

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

ESCUELA SÚPERIOR DE CIENCIAS MARINAS

' INVERSION UNIDIMENSIONAL DE SONDEOS MAGNETOTELURICOS
CORREGIDOS POR LAS DISTORSIONES DEBIDAS A LA PRESENCIA
DEL MAR '

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
O C E A N O L O G O
PRESENTA:
JORGE RAMIREZ HERNANDEZ

ENSENADA, B. C., AGOSTO DE 1985 .

BIBLIOTECA CENTRAL ENSENADA


'INVERSION UNIDIMENSIONAL DE SONDEOS MAGNETOTELURICOS
CORREGIDOS POR LAS DISTORSIONES DEBIDAS A LA PRESENCIA
DEL MAR'

T E S I S
QUE PRESENTA:

JORGE RAMIREZ HERNANDEZ


Aprobada por:

Presidente del Jurado
Dr. Mario Martínez García




Sinodal Propietario
Oc. Sergio Pou Alberú

Sinodal Propietario
M.C. Víctor Wong Ortega



Sinodal Suplente
Oc. Juracy Soares López



Sinodal Suplente
M.C. Francisco Suárez Vidal

DEDICATORIA

A MIS PADRES

Agustín y Consuelo

Por todo su apoyo y confianza

A MIS HERMANOS

Agustín, Lourdes, Patty y Gaby

con amor y respeto

A MIS COMPANEROS DE GENERACION Y AMIGOS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Mario Martínez por su apoyo y dirección para llevar a cabo este trabajo de tesis.

También quiero agradecer de una manera muy especial al Dr. José Frez C. por haber dirigido la primera parte de este trabajo, por todo el apoyo que me ha brindado, por sus valiosos consejos en beneficio de mi formación profesional.

A Juracy Soares que siempre me ha impulsado a seguir adelante.

Agradezco a mis compañeros de generación: Javier, Guillermo, Victor, Rafael por su apoyo incondicional.

A mis amigos: Gabriel, Manuel, Pilar y Arturo por su compañía.

Agradezco a Ninfa, Margarita, Elsa, Xochitl y Laura por brindarme su amistad y cariño.

INDICE

Resumen	I
Lista de figuras	II
Lista de tablas	VII
I. INTRODUCCION	
I.1 ESBOZO DEL METODO MAGNETOTELURICO EN UNA DIMENSION	1
I.2 SONDEOS MAGNETOTELURICOS EN DOS DIMENSIONES	12
II. OBJETIVOS	17
III. METODOS DE INVERSION	
III.1 DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES	17
III.2 REGULARIZACION	24
III.3 COMPARACION DE LAS DOS TECNICAS EN SU APLICACION A UN PROBLEMA MT EN 1D	27
IV. METODO PARA LA OBTENCION Y ANALISIS DE LOS SONDEOS EN 2D	39
V. RESULTADOS	43
VI. DISCUSION	60
VII. CONCLUSIONES	65
VIII. APENDICES	
VIII.1 APENDICE NO.1	68
VIII.2 APENDICE NO.2	69
IX. REFERENCIAS	71

RESUMEN

Se considera un modelo bidimensional en el cual se introduce una discontinuidad lateral formada por una capa altamente conductora que simula el océano. Los valores de las mediciones magnetoteléuricas dependen de la orientación y la posición en que se coloquen los instrumentos. Para estimar estructuras bidimensionales, se acostumbra calcular la resistividad eléctrica aparente en dos direcciones, una perpendicular y otra paralela a la discontinuidad lateral. La solución al problema directo e inverso para el modelado bidimensional es costosa en cuanto a la obtención de datos y su procesamiento por lo que conviene tratar de simplificar esto último a través de correcciones al caso unidimensional. En esta trabajo, se pretende estudiar y corregir las distorsiones en los sondeos magnetoteléuricos producidas por la presencia del mar, a fin de satisfacer los los valores pronosticados en un modelo unidimensional. Para ello, se modela una Tierra bidimensional y a través de experimentos numéricos se generan sondeos magnetoteléuricos a diferentes distancias del mar. Para simular el caso unidimensional se escoge un sondeo muy alejado de la línea de costa, de tal forma que este libre de la acción perturbadora del océano conductor. A un modelo unidimensional propuesto se le aplican dos técnicas de inversión: la de descomposición de valores singulares y la de regularización, haciendo comparaciones entre estos dos métodos. En seguida, se estudia la perturbación misma y la posibilidad de determinar las correcciones requeridas tratando de corregir las observaciones sintéticas para ambas direcciones perpendiculares y para cada sitio. A dichas correcciones se aplicaron la transformada de Bostik y se interpretó como un problema unidimensional. En este trabajo se proponen la media aritmética y la media geométrica de los dos modos, encontrándose que: la media aritmética se ve influenciada por el modo transversal y tiende a sobreestimar los valores de resistividad de la estructura, y la media geométrica suaviza de tal manera la estructura que impide observar los contrastes de conductividad entre las capas. Los resultados tienen interés en el análisis práctico de datos magnetoteléuricos.

LISTA DE FIGURAS

Figura	Contenido	página
3.3.1	Gráfica de derivadas parciales del campo eléctrico con respecto a su derivada vertical. Las curvas corresponden a las filas de la matriz de derivadas parciales. Las derivadas parciales están normalizadas por los errores de la solución C_m y factores de integración S , en este caso, trapezoidal.....	29
3.3.2	Soluciones obtenidas por el método de DVS en las primeras tres iteraciones. Con $\epsilon=0.0$ La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.....	31
3.3.3	Análisis espectral de la solución * Valores singulares ordenados en forma decreciente. Componentes de las observaciones en el sistema transformado. + Componentes de las incógnitas en el sistema transformado.....	32

3.3.4	Primeros cuatro vectores singulares en función de la profundidad. Ellos son las funciones-bases en que se desarrolla la solución y son tomados de la primera iteración de la solución obtenida por el método de DVS. Con $\epsilon=0$	34
3.3.4b	Primeros cuatro vectores singulares en función de la profundidad. Ellos son tomados de la segunda iteración de la solución obtenida por el método de DVS y con $\epsilon=0$	35
3.3.5	Dibujo esquemático que muestra las regiones típicamente encontradas en el espacio de solución al variar γ y mostrando características generales de las soluciones en esas regiones.....	37
3.3.6	Soluciones obtenidas aplicando el método de regularización para cada una de las cuatro iteraciones. La incógnita es $m(z)=\ln(\rho)$, donde ρ es la resistividad en $\Omega\text{-m}$	37
4.1	Diagrama esquemático para la obtención de los sondeos, comparación y corrección a un modo único 1D y la inversión por el método de DVS.....	42
5.1	Modelo 2D propuesto. Posee una capa conductora superficial que simula el mar con una resistividad	

	de 0.5 Ω -m y una profundidad de 1400 m. Las profundidades estan dadas en metros.....	44
5.2	Curvas de resistividad para los modos TE y TM obtenidos de el programa de Jupp y Vozoff op. cit. del modelo de la Figura 5.1 La línea unida con cruces representa el sondeo alejado de la costa que corresponde a un modelo 1D.....	45
5.3	Las tres soluciones menos oscilantes del modo TM producto de la inversión por DVS con $\epsilon = 0.0$ y como modelo inicial el modelo propuesto. La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.....	48
5.4	Las tres soluciones menos oscilantes del modo TE producto de la inversión por DVS con $\epsilon = 0.0$ y como modelo inicial el modelo propuesto. La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.....	49
5.5	Análisis espectral de la solución para el modo TM <ul style="list-style-type: none"> * Valores singulares ordenados en forma decreciente Componentes de las observaciones en el sistema transformado + Componentes de las incógnitas en el sistema 	

	transformado.....	50
5.6	Análisis espectral de la solución para el modo TE	
	* Valores singulares ordenados en forma decreciente	
	◇ Componentes de las observaciones en el sistema transformado	
	+ Componentes de las incógnitas en el sistema transformado.....	51
5.7	Correcciones de los modos TM y TE en un modo único. La línea de cuadros corresponde a la media aritmética, la línea de asteriscos a la media geométrica y la línea continua al sondeo en 1D....	52
5.8	Aplicación de la transformada de Bostik al modo TM representado por la línea de asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Bostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto.....	54
5.9	Aplicación de la transformada de Bostik al modo TE representado por la línea de asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Bostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto.....	55

5.10 Aplicación de la transformada de Bostik a la corrección por media aritmética representada por la línea unida con asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Bostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto..... 57

5.11 Aplicación de la transformada de Bostik a la corrección por media geométrica representada por la línea unida con asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Bostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto..... 58

I. INTRODUCCION

I.1 ESBOZO DEL METODO MAGNETOTELURICO EN UNA DIMENSION

Consideremos un modelo de tierra plana y unidimensional (1D) y agreguemos una fuente natural externa de campos magnéticos y eléctricos de tal forma que un frente de onda plano llegue paralelo a la superficie de la Tierra. En este caso, la energía electromagnética al interaccionar con la superficie de la Tierra es reflejada y transmitida verticalmente. Además, supondremos que la permeabilidad magnética μ es constante, siendo igual a la del vacío, esto es $\mu = \mu_0$. Para la descripción matemática del modelo, se usa un sistema de coordenadas cartesiano con el eje z dirigido hacia abajo y con su origen en la superficie. Se supone que la conductividad σ dependerá sólo de la profundidad y es isotrópica.

Con lo anterior, las componentes monocromáticas de los campos magnético \vec{B} y eléctrico \vec{E} toman la forma:

$$\vec{B} = (B_x, 0, 0) e^{-i\omega t} \quad (1.1.1)$$

$$\vec{E} = (0, E_y, 0) e^{-i\omega t} \quad (1.1.2)$$

lo que implica, además, una selección adecuada de los ejes de coordenadas x y y . Así, el problema se reduce al estudio

de ondas planas propagándose verticalmente con el campo eléctrico polarizado en la dirección y .

Tomando las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial D}{\partial t} + \bar{J} \quad (1.1.4)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (1.1.5)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1.1.6)$$

donde; \bar{E}_x denota la susceptibilidad magnética; D_x la densidad de corriente total; \bar{J}_x la densidad de corriente y ρ , la densidad de carga.

Además: $D = \epsilon \bar{E} \quad (1.1.6a)$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (1.1.6b)$$

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad (1.1.6c)$$

resulta que:

$$\nabla \times \bar{E} = - \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (1.1.7)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1.1.8)$$

Usando una derivación estándar, obtenemos

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \sigma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.10)$$

donde se ve que perturbaciones de los vectores \bar{E} y \bar{H} se propagan como una onda que se disipa por la presencia de la conductividad eléctrica.

Denotando a ω como la frecuencia angular, se obtiene en el dominio de la frecuencia,

$$\nabla^2 \bar{E} - i\sigma\omega\mu\bar{E} + \epsilon\mu\omega^2\bar{E} = 0 \quad (1.1.11)$$

o, equivalentemente,

$$\nabla^2 \bar{H} - i\sigma\omega\mu\bar{H} + \epsilon\mu\omega^2\bar{H} = 0 \quad (1.1.12)$$

Al considerar un modelo unidimensional donde el campo eléctrico \bar{E} es solo función de la profundidad z y de la frecuencia, la ecuación (1.1.11) se reduce a:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + i\omega\mu_0\sigma(z)E_y = 0 \quad (1.1.13)$$

que describe el problema magnetotéldrico en 1D.

La profundidad de penetración de los campos dentro de la Tierra está relacionada inversamente a la conductividad de la roca. En una tierra uniforme \bar{B} y \bar{E} decaen exponencialmente con la profundidad. La profundidad a la cual los campos \bar{B} y \bar{E} han decaído en amplitud 1/e de su valor en la superficie, es llamada profundidad de penetración δ_p , (Vozoff, 1972).

$$\delta_p = \left| \frac{2}{\omega \mu \sigma} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.14)$$

Esta relación muestra que, a frecuencias altas la profundidad de penetración disminuye. El rango de frecuencias tomado para el muestreo dependerá así, del rango de profundidad de interés.

El problema directo en 1D consiste, en usar una estructura de conductividad $\sigma(z)$ conocida para resolver la ecuación (1.1.13). Al hacer esto, se obtiene el campo eléctrico en función de \underline{Q} estructura. Con este resultado se puede calcular el campo magnético a partir de una de las relaciones de Maxwell.

El problema inverso consiste en obtener la distribución de conductividad eléctrica $\sigma(z)$ del subsuelo a partir de

valores de los campos magnético \bar{B} y eléctrico \bar{E} en función de la frecuencia, medidos en la superficie de la Tierra. La estimación del error estadístico de los resultados complementaría la determinación de la solución.

Con el campo magnético \bar{B} y el campo eléctrico \bar{E} en la superficie, generalmente se define

$$R_j(0; \omega_j) = \frac{B_x(0; \omega_j)}{E_y(0; \omega_j)}$$

conocida como la función respuesta.

En realidad, es de más uso práctico la resistividad aparente que se define por (Grant y West, 1965);

$$\rho_a = \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{|E_x(z=0)|^2}{|B_y(z=0)|} \quad (1.1.15)$$

Al sustituir esta definición en la ecuación (1.1.6c), se obtiene:

$$|R_j(0; \omega_j)| = \left| \frac{\mu_0}{\rho_a \omega_j} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.16)$$

Los errores en ρ_a puede derivarse a partir de los errores en R_j . Si denotamos a

$$\Delta |R_j(0; \omega_j)|$$

como el error en R_j , entonces:

$$\Delta |R_j(0; \omega_j)| \simeq \frac{d |R_j(0; \omega_j)|}{d \rho_a} \Delta \rho_a$$

donde $\Delta \rho_a$ es el error en ρ_a y, por lo tanto,

$$\Delta |R_j(0; \omega_j)| \simeq - \frac{1}{2} \frac{\mu_0^{\frac{1}{2}}}{\omega_j^{\frac{1}{2}} \rho_a^{\frac{3}{2}}} \Delta \rho_a \quad (1.1.17)$$

Habiendo establecido estas relaciones, podemos pasar de errores en resistividad aparente a errores en R_j y de observaciones en resistividad aparente a observaciones en la función respuesta R_j .

Usando las ecuaciones de Maxwell, las respuestas observadas R_j y la ecuación diferencial de onda usada en MT, se puede obtener la siguiente ecuación (Oldenburg, 1979)

$$\frac{d}{dz} R - i\omega R^2 - \mu_0 \sigma(z) = 0 \quad (1.1.18)$$

Esta ecuación relaciona no-linealmente las respuestas magnetoteléuricas R_j con la función incógnita $\sigma(z)$.

Utilizaremos en lo que sigue el tratamiento de Oldenburg op.cit. Se linealiza la ecuación anterior introduciendo perturbaciones $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_0 + \delta \sigma$ y $\underline{R}_1 = \underline{R}_0 + \delta R$.

con el fin de resolverla por los métodos estándares del análisis lineal. La función $\underline{\sigma_0}$ es llamada solución inicial. Perturbando la ecuación (1.1.18), se obtiene

$$\frac{\partial \delta R}{\partial z} - 2i\omega R \delta R - \mu_0 \delta \sigma = 0 \quad (1.1.19)$$

Integrando la ecuación anterior hasta la superficie:

$$\delta R(0; \omega_j) = - \int_0^\infty \mu_0 \frac{[E(z; \omega)]^2}{[E(0; \omega)]^2} \delta \sigma(z) dz \quad (1.1.20)$$

La variable $\underline{\delta R}$ de la ecuación (1.1.20) es un número complejo que puede descomponerse en módulo y fase. El módulo se puede determinar generalmente con menos error observacional que la fase. Así, en lo siguiente, se trabajará solo con el módulo. Considerando los cambios de magnitud de la conductividad para casos reales, resulta más conveniente definir:

$$m(z) = \ln \rho(z) = \ln \left(\frac{1}{\sigma(z)} \right) \quad (1.1.21)$$

Donde \ln simboliza el logaritmo natural. Las ecuaciones finales son

$$\delta |R(0; \omega_j)| = \int_0^\infty G_j \delta m(z) dz \quad (1.1.22a)$$

donde

$$G_j = \mu_0 \sigma(z) \omega_j |R_j(0; \omega_j)| \operatorname{Im} \frac{E^2(z; \omega_j)}{dE_a} \quad (1.1.22b)$$

$$E(0; \omega_j) \frac{d}{dz} E(0; \omega_j)$$

La ecuación (1.1.22a) es un ejemplo de una ecuación integral de Fredholm de primera clase para la cual no existe solución analítica. De ahí que el procedimiento a seguir consiste en discretizarla para encontrarle una solución numérica. La ecuación (1.1.22a) discretizada tiene la forma

$$\delta y = G S \delta m \quad (1.1.23)$$

donde, el vector δy es el residuo de las observaciones respecto a los valores calculados que corresponden al modelo inicial. Para la solución del problema directo, se resuelve la ecuación diferencial (1.1.13) por el método de extrapolación de Richardson (Acton, 1970) utilizando un programa proporcionado por Oldenburg op.cit. El vector de incógnitas δm corresponde a perturbaciones del modelo inicial. La matriz G resulta de la discretización del Kernel G (1.1.22b) y mide la sensibilidad de las observaciones hacia las incógnitas. La matriz diagonal S se construye con los factores de integración del esquema numérico que se use.

