

Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ingeniería



**Control Tolerante a Fallos Pasivo Aplicado
en un Helicóptero Quadrotror**

Tesis presentada que para cubrir parcialmente
los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Por:

María Laura Rivera Hinojosa

Director de Tesis:

Raúl Rascón Carmona

Mexicali, Baja California, México, 2017.

RESUMEN de la Tesis de María Laura Rivera Hinojosa, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS EN ELÉCTRICA. Mexicali, Baja California, México. Diciembre de 2017.

Control Tolerante a Fallos Pasivo Aplicado en un Helicóptero Quadrotor

Resumen aprobado por:



Raúl Rascón Carmona

Director de tesis

Esta tesis se enfoca en el diseño e implementación de varios algoritmos de control tolerantes a fallos pasivos en un helicóptero quadrotor, entre las variables que se pueden controlar en un helicóptero quadrotor se encuentran los tres ángulos, alabeo, cabeceo y guiñada, y los tres movimientos en los ejes x , y , z . Las mediciones a las que se tiene acceso vienen de un giroscopio y acelerómetro así como del sistema OptiTrack que se utiliza para medir los desplazamientos en x , y y z . Se realiza el modelo matemático del sistema y se analiza su estabilidad en lazo cerrado utilizando herramientas de Lyapunov.

Los resultados teóricos se verifican a través de simulaciones numéricas realizadas en Simulink para los objetivos de control: regulación y seguimiento de trayectoria utilizando los tres controladores propuestos (H_∞ , modos deslizantes y dinámico); por otra parte de manera experimental utilizando el helicóptero QBall 2 se presentan resultados para los objetivos de control tanto de regulación, como de seguimiento de trayectoria utilizando los controladores H_∞ y modos deslizantes.

Palabras clave: quadrotor, control, fallos pasivos, H_∞ , modos deslizantes, dinámico

ABSTRACT of the thesis, presented by María Laura Rivera Hinojosa, in order to obtain the MASTER of SCIENCE DEGREE in ELECTRIC ENGINEERING. Mexicali, Baja California, México. December, 2017.

**Passive Fault Tolerant Control Applied
on a Quadrotor Helicopter**

Approved by:



Raúl Rascón Carmona

Thesis Advisor

This thesis focuses on the design and implementation of several passive fault-tolerant control algorithms in a quadrotor helicopter. The variables that can be controlled in a quadrotor helicopter are the three angles, roll, pitch and yaw, and the three movements on the x , y , z axes. The measurements that are available come from a gyroscope and accelerometer as well as the OptiTrack system that is used to measure the displacements in x , y and z . It is developed the mathematical model of the system and the stability of the closed loop is analyzed using Lyapunov tools.

The theoretical results are verified through numerical simulations performed in Simulink for the control objectives: regulation and trajectory tracking using the three proposed controllers (H_∞ , sliding mode and dynamic controller). Moreover, in the experiments using the QBall 2 helicopter, the results are presented for both control objectives, H_∞ control and sliding mode control.

Keywords: quadrotor, passive fault-tolerant control, H_∞ , sliding mode, dynamic

Lista de acrónimos

UAV	Vehículo aéreo no tripulado
MEMS	Sistemas micro-electromecánicos
VTOL	Despegue y aterrizaje vertical
FTC	Control tolerante a fallos
FTCS	Sistema de control tolerante a fallos
PID	Proporcional integral derivativo
GS	Programación de ganancias
MRAC	Modelo de referencia de control adaptativo
FDD	Detección de fallas y diagnóstico
TSKF	Segunda etapa de filtro de Kalman
PFTC	Control tolerante a fallos pasivo
AFTC	Control tolerante a fallos activo
FDI	Detección y aislamiento de fallos
MPC	Modelo de control predictivo
SMC	Control por modos deslizantes
SEV	Sistema de estructura variable
CEV	Control de estructura variable

Índice general

1. Introducción	14
1.1. Planteamiento del problema	15
1.2. Estrategias de Control	16
1.2.1. Problema de control por $\mathcal{H}_\infty$	16
1.2.2. Problema de control por modos deslizantes	17
1.3. Objetivos	17
1.3.1. Objetivo general	17
1.3.2. Objetivos específicos	17
1.4. Plan de análisis	17
1.5. Antecedentes	18
2. Control tolerante a fallos	21
2.1. Fallas y pérdidas	21
2.2. Control tolerante a fallos	21
2.2.1. Detección y aislamiento de fallas	22
2.2.2. FTC Activo	22
2.2.3. FTC Pasivos	28
3. Control Robusto	30
3.1. Objetivos de control	31
4. Control H_∞	33
4.1. Cálculo de la norma infinito	35
4.2. Descripción del sistema	35
4.3. Algoritmo general para el cálculo del control H_∞	36
4.4. Problema de diseño de la ganancia L_2 acotada	37
4.5. Análisis matemático	37
5. Control por Modos Deslizantes (SMC)	39
5.1. Conceptos fundamentales de SMC	40
5.1.1. Modos deslizantes de primer orden	40
5.1.2. Derivada de Lie	42
5.1.3. Condición de Transversalidad	42
5.2. Regularización del movimiento deslizante	43
5.2.1. Método de Filippov	43

5.2.2. Método de control equivalente	44
5.3. Análisis matemático	45
6. Modelado del quadrotor	50
6.1. Orientación del quadrotor	51
6.2. Modelo dinámico	54
6.3. Objetivo de control	56
7. Controlador	58
7.1. Control de translación	58
7.2. Control de orientación	59
7.3. Parámetros de simulaciones y resultados experimentales	60
7.3.1. Parámetros de simulación	61
7.3.2. Parámetros experimentales	62
8. Control H_∞ para el quadrotor	63
8.1. Simulación en lazo cerrado utilizando el control H_∞	63
8.2. Experimentos con el controlador H_∞	73
8.2.1. Control de regulación	74
8.2.2. Control de seguimiento de trayectoria	77
9. Control por modos deslizantes para el quadrotor	87
9.1. Prueba de estabilidad control traslacional	87
9.1.1. Análisis de tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante	88
9.2. Prueba de estabilidad control de orientación	88
9.2.1. Análisis de tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante	89
9.3. Simulación en lazo cerrado utilizando el control por modos deslizantes	90
9.4. Experimentos por modos deslizantes	99
9.4.1. Control de regulación	99
9.4.2. Control de seguimiento de trayectoria	103
10. Control dinámico para el quadrotor	113
10.1. Prueba de estabilidad	113
10.2. Simulación en lazo cerrado del controlador dinámico	115
11. Conclusiones	126
12. Descripción el equipo experimental QBall 2	127
12.1. Componentes del QBall2	128
12.1.1. Tarjeta de adquisición de datos	128
12.1.2. Tarjeta de alimentación del QBall 2	128
12.1.3. Propelas y motores del QBall 2	128
12.2. Sensores del QBall 2	129
12.3. Conexión wireless	129
12.4. Archivos de Simulink	130
12.5. El controlador del QBall	130

12.5.1. Modo de control	131
12.5.2. Configuración de la posición	131
12.5.3. Guardado de datos (caja negra)	131
12.5.4. Tarjeta de adquisición de datos (DAQ)	131
12.6. Sistema de localización OptiTrack	132

Índice de figuras

2.2.1.	Clasificación de FTC	21
2.2.2.	x_R modelo nominal	25
2.2.3.	x_T modelo nominal	25
2.2.4.	φ modelo nominal	26
2.2.5.	Error de posición modelo nominal	26
2.2.6.	x_R cuando $u_R = 0$	27
2.2.7.	x_T cuando $u_R = 0$	27
2.2.8.	φ cuando $u_R = 0$	28
2.2.9.	Error de posición cuando $u_R = 0$	28
3.0.1.	Familia de plantas debido a incertidumbres.	31
3.1.1.	Formulación general del control robusto	32
4.0.1.	Esquema de la estrategia de control H_∞	33
4.0.2.	Transformada fraccional lineal inferior.	34
4.2.1.	Descripción del sistema H_∞	36
5.0.1.	Trayectoria en un sistema de estructura variable.	39
5.1.1.	Condición para la existencia del régimen deslizante en S	41
5.2.1.	Movimiento en régimen deslizante según el método de Filippov.	44
5.2.2.	Movimiento en régimen deslizante según método de control equivalente.	45
5.3.1.	Retrato de fase del movimiento armónico simple	46
5.3.2.	Retrato de fase del sistema aplicando un sistema de control de estructura variable.	46
5.3.3.	Retrato de fase del sistema para grandes valores de $\dot{y}$	47
5.3.4.	Retrato de fase del sistema bajo el control de estructura variable cerca del origen.	48
5.3.5.	Retrato de fase de movimiento deslizante.	49
6.0.1.	Quanser QBall 2	50
6.0.2.	Esquema del quadrotor.	51
8.1.1.	Trayectoria helicoidal simulación H_∞ (color negro), trayectoria deseada (color rojo).	64
8.1.2.	Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en x deseada (color rojo).	65
8.1.3.	Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en y deseada (color rojo).	65

8.1.4.	Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en z deseada (color rojo).	66
8.1.5.	Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).	66
8.1.6.	Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en θ deseada (color rojo).	67
8.1.7.	Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).	67
8.1.8.	Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	68
8.1.9.	Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	68
8.1.10.	Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	69
8.1.11.	Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	69
8.1.12.	Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	70
8.1.13.	Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	70
8.1.14.	Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	71
8.1.15.	Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	71
8.1.16.	Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	72
8.1.17.	Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	72
8.1.18.	Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria H_∞	73
8.2.1.	Posición en z experimental control de regulación H_∞ (azul), posición en z deseada (rojo).	74
8.2.2.	Error de posición en z experimental control de regulación H_∞	75
8.2.3.	Señal de control 1 experimental control de regulación H_∞	75
8.2.4.	Señal de control 2 experimental control de regulación H_∞	76
8.2.5.	Señal de control 3 experimental control de regulación H_∞	76
8.2.6.	Señal de control 4 experimental control de regulación H_∞	77
8.2.7.	Empuje total experimental control de regulación H_∞	77
8.2.8.	Trayectoria experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), trayectoria deseada (rojo).	78
8.2.9.	Posición en x experimental por seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en x deseada (rojo).	78
8.2.10.	Posición en y experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en y deseada (rojo).	79
8.2.11.	Posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en z deseada (rojo).	79
8.2.12.	Posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en ϕ deseada (rojo).	80
8.2.13.	Posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en θ deseada (rojo).	80
8.2.14.	Posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en ψ deseada (rojo).	81
8.2.15.	Error de posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ . .	81
8.2.16.	Error de posición de y experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ . .	82

8.2.17.	Error de posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	82
8.2.18.	Error de posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	83
8.2.19.	Error de posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	83
8.2.20.	Error de posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	84
8.2.21.	Señal de control 1 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	84
8.2.22.	Señal de control 2 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	85
8.2.23.	Señal de control 3 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	85
8.2.24.	Señal de control 4 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	86
8.2.25.	Empuje total experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .	86
9.3.1.	Trayectoria helicoidal simulación SMC (color negro), trayectoria deseada (color rojo).	90
9.3.2.	Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en x deseada (color rojo).	91
9.3.3.	Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en y deseada (color rojo).	91
9.3.4.	Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en z deseada (color rojo).	92
9.3.5.	Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).	92
9.3.6.	Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en θ deseada (color rojo).	93
9.3.7.	Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).	93
9.3.8.	Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	94
9.3.9.	Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	94
9.3.10.	Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	95
9.3.11.	Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	95
9.3.12.	Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	96
9.3.13.	Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	96
9.3.14.	Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	97
9.3.15.	Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	97
9.3.16.	Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	98
9.3.17.	Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	98
9.3.18.	Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria SMC.	99
9.4.1.	Posición en z experimental control de regulación SMC (azul), posición en z deseada (rojo).	100
9.4.2.	Error de posición en z experimental control de regulación SMC.	100
9.4.3.	Señal de control 1 experimental control de regulación SMC.	101
9.4.4.	Señal de control 2 experimental control de regulación SMC.	101
9.4.5.	Señal de control 3 experimental control de regulación SMC.	102
9.4.6.	Señal de control 4 experimental control de regulación SMC.	102
9.4.7.	Empuje total experimental control de regulación SMC.	103
9.4.8.	Trayectoria experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), trayectoria deseada (rojo).	103

