
3. Este vamos a graficarlo; de la gráfica vamos a ver que podemos encontrar relacionado con lo que hemos estado tratando a ver qué información obtenemos.
4. ¿Cómo lo graficarían eso?
5. Lo ideal sería primero tomar estos dos $x^2 - 4x$ lo voy a completar para que sea un trinomio cuadrado perfecto si tengo $x^2 - 4x +$ _____+
6. ¿Qué le falta para hacer el trinomio cuadrado perfecto?
7. A:... 4x... 4x+5 ...
8. P: 4x...
9. A: +5...
10. P: ¿más cinco?...
11. No, hay que completar el trinomio cuadrado perfecto, lo que yo quiero hacer es esto
$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ ... es un binomio al cuadrado... yo quiero escribirlo así para saber...
12. A: cuatro...

13. P: cuatro,
14. Recuerden que lo que se hace el término que tiene la x elevado a la primera potencia, se le saca la mitad, es dos y se eleva al cuadrado sería cuatro, si yo tenía cinco y ahora tengo cuatro
15. ¿Qué me falta para que sea cinco?
16. A: uno...
17. P: uno;
18. Entonces esto va a ser igual a $(x-2)^2+1$. Eso y esto es lo mismo;
19. ¿Para qué hago eso?
20. Pues porque como yo ya sé que la gráfica de x^2 está así... y = x^2 ... voy a partir de nuevo de ahí para graficar en ello sin tener que hacer tabulación y cálculos y demás...
18:30
21. A: Allí en el punto (2,1)...
22. P: vamos por partes... como el plano que pusimos en el examen de los parciales
23. ¿no?
24. A ver vamos viendo las transformaciones; lo primero sería: aquí está la x^2
25. ¿Verdad?
26. Pero esa x tiene un menos dos,
27. ¿Qué pasa cuando le pones un menos dos?
28. A: se mueve dos espacios a la derecha...
29. P: lo mueves a la derecha..,
30. ¿Cuántos?..
31. A: Dos...
32. P: Entonces aquí lo muevo dos para acá... uno, dos... si nomás fuera x menos dos al cuadrado quiere decir que nomás fuera aquí, estaría aquí...
(19:09)
33. P: Lo subimos uno... entonces aquí estaría el equivalente del origen, este origen que esta aquí se traslado aquí, después la grafica viene todo esto...
(19:43)
34. P: ¿Y qué me pueden decir de esa gráfica? Relativo al tema que estamos tratando...
(*apuntando a la gráfica de* $f(x)=x^2-4x+5$)
35. A: Su mínimo relativo es uno...
36. P: Otra vez...
37. A: Su mínimo relativo es uno
38. P: Su mínimo relativo va a ser igual a uno en x igual...
39. A: A dos...
40. P: A dos, este es su mínimo relativo... y dice aquí que puede ocurrir que si tengo ese relativo, puede ser que la derivada de la función, en ese valor de x igual a cero va a ser igual a cero
41. ¿Verdad?
42. Eso fue lo que dijeron ahorita aquí... vamos a ver si es cierto, entonces deriven $f'(x)$
43. ¿A qué es igual?

44. A: $2x-4$
45. P: $2x-4$ ...
46. ¿Y para que sea igual a cero?
47. Tendría $2x=4$, $x=\frac{4}{2}$, $x=2$
48. Quiere decir que en x =2, f prima vale cero, o sea $f^{\acute{}}(2)=0$,
49. Gráficamente ¿qué significa $f^{\acute{}}(2)=0$?
50. A: la pendiente cero...
51. P: Y eso gráficamente que es
52. A: Una recta
53. P: Una recta, aquí esta, se traza la recta tangente; m = cero o f ´ = 0...

(21:44)
P: ¿vamos bien hasta ahí? ¿Alguna pregunta?... bueno entonces ahora vamos a tratar de graficar $f(x)=(x-1)^3+2$ y vamos a observar la grafica, a ver que podemos encontrar ahí; traten ustedes de graficar eso... ejm. 2 pág. 199

3.4 Análisis comparativo de los datos recabados

El profesor planea e imparte su clase primordialmente con la carta descriptiva de la materia y su libro de texto. Su práctica docente es de corte formal, primeramente define el concepto y lo ilustra, no creyendo necesario inducirlo mediante una situación-problémica. En este aspecto su actividad docente sigue un orden semejante al libro de texto. Posteriormente presenta teoremas pero sin demostrarlos, argumentando que son estudiantes de ingeniería y que lo importante es resolver problemas de la vida real. Pero en la ejecución de la clase estos problemas de contexto real no son considerados.

En su planeación y ejecución selecciona los ejercicios *sencillos* o *fáciles* pretendiendo con ello simplificar la actividad de enseñanza.

El autor del libro de texto, en el prólogo menciona en diversos puntos lo que para él son las matemáticas: definiciones y teoremas. Siendo congruente le asigna gran importancia a la presentación de teoremas y su demostración. La representación analítica es la única valedera cuando lo declara en este mismo prólogo. Las otras representaciones graficas y numéricas están a su creencia en un status inferior a lo analítico. Su secuencia de enseñanza está basada en la cadena concepto-teorema-ejemplo prestando escasa atención a la problemática real lo cual obedece a su concepción formalista de la matemática. El profesor planea y desarrolla en clase un proceso similar. El objetivo del autor del texto es aplicar teoremas en resolución de problemas misma actitud del profesor.

Al contrastar lo encontrado en el libro de texto con la planeación y ejecución de la clase se puede observar la fuerte influencia de la concepción sobre la matemática y su forma de enseñanza sobre el profesor usuario de ese libro. Particularmente en la secuencia de enseñanza del contenido, en la asignación relativa de importancia de problemas, conceptos, teoremas, procedimientos y el status inferior del trabajo gráfico y numérico.

La tendencia mundial a enseñar considerando problemas de la vida real no es fomentada por las prácticas del profesor ni por el libro de texto (PISA, 2003; Rico, 2006; Font, 2007).

Los problemas con enunciado solamente son leídos y trata de enseñarles a traducir. Esta escasa atención sobre el tema puede incidir en un bajo rendimiento de los estudiantes en él.

Dice basarse en el libro para los procedimientos. En su clase idem.

Respecto a las representaciones graficas, renuncia a ellas con el argumento de quitan tiempo. Esto revela la concepción analítica que tiene el profesor de la matemática y de su enseñanza.

Sobre la relación contenido materia- texto el maestro pretende que exista un libro- manual que coincida en su totalidad con el contenido. El libro lo selecciona por sus ejercicios y de éste el profesor escoge los más accesibles a los estudiantes no reelaborándolos para su presentación en clase ya que dice: porque son problemas diseñados por gente muy preparada.

Respecto su creencia de cómo aprenden matemáticas sus estudiantes, enseñándolos a razonar…y haciendo muchos ejercicios, el cuestionamiento es cómo se puede enseñar a razonar. Que un estudiante “sepa” matemáticas tiene que ver con interpretar el problema, el concepto a aplicar y el procedimiento adecuado. Esto es contradictorio con la afirmación anterior de sólo leer el enunciado de los problemas en la planeación de su clase. En su clase idem.

Un estudiante comprende un concepto cuando me lo puede explicar y que me diga para que se utiliza. Comprender para él es una habilidad mental mientras que competencia implica no solamente comprender sino tener la experiencia de haber ejercitado. Esta concepción de comprensión coincide con la de R. Skemp (1976) que dice la comprensión esencialmente es un proceso mental y tiene que con *saber* y *saber hacer*. La concepción del profesor sobre competencia también coincide con Skemp y se refiere a hacer.

Para el profesor la matemática se *inventa*, infiriéndose que para él, es un concepto mental. La palabra *inventar* según el diccionario Océano Práctico (2007:437) significa: Hallar o descubrir una cosa nueva o no conocida. Esta palabra revela la concepción del autor sobre la naturaleza de matemática: ya existe es cosa de hallarla o descubrirla y corresponde a una ontología matemática (Godino, 2003) que corresponde con la visión platónica de los Objetos Matemáticos los cuales existirían realmente de manera independiente de la humanidad. Esto implica que se trata sólo de descubrir la matemática que ya existe en un mundo ideal. Esta concepción incluye una visión absolutista de las matemáticas considerándolas perfectas e inmutables. Lo que a su vez influye en la concepción de su enseñanza.

El autor del libro de texto, en el prólogo menciona en diversos puntos lo que para él son las matemáticas: definiciones y teoremas. Siendo congruente le asigna gran importancia a la presentación de teoremas y su demostración.

La representación analítica es la única valedera cuando lo declara en este mismo prólogo. Las otras representaciones graficas y numéricas están a su creencia en un status inferior a lo analítico. Asimismo escribe que el concepto de límite es el más importante del cálculo, esto es cierto en un ámbito formalista de la matemática. Su secuencia de enseñanza está basada en la cadena concepto-teorema-ejemplo prestando escasa atención a la problemática real lo cual obedece a su concepción formalista de la matemática.

Ya lo escribió el autor, su objetivo no es resolver problemas sino aplicar el teorema. Mostrando una vez más que la lógica del libro obedece a la estructura matemática.

De las prácticas sociales significativas (Godino, 1994, 2007) emergen los OM, posteriormente se institucionalizan pasando a formar parte del cuerpo de conocimientos de la matemática. Sin embargo al transponer el OM para su enseñanza en el aula vía por ejemplo libro de texto, es descontextualizado, reemplazándose por una formalismo muy alejado del los procesos cognitivos.

Al contrastar lo encontrado en el libro de texto con las respuestas del profesor al cuestionario sobre la planeación de su clase se puede observar la fuerte influencia de la concepción sobre la matemática y su forma de enseñanza sobre el profesor usuario de ese libro. Particularmente en la secuencia de enseñanza del contenido, en la asignación relativa de importancia de problemas, conceptos, teoremas, procedimientos y el status inferior del trabajo gráfico y numérico.

En los ejercicios de fin de capítulo del texto, se encuentra la palabra *invente.* La palabra *invente* usada tanto por autor como por el profesor son evidencias también de lo mencionado. Esto en plena concordancia con la teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (Chevallard, 1991; Bosch, 2004).

La tendencia a enseñar considerando problemas de la vida real no es fomentada por las prácticas del profesor y por el libro de texto (Pisa, 2003; Rico, 2006; Font, 2007)

Se presentan cuadros comparativos sobre los significados de referencia-representados por el libro de texto, los significados planeados-representados por las respuestas al cuestionario y los significados realmente implementados en máximos y mínimos. Los cuadros corresponden a los objetos matemáticos primarios del EOS.

SITUACIONES PROBLÉMICAS			
TEMA	LIBRO TEXTO	PLANEACIÓN	CLASE
1. P. escolares contexto matemático	SI	SI	SI
2. P. escolares contexto evocado de aplicación	SI	SI	SI
3.P. escolares contexto evocado de consolidación	NO	NO	NO
4. P. escolares contexto evocado	NO	“No induzco un tema	NO

de introducción		mediante algún problema.”	
5. P. escolares contexto simulado	NO	NO	NO
6. P. en contexto real	NO	“Yo, como soy ingeniero quiero que entiendan como lo van aplicar en la vida real”	NO
7. Identificación de variables, modelado	NO	NO	NO

Tabla 3.9 Comparación de Situaciones Problemas.

LENGUAJE			
TEMA	LIBRO TEXTO	PLANEACIÓN	CLASE
1. Definición del concepto→ teorema →demostración →ejemplo ilustrativo →ejemplo	SI	SI	SI
2. Traducción lenguaje natural a simbólico	S	SI	NO
3.Predominio de lo analítico sobre gráfico y numérico	SI	SI	SI

Tabla 3.10 Comparación de Lenguaje.

CONCEPTOS			
TEMA	LIBRO TEXTO	PLANEACIÓN	CLASE
1. Repasa conocimientos previos	NO	NO	NO
2. Define los conceptos emergentes	SI	SI	SI

Tabla 3.11 Comparación de Conceptos.

PROCEDIMIENTOS			
TEMA	LIBRO TEXTO	PLANEACIÓN	CLASE
1. Identificación de extremos relativos	SI	SI	SI
2. Identificación de de extremos absolutos	SI	SI	SI
3. Diversas alternativas de solución	NO	NO	NO

Tabla 3.12 Comparación de Procedimientos.

PROPIEDADES (PROPOSICIONES)			
TEMA	LIBRO TEXTO	PLANEACIÓN	CLASE
1. Demostración de teoremas	SI	NO. El trabajo está orientado hacia el trabajo en ingeniería.	NO

Tabla 3.13 Comparación de Proposiciones.

3.5 Resultados de la etapa exploratoria

Esta primera etapa de acercamiento al problema consistente en explorar el escenario donde se estudiaría el fenómeno educativo de interés, arrojó una serie de indicios e hipótesis no esperadas que ayudarán a comprender de mejor manera lo sucedido en la siguiente etapa.

Si bien la intención inicial era conocer sobre los significados institucionales de planeación, específicamente sobre los textos en que apoyaban su clase , su método de enseñanza, sobre sus concepciones y creencias en la matemática y su aprendizaje y enseñanza, de una muestra representativa de profesores de matemáticas de la FIM, con la finalidad de conocer sobre este elemento muy importante del contexto que rodea al aprendizaje de matemáticas por los estudiantes, en el camino hubo que modificar y ampliar lo diseñado originalmente.

De los seis profesores a los que se les entregó el cuestionario previamente diseñado para conocer sobre sus actividades de planeación, sólo cuatro lo devolvieron y de estos, sólo uno permitió una entrevista aclaratoria posterior. Se encuentra en tres de los cuatro casos, que corresponde a ingenieros habilitados como profesores de cálculo y que representan los casos más típicos y frecuentes de docentes no solo de cálculo sino de matemáticas en general dentro de la FIM, una visión y desempeño muy semejante entre ellos, tal y como se describe en la parte del cuestionario. Por ello si bien la entrevista aclaratoria y lo que continuó en clase se efectuó sólo para el caso VH que lo permitió, se considera que lo realizado y los hallazgos son bastantes representativos en lo general de la planta docente de profesores de matemáticas de la FIM.

Algunas indicios hallados sobresalientes son:

- El docente basa en buena medida su proceso de instrucción en la concepción y método de exposición del libro de texto por él utilizado, en este caso el de L. Leithold.
- Los problemas, ejercicios y tareas son sólo aplicaciones de los teoremas que forman la estructura de la matemática.
- Le asigna gran énfasis al aspecto analítico en detrimento de lo gráfico y numérico. Pero no demuestra ningún teorema ni de manera intuitiva aduciendo que son estudiantes de ingeniería.
- La resolución de problemas son conducidos por el docente en el pizarrón de una manera tal que pareciera estar exponiendo su resolución y no argumentado los pasos que se están dando.
- En el proceso de resolución de los problemas de optimación no promueve la identificación de las magnitudes que varían, ni discute las relaciones entre ellas, sólo presentando de una forma muy algebraica el modelo de función posible y no mencionando otras posibles alternativas de solución.
- Tanto el libro de texto, como en las respuestas al cuestionario, dicen de la importancia de los problemas reales pero en la clase no se refleja en la selección de esos problemas.
- Después de observar lo sucedido en la etapa exploratoria y en particular en la clase se expone la *hipótesis*: los estudiantes se espera no sean muy exitosos en la RP de optimización debido al tipo de proceso de instrucción al que son sometidos

CAPÍTULO 4.
SEGUNDA FASE: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este capítulo, se expone sobre la vuelta al escenario, la Facultad de Ingeniería, Unidad Mexicali, de la Universidad Autónoma de Baja California (FIM) en donde se identificaron los estudiantes de ingeniería a los que se les fueron aplicados problemas seleccionados de libros de texto de Cálculo que se utilizan en el mismo escenario. La experiencia obtenida en la fase exploratoria permitió el que se pudieran identificar más adecuadamente a esos estudiantes informantes.

Primeramente se expone la situación general en cuanto a lo realizado por los estudiantes. Posteriormente se presentan tres casos representativos seleccionados de entre las 15 aplicaciones que produjeron información de dos tipos:
a) En papel correspondiente a las respuestas escritas a los problemas planteados, y b) los pensamientos en voz alta, transcritos posteriormente al lenguaje escrito.

La información obtenida fue analizada en dos niveles: uno descriptivo y otro de carácter explicativo.

Este parte del trabajo permitió emitir algunas respuestas y consideraciones sobre los planteamientos de los objetivos de la investigación.

4.1 Vuelta al escenario

Después del primer acercamiento al campo de estudio o escenario donde se conoció sobre el pensamiento y trabajo de profesores de cálculo en la Facultad de Ingeniería (FIM), fue necesario regresar para tomar datos sobre la parte esencial de la investigación que era el desempeño de estudiantes de ingeniería ante problemas matemáticos de optimización. Se solicitó la venia, coordinación y sugerencias de profesores para elegir los estudiantes idóneos para la aplicación de los mencionados problemas.

4.1.1 Selección de estudiantes informantes

Para escoger los estudiantes a los que se les aplicaron los problemas, se siguió el procedimiento siguiente:

Se contactó a profesores de la materia de Cálculo Diferencial de primer semestre, para solicitar su apoyo tanto en la logística de la aplicación como en la toma de decisiones sobre los candidatos. Particular énfasis se hizo en el profesor VH, entrevistado y videograbado en su clase, y amablemente accedió a seguir colaborando. También de la misma materia, el profesor A, que no había contestado el cuestionario, aceptó participar. Este docente, no mencionado con anterioridad, no entregó el cuestionario comentado en el capítulo anterior aduciendo razones de mucha ocupación en el tiempo en que fue aplicado. Es un profesor con experiencia docente, posgrado en área de enseñanza y formación pedagógica actualizada en sus materias. Finalmente, el profesor E, de Cálculo Multivariable, que se imparte en tercer semestre, se integró al proyecto.

En estudios de tipo cualitativo como el presente, la selección de sujetos informantes, no se hace al azar sino que se eligen con un cierto criterio que depende de los objetivos del mismo. En este caso era de interés que los estudiantes fueran de buen desempeño en su clase de Cálculo y en particular en el tema de optimización. Esto porque si se buscaba una relación entre comprender un objeto o noción y el ser competente en resolver problemas pertenecientes a ese mismo campo, era necesario que los estudiantes seleccionados tuvieran una buena comprensión de dicha noción, lo que los ubicaría como exitosos.

Los indicadores que formaron parte del criterio para seleccionar los estudiantes fueron:

1. Los profesores VH y A aplicaron cada uno a la totalidad de su correspondiente grupo de alumnos y dentro de una clase regular, un *cuestionario de conocimientos previos* al tema de optimización. Esto sucedió días antes de iniciar la enseñanza de ese tema. Los docentes le asignaron un cierto valor en calificación para lograr que sus alumnos hicieran su máximo esfuerzo. Este cuestionario fue diseñado ex profeso por el investigador incluyendo preguntas sobre la función: variables, dominio y su modelación en problemas; pendientes de rectas tangentes; efectuar el cálculo de algunas derivadas; y hacer algunas transferencias del lenguaje simbólico al natural. El cuestionario se muestra en el anexo 5.

El desempeño de los estudiantes ante este cuestionario fue un primer indicador del criterio para quien debía de ser seleccionado.

2. Días después de finalizado el proceso de instrucción del tema de optimización, de nueva cuenta los docentes aplicaron a todo su grupo de alumnos y dentro de una clase regular, un *cuestionario de conocimientos posteriores* al tema. Este cuestionario también fue diseñado ex profeso por el investigador incluyendo preguntas sobre los conceptos de valores extremos, números críticos, procedimientos y problemas de optimización. El cuestionario se muestra en el *anexo 3*. El desempeño, fue un segundo indicador.
3. Puesto que el tema de optimización, se enseña hacia el final de un curso de Cálculo, usualmente el profesor mínimamente ya ha aplicado un par de *exámenes parciales*, diversas tareas y proyectos. Por lo que un indicador más fue las calificaciones obtenidas hasta ese momento.
4. Un cuarto indicador, fue el desempeño de estos mismos estudiantes frente a la primera parte E*xamen colegiado de matemáticas I,* que se aplica a todos los estudiantes de ingeniería. Esta parte consta de 46 reactivos de opción múltiple, que incluye el concepto de función, sus diversas representaciones y atributos; el paso de una representación a otra; identificación de funciones algebraicas y trascendentes; limites en sus tres representaciones: gráfica, numérica y analítica. Matemáticas I era el nombre anterior que se daba al actual curso de Cálculo Diferencial en al FIM.
5. La opinión misma del profesor sobre la actitud en clase de los alumnos, participación, interés, extroversión, etc. constituyó un indicador más.

Finalmente se valoraron estos cinco indicadores lo que permitió elaborar una lista de candidatos. Previa autorización y motivación de los docentes correspondientes, se les invitó a participar en la investigación, varios se negaron mencionando razones sobre todo de falta de tiempo, ya sea por horario de clases como de compromisos extraescolares. Algunos que habían aceptado participar no se presentaron al lugar y hora de la cita. A los que aceptaron, se les tomó sus datos tales como: teléfono, correo electrónico, disponibilidad de horario, etc. De esta manera fueron seleccionados los estudiantes participantes que cursaban el primer semestre.

Un criterio distinto se siguió para identificar estudiantes de semestres más avanzados, en este caso de tercero, ya que anteriormente era el último semestre del área básica.

1. Puesto que ya estaban cursando un tercer semestre, ya existía evidencia en cuanto a su promedio de calificaciones, sobre todo en los cursos de matemáticas. Ya habían cursado y aprobado: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Probabilidad, Estadística. Un indicador lo fueron estas calificaciones.
2. Llevaban cursado casi todo semestre de Cálculo Multivariable, Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos. El profesor E de Cálculo Multivariable, recomendó una amplia lista de estudiantes de buen desempeño en su curso tanto en calificaciones parciales como en participación en clase, etc. Este fue un segundo indicador.
3. En la Facultad de Ingeniería (FIM), existe un programa de asesorías para estudiantes con dificultades de aprendizaje que cursan materias del área básica: matemáticas, física, etc. Estas asesorías son desarrolladas por buenos, probados y experimentados estudiantes de semestres avanzados. Un tercer indicador fue la pertenencia a este selecto grupo de estudiantes.

De igual manera que en el caso de primer semestre, se valoraron los indicadores y se confeccionó una lista de candidatos. Similarmente que en primero, de la lista inicial, finalmente se presentaron a la cita los tres alumnos que se anotan en la siguiente tabla.

A continuación se enlistan en la Tabla 4.1 los estudiantes seleccionados y que participaron en la toma de datos:

Alumn@	Profesor	Problema	Semestre
1. N	VH	1 (Los postes)	1
2. Y	VH	1 (Los postes)	1
3. L	A	1 (Los postes)	1
4. H	A	1 (Los postes	1
5. J	A	1 (Los postes	1
6. C	A	1 (Los postes	1
7. B	E	2 (La escalera)	3
8. Ne	E	2 (La escalera)	3
9. Ad	E	2 (La escalera)	3
10. M	VH	3 (La ventana)	1
11. O	VH	3 (La ventana)	1
12. Ln	A	3 (La ventana)	1
13. C	A	4 (Dos ciudades)	1
14. Ln	A	5 (Cerco paralelo)	1
15. Ju	VH	6 (Hoja libro)	1

Tabla 4.1 Alumnos y problemas participantes.