Es difícil determinar las características conductivas

de una estructura a partir de mediciones de los campos magnético \vec{B} y eléctrico \vec{E} hechas en la superficie. Algunas de las dificultades son las siguientes:

a). Debido a que se esta resolviendo una ecuación de difusión, las mediciones hechas en la superficie contienen información global de toda la estructura. Resulta difícil separar los efectos que corresponden a cada región particular de la estructura ya que la estructura misma ha filtrado parte de la información, formando zonas para las cuales las observaciones no son sensibles. Esta deficiencia en la información nos impide encontrar la composición exacta de la estructura produciendo no-unicidad en la solución.

b). Desde un punto de vista matemático, tenemos que el operador integral de la ecuación (1.1.22a) causa suavización de la función incógnita $\delta_m(z)$. Así, las perturbaciones locales en las incógnitas podrían no ser percibidas por los datos y quedar dentro del nivel de ruido. Inversamente, pequeñas perturbaciones en los datos producen grandes cambios en las incógnitas, amplificandose el ruido observacional. Esto define un problema inestable.

c). Un modelo matemático es una simplificación de la realidad y posee, por tal razón, errores. Estos errores crean incompatibilidad entre las observaciones y el modelo.

Para nuestro caso, los errores más fuertes en el modelado provienen seguramente de una desviación respecto de la hipótesis de unidimensionalidad.

La no-unicidad de la solución y su inestabilidad definen un problema mal propuesto. Debido a que no existe una solución única que satisfaga las observaciones sino un conjunto de soluciones, debemos elegir la que concuerde más con un criterio o una información adicional.

El estimador mínimo-cuadrático de \underline{m} es:

$$\underline{m} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (1.1.24)$$

que resulta de la minimización de la norma cuadrática de los residuos.

$$\text{donde} \quad A = K S_m \quad (1.1.25)$$

y A^T es la matriz transpuesta de A .

Este estimador posee dos propiedades importantes, primero, es un estimador insesgado y, segundo, posee la variancia del error más pequeña entre todos los estimadores no-sesgados. Lo anterior podría hacernos pensar en el uso de este estimador para el problema de MT; pero, problemas mal

condicionados como el de MT se caracterizan por que el valor singular más pequeño λ_{\min} es muy cercano a cero, lo que puede causar que el estimador mínimo cuadrático se encuentre muy lejos del valor real $m(z)$.

Existen varios criterios para estabilizar una solución entre los cuales podemos mencionar los que aproximan la solución por un desarrollo en funciones bases; los que representan la solución en términos de la descomposición de valores singulares del operador directo, y el método de regularización, que se obtiene de la minimización conjunta de la norma cuadrática de los residuos y de alguna medida de la suavización de la solución. En la primera parte de esta Tesis, se analizará y comparará estos dos últimos métodos en su aplicación al problema MT en 1D.

I.2 SONDEOS MAGNETOTELURICOS EN DOS DIMENSIONES.

Un modelo de tierra bidimensional es aquel en el que la variación en la conductividad eléctrica depende de dos direcciones perpendiculares $\rho = \rho(x, z)$. Una paralela a la superficie plana de la tierra x y la otra a la profundidad z . La dirección horizontal y , en la cual no hay cambios en la conductividad, se le llama dirección de rumbo de tal forma que $\partial/\partial y = 0,0$.

Al variar lateralmente la conductividad, la intensidad del campo magnético y del campo eléctrico dependen de su dirección relativa a la dirección de rumbo.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden dividir en dos grupos o modos independientes.

a) El modo eléctrico transverso TE corresponde al campo eléctrico paralelo a la dirección de rumbo. Las ecuaciones de Maxwell para este modo son:

$$B_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_y$$

$$B_z = - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_y$$

y b) El modo magnético transverso TM corresponde al campo eléctrico perpendicular a la dirección de rumbo cuyas componentes son:

$$E_y = -\rho \frac{\partial}{\partial z} B_y$$

$$E_z = \rho \frac{\partial}{\partial x} B_y$$

La resistividad aparente para cada polarización TM y TE se calcula resolviendo las ecuaciones de Maxwell en los dos sistemas independientes: Para el modo TE:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{Z_x} \frac{\partial}{\partial x} B_y \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{1}{Z_z} \frac{\partial}{\partial z} B_y \right| - i\omega\mu = 0 \quad (1.2.1)$$

$$E_z = \frac{1}{Z_x} \frac{\partial}{\partial x} B_y \quad (1.2.2)$$

$$E_x = -\frac{1}{Z_z} \frac{\partial}{\partial z} B_y \quad (1.2.3)$$

donde $Z_x = Z_z = \sigma - i\epsilon\omega$

Para el modo TM:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{Z_x} \frac{\partial}{\partial x} E_y \right| + \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{1}{Z_z} \frac{\partial}{\partial z} E_y \right| + \sigma - i\epsilon\omega = 0 \quad (1.2.4)$$

$$B_z = -\frac{1}{Z_x} \frac{\partial}{\partial x} E_y \quad (1.2.5)$$

$$B_x = - \frac{1}{Z_z} \frac{\partial}{\partial z} E_y \quad (1.2.6)$$

donde $Z_x = Z_z = -i\omega\mu$

Se obtiene las resistividades aparentes correspondientes, a) para el modo TE.

$$\rho_{TM} = \frac{1}{\omega\mu} \frac{|E_x|^2}{|B_y|} \quad (1.2.7)$$

b) para el modo TM:

$$\rho_{TE} = \frac{1}{\omega\mu} \frac{|E_y|^2}{|B_x|} \quad (1.2.8)$$

Por lo tanto, resultan dos curvas de resistividad aparente para cada sitio sondeado; una para TM y otra para TE, mientras que en un modelo 1D solo se obtiene una curva.

Los valores de las curvas de resistividad aparente para cada uno de los modos TM y TE como funciones del período T o la frecuencia ω son usados frecuentemente en la interpretación de modelos en dos dimensiones 2D.

En un modelo con una discontinuidad lateral en el cual el sitio de sondeo se encuentra sobre el terreno conductivo, la curva de resistividad aparente para el modo TE tendrá valores más grandes a una frecuencia dada que el modo TM, y lo contrario, cuando el sitio de sondeo se encuentra ubicado sobre el lado resistivo. Lo anterior se explica porque hay

un exceso de corriente en el lado conductivo del contacto.

Cagniard (1953), deriva fórmulas para la resistividad en problemas unidimensionales de dos y tres capas. Más tarde, Vozoff (1972) muestra el comportamiento general de estas curvas para casos simples en 2D, E. Orange (1982) describe una interpretación de datos magnetotelúricos para áreas más complejas. En general, es difícil calcular rutinariamente estructuras para modelos 2D debido al alto costo computacional asociado a la inversión en 2D.

El entendimiento de las curvas de resistividad aparente para los modos TM y TE bajo condiciones geológicas conocidas permitirá aumentar la utilidad de la exploración magnetotelúrica y reducir los costos de análisis e interpretación.

El análisis del comportamiento de los modos TM y TE en diferentes sitios al aproximarse a una capa lateral de alta conductividad como el mar, sugiere la existencia de una corrección a ambos modos para obtener un modo único que pueda ser interpretado como un modelo de capas 1D.

La obtención de una curva única y confiable de resistividad aparente en función del período permite hacer uso de la herramienta desarrollada para modelos de capas.

La aproximación de Bostik propone una transformación a partir del análisis basado en el comportamiento asintótico de las curvas de resistividad aparente a bajas frecuencias para un modelo de capas. Esta transformación permite calcular curvas de resistividad contra profundidad con las siguientes fórmulas: (Bostik, 1977)

$$\rho = \rho_a(T) \frac{1 + m(T)}{1 - m(T)} \quad (1.2.9)$$

donde

$$m(T) = \frac{d [\log \rho_a(T)]}{d [\log (T)]}$$

además

$$D = \left| \frac{\rho_a(\omega)}{\mu \omega} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.10)$$

donde ρ presenta la resistividad estimada del medio; T , el período; μ , la permeabilidad magnética; $\rho_a(\omega)$, la resistividad aparente, función de la frecuencia y, por último, D representa la profundidad.

Esta transformación puede usarse para interpretar directamente el sondeo, o bien como modelo inicial en algún método de inversión para la interpretación y análisis del sondeo.

II. OBJETIVOS

Los objetivos de esta Tesis son estudiar y corregir las distorsiones en los sondeos magnetoteléuticos producidas por la presencia del mar, como analizar y comparar el método de descomposición de valores singulares (DVS) y el de regularización en su aplicación al problema MT en 1D.

III. METODOS DE INVERSION

III.1 DESCOMPOSICION DE VALORES SINGULARES (DVS)

En esta Tesis se entiende por métodos de inversión a métodos de estimación estabilizada, es decir, que solucionan problemas mal propuestos.

El método de descomposición espectral ha sido usado desde principios de siglo para resolver ecuaciones integrales.

Tomando el problema ya discretizado (1.1.23), la matriz A definida como (1.1.25) asocia dos espacios, uno de N dimensiones correspondiente a las incógnitas y otro de M que corresponde a las observaciones. Esta matriz puede

descomponerse de la siguiente forma (Lanczos, 1967):

$$A = U\Delta V^T \quad (3.1.1)$$

Donde la matriz \underline{U} es cuadrada $\underline{M \times M}$ formada por los vectores-columnas $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, que barren el espacio asociado a las observaciones. En igual forma, V es una matriz cuadrada $\underline{N \times N}$ formada por los vectores que barren el espacio de incógnitas. V^T es la transpuesta de V . Las matrices \underline{U} y \underline{V} cumplen con la condición

$$\begin{aligned} U^T U &= I \\ V^T V &= I \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

formando sus columnas un sistema de vectores ortogonales. Por último, la matriz $\underline{\Delta}$ es una matriz diagonal $\underline{N \times M}$ cuyos elementos de la diagonal principal son no-negativos y son llamados valores singulares. Estos son ordenados de mayor a menor.

Usando uno de los resultados

$$A^T A = V \Delta^2 V^T \quad \text{o} \quad A A^T = U \Delta^2 U^T \quad (3.1.3)$$

los elementos de la DVS pueden calcularse resolviendo uno de los siguientes problemas de valores característicos:

$$(A^T A)V = V\Delta^2 \quad \text{o} \quad (AA^T)U = U\Delta^2 \quad (3.1.4)$$

En la práctica solucionamos el problema que tenga menor dimensión y, enseguida, usamos (3.1.1) para calcular el segundo conjunto de vectores singulares. El programa de computación que se ha utilizado, fué cedido por J. Frez*, y hace uso de rutinas muy efectivas para hacer los cálculos de la DVS. Estas rutinas provienen de métodos numéricos diseñados por Wilkinson y Reinsch (1971).

Tomando en cuenta que algunos valores singulares son nulos o muy próximos a nulos, podemos particionar la matriz $\underline{\Delta}$ en una submatriz $\underline{\Delta}_p$ y varias matrices cero o casi nulas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.1.5)$$

donde $\underline{\Delta}_p$ es una matriz de dimensión PXP que contiene los P valores singulares no-nulos de la matriz $\underline{\Delta}$. La descomposición (3.1.1) queda entonces:

* Dr. J. Frez, Investigador del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, México.

$$A = U_P \Delta_P V_P^T \quad (3.1.6)$$

donde U_P y V_P contienen sólo las primeras P columnas de las matrices \underline{U} y \underline{V} respectivamente.

La obtención de la pseudo-inversa de \underline{A} utilizando la DVS consiste en usar

$$\Delta^+ = \begin{vmatrix} \lambda_P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.1.7)$$

706 donde el superíndice $+$ denota pseudo- o cuasi-inversa.

De este modo, tomamos

$$A^+ = V_P \Delta_P^{-1} U_P^T \quad (3.1.8)$$

y una solución particular del problema

$$y = Ax \quad (3.1.9)$$

es

$$x_P = V_P \Delta_P^{-1} U_P^T y \quad (3.1.10)$$

La solución general contiene, además, una componente (que no podemos determinar)

$$V_0 c \quad (3.1.11)$$

donde V_0 contiene, como columnas los vectores singulares asociados a los valores característicos nulos del problema

$$(A^T A)V = V\Lambda^2 \quad (3.1.12)$$

y c es un vector indeterminado.

Se puede demostrar que la solución m_p es al mismo tiempo, mínimo-cuadrática y de mínima longitud sobre cada uno de los ejes principales, es decir, sobre cada una de las direcciones dadas por los vectores columnas de la matriz V .

El mal condicionamiento del problema se podría disminuir primero, aumentando la información; segundo, eliminando incógnitas, o tercero, utilizando un criterio de estimación que incluya alguna información previa que tengamos de la solución, por ejemplo, su grado de suavización o su cercanía a una solución inicial.

Tomemos como ejemplo un estimador que además de minimizar la norma cuadrática de los residuos, minimice también la norma de la solución. Así, minimizamos el siguiente funcional:

$$\|y - Am\|^2 + \alpha \|m\|^2 \quad (3.1.13)$$

que produce el estimador

$$m = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T y \quad (3.1.14)$$

En un algoritmo recursivo por otro lado, se mejora una solución inicial m(-) estimando su perturbación δm .

$$\delta m = m(+)-m(-) \quad (3.1.15)$$

En un algoritmo recursivo, se usa como datos los residuos con respecto a la solución inicial.

$$\delta y = y - KSm(-) \quad (3.1.16)$$

Los métodos recursivos hacen uso de la información previa lo que podría aliviar el mal condicionamiento de la solución no-recursiva del mismo problema. Lo que se propone minimizar en un esquema recursivo es la expresión.

$$\|y - AS_{m(+)}\|_{C_y^{-1}}^2 + \alpha \|m(+)-m(-)\|_{C_m^{-1}}^2 \quad (3.1.17)$$

En esta expresión, las normas están ponderadas por la precisión de las mediciones y de la solución inicial a través de dos matrices de covariancias. En particular, C_y

es la matriz de covariancia de los errores de observación; y C_m , la de los errores de la solución inicial. S_m es una matriz diagonal que incluye los factores debidos al esquema de integración. Por último, α es el parámetro de regularización global que da la importancia relativa a cada término del funcional (3.1.17) y que debe encontrarse empíricamente, analizando tanto la estabilidad de la solución como los residuos de las observaciones.

El resultado de la minimización produce el estimador:

$$m(+)=m(-)+P_m^{\frac{1}{2}}[A^T A+\alpha I]^{-1}A^T P_y^{\frac{1}{2}}y \quad (3.1.18)$$

La inversión del operador $[A^T A+\alpha I]$ la efectuaremos usando la DVS. Un valor de $\alpha=0.0$ produce la estimación mínimo cuadrática ponderada.

La matriz A de la expresión (3.1.18) ha sido definida de diferente forma que la matriz de la expresión (1.1.15). En el Apéndice No.1 se incluye un desarrollo detallado del álgebra correspondiente.

La naturaleza continua del operador K causa que los vectores característicos u_i y v_j sean funciones continuas y oscilantes del argumento de m . Las oscilaciones aumentan con el índice de los valores singulares correspondientes.

Así, los vectores singulares correspondientes a los primeros valores singulares muestran características globales de la solución y la inclusión de más términos podrían mostrar características locales, siempre que no se rebase el límite de estabilidad de la solución.

Para hacer uso de la descomposición espectral se debe identificar el número λ_{\min} de elementos de la DVS que conforman una solución estable. Además, se debe tomar en cuenta la información adicional con que se cuenta y la física del problema. En la identificación del número mínimo de eigenvalores está el punto clave del método.

III.2 REGULARIZACION

Lo que sigue se basa en la derivación de Frez (1984). El criterio de estimación por regularización, consiste en minimizar la expresión:

$$\|y - A_m\|_{C_y^{-1}}^2 + \alpha \|D_{pm}^*\|^2 + \beta \|m_p\|_{C_m^{-1}}^2 \quad (3.2.1)$$

donde el estimador $\underline{m}(z)$ ha sido descompuesto en la suma de el espacio nulo \underline{m}_p y el que corresponde al resto del espacio del operador regularizante \underline{m}^* .

$$m = m^* + m_p \quad (3.2.2)$$

donde

$$D_{p m^*} \neq 0 \quad D_{p m_p} = 0 \quad (3.2.3)$$

El primer término de la expresión (3.2.1) corresponde a la norma cuadrática de los residuos y está normalizado por la matriz C_y que corresponde a la covarianza de los errores de observación.