9.4.9.	Posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en x deseada (rojo).	104
9.4.10.	Posición en y experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en y deseada (rojo).	104
9.4.11.	Posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en z deseada (rojo).	105
9.4.12.	Posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en ϕ deseada (rojo).	105
9.4.13.	Posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en θ deseada (rojo).	106
9.4.14.	Posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en ψ deseada (rojo).	106
9.4.15.	Error de posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	107
9.4.16.	Error de posición de y experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	107
9.4.17.	Error de posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	108
9.4.18.	Error de posición en ϕ	108
9.4.19.	Error de posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	109
9.4.20.	Error de posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	109
9.4.21.	Señal de control 1 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC. . .	110
9.4.22.	Señal de control 2 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC. . .	110
9.4.23.	Señal de control 3 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC. . .	111
9.4.24.	Señal de control 4 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC. . .	111
9.4.25.	Empuje total experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.	112
10.2.1.	Trayectoria helicoidal simulación Control Dinámico(color negro), trayectoria deseada (color rojo).	116
10.2.2.	Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en x deseada (color rojo).	117
10.2.3.	Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en y deseada (color rojo).	117
10.2.4.	Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en z deseada (color rojo).	118
10.2.5.	Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).	118
10.2.6.	Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en θ deseada (color rojo).	119
10.2.7.	Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).	119
10.2.8.	Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	120
10.2.9.	Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	120
10.2.10.	Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	121
10.2.11.	Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	121
10.2.12.	Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	122
10.2.13.	Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	122

10.2.14.	Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico. . .	123
10.2.15.	Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico. . .	123
10.2.16.	Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico. . .	124
10.2.17.	Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico. . .	124
10.2.18.	Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.	125
12.0.1.	Modelo del sistema	128
12.5.1.	Controlador de vuelo del QBall 2 en Simulink.	131

Índice de cuadros

1.0.1. Empresas del sector aeronáutico en México	15
7.3.1. Parámetros del quadrotor QBall2	61

Capítulo 1

Introducción

En las dos últimas décadas la industria aeroespacial experimentó a nivel mundial cambios drásticos ocasionados por avances tecnológicos, transformaciones organizativas y periodos de crisis como la que produjeron los acontecimientos de septiembre del 2001 en Estados Unidos. Se puede decir que desde los años noventa a la actualidad se ha dado un proceso de reconversión industrial y una profunda reorganización de la estructura empresarial en el sector [37]. En los años sesenta se registra en Baja California la instalación de una planta maquiladora que ensambla piezas para aviones con un volumen de empleo [actual] de aproximadamente 12 mil empleados, [38]. La industria aeroespacial en México se ubica, según [39] en 13 estados, de los cuales Baja California cuenta con 31 %. Las actividades principales que realizan estas industrias son: 1) componentes para maquinaria, 2) arneses y cables, 3) componentes para sistemas de aterrizaje, 4) inyección plástica, 5) intercambiadores de calor, 6) equipo de precisión, 7) reparación de superficies de sustentación, 8) sistemas de audio y video, 9) componentes electrónicos e 10) interiores [39]. En el cuadro siguiente se muestra el número de empresas por Estado y las actividades que realizan:

Empresas del sector aeronáutico global				
Número de compañías				
Estados	Manufactura (M)	Manufactura, reparación y modificación (MRO)	Ingeniería y diseño (E&D)	Total
Aguascalientes	2	0	0	2
Baja California	35	1	3	39
Chihuahua	11	0	0	11
Coahuila	5	1	0	6
Jalisco	2	0	3	5
Cd. de México	0	4	2	6
Nuevo León	11	1	2	14
Puebla	2	0	0	2
Querétaro	1	3	3	7
San Luis Potosí	4	0	0	4
Sonora	21	0	0	21
Estado de México	0	5	0	5
Yucatán	2	0	0	2
Total	96	15	13	124

Cuadro 1.0.1: Empresas del sector aeronáutico en México

Como se puede observar en el cuadro anterior, el estado de Baja California tiene un gran potencial dentro del rubro empresarial enfocado a la industria aeronáutica. Esto impacta directamente con las necesidades de formación de personal que requiere el estado de Baja California actualmente.

Por otra parte, los resultados de este trabajo, dan pie a desarrollar y fortalecer una línea de investigación enfocada a aplicaciones de control en drones principalmente. Conforme a la visión de la Universidad Autónoma de Baja California, el desarrollo de este trabajo de tesis impacta directamente en la generación de conocimiento científico, así como de aplicaciones y desarrollos tecnológicos pertinentes al desarrollo del estado.

1.1. Planteamiento del problema

En esta tesis se desea controlar un helicóptero quadrotor a pesar de presentarse fallas parciales en los sensores, se pretende implementar diversos controladores con la finalidad de comparar el desempeño de las diferentes técnicas de control y de esta forma diseñar un controlador o poder seleccionar el control tolerante de fallos pasivo con mayor robustez para el helicóptero quadrotor, específicamente para el QBall 2 en este caso. La importancia de diseñar controladores para el helicóptero quadrotor recae en las múltiples aplicaciones del mismo así como por ser una herramienta de investigación robótica. De acuerdo a la investigación realizada y que se muestra en el presente trabajo hay diversos estudios en este ámbito sin embargo, no se han hecho pruebas experimentales para así determinar con certeza cual es la técnica adecuada, por lo cual uno de los objetivos principales de este trabajo es probar experimentalmente los resultados que se obtengan en las simulaciones numéricas.

1.2. Estrategias de Control

Se aborda el problema de control de fallos en vehículos aéreos no tripulados (véase [35, 26, 40, 24, 31, 33]) a través de la aplicación de técnicas de control $\mathcal{H}_\infty$ [40, 42, 43, 18] y de control por modos deslizantes [44, 45, 46, 47].

1.2.1. Problema de control por $\mathcal{H}_\infty$

En 1981, Zames plantea el problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para el caso escalar basado en la respuesta entrada-salida. La solución del problema la obtienen Zames y Francis en 1984 y posteriormente los mismos autores extienden los resultados para el caso multivariable. Es a partir de [18] cuando se impulsa la solución algorítmica de los problemas de control $\mathcal{H}_\infty$ en espacio de estados, obteniéndose un controlador de la misma dimensión que la planta ampliada o también denominada planta generalizada (constituida por el modelo del proceso junto con las matrices de ponderación que constituyen las especificaciones de diseño). Los algoritmos desarrollados en espacio de estado se caracterizan por basarse en la solución de un par de ecuaciones algebraicas de Riccati desacopladas, partiendo de las matrices de estado de la planta generalizada. Otro enfoque de la teoría de control $\mathcal{H}_\infty$ se relaciona con la teoría de juegos [48], esto es, se debe pensar en el diseñador por un lado y en el medio ambiente por otro lado, y el objetivo del diseñador es elegir un controlador que estabilice el sistema y sea óptimo con respecto a un criterio dado mientras que el medio exterior tiene como objetivo hacer fracasar la estrategia del diseñador por medio de la elección de la peor perturbación posible que actúe sobre la planta a controlar. A partir de estas ideas Ravi *et al.* [49] extienden la teoría $\mathcal{H}_\infty$ hacia sistemas lineales variantes en el tiempo basados en la solución de un par de ecuaciones diferenciales de Riccati. Respectivamente, Van der Schaft [50] e Isidori y Astolfi [42] presentan la solución al problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para el caso global y local de sistemas no lineales invariantes en el tiempo con retroalimentación de estados y salida respectivamente. La solución del problema consiste en resolver dos ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Isaacs (caso global) o ecuaciones de Riccati (caso local). De manera reciente, Orlov *et al.* [51] extienden la solución hacia sistemas no lineales variantes en el tiempo con retroalimentación de salida. Finalmente, en Aguilar *et al.* [40] se resolvió el problema de control $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas no suaves variantes en el tiempo.

Estas estrategias para encontrar controladores $\mathcal{H}_\infty$ se utilizan hasta la fecha, y ellas tienen en común que las dinámicas suaves no se encuentran restringidas. En el presente trabajo se muestra que la teoría de control $\mathcal{H}_\infty$ no lineal se puede implementar en un helicóptero quadrotor.

El diseño de controladores $\mathcal{H}_\infty$ que se presenta en esta tesis se basa en la teoría de juegos de Basar y Bernhard [48] y el análisis de la ganancia $\mathcal{L}_2$ de Isidori y Astolfi [18] y Van der Schaft [50]. En el análisis se presentan las condiciones suficientes para la existencia de una solución global del problema en función de la solución de dos desigualdades de Hamilton-Jacobi-Isaacs. Así mismo, se sigue la línea de razonamiento propuesta por Orlov *et al.* [53] donde la correspondiente expresión de Hamilton-Jacobi-Isaacs requiere que sea negativa definida en lugar de negativa semidefinida. Esto permite desarrollar un procedimiento de diseño que no obliga al sistema de control a tener las condiciones de estabilidad y detectabilidad [18]. Aquí el problema es encontrar la correspondiente solución de las ecuaciones diferenciales de Riccati.

1.2.2. Problema de control por modos deslizantes

Los sistemas de control de estructura variable, surgieron del trabajo pionero en Rusia de Emel'yanov y Barbashin a principios de los años sesenta. Las ideas no se comparten fuera de Rusia hasta mediados de los años setenta, cuando el libro [55] y el estudio [56] fueron publicados en inglés.

Las ideas se han aplicado con éxito a problemas tan diversos como el control automático de vuelo, el control de motores eléctricos, procesos químicos, sistemas de aumento de estabilidad de helicópteros, sistemas espaciales y robots [22].

En el presente trabajo, se explora la aplicación de la teoría de control por modos deslizantes en un helicóptero quadrotor. Para delimitar el estudio, primeramente nos concentramos en resolver el problema de control de regulación.

La solución del diseño de controladores por modos deslizantes que se presenta en esta tesis se define en el sentido de Filippov [19].

Aquí el rendimiento del controlador depende principalmente de la superficie deslizante, por lo cual el problema es encontrar las ganancias óptimas para que se conduzca adecuadamente la trayectoria de los estados y que los mismos se vean obligados a permanecer en ella.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Resolver el problema de control de regulación de posición y seguimiento de trayectoria para un helicóptero quadrotor en el caso de presentarse ruido en los sensores y perturbaciones externas. Las técnicas de control que se abordan son H_∞ para sistemas lineales y no lineales invariantes en el tiempo y modos deslizantes.

1.3.2. Objetivos específicos

- **Control H_∞**
 - Resolver el problema de control de regulación de posición y seguimiento de trayectoria en un helicóptero quadrotor a pesar de presentarse ruido en los sensores y perturbaciones externas, se utiliza la técnica de control H_∞ .
- **Control por modos deslizantes**
 - Resolver el problema de control de regulación de posición y seguimiento de trayectoria en un helicóptero quadrotor a pesar de presentarse ruido en los sensores y perturbaciones externas, se utiliza la técnica de control modos deslizantes para resolver el problema.