En la primer columna se escribe una letra que identifica el nombre o apellido del estudiante, esto para proteger su identidad, cuestión que fue ofrecida por el investigador; en la segunda, una identificación del profesor, igualmente anonimato ofrecido; en la tercera, el problema que intentó resolver y que en la siguiente sección se describe y en la última, el semestre que cursaban al momento de tomar datos sobre su desempeño. Los 13 estudiantes intentaron resolver 15 problemas. Cinco alumnos de primer semestre cursaban con el profesor VH, otros cinco también de primero con el profesor A y tres de tercer semestre que lo hacían con el profesor E.

4.2 Recogida de datos

En la siguiente sección se presentan los problemas escogidos como instrumentos para recabar información sobre el desempeño de los estudiantes ante esos problemas. Posteriormente se describe el proceso de la aplicación de los mencionados problemas a los estudiantes seleccionados.

4.2.1 Los problemas

Para seleccionar los problemas que se aplicaron a los estudiantes, se partió del supuesto de que los problemas elegidos estaban al alcance cognitivo de los estudiantes después de ser sometidos a la enseñanza del tema de optimización. Problemas que tradicionalmente se practican en clase, quedan de tarea o se aplican en exámenes convencionales. La intención nunca fue de aplicar problemas alejados de su práctica cotidiana o muy complejos que podrían hacer que los estudiantes regresaran en blanco sus respuestas o quedarse mudos ante la prueba. Se evitó seleccionar problemas de contexto físico ya que algunos estudiantes muestran carencias en ese tema, por no ser debidamente enseñado en algunos planteles del Nivel Medio Superior.

Todos los problemas fueron seleccionados de los libros de texto que los profesores de la FIM utilizan para la enseñanza del Cálculo: a) *El Cálculo* de Leithold, L., b) *Cálculo de una variable* de Stewart, J. y c) *Cálculo* de Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B.

De acuerdo con lo expresado en la sección 2.2.2 de este trabajo, los problemas escogidos se pueden caracterizar de la siguiente manera:

- Todos son problemas presentados mediante un texto en lenguaje natural. Esta opción agrega un elemento de dificultad puesto que el resolutor tendrá que traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico matemático como parte del proceso de resolución.
- Los problemas piden encontrar algo, no se solicita demostración alguna.
- Todos son problemas considerados como rutinarios y bien estructurados.
- Los enunciados contienen los datos completos para la resolución, no existen faltantes o exceso o datos contradictorios.
- De acuerdo con la taxonomía de PISA, los problemas se pueden ubicar en el primer nivel de Reproducción.

- De acuerdo a la clasificación de Font (2007:11), todos los problemas seleccionados se pueden ubicar como de tipo escolar de contexto evocado de aplicación es decir problemas propuestos por un profesor en el aula y que permite imaginar una situación donde se da este hecho y que se aplican a continuación de un proceso de instrucción sobre el tema.
- En función de la complejidad de los procesos necesarios para su resolución (Font, 2007:12), existe una gradación continua de ubicación de problemas entre los más sencillos denominados de aplicación y los más complejos llamados consolidación. De acuerdo con la sección 2.2.2, se ubican en un nivel de dificultad: bajo, regular o alto.

Problema 1. Está planteado en un contexto geométrico, involucra en su resolución una función de tipo radical. Se considera de nivel de dificultad bajo.

> Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Problema 2. Está planteado en un contexto geométrico, involucra en su resolución una función trigonométrica. Se considera de nivel de dificultad regular.

> Un pasillo de 4 pies de ancho, llega en ángulo recto a otro pasillo que mide 8 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?

Problema 3. Está planteado en un contexto geométrico, involucra en su resolución una función cuadrática. Se considera de nivel de dificultad bajo.

> Una ventana tiene la forma de rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.

Problema 4. Está planteado en un contexto geométrico e involucra en su resolución una función de tipo radical. Se considera de nivel de dificultad bajo.

Dos ciudades A y B obtendrán su abastecimiento de agua de la misma estación de bombeo, la cual se ubicara en la orilla de un río recto a 15 km. de la ciudad A y a 10 km. de la ciudad B. Los puntos del río más cercanos a A y B están separados 20 km. A y B se encuentran en el mismo lado del río. Estimar dónde debe ubicarse la estación de bombeo de modo que se emplee la menor cantidad de tubería.

Problema 5. Está planteado en un contexto geométrico e involucra en su resolución una función de tipo radical. Se considera de nivel de dificultad bajo.

Una cerca de 8 pies de altura colocada al nivel del piso corre paralela a un edificio alto. La cerca se encuentra a un pie del edificio. Encuentre la longitud de la escalera más corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.

Problema 6. Está planteado en un contexto geométrico e involucra en su resolución una función de tipo racional. Se considera de nivel de dificultad bajo.

Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 . de área con márgenes de 2 cm. abajo y a los lados y 3 cm. arriba. Encuentre las dimensiones de la página que permitan la mayor área impresa posible.

4.2.2 Su aplicación

En todos los casos, en forma individual y aislada, en cubículo del investigador, se les aplicó los problemas a los estudiantes pidiéndoles que anotaran en una hoja de papel su respuesta al problema. Adicionalmente, se les solicitó que expresaran en voz alta sus pensamientos en forma simultánea al proceso de resolución para ser grabadas. Al finalizar cada caso, se realizó una entrevista aclaratoria sobre lo acontecido.

Las instrucciones dadas a los estudiantes fueron:

1. Siempre hablar en voz alta para permitir una buena grabación. Tanto cuando se está escribiendo o pensando alguna estrategia para abordar el problema o decir en voz alta lo

que no se entiende y de preferencia por qué. Decir en voz alta la razón o argumento que justifique lo que está haciendo.

2. Escribir con pluma. En caso de equivocarse, hacerle una ~~pequeña raya~~, no ocultar totalmente.
3. Escribir dentro del marco de la hoja.
4. No usar gráficas de la calculadora. Sólo la parte llamada científica, para multiplicaciones, raíces, trigonométricas, etc.
5. En caso de **no** recordar alguna fórmula o parte del procedimiento, decirlo en voz alta y puede consultar el libro que está a su alcance.

4.3 Las respuestas y su análisis

En esta segunda y última etapa de la investigación se ha logrado la toma de datos respecto al desempeño de estudiantes de ingeniería frente a problemas matemáticos de optimización y su análisis. Esto ha permitido que se puedan hacer pronunciamientos sobre las interrogantes planteadas en los objetivos que han guiado el estudio.

Los seis problemas seleccionados fueron aplicados a 13 estudiantes, lográndose 15 respuestas escritas a los problemas y las correspondientes 15 grabaciones y transcripciones. Cinco alumnos de primer semestre cursando cálculo con el multicitado profesor VH. Seis correspondientes al profesor A, también de primero. Y tres de tercero, cursando cálculo multivariable. Todos considerados como buenos estudiantes dentro de sus cursos, a decir de sus profesores.

Desprendiéndose del análisis de las respuestas escritas de los estudiantes resolutores se identificaron los objetos y procesos matemáticos ligados a la comprensión intervinientes en cada problema que se intentó resolver.

El análisis de la información recabada fue llevado de la siguiente manera: Se revisaron las veces necesarias, las respuestas escritas, grabaciones y transcripciones para establecer:

a) Un primer nivel donde se *describe* lo sucedido tanto en la práctica escrita como en la parte de la transcripción de los pensamientos. En la práctica se identificaron los objetos y procesos matemáticos intervinientes en la resolución del problema. En la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

En forma simultánea al primer nivel y en otras de forma posterior se construyó:

b) Un segundo nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido y algunas conclusiones y conjeturas. Los comentarios iniciarán con el símbolo: Λ y terminarán con: Ω.

La identificación y organización de los *objetos* básicos o primarios que intervinieron en todas prácticas-independientemente del problema o del resolutor- se basó en la clasificación del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de los mismos. A saber: Situación-problema, Lenguaje, Concepto, Procedimiento, Proposición y Argumento. El tipo de objetos intervinientes en la resolución diferentes problemas de optimización son semejantes entre ellos con matices específicos para cada problema. El tipo de objetos encontrados en un mismo problema y para diferentes alumnos que lo hubieran intentado, se esperaría fueran también semejantes. Implícitamente, al revisarse las respuestas a un problema se compara con las respuestas de un resolutor *experto*, que en este caso puede ser el profesor o el investigador.

Similarmente, la identificación y organización de los *procesos* más importantes que intervinieron en todas prácticas-independientemente del problema o del resolutor- se basó en la clasificación del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de los mismos. A saber: Comunicación, Significación, Materialización, Argumentación, Enunciación y Algoritmización. De igual manera a lo mencionado en objetos, el tipo de procesos intervinientes en la resolución diferentes problemas de optimización son semejantes entre ellos con matices específicos para cada problema. Implícitamente al revisarse las respuestas a un problema se compara con las respuestas de un resolutor experto, que en este caso puede ser el profesor o el investigador.

De las transcripciones hechas a las grabaciones de los pensamientos en voz alta hechos por los estudiantes en forma simultánea a la actividad de resolución de problemas se pudo señalar en las mismas, los elementos de *gestión metacognitiva* considerados en este trabajo: comprensión, planeación, monitoreo, control y evaluación.

Estos elementos de gestión presentes en la resolución de cualesquier problema, no dependen de la naturaleza del mismo ya que todos involucran las mismas etapas sino que la matización o estilo dependen más bien del sujeto resolutor, sus antecedentes y contexto de influencia.

4.3.1 Caso general

En esta sección se efectúa un acercamiento de manera genérica a las respuestas de los estudiantes a los problemas de optimización que se les aplicaron.

Se organiza esta presentación por problema y de acuerdo a la tabla 4.1, el primer problema fue aplicado a seis estudiantes; el dos a tres; el problema tres a igual número; y el resto de forma única. Se considera tanto la respuesta escrita como las transcripciones. El haber aplicado el mismo problema en varias ocasiones permitió identificar diversas formas o estilos de abordarlo. El acercamiento a los intentos de resolución de los problemas (prácticas matemáticas) se organiza mediante los objetos y procesos matemáticos del EOS. La revisión de las transcripciones se basa en lo elementos de gestión metacognitiva mencionados en las referencias teóricas. Adicionalmente, comentarios relacionados con los elementos de la competencia.

1. El problema uno, llamado *de los postes* cuyo enunciado es:

> Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Los objetos matemáticos:

- *SITUACIÓN-PROBLEMA*. Este problema es de acuerdo con la clasificación de Font (2007), de tipo escolar, de contexto extra-matemático y evocado de aplicación. Se encuentra dentro de la zona cognitiva cercana.

- *LENGUAJE*

➢ *Verbal:* Excepto en un caso de resolución, el uso de lenguaje natural escrito en las prácticas de los seis estudiantes, es escaso.

➢ *Simbólico*: En las prácticas se encuentra en marcado predominio de este tipo de lenguaje sobre otros tipos.

➢ *Gráfico*: Todos los resolutores dibujan un poste de altura 6 m y de la punta saliendo un cable hacia un punto en el tramo horizontal entre las bases de los dos postes y de allí hacia la punta del otro poste de 8 m. existen variaciones en poner por ejemplo, el poste de 6 m a la izquierda o a la derecha del otro. De importancia es el punto seleccionado de llegada, todos lo dibujan hacia el centro entre los postes.

- *CONCEPTO-DEFINICIÓN*

➢ *Conceptos explícitos*: Por el tipo de problema, en la mayoría de las resoluciones intervienen conceptos relacionados con triángulos rectángulos. Además de dominio, función, derivada de una función y máximos y mínimos.

- *PROPOSICIONES*

➢ *Proposiciones explicitas:* Por la emergencia de dos triángulos rectángulos en todos los casos interviene el Teorema de Pitágoras.

➢ *Proposiciones implícitas*: Sin hacerlo explicito los resolutores usan la proposición: longitud es aditiva.

- *PROCEDIMIENTOS*

➢ *Procedimientos explícitos:* Debido a la aparición de una función tipo radical, en la mayoría de los casos se procede a manipularla, se le deriva e iguala a cero para despejar la incógnita. En general los procedimientos que los estudiantes desarrollan son ejecutados de manera aceptable. Λ Esto sugiere que el proceso de instrucción se hace hincapié en ello. Ω

- *ARGUMENTOS*

➢ *Argumentos explícitos*: Todos los estudiantes están seguros de que si existe una longitud mínima del cable e intentan encontrarla.

➢ *Argumentos implícitos:* Asimismo que la longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto a la mitad de las bases. Ninguno pintó la llegada en un punto fuera del intervalo entre los postes.

Los procesos matemáticos, de acuerdo a la propuesta de Font (2008) detectados en las prácticas de los resolutores:

a) *Comunicación*: En el sentido de que “entiende enunciados matemáticos de otras personas”.
b) *Significación*: Tiene que entender el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen. Hubo dificultades para entender el enunciado del problema, particularmente en lo referente al punto de llegada del cable a la base. Y a la naturaleza del problema (de optimización).
c) *Comunicación*: En el sentido de que “produce un texto como respuesta”. Todos los resolutores produjeron un texto como respuesta que puede ser correcto o incorrecto.
d) *Materialización*: Todos los estudiantes realizaron una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases.
e) *Argumentación*: Este proceso es desarrollado por todos pero es deficiente en lo general.
Está basado en procesos de:
(1) *Significación*: Algunos significados son correctos y otros incorrectos. Por ejemplo, el suponer que el cable llega a la mitad de la distancia entre las bases de los postes conduce a un resultado erróneo. Significados correctos no necesariamente conducen a resultados correctos ya que se puede perder en el camino el resolutor.
(2) *Enunciación*: Diversas enunciaciones son emitidas, algunas correctas otras incorrectas.

(3) *Algoritmización*: Diversos procesos de algoritmización son ejecutados. Estos pueden ser pertinentes o no dentro del proceso general, es decir estar ligados a procesos de enunciación y

significación adecuados. Se encuentra que los estudiantes en lo general son diestros para ejecutar procesos algorítmicos.

Elementos de gestión metacognitiva: La *letra cursiva* se utiliza para tramos del enunciado del problema; los símbolos: Λ y Ω para indicar el inicio y la terminación de algún comentario vertido sobre lo observado.

- Comprensión del enunciado problema:

  Para intentar comprender el enunciado del problema todos los resolutores utilizaron la estrategia de leerlo una y otra vez. Un apoyo para los estudiantes fue el bosquejar una figura y sobre ella materializar sus ideas.

- Planeación (seleccionar estrategias):

  Una vez comprendido el enunciado del problema-según el resolutor- la mayoría selecciona una estrategia que corresponde con una fórmula utilizada por el docente o el libro de texto.

- Supervisión/monitoreo (seguimiento de…)

  Al avanzar en una primera estrategia, se presenta un seguimiento de lo desarrollado.

- Regulación/control (se equivoca y corrige):

  En caso de considerar que se ha equivocado, busca otra estrategia para resolver el problema.

- Evaluación /verificación (de la tarea en su totalidad):

  Esta etapa no es atendida más que por una mínima parte de los resolutores.

- Conjetura: Las matemáticas dan resultados obtenidos con fórmulas y no forman parte del problema mismo. Es decir la concepción es que están aparte. La habilidad o competencia para estimar resultados no forma parte de las prácticas escolares.

- Conjetura: En el caso de las calculadoras, el estudiante no duda del resultado a veces inverosímil del mismo. La habilidad o competencia para estimar resultados no forma parte de las prácticas escolares.

4.3.2 Caso ilustrativo N

El primer caso que se presenta corresponde a la alumna N, que cursaba Cálculo Diferencial en primer semestre de una licenciatura en ingeniería. Era estudiante del profesor VH, mencionado en el capítulo anterior. A esta alumna N se le aplicó un problema el cual intentó resolverlo:

> Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

La aplicación del problema a la alumna se llevó a cabo dentro de un cubículo del área de profesores. Tuvo una duración de 57 minutos, de los cuales, la alumna sola y aislada intentó durante 32 minutos resolver el problema y al final, 25 minutos dialogando con el investigador en ese mismo lugar. La alumna se sentó en una silla, pudo escribir en un escritorio disponible y la grabadora de sonido se colocó sobre ese mismo escritorio. Inicialmente se le dieron las instrucciones a la alumna y se le dejó completamente sola dentro del cubículo. A lo largo del proceso a la vez que escribía o se detenía a reflexionar, lo que decía en voz alta era captado por la grabadora de sonido. Posteriormente el investigador en algunas ocasiones regresó para supervisar el desarrollo de la actividad, como puede apreciarse en la transcripción. Al finalizar la tarea el investigador dialogó con ella sobre las dudas, obstáculos y tensiones emocionales que aparecieron. Se recabaron dos hojas escritas, posteriormente se digitalizaron, mismas que se presentan párrafos adelante. La grabación de sonido, fue transferida a una computadora y transcrita en un documento escrito, mismo que más adelante se presenta.

A continuación se presenta la información recogida para este caso. En una primera sección, con el número romano I, la producción escrita y con el número II, las transcripciones a sus pensamientos en voz alta. En una sección III, se integró la información recopilada por estas dos fuentes originales (I y II) mediante las nociones de competencia y proceso de resolución de problemas.

La información obtenida fue analizada en dos niveles:

a) Un primer nivel donde se *describe* lo sucedido tanto en la práctica escrita como en la parte de los pensamientos. En la práctica se identificaron los objetos y procesos matemáticos intervinientes en la resolución del problema. En la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

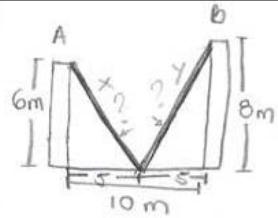
b) Un segundo nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Los comentarios iniciarán con el símbolo: Λ y terminarán con: Ω.

I. La producción escrita: La producción escrita de la alumna N, en su intento por resolver el problema propuesto consta de dos páginas que se muestran digitalizadas (figuras 4.1 y 4.2). La columna de la izquierda corresponde al número de línea y es incluida con la finalidad de dar alguna referencia específica en el desarrollo del análisis de su trabajo.

Posterior a la presentación del trabajo de la alumna, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis se reseña lo sucedido en esta práctica. Posteriormente y en este mismo nivel de análisis se presentan los objetos y procesos matemáticos identificados en esta misma práctica de la resolutora.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Li	Caso N



Poste "A" → 6m

Poste "B" → 8m

d $\overline{P_A P_B}$ → 10 m

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = C^2 = a^2 + b^2$$

* Para Longitud del cable desde el Poste "A" hasta el centro de los dos Postes:

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = L = \frac{6m}{5m} = 1.2m$$

* Para longitud del cable desde el Poste "B" hasta el centro de los dos postes:

$$hip = \frac{opuesto}{adyacente} = L = \frac{8m}{5m} = 1.6\,m$$

→ Entonces:

→ sustituyendo:

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$C^2 = (1.2)^2 + (1.6)^2$$

$$C^2 = 1.44 + 2.56$$

$$C^2 = 4$$

$$C = \sqrt{4}$$

$$C = \pm 2 \therefore C_1 = 2 \text{ y } \cancel{C_2 = -2}$$

Posible solución

ó

$$L_T = L_1 + L_2$$

$$L_T = 1.2m + 1.6m$$

$$L_T = 2.8m$$

Posible solución

Figura 4.1 Producción escrita: Caso N. Primera parte.

Caso N.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Si los puntos son $\overset{x_1\ y_1}{(6,5)}$ y $\overset{x_2\ y_2}{(8,5)}$

$$d=\sqrt{(8-6)^2+(5-5)^2}$$

$$d=\sqrt{(2)^2+(0)^2}$$

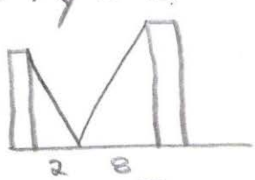
$$d=\sqrt{4}$$

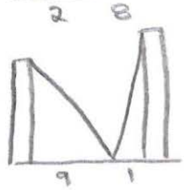
$d=\pm 2$ Entonces otra posible solución

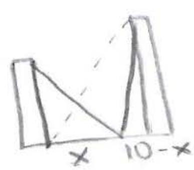
$d=\underline{2}$ ✓ podría ser que la distancia que hay desde la punta del Poste "A", hasta en medio de los postes, y de ahí hasta la punta del Poste "B", es de 2. Porque si te pide la Longitud mínima, esta es.

$$L=10x-6y-8z$$

$$x+y=L$$







$x+y=10$

$y=10-x$

$0\leq x\leq 10$

Figura 4.2 Producción escrita: Caso N. Segunda parte.

Seguidamente se narra la *práctica matemática* desarrollada por la alumna N para intentar resolver el problema que se le fue aplicado. La *práctica* es de naturaleza *actuativa* y que corresponde a la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta.

En las figuras 4.1 y 4.2, de la línea 1 a la 59, la alumna N plantea su práctica resolutora. En la figura 4.1, líneas 1 a 5, dibuja una figura donde se observan dos postes: el A de 6 metros de longitud y el B de 8 metros. Traza una línea recta de la punta del poste A a la mitad de la distancia de 10 m a la base del otro poste, de ese punto continua a la punta del poste B. Asigna como incógnitas a *x* y *y*. Correspondiendo a las distancias de la punta del poste A al punto medio, *x*; de éste a la punta de B, *y*.

Utiliza la fórmula hipotenusa igual a opuesto entre adyacente y establece una segunda igualdad con la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de los catetos (Teorema de Pitágoras).

Aplica la primera fórmula para calcular la longitud del cable desde el poste A hasta el centro de los dos postes, dividiendo 6 m entre 5 m siendo igual a1.2 m. Hace exactamente lo mismo para el cable del poste B, dividiendo 8m entre 5m, resultando 1.6 m. Concluye como posible solución que la longitud buscada es igual a la suma de 1.2 y 1.8 y es igual a 2.8m.

Usando la fórmula de los cuadrados de los catetos, sustituye los mismos valores de 1.2 y 1.8, obteniendo dos resultados: mas menos 2.Desecha la raíz negativa conservando la positiva como posible solución.

Intentó resolver el problema mediante una tercera opción, usando la fórmula para distancia entre dos puntos en el plano, de la Geometría Analítica. Considera que los puntos son (6,5) y (8,5). Los sustituye en la fórmula, y obtiene dos raíces: ± 2.

En las líneas 56,57 de la figura 4.2, escribe que 2 es otra posible solución y argumenta que esta es, ya que se pide la longitud mínima.