El segundo término de la expresión (3.2.1) corresponde a la norma cuadrática de la p -ésima derivada de la solución.

El último término del funcional corresponde a la regularización de la componente de la solución que pertenece al espacio nulo de D_p .

El segundo y tercer término están normalizados por la matriz C_m que contiene en su diagonal principal los errores estimados del modelo inicial.

La minimización de la expresión (3.2.1) puede resolverse por técnicas variacionales estándares para lo cual hay que discretizar los operadores y las funciones. Al

aplicar la minimización, se obtiene.

$$m^* = G_p S_m P_m^{\frac{1}{2}} [A^T A + \alpha I]^{-1} A^T P_Y^{\frac{1}{2}} (y - Y_p c) \quad (3.2.4)$$

$$m_p = m_p^T [m Y_p^T P_Y^{\frac{1}{2}} Y_p^{-1} \alpha P_Y^{\frac{1}{2}} Y_p + \frac{\beta}{\alpha} m_p^T P_m m_p]^{-1} Y_p^T P_Y y \quad (3.2.5)$$

La matriz A de la expresión (3.2.4) ha sido definida de diferente forma a la matriz de la expresión (1.1.25). Los detalles algebraicos correspondientes han sido incluidos en el Apéndice No.2.

En la aplicación del algoritmo, se han usado los valores 2 y 4 para el parámetro p utilizando rutinas ya probadas en trabajos anteriores. Los valores de α y de β deben ser determinados en una serie de experimentos numéricos en que se evalúa la estabilidad de la solución, la conducta de los residuos y la satisfacción del conocimiento adicional que se posea.

III.3 COMPARACION DE LAS DOS TECNICAS EN SU APLICACION A UN PROBLEMA MT EN 1D.

Se presentan los resultados de la comparación de los métodos de regularización y el de DVS en un problema MT consistente en un modelo 1D de capas resistivas. Este modelo de prueba fue usado por Oldenburg op.cit. y se presenta en la Tabla No.1.

Las funciones respuestas no han sido contaminadas por ruido en estos experimentos numéricos. La matriz de derivadas parciales se calculó a partir de (1.1.22b) y un gráfico de ellas se muestra en la Figura 3.3.1, en esta figura, los elementos de la matriz han sido normalizados por los errores del modelo inicial y los coeficientes del esquema de integración, en este caso, trapezoidal. De la figura 3.3.1, se observa cómo la información cubre una mayor profundidad conforme aumenta el período. Sin embargo, también se observa que la sensibilidad decrece con la profundidad, llegando a una profundidad de máxima penetración para el conjunto de períodos que se ha tomado en estos experimentos numéricos.

La matriz de derivadas parciales, las funciones respuesta R_j y un modelo inicial constante de $m(z)=2.3$ son las entradas comunes a ambos algoritmos de inversión, el de

TABLA I.- Parámetros y respuestas para un modelo de dos capas. ρ y h son las resistividades y espesor de las capas de el modelo hipotético y T es el período en segundos, y R_j son las amplitudes de las funciones de respuesta. Tomada de Oldenburg, op.cit.

ESTRUCTURA		
$\rho = 10 \Omega\text{-m}$	$m = 2.3026$	$h = 10 \text{ mts.}$
$\rho = 390 \Omega\text{-m}$	$m = 5.9661$	$h = 240 \text{ mts.}$
$\rho = 10 \Omega\text{-m}$	$m = 2.3026$	
T	$ R_j (X 10)$	
0.0100	0.53539	
0.0178	0.83065	
0.0316	1.28290	
0.0562	1.95630	
0.1000	2.92830	
0.1780	4.29790	
0.3160	6.18060	
0.5620	8.75390	
1.0000	12.23400	
1.7800	16.91600	
3.1600	23.15400	
5.6200	31.51700	
10.0000	42.69400	
17.8000	57.62500	
31.6000	77.44800	
56.2000	103.96000	
100.0000	139.36000	
17 observaciones		

MATRIZ DE DERIVADAS PARCIALES

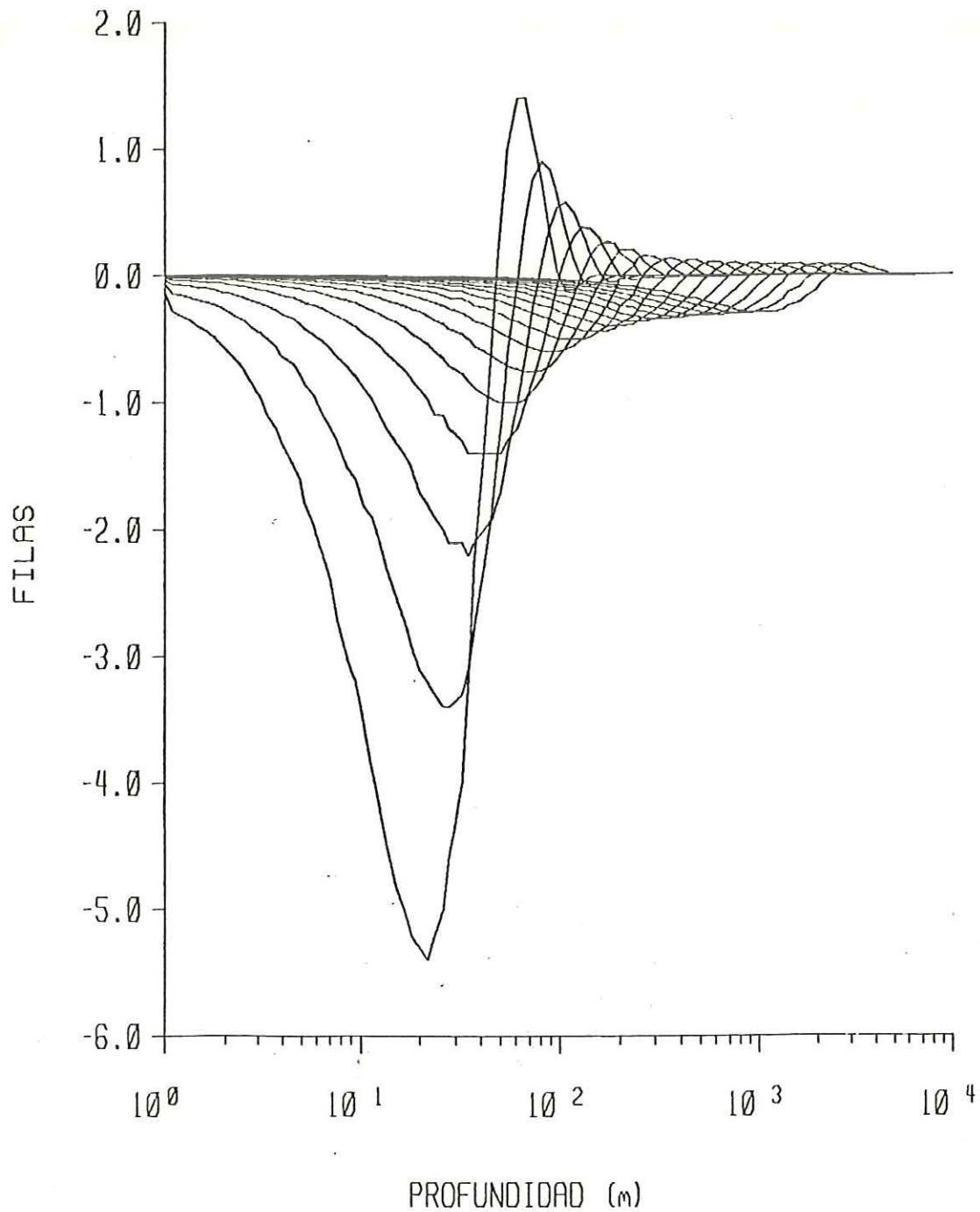


Fig. 3.3.1 Gráfica de Derivadas parciales del campo eléctrico con respecto a su derivada vertical. Las curvas corresponden a las filas de la matriz de derivadas parciales. Las derivadas parciales están normalizadas por los errores de la solución \underline{C}_m y factores de integración \underline{E} , en este caso, trapezoidal.

regularización y el de DVS.

El método de inversión de DVS fué iterado tres veces después de las cuales no resultan cambios significativos del ajuste de los datos. En la Figura 3.3.2 se muestran con línea gruesa el modelo real y con línea delgada el ajuste. El ajuste en la tercera iteración alcanza un valor máximo de 5.01 y disminuye bruscamente a la profundidad de 230 m. El contraste de resistividad en la capa superior, a 10 m de profundidad, no es percibida por el estimador. Esto se explica porque la profundidad de penetración mínima en el rango de frecuencias usado y para este modelo de capas resistivas, es de aproximadamente 158.0 m.

La Figura 3.3.3 muestra el resultado del análisis espectral del proceso de solución. En ella, se muestra los valores singulares de la matriz de derivadas parciales graficados en orden decreciente; los valores de $\underline{u}^T \underline{y}$ y de \underline{v}_m^T que corresponden a los datos e incógnitas en los ejes \underline{u}_i y \underline{v}_j , respectivamente. Por simple inspección, podemos seleccionar el número de términos apropiados para el desarrollo de la solución, buscando un cambio en la conducta de las componentes espectrales de los datos y de la solución que impliquen la no-convergencia de los desarrollos correspondientes. En la práctica, esperamos que los valores \underline{V}_i^T y \underline{U}_j^T decrezcan asintóticamente en función del índice de

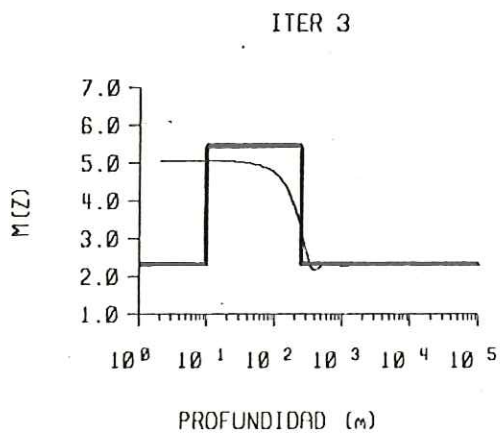
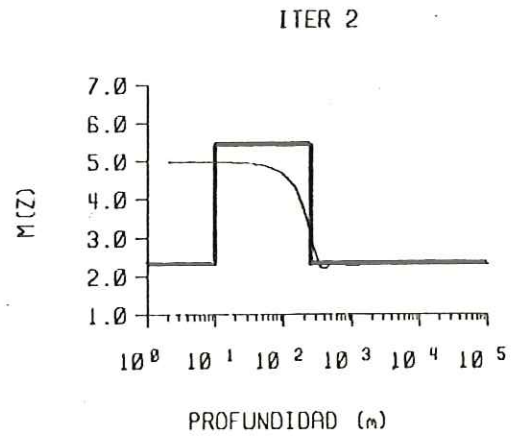
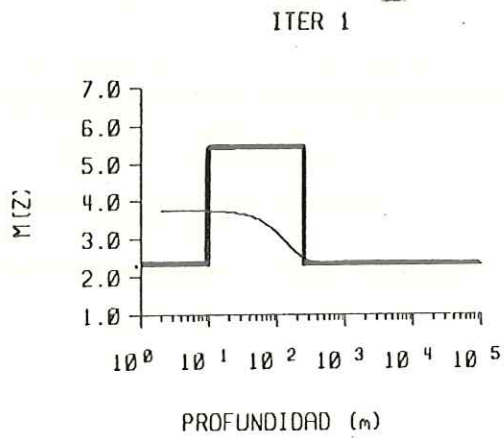


Fig. 3.3.2 Soluciones obtenidas por el método de DVS en las primeras tres iteraciones. Con $\alpha=0.0$. La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.

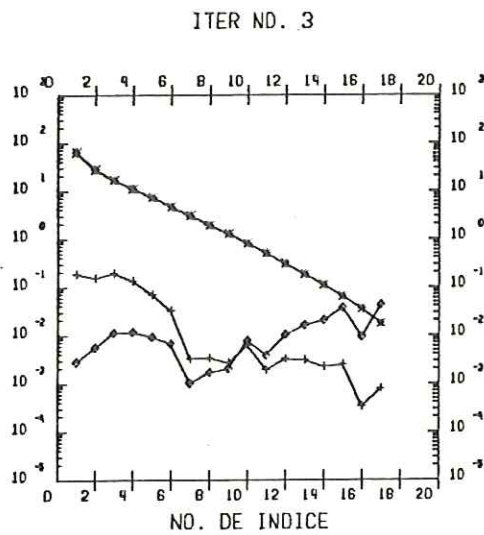
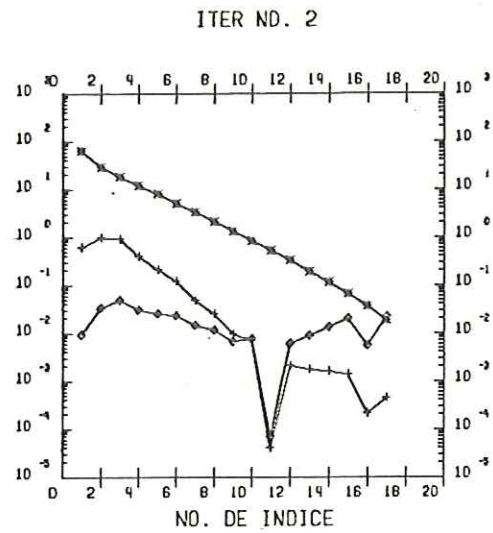
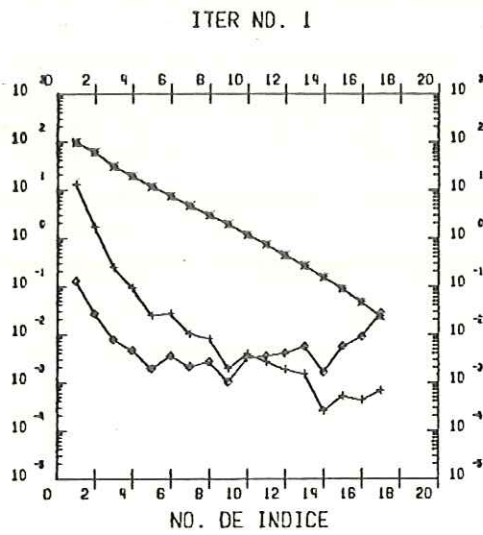


Fig. 3.3.3 Análisis espectral de la solución

- * Valores singulares ordenados en forma decreciente
- ◇ Componentes de las observaciones en el sistema transformado.
- + Componentes de las incógnitas en el sistema transformado.

orden de los valores singulares.

En la Figura 3.3.3, se observa, por el cambio de inclinación, que, en la primera iteración después de los cuatro primeros valores singulares ya casi no hay convergencia en la solución. En la segunda iteración, la información contenida en el primero y segundo valores singulares ya ha sido agotada y la convergencia se inicia desde el tercer eigenvalor hasta el noveno. En la tercera iteración, el cambio en el valor de $\underline{u}^T \underline{y}$ al aumentar el índice, no es más que de un orden de magnitud. Por lo cual no agrega información sustancial a la solución. Esto nos indica que se ha agotado la información contenida en los datos y una iteración más solo contendría ruido numérico.