1.4. Plan de análisis

El análisis del sistema dinámico en lazo cerrado (retroalimentando hacia el controlador las variables medidas, por ejemplo, los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada) será teórico y se hará utilizando herramientas de Lyapunov, con las cuales se puede probar de manera formal que las trayectorias en

lazo cerrado de un sistema (en este caso los ángulos rotacionales del helicóptero) convergen hacia una referencia.

Por otro lado, con el fin de ilustrar el desarrollo teórico, se harán simulaciones numéricas en Matlab.

Finalmente se realizarán pruebas experimentales utilizando los algoritmos de control diseñados con los que se haya demostrado estabilidad en lazo cerrado.

1.5. Antecedentes

Los vehículos aéreos no tripulados (UAV) han ganado un creciente interés en los últimos años debido a una amplia gama de posibles aplicaciones civiles tales como la seguridad, la vigilancia del tráfico, la gestión de los riesgos naturales, exploración del medio ambiente, la agricultura, y aplicaciones para el área militar. Además este tipo de plataformas son muy apropiadas para la docencia, pues integran una gran diversidad de áreas de conocimiento tales como mecánica del sólido rígido (momentos y tensores de inercia, matrices de rotación, ángulos de Euler), matemáticas aplicadas, electrónica de potencia (controladores electrónicos de velocidad), automatización (el control del vehículo), etcétera [34].

Hace unos años era impensable desarrollar un vehículo aéreo miniatura debido a las restricciones de hardware que se presentaban. Fue hasta la implementación de MEMS (Sistemas micro-electromecánicos) y a la presencia de avances tecnológicos de almacenamiento de energía y procesamiento de datos que fue factible el desarrollo de los vehículos aéreos no tripulados [1].

En el ámbito de las aplicaciones, características tales como la capacidad de los helicópteros quadrotors para despegar y aterrizar verticalmente (VTOL), para realizar vuelo estacionario estable y preciso ejercido por sus cuatro hélices, así como su agilidad para maniobrar, los convierten en los vehículos ideales en varios rubros de aplicaciones (véase [35]). El aumento de capacidad de carga debido al empuje que ejercen los cuatro rotores, agilidad de maniobrabilidad, sencillez de diseño mecánico así como la utilización de motores eléctricos en vez de motores de combustión son sólo algunas de las ventajas que tiene un quadrotor sobre un aeroplano, sin embargo, sus desventajas recaen en el aumento en peso y de consumo de energía por los rotores extras que posee por diseño este tipo de UAV. Una motivación para el desarrollo del trabajo propuesto aparte de controlar un helicóptero quadrotor es abordar soluciones a fallas parciales en los sensores; se implementan diversos controladores con la finalidad de diseñar un controlador óptimo para el helicóptero quadrotor. La seguridad, fiabilidad y un nivel aceptable de rendimiento de los sistemas de control dinámico son requisitos clave en los sistemas de control no sólo en condiciones normales de funcionamiento, sino también ante la presencia de fallo parcial o fallo en los componentes del sistema controlado, siendo éstas, las principales características de los sistemas de control tolerante a fallos (FTCS), de hecho, cuando se produce un fallo en un sistema, éste, repentinamente comienza a comportarse de una manera inesperada estando en lazo cerrado, es decir utilizando el controlador diseñado originalmente en condiciones normales. Por lo tanto, el controlador tolerante a fallos debe ser diseñado, implementado y ejecutado en línea y en tiempo real para poder manejar la falla y garantizar la estabilidad del sistema y un rendimiento aceptable, incluso ante la presencia de fallos en actuadores, sensores y otros componentes del sistema [24].

Los sistemas de control tolerante a fallos se clasifican en dos grupos, sistema de control tolerante a fallas pasivo y sistema de control tolerante a fallas activo. El sistema de control tolerante a fallas pasivo que se aborda en la presente tesis, se diseña de manera en que al manifestarse una falla en el sistema es capaz de mantenerse estable a pesar de que el desempeño disminuya, este tipo de sistema no requiere

de reconfiguración. Sin embargo el sistema de control tolerante a fallas activo utiliza la reconfiguración para lograr un desempeño aceptable dado que el sistema presenta componentes dañados [25].

Para corregir un error, primero debe detectarse que hay una falla, localizarse y analizarse si es posible para reconfigurar y mantener operando el sistema. Dado lo anterior, se hace alusivo el trabajo de [26], donde se propuso y ejecutó con éxito un sistema de conmutación para la detección de cambios en la posición de un helicóptero quadrotor. En este mismo, se menciona como los sistemas de control tolerante a fallos pasivos se basan principalmente en técnicas de diseño de control robusto, lo que les da la ventaja de no requerir detección en línea, sin embargo se limita solamente en aplicaciones de fallas parciales. Debido al aumento en el uso civil de vehículos aéreos no tripulados, la fiabilidad se vuelve particularmente crítica. La aparición de fallas en los UAV's, trae ciertas consecuencias entre las que se pueden citar, pérdida parcial o total del vehículo así como el riesgo físico que corren las personas que se encuentren en el área próxima donde opera la aeronave.

Una falla en al menos uno de los rotores del quadrotor provoca que el sistema se desestabilice ya que pierde su orientación y este puede provocar que el vehículo caiga, por lo tanto, el control tolerante a fallos en rotores permitirá aumentar la seguridad de operación de un vehículo aéreo no tripulado. La carente fiabilidad de los UAV's en la actualidad se muestra como un obstáculo para garantizar el éxito a mediano y largo plazo de los mismos según la secretaría de defensa de los Estados Unidos, así mismo, determina que para lograr la autonomía de dichos vehículos es necesario el desarrollo de sistemas de control y auto-reparación. Por lo que el interés por el desarrollo de controladores para este tipo de vehículos (quadrotores) se demuestra en diversas publicaciones de un tiempo atrás [36] hasta la actualidad [28].

En [31] propusieron un método para controlar un UAV quadrotor fundamentado en un controlador PID basado en la programación de un control tolerante de fallos con ganancias variables. Habla también de la innecesaria implementación de un número redundante de actuadores o sensores para lograr el control del vehículo en un vuelo con o sin presencia de perturbaciones, declara así la importancia de darle seguimiento a los distintos estudios dedicados al control de los UAV de cuatro rotores para así encontrar el diseño óptimo que contrarreste las diferentes perturbaciones que pueden sucitarse al momento de vuelo del UAV. Dicho controlador consistió en dos partes: la primera controla la orientación de las hélices, es decir se realizó un estudio diferente para cada una de ellas, y la segunda la velocidad de las mismas; las ecuaciones de movimiento se basaron en la segunda ley de Newton. Este tipo de diseño de controladores aumenta el rendimiento del UAV quadrotor, tanto en la disminución del error de seguimiento de la trayectoria deseada, como en el aumento de la capacidad de tolerancia a fallos y la fiabilidad del mismo, a través de la programación de ganancias variables.

En [35] se define que puede controlarse el quadrotor al variar la velocidad de cada uno de los rotores; debido al cambio del empuje y par en cada uno, también se señala que el estimador de fallos es capaz de detectar si alguno de los actuadores falla y el mismo puede controlarse por el enfoque de modos deslizantes. En dicho trabajo, se demuestra que el algoritmo para detección de fallos puede distinguir entre falla del actuador y perturbación externa.

En contraste en [24], se compara la eficiencia del control GS-PID (ganancias programadas, "Gain-Scheduled") contra MRAC (Modelo de Referencia de Control Adaptativo), donde fueron seleccionados dichos controladores por las diversas ventajas que estos poseen, en lo que MRAC se refiere, una de las razones por la cual fue seleccionado es su adaptación y auto-sintonización como respuesta ante los cambios en el sistema, y el PID es seleccionado por ser el controlador más utilizado debido a su

simplicidad y robustez.

El rendimiento de los dos controladores mostró ser bueno. Aunque el control GS-PID es más fácil para su desarrollo y aplicación, MRAC mostró ser más robusto a los fallos y ruidos, y se encuentra dentro de los rangos para la amplitud de la señal de control que permite ser aplicado a un UAV quadrotor. De igual manera en [31] se utiliza el mismo tipo de controlador PID basado en programación de ganancias, se realizan simulaciones numéricas en diferentes escenarios de fallas para probar la efectividad del controlador propuesto para un helicóptero quadrotor, sin olvidar que esta variación del controlador PID se utiliza debido a la simplicidad y lo robusto de dicho controlador anexando que la programación de las ganancias compensa la desventaja de que no se ejecuta en línea. A pesar de ser un caso muy estudiado la detección de fallas sigue siendo un área de investigación activa, debido a eso en [30] se aborda el problema de la detección de fallas y diagnóstico (FDD) de un sistema de helicóptero quadrotor en presencia de fallas del actuador. Se utiliza el método de TSKF (two-stage Kalman filter) con el que se pretende analizar dos estados simultáneamente al momento de vuelo, de tal manera que se detecte, se identifique y se haga el diagnóstico de falla, se propone añadir ciertas variaciones al método de control para que el algoritmo responda con mayor rapidez a cambios abruptos en el sistema. Tres escenarios de fallos se investigaron: pérdida de la eficacia del control en un solo actuador, pérdida simultánea de la efectividad del control en todos los motores, y la pérdida de eficacia de control en tres motores con diferentes magnitudes. Los resultados se verificaron de manera experimental, comprobando de esta forma la efectividad del método. Se dice que este método puede ser aplicado a otros tipos de vehículos de ala rotativa no solo al utilizado experimentalmente.

Los controladores propuestos se enfocan en fallas parciales, utilizando métodos de control tales como el de modos deslizantes, una de las razones por las cuales no era controlado efectivamente se debía a la falta de robustez, es hasta el 2014 cuando en [33] se hace frente al problema en donde uno de los actuadores/rotores ya no es capaz de suministrar empuje, lográndolo controlar mediante un diseño de control H_∞ , intentando girar el vehículo en la dirección de guiñada, haciendo así funcionar el helicóptero con solo tres rotores; concluyendo así de manera asertiva su trabajo utilizando un lazo de control doble, sin embargo solo ha sido probado mediante simulación. Es por eso que sigue siendo un problema a campo abierto, sobre todo el que se pretenda comprobar de manera experimental el funcionamiento adecuado del quadrotor, y de igual forma diseñar un algoritmo de control robusto que este optimizado, véase [32].

Capítulo 2

Control tolerante a fallos

2.1. Fallas y pérdidas

Iniciaremos con las definiciones de falla y pérdida dadas en [23]. Las definiciones son de acuerdo al comité técnico IFAC SAFEPROCESS, las cuales son denominadas definiciones estándar en el área, con el fin de evitar confusión en los lectores.

Falla «fault»: desviación no permitida de al menos una propiedad característica o parámetro del sistema de la condición aceptable/habitual/estándar.

Pérdida «failure»: una interrupción permanente de la capacidad de un sistema para realizar una función requerida en condiciones de funcionamiento específicos.

Por la traducción es simple entender la diferencia entre ambas, sin embargo es de vital importancia hacer referencia a la misma. Evidentemente una pérdida es mucho más significativa que una falla, es decir que si tuviéramos una falla en un sensor aún podría responder sin embargo sería menos eficiente, en contraste si tuviéramos una pérdida de un sensor, sería necesario reconfigurar por completo nuestro sistema de control o en su defecto reemplazar por completo el sensor.