En la figura 4.2, de la línea 60 a la 75, e interactuando con el investigador, la alumna dibujó tres figuras simulando los dos postes. En la primera asigna distancias del punto de llegada del cable a la base de los postes de 2 y de 8. En la segunda, las distancias son de 9 y 1. En la última, asigna *x* para una distancia y 10-*x*, para la otra. Partiendo de la suma de las dos distancias debe ser 10, despeja una de ellas y obtiene el mencionado 10-*x*. Escribe el intervalo de valores que puede tomar *x*, de o a 10.

Λ En la práctica de la alumna N, se observa, entre otras cosas, que no identifica que se trata de un problema de optimización, lo cual se deduce de las estrategias que utiliza que no se corresponden con las que se promueven en los cursos de Cálculo. Ω.

Objetos matemáticos: De acuerdo con la clasificación del EOS (1994, 2004) de los objetos matemáticos primarios, en la práctica de la alumna N se identificaron los más relevantes, sin pretender ser exhaustivos:

- *SITUACIÓN-PROBLEMA*

Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

El problema propuesto, de acuerdo con la clasificación de Font (2007) es de tipo escolar, de contexto extra-matemático, evocado de aplicación.

- *LENGUAJE*
- *Verbal:*

Términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa.

Otros términos: Poste, cable, “centro de los dos postes”, “en medio de los dos postes”.

- *Simbólico*: A,B, $d\overline{P_A P_B}$, $c^2 = a^2 + b^2$, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
- *Gráfico*: Dibuja un poste A de altura 6 m y de la punta sale un cable hacia el centro de las bases de los dos postes y de allí hacia la punta del poste B de 8 m.
- *CONCEPTO-DEFINICIÓN*
- *Conceptos explícitos*: longitud, triángulo rectángulo, suma, raíz cuadrada, hipotenusa, opuesto, adyacente.

- *PROPOSICIONES*
  - *Proposiciones explicitas:* teorema de Pitágoras.
  - *Proposiciones implícitas*: la longitud es aditiva.

- *PROCEDIMIENTOS*
  - *Procedimientos explícitos:* calcular raíz cuadrada (con calculadora), estimar longitudes, Sumar, multiplicar, dividir, elevar al cuadrado.

- *ARGUMENTOS*
  - *Argumentos explícitos*: Asegura que si existe una longitud mínima del cable y la encuentra.
  - *Argumentos implícitos:* La longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto a la mitad de las bases.

Los *procesos matemáticos*, de acuerdo a la propuesta de Font (2008) detectados en la práctica de la alumna N son los procesos de:

a) *Comunicación*: En el sentido de que entiende enunciados matemáticos de otras personas.

b) *Significación*: tiene que entender el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen. La alumna no ha comprendido el enunciado del problema y de los términos que aparecen.

c) *Comunicación*: En el sentido de que produce un texto como respuesta.

d) *Materialización*: Realiza una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases.

e) *Argumentación*: Está basado en los proceso de:

(1) *Significación*: Supone que el cable llega a la mitad de la distancia entre las bases de los postes.

(2) *Enunciación*: La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al cociente del opuesto entre el adyacente.

(3) *Enunciación:* La longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las hipotenusas.

Primera solución: $c^2 = a^2 + b^2 =$ 2 m

(5) *Enunciación:* La longitud total del cable es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de las dos hipotenusas.

(6) *Algoritmización*: Realización de cálculos numéricos.

Segunda solución: $L_T = L_1 + L_2 = 2.8$ m

(7) *Enunciación:* La distancia entre las puntas de los postes es igual a la raíz cuadrada de la suma de las diferencias de coordenadas, al cuadrado.

(8) *Algoritmización*: Realización de cálculos numéricos.

Tercera solución: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ = 2 m

(9) *Enunciación*: Porque si te pide la longitud mínima, ésta es.

De los procesos identificados, se puede decir que la alumna falló en un primer proceso de comunicación, pues no entendió los enunciados matemáticos de otras personas. No fue capaz de entender el significado del texto problema, por lo que el proceso de significación fue fallido. También fracasó en el segundo proceso de comunicación ya que no fue capaz de producir un texto que dé una respuesta al problema. Su proceso de argumentación se basó en 1) un proceso de materialización ya que representa gráfica y ostensivamente los dos postes, 2) un proceso de significación erróneo ya que interpreta que el cable llega a la mitad de la distancia entre las bases de los postes, 3) tres procesos de enunciación que implican a su vez, tres procesos de algoritmización y finalmente, un proceso de enunciación donde declara una solución errónea.

II. Transcripción de pensamiento en voz alta: A continuación se presenta en forma escrita en la Tabla 4.2, de las líneas 1 a la 183 lo que la alumna N pensó en voz alta en forma simultánea al estar resolviendo el problema propuesto. En la columna de la izquierda se lleva una numeración consecutiva con la finalidad de poder identificar alguna línea de interés. En la columna derecha, se encuentra el escrito principal. Asimismo, periódicamente se escriben, referencias en el tiempo para ubicar mejor el proceso desarrollado.

Posterior a la presentación del trabajo de la alumna, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis en la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Transcripción: Caso N

Alumna: A   Investigador : (I)

La alumna inicia leyendo el enunciado del problema.

(00:01)

A: *dos postes con longitudes de 6 y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de diez metros,... calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto del suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste…* ok… ah lo voy a leer otra vez para entenderlo mejor… *dos postes con longitudes de 6 y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de diez metros, calcule la longitud mínima… de un cable… mínima de un cable... que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes*; o sea las bases *y luego hasta la punta del otro* bien..., a la punta del otro... ok… lo primero que voy a hacer va a ser un dibujo que me muestre los dos postes ok… aquí está un poste y a una distancia de diez metros en el suelo está el otro poste ok uno mide 8 y uno mide 6 metros este lo voy a poner más pequeño que el otro y este mide 6 metros el del lado derecho mide 8 metros ok… la longitud que tienen entre cada uno es de 10 metros,

dice *calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes*... voy a ponerle el poste de seis metros que le voy a llamar poste A y el poste B va a ser el de 8 metros, *calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes o sea desde la punta del poste A, hasta un punto en el suelo entre los postes*... voy a poner desde la punta del poste A hasta en medio de los dos postes de la distancia de los 10 metros y luego hasta la punta del otro poste; sería como una especie de triángulo para arriba ok… *dice calcular la longitud mínima del cable*… ok… pues si se forman triángulos está diciendo que es entre los dos postes entonces la mitad van a ser 5 de la longitud de la punta de un poste al piso y de la longitud del cable de en medio hasta la punta del otro…

(3:48)

poste… entonces podría usar un… una… la fórmula para… como es… bueno me voy a fijar en los apuntes del cuaderno, creo que es la fórmula de la hipotenusa... ok… como sacamos distancias y tenemos dos catetos podría ser cateto opuesto, si la hipotenusa es el cateto opuesto sobre el cateto adyacente, lo que queremos es la hipotenusa o sea que el… problema sería… a menos de que también lo pueda sacar con la fórmula de la distancia… pero eso es si tenemos tres puntos, la fórmula de la distancia sería... eh… x_2 menos x_1 al cuadrado mas y_2 menos y_1 al cuadrado en este caso ¿cuáles podrían ser x? y ¿cuáles a podrían ser y?, si tenemos que el poste A voy a escribir los datos, el poste A tiene una longitud de seis metros y el poste B tiene una longitud de 8 metros, la distancia entre el poste A y el poste B es de 10 metros ok…

si tenemos… si tenemos la hipotenusa es igual a opuesto sobre adyacente, hipotenusa es igual a opuesto sobre adyacente… ok… me da la hipotenusa… uhm… ok… puedo usar…

(06:59)

A: me voy a fijar en el libro… quiero ver una fórmula porque no me acuerdo… ok… la voy a buscar mejor en el libro… uhm… operaciones… funciones… límites...no… uhm… no no no no no… vectores, rectas, planos y superficies en el espacio a lo mejor eso me sirve… ok… está en la página 785… 785… ok están las distancias… ok… aquí está la fórmula de la distancia… si A es el vector a_1 coma uno digo a_1, a_2 entonces A es igual a la raíz de a_1 al cuadrado mas a_2 al cuadrado… entonces…

(8:56)

I: ¿estás comprendiendo todo el problema?

A: Si más o menos, ya con un dibujito se me hace más sencilla…

I: ah muy bien… bueno…

A: ok… se puede usar también la fórmula… de…

I: y si estás abriendo un libro, dices estoy consultando el libro de Leithold,

A: ok… bueno estoy consultando el libro de Leithold para cálculo y puedo usar volviendo a lo del problema puedo usar la fórmula de… de…$c^2 = a^2 + b^2$ que son las raíces de los catetos entonces podré usar que hipotenusa es igual a opuesto sobre adyacente, que opuesto para sacar a… para sacar la distancia que hay del poste de la punta del cable del poste A hasta en medio de los dos postes sería para longitud del poste para longitud del cable perdón, para longitud del cable… desde el poste A hasta el centro de los dos postes, voy a hacer lo siguiente, sería… que la longitud si si la hipotenusa es igual a la longitud en fórmula de la hipotenusa…

hipotenusa igual a longitud entonces el cateto opuesto va a ser seis metros entre el cateto adyacente que son cinco metros, entonces uso la calculadora… ok… la longitud le voy a, en la fórmula voy a aplicar todo lo que estoy entendiendo, si dice que la hipotenusa es igual a lo opuesto sobre lo adyacente entonces esto quiere decir que estoy buscando la longitud del punto del poste A hasta el centro de los dos postes entonces es donde sería la hipotenusa porque es la parte que no tengo y lo estoy buscando lo tomaría como la longitud porque dice *calculé la longitud mínima* no… entonces dice que la longitud, el cateto opuesto sería lo que está enfrente de la hipotenusa que serían los 6 metros del poste A entre adyacente que sería lo que está abajo de la hipotenusa que serían cinco metros, esto sería igual a… ok sería 1.2 metros… del de la punta del poste A a en medio de los dos postes, pero como se me hace una distancia muy pequeña 1.2 metros que tenga de distancia ese cable, no sé si tengo que sacarlo con fórmula de $c^2 = a^2 + b^2$

… uhm… voy a sacar la otra… voy a sacar la de del Poste B hasta el centro, de los dos postes, digo del poste B hasta el centro de los dos postes, ahora sería para longitud, para longitud del cable desde el poste B hasta el centro de los dos postes o sea donde se une con el cable del poste A, voy a hacer lo siguiente, igual voy a tomar lo mismo hipotenusa es igual a opuesto sobre adyacente la hipotenusa la voy a tomar como la longitud porque dice *calcular la longitud mínima*, entonces en este caso está del lado contrario del cable A, el opuesto va a ser 8 metros que es lo que mide el poste B entre lo que está abajo, el adyacente es lo que está abajo; que serían los cinco metros los otros cinco metros, entonces esto sería igual a 6 entre 5, 1.6… también se me hace una distancia… muy pequeña 1.6 metros, de un edificio de 8 metros a…

(14:56)

hasta el medio de… a una longitud desde el pie, desde la base del poste B a en medio, a cinco metros en a nivel del suelo se me hace muy poca distancia; 1.6 metros y respecto al poste A 1.2, entonces yo creo que si voy a usar esa de la fórmula ay! es que no me acuerdo como se llama pero la fórmula de $c^2 = a^2 + b^2$ … ok… voy a poner… entonces $c^2 = a^2 + b^2$ … ok yo creo que si voy a usar esta, porque; porque dice que c^2,

c^2 se refiere que hay dos C, aquí para la longitud del cable del poste B hasta en medio saqué la primera C y la longitud desde el cable desde el poste A desde la punta del cable hasta donde llegue al piso es otra C entonces sería $c^2 = a^2 + b^2$; cuando saque a^2 que sería 1.2 al cuadrado va a salir una distancia un poco más grande, entonces ya sería un poco más lógico porque eso de 1.2 metros se me hace una distancia muy pequeña para un edificio de 8 o de 6 metros… entonces c^2 sustituyendo… sustituyendo sería c^2 que es la longitud que quiero es igual a A que voy a sacar del edificio, del poste A sería 1.2 metros al cuadrado, bueno 1.2, 1.2 para no sacar metros cuadrados, 1.2 al cuadrado de todos modos ya sabemos que son metros, por B al cuadrado que del poste B sería 1.6 metros como ya sacamos no…ok… uhm… estoy un poquito nerviosa… no sé si lo estoy haciendo bien pero bueno… voy a tratar de… ok… c^2 en este caso sería multiplicando, bueno poniendo 1.2 al cuadrado sería… 1.44 en realidad no es mucha la diferencia yo pensé que iba a ser algo más grande pero pues obvio son con decimales punto y algo no creo que salga mucha diferencia pero bueno 1.6 al cuadrado también son 2.56… ok voy a verificar, 1.2 al cuadrado 1.44 más 2.56… no… perdón 1.6 al cuadrado, 2.56 ok… entonces sería c^2 es igual a 1.44 que sería la distancia de A, del poste A la distancia que tiene el cable desde la punta del poste A hasta en medio de los dos postes… y… y

(18:50)

B sería del poste B no, la distancia que tiene el cable desde la punta del poste B hasta en medio de los dos postes y… ok… entonces voy a sumar 1.44 + 2.56… es igual a 4… para eliminar el cuadrado de la c^2 tenemos que sacar raíz al cuatro que sería dos… ¿si? Mas no recuerdo creo que si ¿no? cuatro entonces $c = \pm\sqrt{4} = 2$ … ok sabemos que cuando es raíz el resultado tiene que ser con + y -, el mismo resultado tiene que ser con + y -, si… por ejemplo aquí $\sqrt{4}$ va a ser ± 2 … ok… entonces sería c_1 =4 es igual a 4 y c_2 es igual a men… ay perdón a 2 no a 4.. si son dos resultados el primero es positivo y el segundo es negativo -2… dice que *sacar la longitud mínima*… al decir mínima ¿se podrá referir a la que es negativo?... porque… a lo que yo entiendo a lo que yo entiendo dice calcular la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes… entre… se podría referirse a en medio… por eso yo dejé 5 y 5 a los lados, juntos sumarían el 10 de la longitud que hay entre las bases y luego de ese en medio hasta la punta del otro poste… ahm… si sumo 1.2 que es la primera longitud que me salió más 1.6 que es la segunda longitud me sale 2.8 a lo mejor también ese puede ser… si sumo longitud A, bueno voy a poner longitud total es igual a longitud 1 mas longitud 2… longitud total es igual a 1.2 metros más 1.6 metros; longitud total es igual a 2.8 como lo acabo de sacar longitud total 2.8 metros… esa podría ser una solución porque igual es que… seis metros… si son seis metros y hay un cable y luego se va para el otro hay un cable hasta en medio de las bases de entre los postes y luego ese mismo cable se va hasta la punta del otro poste… ok…

(22:50)

esto podría ser una posible solución la que acabo de sacar y la otra
es la que había sacado anteriormente, si esto es mínimo podría ser -2 pero no no pueden ser valor de -2 porque como vas a decir: ay tiene una longitud de -2 metros, no,

entonces yo creo que le vamos a dejar, bueno aquí decía en las instrucciones (inaudible) y dejamos que c, c_1=2 ok la posible solución 2, la segunda posible solución podría ser menos… ok… voy a ver qué tan mal ando fijándome en el libro; debe de haber algún problema donde tengan que sacar distancias entre… entre dos puntos… ok… uhm… ah ok series no… me imagino que en vectores debe de haber problemas ok voy a buscar otra vez en la 787 del libro de Leithold ok…

(24:47)

A: ok… tengo que buscar si hay algún problema similar que me pueda orientar un poco a ver si ando bien o ando mal o… con la fórmula de la distancia eh; ¿Cómo puedo sacar valores de x y y?... o sea porque la fórmula de la distancia dice que la distancia es igual $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ cómo puedo sacar los valores de, como puedo sacar los valores de x y de y para sacar esa fórmula; para sacar esa distancia, ya tengo lo que mide esto… según yo ya tengo lo que mide esto pero según la fórmula de distancia x_1 y_1 que podría ser… x_1: 6 metros, x_2: 5 metros, por qué?, según yo… por qué… es una longitud seis metros y los 5 metros de la base del poste hasta en medio de la distancia del otro poste son 5 entonces el primer punto sería (6,5) ¿no? Y el segundo punto sería (8,5) ok… voy a hacer ese procedimiento también para ver cómo me sale, esta hoja para un lado... ok dice que la fórmula de la distancia es igual $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ok… ahm… si los puntos son… como ya lo dije (6,5) y (8,5) porque, porque va desde la punta de un poste porque el cable va desde la punta de un poste hasta en medio de la longitud de los dos postes, sería hasta el coma 5 y como tenemos que usar el mismo valor, no podemos usar el valor de la longitud del poste, no podemos agarrar el valor del otro 5 de la longitud que resta,

(27:50)

no podemos usarlo como x_2 ¿Por qué? Porque tiene que ser, tiene que estar haciendo el mismo… como se podría decir… se tiene que estar hablando de lo mismo.. y aquí estamos hablando que el punto x_1 es la longitud de un poste, el punto x_2 no puede ser la longitud de la base… de digo la longitud entre las dos bases entonces el punto dos sería (8,5) entonces aquí tienes (x_1, y_1) y (x_2, y_2), $x_{1=}$ 6, $y_{1=}$ 5, $x_{2=}$ 8, $y_{2\,=}$ 5… ok entonces distancia es igual a la raíz de $x_{2=}$ 8 menos $x_{1=}$ 6 al cuadrado más $y_{2\,=}$ 5 menos $y_{1=}$ 5 al cuadrado por lo tanto la distancia es igual a la raíz de ocho menos seis al cuadrado… $\sqrt{(8-6)^2 + (5-5)^2}$ que aquí ya, ya se eliminó esto el cero al cuadrado entonces sería igual a la raíz de dos al cuadrado por dos… digo.. Cuatro perdón, dos al cuadrado cuatro… entonces me volvió a salir lo mismo o sea distancia de la raíz del cuatro… entonces la distancia es ± 2 por que, por que la raíz del cuatro tenemos que es dos valor negativo…

entonces otra posible solución podría ser podría ser que la distancia entre, la distancia que hay perdón… la distancia que hay desde la punta del poste A… hasta bueno de la punta del poste A…, hasta en medio, hasta en medio de los postes, hasta la punta del poste B, ok voy a empezar a leer otra vez: entonces otra posible solución podría ser que la distancia que hay desde la punta del poste A hasta en medio de los postes y de ahí ah ok me faltó escribir y de ahí… ok y de ahí hasta la punta del poste B, es de menos dos porque si te pide la longitud mínima, esto… no es que menos dos no puede ser porque no puedes decir ah dame menos dos metros no!… la longitud mínima es dos… es de dos porque si te pide la longitud mínima esta es… si porque, porque te da valor de menos y mas pero no puedes tener valores de longitudes negativas no puedes decir: ah eso mide menos dos metros… entonces yo creo que hasta ahí está resuelto el problema…. Verdad…

32:42

Tabla 4.2 Transcripción: Caso N.

Elementos de gestión metacognitiva: La *letra cursiva* se utiliza para tramos del enunciado del problema; los símbolos: Λ y Ω para indicar el inicio y la terminación de algún comentario vertido sobre lo observado.

- Comprensión del enunciado problema:

La alumna inicia el proceso de resolución del problema, leyendo su enunciado. Lo lee tres veces (líneas: 4,8 y 19) a lo largo del proceso con la finalidad de entenderlo mejor. La frase *dice calcular la longitud mínima del cable* la repite cuatro veces (líneas: 23,68, 80 y 117). En la línea 8, se lee *ah lo voy a leer otra vez para entenderlo mejor*, Λ la resolutora está consciente de que lo primero que tiene que hacer para resolver el problema es entenderlo. Ω

En la línea 13, después de leer el enunciado, dice OK, Λ lo que se puede interpretar como si ya estuviera de acuerdo en entender el enunciado ya que inmediatamente dice: Ω *lo primero que voy a hacer es un dibujo que me muestre los dos postes OK*. En la figura 4.1, de la línea uno a la seis, pinta los dos postes con sus alturas, los nombra A y B, la distancia entre sus bases y el cable que une la puntas tocando un punto entre las bases.

Al hacer el dibujo (figura 4.1), se lee en las líneas 21 a 27, *hasta un punto en suelo entre los postes*…voy a poner desde la punta del poste A hasta en medio de los dos postes de la distancia de los 10 metros y luego hasta la punta del otro poste; sería como una especie de triángulo para arriba, OK…*dice calcular la longitud mínima del cable* pues si se forman triángulos está diciendo que es entre los dos postes entonces la mitad van a ser 5 de la longitud de la punta de un poste al piso y de la longitud del cable de en medio hasta la punta del otro. En el dibujo presentado en la figura 4.1, se aprecia como pinta el número 5 a los lados del punto de arribo del cable al piso. Fija la llegada del cable a la mitad de las bases. Λ Aquí tiene un primer obstáculo en la comprensión: interpreta que *estar entre* significa *estar en el punto medio* mismo que a lo largo de su trabajo no puede superar. Se conjetura que esta interpretación no le permite considerar que se trata de un proceso de variación, es decir de la posibilidad de que el cable pueda llegar a diferentes puntos en la base entre los postes. Ω

Λ El dibujo elaborado le evoca triángulos, líneas 23 y 24 y le marca la estrategia para resolver el problema (línea 29).

Para la alumna N, leer y releer el enunciado y hacer una figura, no es parte del proceso de resolución del problema sólo de entenderlo. Al terminar el dibujo, ella considera que domina la etapa de comprensión del enunciado y procede a resolverlo. Ω

Esta etapa le consumió 3 minutos y 48 segundos. Aunque a lo largo del proceso de resolución del problema, regresa a esta primera etapa, releyendo el enunciado.

En un momento inmediato posterior a la conclusión de la resolución del problema, el investigador entabló un diálogo con la alumna N, sobre lo que interpretó como *punto medio*, después de cierto tiempo, pudo considerar otros puntos diferentes de llegada al piso.

- Planeación (seleccionar estrategias):

Después de hacer el esquema, y releer el enunciado, de la observación de la figura, donde se han formados triángulos rectángulos, a partir de la línea 29: entonces podría usar un…una fórmula para…como es…bueno me voy a fijar en los apuntes del cuaderno, creo que es la fórmula de la hipotenusa…OK. La alumna evoca la hipotenusa de los triángulos y decide buscar una fórmula que la implique. Λ Se considera que el buscar una fórmula para resolver un problema es parte de su contexto. En particular, sería una norma del proceso de instrucción en ese centro escolar. Inclusive busca la fórmula en su libro (línea 42). Usa el teorema de Pitágoras (línea 55). En su trabajo se percibe que su estrategia para resolver el problema consiste en encontrar ya sea en su libro, apuntes o en su mente una fórmula que se aplique al problema y donde pueda poner los datos de que dispone. Ω.

- Supervisión/monitoreo (seguimiento de…)

En esta componente de supervisión, la alumna da seguimiento a su proceso de resolución del problema, tal y como se muestra con encuentran expresiones tales como:

Línea 85: Se me hace muy poca distancia…

Línea 99: estoy un poquito nerviosa no sé si lo estoy haciendo bien...