La Figura 3.3.4 nos muestra cómo varían los vectores bases en que se desarrolla la solución en función de la profundidad. Se observa el aumento de las oscilaciones a medida que aumentamos el orden de los valores singulares. En la primera iteración, los vectores base empiezan a oscilar en los 80 m de profundidad aproximadamente. A partir de esta profundidad, los vectores base podrían contener información de la estructura. Sin embargo, en la segunda iteración los vectores base comienzan a oscilar hasta los 300 m esto nos indica que la información contenida en los primeros 300 m ya ha sido usada en la primera

ITER 1

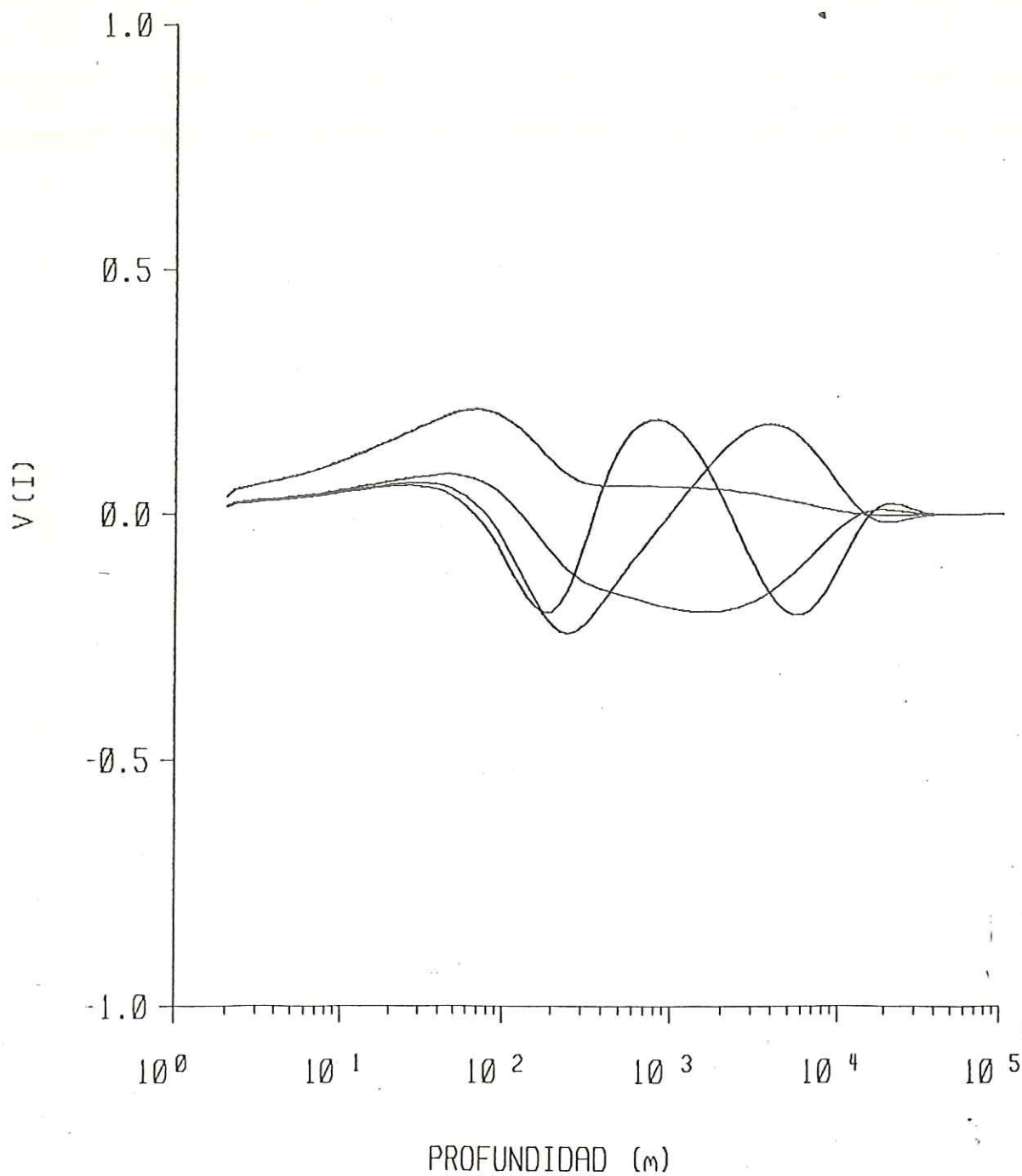


Fig. 3.3.4 Primeros cuatro vectores singulares en función de la profundidad. Ellos son las funciones-bases en que se desarrolla la solución y son tomados de la primera iteración de la solución obtenida por el método de DVS. Con $\alpha=0.0$

ITER 2

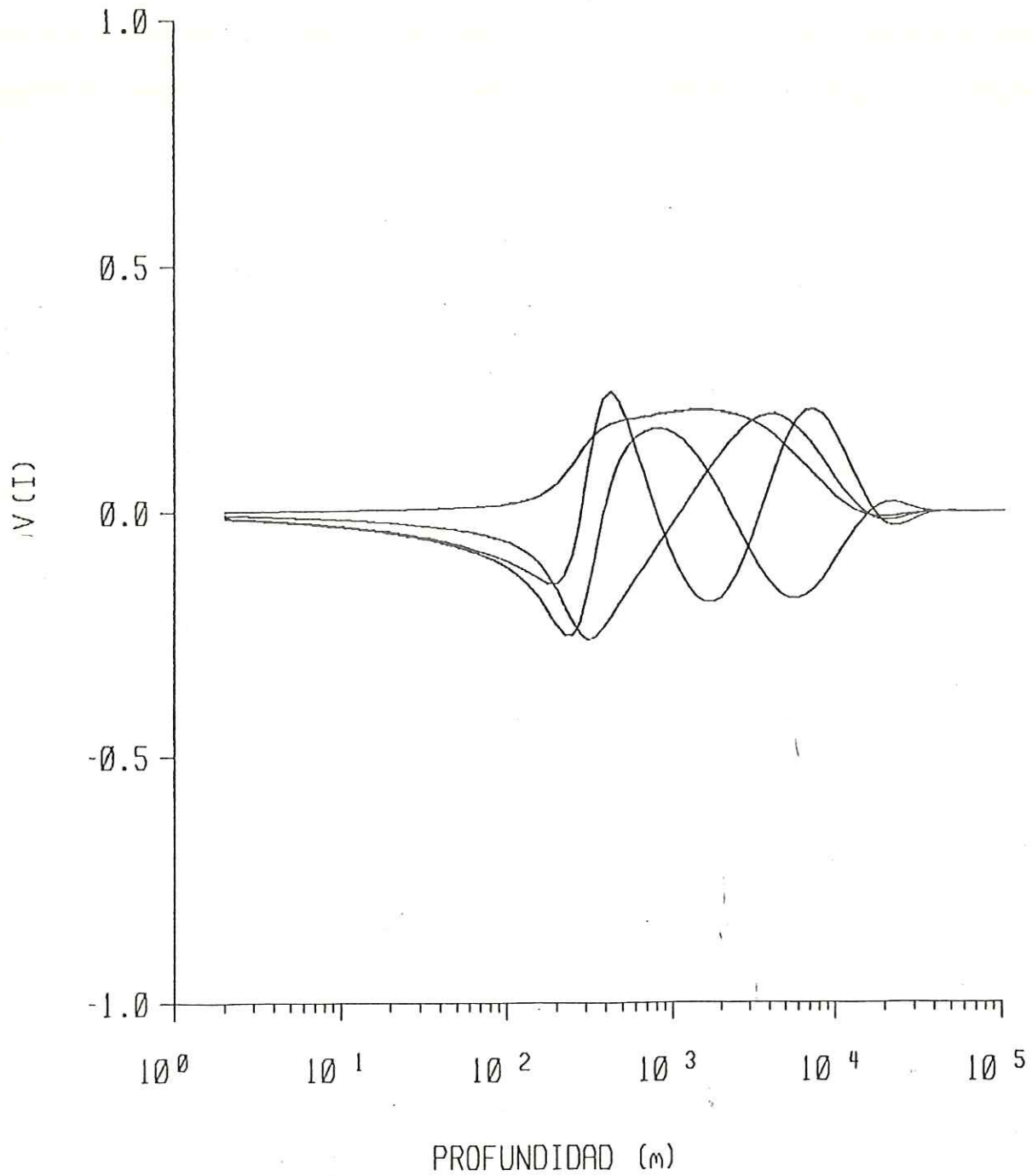


Fig. 3.3.4b Primeros cuatro vectores singulares en función de la profundidad. Ellos son tomados de la segunda iteración de la solución obtenida por el método de DVS y con $\epsilon=0.0$

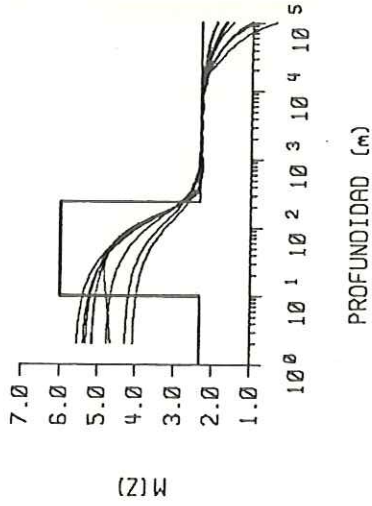
iteración. En ambas iteraciones no hay sensibilidad más allá de los 30,000 m

El aumento en las oscilaciones de los vectores base a medida que aumenta el orden de los valores singulares, nos muestran un aspecto del paralelismo existente entre el análisis de Fourier y el de DVS.

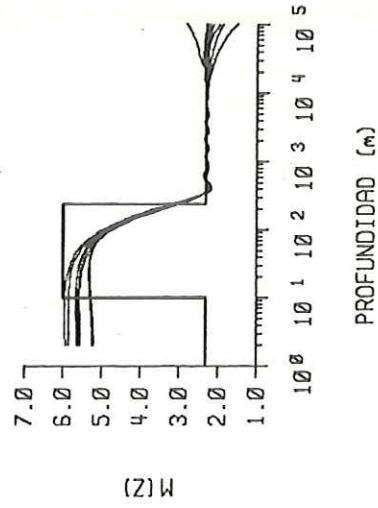
El método de regularización nos permite encontrar una familia de soluciones variando los parámetros de estabilización α y β de tal forma que estas soluciones permanezcan dentro de rangos aceptables. Al variar ambos parámetros, se muestrea el espacio de soluciones. Este espacio se puede representar esquemáticamente como en la Figura 3.3.5 en la que se muestra una región central de soluciones aceptables. En la Figura 3.3.6 se muestran los resultados de las primeras cuatro iteraciones en la inversión y la convergencia paulatina a la solución real. En la cuarta iteración se obtiene una familia de soluciones que alcanzan el valor de la capa de resistividad más alta y posee gran sensibilidad al contraste de resistividades, en el fondo de la capa.

Este método da más flexibilidad en el ajuste a los datos, lo cual es una ventaja hacia el modelo de DVS que debe permanecer más cercano al modelo inicial. Por otro

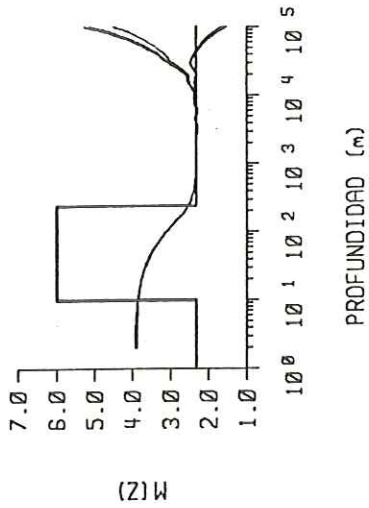
ITER 2



ITER 4



ITER 1



ITER 3

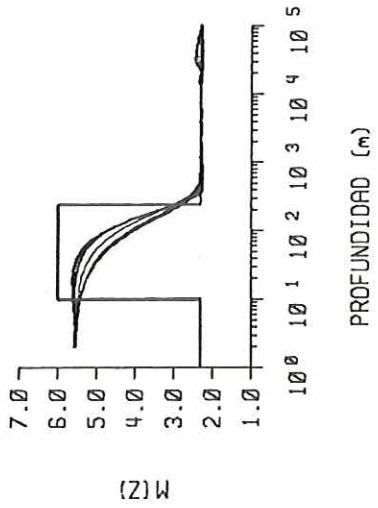


Fig. 3.3.6 Soluciones obtenidas aplicando el método de regularización para cada una de las cuatro iteraciones. La incógnita es $m(z)=\ln(p)$, donde p es la resistividad en $\Omega\text{-mt}$.

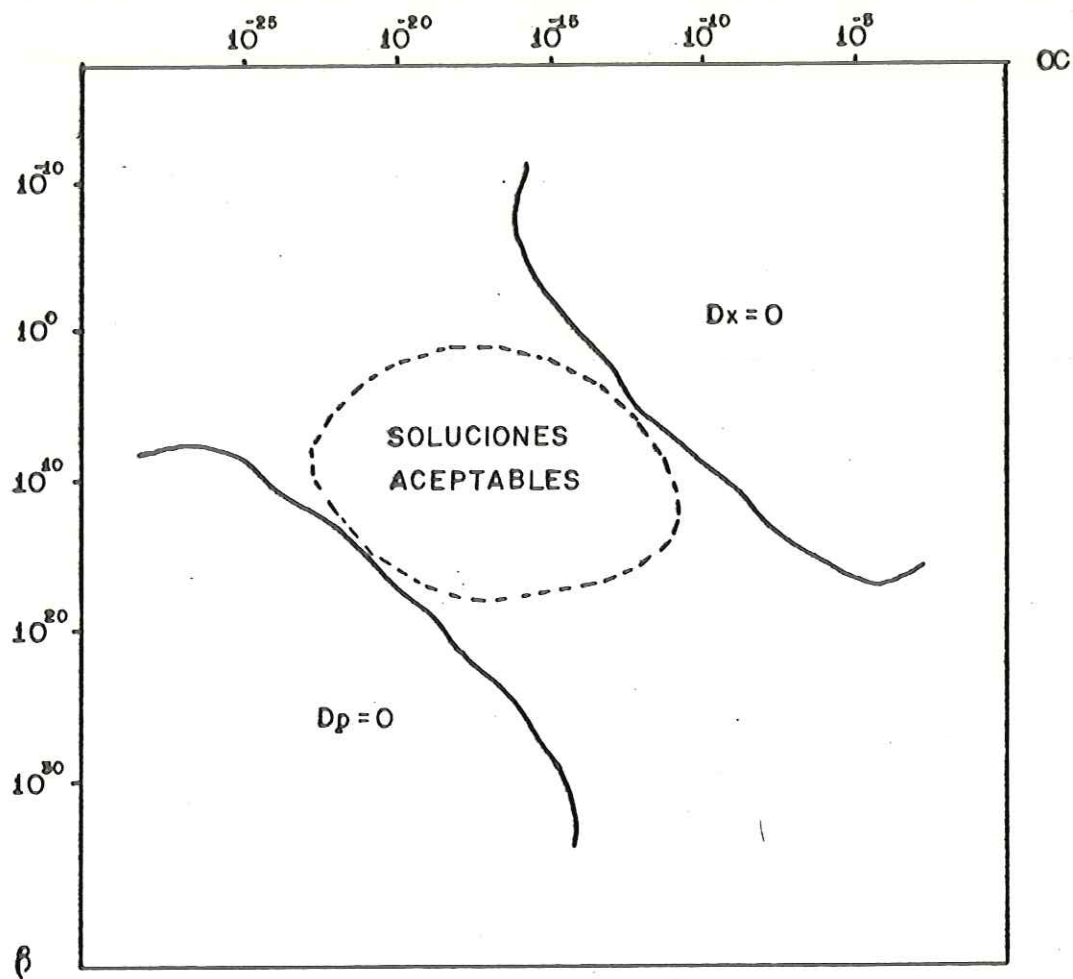


Fig. 3.3.5.- Dibujo esquemático que muestra las regiones típicamente encontradas en el espacio de soluciones al variar α y β mostrando características generales de las soluciones en esas regiones.

lado, el método de regularización muestra la región de solución al variar α y β , lo cual nos permite visualizar la familia de soluciones aceptables, para escoger la más apropiada a nuestro problema en particular. Además, hay más control local de la solución pudiendo constreñirla por medio de la matriz de covarianza en regiones donde conocemos la resistividad, por ejemplo en la superficie.

Por último, el método de DVS posee la ventaja de mostrar cuantitativamente la naturaleza indeterminada del sistema.

IV. METODO PARA LA OBTENCION Y ANALISIS DE LOS SONDEOS EN 2D

En esta sección se describen los pasos seguidos para obtener los sondeos en 2D y su corrección para el análisis en 1D.

La Fig. 4.1 presenta un diagrama esquemático de los pasos seguidos para la obtención de los sondeos y su corrección.

Se propone un modelo de Tierra con una capa lateral altamente conductiva simulando el mar. Los lugares en los cuales se llevan a cabo los sondeos se escogen, de tal forma, que se vayan aproximando al mar para observar la distorsión de los modos al percibir este conductor lateral a medida que se encuentran más próximos a él.

En el modelo propuesto se coloca un sitio de sondeo muy alejado de la línea de costa, de tal forma, que prácticamente no esté distorsionado por el efecto del mar. Este sondeo corresponde a un modelo de capas unidimensional.

Con un modelo propuesto y habiendo determinado la ubicación de los sitios de sondeo, se calculan los sondeos en el programa de Jupp y Vozoff (1976) usando un algoritmo llamado EMCDC diseñado por Madden (1972) que consiste en

hacer una analogía entre las ecuaciones de Maxwell y las usadas para resolver problemas de líneas de transmisión, obteniéndose las curvas respectivas de resistividad aparente para los dos modos, en función de la frecuencia.

Para medir la distorsión producida por la presencia del mar como una capa conductora lateral se invierten los dos modos por el método de DVS. En la inversión se toma como modelo inicial el modelo de capas, a partir del cual, se calcularon los sondeos.

La unidimensionalidad se determinará cuando la curva calculada para el modo TM es la misma que la calculada para el modo TE, o sea que las curvas calculadas para ambos modos poseen los mismos valores a una frecuencia dada.

El sondeo obtenido en el sitio alejado de la costa se compara con los sondeos de los sitios más próximos a ella con el objeto de encontrar algún comportamiento sistemático e intentar determinar una corrección aplicable a los dos modos TE y TM que dé un modo único que pueda ser interpretado con un modelo 1D. En esta tesis he utilizado dos correcciones: la medida geométrica y la media algebraica entre ambos modos.