2.2. Control tolerante a fallos

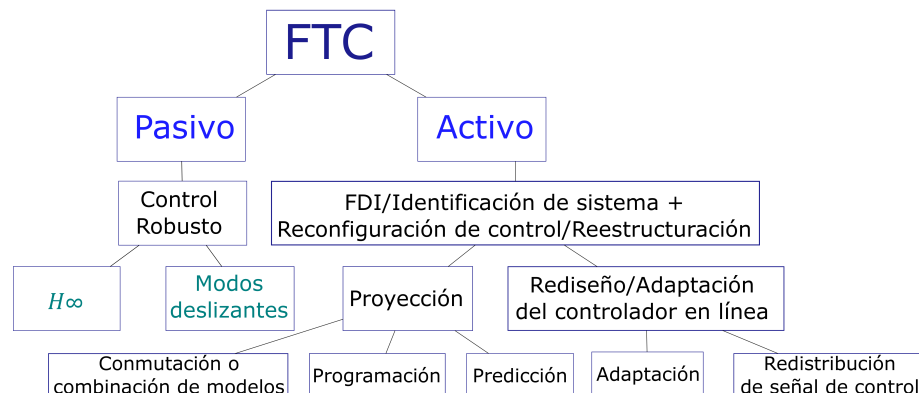


Figura 2.2.1: Clasificación de FTC

2.2.1. Detección y aislamiento de fallas

En AFTC, la detección y aislamiento de la falla (FDI «fault detection and isolation») es vital para obtener la información necesaria y tomar acción para la reconfiguración del sistema [23]. La principal función de FDI es detectar la falla y su localización, para así tomar las acciones correctivas necesarias para eliminar o atenuar el efecto que provoca la falla en el rendimiento del sistema. Las siguientes definiciones son de acuerdo al comité técnico IFAC.

Detección de la falla: Determinación de los fallos presentes en un sistema y el tiempo de detección.

Aislamiento de la falla: Determinación del tipo, localización y tiempo de detección de un fallo.

Identificación de la falla: Determinación del comportamiento, del tamaño y del tiempo de una falla.

2.2.2. FTC Activo

En el control tolerante de fallos activo es necesaria cierta información de la falla, tal como la identificación y aislamiento de la misma (FDI- «fault detection and isolation»), lo que nos dará las herramientas para reconfigurar el sistema de control o reestructurarlo. El AFTC se puede dividir en dos subgrupos, proyección y rediseño o adaptación del controlador en línea. En el FTC de proyección los controladores están diseñados para todos los posibles fallos que pudieran ocurrir. Estos subgrupos de igual forma pueden subdividirse en otras categorías como se muestra en la Figura 2.2.1.

El control por reconfiguración se encarga de fallas críticas en las que es necesario cambiar la estructura de control para satisfacer la tolerancia de fallos del sistema. Es decir que variables alternativas deben ser encontradas con el fin de compensar y poner en funcionamiento el sistema de control. En el ejemplo de control de guiñada «yaw control» de la aeronave, es aplicable el empuje diferencial del motor y se puede utilizar para reemplazar el efecto del timón [29].

2.2.2.1 Adaptación

Motivados en el diseño del piloto automático para aviones de alto rendimiento en 1950, el control adaptativo fue propuesto. El control adaptativo es utilizado para ajustar automáticamente los parámetros del controlador y así obtener el desempeño deseado. Existen dos tipos de control adaptativo: directo e indirecto. El control adaptativo indirecto necesita ser estimado para después utilizar la información y así diseñar el controlador. En el control adaptativo directo no es necesaria dicha estimación para diseñar el controlador.

Las dos metodologías más populares son las de: MRAC «model-reference adaptive control» y control de autoajuste (STC).

2.2.2.2 Conmutación o combinación

La idea de utilizar múltiples modelos para el control reconfigurable se introdujo a principios de los años noventa [23]. La motivación de utilizar un esquema de múltiples modelos fue para hacer frente a los cambios debido a las condiciones de vuelo. Las metodologías que usualmente se utilizaban eran controladores lineales, por lo que este enfoque parecía ideal para garantizar que el sistema operara

de manera deseada, como sabemos cuando se trabaja con controladores lineales estos deben operar alrededor de la condición de linealización, por lo que con un método de múltiples modelos podía diseñarse de tal manera de que fuera estable y garantizar el rendimiento del mismo.

2.2.2.3 Predicción

A diferencia de lo que se cree el desarrollo de control predictivo/modelo de control predictivo (MPC) inició en la industria de procesos, dado que el concepto y descripción matemática es fácil de entender por los ingenieros de control, por lo que se puede decir que después del controlador PID, es uno de los más utilizados en la industria.

La motivación del MPC es el de permitir que el proceso de producción se ejecute lo más cerca de sus límites con el fin de maximizar la producción; pero nunca violando dichos límites. Es por esto que es utilizado en FTC, es decir que si se tuviera una falla en uno de los accionadores del avión, se aumenta el desempeño de los otros, trabajando con su capacidad de manejar los límites y de esta forma contrarrestar la falla.

2.2.2.4 Ejemplo ilustrativo: control de guiñada de la aeronave

El siguiente ejemplo fue tomado de [29] con el fin de ilustrar el método de reconfiguración. La velocidad de guiñada del avión $\dot{\varphi}$, está controlada principalmente por el ángulo de deflexión del timón u_R . Las turbinas se utilizan para el mismo fin, si se aplica el empuje diferencial u_T . Tanto el sistema de accionamiento del timón como de las turbinas tiene su propia dinámica, se aproximan como sistemas de primer orden con variables de estado x_R y x_T y constantes de tiempo $T_R = T_T = 1s$. Un simple modelo linealizado se obtiene del balance de momentum con respecto al eje z de la aeronave

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_T(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_T} & 0 \\ 0,27 & 0,13 & -10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_T(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_T(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

donde las entradas u_R y u_T conducen los modelos de primer orden de los actuadores, cuyos estados físicamente representan fuerzas. La velocidad angular $\dot{\varphi}$ se considera como la salida del sistema.

El modelo refleja la intuición de que tanto el timón u_R y el empuje diferencial u_T afectan a la velocidad de guiñada $\dot{\varphi}$. Sin embargo, debido a la geometría, el timón tiene el doble de ganancia del empuje diferencial. El controlador nominal es una realimentación de salida estática

$$\begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_R \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t), \quad (2.2.3)$$

donde sólo se utiliza el timón, $y(t)$ es la salida del sistema y en el bucle de control, la entrada de referencia se denota por $r(t)$. Los ceros en la ley de retroalimentación resultan de la consideración de todas las entradas disponibles para la planta. $k_R = 1$ para fines ilustrativos.

Ejemplo de modelo de fallo:

Se presenta un fallo del canal de control que mueve el timón al ángulo de deflexión $u_R = 0$. Dentro de un marco de modelo lineal, este tipo de falla es multiplicativo, ya que puede ser representado por una matriz de entrada modificada

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2.4)$$

donde la primera columna se pone a cero para reflejar la interrupción del comando del timón.

La cual tiene consecuencia estructural ya que rompe el circuito de control nominal. El controlador es ineficaz hasta que se toman medidas adicionales para reconfigurar el controlador utilizando el empuje diferencial del motor para controlar la velocidad de guiñada. El modelo (2.2.1) - (2.2.2) muestra que, después del fallo, la acción del controlador debe ser redirigida al empuje diferencial u_T y escalado por un factor de dos.

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones, el código de MATLAB podemos encontrarlo en los anexos del documento. En el primer caso se verá el modelo nominal de la Figura 2.2.2 a la Figura 2.2.5 y en el segundo caso cuándo $u_R = 0$ (falla del timón) de la Figura 2.2.6 a la Figura 2.2.9. En ambos casos la posición deseada para el ángulo de guiñada es $x_d = 1$ y las condiciones iniciales por propósitos ilustrativos son $(0,0)$.