Línea 137: voy a ver qué tan mal ando fijándome en el libro…

Línea 142: algún problema similar que me pueda orientar un poco a ver si ando bien o ando mal

- Regulación/control (se equivoca y corrige):

En esta acción regulativa la resolutora identifica donde se ha equivocado (según ella) y corrige el rumbo del proceso.

Línea 71-73: como se me hace una distancia muy pequeña 1.2 metros que tenga de distancia ese cable, no sé si tengo que sacarlo con fórmula de $c^2 = a^2 + b^2$. En esta expresión se identifica un elemento de regulación, ya que al considerar muy pequeña esa distancia corrige el rumbo utilizando una nueva estrategia (fórmula).

Línea 92-95: cuando saque a^2 que sería 1.2 al cuadrado va a salir una distancia un poco más grande, entonces ya sería un poco más lógico porque eso de 1.2 metros se me hace una distancia muy pequeña para un edificio de 8 o de 6 metros. Λ En esta frase continúa la valoración de que los resultados que va encontrando son muy pequeños, lo que se sienta a disgusto con su trabajo. Se puede decir que la alumna tiene la idea de *algo no le gusta* de lo que está haciendo. Ω.

Línea 101-103: La nueva estrategia, la hace decir: en realidad no es mucha la diferencia yo pensé que iba a ser algo más grande pero pues obvio son con decimales punto y algo no creo que salga mucha diferencia pero bueno. Λ Esta operación la hace con una calculadora científica, duda del resultado ya que no es como lo esperaba pero no duda de la magnitud del mismo. La idea de que el cuadrado de cualquier número es mucho más grande, solo vale para mayores que uno. En esta componente de regulación, la alumna considera que se equivoca en dos ocasiones y selecciona una nueva estrategia (fórmula). Ω.

- Evaluación /verificación (de la tarea en su totalidad):

La alumna resolutora en la etapa de evaluación final del proceso de resolución, analiza sus tres resultados obtenidos para decidir cuál es la respuesta correcta a su modo de entender el problema.

Línea 125: 2.8 metros…esa podría ser una solución porque es que…

Línea 136: y dejamos que c, $c_1 = 2$ ok la posible solución 2

Línea 174-177: entonces otra posible solución podría ser…dos

Línea 177-182: la longitud mínima es dos… es de dos porque si te pide la longitud mínima esta es… si porque, porque te da valor de menos y mas pero no puedes tener valores de longitudes negativas no puedes decir: ah eso mide menos dos metros… entonces yo creo que hasta ahí está resuelto el problema…. Verdad…

Λ De los tres resultados obtenidos debido a sus tres estrategias (fórmulas) 2,2.8 y 2, selecciona a 2 como el más pequeño de los tres. Esto revela que su significado de mínimo es diferente al de optimización: dados dos o tres resultados el mínimo es el más pequeño. Los resultados se le hacen pequeños, pero se considera que debido al contexto de su instrucción debe de aceptar lo encontrado vías el uso de fórmulas de libro y apuntes de clase. Ω.

III. Integración de información: Después de haber revisado la producción escrita y las transcripciones en voz alta de la alumna N, en donde se identificaron objetos y proceso matemáticos y elementos de gestión metacognitiva, se está en posibilidad de integrar ambos trabajos bajo el formato de hiperproceso de resolución de problemas esto con la finalidad de entender de una mejor manera este importante proceso en Matemáticas. Posteriormente, se da la información antes mencionada bajo el enfoque de competencia.

El HiperProceso de resolución del problema: El Proceso total de la resolución del problema, fue conducido por la alumna N de la siguiente manera:

a) Etapa de la comprensión del problema: Ha realizado y fallado en el proceso de comunicación, en el sentido de que entiende enunciados matemáticos de otras personas, para ello ha tenido que entender el significado –proceso de significación también fallido- del enunciado del problema.

b) Etapa del diseño de un plan: Para la alumna diseñar un plan o estrategia consistió en seleccionar una formula de sus apuntes o de su libro que mejor se acoplara al problema. Puesto que comprendió erróneamente el enunciado del problema, la fórmula seleccionada también falló.

c) Etapa de la ejecución de un plan: Al ejecutar la primera estrategia, en este caso una fórmula, no le satisface el resultado, buscando seleccionando dos estrategias y fórmulas más, para completar tres posibles resultados.

d) Etapa de la comprobación de la solución: De los tres posibles resultados, escoge al más pequeño de los tres, evidenciando su significado de longitud mínima.

Competencia para resolver el problema: Desde el punto de vista de las competencias, se puede decir que la alumna N fue incompetente para resolver el problema.

Conocimientos: Esta componente de la competencia, corresponde a los objetos y procesos matemáticos previos para resolver el problema. Los objetos matemáticos utilizados por la alumna N a lo largo de su práctica, corresponden a significados erróneos de los mismos. Por ejemplo el que la hipotenusa en un triángulo rectángulo corresponde al cociente del lado opuesto entre el adyacente; el aplicar el teorema de Pitágoras a hipotenusas pertenecientes a triángulos distintos; el considerar que la longitud mínima (obtenida correctamente mediante un proceso de optimización) corresponde a la distancia más pequeña obtenida por los tres caminos recorridos por la alumna.

La alumna utilizó herramientas de la trigonometría y geometría analítica, correspondientes al nivel bachillerato para resolver el problema. Recién había tomado en clase el tema de optimización, por lo que se ve no lo había asimilado aun. En la plática posterior con el investigador, se comprobó que estos conocimientos del cálculo estaban en su mente pero no fueron gestionados en este caso tal vez por el obstáculo generado con la llegada al punto medio.

En cuanto a los procesos, se falla en la comprensión del enunciado mediante los procesos de comunicación y significado.

Habilidades: Esta componente de la competencia, corresponde al razonamiento como la principal habilidad del pensamiento. Para comprender un enunciado de un problema es necesario tener la capacidad de conceptualizarlo y de interpretar, se consideran fallidas estas habilidades para este problema. Visualizó el enunciado del problema, incorrectamente.

La resolución de problemas, entre otras cosas implica elegir con eficacia entre diferentes alternativas o estrategias de solución. La alumna buscó entre tres, pero no fueron afortunadas ninguna de ellas.

Actitudes: Esta componente de la competencia, corresponde a comportamientos que responden a la disciplina y a los valores. Se puede decir que la alumna tuvo una buena actitud hacia la resolución del problema, en el sentido de aceptación total de la tarea, ya que no la abandonó sin concluirla sino que hasta que termina a su criterio, deja de resolver el problema. Al margen, se comenta que en varias ocasiones a lo largo del proceso la alumna externa en voz alta que se encuentra nerviosa y angustiada.

4.3.3 Caso ilustrativo H

El segundo caso que se presenta corresponde al alumno H, que cursaba Cálculo Diferencial en primer semestre de una licenciatura en ingeniería. Era estudiante del profesor A., mencionado en el capítulo anterior. A este alumno H se le aplicó un problema el cual intentó resolverlo:

> Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

La aplicación del problema al alumno se llevó a cabo dentro de un cubículo del área de profesores. Tuvo una duración de 1 hora con 18 minutos, de los cuales, el alumno solo y aislado intentó durante 38 minutos resolver el problema y al final, el resto de tiempo dialogando con el investigador en ese mismo lugar. El alumno se sentó en una silla, pudo escribir en un escritorio disponible y la grabadora de sonido se colocó sobre ese mismo escritorio. Inicialmente se le dieron las instrucciones y se le dejó completamente solo dentro del cubículo. A lo largo del proceso a la vez que escribía o se detenía a reflexionar, lo que decía en voz alta era captado por la grabadora de sonido. Posteriormente el investigador en algunas ocasiones regresó para supervisar el desarrollo de la actividad, como puede apreciarse en la transcripción. Al finalizar la tarea el investigador dialogó con él sobre las dudas, obstáculos y tensiones emocionales que aparecieron. Se recabaron dos hojas escritas, posteriormente se digitalizaron, mismas que se presentan párrafos adelante. La grabación de sonido, fue transferida a una computadora y transcrita en un documento escrito, mismo que más adelante se presenta.

A continuación se presenta la información recogida para este caso. En una primera sección, con el número romano I, la producción escrita y con el número II, las transcripciones a sus pensamientos en voz alta. En una sección III, se integró la información recopilada por estas dos fuentes originales (I y II) mediante las nociones de competencia y proceso de resolución de problemas.

La información obtenida fue analizada en dos niveles:

a) Un primer nivel donde se *describe* lo sucedido tanto en la práctica escrita como en la parte de los pensamientos. En la práctica se identificaron los objetos y procesos matemáticos intervinientes en la resolución del problema. En la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

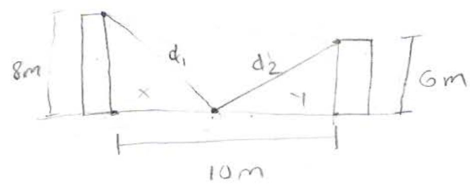
b) Un segundo nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Los comentarios iniciarán con el símbolo: Λ y terminarán con: Ω.

I. La producción escrita: La producción escrita del alumno H, en su intento por resolver el problema propuesto consta de dos páginas que se muestran digitalizadas (figuras 4.3 y 4.4). La columna de la izquierda corresponde al número de línea y es incluida con la finalidad de dar alguna referencia específica en el desarrollo del análisis de su trabajo.

Posterior a la presentación del trabajo de la alumna, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis se reseña lo sucedido en esta práctica. Posteriormente y en este mismo nivel de análisis se presentan los objetos y procesos matemáticos identificados en esta misma práctica del resolutor.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Caso H.



$[x=1]$

$y=10-1$

$[y=9]$

$y=10-x$

$D(x,y)=\sqrt{(8)^2+(10-y)^2}+\sqrt{(6)^2+(10-x)^2}$

$D(x)=\sqrt{64+(10-10-x)^2}+\sqrt{(6)^2}$

$D(x,y)=\sqrt{(8)^2+(x)^2}+\sqrt{(6)^2+(y)^2}$

$\rightarrow D(x)=\sqrt{8^2+x^2}+\sqrt{(6)^2+(10-x)^2} \Leftarrow$ Dominio $0<x<10$

$D(x)=\sqrt{(8^2)+(x)^2}+\sqrt{(6)^2+(10-20x+x^2)}$

$D(x)=\sqrt{64+x^2}+\sqrt{46-20x+x^2}$

$D'(x)=\frac{1}{2}(64+x^2)^{-1/2}2x+\frac{1}{2}(46-20x+x^2)^{-1/2}(-20)(2x)$

$D'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{64+x^2}}+\frac{-40x}{2\sqrt{46-20x+x^2}}$

$D'(x)=\frac{x}{\sqrt{64+x^2}}+\frac{-20x}{\sqrt{46-20x+x^2}}$

$D'(x)=0$ $\quad \frac{20x}{\sqrt{46-20x+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{64+x^2}}$

$(20x)\sqrt{6+x^2}=(\sqrt{46-20x+x^2})(x)$

$20x^2+6+x^2=46-20x+x^2+x^2$

$20x^2+x^2-x^2-x^2+6-46+20x=0$

$\underset{a}{19x^2}\underset{c}{-40}+\underset{b}{20x}=0$

$\frac{-(20)\pm\sqrt{(20)^2-4(19)(-40}}{(2)(19)}$ $\quad \frac{-20\pm\sqrt{3440}}{38}$

$\frac{-20\pm\sqrt{400+3040}}{38}$ $\quad \frac{-20\pm 57.79}{38}$

Figura 4.3 Producción escrita: Caso H. Primera parte.

Li	Caso H.

$$\frac{-20+57.79}{38} = \frac{37.79}{38} = \boxed{0.99} \leftarrow$$

$$\frac{-20-57.79}{38} = \frac{-77.79}{38} = -2$$

$$D(x,y) = \sqrt{(8^2)+(1)^2} + \sqrt{(6)^2+(9)^2}$$

$$D(x,y) = \sqrt{64+1} + \sqrt{117}$$

$$D(x,y) = 8.06 + 10.81$$

$$D(x,y) = \boxed{18.876\ m}$$

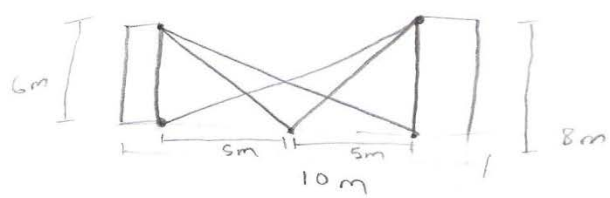


Figura 4.4 Producción escrita: Caso H. Segunda parte.

La práctica matemática: Seguidamente se narra la práctica desarrollada por el alumno H para intentar resolver el problema que le fue aplicado. La *práctica* es de naturaleza *actuativa* y que corresponde a la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta.

En las figuras 4.3 y 4.4, de la línea 1 a la 50, el alumno H plantea su práctica resolutora. En la figura 4.3, líneas 1 a 6, dibuja una figura donde se observan dos postes: a la izquierda uno de 8 metros de longitud y otro a la derecha de 6 metros. Las bases de los postes situados a 10 m. Traza una línea recta d_1 de la punta del poste izquierdo a un punto *x* entre las bases de los postes, y de ese punto continúa una recta d_2 a la punta del poste derecho. Asigna como incógnitas a *x* y *y*. Correspondiendo a las distancias de la base del poste izquierdo al punto de llegada y de éste a la base del otro poste.

Utiliza teorema de Pitágoras para calcular d_1 y $d_{2,}$ y al sumarlas obtiene la longitud del cable.

La expresión obtenida D(x,y) depende de dos variables y la cambia por D(x), especificando el dominio de la función. Simplifica, y la deriva, obteniendo $D'(x)$.Simplifica e iguala a cero. Hace manipulaciones algebraicas para despejar x, obteniendo dos soluciones: 1 y -2. Considera como correcto punto de llegada del cable x=1, la sustituye en la función y obtiene como longitud del cable D= 18.87 m

En el dialogo posterior con el investigador se confirmó la sospecha de su buen entendimiento sobre la posible llegada a diferentes puntos de la base, tal y como se puede apreciar en la imagen de la figura 4.4, líneas 52 a la 57.

Λ En la práctica del alumno H, se observa, entre otras cosas, que reconoce que se trata de un problema de optimización. Se centra en el punto de llegada del cable y de las magnitudes variables correspondientes. Las relaciona, y construye la función, la deriva, iguala a cero y propone una solución. El significado que tiene el estudiante de los objetos matemáticos utilizados es adecuado para este tipo de problemas Ω.

Objetos matemáticos: De acuerdo con la clasificación del EOS (1994, 2004) de los objetos matemáticos primarios, en la práctica del alumno H se identificaron los más relevantes, sin pretender ser exhaustivos:

- *SITUACIÓN-PROBLEMA*

Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

El problema propuesto, de acuerdo con la clasificación de Font (2007) es de tipo escolar, de contexto extra-matemático, evocado de aplicación.

- *LENGUAJE*
- ➢ *Verbal:*
  Términos precisos: longitud, distancia, opuesto, adyacente, hipotenusa.
- ➢ *Simbólico*: d_1, d_2, x, y, D(x,y), D(x), D'(x)
- ➢ *Gráfico*: dibuja un poste de altura 8 m y de la punta sale un cable hacia un punto situado a una distancia *x* del poste izquierdo y de allí hacia la punta del poste de 6 m.

- *CONCEPTO-DEFINICIÓN*
  - ➢ *Conceptos explícitos*: longitud, triángulo rectángulo, dominio, función y derivada.

- *PROPOSICIONES*
  - ➢ *Proposiciones explicitas:* Teorema de Pitágoras,
  - ➢ *Proposiciones implícitas*: la longitud es aditiva

- *PROCEDIMIENTOS*
- ➢ *Procedimientos explícitos:* simplificación de una expresión radical, derivación de una función radical, despeje de *x*.
- *ARGUMENTOS*
- ➢ *Argumentos explícitos*: Asegura que si existe una longitud mínima del cable y la encuentra.
- ➢ *Argumentos implícitos:* La longitud del cable que une las puntas de los postes toca un punto entre las bases.

Los *procesos matemáticos*, de acuerdo a la propuesta de Font (2008) detectados en la práctica del alumno H son los procesos de:

a) *Comunicación*: en el sentido de que entiende enunciados matemáticos de otras personas.

b) *Significación*: entiende el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen.

c) *Comunicación*: en el sentido de que produce un texto como respuesta.

d) *Materialización*: realiza una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases.

e) *Argumentación*: está basada en un proceso de:

(1) *Significación*: supone que el cable llega a una distancia x entre las bases de los postes.

(2) *Enunciación*: la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos.

(3) *Enunciación:* la longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las hipotenusas.

(4) *Algoritmización*: manipulación algebraica transformando D(x, y) en D(x).

Obtiene D'(x). Iguala a cero, simplifica y despeja x obteniendo $x = 1$ y $x = -2$

(5) *Enunciación*: Desecha x=-2 ya que está fuera del dominio.

(6) *A*lgoritmización: realización de cálculos numéricos

Solución D(x,y)= 18.76 m

Los procesos más relevantes identificados en la práctica del alumno H, son: un proceso de comunicación: en el sentido de que entiende enunciados matemáticos de otras personas; proceso de significación: entiende el significado del enunciado del problema y de los términos que aparecen; proceso de comunicación: en el sentido de que produce un texto como respuesta; y un proceso de materialización: realiza una representación ostensiva de los dos postes situados a 10 m entre sí en las bases.

Su proceso de argumentación se basó en:1) un proceso de significación: supone que el cable llega a una distancia x entre las bases de los postes, 2) tres procesos de enunciación: la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos ; la longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las hipotenusas; y desecha x= -2 ya que está fuera del dominio, 3) dos procesos de algoritmización: manipulación algebraica transformando D(x, y) en D(x), obtiene D'(x), iguala a cero, simplifica y despeja x obteniendo x = 1 y x= -2 ; y la realización de cálculos numéricos.

II. Transcripción de pensamiento en voz alta : A continuación se presenta en forma escrita en la Tabla 4.3 de la línea 1 a la 116 lo que el alumno H pensó en voz alta en forma simultánea al estar resolviendo el problema propuesto. En la columna de la izquierda se lleva una numeración consecutiva con la finalidad de poder identificar alguna línea de interés. En la columna derecha, se encuentra el escrito principal. Asimismo, periódicamente se escriben, referencias en el tiempo para ubicar mejor el proceso desarrollado.

Posterior a la presentación del trabajo del alumno, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis en la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Transcripción: Caso H

Alumno: (A)   Profesor : (P)

(00:01)

A: ok, comenzamos leyendo el problema: paso 1: leer el problema en voz alta: *dos postes con las longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso, es decir parados como usualmente están los postes; con bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste*, es decir… paso 2: comprender el problema, la parte difícil… *dos postes con longitudes de 6 y 8 metros... lados distintos… se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima*, es optimización *obtención de un mínimo de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes*, no especifica cuál puede ser el de 6 o puede ser el de 8… *hasta un punto en el suelo entre los postes, un punto en el suelo y luego hasta la punta del otro poste*… como va de la punta a la punta del otro poste no importa por cual se empiece lo importante es en cuál punto del suelo se va a poner el cable, ah prosigue hacer una gráfica que es lo más conveniente y ayuda bastante, tenemos un poste mal dibujado por cierto... de 8 metros, tenemos un poste de 6 metros ok… poste de 6 metros y sus bases están separadas por una distancia de 10 metros,... diez metros, lo que se pretende es obtener distancia mínima vamos a bautizar a nuestra variable como d, muy bien… muy bien… vamos a ver… de la altura de un poste a un punto entre los dos luego hacia arriba, pretende hacer una especie de V, uhm… yo diría que hay que hacer una especie de relación, bueno obviamente hay que hacer una relación pero... al unirlo con el suelo se va a formar un triángulo, el unirlo con el extremo del otro poste se va a formar otro triángulo entonces para calcular esa distancia tendría que hacerse la suma de dos hipotenusas utilizando el teorema de Pitágoras; el problema es en qué punto del suelo va a estar uhm… punta de uno de los postes, problema de , máximos y mínimos que estén una ecuación, y una función y relacionarlas ah… muy bien muy bien veamos…

(05:50)

A: *dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de 10 metros, calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes, luego hasta la punta del otro poste.*… uhm… ok ambas puntas van a ir a x punto del suelo, entonces de la punta de un poste a ese punto vamos a hacer una distancia x de la punta del otro poste hacia ese punto del suelo vamos a hacer una distancia y muy bien entonces… uhm… mmhh...según teorema de Pitágoras x^2 sería igual a la altura del poste que sería uno de los catetos sería el de 8 metros 8^2 más 10… menos... una distancia digamos C^2 entonces x sería igual a la raíz cuadrada de la suma de estos dos catetos… al otro poste es el mismo caso nada más que utilizando la otra altura que sería 6 al cuadrado… uhm…

(1 minuto pensando en silencio)

(11:40)

A: aah! Muy bien, bien encontré otra forma de verlo, si si si si si si si…. muy bien… podemos verlo como un solo triángulo ya que la altura entre las dos puntas y las dos bases es la misma, se hace 10 metros pero el ángulo cambia… no no no puede verse así porque no están a la misma altura, entonces son más de 10 metros de diferencia… uhm… muy bien

12:45

13:44

P: mucho silencio….