A los resultados del procedimiento descrito en el

párrafo anterior, a las dos componentes TM y TE y al sondeo situado lejos de la línea de costa, se le calcula la transformada de Bostik. Finalmente, los resultados obtenidos de la transformación se analizan e interpretan.

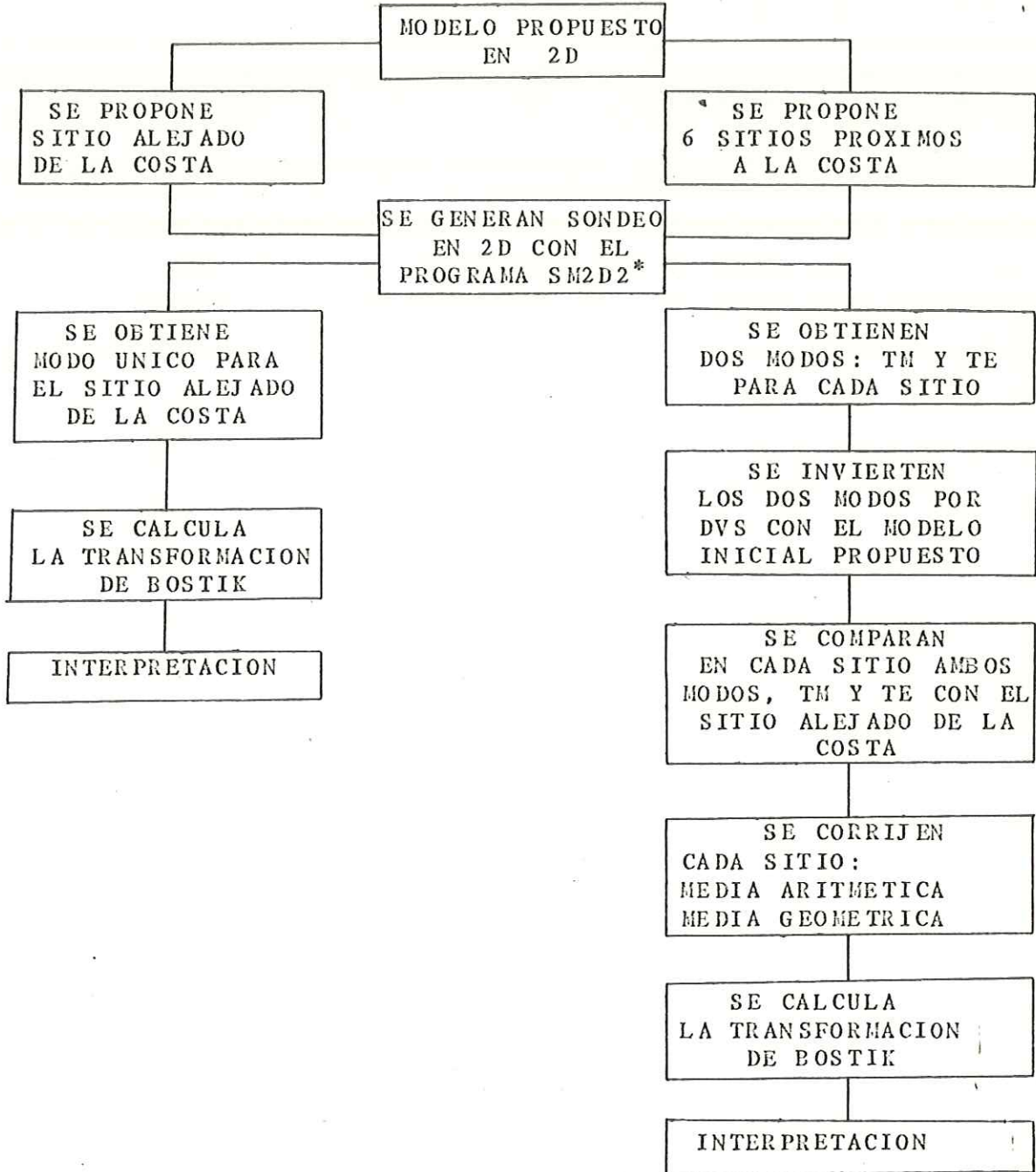


Fig. 4.1 Diagrama esquemático para la obtención de los sondeos, comparación y corrección a un modo único 1D y la inversión por el método de DVS.

* Programa tomado de Jupp y Vozoff (1976)

V. RESULTADOS

El modelo en 2D propuesto para este trabajo es el que se presenta en la Figura 5.1. Este modelo posee una capa conductora de $0.5 \Omega\text{-m}$ que representa el mar, con una profundidad de 1.4 km y una serie de capas homogéneas colocadas lateralmente al mar cuyas resistividades son; de superficie a fondo, de 150 , 400 y $800 \Omega\text{-m}$, con un grosor de 800 , 400 y 400 m respectivamente. Bajo estas capas, se encuentran dos más de 1000 y $10 \Omega\text{-m}$ con un grosor de 28 y 400 km de superficie a fondo. Esta última conforma el basamento.

Sobre este modelo se definen 6 sitios de medición colocados a diferentes distancias del mar, (Tabla No. II), y un sitio separado por 100 km de la línea de costa considerado practicamente libre de la influencia del océano conductor.

Para cada sitio, se obtienen por medio del programa de Jupp y Vozoff (1975), sondeos de dos curvas de resistividad aparente contra período correspondientes a los modos TM y TE (Figura 5.2). En esta Figura se presentan 6 gráficas que corresponden a cada sitio de observación. El sondeo obtenido en el sitio alejado de la costa corresponde a un modelo en 1D y servirá como base en la comparación del modo

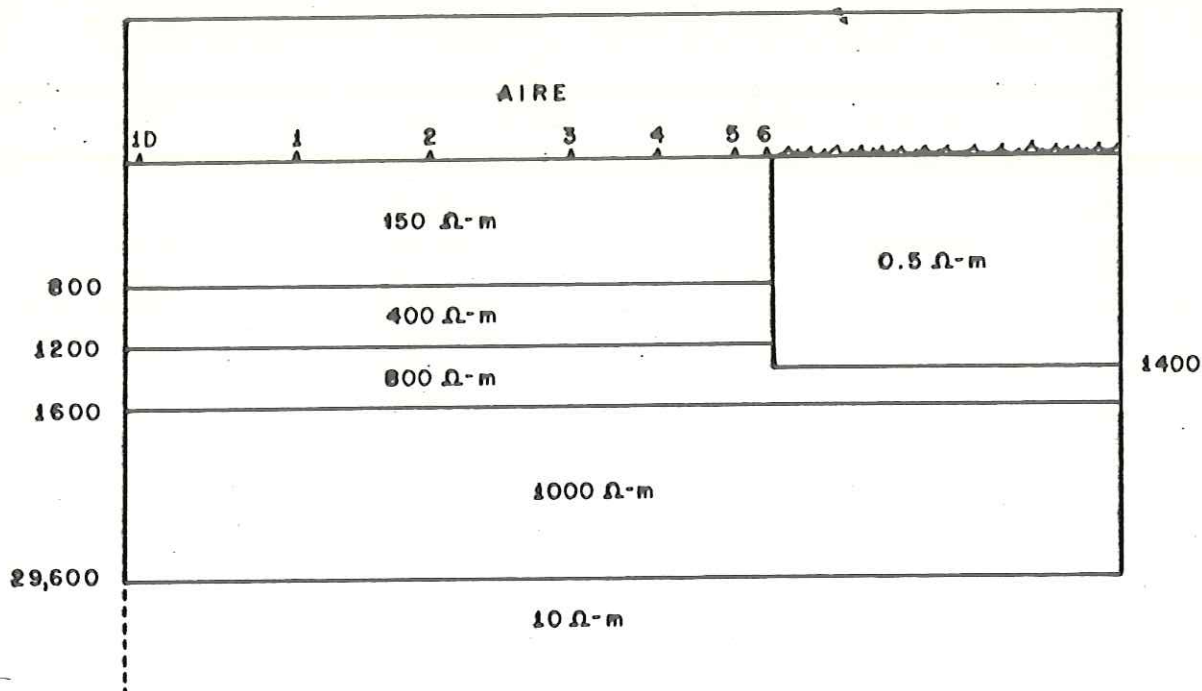


Fig. 5.1.- Modelo 2D propuesto. Posee una capa conductora superficial que simula el mar con una resistividad de $0.5 \Omega\text{-m}$ y una profundidad de 1400m. Las profundidades estan dadas en metros.

TABLA II. - Ubicación de los sitios de sondeo con respecto a la línea de costa. La distancia esta dada en metros.

DISTANCIA	SITIO
28,000	1
8,000	2
4,000	3
2,000	4
500	5
100	6

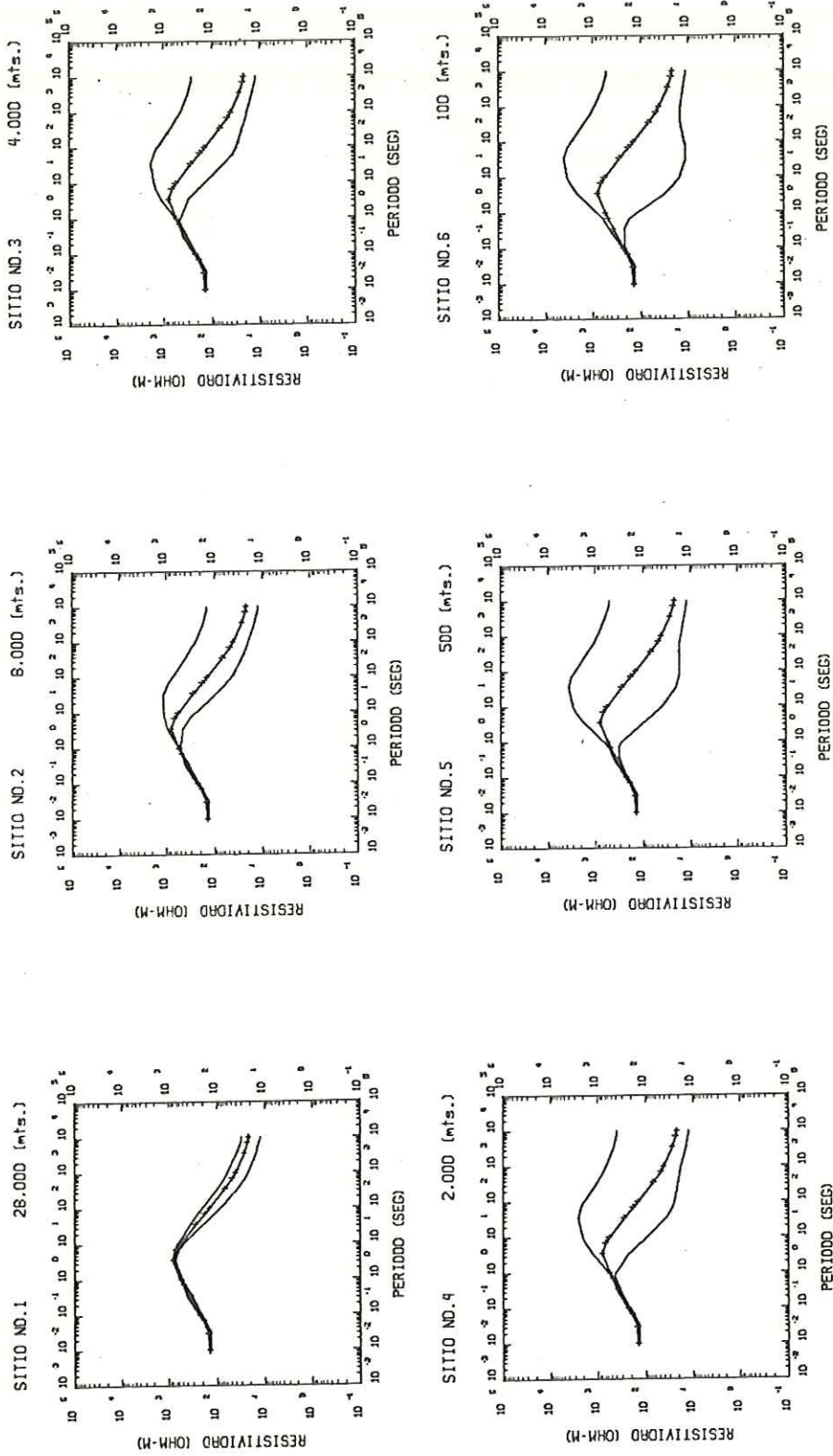


Fig. 5.2 Curvas de resistividad para los modos TE y TM obtenidos de el programa de Jupp y Vozoff op. cit. del modelo de la Figura 5.1 La línea unida con cruces representa el sondeo alejado de la costa que corresponde a un modelo 1D.

TM y del modo TE de los otros sitios. Este sondeo se ha graficado con una serie de cruces unidas por una línea continua. Cada gráfica señala el número del sitio y la distancia de separación de la línea de costa.

En el sitio No.1 la influencia del mar en ambos modos es mínima, los dos modos solo se separan un poco del sondeo en 1D a partir del período de 1 seg Para el sitio No.2 la separación al sondeo 1D es más grande pero hay un cierto paralelismo excepto que el modo TM a períodos más altos aumenta la resistividad y, en general, se deforma más que el modo TE.

Los sitios No.3 y 4 presentan el mismo comportamiento que el sitio No.2 pero más acentuado. Hay que hacer notar que a partir del período de 500 seg aproximadamente las dos curvas tienden a ser muy paralelas.

En el sitio No.5 los modos se han distorsionado mucho. El modo TM señala una capa de alta resistividad en el período de 1 seg y el modo TE, por el contrario, una capa de baja resistividad en el período de 4 seg Pero ambas curvas, a partir del período de 1000 seg se comportan paralelamente.

El sitio No.6 se encuentra prácticamente sobre la línea de la costa. Los dos modos aumentaron la distorsión pero

con la misma tendencia que el sitio No.5, se observa también que el modo TE se aproxima más a la curva de 1D a períodos altos que el modo TM.

Con la finalidad de comprobar la distorsión causada por el mar sobre los sondeos en cada sitio a medida que se aproximan al océano, se invierte por el método de DVS los dos modos TM y TE. Se utiliza como modelo inicial el modelo de capas propuesto para generar los sondeos de la Figura 5.1 y los resultados se muestran en las Figuras 5.3 y 5.4 para TM y TE respectivamente.

Para ambos modos se han escogido las tres soluciones menos oscilantes y se grafican con el modelo de capas propuesto (línea gruesa).

En las Figuras 5.5 y 5.6 se presenta el resultado del análisis espectral del proceso de solución. La línea continua unida con asteriscos corresponde a los valores singulares λ graficados en orden decreciente, la línea continua unida con cruces corresponde a los valores de \underline{v}_m^T y por último, los valores de \underline{u}_y^T están representados por la línea con cuadros.