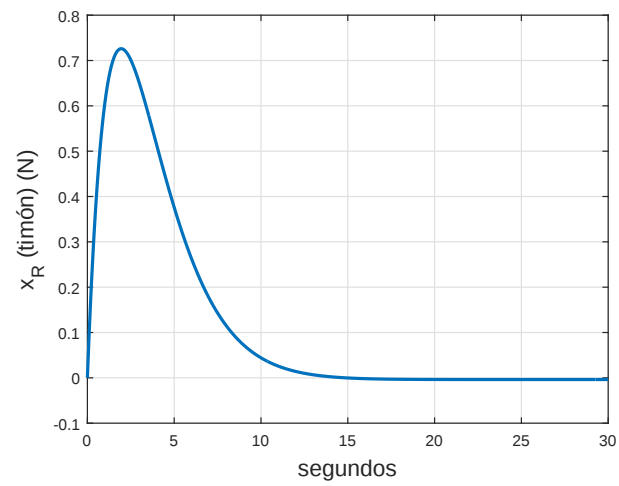


Figura 2.2.2: x_R modelo nominal

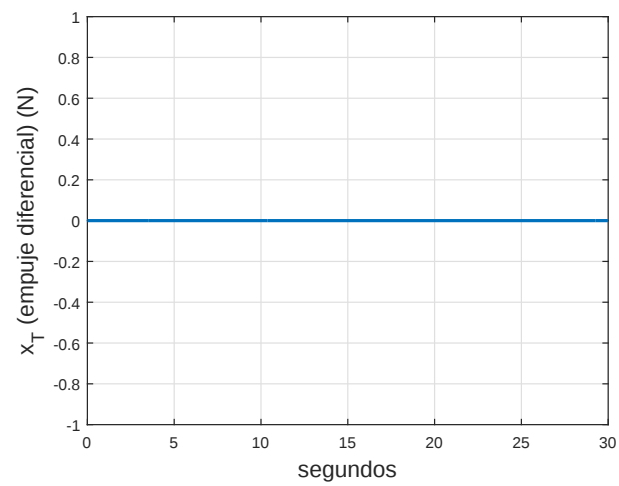


Figura 2.2.3: x_T modelo nominal

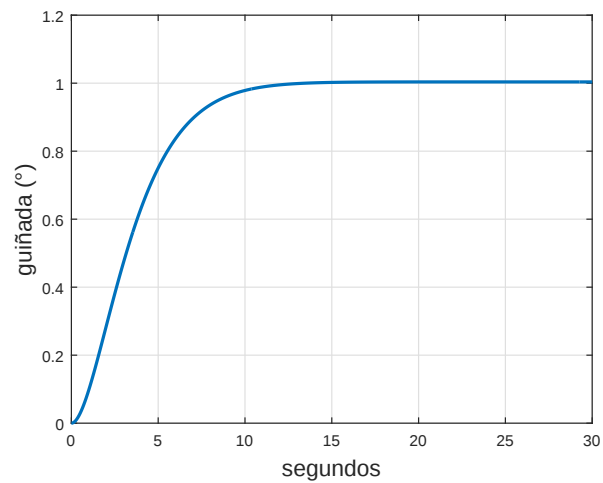


Figura 2.2.4: φ modelo nominal

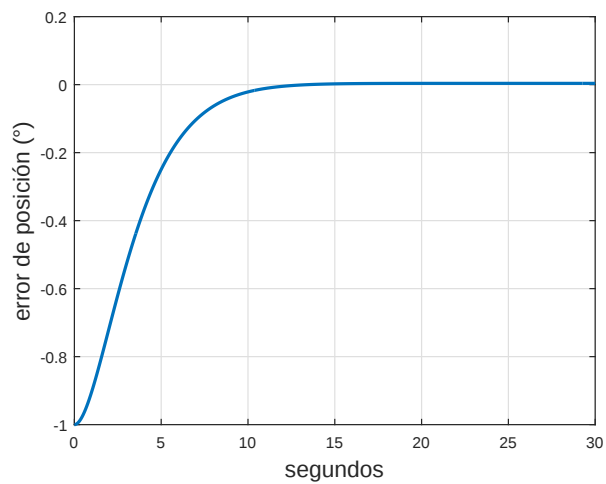


Figura 2.2.5: Error de posición modelo nominal

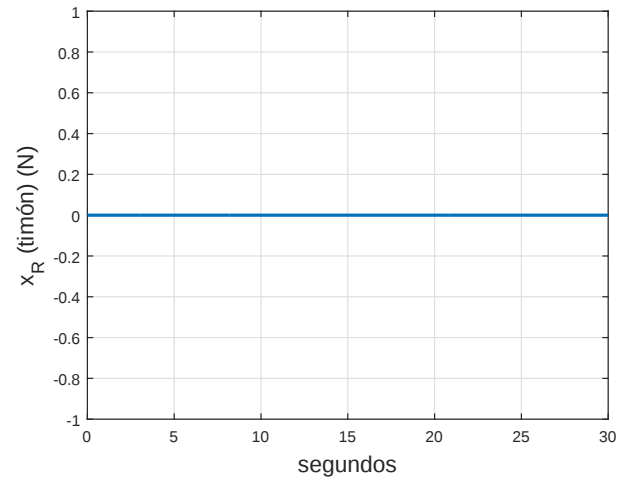


Figura 2.2.6: x_R cuando $u_R = 0$

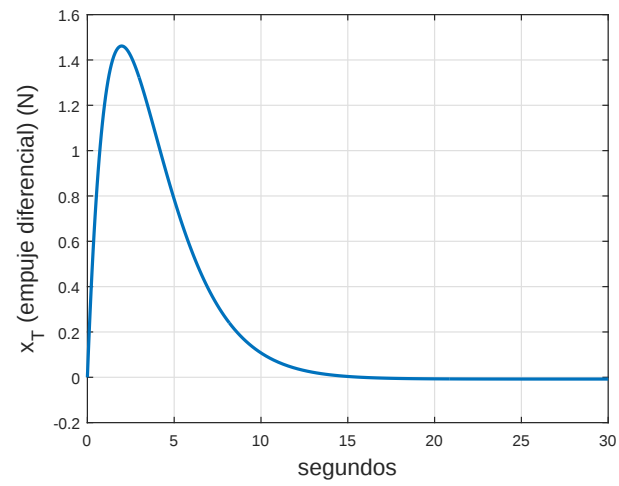


Figura 2.2.7: x_T cuando $u_R = 0$

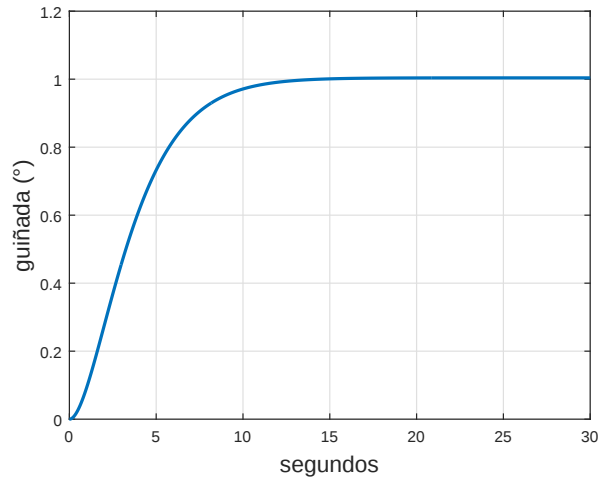


Figura 2.2.8: φ cuando $u_R = 0$

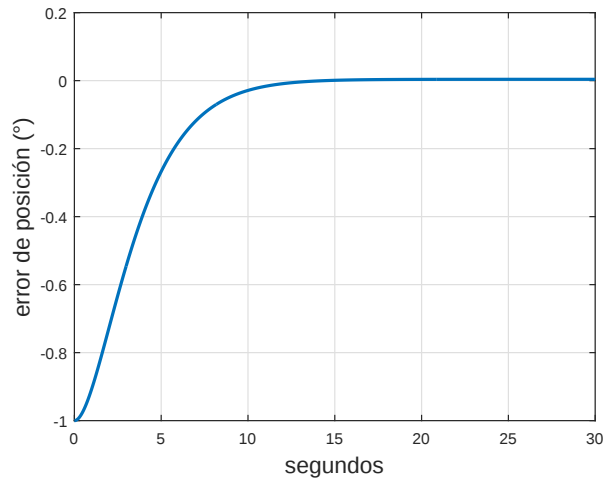


Figura 2.2.9: Error de posición cuando $u_R = 0$

Como podemos observar aún cuando se produce el fallo del timón, el empuje diferencial u_T se acciona y logra compensar la falla en el controlador nominal.

2.2.3. FTC Pasivos

2.2.3.1 Control robusto H_∞

El control tolerante de fallos pasivo se basa principalmente en controladores robustos como se muestra en la Figura 2.2.1. Una de las metodologías de control robusto más utilizada es la del controlador H_∞ , la cual se ha convertido en una de las más importantes para control multivariable debido a sus

diversas aplicaciones; que va desde procesos de control en la industria hasta problemas de control en una aeronave. Una de las ventajas de utilizar un sistema de control tolerante de fallos pasivo es que no se requiere información alguna de la falla, ya que debido a la robustez del controlador es suficiente para operar el sistema en condiciones de fallo, así mismo dependiendo de la capacidad del controlador se minimiza el efecto de la incertidumbre o de las perturbaciones en el sistema.

2.2.3.2 Modos deslizantes (SMC)

El control por modos deslizantes es un tipo de control no lineal y un caso especial de control de estructura variable. El rendimiento del controlador depende principalmente de la superficie deslizante que es a donde se conduce la trayectoria de los estados y una vez alcanzada la misma, los estados se ven obligados a permanecer en ella.

SMC es ideal para PFTC para manejar fallas del actuador y de los sensores, debido a que tiene una propiedad de robustez inherente a cierto tipo de incertidumbre.

En algunos sistemas, se tiene acceso al uso de actuadores redundantes. En esta situación, el controlador por modos deslizante puede hacer frente a fallos totales simplemente canalizando las señales de control a los actuadores duplicados sin cambiar o reconfigurar el controlador. Esto es simple en términos de diseño, ya que la misma salida del controlador de modo deslizante podrá ser utilizada por muchos actuadores. Esto es, sin embargo, restringido a sistemas con actuadores redundantes que son un duplicado exacto de los originales. En muchos sistemas de ingeniería reales, esto simplemente no está disponible [23].

Capítulo 3

Control Robusto

Para diseñar un sistema de control para una planta real es necesario tener información sobre la misma y obtener un modelo matemático que la represente, a este modelo, le llamamos, sistema nominal.

El objetivo final del sistema de control consiste en ser lo suficientemente robusto para controlar el sistema real y no sólo al sistema nominal. Es necesario tener en cuenta que, por muy bueno que sea el diseño del modelo, existirán diferencias entre éste y el sistema real, las cuales son conocidas como errores de modelado o incertidumbres.

Existen técnicas de control que se basan únicamente en el sistema obtenido (nominal), sin embargo para ser realistas es necesario tomar en cuenta las incertidumbres pues este es el propósito del control robusto. Aún cuando la incertidumbre no puede ser conocida con exactitud debido a que obtener el modelo matemático de un sistema real suele ser un proceso complejo, su valor puede ser acotado superiormente [10].

Es decir, existe una familia de posibles plantas, en la cual se encuentra el sistema real, por lo que la incertidumbre depende del sistema nominal que se elija.

En la Figura 3.0.1 se muestra un diagrama polar en el que se representa una familia de plantas F_G formando una banda correspondiente a distintos sistemas monovariantes dentro de la cual se ha incluido el modelo nominal $G(j\omega)$ y el sistema real $G_r(j\omega)$.

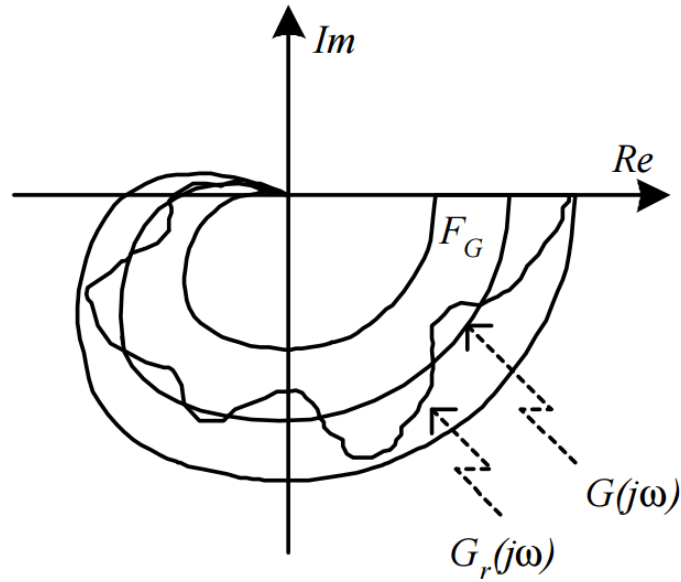


Figura 3.0.1: Familia de plantas debido a incertidumbres.

Con frecuencia se utiliza un modelo nominal con características esenciales y que sea invariante en el tiempo, debido al amplio desarrollo en la literatura. Para estos casos, la finalidad es diseñar un controlador fijo, lineal o no lineal e invariante en el tiempo que sea robusto, desde el punto de vista no sólo del sistema nominal, sino para cualquier sistema propio de la familia.

3.1. Objetivos de control

El principal objetivo de diseñar un sistema de control es que funcione adecuadamente para el sistema real. Debido que para diseñar dicho sistema se utiliza el modelo nominal y como vimos puede haber incertidumbres entre éste y el real, el objetivo de control puede dividirse en subobjetivos. Para describir los diferentes subobjetivos vamos a utilizar el diagrama que se muestra en la Figura 3.1.1

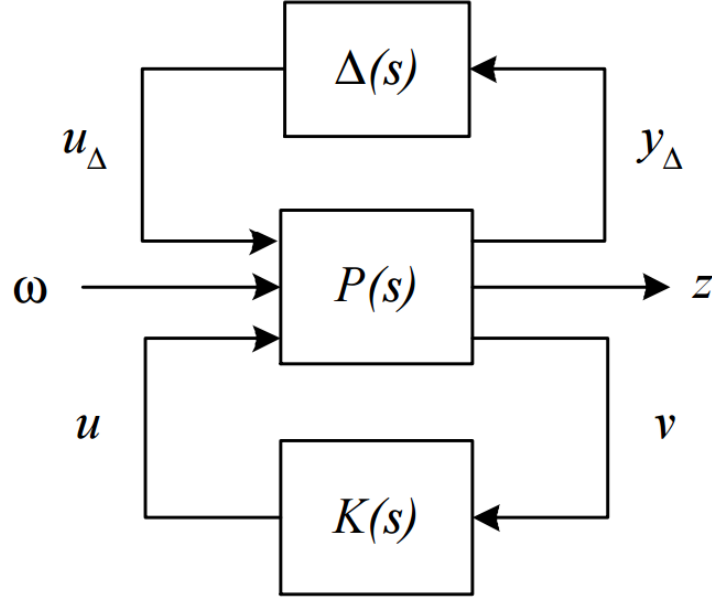


Figura 3.1.1: Formulación general del control robusto

Donde $P(s)$ representa a una planta generalizada que depende exclusivamente del sistema nominal, $K(s)$ es el controlador, $\Delta(s)$ representa a la incertidumbre (normalizada) del sistema, ω representa el conjunto de señales perturbadoras del sistema, v es el vector de señales medibles que alimentará al controlador y u será el vector de señales de control que generará un controlador a partir de las señales v . A partir de esto podemos describir los subobjetivos.