A: uhm… vamos a hablar más pues… vamos a utilizar la misma fórmula que usamos al principio para sacar la hipotenusa de los dos triángulos que se forman cada punta del poste con un punto x de la distancia entre los dos puntos que serían los 10 metros… uhm… al cuadrado más… y al cuadrado la raíz... entonces uhm… uhm… una función que relacione estas dos distancias podría ser… D (x,y) igual a x más y sustituyendo sería $D(x,y) = \sqrt{(8)^2+(10-z)^2}+\sqrt{(6)^2+(10-z)^2}$, desarrollamos $D(x,y) = \sqrt{64+100-20z-z^2}+\sqrt{36 \quad +100-20z+z^2}$ … ah… no creo que así no es...(*borra en la parte superior de la primera pagina*)

16:41

… muy bien vamos a tratar de buscar otra forma de visualizar el problema… a 8 y 6, 8 y 6 metros de altura, 10 metros de diferencia… si está más largo en cierto punto va a ser más corto en otro punto, es decir como hay una distancia de 10 metros entre los dos si está a 7 metros de 6 metros va a estar 3 metros del poste de 8, eso es una pista, debe decirme algo; esta diferencia debe de ser una manera de relacionar pero ¿Cómo?... uhm… veamos veamos veamos… uhm… debía hacer es… en lugar de buscar el valor de x como hipotenusa busco una fórmula para el cateto, cateto adyacente que sería 10 metros menos la longitud del cateto del otro triángulo… ah… uhm… no estoy buscando la hipotenusa, estoy buscando la longitud del cateto ya que sabiendo la longitud del cateto puedo usar el teorema de Pitágoras y fácilmente encontrar el valor de x y el valor de y… o sea estoy buscando longitud, pero hay varias longitudes que yo puedo encontrar, como es la distancia del poste de 8 metros al punto en el piso o la distancia de un punto en el piso al poste de 6 metros; o la distancia de la base de ese punto en el piso de la base del poste de 8 metros y de la base del poste de 6 metros también; el problema es cuál longitud es la que tengo que encontrar, o más bien la que tengo que relacionar con la función para poder encontrar la distancia…

20:45

dice…leemos el problema de nuevo: *dos postes con las longitudes de 6 y 8 metros respectivamente poste de 8, poste de 6, se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de 10 metros, ok 6 por diez y ocho por 10… calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste,* muy bien... muy bien… lo que puedo intentar es… calcular la longitud… del poste de 6 metros hasta la base del poste de 8 metros y eso restarlo a una distancia x, calcular la distancia que hay de la punta del poste de 8 a la base del de 6 y restarle una distancia *y*, entonces después esa ecuación relacionarla con una función… con el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre cada base al punto fijo del piso… vamos a intentarlo; sería… bautizamos como la primera distancia a x a ser la distancia y, entonces 80 al cuadrado más 10 al cuadrado es igual a 6500 entonces 6500 es igual a 80 al cuadrado más 10 al cuadrado uhm…

(24:24)

A: menos x… muy bien… no no es así… porque si paso la x a la izquierda, 6500 pasaría al otro lado como negativo se haría, quedaría igual a 0 se cancelaría, y no deben cancelarse… a ver x es igual a…

x +y = 80^2 +10^2 igual que x +y = 60^2 +10^2 uhm eso es bastante confuso… sabemos que x +y es igual a 10 metros… si… nos queda claro *(borrando*)… entonces podemos poner que

6500 es igual a 80^2 +
(x +y)^2 -y, entonces 6500 es igual a 80^2 son 6400 + x^2 podemos también sustituir la y, entonces
10=y- x, entonces tenemos que 6500 = 80^2 + x + $(10 –x)^2$ - y- (10 – x)…
29:01
Aquí las x se cancelan entonces 6 500 es igual a 6400 + 100 - 10 -x… y en la otra ¿Por qué 80? Porque si es en quintos… que ondaa son 8 dios mío… chanfle, chale… 8^2 es 64, más 10^2 164, chin casi nunca… 164 de donde saque 6500 dios mío… ah… total son 64 + 100 – (10 - x), la otra sería 136 es igual a 6^2 + despejando la x sería y- 10, Y menos… (10 – y), (10 – y), correcto… (10 – y), mas y^2 menos…
30:53
uhm…menos… x, si despejamos la x es 10 - y, 10 - y entonces tengo que 136 es igual a 36 mas se cancelan las y,... 100 - 10 + y, ...tengo que y es igual a 136 - 36 - 100 + 10… y es igual a 10… 164,
x= 10… x no puede ser igual a 10! Algo salió muy mal *(borrando)*… ok… otra forma de visualizar el problema... no funcionó… veamos si encontramos otra cosa hay alguna información en el enunciado del problema en la que no nos dimos cuenta al principio
(33:33)
A: muy bien… ocho y seis, postes de distintas alturas, 10 metros de diferencia entre ellos… queremos un cable que vaya de la punta de uno al piso y del piso a la punta del otro… uhm… pero vamos a intentarlo así, x + y = 10,
$D(x,y) = \sqrt{(8)^2 + (10-y)^2} + \sqrt{(6)^2 + (10-x)^2}$ … uff…. Suena mas *(aparece en pagina)* convincente… pues esto podemos ponerlo como de 1 y de 2… x + y = 10… muy bien, ...lo que podemos hacer es despejar la x… x = 10- y entonces D(x) sería
$\sqrt{64 + (10-y)^2}$ mas $\sqrt{(6)^2 + (10-x)^2}$ … D(x) es igual a la raíz de 64, desarrollamos el binomio sería 100 – 2y, 10 por 2 veinte, menos 2y – 40y + $4y^2$ no no no no no…. y = 10-x … ok… ok vamos de regreso… D(x) sería igual a la raíz de 64 más 10 sustituimos la y menos 10 menos x…
38:08

Tabla 4.3 Transcripción: Caso H.

Elementos de gestión metacognitiva: La *letra cursiva* se utiliza para tramos del enunciado del problema; los símbolos: Λ y Ω para indicar el inicio y la terminación de algún comentario vertido sobre lo observado.

- Comprensión del enunciado problema:

El alumno inicia el proceso de resolución del problema, leyendo su enunciado. Lo lee tres veces (líneas: 3, 27 y 71) a lo largo del proceso con la finalidad de entenderlo mejor. Refiere como paso 1: leer el problema en voz alta y como paso 2: comprender el problema, la parte difícil. Las frases: lo importante es en cuál punto del suelo se va a poner, el problema es en qué punto del suelo va a estar uhm y Luego hasta la punta del otro poste…uhm…OK ambas puntas van a ir a x punto del suelo (líneas: 14, 23 y 30), indican que en la etapa de comprensión del enunciado, el alumno rápidamente identificó que la parte más importante para era el entender adonde llegarían los cables.

En la línea 15, después de leer el enunciado y remarcar sobre el punto de llegada, dice: ah prosigue hacer una gráfica que es lo más conveniente y ayuda bastante. Este dibujo se aprecia en la figura 4.3, líneas de la uno a la cinco, Λ el dibujo de los postes considera que ayuda bastante supuestamente a entender mejor el enunciado del problema. Sobre la figura hace una serie de expresiones tales como *vamos a ver, uhm* que indican que está reflexionando sobre el problema. Línea 21: Yo diría que hay que hacer una especie de relación; a formar un triángulo; otro triángulo; hipotenusas; Teorema de Pitágoras, es en la observación de la figura donde el alumno evoca la necesidad de establecer relaciones entre variables, y la identificación de triángulos e hipotenusas, le implica el uso del teorema de uso más frecuente en estos casos en la práctica docente Ω. Λ Todo esto último le evoca naturaleza del problema Ω.Lineas 23 y 24: problema de máximos y mínimos que estén en una ecuación, y una función y relacionarlas ah…

Hacia la línea 33 y después de aproximadamente 8 minutos en esta etapa de comprensión, considera que ha entendido el problema e inicia el primer aborde del mismo. Aunque hacia la línea 37 pasa un minuto en silencio, y al terminar exclama: ah muy bien, encontré otra forma de verlo, línea 39. Después de este intento vuelve a quedar en silencio por aproximadamente 2 minutos y al reiniciar trae nueva estrategia.

- Planeación (seleccionar estrategias):

Λ Se encuentra una planeación deficiente que se refleja en el tipo de estrategias y la calidad de ellas Ω

Después de hacer el esquema, y releer el enunciado, de la observación de la figura 4.3, donde se han formados triángulos rectángulos, a partir de la línea 23 el alumno H evoca el teorema de Pitágoras. En la línea 33 aplica este teorema a los triángulos pero algo le inquieta y se sumerge en un minuto de pensamiento mudo.

Al finalizar este minuto, presenta otra estrategia para resolver el problema: podemos verlo como un solo triángulo ya que la altura entre la puntas y las dos bases es la misma, línea 42.

En las líneas 75 a 79, plantea otra estrategia: lo que puedo intentar es…calcular la longitud del poste de 6 metros hasta la base del poste de 8 metros y eso restarlo a una distancia x, calcular la distancia que hay de la punta del poste 8 a la base del 6 y restarle una distancia y, entonces esa ecuación relacionarla con una función…con el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre cada base al punto fijo del piso…vamos a intentarlo.

Λ Se observa en este caso que el alumno pasa de la etapa de la comprensión al diseño o selección de una estrategia sin aun haber comprendido el enunciado del problema Ω.

- Supervisión/monitoreo (seguimiento de…)

En esta componente metacognitiva de supervisión del proceso, el alumno da seguimiento a la resolución del problema, tal y como se muestra con encuentran expresiones tales como:

Línea 41: no no no puede verse así porque no están a la misma altura..

Línea 84: no no es así porque si paso….

Línea 87: uhm eso es bastante confuso…

Línea 95: que ondaa son 8 dios mío…

- Regulación/control (se equivoca y corrige):

En esta acción regulativa el resolutor identifica donde se ha equivocado (según él) y corrige el rumbo del proceso. La presencia de esta actividad se evidencia mediante expresiones tales como:

Línea 53: Después de desarrollar unas fórmulas: ah…no creo que así no es…muy bien vamos a buscar otra forma de visualizar el problema.

Línea 102-105: x no puede ser igual a 10! Algo salió muy mal…otra forma de visualizar el problema no funcionó.

Línea 242 de la etapa de diálogo: ok vamos a echar un vistazo a un problema parecido…Stewart página 329 uhm…

En esta expresión se identifica un elemento de regulación, ya que al considerar muy pequeña esa distancia corrige el rumbo utilizando una nueva estrategia (fórmula).

Λ Ω.

Evaluación /verificación (de la tarea en su totalidad):

La evaluación final del proceso de resolución, no es claramente atendida por el alumno resolutor en la etapa de resolver el problema de manera solitaria. Sólo hasta en la etapa de diálogo con el investigador cuando el alumno exterioriza la forma de asegurarse de que el resultado es correcto, línea 297.

III. Integración de información: Después de haber revisado la producción escrita y las transcripciones en voz alta del alumno H, en donde se identificaron objetos y proceso matemáticos y elementos de gestión metacognitiva, se está en posibilidad de integrar ambos trabajos bajo el formato de hiperproceso de resolución de problemas esto con la finalidad de entender de una mejor manera este importante proceso en Matemáticas. Posteriormente, se presenta la información antes mencionada bajo el enfoque de competencia.

El Hiperproceso de resolución del problema: El Proceso total de la resolución del problema, fue conducido por el alumno H de la siguiente manera:

a) Etapa de la comprensión del problema: Ha realizado y acertado en el proceso de comunicación, en el sentido de que: entiende enunciados matemáticos de otras personas, para ello ha tenido que entender el significado –proceso de significación también acertado- del enunciado del problema.

b) Etapa del diseño de un plan: El alumno diseña o selecciona cuatro planes o estrategias para resolver el problema, pero inmediatamente después de planteada la estrategia le entran dudas abandonándolas rápidamente, excepto la ultima que ejecuta.

c) Etapa de la ejecución de un plan: Ejecuta y desarrolla la cuarta estrategia, haciéndolo correctamente.

d) Etapa de la comprobación de la solución: Esta etapa no es atendida por el alumno.

Competencia para resolver el problema: Desde el punto de vista de las competencias, se puede decir que el alumno H fue competente para resolver el problema.

Conocimientos: Esta componente de la competencia, corresponde a los objetos y procesos matemáticos intervinientes para resolver el problema. Los objetos matemáticos utilizados por el alumno H a lo largo de su práctica, corresponden a significados adecuados de los mismos. En particular, la conciencia de la importancia del punto de llegada del cable al piso, lo cual a su vez revela sus significados de la variación.

En cuanto a los procesos, se acerta en la comprensión del enunciado mediante los procesos de comunicación y significado así como en algoritmización.

Habilidades: Esta componente de la competencia, corresponde al razonamiento como la principal habilidad del pensamiento. Para comprender un enunciado de un problema es necesario tener la capacidad de conceptualizarlo y de interpretar, se consideran acertadas estas habilidades para este problema. Visualizó el enunciado del problema, correctamente.

La resolución de problemas, entre otras cosas implica elegir con eficacia entre diferentes alternativas o estrategias de solución. El alumno buscó entre cuatro, siendo afortunada una de ellas.

Actitudes: Esta componente de la competencia, corresponde a comportamientos que responden a la disciplina y a los valores. Se puede decir que el alumno tuvo una buena actitud hacia la resolución del problema, en el sentido de aceptación total de la tarea, ya que no la abandonó sin concluirla. Al margen, se comenta que en varias ocasiones a lo largo del proceso el alumno externa en voz alta comentarios de autocontrol y de automotivación.

4.3.3 Caso ilustrativo B

El tercer caso que se presenta corresponde a la alumna B, considerada como exitosa por sus profesores y que cursaba Cálculo multivariable en tercer semestre de una licenciatura en ingeniería. A esta alumna B se le aplicó un problema el cual intentó resolverlo:

Problema: El problema de la escalera

> Un pasillo de 4 pies de ancho, llega en ángulo recto a otro pasillo que mide 8 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?

La aplicación del problema a la alumna se llevó a cabo dentro de un cubículo del área de profesores. Tuvo una duración de 103 minutos, de los cuales, la alumna sola y aislada intentó durante 32 minutos resolver el problema y al final, 71 minutos dialogando con el investigador en ese mismo lugar. La alumna se sentó en una silla, pudo escribir en un escritorio disponible y la grabadora de sonido se colocó sobre ese mismo escritorio. Inicialmente se le dieron las instrucciones a la alumna y se le dejó completamente sola dentro del cubículo. A lo largo del proceso a la vez que escribía o se detenía a reflexionar, lo que decía en voz alta era captado por la grabadora de sonido. Posteriormente el investigador en algunas ocasiones regresó para supervisar el desarrollo de la actividad, como puede apreciarse en la transcripción. Al finalizar la tarea el investigador dialogó con ella sobre las dudas, obstáculos y tensiones emocionales que aparecieron. Se recabaron cinco hojas escritas, posteriormente se digitalizaron, mismas que se presentan párrafos adelante. La grabación de sonido, fue transferida a una computadora y transcrita en un documento escrito, mismo que más adelante se presenta.

A continuación se presenta la información recogida para este caso. En una primera sección, con el número romano I, la producción escrita y con el número II, las transcripciones a sus pensamientos en voz alta. En una sección III, se integró la información recopilada por estas dos fuentes originales (I y II) mediante las nociones de competencia y proceso de resolución de problemas.

La información obtenida fue analizada en dos niveles:
a) Un primer nivel donde se *describe* lo sucedido tanto en la práctica escrita como en la parte de los pensamientos. En la práctica se identificaron los objetos y procesos matemáticos intervinientes en la resolución del problema. En la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

b) Un segundo nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Los comentarios iniciarán con el símbolo: Λ y terminarán con: Ω.

I. La producción escrita: La producción escrita de la alumna B, en su intento por resolver el problema propuesto consta de seis páginas de la que se muestra digitalizada la figura 4.5. La columna de la izquierda corresponde al número de línea y es incluida con la finalidad de dar alguna referencia específica en el desarrollo del análisis de su trabajo.

Posterior a la presentación del trabajo de la alumna, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis se reseña lo sucedido en esta práctica. Posteriormente y en este mismo nivel de análisis se presentan los objetos y procesos matemáticos identificados en esta misma práctica de la resolutora.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Caso B

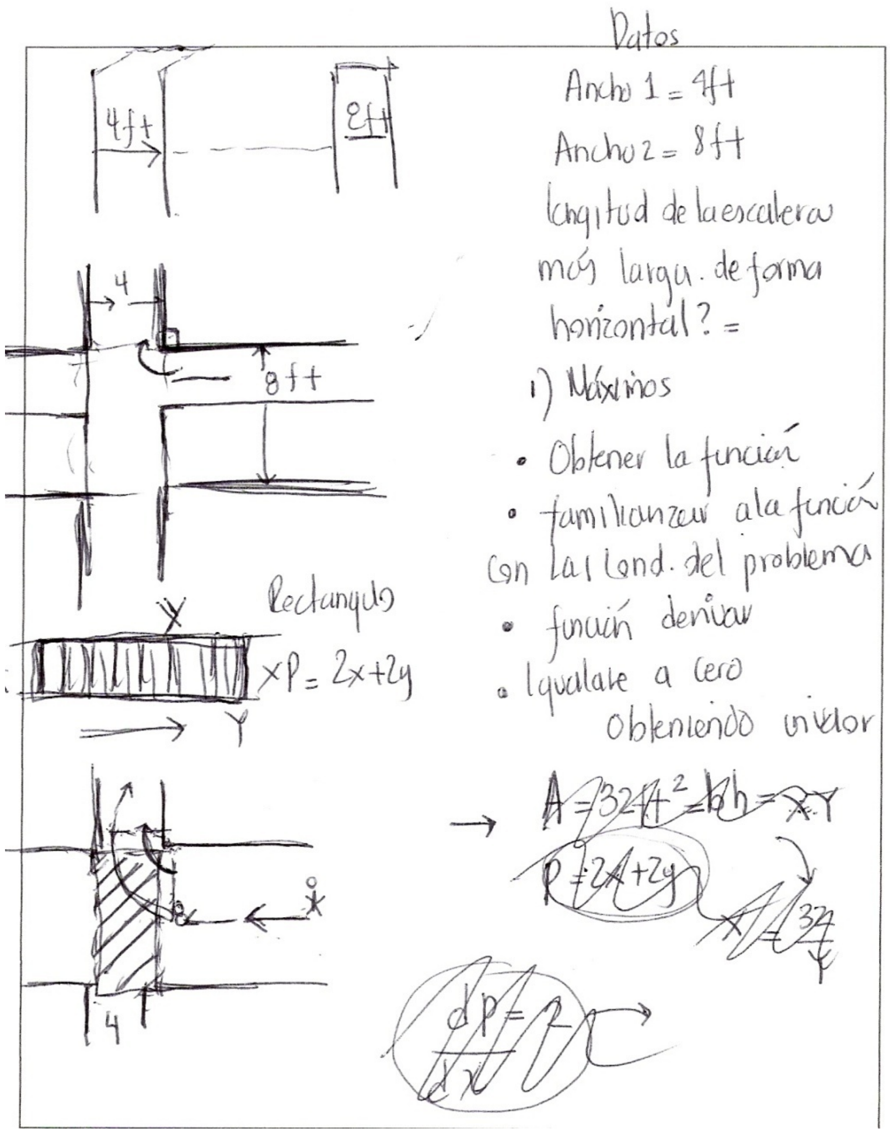


Figura 4.5 Producción escrita: Caso B.

La *práctica matemática*: Seguidamente se narra la práctica desarrollada por la alumna B para intentar resolver el problema que se le fue aplicado. La *práctica* es de naturaleza *actuativa* y que corresponde a la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta.

En la figura 4.5, de la línea 1 a la 40, la alumna B plantea su práctica resolutora cuando se encontraba aislada. Un trabajo inmediatamente posterior se desarrolló mediante la interacción con el investigador avanzando en gran medida en la resolución del problema.

Con la finalidad de comprender el enunciado, dibuja cuatro figuras. La primera donde pinta dos pasillos aislados de 4 y 8 pies de ancho. Otra figura con dos pasillos en forma perpendicular también de 4 y 8 de ancho. Una tercera, correspondiente a un rectángulo de dimensiones x y y. Finalmente otra donde pinta el tránsito de la escalera por el cruce de los pasillos.

Puesto que no logró comprender el enunciado del problema, en particular la visualización y materialización de la escalera en su tránsito por el cruce de pasillos, no alcanzó a planear.es decir seleccionar una estrategia y por tanto, tampoco desarrollarla.

En la etapa inmediatamente posterior de dialogo con el investigador, el obstáculo de visualización fue removido y el avance resolutorio fue notorio.

II. Transcripción de pensamiento en voz alta: A continuación se presenta en forma escrita (tabla 4.4) lo que la alumna N pensó en voz alta en forma simultánea al estar resolviendo el problema propuesto. En la columna de la izquierda se lleva una numeración consecutiva con la finalidad de poder identificar alguna línea de interés. En la columna derecha, se encuentra el escrito principal. Asimismo, periódicamente se escriben, referencias en el tiempo para ubicar mejor el proceso desarrollado. Posterior a la presentación del trabajo de la alumna, y en un primer nivel eminentemente *descriptivo* de análisis en la transcripción, se identificaron los elementos de gestión metacognitiva que intervienen en el proceso de resolución del mismo problema.

Es en un segundo de nivel de análisis, donde se pretende *explicar* mediante comentarios insertos, lo que ha sucedido. Estos comentarios de carácter explicatorio inician con el símbolo: Λ y terminan con: Ω.

Transcripción: Caso B

La alumna sola en un cubículo está resolviendo un problema, comentando en voz alta y siendo grabada en sonido.

0:25 Bueno, el problema… dice así, el problema de la escalera, un pasillo de 4 pies de ancho llega en ángulo recto a otro pasillo, que mide 8 pies de ancho, ¿cuál es la longitud de la escalera más larga que puede transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?

0:47 Bueno.. que tengo… tengo.. datos del ancho… entonces voy a hacer.. el esquema…dice que un pasillo es de 4 pies de ancho que está en ángulo recto a otro pasillo que mide 8 pies de ancho…okey.. de ancho… 4 pies.. y. que viene en ángulo recto a otro pasillo… que mide… 8 pies de ancho...la pregunta es… tengo datos… tengo el ancho uno…que es igual a cuatro pies… tengo el ancho dos del pasillo que es igual a ocho pies… la pregunta es ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?…uhm …¿cuál es la longitud… de la escalera?…. hace énfasis en la más larga… uhm…

2:08 Bueno.. para empezar estoy batallando a visualizar el dibujo… se que son dos pasillos… que ambos están… separados en ángulo recto, o sea que puede decirse que son… ¿paralelos entre si?… uhm… que llega en ángulo recto a otro pasillo que mide ocho pies de ancho… la pregunta es… ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse de forma horizontal alrededor de la esquina?… alrededor de la esquina...uhm... okey... entonces longitud de la escalera más larga de forma horizontal… eso es lo que me están pidiendo.

3:07 …haber haber haber haber haber…tengo un ángulo… tengo anchos… me están pidiendo la longitud… longitud que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina…

3:26 G …se me hace muy confusa la pregunta… porque, menciona una esquina, pero… pero no entiendo….se… si es transportarse de forma horizontal… yo yo visualizo que es de pasillo a pasillo…porque si está antes… separados en ángulo recto quiere decir que se puede decir que estaba un marco entró otro… según yo, pero… me está diciendo que… se transporta de forma horizontal alrededor de la esquina… que quiere decir, que quizá este… va ser de esquina a esquina…cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse de forma horizontal…alrededor de la esquina… esquina esquina esquina esquina esquina esquina esquina esquina esquina… ¿esquina de qué? Del pasillo supongo…uhm… horizontalmente alrededor de la esquina…

4:42 Bueno… primero… se que son problemas de optimización…cuando se trata de un problema de optimización tengo que analizar el problema… y se… que tengo que obtener una función que dependerá de… dos o más variables… dependiendo de cuantas variables sean será el método que aplique… okey… me está pidiendo la longitud entonces tengo entendido que tengo que sacar una función de longitud… más no entiendo… y la pregunta no la entiendo… se va a transportar horizontalmente alrededor de la esquina…alrededor de la esquina… un pasillo de cuatro pies de ancho… llega en ángulo recto a otro pasillo… llega en ángulo recto a otro pasillo que mide ocho pies de ancho… llega en ángulo recto… llega en ángulo recto…

6:10 oh puede ser así… un pasillo de cuatro pies de ancho… va a llegar… llega en ángulo recto o sea que quizás intersecta con otro pasillo que es de ocho pies de ancho…ah… y me está diciendo…¿Cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?