En la Figura 5.7 se presentan las curvas de resistividad aparente corregidas por la media aritmética y

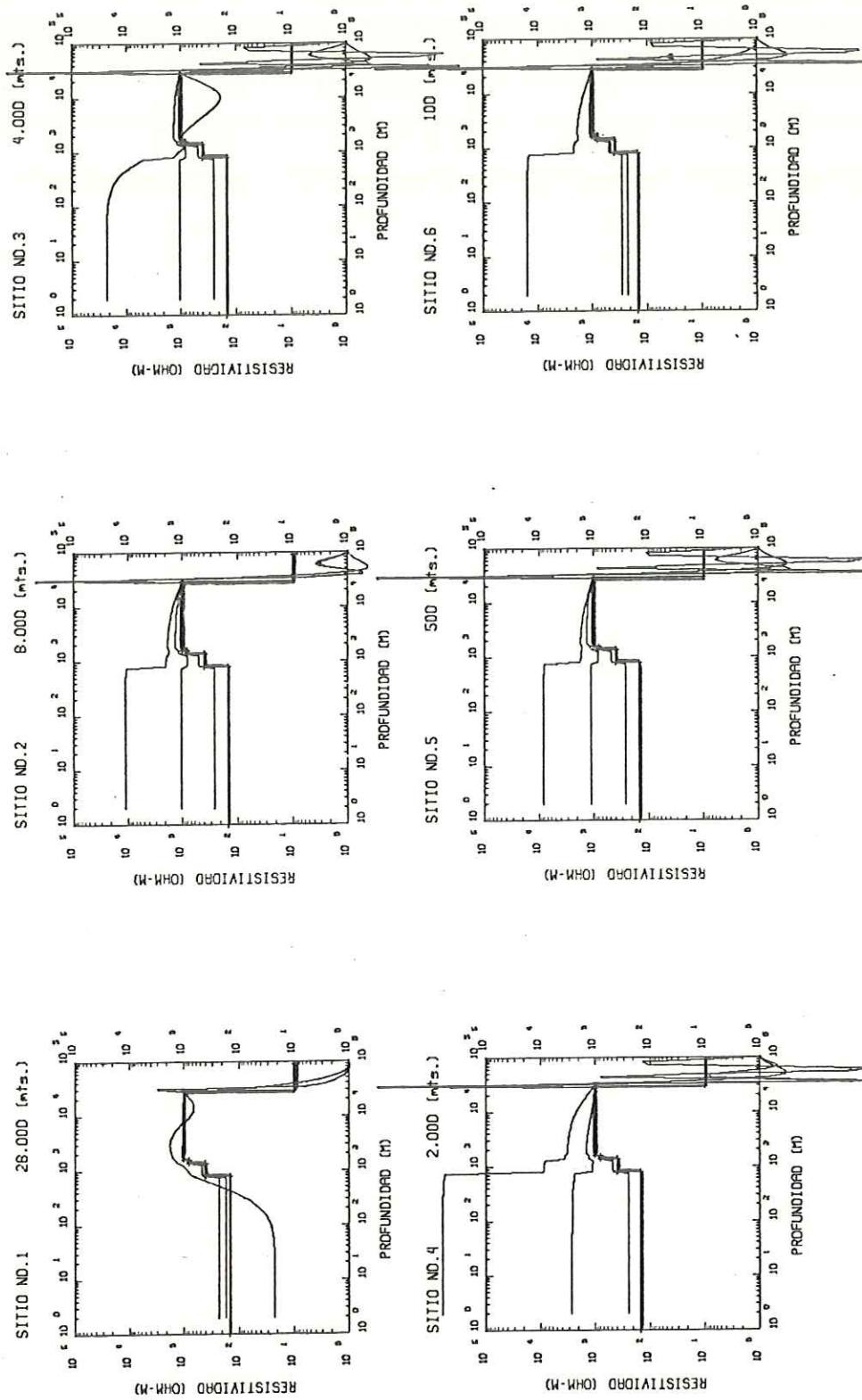


Fig 5.3 Las tres soluciones menos oscilantes del modo TM producto de la inversión por DVS con $\alpha=0.0$ y como modelo inicial el modelo propuesto. La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.

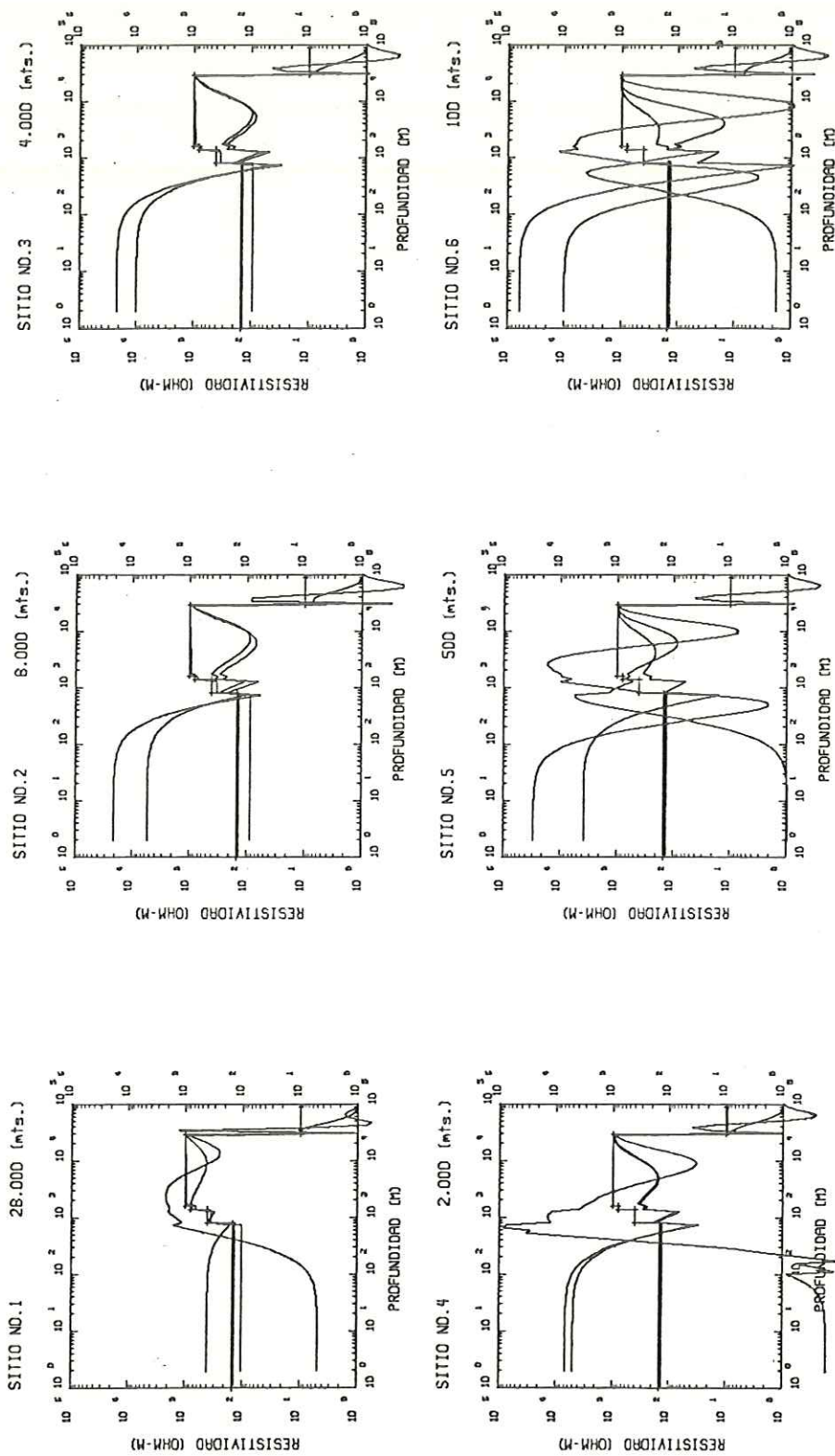


Fig 5.4 Las tres soluciones menos oscilantes del modo TE producto de la inversión por DVS con $\alpha=0.0$ y como modelo inicial el modelo propuesto. La línea gruesa corresponde al modelo propuesto.

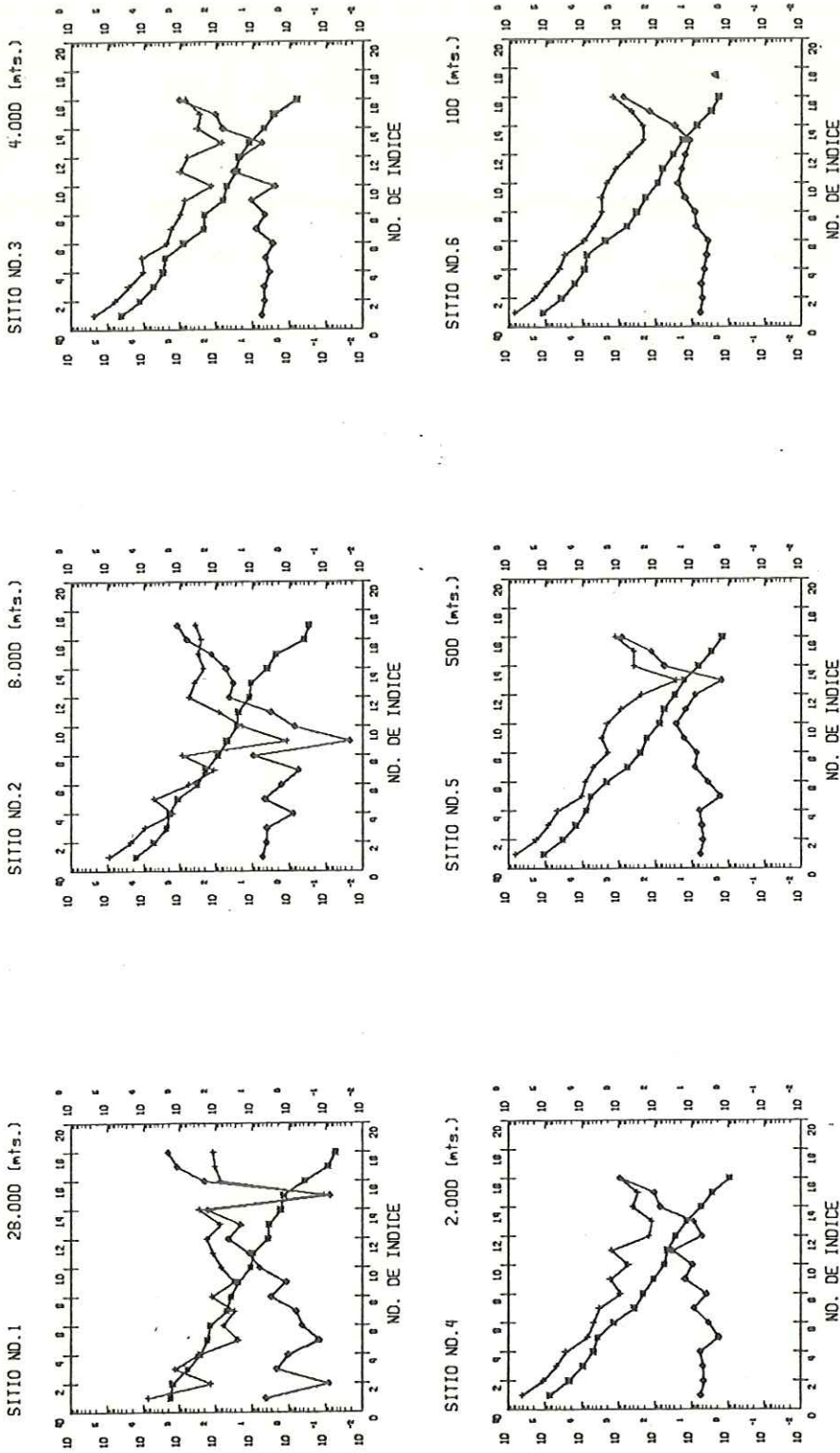


Fig. 5.5 Análisis espectral de la solución para el modo TM

- * Valores singulares ordenados en forma decreciente
- ◊ Componentes de las observaciones en el sistema transformado.
- + Componentes de las incógnitas en el sistema transformado.

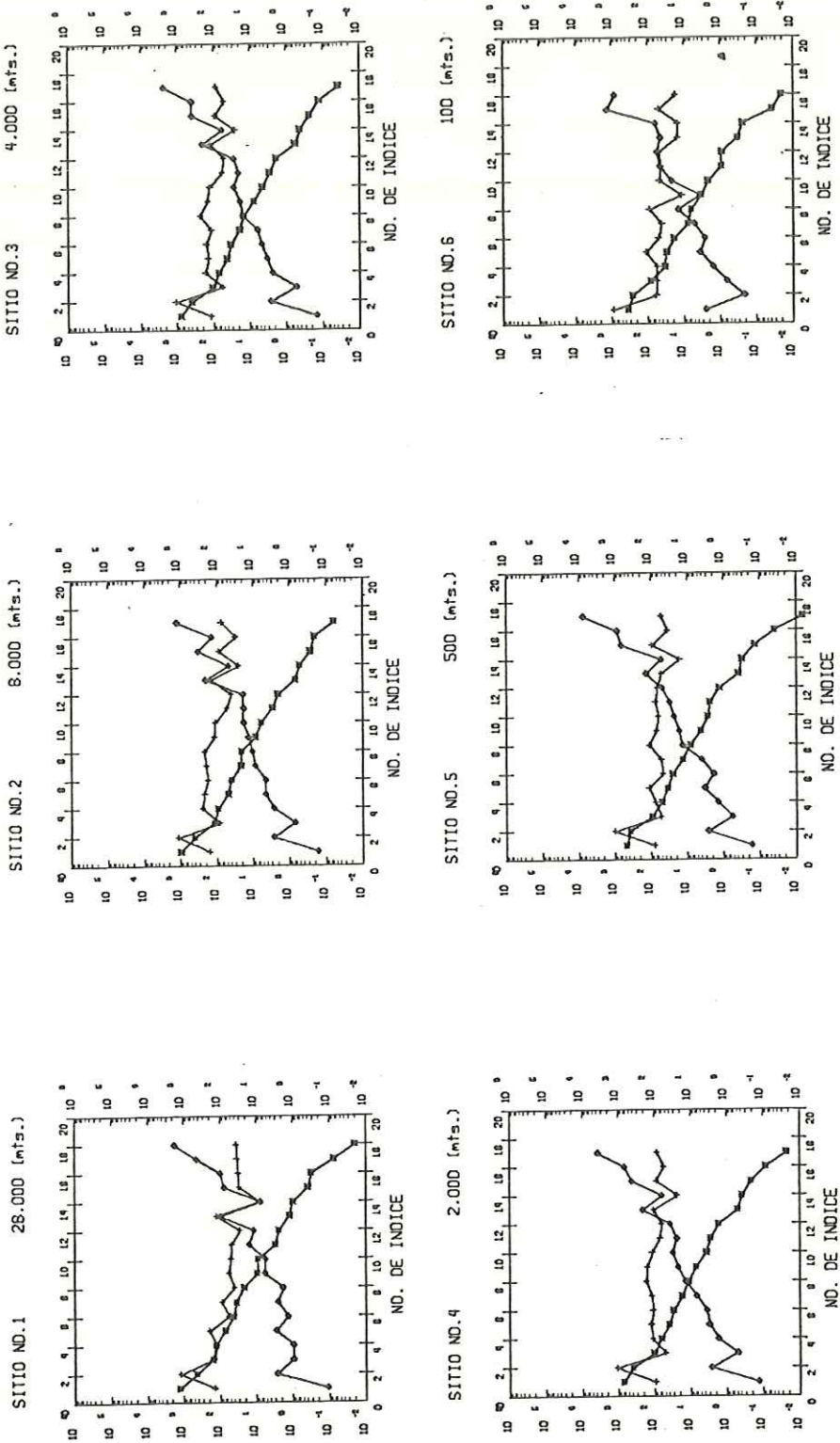


Fig. 5:6 Analisis espectral de la solución para el modo TE

- * Valores singulares ordenados en forma decreciente
- ◇ Componentes de las observaciones en el sistema transformado.
- + Componentes de las incógnitas en el sistema transformado.

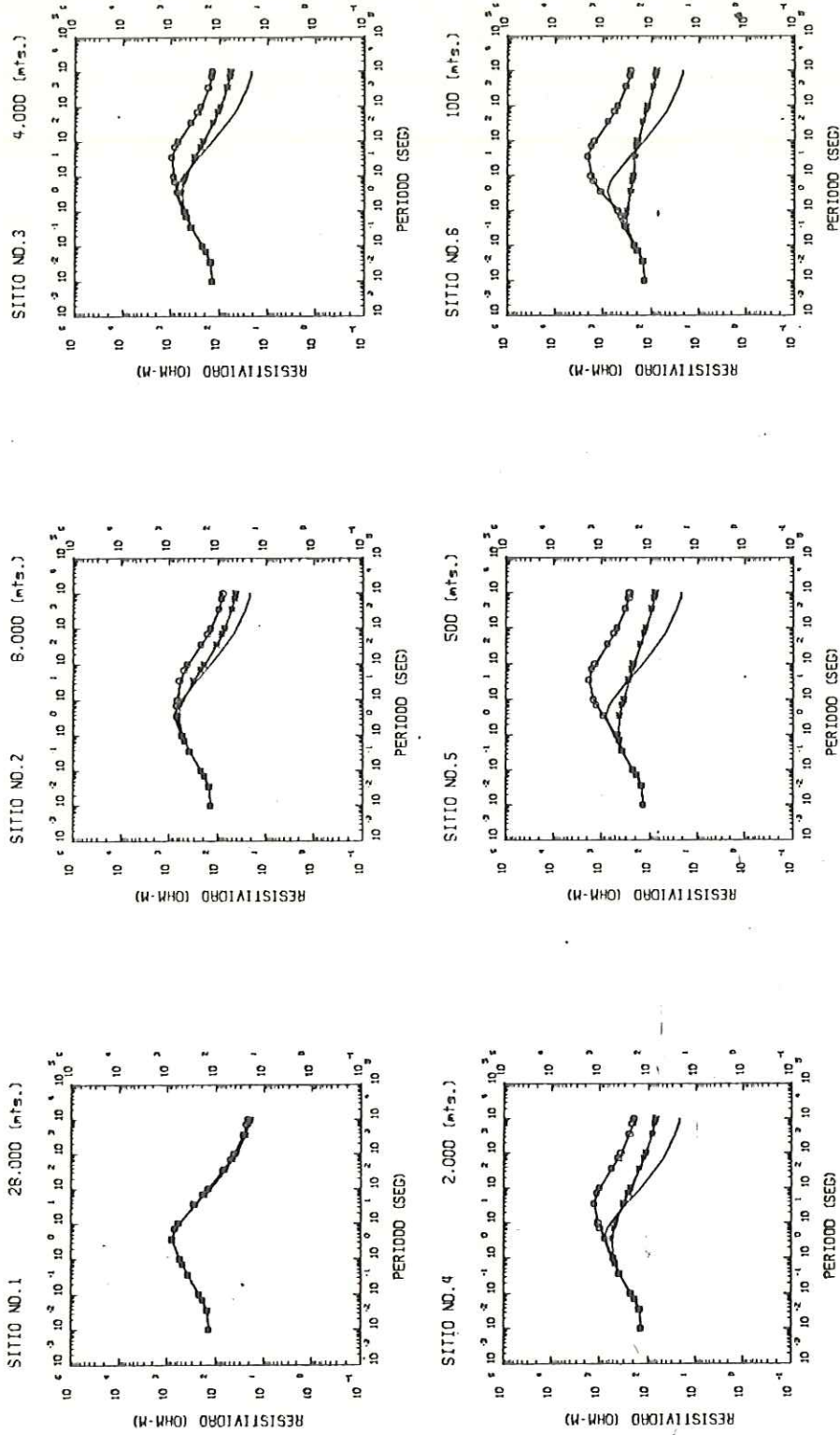


Fig. 5.7 Correcciones de los modos TM y TE en un modo único. La línea de cuadros corresponde a la media aritmética, la línea de asteriscos a la media geométrica y la línea punteada al sondeo en 1D.

la media geométrica de ambos modos TM y TE. Además, se presenta la curva de resistividad aparente correspondiente al modelo 'continental' o sea 1D. Esta última será usada como referencia para el análisis de las correcciones.