■ Estabilidad Nominal

Este objetivo consiste en conseguir que el controlador $K(s)$ diseñado estabilice al sistema nominal $P(s)$ elegido para representar el sistema real. La formulación del problema en estabilidad nominal se obtendrá eliminando ω y $\Delta(s)$ en el esquema de la Figura 3.2.

■ Comportamiento Nominal

Una vez alcanzada la estabilidad nominal, se pretende que el sistema nominal $G(s)$ este acotado según la función pertinente (comportamiento nominal). Para obtener el comportamiento nominal habrá que anular $\Delta(s)$ en la formulación general.

■ Estabilidad Robusta

Con el término robusto se hace referencia a la familia de sistemas F_G , por tanto la estabilidad robusta se alcanza cuando el diseño del controlador es capaz de estabilizar no sólo el sistema nominal si no también a cualquier planta que pertenezca a la familia de sistemas. Esta formulación se consigue anulando las señales ω de la formulación general.

■ Comportamiento Robusto

Este es el objetivo final de un controlador robusto y consiste en que sea capaz de hacer que cualquier sistema que pertenezca a la familia de sistemas F_G , se comporte adecuadamente según la función deseada. Para ello se suele hacer una estimación de las incertidumbres, de tal manera que el rango de funcionamiento quede acotado.

Capítulo 4

Control H_∞

Como se vio en la sección anterior el objetivo del control robusto se basa en que tenga un comportamiento óptimo para cualquier sistema perteneciente a la familia de sistemas F_G .

La técnica de H_∞ se basa en encontrar una ley de control, K , que atenúe la relación entre el vector de señales de error, z , el vector de perturbaciones, ω , siendo γ la atenuación conseguida. Tal como se muestra en Figura 4.0.1, la formulación descrita fue introducida por Doyle en 1983, véase [15] y posteriormente empleada en [10, 16].

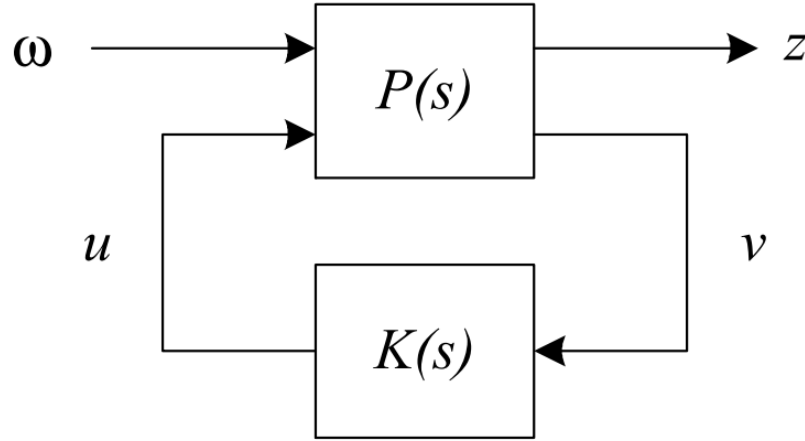


Figura 4.0.1: Esquema de la estrategia de control H_∞ .

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix} \quad (4.0.1)$$

donde v es el vector de señales medibles que alimentará a algún controlador y u será el vector de señales de control que generará un controlador a partir de las señales v , es decir

$$u = K(s)v \quad (4.0.2)$$

según esta configuración, la función de transferencia desde las señales perturbadoras externas ω hasta las señales de error z cerrando el bucle con el controlador $K(s)$ viene dada por la transformación

fraccional lineal inferior

$$z = T_{z\omega}(s)\omega = F_l(P(s), K(s))\omega \quad (4.0.3)$$

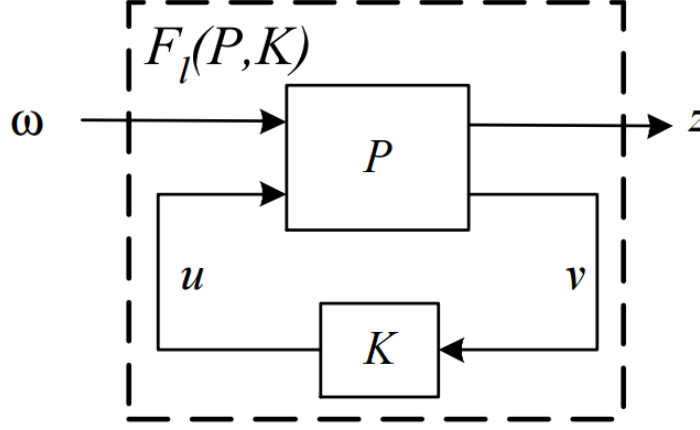


Figura 4.0.2: Transformada fraccional lineal inferior.

donde

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)[I - P_{22}(s)K(s)]^{-1}P_{21}(s). \quad (4.0.4)$$

El problema de control con esta configuración como ya se mencionó será encontrar la atenuación γ . Cabe señalar que en función de como se diseñe la planta generalizada $P(s)$, se conseguirán cotas de comportamiento y robustez [11]. A continuación se plantea este problema de manera más formal [10].

El problema subóptimo de síntesis de un controlador H_∞ se puede formular de la siguiente forma:

Dado un nivel de atenuación γ , hallar un controlador $K(s)$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- La función de transferencia $T_{z\omega}(s)$ sea estable
- La norma infinito de la función de transferencia $T_{z\omega}(s)$ sea inferior a γ , o sea

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{z\omega}(j\omega)) < \gamma. \quad (4.0.5)$$

donde $\bar{\sigma}(A)$ es el valor singular máximo de A, también conocido como norma espectral.

El problema óptimo de síntesis se formula de forma equivalente, salvo que habrá que encontrar el controlador que minimice dicha cota de atenuación γ , esto es:

Hallar un controlador $K(s)$ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

- La función de transferencia $T_{z\omega}(s)$ sea estable.
- Se minimice la norma infinito de la función de transferencia $T_{z\omega}(s)$, o sea

$$\min_{K(s)} \|T_{z\omega}(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{z\omega}(j\omega)) = \gamma_0 < \gamma \quad (4.0.6)$$

4.1. Cálculo de la norma infinito

A lo largo de este capítulo A , B , C , D serán matrices reales de tamaño $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ y $p \times m$, respectivamente. Se hace referencia al sistema dinámico lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Asimismo nos referimos a

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\tag{4.1.2}$$

como a la función de transferencia del sistema $\{A, B, C, D\}$.

La norma infinito de un sistema $G(s)$ está dada por:

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))\tag{4.1.3}$$

Sin embargo este procedimiento no es utilizado en la práctica debido a que no es fácil automatizarlo, para evitar este inconveniente se desarrollo un procedimiento de cálculo de la norma infinito basada en la descripción interna del sistema [17].

Se establece una conexión entre los valores singulares de la matriz de transferencia y los valores propios imaginarios de una determinada matriz hamiltoniana, se define γ como un número real positivo ($\gamma > 0$) y $G(s)$ como una función de transferencia racional estable.

Entonces, la norma infinito de $G(s)$ es menor que γ si y sólo si $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ y la matriz H no tiene eigenvalores en el eje imaginario, siendo:

$$\begin{aligned}H &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D & \gamma I \\ \gamma I & -D^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B^T \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^TC & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^TS^{-1}C & -A^T + C^TDR^{-1}B \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

donde $R = (\gamma^2 I - D^T D)$ y $S = (DD^T - \gamma^2 I)$.

Utilizando este lema es posible calcular de forma iterativa la norma infinito de $G(s)$.

4.2. Descripción del sistema

Consideremos el sistema lineal e invariante en el tiempo de la Figura 4.0.2 con entrada de control $u(t)$, salida $y(t)$, perturbación $w(t)$ dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

y una salida virtual $z(t)$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u\tag{4.2.2}$$

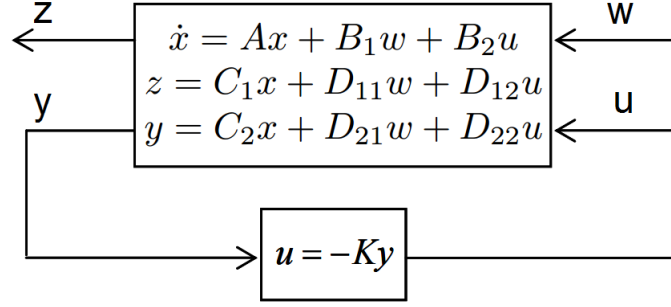


Figura 4.2.1: Descripción del sistema H_∞ .

Por definición (A, B_1) se dice que es estabilizable si existe una matriz real K tal que $A - B_1 K$ sea asintóticamente estable. Se dice que el par (A, C_1) es detectable si existe una matriz real L tal que $A - B_1 L$ sea asintóticamente estable. El sistema mostrado en la Figura 4.2.1 se dice que tiene una respuesta de salida estabilizable si existe una matriz real K tal que $A - B_1 K C_1$ sea estable [12, 13].

4.3. Algoritmo general para el cálculo del control H_∞

Para diseñar un controlador óptimo se hacen las siguientes hipótesis de la planta generalizada:

1. Las matrices (A, B_2, C_2) deben ser estabilizables y detectables. Esta hipótesis es necesaria para garantizar controladores estabilizantes.
2. Las matrices D_{12} y D_{21} han de tener rango completo, o sea,

$$\text{rango}(D_{12}) = m$$

$$\text{rango}(D_{21}) = q.$$

Esta hipótesis garantiza que los controladores obtenidos sean propios, por lo que serán realizables. Además, el algoritmo exige que las matrices D_{12} y D_{21} sean tales que verifiquen

$$D_{12}^T D_{12} = I_m$$

$$D_{21} D_{21}^T = I_q.$$

Nótese que estas condiciones indican restricciones sobre sus dimensiones. En particular, esto implica que:

$$\text{número de salidas de errores} \geq \text{número de señales de control}$$

$$\dim(z) = p \quad \dim(u) = m$$

$$\text{número de entradas perturbadoras} \geq \text{número de medidas para el controlador}$$

$$\dim(\omega) = l \quad \dim(v) = q$$

3.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = m + n \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

es decir, esta matriz ha de tener rango completo respecto a las columnas para cualquier valor de ω .

4.

$$\text{rango} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = q + n \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

es decir, esta matriz ha de tener rango completo respecto a las filas para cualquier valor de ω . Esta condición, junto con la anterior, aseguran que el controlador no cancele polos y ceros situados en el eje imaginario.

5. Tanto la matriz D_{11} y D_{22} deben ser nulas, es decir

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0 \\ D_{22} &= 0. \end{aligned}$$

4.4. Problema de diseño de la ganancia L_2 acotada

Se dice que la ganancia L_2 del sistema está acotada o atenuada por γ si

$$\frac{\int z^T(t)z(t)dt}{\int w^T(t)w(t)dt} \leq \gamma^2. \quad (4.4.1)$$

El control estático de realimentación de salida está dado por

$$u = -Ky \quad (4.4.2)$$

se desea encontrar una ganancia K tal que el sistema sea estable y la ganancia L_2 esté acotada por el valor prescrito γ .