Alrededor de la esquina… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la… me está pidiendo la longitud de la escalera… aah…uhm..uhm…uhmm… alrededor de la esquina… horizontal alrededor de la esquina…

7:29 siento que el problema está en que… no puedo visualizar tampoco bien el esquema… porque… me ayudaría de forma visual entenderlo para poder quizá de ahí derivar la función que necesito… se que… es la longitud de la escalera…eso si lo sé… me está hablando de una transportación que se va a transportar o se va a mover de forma horizontal, pero me sigue ocasionando mucho problema… alrededor de la esquina… de la esquina… un pasillo de cuatro pies de ancho llega en ángulo recto a otro pasillo de ocho pies de ancho o sea se topan… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente…(sonido de celular)…horizontalmente… alrededor de la esquina…

8:37 bueno aquí… que puedo hacer…uhm…ahh…cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse de forma horizontal alrededor de la esquina… ay alrededor de la esquina, no entiendo eso de alrededor de la esquina… uuhm…según hasta ahorita creo tener el esquema… creo tener que es un pasillo de cuatro pies de ancho… que llega en ángulo recto… aquí está el ángulo recto… a otro pasillo que mide ocho pies de ancho, es que de hecho es el doble, al pasillo original… aja…okey…

9:34 me dice… ¿cuál es la longitud de la escalera más larga… que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?… de la esquina… me supongo que va ser…me supongo que… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse alrededor de la esquina… esquina… ay pero es que no entiendo eso de la esquina…uhm…de la esquinaaa…ah…haber…tengo que entender…si entiendo que es el ancho de los dos…se que se intersecta en ángulo recto una de otra formando como una cruz o sea yo visualizo… pero la pregunta me está pidiendo la longitud de la escalera más larga o sea es un máximo, voy a sacar máximos, cuando saco máximos tengo que sacar una función, entonces el primer paso para sacar máximos es porque me está pidiendo la longitud máxima…es… tener mi función o sea obtener una función… después se que dependiendo de las variables en las que estas voy a relacionar voy a relacionar la función con aquella condición que me de el problema en este caso yo supongo que es, que tiene que transportarse horizontalmente alrededor de la esquina entonces tengo que familiarizar… a la función… con… las condiciones del problema…

11:48 después se que dependiendo el número de variables que esté utilizando será, el procedimiento que utilice… por ejemplo aquí no estoy sacando volumen.. no estoy sacando…eh… otras cosas que intervengan X Y y Z entonces quiere decir que va a ser simplemente una función de dos variables…creo… entonces va a ser...una derivada… primero para sacar el máximo va a ser una derivada, la función… la voy a derivar… una vez derivada la igualaré a cero…la derivada…con respecto a X… después voy a igualarla a cero obteniendo un… obteniendo un valor… que en este caso será una de las dos variables, de las que depende la longitud…obtengo el otro valor por sustitución y el final sustituyo en la.. en la...función de longitud y así obtendría el máximo, esto se puede comprobar… pero mi problema es… que…la condición que me da el problema, que es que se pueda transportar horizontalmente alrededor de la esquina no alcanzo a visualizar… no alcanzo a visualizar… alrededor de la esquina… de…supongo que es del pasillo pero… uhm…

13:29 no… no alcanzo a entender no no lo puedo visualizar… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse… horizontalmente alrededor de la esquina…uhm… cuál es la longitud de la escalera…a ver… tengo mi escalera…aja… el transporte va a caer de forma horizontal y me está pidiendo una longitud de la escalera más larga que pueda transportarse alrededor de la esquina… alrededor de la esquina…alrededor de la esquina…uhm…alrededor de la esquina…bueno… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina… uhm..esquina, la palabra esquina me ocasiona muchos problemas… esquina..vamos…ah…haber…cuál.. haber..creo…creo que… de aquí, cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse, esquina… donde tengo una esquina.. aquí tengo una esquina… aquí tengo otra esquina…se… ¿hará referencia a la esquina que se forma entre la unión de los dos pasillos?...

15:28 …cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina…o sea… horizo alrededor…o sea voy a rodear la esquina… que longitud debe de tener si la voy a rodear horizontalmente… horizontalmente alrededor de la esquina…uhm… horizontalmente alrededor de la esquina… okey… cuatro esquinas… alrededor, como voy a ir cargando la escalera horizontal… entonces… no puedo llevar una escalera si voy caminando de forma horizon..si voy caminando sobre el pasillo de ocho pies llevo mi escalera, pero al momento de dar la vuelta…cuál debe de ser la longitud máxima que pueda transportarse alrededor de la esquina… que pasaría si yo tomo la escalera como un… rectángulo muy delgadito, solo para que me ayude a saber un poco las dimensiones, de la escalera… estas dimensiones que serían Y X porque no están en el plano… suponiendo suponiendo para saber la longitud…

17:12 que pasaría...es como si yo llevara cargando un rectángulo bien delgadito… simulando que es… la escalera…voy caminando y quiero dar vuelta en la esquina del pasillo….uhm… no puedo llevar una escalera muy grande porque va a topar… si hablamos de longitud quizá tenga que ver con el perímetro… ¿pero como con el perímetro si es una escalera? Eso es si tomo la escalera como un rectángulo… si fuera…sin..sin los… como se llaman… sin los mini escalones… si lo llego a tomar como un rectángulo delgado… ¿Qué pasaría?... me preocuparía su perímetro… no su área… porque puedes, bueno… aunque de hecho… me está pidiendo la longitud… la longitud de la escalera…más larga…el problema, tengo los anchos de los pasillos…

18:32 okey…bueno de, ahorita se me acaba de ocurrir algo… pero de hecho… nada más estoy agarrando ideas, porque todavía no no se como…visualizar bien el problema, ahorita que estoy viendo el esquema… tengo de datos las dos… los dos anchos que de hecho en el centro… en el centro… de la unión de los dos pasillos se me forma un cuadrado…o de hecho es un rectángulo… es un rectángulo que va a tener de base…cuatro… y de… de largo ocho…

19:22 okey…entonces yo quiero bordear la esquina, quiero rodear la esquina con mi escalera transportándola horizontalmente por alrededor de ella… entonces… se… que…. si la, es que no… no puedo… de hecho se me está ocurriendo…de hecho se me está ocurriendo… relacionarlo con las áreas… ¿pero porqué? Porque no… es que no puedo… no puedo tomar esto sin saber el porque…se que se me está formando en el centro de los pasillos un cuadrado porque tengo los dos anchos, pero de que me va a servir sacar el área, ¿de qué me va a servir sacar el área?…¿de qué? ¿De qué? ¿de qué? ¿De qué me va a servir?...bueno suponiendo que la saco… tengo esa área…de hecho esa área… es de hecho la limitante porque, si voy a rodear… el pasillo… con una escalera… es como si estuviera formando una…no se un… semicírculo o algo así porque… si porque… si vengo de forma horizontal, según como estoy entendiendo el problema… vengo como mi escalera (imitación con la boca de pasos)… llego al centro, de la intersección de los dos pasillos y al momento de estar girando es como si estuviera describiendo una… circunfe…una, no no es una circunferencia… bueno de hecho…es como un…medio círculo de hecho… es como un medio círculo… ay aunque…es como si…¿pero de que me sirve..? es como si llevara una trayectoria pero…como poderlo si no…ininteligible. Uhm….

22:06 tengo el área…el área… también la función…y tengo… longitud… no será ¿quizás que pueda relacionar?… el área… el… de las… el área central… que viene siendo… ocho por….treinta y dos pies cuadrados… que es igual a la base por la altura… porque es igual en este caso… si lo hago en el plano X, lo puedo relacionar… con el peri… con el…¿perímetro? Si yo tomara la escalera como un rectángulo ¿Por qué? Porque estoy buscando su longitud… si busco su longitud… la suma de los lados por la del perímetro… pero, si yo lo pongo en función de X y de Y vendría siendo 2X + 2Y entonces… porque va a ser esa relación o sea… quizá porque ya tengo la limitante del área… ya, ya tengo… la limita.. ah… bueno voy a desarrollar esta idea, aunque no se si este bien, tengo el área, que se forma entre las cuatro esquinas, si tomo yo la escalera como un rectángulo en el plano, se que su perímetro va a ser la suma de los lados que es 2X+2Y si a la longitud la llamo Y y a los extremos los llamo X, entonces tengo el perímetro que es 2X+2Y, puedo despejar cualquiera de las dos variables, pero de hecho tendría que despejarla… de aquí… puedo despejar del área, X es igual a treinta y dos cinco enteros entonces el perímetro es igual… no… pero es que el problema es que… no, espera ... espera espera espera, tendría que derivar el la función de, del perímetro… tendría que derivar la función del perímetro, con respecto a… con respecto a X… no con resp no pero es que… si derivo la función del perímetro con respecto a

cualquiera X o Y, me va a dar un numero… fijo…
25:11 por ejemplo si la derivo con respecto a X me va a dar 2 porque Y se comporta como constante entonces… al hacer… no no puede ser porque, si yo esto… esto lo utilizara en la sustitución del área que yo puse que esto entre dos 2 pies cuadrados igual a base por altura que es igual a X por Y, si yo llegara y despejara… en este caso… la…la Y quedaría 32 entre Y me quedaría 32 entre 2 que es igual a qué? a 16… entonces me está diciendo que Y debe ser igual a 16 horizontal…de hecho no puede ser eso, porque… 16 horizontal… uhm…

26:07 estoy…uhm… confundiendo muchas cosas, bueno debe ser algo de… tomando en cuenta lo del rectángulo y lo del área entre la puerta… aunque todavía me queda la idea de lo que dije… cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina…alrededor de la esquina… de hecho según… como…como…en el tiempo como actuaría… entraría así… entraría así… entraría así… así así así… de hecho sería describiendo un medio círculo, mi trayectoria con la escalera porque la voy cargando de forma horizontal… más no se si está correcto eso… quizá la función de mi trayectoria sea un medio círculo…uhm…medio círculo…

28:12 π por radio al cuadrado entre dos… no pero es que ese es el área… dos π por radio es el perímetro… de un círculo… si lo quiero a la mitad sería π por radio… π por radio… uhm… π por radio…ahí podría tener una función… pero es que acá me queda… si yo con.. si yo agarro a…eh, suponiendo…que yo tuviera que tener en cuenta la trayectoria que siga alrededor de la esquina, yo estoy diciendo que es como si fuera un medio círculo, más no necesariamente porque, doy vuelta…ay pero puede ser… haber… que estoy haciendo alrededor de la esquina?...estoy haciendo…ay… como un cuarto de círculo de hecho… y nada más me está pidiendo cuando rodeo la esquina entonces es como un cuarto de círculo…uhm… un cuarto de círculo… entonces quizá okey…entonces quizá si yo…si yo lo analizo como la trayectoria que voy a utilizar ahí, al pasar alrededor de la esquina como un cuarto de círculo, quizá la longitud que a de tener mi escalera…no se si tenga que ver con el radio de ese cuarto de círculo…uhm…no…no no no no... ay diosito…uhm…

30:55 …de nuevo… dice…un pasillo de cuatro pies de ancho llega en ángulo recto a otro pasillo que mide ocho pies de ancho, ¿cuál es la longitud de la escalera más larga que pueda transportarse horizontalmente alrededor de la esquina?...si horizontalmente…horizontalmente… no me puedo imaginar como…no se porque, no me lo puedo imaginar… alrededor de la escalera más larga que pase horizontalmente alrededor de la esquina… horizontal, vertical…horizontal vertical…horizontal alrededor…bueno lo primero que me brinca, que no sea lo correcto es que bueno si voy a ir alrededor, tengo dos anchos diferentes, entonces obligatoriamente tiene que ser menor a los dos…más…no, no necesariamente porque…bueno es que tengo muchos problemas de visualización… uhmmm
32.36

Tabla 4.4 Transcripción: Caso B

Elementos de gestión metacognitiva: La *letra cursiva* se utiliza para tramos del enunciado del problema; los símbolos: Λ y Ω para indicar el inicio y la terminación de algún comentario vertido sobre lo observado.

Este caso B es presentado porque ilustra varios elementos metacognitivos y emocionales.

- Comprensión del enunciado problema:

Inicia con la lectura del enunciado del problema. Lo lee en varias ocasiones de manera total o parcial. Para la línea 16 reconoce que tiene dificultades en visualizar el enunciado del problema, al igual que por ejemplo en la 50,88 y en la 186.

La alumna B identifica correctamente el problema como de optimización, tal y como lo asegura en las líneas 35-38, 69-74, 79-83 donde dice y repite el procedimiento de manera correcta para resolver este tipo de problemas.

Este problema se puede resolver utilizando cálculo con una variable independiente, pero la alumna B al estar cursando un tercer semestre con Cálculo Multivariable, le evoca la posibilidad de usar más de una variable (línea 36,76) lo que se transforma en un obstáculo para su resolución.

Está consciente de que tiene una dificultad para comprender el enunciado del problema, insiste en comprenderlo, pero no se pierde en la ruta exhibiendo con ello mucho control metacognitivo. Más específicamente su dificultad está en el poder visualizar los pasillos y su relación con la escalera. Se conjetura que por ser mujer, la alumna no ha tenido la experiencia del manejo de una escalera y por lo tanto el tener dificultades en su visualización en diferentes contextos.

- Supervisión/monitoreo (seguimiento de…)

Un excelente elemento metacognitivo de supervisión exhibe esta alumna B. Se muestra bien orientada en el proceso, no extraviándose en el proceso. No pierde de vista los datos de que dispone. Se muestra muy segura de que en el momento de que logre salvar ese obstáculo resolverá el problema.

La alumna tiene claro lo que busca, se muestra confiada en ella misma, no se desequilibra, insiste. Exhibe mucho control en sus pensamientos relacionados con el proceso.

Problemas complejos o que requieren mucho tiempo el mismo proceso de su resolución permite que se le vaya conociendo y el que se le puede reformular. Saber más sobre el problema es parte de su resolución.

- Componente actitudinal y emocional.

Este caso B muestra la actitud de la alumna hacia el trabajo matemático. La tenacidad, insistencia y perseverancia en intentar comprender el enunciado, se muestra como una componente fundamental para el éxito o fracaso en la resolución del problema, es decir en su competencia resolutora.

En problemas que implican larga duración temporal, esta componente se vuelve decisiva en la competencia del resolutor ya que sin ella fácilmente se deje el problema de lado.

El control de las emociones y seguridad de poder resolver la situación, la opinión de uno mismo (autoestima). El tiempo invertido en no resolver un problema, ayuda a. B nunca olvidó el problema por hacerlo suyo, se comprometió.

La alumna B tiene una alta autoestima, la cual se considera es producto de la relación con las persona que la rodean (parte del contexto). Su alta estima se valida en otras esferas de su vida escolar.

- Mas comentarios:

Si se estuviera en un proceso evaluatorio, por ejemplo la aplicación de un examen parcial o final y si se limitara la evaluación a lo escrito por la resolutora sin conocer su pensamiento, como docente evidentemente se fallaría. Esto sugiere la conveniencia de evaluar de una manera más integral que solo mediante exámenes escrito de tipo ejecutor.

CAPÍTULO 5
DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este último capítulo se discuten los resultados obtenidos en la toma de datos, se presentan conclusiones, se ofrecen respuestas a los objetivos de investigación planteados así como recomendaciones, conjeturas y consideraciones sobre el trabajo realizado.

El problema formulado cuyo estudio motivó esta investigación, fue identificado y tomado del entorno de este autor, problema que si bien se puede catalogar de muy específico, se considera es bastante representativo de lo que se encuentra en las instituciones escolares formadores de ingenieros o de otros programas educativos que involucren la enseñanza de matemáticas. Por tanto, el problema seguiría siendo válido en nuestro país, en Latinoamérica o en otras latitudes.

La resolución de problemas no sólo atañe a la matemática sino a todas las ciencias naturales, sociales, humanas, la ingeniería, las instituciones escolares etc. y más aun, a la vida cotidiana. Para hacer viable el estudio, se acotó el problema general a una problemática educativa que permitiera el poder observar, estudiar y tomar datos que pudieran arrojar luz sobre el mismo.

La problemática educativa está inmersa dentro de una problemática social y económica por lo que estudios sobre aspectos educativos pueden tener implicaciones en lo social y en lo económico en un país o región. Por ejemplo, la mejora en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de ingeniería, se esperaría un mayor aprendizaje de las mismas y por tanto profesionistas mas formados y se esperaría a su vez un desempeño profesional más competente y por tanto, un mayor impacto en las actividades productivas y por ende en lo social.

Ubicando el problema dentro las investigaciones sobre resolución de problemas, sobre los cuales se ha estudiado desde hace décadas, un reto fue el seleccionar los referentes teóricos para darle significado a la también estudiada noción de comprensión. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) de Godino y colaboradores, resultó ser el idóneo, ya que en la actualidad es el más completo puesto que incluye tanto el conocimiento como su enseñanza, aspectos tales como la práctica matemática, una clasificación e identificación muy fina de los objetos y procesos intervinientes en la misma, los cual permitiría hacer a su vez un acercamiento a las prácticas de los estudiantes resolutores. La teoría en lo posible permite describir, analizar y explicar situaciones problémicas como las que se han tratado.

La irrupción a lo largo del proceso investigativo de la Metacognición, no considerada de inicio fue una sorpresa que obligó a revisar los elementos que la conforman y estudios hechos en esa línea investigativa.

La noción de competencia, tan de actualidad en las organizaciones supranacionales, ministerios de educación, instituciones educativas de todos los niveles, surge en este contexto tan amplio y que obliga a precisar cuál de los significados de la misma, sirvió para el propósito del estudio.

5.1 Discusión

La pregunta que originó esta investigación fue:

¿Qué relación existe entre la comprensión que tienen estudiantes de ingeniería de los conceptos, procedimientos y procesos que se utilizan en la resolución de problemas de optimización y su competencia en la resolución de esos problemas?

Las evidencias encontradas en este proceso investigativo para responder a este cuestionamiento muestran que no es suficiente con el comprender los objetos matemáticos en optimización para ser competentes en la resolución de problemas de ese tipo. En este estudio competencia significa el ser eficaz en, por ejemplo la resolución de problemas.

En el caso ilustrativo B mostrado en el Capítulo 4, se halla en la transcripción de sus pensamientos, al igual que en otros dos casos no exhibidos Ad y Ne, que comprende el objeto optimización, sus componentes básicos de acuerdo al EOS: concepto, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos, más sin embargo no fue los suficientemente eficaz en su uso, es decir en ser competente en la resolución de problemas.

Se coincide con la aseveración de Godino (2003:124): La acción será más flexible y adaptable, generalizable, y por tanto más eficaz si va acompañada de comprensión, de saber por qué se hacen las cosas. Al igual que en el párrafo anterior, el caso descrito ilustra que existiendo comprensión hay más flexibilidad en el proceso de resolución.

Con respecto a Font (2007:4), el cual considera la comprensión como una competencia, consistiendo en ser capaz de reconocer el objeto, sus representaciones, sus propiedades y su uso, se discrepa con ese significado ya que si fuera totalmente valido, entonces quien comprende un objeto matemático sería suficiente para ser capaz de resolver los problemas pertenecientes al campo de donde pertenece el objeto. Esto no se evidencia en los datos recabados productos de la aplicación de los problemas a estudiantes.

Respecto a la primera hipótesis de trabajo se considera que la incompetencia o baja competencia en la resolución de problemas ilustrados por el caso N y otros no exhibidos es explicable por las bajas significaciones de los objetos y procesos, es decir una comprensión parcial de los objetos.

En las transcripciones de los pensamientos en voz alta de los estudiantes al momento de resolver los problemas, se detectó que un factor decisivo a considerar es la gestión metacognitiva del mismo proceso. Estudiantes que exhiben una buena gestión metacognitiva, por ejemplo los casos B, H y Ne, son más eficaces en resolver el problema, acompañada de una buena comprensión.

Se coincide con las investigaciones de Kilpatrick (1985), Schoenfeld (1985) y Rodríguez (2005), que encuentran que aunque los estudiantes tengan los conocimientos (comprensión) necesario no es suficiente para desempeñarse bien ante un problema.

También se comparte con Schoenfeld (1985) y Kaune (2006), los resultados de sus estudios de que parte de las dificultades para resolver problemas tiene que ver con la falta de habilidad para monitorear y regular el propio proceso cognitivo en la resolución de problemas.

Se discrepa con los métodos de estudio llevados cabo por investigadores que aplican problemas resolver a sujetos, no existiendo una relación contextual entre ambos, por ejemplo, Gusmao, Font y Cajaraville (2009). Con estos mismos autores se coincide en el uso del EOS para analizar las prácticas de los resolutores y se recomienda ampliar y afinar la noción de Configuración Metacognitiva como herramienta de análisis para futuras investigaciones.

La segunda hipótesis de trabajo, que refiere sobre la importancia de la gestión metacognitiva, se considera es satisfecha por las observaciones hechas en este estudio.

Una evidencia no esperada es la importancia que tiene la persistencia, la tenacidad en el proceso de resolución del problema. Estos elementos forman parte de la Actitud, en este caso hacia las matemáticas. La Actitud es una componente de la competencia. Se comparte la visión de García (2011) y Gómez (2003) sobre lo deseable que es contar con una actitud favorable en el proceso de resolución, de tenacidad para el logro. También se comparte el hecho de que las actitudes son aprendidas ya sea en el ambiente social, familiar y sobre el que se tiene cierto control, el escolar. Profesores que en su proceso de enseñanza solicitan al estudiante que resuelva en clase un problema en poco tiempo, minutos, aprenderán la actitud de que los problemas deben de resolverse en un breve lapso de tiempo. No fomentando con ello la tenacidad y perseverancia.

La hipótesis explicativa de que el contexto determina los significados de los objetos y procesos matemáticos, los procesos de gestión metacognitiva y actitudes hacia la matemática, ha recibido un refuerzo con los resultados obtenidos en este trabajo. Los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos, están determinados por el contexto de la enseñanza, en este estudio la observación no participante en el aula para conocer sobre el proceso de enseñanza al que son sometidos, abonó a esta hipótesis.

5.2 Conclusiones

De los resultados mostrados, de su análisis y de su discusión se pueden obtener las siguientes conclusiones:

Para la *Etapa Exploratoria*: La realización de este tipo de acercamiento al campo no contemplado inicialmente en el trabajo, fue de gran utilidad ya que permitió que el investigador conociera sobre el contexto y significados institucionales de la noción de optimización lo que influyó positivamente en la toma de decisiones posteriores. Algunos hallazgos no buscados conscientemente, fueron de gran impacto para el investigador, ya que a pesar de pertenecer a este mismo escenario no se había percatado de estos hechos.