La Figura 5.8 muestra la transformación de Bostik para el modo TM en los diferentes sitios, graficados con la línea de asteriscos. Se ha puesto como referencia y para el análisis la transformación de Bostik del sondeo en 1D con una línea con cuadros. El modelo 'continental' propuesto está representado por la línea continua. Notese que la transformación proporciona información, de la estructura, a partir de los 750 m de profundidad. La distorsión del modo TM aumenta gradualmente al disminuir la distancia del sitio al mar. Esta distorsión nos muestra una capa de muy alta resistividad a profundidades de 10,000 m hasta los 100,000 m aproximadamente pero sin perder la forma general de la curva. A profundidades menores a 10,000 m no se observa distorsión de la curva sobreponiéndose a la del sondeo en 1D.

En la Figura 5.9 se presenta la transformación de Bostik para el modo TE. El modo TE está representado por la línea con asteriscos en la que se observa una distorsión a partir de 6,400 m formando una capa conductora que llega a tomar valores de resistividad de $10 \Omega\text{-m}$. a los 15,700 m de

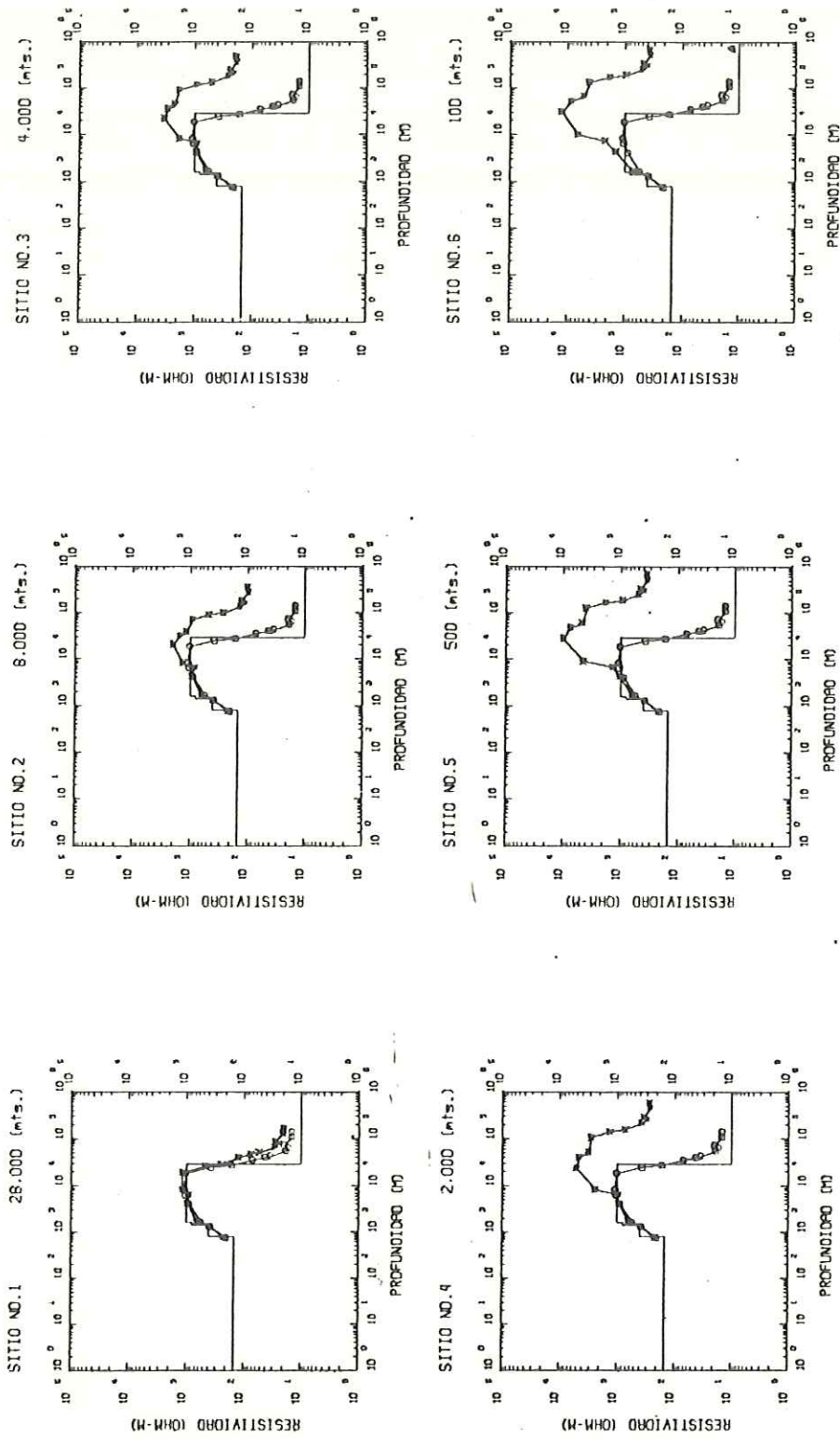


Fig. 5.8 Aplicación de la transformada de Dostik al modo TM representado por la línea de estrellas. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Dostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto.

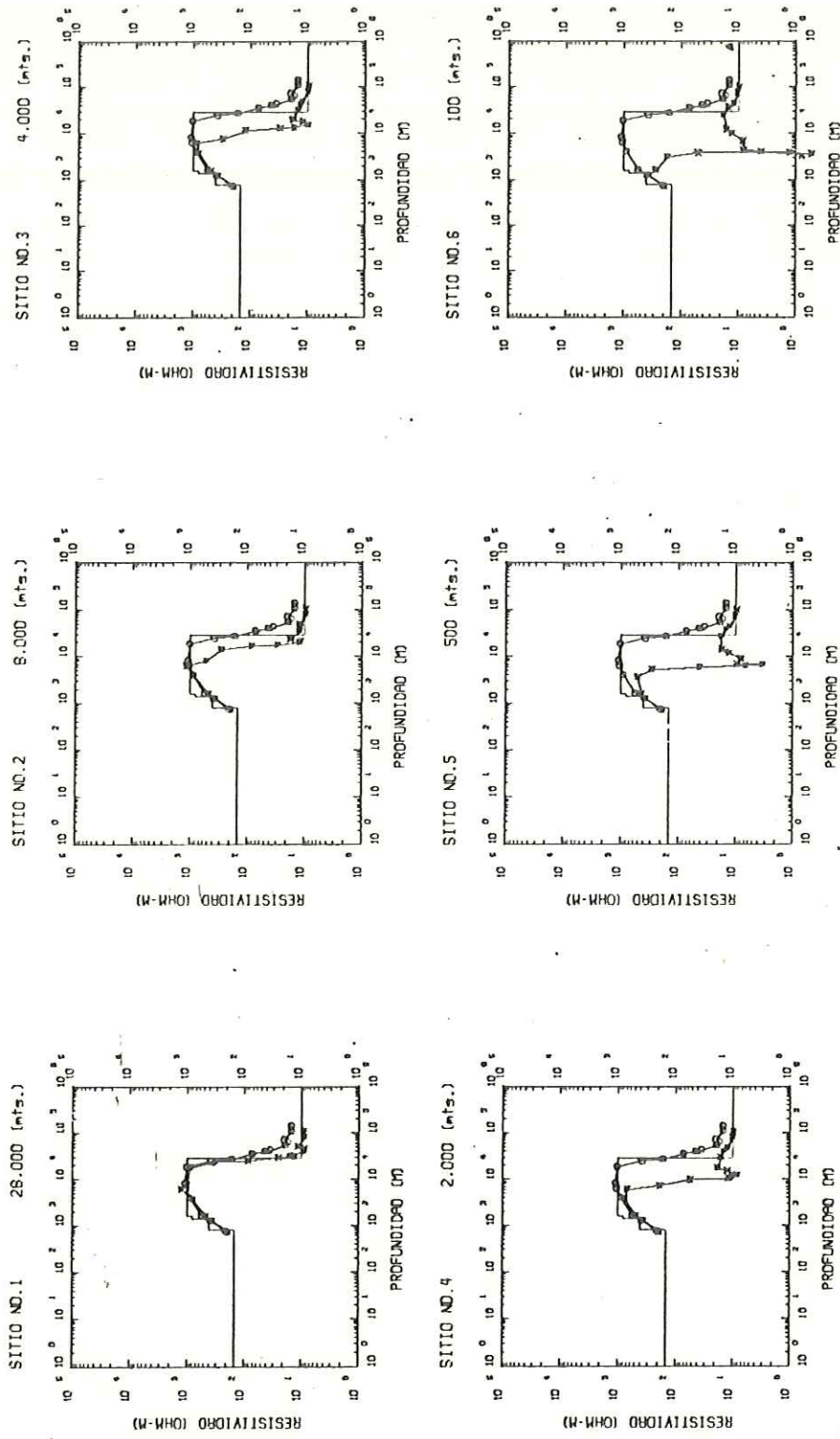


Fig. 5.9 Aplicación de la transformada de Dostik al modo TE representada por la línea unida con asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Dostik para el sondeo IP y la línea continua al modelo propuesto.

profundidad en el sitio No.3. Para el sitio No.6 estos valores siguen decreciendo hasta valores menores de $1.0 \Omega\text{-m}$ a una profundidad de 3,700 m. En todos los sitios las resistividades calculadas para profundidades mayores de 30,000 m corresponden a las del modelo 'continental' propuesto. Sin embargo, este modo se distorsiona en el sitio No.6 a partir de la profundidad de 1000 m separandose del modelo propuesto.

La corrección de los dos modos TM y TE para cada sitio obteniendo su media aritmética y su media geométrica produce un modo único. El modo único, producto de la media aritmética se presenta en la Figura 5.10 como una línea con asteriscos para cada uno de los sitios. Esta corrección da una explicación aproximada del modelo hasta los 7,800 m de profundidad en el sitio No.5 después de los cuales el valor de la resistividad aumenta hasta $3,400 \Omega\text{-m}$. En el sitio No.6 la distorsión es más crítica y alcanza valores de resistividad de hasta $5,000 \Omega\text{-m}$ a 22,500 m de profundidad en los cuales la curva en 1D presenta valores de $1,000 \Omega\text{-m}$.

El cálculo de la media geométrica fue presentado en la Figura 5.7 y su transformación de Bostik se presenta en la Figura 5.11. En esta corrección se obtienen resultados favorables hasta el sitio No.4 en el cual el mar está a 2,000 m de distancia. Pero, para el sitio No.5 a 500 m del

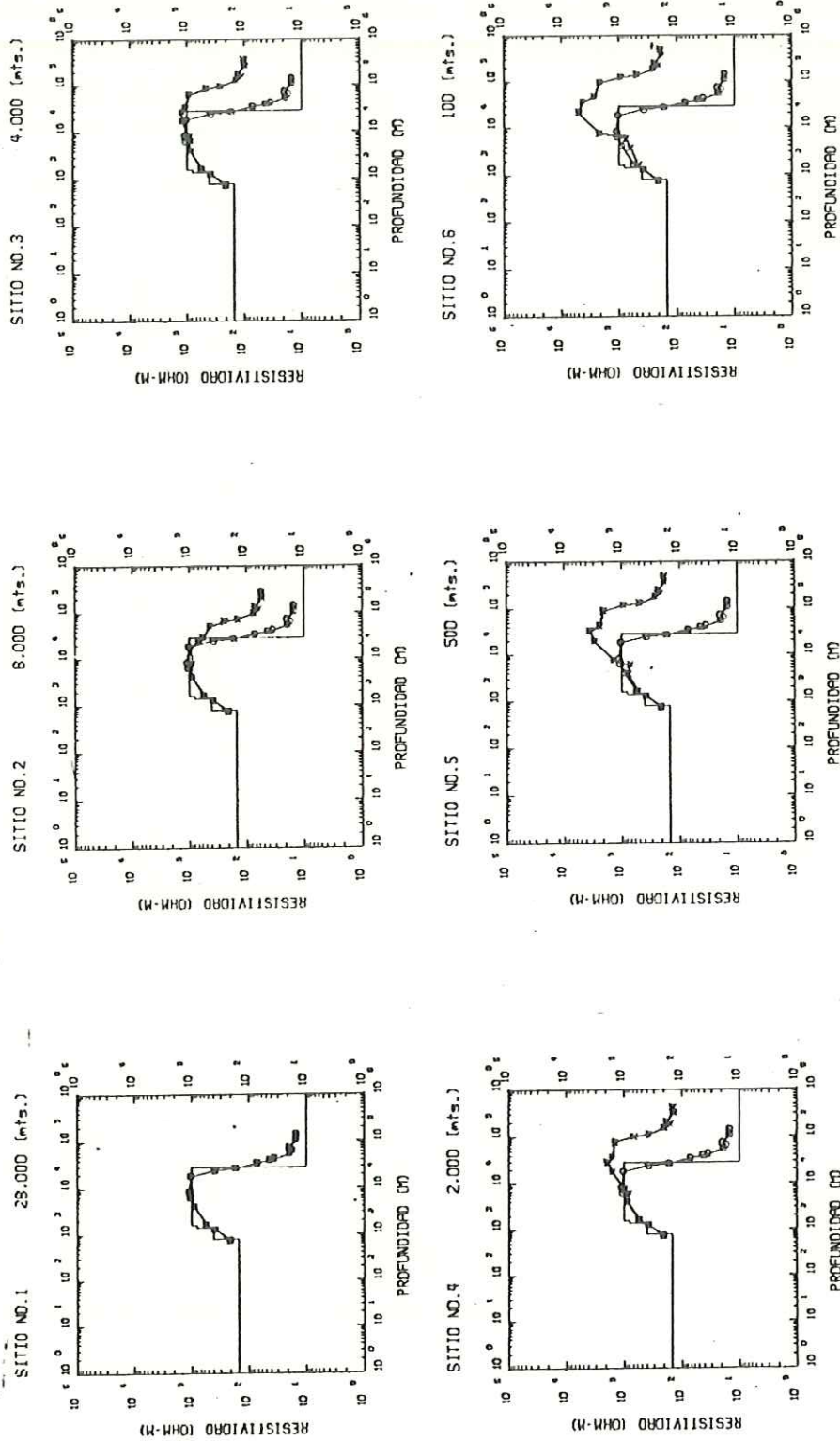


Fig. 5.10 Aplicación de la transformada de Postik a la corrección por media aritmética representada por la línea unida con asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Postik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto.