4.5. Análisis matemático

Para encontrar una ganancia constante de realimentación de salida K como se ha descrito en la sección anterior, se puede definir el valor funcional dado por la ecuación

$$J(K, w) = \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt. \quad (4.5.1)$$

El Hamiltoniano correspondiente se define como

$$H = V(x) + \int_{t_0}^{t_1} (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \quad (4.5.2)$$

donde la función de Lyapunov es definida positiva es decir $V(x) > 0$, derivando obtenemos que

$$H = \frac{dV(x)}{dx} \dot{x} + z^T z - \gamma^2 w^T w \quad (4.5.3)$$

sustituyendo (4.2.1) - (4.2.2) en (4.5.3) tenemos

$$H = \frac{dV(x)}{dx} (Ax + B_1 w + B_2 u) + x^T c_1^T c_1 x + u^T u - \gamma^2 w^T w. \quad (4.5.4)$$

En base a (4.5.4), se puede obtener la peor perturbación ($\alpha_1 = w$) utilizando la técnica de la derivada de Lie

$$\frac{dH}{dw} = \frac{dV(x)}{dx} B_1 = 2\gamma^2 w^T = 0 \quad (4.5.5)$$

con esto podemos definir la peor perturbación tal que

$$\alpha_1 = w = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T \frac{dV(x)}{dx}^T = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x. \quad (4.5.6)$$

Asimismo se puede obtener el control óptimo ($\alpha_2 = u$)

$$\frac{dH}{du} = \frac{dV(x)}{dx} B_2 + 2u^T = 0 \quad (4.5.7)$$

$$\alpha_2 = u = -\frac{1}{2} B_2^T \frac{dV(x)}{dx}^T. \quad (4.5.8)$$

Se sabe que para sistemas lineales el valor funcional $V(x)$ es cuadrático y puede tomarse en la forma $V = x^T P x > 0$ sin pérdida de generalidad, por lo que

$$\frac{dV(x)}{dx} = 2x^T P = x^T P + P x \quad (4.5.9)$$

Sustituyendo (4.5.9) en (4.5.8) tenemos

$$u = -B_2^T P x \quad (4.5.10)$$

que se define como el control óptimo para minimizar las perturbaciones w .

Para finalizar al sustituir y hacer las reducciones pertinentes de las ecuaciones tanto de la derivada de la función de Lyapunov propuesta, así como la peor perturbación y el control óptimo en (4.5.3) se tiene

$$H = x^T [PA + A^T P] x + \frac{1}{\gamma^2} x^T P B_1 B_1^T P x - x^T P B_2 B_2^T P x + x^T C_1^T C_1 x = 0 \quad (4.5.11)$$

con lo que obtenemos la ecuación algebraica de Riccati, con la que podremos calcular las ganancias P , necesarias para encontrar el control óptimo del sistema

$$\dot{P} = PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P B_1 B_1^T P - P B_2 B_2^T P + C_1^T C_1 = 0. \quad (4.5.12)$$

Capítulo 5

Control por Modos Deslizantes (SMC)

Existen numerosos sistemas físicos descritos dinámicamente por ecuaciones diferenciales que dependen en forma discontinua del estado actual del sistema, es decir ecuaciones con lado derecho discontinuo. A estos sistemas se los denomina sistemas de estructura variable (SEV) [19].

Tanto en los SEV como en algunos sistemas continuos, el control tiene también la posibilidad de cambiar de estructura. El control por estructura variable (CEV) consiste en diseñar los parámetros de cada una de tales estructuras y además, su lógica de conmutación, para lograr determinado comportamiento de un SEV. Generalmente, las leyes de CEV son funciones discontinuas de los estados del sistema.

Una de las maneras más efectivas de realizar un CEV consiste en plasmar el objetivo de control como una función de los estados. Luego, mediante conmutaciones a frecuencia muy elevada, idealmente infinita, se fuerza a las trayectorias del sistema a evolucionar sobre la superficie determinada por la restricción planteada, en el espacio de estados. A este modo de funcionamiento, ilustrado en la Figura 5.0.1.a, se lo denomina operación por modos deslizantes (MD). Cuando la frecuencia de conmutación no es infinita, como sucede en cualquier implementación práctica, o en el caso de que existan dinámicas no modeladas, las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la variedad de deslizamiento. A este fenómeno se lo denomina efecto de «chattering» y constituye el principal defecto de los modos deslizantes, ilustrado en la Figura 5.0.1.b.

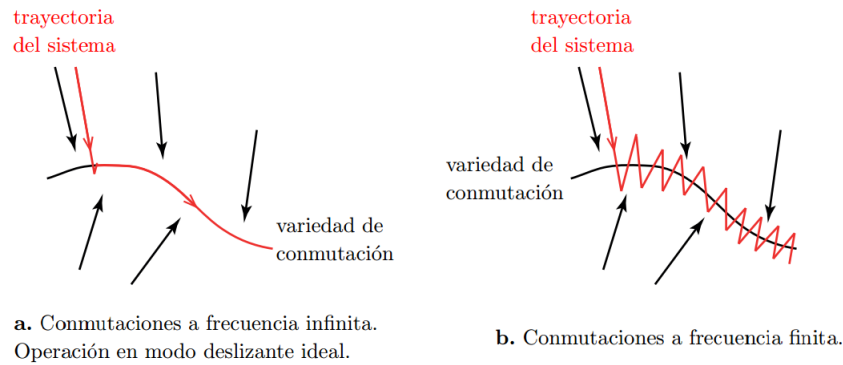


Figura 5.0.1: Trayectoria en un sistema de estructura variable.

El enfoque de control de modo deslizante es reconocido como una de las herramientas eficientes

para diseñar controladores robustos para la planta dinámica no lineal de alto orden que opera en condiciones de incertidumbre [21], la investigación en esta área fue iniciada en la antigua Unión Soviética en los años 50. La mayor ventaja de los modos deslizantes es la baja sensibilidad respecto a variaciones de los parámetros de la planta y perturbaciones, las cuales eliminan la necesidad de un modelo exacto. El control por modos deslizantes supone que las acciones de control son funciones de estados discontinuos los cuales pueden ser fácilmente implementados por convertidores de energía convencionales con «on-off» como el único modo de operación. Por ello la investigación ha ido creciendo ya que ha demostrado ser aplicable para un amplio rango de problemas como en robótica, accionadores eléctricos y generadores, control de procesos, vehículos y control de movimiento, entre otros.

Principales ventajas de este método [20]:

- Robusto contra una amplia clase de perturbaciones o incertidumbres del modelo.
- Requiere de una reducida cantidad de información en comparación a técnicas de control clásico.
- Posibilidad de estabilización de algunos sistemas no lineales los cuales no son estabilizables por leyes continuas de retroalimentación de estados.

Principal desventaja:

- «Chattering»: oscilación de alta frecuencia causada en los estados.

5.1. Conceptos fundamentales de SMC

De forma general, el control por modos deslizantes consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una superficie llamada «superficie deslizante» y forzarle a mantenerse sobre ella. Así, el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen dicha superficie en el espacio de estados. De tal manera que diseñando tales ecuaciones en base a los objetivos de control es posible lograr la estabilización del sistema, el seguimiento de referencias y la regulación de variables.

5.1.1. Modos deslizantes de primer orden

Considérese un sistema de control no lineal SISO (*Single Input- Single Output*), tal que la dinámica de los estados puede describirse a través del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, en la forma más general:

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (5.1.1)$$

donde $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la entrada de control, posiblemente discontinua, por lo que el campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tendrá discontinuidades en algún conjunto del espacio $\mathbb{X}$.

Se define también, una función suave de los estados compatible con algún objetivo de control deseado, $\sigma : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, a partir de la cual se determina el conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\} \quad (5.1.2)$$

que representa la superficie de conmutación en el espacio de estados n -dimensional.

La misma es de dimensión $n - 1$ en el caso SISO.

La ley de CEV más sencilla que puede plantearse, con la idea de lograr que el sistema opere sobre la superficie deslizante, consiste en alternar los valores de $u(x)$ entre dos valores posibles, según el signo de $\sigma(x)$:

$$\begin{cases} u^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

donde los dos niveles de u , son funciones suaves de los estados que no se cruzan (para ningún $x \in \mathbb{X}$). En estas condiciones, el sistema controlado podrá expresarse a través de dos subsistemas continuos, dependiendo del signo de $\sigma(x)$

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Se dice que existe un régimen deslizante sobre la superficie S , cuando la aplicación de la ley de control (5.1.3) resulta en que las trayectorias del sistema alcanzan tal superficie y se mantienen localmente en su entorno. Para que esto suceda, los campos vectoriales controlados de los dos subsistemas continuos, deben apuntar localmente a S , como se muestra en la figura 5.1.1. Para que esto ocurra, es necesario que en el sistema controlado se satisfagan las siguientes desigualdades en las proximidades de S :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(x) < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \dot{\sigma}(x) > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

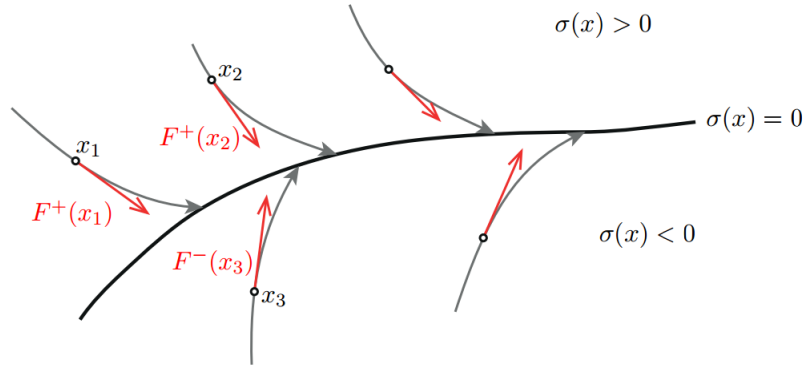


Figura 5.1.1: Condición para la existencia del régimen deslizante en S .

Estas condiciones son las necesarias para la convergencia a la superficie deslizante y la permanencia en una vecindad de la misma. Las desigualdades anteriores pueden representarse también como

$$\dot{\sigma}(x)\sigma(x) < 0 \quad (5.1.6)$$

que debe cumplirse al menos en las vecindades de S .

5.1.2. Derivada de Lie

En el estudio de sistemas dinámicos es normal el uso de la derivada direccional o derivada de Lie, la cual es una notación compacta para las derivadas de funciones escalares en dirección de uno o más campos vectoriales.

Dados un campo escalar $h(x)$ y un campo vectorial $f(x)$ en el espacio de estados con $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La derivada de Lie se define como la función escalar $L_f h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$L_f h(x) = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] f(x) \quad (5.1.7)$$

que indica la derivada de $h(x)$ en la dirección de $f(x)$. Se puede definir el gradiente de $h(x)$, tal que:

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial h(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right] \quad (5.1.8)$$

es el vector que indica para cada punto x , la dirección en la cual $h(x)$ varía más rápidamente y con que ritmo cambia en esa dirección.