El docente VH como caso estudiado más detalladamente, revela como sus concepciones y creencias de la matemática y su enseñanza, son fuertemente influenciadas por el libro de texto que utiliza para sus clases. La falta de textos de matemáticas para ingeniería que consideren las tendencias actuales de enseñanza mediante problemas o el llamado aprendizaje significativo o el enfoque por competencias, permite conjeturar que la falta de este tipo de textos es un obstáculo para que los modelos curriculares más recientes que contemplan estos enfoques, no terminen de llegar al aula. Se estima que si bien es un caso único, por experiencias del autor y en comunicaciones personales, esto tiene validez para el resto de profesores, pero en diferentes grados de influencia.

El estilo de instrucción, tipo conferencia muy actuativo por parte del docente, con gran énfasis en lo analítico y no promoviendo el pensamiento variacional, también puede generalizarse sin gran dificultad al trabajo de otros profesores.

Algunos hallazgos puntuales relevantes son:

- Tanto el libro de texto de cómo el docente mencionado, le asignan gran énfasis a la representación analítica en detrimento de lo gráfico y numérico. Pero a diferencia del texto, el docente no demuestra ningún teorema ni de manera intuitiva aduciendo que "son estudiantes de ingeniería"
- El docente basa en buena medida su proceso de instrucción en la concepción y método y orden de exposición del libro de texto por él utilizado, en este caso el de L. Leithold.
- Para el texto y el docente, los problemas, ejercicios y tareas son sólo aplicaciones de los teoremas que forman la estructura de la matemática. Es decir que la finalidad es aplicar la matemática en contraposición de usar la matemática para resolver problemas.
- Tanto en el libro como en las respuestas al cuestionario del profesor, mencionan de la importancia de los problemas reales pero en la clase no se refleja la selección y estudio de ese tipo de problemas.

- La resolución de problemas de optimización son conducidos por el docente en el pizarrón de una manera tal que pareciera estar exponiendo su resolución, no argumentado ni analizando los pasos que se están dando. No promueve la identificación de las magnitudes que varían, ni discute las relaciones entre ellas, sólo presentando de una forma muy algebraica el modelo de función posible, no validando la solución y no mencionando otras posibles alternativas de solución.

Después de observar lo sucedido en la etapa exploratoria y en particular en la clase, se expone la hipótesis: los estudiantes que sean seleccionados para la prueba de resolver problemas de optimización, se espera que no sean muy competentes en su resolución debido al tipo de proceso de instrucción al que son sometidos.

La realización de la etapa exploratoria permitió que el investigador se familiarizara aun más con el contexto de enseñanza, profesores, etc. Lo que facilitó la identificación de los estudiantes a los que se les aplicarían los problemas.

Para la segunda etapa: La segunda etapa de la investigación permitió conocer sobre el desempeño de estudiantes de ingeniería frente a problemas de optimización que cotidianamente se trabajan en clase, en tareas y en exámenes y que se encuentran en libros de texto usados por profesores y alumnos.

Respecto a los objetivos planteados en la investigación, a continuación se comenta lo conducente.

> *Objetivo 1:* Describir las prácticas de estudiantes al resolver problemas de optimización mediante la identificación de los objetos y procesos matemáticos intervinientes en ellas y su efecto en la competencia de esos mismos resolutores.

Para el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), una práctica matemática es toda actuación o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos-el caso de este trabajo- , validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas matemáticas se pueden considerar como la unión de una práctica actuativa que permite la lectura y producción de textos matemáticos-el caso de este trabajo- y una práctica reflexiva. Los seis tipos de entidades primarias (objetos matemáticos) ampliadas respecto a la tradicional distinción entre conceptos y procedimientos su usaron para identificar los elementos intervinientes en las prácticas. De igual manera fueron reconocidos los procesos matemáticos.

El estudio y revisión de las prácticas resolutoras de los estudiantes evidenció en lo general un significado pobre de los objetos y procesos intervinientes en las mismas. Con un cierto dominio por parte de los estudiantes del objeto y proceso *procedimiento* sobre el resto de entidades. Se conjetura que es debido a que en clase se hace mucho énfasis en ello. Los *conceptos*, con significados aceptables. Las *proposiciones y argumentos* tal y como era de esperarse, sus significados son también pobres conjeturándose es debido a la poca atención dada en el proceso de instrucción.

Los significados pobres de los objetos ligados a la comprensión del mismo determinan un bajo nivel de competencia en la resolución de los problemas ligados a esos objetos matemáticos.

Algunos comentarios puntuales:

- El principal obstáculo identificado en los estudiantes se presenta en el proceso de construcción de la función que modela matemáticamente el problema. Más específicamente la identificación de las magnitudes que varían y las relaciones entre ellas.
- El proceso de modelación, lo inicia el estudiante reproduciendo el propuesto por el profesor o el libro de texto.
- Obtenida la función, los estudiantes que lo lograron, dan muestra de un buen dominio de los procesos algorítmicos para ejecutar lo planeado. Es decir que se tiene dominio de alguna parte del proceso.
- Un obstáculo se presenta en la resolución del problema por estudiantes de tercer semestre: lo que están estudiando en ese semestre quieren aplicarlo para un problema de primer semestre. Ejemplo, el uso de derivadas parciales.

- El diálogo que el investigador entabló con cada estudiante después de qué éste manifestaba haber terminado de resolver el problema, le permitió observar que es factible desencadenar en él, un proceso de valoración de la manera en que procedió, a la vez que evocar, rápidamente, conocimientos y estrategias más eficaces para avanzar en la resolución del problema.

Objetivo 2: Describir la gestión metacognitiva y sus componentes de estudiantes en el proceso de resolución de problemas de optimización y su influencia en la competencia de los mismos resolutores.

El grabar los pensamientos externados en voz alta por los estudiantes al momento de resolver el problema, permitió reconocer los diversos elementos de la gestión metacognitiva a lo largo del proceso de resolución. Esta dimensión resultó ser muy importante en la actividad resolutora de problemas.

En lo general, el proceso de comprensión del problema-en este caso del enunciado- se buscaba lograr por los estudiantes, leyendo varias veces el enunciado y apoyándose en figuras. Dificultad mayor se identificó en *comprender* la situación problema, contándose obstáculos sobre todo de tipo lingüístico, específicamente el no tener un significado adecuado de los términos del enunciado.

En cuanto a la *planeación* o selección de estrategias lo más frecuente fue observar como un plan de resolución equivale a buscar una fórmula, en sus apuntes de clase, en su libro, en su memoria que mejor se adecue a sus necesidades. En siguiente medida la búsqueda de problemas semejantes.

El proceso de *monitoreo* se llevó a cabo por todos los estudiantes pero unos de una manera más eficiente que otros. Los más eficientes, avanzaban más en el proceso.

El *control* también fue llevado con matices diferentes por distintos resolutores. Entre más control se tiene más se avanza en el proceso.

La etapa de *verificación* de la solución obtenida, fue la menos invocada en la resolución del problema, se conjetura, también que tiene que ver con la escasa atención que se le da en el proceso de instrucción en institución mucho es como la antes mencionada.

El análisis en lo general de las transcripciones de los estudiantes permitió percibir que los alumnos con mayor desarrollo de sus competencias metacognitivas, de *planeación*, *monitoreo* y *contro*l, tienen un mejor desempeño en el proceso de resolución del problema, es decir son más competentes.

5.3 Recomendaciones

En este ejercicio exploratorio en la Facultad de Ingeniería Mexicali (FIM), se ha exhibido la fuerte influencia del libro de texto, elemento del significado de referencia, sobre la planeación (significado pretendido) y en la ejecución de la práctica docente (significado implementado) del profesor de la materia. Esto sugiere que las instituciones escolares tienen dos retos en la pretensión de mejorar los resultados del aprendizaje de las matemáticas: Por una parte la selección y elaboración de materiales impresos o electrónicos que sean consistentes con las nuevas tendencias de la enseñanza centradas en la resolución de problemas y en el enfoque por competencias tanto genéricas como las especificas de las matemáticas. Estos manuales de instrucción deberán de adecuarse a los documentos curriculares institucionales de referencia.

Por otra parte, el mejorar la formación en la didáctica de las matemáticas para los profesores de esa área. En particular la mejora de sus competencias didácticas correspondientes al diseño e implementación de los procesos de instrucción y estudio de las matemáticas requeridas en la formación de ingenieros. Competencias específicas tales como: seleccionar y adecuar las situaciones-problema idóneas para alcanzar las metas curriculares, tomando en cuenta la complejidad y tiempo de dedicación; definir y caracterizar los conceptos emergentes, relacionándolos con los conceptos previos; argumentar el uso de procedimientos y propiedades en el proceso de resolución de problemas; considerar las normas y metanormas en su trabajo en el aula, en particular, la gestión metacognitiva; la promoción del pensamiento variacional como prerrequisito indispensable en la competencia de resolución de problemas de optimización; y buscar mayor competencia en su interacción con los discentes.

Las evidencias llevan a considerar que el mejoramiento de los resultados del aprendizaje en los cursos de Matemáticas, en las escuelas de ingeniería, requiere de atender la formación metacognitiva de los estudiantes, es decir, llevar a cabo acciones que permitan a los alumnos, planear y administrar de mejor manera sus propios procesos cognitivos en la resolución de problemas. Una recomendación puntual a los docentes es que al resolver problemas en el aula, lo hagan en voz alta, mencionando las razones por la que se escoge una alternativa o estrategia para abordar su resolución y discutir sus resultados.

Por la trascendencia del tema de estudio, se recomienda continuar diseñando y desarrollando investigaciones que arrojen más claridad sobre las relaciones que existen entre los elementos que conforman el hiperproceso de Resolución de Problemas y la interacción entre ellos: comprensión de los objetos y procesos matemáticos; los elementos de gestión metacognitiva y autoconciencia; las normas y metanormas; y la actitud hacia las matemáticas como elemento de la competencia matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argudin, Y. (2007). *Educación basada en competencias*. México: Trillas.

Astin, A. W. (1993).*What matters in College? Four Critical Years Revisited.* San Francisco: Jossey-Bass.

Atewell, P. (1990). What is skill? *Work and occupations* 17(4), 422-448.

Ávila, R., Ibarra, S. y Grijalva, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4), 337-354.

Baker, L. (1982). An Evaluation of The Role of Metacognitive Deficits in Learning Disabilities. *Topics in Learning and Learning Disabilities*, 2 (1), 27-34.

Bell, A. W. (1976): *The Learning of General Mathematical Strategies*, Tesis Doctoral no publicada, Shell Center for Mathematical Education, University of Nottingham.

Bosch, M., Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gomez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 135-159) (XX SEIEM). Madrid

Brosseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milie. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brown, A.(1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. En R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology*. Hillsdale: Erlbaum.

Carrel, P. Gajdusek, l. y Wise, T. (2001). La metacognición y EFL / ESL lectura. En H. Hartman J. (Ed). *Metacognición en el aprendizaje y la enseñanza: Teoría, Investigación y Práctica.* Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Contreras, A. y Luque, L., (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, 16(1), 59-87.

Cruz, M. (2002). *Estrategia* m*etacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico de Holguín. Cuba.

D'Amore, B., Font, V. y Godino,J.(2007).La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.

Douady, R.(1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2) ,5-31.

Dunlosky, J. (1998).Epilogue: Linking metacognitive theory to education. En D. J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Gresser (Eds.). *Metacognition in Educational Theory and Practice* (pp. 367-381). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L.B. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence* (pp.231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive Monitoring. *American Psychologist*, 34(10), 906-911.

Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. En Kail y Hagran (Eds.). *Perspectives on the development of memory and cognition* (pp. 3-33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME* ,10 (2), 419-434.

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Font, V. y Rubio, N. (2008). Ontho-semiotic tools for the analysis of our practice. En B. Czarnocha (Ed.). *Handbook of mathematics teaching Research: Teaching Experiment (*Pp. 165-180). Krakow: University of Rzeszow.

Font, V., Rubio, N. y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21 (Pp. 706-715). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Almería. España.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de la Matemáticas. *Educación Matemática,* 6(3), 37-51.

Godino, J.D. (2002). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didáctica* 4, 434-450. Versión en español en: URL: http//www.ugr.es/local/jgodino Recuperado en abril de 2007.

Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Manuscrito no publicado Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007 de: URL:http//www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. R*echerches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to researh in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education* 39 (1-2),127-135.Versión ampliada al 9 de marzo de 2008 recuperado URL:http//www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J.D, Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J, Font, V,Wilhelmi,M. y De Castro,C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias*, 27(1), 59-76.

Gómez-Chacón, I.M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 225-247.

González, J. y Wagenaar,R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto. Recuperado en junio de 2008 de: http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

González, F. (1999). Los procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes. *Épsilon. Revista de la SAEM THALES* 43-44, 199-208.

Gusmao, T.C. (2006). *Los Procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva de* *ontosemiótica***.** Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Santiago de Compostela, España.

Gusmao, T., Font,V. y Cajaraville, J. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de prácticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa,* 11(1), 8-43.

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta.ed.). México: McGraw-Hill.

Kaune, C. (2006). Reflection and metacognition in mathematicas education-tools for improvementof teaching quality. *ZDM- The International journal on Mathematics Education*, 38 (4), 350-360.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five year of research on teaching mathematical problema solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problema solving: multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale: Erlbaum**.**

Lampert, M.(1990). When the problem is not the problem and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-64.

Landau & Lesh (1983) *Accquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006).*Cálculo.* México: Mcgraw-Hill

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Mata, F.,Trad.), México: Oxford University Press.

Lester, F. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M.

Lester, F. (1994). Musing about mathematical problem-solving research:The first 25 years in JRME. *Journal for Research in Mathematical Education*, 25(6), 660-675.

Lester, F. & Garofalo, J.(1982).*Mathematical problem Solving: issues in research.* Philadelphia: Franklin Institute Press.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10 (3), 365- 399.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.

Mateos, M.(2001) *Metacognición y educación***.** *Serie Psicología Cognitiva y Educación.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2001.

McClelland d. Spencer Jr. Y S.M Spencer, (1994). *Competency Assesment Methods*. *History and State of the Art.* La Haya : Mc Ver, Research Press.

McLeod, D.B.(1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.En D.A. grows (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning (* pp. 575-596).New York: MacMillan.

Océano Práctico Diccionario (2007). Cd. México: Ed. Océano de México.

PISA. (2003). Marcos Teóricos de Pisa. (Versión electrónica), Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web: http//www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf.

Pirie, S. & kirien, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 14 (1), 39-43.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques* (1962-65). Paris : Dunod.

Rico, L. (2006).Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación,* extraordinario, 275-294.

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E.(1999). *Metodología de la Investigación Educativa*. Málaga: Aljibe

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad Complutense de Madrid. España.

Rodríguez, E., Bosch, M., y Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40 (2), 287-301.

Rubinstein, S.L. (1966). *El proceso del pensamiento.* La Habana: Ed. Universitaria.

Sabino, C. (1992). *El proceso de investigación* (2da. ed.). Caracas: Panapo.

Sánchez, R. (1996). *Programación Lineal*. Universidad Central de Venezuela. Caracas: Editorial Torino.

Santos Trigo, L.M. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos Trigo, L.M. (2008).La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII (*pp. 159-187). Badajoz, España.

Sandín, M. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Sardury, A.F. (1987).*Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La habana: Editorial Pueblo.

Sánchez, J, y Fernández, J. (2003). *La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas en la resolución de problemas*. Madrid: Editorial CCS.

Schneider, W. y Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 42, 287-301.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 361-380). Hillsdale: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of "out loud" problem solving protocolos. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 171-191.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning(* pp. 334-370). New York: MacMillan. Recuperado en agosto 2010 de: http:// gse.berkeley.edu.faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM- The International journal on Mathematics Education*, 39(537-551).

Secretaría de Educación Pública (2007). *Programa Sectorial de Educación 2007-2012*.México.

Schraw G. (2001). Promoting general metacognitive awareness. En: Hartman HJ (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice*. Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.

Sierra-Bravo, R. (1994). *Tesis doctorales y trabajos de investigación científica* (3ª.ed.). Madrid: Paraninfo.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77, 20-26.* Recuperado el día 7 de julio 2007de: http://www.skemp.org.uk/

Soto, R. (2007). *Guía para la redacción de competencias en un programa por competencias*. Manuscrito no publicado. Universidad Autónoma de Baja California, Mexicali.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable.* Bogotá: Thomson-Learning.

Thomas, G. (2005). *Cálculo de una variable.* México: Pearson Addison-Wesley

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería Mexicali (2009). *Planes de estudio de Programas Educativos de Ingeniería*. Recuperado el 30 de octubre de 2011 de: http://ingenieria.mxl.uabc.mx/

Universidad Autónoma de Baja California, Coordinación de Formación Básica (2005). *Modelo Educativo.* Recuperado el 30 de octubre de 2011 de: http://www.uabc.mx/formacionbasica/modeloedu.htm

Universidad Autónoma de Baja California, Coordinación de Formación Básica (2005). *Diseño Curricular.* Recuperado el 30 de octubre de 2011 de:

http://www.uabc.mx/formacionbasica/curricular.htm

Universidad Autónoma de Baja California, Coordinación de Servicios Escolares (2011). *Población estudiantil.* Recuperado el 30 de octubre de 2011 de: http://csege.uabc.mx/index.

Villa, A. y Poblete, M. (2008). *Aprendizaje basado en competencias.* Bilbao: Ediciones mensajero.

Wilson, J. & Clarke, d, (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, 16(2), 25-48.

Yackel,E. y Cobb,P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

ANEXO 1

CUESTIONARIO SOBRE LA PLANEACIÓN DE LA ACTIVIDAD DOCENTE

Objetivo: Identificar los significados planeados por el profesor de Matemáticas I (Cálculo Diferencial) en el tema de optimización.

Dirigido a: Profesores de la materia de Matemáticas I (Cálculo Diferencial).

Tema: Optimización con funciones de una variable.

Caso: Facultad de Ingeniería- Mexicali, Universidad Autónoma de Baja California, México.

INSTRUCCIONES PARA EL PROFESOR QUE CONTESTARÁ ESTE CUESTIONARIO

1. Se asegura total anonimato.
2. En este cuestionario, el tema de optimización incluye máximos, mínimos y problemas con lenguaje natural en contexto. En la carta descriptiva de Cálculo Diferencial, se encuentra en la cuarta unidad, posterior al tema de derivadas. Clase de optimización significa el tiempo de varias horas de enseñanza desde máximos y mínimos hasta la resolución de problemas con lenguaje natural.
3. Varias preguntas son de opción SI o NO. Se solicita que siempre intente argumentar el por qué del SI o del NO.
4. En las preguntas abiertas, con mayor razón se suplica ser lo más explicito posible, puesto que, en esa misma medida el objetivo de este cuestionario será alcanzado.
5. Si alguna pregunta no es comprendida, favor de anotarlo en el espacio correspondiente.
6. Si alguna pregunta es comprendida pero no se ha reflexionado sobre ella y no tiene alguna respuesta que le satisfaga, también anotarlo.
7. El encuestador, de tener alguna duda en sus respuestas o si desea ampliar alguna de ellas, le buscará si no tiene inconveniente para una entrevista personal.
8. Muchas gracias por su tiempo y apoyo a esta investigación, cuyos frutos se espera contribuya a una mejor comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en estudiantes de ingeniería.

A: Datos del Profesor(a)

1. Género:
2. Edad:
3. Años de experiencia docente:
4. Número de semestres que ha impartido cálculo diferencial:
5. Títulos y grados académicos que posee:

   a) Licenciatura:

   b) Especialización:

   c) Maestría:

   d) Otras (especificar):

6. Formación en didáctica (cursos, diplomados, etc.):

B.1: Planeación de la clase semestralmente

Marque con una cruz las opciones correspondientes.

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

7. ¿Planea su clase semestralmente?	Si	No
8. ¿Qué elementos de los abajo enlistados utiliza para su planeación? (*Precisar el rol que juega cada elemento en su planeación*)		
a) Carta descriptiva:	Si	No
b) Libro de texto y de consulta:	Si	No
c) Preparaciones de clases de semestres anteriores:	Si	No
d) Aportes de colegas profesores:	Si	No
e) Computadora (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
f) Calculadora-graficadora (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
g) Internet (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
h) Blackboard (*o similar, sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
i) Reuniones de academia:	Si	No
j) Reuniones con el coordinador de área:	Si	No

k) ¿Planea incluir en su clase alguno de los siguientes recursos tecnológicos?: ¿Con qué finalidad?

• Computadora:	Si	No
• Calculadora-graficadora:	Si	No
• Internet:	Si	No
• Blackboard :(*o similar*)	Si	No
• Otros:(*especifique*)	Si	No

9. ¿Cuántas y de qué tipo de evaluaciones planea semestralmente para su clase?

10. ¿Considera que usted decide qué y cómo impartirá su clase? ¿Hasta dónde? ¿O alguien se lo indica? Si No

11. ¿Escribe en su computadora o en papel la planeación semestral decidida para su clase?

a) En caso afirmativo, ¿podríamos conocer ese documento?

B.2: Planeación de la clase temáticamente

Marque con una cruz las opciones correspondientes.

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

12. ¿Planea su clase para el tema de optimización? Si No

13. Qué elementos de los abajo enlistados utiliza para su planeación?
(*Precisar el rol que juega cada elemento en su planeación*)

a) Carta descriptiva:	Si	No
b) Libro de texto y de consulta:	Si	No
c) Preparaciones de clases de semestres anteriores:	Si	No
d) Computadora (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
e) Calculadora-graficadora (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
f) Internet (*sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
g) Blackboard (*o similar, sólo para la etapa de planeación*):	Si	No
h) Reuniones de academia:	Si	No
i) Reuniones con el coordinador de área:	Si	No

14. ¿Planea incluir en su clase de optimización alguno de los siguientes recursos tecnológicos? ¿Con qué finalidad? :

a)	Computadora:	Si	No
b)	Calculadora-graficadora:	Si	No
c)	Internet:	Si	No
d)	Blackboard: (*o similar*)	Si	No
e)	Otros: (*especifique*) (Actividad manual, sin cálculo)	Si	No

15. ¿Cuántas y qué tipo de evaluaciones planea para el tema de optimización?

16. ¿Escribe en su computadora o en papel la planeación del tema de optimización decidida por usted para su clase? Si No

    a) En caso positivo, ¿podríamos conocer ese documento?

B.3: Planeación de la clase diariamente

Marque con una cruz las opciones correspondientes.

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

17. ¿Planea su clase diaria? Si No

18. Repasa su clase antes de impartirla? Si No
    a) ¿Qué tan frecuente?

19. ¿Cómo distribuye en su planeación el porcentaje de su trabajo y el de sus estudiantes en clase?

a)	Revisión de tarea del día anterior:	%
b)	Repaso de temas:	%
c)	Exposición del tema:	%
d)	Resolución de problemas, ejercicios:	%
e)	Asignación de tareas para casa:	%
f)	Cuestionamientos hacia los estudiantes:	%
g)	Otros (especificar):	%

20. ¿Qué actividad matemática planea hacer en clase de optimización?