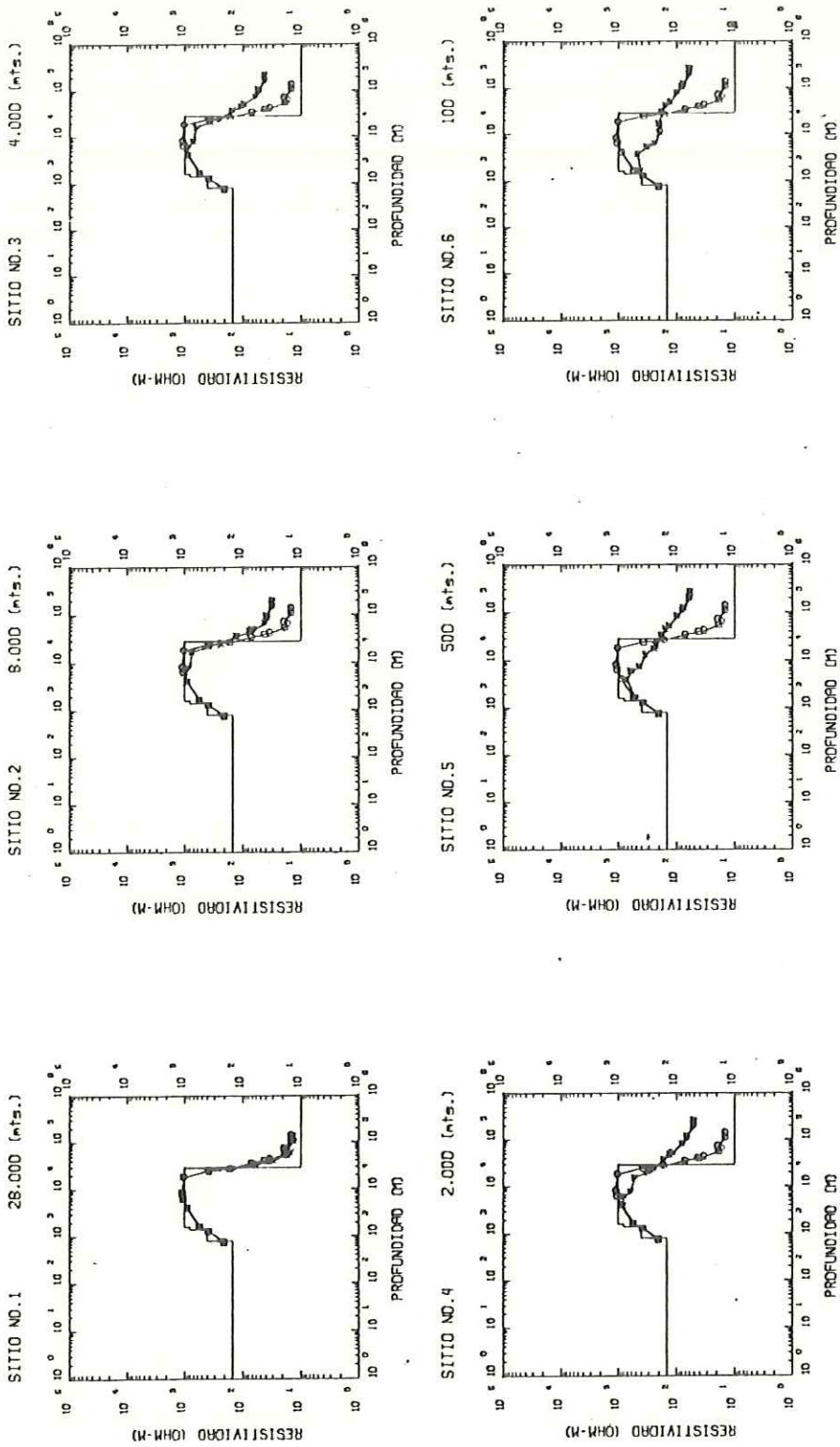


Fig. 5.11 Aplicación de la transformada de Bostik a la corrección por media geométrica representada por la línea unida con asteriscos. La línea unida con cuadros corresponde a la transformada de Bostik para el sondeo en 1D y la línea continua al modelo propuesto.

mar la distorsión es muy grande a profundidades mayores de 34,000 m mostrando a partir de aquí valores de resistividad altos en comparación a los de la curva de 1D y los del modelo propuesto.

En el sitio No.5 los valores de la resistividad empiezan a disminuir a partir de los 6,000 m separándose de la curva en 1D y del modelo propuesto, para luego a los 30,000 m de profundidad sobre estimar lo resistividad de la estructura, con valores de 180 Ω -m.

El sitio No.6 está totalmente distorsionado. No mantiene la forma general de la estructura ni valores de resistividad cercanos a los del modelo.

VI. DISCUSION

La influencia del mar como una capa conductora lateral superficial, canaliza la corriente eléctrica perpendicular a la línea de costa. Esta canalización está indicada (Fig. 5.2) en el modo TM por valores de resistividad aparente altos y, en el modo TE por su sensibilidad hacia la capa conductora lateral superficial mostrando una región de baja conductividad (Sitios 4,5 y 6). Ambos efectos dejan de observarse a períodos altos de aproximadamente 1000 seg a partir del cuál ambas curvas se comportan en forma paralela. Este paralelismo es debido a que la influencia del mar es pequeña, ya que los valores de la resistividad aparente a bajas frecuencias está influenciado mayormente por las capas más profundas.

El aumento en la distorsión de los modos TM y TE (Fig.5.2) al aproximar el sitio de observación a la línea de costa, hace bastante riesgosa su interpretación como un modelo de capas. Sin embargo, Sternberg et al. (1982) proponen que, un medio con discontinuidades laterales puede ser interpretado como un modelo 1D, usando la componente paralela TE para mostrar la estructura resistiva del medio. Este peligro de interpretación se ejemplifica en las Figuras 5.3 y 5.4 en las cuales se han invertido en una dimensión

ambas curvas de resistividad TM y TE como observaciones independientes utilizando el método de DVS.

En principio y para el caso 1D, las soluciones obtenidas de la DVS deberán permanecer muy próximas al modelo inicial, que en este caso corresponde a la estructura conductiva del modelo 'continental' propuesto (Fig. 5.1). Debido a que la naturaleza misma del método de DVS impide que las soluciones obtenidas se separen libremente del modelo inicial, como se discutió en el capítulo No. III.3

Sin embargo, de las Figuras 5.5 y 5.4 se observa que a medida que nos acercamos al mar aumentan las oscilaciones, sin olvidar que las soluciones presentadas son las más estables. Esto es debido a que las observaciones no se encuentran dentro del campo de solución, dicho de otra manera, se muestrea un lugar con características físicas muy distintas (2D) a las que se esperaba obtener como resultado (1D). Aún dando como modelo inicial el modelo real que pudiera resultar trivial a primera vista, las soluciones resultan ser oscilantes e inestables. En este punto la dificultad inherente a la mala proposición del problema MT en 2D se vuelve crítica y resulta imposible su interpretación.

El análisis espectral de la solución para el modo TE

(Fig. 5.6) nos muestra la no convergencia de la componente de las observaciones en el sistema transformado y confirma la inestabilidad de la solución.

El grado de perturbación de las curvas de resistividad TE y TM impiden una interpretación directa de los modos como un modelo 1D, lo cual sugiere que una corrección a ambos modos, podría dar mejores resultados. En base al comportamiento de los dos modos he usado dos correcciones que resultan de la media aritmética y la media geométrica.

El fin último es que estas correcciones tomen los mismos valores que el sondeo que corresponde al modelo 1D, su cercanía a estos valores define en gran parte su efectividad (Fig. 5.8). Como era de esperarse la media aritmética se ve muy influenciada por los valores altos que toma el modo TM presentando valores mayores que los del sondeo 1D sobre estimando la resistividad aparente en casi todo el rango de frecuencias muestreadas. La media geométrica, por otro lado, disminuye y equilibra los valores altos de resistividad aparente que toma la componente TM y los valores bajos de resistividad aparente de TE pero sin aproximarse a los valores del sondeo en 1D, incluso suaviza la curva (Fig. 5.8) e impide observar los valores de resistividad de $1000 \Omega\text{-m}$ a frecuencias de 10 seg en el sitio No. 5 y 6.

El análisis de los dos modos y una mayor comprensión de éstos nos permitirá una mejor interpretación para lo cual se ha calculado la transformada propuesta por Bostik (1977) a ambas componentes del sondeo (Fig. 5.9 y 5.10). El modo TM (Fig. 5.9) tiende a sobre estimar la resistividad del medio a frecuencias bajas e impide hacer una estimación adecuada de la estructura de tal manera que resulta conveniente puntualizar lo arriesgado de una interpretación 1D a partir de este modo. Es evidente que la resolución del sondeo a las frecuencias muestreadas es a partir de los 750 mts y que el análisis a profundidades menores no puede ser incluido. Además, es importante hacer notar que la transformación a profundidades mayores de 5,000 mts toma valores muy próximos a los del sondeo 1D.

El modo TE, por el contrario, muestra una capa altamente conductora. Al igual que el modo TM, su comportamiento a bajos períodos es muy próximo al sondeo en 1D.

La transformación de Bostik aplicada a la media aritmética (Fig. 5.11) muestra valores de resistividad más cercanos a los del modelo 'continental' propuesto que los obtenidos en la transformación para el modo TM. Sin embargo, muestra en general su mismo comportamiento, como se esperaba por la naturaleza de la corrección. Esta mejor

estimación de la estructura no es aún suficiente para una interpretación correcta de la misma.

Por último, la transformación de Bostik aplicada a la media geométrica da valores muy cercanos al modelo hasta el sitio No.3 a 4,000 mts de distancia al mar. A medida que se aproxima más al mar, la curva deja de percibir la discontinuidad resistiva de 10,000 Ω -m a 10⁷ Ω -m ubicada a 30,000 mts de profundidad.

VII. CONCLUSIONES

La obtención de una estructura conductiva 1D a partir de sondeos MT por la aplicación de el método de inversión de DVS muestra la naturaleza indeterminada del problema. En este caso, la solución dada por el método DVS es de mínima longitud, por lo tanto, depende muy fuertemente de la solución inicial. La aplicación del método de regularización da más flexibilidad a la búsqueda de soluciones y permite explorar más efectivamente las regiones en el espacio correspondiente, particularmente dentro de la familia de soluciones aceptables del problema. Los dos métodos se complementan.

La aplicación de la transformación de Bostik como una primera aproximación a la estructura o bien para formar un modelo inicial resulta ser de bastante utilidad, debido a la facilidad con que puede ser aplicada con respecto a métodos más sofisticados.

En un modelo 2D, la influencia del mar, como una capa conductora superficial, causa distorsiones sobre los sondeos MT en las dos componentes TM y TE. Estas distorsiones aumentan al aproximar el sondeo a la línea de costa, de tal

forma que el modo TE indica una capa de alta conductividad y el modo TM una capa de baja conductividad, a partir del Sitio No.3 ubicado a 4,000 mts de la línea de costa.

Las dos componentes TE y TM del modelo 2D no pueden usarse como observaciones independientes para determinar una estructura 1D del subsuelo, al menos, si el sitio del sondeo está muy próximo (4,000 mts) a la línea de costa.

La media aritmética de ambas componentes está influenciada por los valores del modo TM, de tal forma que sobreestima la resistividad, no permitiendo así una adecuada estimación de la estructura conductiva del subsuelo. Por otro lado, la media geométrica produce suavización de las interfases de las capas de diferente conductividad, impidiendo estimar, por ejemplo, los valores de resistividad de las capas de 1000 Ω -m y de 10 Ω -m (Fig. 5.11).

La indeterminación del problema inverso MT en 1D exige observaciones precisas de la estructura y un modelo inicial próximo al real, lo cual deberá cumplir la corrección propuesta de ambos modos en un modelo con discontinuidad lateral.

La obtención de una corrección a las observaciones 2D con fuerte influencia del mar que pudiera hacer una

estimación de la estructura, requiere de un estudio más a fondo del comportamiento de las curvas de resistividad aparente, en modelos 2D.

APENDICE No 1

Desarrollo algebraico para la obtencion del estimador recursivo estabilizado correspondiente a la DVS.

Se propone minimizar la expresion:

$$\|y - AS_m(+)\|_{C_y^{-1}}^2 \propto \|\hat{m}(-) - \hat{m}(-)\|_{C_m^{-1}}^2$$

Obteniendo la derivada e igualando a cero

$$-2(AS_m C_m^{1/2})^T C_y^{-1/2} S_y^{-1/2} (y - AS_m C_m^{1/2} \hat{C}_m^{-1/2} m) + 2 \alpha S (C_m^{-1/2} m) = 0$$

Ordenando

$$\{(S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2})^T (S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2}) + \alpha S_m^{-1/2} S_m^{-1/2}\} C_m^{-1/2} m = (S_m^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2})^T S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} y$$

Arreglando

$$\{(S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2} S_m^{-1/2})^T (S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2} S_m^{-1/2}) + \alpha I\} S_m^{-1/2} C_m^{-1/2} m = (S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} AS_m C_m^{1/2} S_m^{-1/2}) S_y^{-1/2} C_y^{-1/2} y$$

Se define:

$$P_y^{-1/2} = S_y^{-1/2} C_y^{-1/2}$$

$$P_m^{1/2} = S_m^{-1/2} C_m^{1/2}$$

$$A = P_y^{-1/2} AS_m P_m^{1/2}$$

Toma la forma

$$[A^T A + \alpha I] P_m^{-1/2} \hat{m} = A^T P_y^{-1/2} y$$

Entonces:

$$\hat{m}(+) = \hat{m}(-) + P_m^{1/2} [A^T A + \alpha I]^{-1} A^T P_y^{-1/2} y$$

APENDICE No 2

Desarrollo algebraico para la obtención del estimador regularizante.

Se minimiza la expresión:

$$\|y - Am\|_{C_y^{-1}}^2 + \alpha \|Dpm\|_{C_m^{-1}}^2 + \beta \|mp\|_{C_m^{-1}}^2$$

Se inicia la minimización sin incluir el término en β

$$\|y - Am\|_{C_y^{-1}}^2 + \alpha \|Dpm\|_{C_m^{-1}}^2$$

derivando e igualando a cero se obtiene

$$-2(GS_m Dp^{-1})^T P^1 (y - GS_m Dp^{-1} Dpm) + 2\alpha P_m Dp \hat{m} = 0$$

donde

$$P_y = \text{diag} \left\{ \frac{S_y}{\epsilon y^2} \right\}$$

despejando m

$$\hat{m} = Dp^{-1} [(GS_m Dp^{-1})^T P_y (GS_m Dp^{-1}) + \alpha P_m]^{-1} (GS_m Dp^{-1})^T P_m y$$

definiendo a:

$$B = GS_m Dp^{-1}$$

$$\hat{m} = G_p S_m [B^T P_y^{1/2} P_y^{1/2} B + \alpha P_m^{1/2} P_m^{1/2}]^{-1} B^T P_y^{1/2} P_y^{1/2} y$$

definiendo

$$A = P_y^{1/2} B P_m^{1/2}$$

$$\hat{m} = G_p S_m [P_m^{1/2} A^T A P_m^{1/2} + \alpha P_m^{1/2} P_m^{1/2}]^{-1} P_m^{1/2} A^T P_y^{1/2} y$$

finalmente

$$\hat{m} = G_p S_m P_m^{-1/2} [A^T A + \alpha I]^{-1} A^T P_y^{1/2} (y - y_c)$$

Para obtener \hat{m}_p se minimiza

$$\|y - GS_m D_p^{-1} D_p m^* - GS_m m_p \hat{c}\|_{C^{-1}}^2 + \alpha \|m_p \hat{c}\|_{C^{-1}}^2$$

obteniendo

$$-2 y_p^T P_y (y - GS_m G_p S_m D_p m^* - y_p c) + 2 \beta m_p^T P_m m_p \hat{c} = 0$$

sabiendo que:

$$D_p \hat{m}^* = P_m^{1/2} [A^T A + \alpha I]^{-1} A^T P_y^{1/2} (y - y_p c)$$

$$A = P_y^{1/2} G S_m G_p S_m P_m^{-1/2}$$

además se definen

$$y_p = GS_m m_p ; \quad M_{\alpha\alpha} = A^T (A A^T + \alpha I)^{-1}$$

$$J_{\alpha\alpha} = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T$$

Por el lema de inversión de matrices

$$(A^T A + \alpha I)^{-1} A^T = A^T (A A^T + \alpha I)^{-1}$$

o sea

$$J_{\alpha\alpha}^{-1} A^T = A^T M_{\alpha\alpha}^{-1}$$

la ecuación normal es:

$$y_p^T P_y (I - A A^T M_{\alpha\alpha}^{-1}) P_y y + y_p^T P_y (I - A A^T M_{\alpha\alpha}^{-1}) P_y y_p \hat{c} + m_p^T P_m m_p = 0$$

$$\text{pero} \quad I - A A^T M_{\alpha\alpha}^{-1} = M_{\alpha\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} - A A^T M_{\alpha\alpha}^{-1}$$

$$= \alpha I M_{\alpha\alpha}^{-1}$$

$$\text{se obtiene} \quad (\alpha y_p^T P_y M_{\alpha\alpha}^{-1} P_y y_p + m_p^T P_m m_p) \hat{c} = \alpha y_p^T P_y M_{\alpha\alpha}^{-1} P_y y$$

la expresión final es

$$m_p = m_p^T \left(\alpha y_p^T P_y M_{\alpha\alpha}^{-1} P_y y_p + \frac{\beta}{\alpha} m_p^T P_m m_p \right)^{-1} y_p^T P_y y$$