Marque con una cruz las opciones correspondientes

a)	Recordatorio de conocimientos previos:	Si	No
b)	Estudio de definiciones y conceptos:	Si	No
c)	Estudio de propiedades, teoremas y argumentos:	Si	No
d)	Establecer procedimientos para resolver ejercicios:	Si	No
e)	Clarificación del lenguaje simbólico matemático:	Si	No
f)	Búsqueda de conexiones entre conceptos (esquemas conceptuales):	Si	No
g)	Búsqueda de conexiones entre conceptos y procedimientos:	Si	No
h)	Análisis de enunciados de problemas:	Si	No
i)	Diseño de estrategias de resolución de problemas:	Si	No
j)	Formulación de problemas:	Si	No
k)	Validación de la solución:	Si	No
l)	Elaboración de conjeturas:	Si	No
m)	Uso de representaciones graficas, analíticas, numéricas o verbales para un concepto	Si	No
n)	Traducción entre diversas representaciones:	Si	No

21. Reflexiona sobre lo que sucedió en su clase: Si No
   a) ¿Qué tan frecuente?

C: El Contenido de Cálculo Diferencial

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

22. ¿Cuál es su opinión sobre el contenido de la materia definida en la carta descriptiva correspondiente?
   a) Temas. ¿son los adecuados? ¿falta alguno? ¿sobra?

   b) Extensión:
   c) Profundidad:
   d) Secuencia de los temas:
   e) ¿Para qué cree usted que se incluye optimización en el contenido de matemáticas I?

23. En particular en el tema de optimización:
   Sub-temas. ¿Son los adecuados? ¿Falta alguno? ¿Sobra?

   a) Extensión:
   b) Profundidad:
   c) Secuencia de los sub-temas:

D: El Libro de Texto

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

24. ¿Qué libro de texto utiliza para su clase?

25. ¿Por qué seleccionó a ese libro respecto a otros textos?

26. ¿Qué características tiene a su criterio para una buena enseñanza del cálculo?

27. ¿Qué características tiene a su criterio para una buena enseñanza del tema de optimización?

28. ¿Cómo selecciona del texto los ejemplos de problemas a usar en clase?

29. ¿Los reelabora para su presentación? ¿Los presenta tal cuál?

30. ¿El lenguaje natural utilizado por el texto es lo suficientemente claro?

31. ¿El lenguaje simbólico utilizado por el texto es el adecuado?

32. ¿Los diversos procedimientos son establecidos claramente?¿cuándo y dónde usarse?

33. ¿La argumentación presentada en el cuerpo del texto es la debida?

34. ¿La argumentación presentada en la demostración de teoremas es la más clara?

35. ¿Los conceptos presentados quedan lo suficientemente definidos?

36. Sobre los problemas de optimización que presenta el texto:

a) ¿Es claro su enunciado?

b) ¿El nivel de complejidad es correspondiente a lo presentado en la teoría?

c) ¿Los problemas propuestos como ejercicios considera contribuyen a reforzar el tema?

37. ¿Qué otros libros consulta para el tema de optimización?

E: La Enseñanza de la Matemática

Marque con una cruz las opciones correspondientes.

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

38. ¿Cómo enseña cálculo a sus estudiantes?

a)	Exposición:	Si	No
b)	Utilizando tecnología: ¿Si? ¿Cuál?	Si	No
c)	Mediante problemas:	Si	No
d)	Usando ejercicios:	Si	No
e)	Trabajo en equipo:(colaborativo)	Si	No
f)	Aprendizaje significativo:	Si	No
g)	Otro:	Si	No

39. ¿Cómo enseña el tema de optimización a sus estudiantes?

Marque con una cruz las opciones correspondientes

(Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación)

a)	Exposición:	Si	No
b)	Usando tecnología: ¿Si? ¿Cuál?	Si	No
c)	Mediante problemas:	Si	No
d)	Usando ejercicios:	Si	No
e)	Trabajo en equipo:(colaborativo)	Si	No
f)	Aprendizaje significativo:	Si	No

g) Otro: Si No

F: Cómo se Aprende Matemáticas

(*Haga los comentarios pertinentes extendiéndose sin ninguna limitación*)

40. ¿Cómo considera que los estudiantes aprenden matemáticas?

41. ¿Qué significa para usted que un estudiante sepa matemáticas?

42. ¿Cuál es la manera en que los estudiantes aprenden a optimizar?

43. ¿Qué significa para usted que un estudiante sepa máximos, mínimos y optimizar?

44. ¿Qué significa para usted que un estudiante sea competente en matemáticas?

45. ¿Qué significa para usted que un estudiante sea competente en optimización?

46. ¿Qué significa para usted que un estudiante comprenda un concepto?

47. ¿Qué significa para usted que un estudiante comprenda el tema de optimización?

48. ¿Establece una meta tangible o explicita sobre el aprendizaje de sus estudiantes, en:

a) Conceptos?	Si	No
b) Procedimientos?	Si	No
c) Resolución de problemas?	Si	No
d) Argumentación?	Si	No
e) Manejo del lenguaje simbólico?	Si	No

49. ¿Para Usted qué son las Matemáticas?

50. En la matemática se:

a) Descubre:	Si	No
b) Inventa:	Si	No
c) Construye:	Si	No
d) Encuentra:	Si	No
e) Calcula:	Si	No
f) Otro:	Si	No

ANEXO 2

Entrevista posterior aclaratoria con el profesor VH.

Investigador: la número 20, decía: ¿Qué actividad matemática planea hacer en clase de optimización?...y... por ejemplo recordatorio dice, de conocimientos previos, aquí pusiste que... pongo una gráfica…

VH: si, pongo una grafica, para que en esa grafica pueda identificar… como la gráfica se forma por una serie de puntos que se unen, donde unos puntos tienen un valor de la función más grandes que otros… de esa manera si hablamos de máximos y mínimos, hago una gráfica tal que sea evidente que hay un punto que es, que tiene el mayor f(x) de todos y ese será un máximo .Y de igual manera hago otra donde se vea que hay un punto que es el que tiene el menor f(x) y sea el mínimo relativo… así gráficamente pueden entender el concepto de máximos y mínimos relativos. Para ello requiero pues entonces, que recuerden el uso de… de la gráfica a partir de una función.

I: muy bien y… ¿le dedicas tiempo al estudio de definiciones y conceptos?

VH: ¿Relativos a máximos y mínimos?

I: eh…si… si bueno ya en optimización máximos y mínimos así es…

VH: si claro, lo primero que se parte, vamos a definir que es un máximo relativo, que es un mínimo relativo… las condiciones que se dan para que se considere relativo… porque hay otros que serian los absolutos ¿no? entonces hay unas definiciones que me baso en el Leithold que marca claramente un concepto del otro…si..

I: ¿Cuando presentas un concepto… una definición… tocas algún tema o problema de la vida real que induzca a la entrada de ese tema?… ¿de esa definición?... o…

VH: No… normalmente me voy guiando por… el material que he seleccionado… y ya por la experiencia, improviso respecto a ejemplos que se me vienen a la mente, y obviamente normalmente trato de que sean ejemplos de la vida real…

I: ok…

VH: pero no los, eso si no lo planeo ¿no? dejo que también… la improvisación sea parte de… y eso hace más atractivo para mi… porque cada vez voy cambiando los ejemplos… +

I: respecto… al manejo de propiedades… de teoremas y argumentos… ¿acostumbras a demostrar… los teoremas propuestos por el Leithold?... ¿acostumbras a… dar los argumentos que el utiliza?

VH: no, las demostraciones las evito porque el trabajo está orientado hacia lo que es el trabajo de ingeniería… no más bien… formación de matemáticas… entonces lo que más me interesa a mí, yo como soy ingeniero es el que los muchachos entiendan el concepto y sobre todo entiendan como lo van a aplicar en problemas de la vida real…

I: para los procedimientos, por ejemplo para resolver máximos y mínimos, ¿como los planetas? Los procedimientos…

VH: bueno, trato de… en primera instancia explicarles el procedimiento que… el libro que uso como referencia plantea… y en ocasiones… yo establezco un procedimiento parecido, pero a veces suele ser más sencillo para ellos de seguirlo… y yo les pregunto entonces que seleccionen el que consideren más fácil para ellos… les doy… pues dos opciones ¿no? la del libro y una que yo genero… y normalmente pues el que yo genero, parece ser que les agrada mas…

I:…respecto… al lenguaje simbólico que se utiliza en esos temas… ¿haces alguna aclaración para que haya un significado sobre los símbolos? De Y prima… de X…

VH: si claro… cada que vamos desarrollando eso… voy recordando el significado de ellos porque en ocasiones los manejan, pero los manejan de una manera mecanizada… y … no… olvidan pues el concepto, o incluso olvidan la interpretación de cada uno de ellos entonces voy cuestionando para saber… que saben lo que están haciendo… ¿no?...

I: ok…

VH: puede ser incluso una especie de verificación continua…

I: Cuándo estas estudiando los conceptos… ¿tratas de conectar unos con otros? O te limitas exclusivamente a presentar ese concepto…

VH: a medida que se va avanzando los temas… lo ideal es que, si se puede, un concepto más avanzado lo puedes conectar con los anteriores, para que vean que todo el material que se ve se utiliza en la vida real, como herramientas del uso múltiple ¿no?

I: ahora…. ¿Tratas de conectar… el concepto con los procedimientos correspondientes? Haces énfasis ¿o no haces énfasis en eso?

VH: bueno… más que todo es… el hecho de que sepan un procedimiento implica… que deban de conocer el concepto para diferenciarlo de otros… y no seleccionar un procedimiento equivocado… entonces ese es un error común que cometen los alumnos, de en un problema y simplemente si no dominan bien el concepto pues toman un procedimiento que no es el adecuado y el resultado va a ser incorrecto. Entonces lo primero que tienen que hacer es, en base a un problema primero identificar en base a los conceptos, cuál de los tipos de procedimientos deben de seleccionar y después pues usarlo…

I: respecto a los problemas en general o problemas de máximos y mínimos de optimización, los problemas esos que tienen enunciados, que tienen un lenguaje… ¿haces algún trabajo especial para interpretar… el enunciado de esos problemas?

VH: no, no, simplemente cuando llegamos a esos temas, los leo… y si, los alumnos batallan mucho para la interpretación de esos problemas… entonces trato de irles enseñando como saber traducir… ese lenguaje al lenguaje matemático…

I: ok… respecto a las estrategias para resolver problemas, haces, ¿las haces explicitas de alguna manera o tu dejas que ellos mismos las encuentren, las busquen, o propones lo que el libro trae?

VH: eh, siempre en primera instancia me baso en el libro… pero después si encuentro que yo puedo presentarles un camino a seguir que sea más sencillo para ellos, lo hago ¿no? y… si o sea lo importante es la reacción de ellos ante un problema ¿no?, lo que se les haga más sencillo y que se les pueda quedar… que les quede claro, que le entiendan, ese es el camino que seguimos…

I: normalmente uno propone, el profesor propone el problema, el que se vaya a resolver, ¿acostumbras al proceso contrario, es decir, que los alumnos formulen o propongan problemas?

VH: no… no ellos solamente van siguiendo la guía que uno les marca…

I: respecto a la solución de encontrada de algún cierto problema, eh… discutes las alternativas, si es la correcta, si… ¿la validas de alguna manera?

VH: hay casos en los cuales… casi siempre hay casos este… puede uno, que puede encontrar un problema, verificar que sea correcto… y a veces lo que les enseña uno es a no confiar en un resultado, sino por simple lógica un resultado… el mero resultado te indica, te da información que te indica si lo que hiciste fue correcto o algo suena raro… y si suena raro pues obviamente te vas a revisarlo porque por ahí pudo haber cometido un error…

I: eh… ¿acostumbras a usar conjeturas o sea, posibilidades o alternativas de solución, antes de iniciar un problema? O sea como… algo así como planificar un poco la resolución del problema… de forma explícita…

VH: no… no, normalmente me voy directamente al procedimiento que les quiero enseñar… con el afán de no revolverlos ¿no?...

I: ok… eh… para las funciones de los procedimientos máximos y mínimos… o se pueden representar gráficamente, numéricamente, analíticamente, o algún concepto, máximos y mínimos por ejemplo… ¿acostumbras a usar varias representaciones?

VH: si… lo podemos ver de manera gráfica, de manera analítica y en algunos casos de manera numérica, pero como ese quita mucho tiempo ese es lo que menos utilizo lo haría nomás para que se dieran cuenta de que se pueden utilizar esos métodos, para que vean el problema con todas sus posibilidades, pero lo que me quita mucho tiempo… lo… lo omito…

I: muy bien… esto corresponde a la pregunta número 20.

I: sobre la número 21… ¿reflexiona lo que sucedió en su clase?...

VH: si pues… la mera expresión de la cara de los jóvenes indica si están entendiendo… o si tienen problemas porque te pueden decir que si lo entendieron pero su cara dice que ¿no?… y si veo que no están captando... pues habrá que cambiar la estrategia para que… finalmente los resultados se obtengan...

I: bien… respecto al contenido del curso de matemáticas I te parece que, en general para todo el curso de matemáticas I te parece que los temas son los adecuados, que si falta algo, que si sobra algo, la extensión, la profundidad, la forma o presentación de los temas… ¿considera que es el adecuado?

VH: pues en términos generales está bien, lo único que considero es que debería estar basado en un texto… cualquiera que él fuera… porque eso sirve de guía tanto al maestro como para los alumnos…

I: o sea, el contenido de la materia, debiera de estar, algo así como seguir el contenido de un libro de texto…

VH: no necesariamente seguir pero sino estar plasmado en un libro, para que sea la referencia del maestro y de los alumnos… del contenido del libro se pueden seleccionar los temas que se consideren apropiados… que normalmente los libros incluyen los mismos temas… a veces los mueven de lugar… entonces eh… el… al final de cuentas los temas se cubren ¿no? no creo que sea tan grave eso… lo importante es agarrar un libro… un libro que se considere adecuado, con muchos ejercicios, con variedad… y pero que sobre todo sea una guía para el maestro y para los alumnos… creo que eso es muy importante…

I: entonces es construir un libro que este apegado totalmente al contenido de la materia…

VH: lo ideal sería generar unos apuntes… que sean basados en uno o más libros… y que cubran el material que se considere en la facultad como el adecuado… pero si no se cuenta con eso bueno de los libros existentes hay alguno muy buenos, se selecciona uno y que eso sea como el estándar. Eso no implica que otro maestro no pueda utilizar como complemento los libros que él quiera.

I: claro… en particular sobre el tema de optimización… cree que esta… y también referente a la carta descriptiva de matemáticas 1 estarán bien los temas, los subtemas, la extensión, la profundidad, con el cual se presentan?

VH: también, yo creo…

I: es el adecuado…

¿Establece una meta tangible o explicita sobre el aprendizaje de sus estudiantes, en?

- Conceptos: Si No
- Procedimientos: Si No
- Resolución de problemas: Si No
- Argumentación: Si No
- Manejo del lenguaje simbólico: Si No

VH: si yo tengo… un nivel que espero que un estudiante eh… tenga de conocimientos… del manejo de los conceptos, de la habilidad para resolver problemas… y… obviamente eso está ligado a la selección de problemas de ejemplos y sobre todo problemas de tareas que les dejo y problemas que voy a colocar en el examen que me hagan verificar que el nivel que yo espero de ellos se están cumpliendo…

I:…las tareas que les dejas y son seleccionadas del texto, esas tareas las revisas o le das una detalladamente o superficialmente o esperas que los alumnos mismos te pregunten sobre sus dudas, sobre lo que se han topado… ¿Cuál es la mecánica que utilizas?

VH: si… se les avisa a los alumnos que los problemas seleccionados deben de resolverlos y selecciono problemas que traen resultado en el libro, de tal manera que ellos pueden verificar que lo que obtuvieron es lo correcto… en caso de que no puedan resolverlos para eso estoy disponible cada día de clase para… para aclararles sus dudas…

La matemática se:

- Descubre: Si No
- Inventa: Si No
- Construye: Si No
- Encuentra: Si No
- Calcula: Si No
- Otro:

I: ¿Cuál opción podríamos utilizar? De acuerdo con tu forma de pensar…

VH: pues… se inventa… yo creo que la matemática es un concepto mental… que el hombre crea para poder avanzar cuando la solución de problemas de la vida real no encuentra el camino para poder avanzar en esa solución, es que tiene que hacer uso de un ejercicio mental… genera un modelo matemático… con la intención de poderlo aplicar en la solución de un problema en el cual está imposibilitado para resolverlo… lo cual indica que las matemáticas se van inventando a medida que las necesidades se van… las necesidades, la solución de problemas de la vida real lo van requiriendo. Hay otras ocasiones en que pueden inventarse matemáticas no para resolver un problema sino porque es un simple ejercicio mental que con lógica que tal vez en su momento no tiene una aplicación pero posteriormente tal vez se le puede encontrar…

I: en tu… ¿tienes nociones sobre esas ideas que se dicen sobre constructivismo, sobre aprendizaje significativo… esas teorías que tienen que ver pues con la forma de enseñanza o de aprendizaje?

VH: no, lo desconozco…

I: ¿no has tenido contacto?

VH: no…

ANEXO 3

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS PREVIOS AL TEMA DE OPTIMIZACIÓN

Objetivo: Conocer sobre los conocimientos matemáticos que tienen estudiantes de ingeniería previamente al proceso de enseñanza de optimización dentro de un curso de Cálculo.

Contenido de conocimientos previos:

I. Funciones: representaciones gráficas, analíticas y numéricas.

Conceptos:

Variable, variable independiente, variable dependiente; función y dominio.

Procedimientos:

1. Representar gráficamente una función
2. Representar analíticamente una función
3. Representar numéricamente una función
4. Traducir una función de una representación a otra.
5. Encontrar su dominio.

II. Las funciones como modelos matemáticos.

Conceptos:

Procedimientos:

1. Identificación de variables conocidas y desconocidas.
2. Traducir a lenguaje simbólico.
3. En caso de ser un problema presentado en lenguaje natural, entender lo dado y lo solicitado.
4. Relacionar simbólicamente las variables involucradas para establecer la función o relación entre ellas.

III. Razón de cambio instantáneo (tasa de variación). Pendientes de rectas tangentes.

1. Pendiente de una recta a una curva
2. Razón de cambio instantáneo (tasa de variación)
3. Rapidez
4. Incrementos $\Delta x, \Delta y$
5. Diferenciales dx, dy
6. Los cocientes $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{dy}{dx}$

IV. Derivación de funciones algebraicas.

Conceptos:

1. Concepto de derivada analítica.
2. Concepto de derivada gráfica.

Procedimientos:

1. Derivación de funciones algebraicas

CUESTIONARIO

1. Con tus propias palabras escribe la idea que tengas sobre el concepto de función.

2. $x^2 + y^2 = 9$, ¿es función? Por qué si o por qué no?

3. Para la función $y = \sqrt{x^2 - 9}$,

¿Cuál es la variable independiente?

¿Cuál es el dominio de la función?

4. A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 m. de cerca.

a) Encuentre un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud.

b) ¿Cuál es el dominio de la función encontrada en el inciso (a)?

5. a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a $y = x^2 - 1$ en el punto (2,3).

b) Encuentre la ecuación de esa misma recta tangente.

6. Con sus propias palabras escribe lo que te dicen los siguientes símbolos:

a) $\Delta x, \Delta y$

b) dx, dy

c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}, \dfrac{dy}{dx}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

e) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

7. ¿Qué significa para ti la expresión “la derivada de una función”?

Explícate con tus palabras.

8. Calcula las siguientes derivadas:

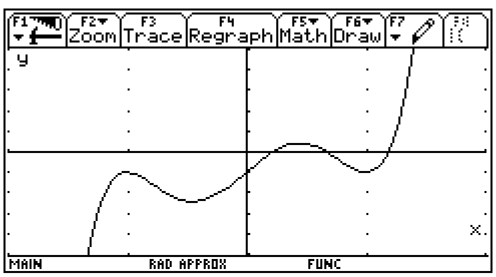
a) $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$ $\qquad f'(x) =$ $\qquad f''(x) =$

b) $f(x) = \left(\dfrac{2x^3}{x^2+3}\right)^2$ $\qquad f'(x) =$

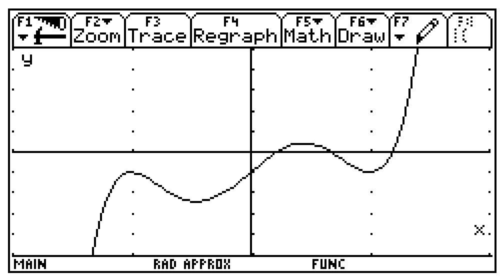
c) $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ $\qquad f'(x) =$

9. En cada una de las figuras se muestra la misma función y = f(x).

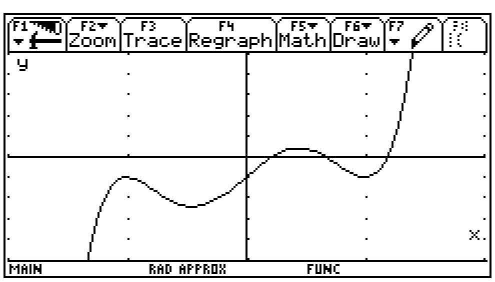
Marca con lápiz, pluma o color sobre la correspondiente gráfica lo que se pide:



a) Donde f(x) > 0



b) Donde f ' (x) > 0



c) Bosqueje en el mismo cuadro la función derivada.

CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS POSTERIORES AL TEMA DE OPTIMIZACIÓN

Objetivo: Conocer sobre los conocimientos asimilados por estudiantes después de ser sometidos al proceso de enseñanza de optimización en un curso de Cálculo.

1. Con tus propias palabras escribe la idea que tengas sobre los siguientes conceptos:

a) Valor máximo absoluto

b) Valor mínimo absoluto

c) Valor máximo relativo

d) Valor mínimo relativo

e) Número crítico

2. Escribe el procedimiento (pasos) para determinar los números críticos de una función f(x)

3. Encuentra los números críticos de la función $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

4. Encuentra los números críticos de la función $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$

5. Escribe el procedimiento para resolver problemas con enunciado sobre extremos absolutos

6. Encuentra dos números no negativos cuya suma sea 12 y que su producto sea un máximo absoluto.

7. Una isla está ubicada en un punto A, 4 km. mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Un pescador en la isla, desea ir urgentemente a un punto C, situado a 6 km. de B playa abajo. El pescador puede desplazarse remando a 5 km/hr. o caminando a 8 km/hr . Encuentre la ruta con el menor tiempo posible, para que el pescador vaya de la isla A al punto C sobre la playa. ¿En qué punto deberá arribar a la playa el pescador para ir al punto C? ¿Cuánto tiempo le tomará el viaje de la isla A al punto C?

8. Determine en las gráficas de la 1 a la 6, si la función tiene algún extremo entre x= a y x= b.

Marca en la misma gráfica tu respuesta, especificando el tipo de extremo.

ANEXO 4

PUBLICACIONES