Notando que $L_f h(x)$ es una función escalar, esta derivada direccional puede aplicarse de manera recursiva, en dirección del mismo campo vectorial tal que

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f^{k-1} h(x)) f(x) \quad (5.1.9)$$

y también esta el caso de aplicarse de manera recursiva en diferentes campos vectoriales, por ejemplo dos campos $f(x)$ y $g(x)$ distintos:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f h(x)) g(x) \quad (5.1.10)$$

La derivada de la función de conmutación puede expresarse, empleando la derivada de Lie, tal que

$$\dot{\sigma}(x) = L_F \sigma(x) = \frac{dh}{dx} f(x) \quad (5.1.11)$$

a partir de esto, la condición de existencia de régimen deslizante de (5.1.1) queda expresada de la manera

$$\begin{cases} L_{F^+} \sigma(x) < 0 & si \quad \sigma(x) > 0 \\ L_{F^-} \sigma(x) > 0 & si \quad \sigma(x) < 0. \end{cases} \quad (5.1.12)$$

esto implica que la variación de la función de restricción $\sigma(x)$ en la dirección del campo controlado siempre se opone al signo de $\sigma(x)$, con lo cual se garantiza el cruce de la superficie S desde ambos lados.

5.1.3. Condición de Transversalidad

Dado el sistema de (5.1.1) podemos describir la dinámica de los estados de la manera

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5.1.13)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que se denomina vector de campo de deriva y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vector de campo de control.

Con lo que desarrollando podemos definir la condición de transversalidad de la siguiente forma:

$$L_f \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad (5.1.14)$$

la cual es necesaria para la existencia del régimen deslizante. La misma permite influenciar $\dot{\sigma}$ y en particular el signo de la misma, a través de la acción de control u .

Geoméricamente, esta condición demuestra que el campo vectorial $g(x)$ no puede ser tangencial a la superficie de deslizamiento; si esto ocurriera no podría forzarse a las trayectorias a cruzar la superficie.

En términos de sistemas de control, pedir que se cumpla la condición de transversalidad es equivalente a pedir que la función de conmutación $\sigma(x)$ sea de grado relativo 1 con respecto a la entrada de control u .

5.2. Regularización del movimiento deslizante

El comportamiento del sistema controlado por modos deslizantes es descrito mediante ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. Por esta razón se dice que no es Lipschitz, es decir, no cumple con las condiciones de existencia y unicidad en el sentido usual. En consecuencia, el problema de describir el movimiento del sistema durante el régimen deslizante no es sencillo.

Durante décadas en la literatura, se han realizado diversas propuestas, en las que se involucra hacer alguna concesión, llevando el sistema a alguna forma que permita encontrar una solución cercana a la del sistema original y que permita el uso de técnicas de control clásicas, a este mecanismo se le suele llamar regularización.

Entre las más utilizadas se encuentran el método de Filippov y el método de control equivalente.

5.2.1. Método de Filippov

La solución se define en el sentido de Filippov si

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.2.1)$$

su lado derecho $f(x)$, presenta discontinuidades en conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ de medida cero en el sentido Lebesgue.

La solución de (5.2.1) fuera del centro donde se presentan las discontinuidades es de la forma usual. En el conjunto donde hay discontinuidades, la expresión (5.2.1) se transforma en una inclusión diferencial.

$$\dot{x} f(x) \Rightarrow \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ \sigma & \text{para } x = 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

donde $\sigma \in [-1, 1]$.

El campo de velocidad de los estados en régimen deslizante estándar puede expresarse según el método de Filippov como

$$\dot{x} = F^{MD} = \mu F^+ + (1 - \mu) F^- \quad (5.2.3)$$

donde el valor del parámetro μ se obtiene por despeje de la condición que define que durante el régimen deslizante las trayectorias permanecen sobre $\sigma(x) = 0$, es decir, que la derivada temporal de σ es nula

$$\dot{\sigma} = \nabla \sigma(x) \dot{x} = 0 \quad (5.2.4)$$

es decir

$$\mu = -\frac{\nabla \sigma(x) F^-}{\nabla \sigma(x) [F^+ - F^-]} \quad (5.2.5)$$

este valor de μ es el necesario para que el campo de velocidad de los estados para cualquier punto sobre la superficie deslizante, pertenezca al plano tangente a la misma en ese punto, como se ilustra en la Figura 5.2.1.

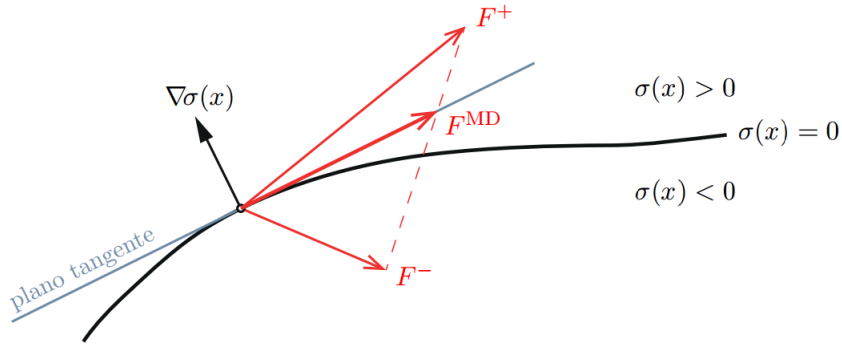


Figura 5.2.1: Movimiento en régimen deslizante según el método de Filippov.

5.2.2. Método de control equivalente

Se dice que el control equivalente u_{eq} , es aquel que no se conoce de la planta del sistema, este método propone encontrar la dinámica ideal del modo deslizante a través del reemplazo de la ley de control discontinua por una ley suave, que permita verificar las siguientes condiciones de invariancia

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 0 \\ \dot{\sigma}(x) &= L_{F(x, u_{eq})} \sigma(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

es decir, como en el método de Filippov, se pide que el campo de velocidad de los estados para cualquier punto sobre la superficie deslizante pertenezca al plano tangente a la misma en cada punto.

Dada (5.1.13), la condición de invariancia queda de la siguiente manera

$$\dot{\sigma}(x) = L_f \sigma(x) + L_g \sigma(x) u_{eq}(x) = 0 \quad (5.2.7)$$

de donde se obtiene la expresión del control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{L_f \sigma(x)}{L_g \sigma(x)} \quad (5.2.8)$$

Así, una vez sobre la superficie y aplicando el control equivalente, la dinámica ideal del modo deslizante queda determinada de la forma

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 0 \\ \dot{\sigma}(x, u_{eq}) &= f(x) - g(x) \frac{L_f \sigma(x)}{L_g \sigma(x)}\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

$\sigma(x) = 0$, es la restricción algebraica que produce la reducción del orden del sistema controlado en régimen deslizante de n a $n - 1$.

La ecuación dinámica de los estados del sistema controlado, sobre la superficie deslizante puede describirse apartir de la ecuación anterior tal que

$$\dot{x} = [I - g(\nabla\sigma g)^{-1}\nabla\sigma]f(x) = \Psi(x)f(x) \quad (5.2.10)$$

esta ecuación, evaluada en $\sigma(x) = 0$, es la que describe el movimiento deslizante ideal sobre la superficie, tal como se muestra en la Figura 5.2.2.

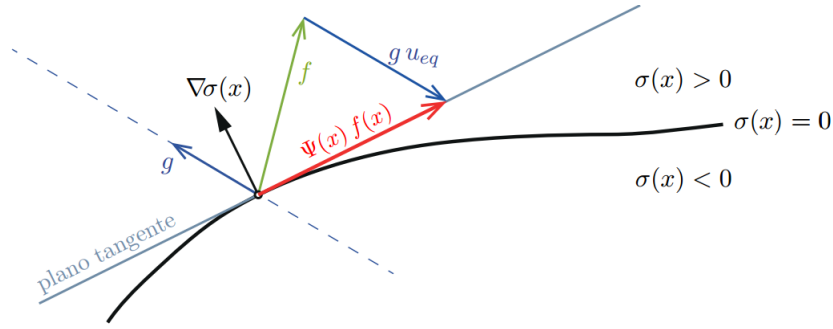


Figura 5.2.2: Movimiento en régimen deslizante según método de control equivalente.

5.3. Análisis matemático

Con propósito de ilustración se considera el doble integrador dado por

$$\ddot{y}(t) = u(t). \quad (5.3.1)$$

Inicialmente también se considera la ley de control de retroalimentación tal que

$$u(t) = -ky(t) \quad (5.3.2)$$

donde k es un escalar estrictamente positivo. Una forma de analizar el movimiento en lazo cerrado es por medio de un retrato de fase, que es prácticamente un gráfico de la velocidad contra la posición [22].

Sustituyendo (5.3.2) en (5.3.1) y multiplicando el resultado por $\dot{y}$ obtenemos

$$\dot{y}\ddot{y} = -k\dot{y}y \quad (5.3.3)$$

que al integrar nos da la siguiente relación entre la velocidad y la posición

$$\dot{y}^2 + ky^2 = c \quad (5.3.4)$$

donde c representa una constante de integración que resulta de las condiciones iniciales y es estrictamente positiva es decir ($c > 0$).

La figura 5.3.1 representa el retrato de fase de $\dot{y} - y$, el cual es una elipse que depende de las condiciones iniciales.

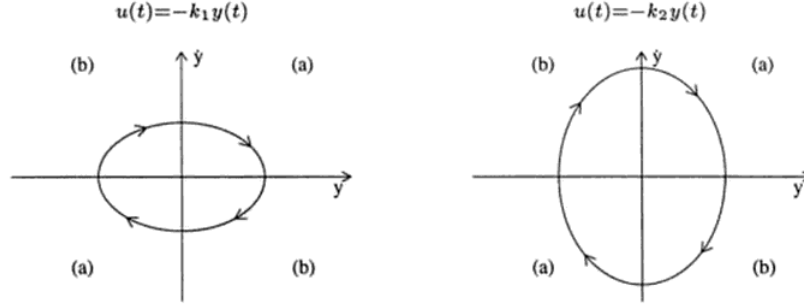


Figura 5.3.1: Retrato de fase del movimiento armónico simple

Considere entonces la ley de control siguiente

$$u(t) = \begin{cases} -k_1 y(t) & \text{si } y\dot{y} < 0 \\ -k_2 y(t) & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.3.5)$$

donde $0 < k_1 < 1 < k_2$. Este sistema se ajusta a la descripción de sistema de control de estructura variable. El retrato de fase para el lazo cerrado bajo la ley de control de estructura variable u , se obtiene empleando en conjunto las regiones apropiadas de los retratos de fase de la Figura 5.3.1 En este caso el retrato de fase, en espiral tiende al origen con lo que resulta un movimiento asintóticamente estable, como se muestra en la Figura 5.3.2

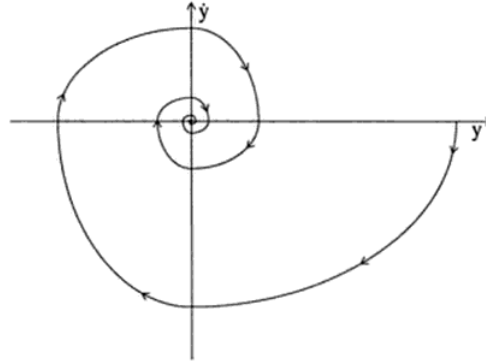


Figura 5.3.2: Retrato de fase del sistema aplicando un sistema de control de estructura variable.

Esto se puede verificar formalmente considerando la siguiente función

$$V(y, \dot{y}) = y^2 + \dot{y}^2 \quad (5.3.6)$$

el cual, dado el teorema de Pitágoras, representa el cuadrado de la distancia desde el punto $(y, \dot{y})$ al origen en el plano de fase y puede representar la energía del sistema.

Un ejemplo más significativo resulta del uso de la ley de estructura variable dada por

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } s(y, \dot{y}) > 0 \\ 1 & \text{si } s(y, \dot{y}) < 0 \end{cases} \quad (5.3.7)$$

la cual se usa para controlar el doble integrador. Para grandes valores de $\dot{y}$ el retrato de fase, obtenido de unir los componentes parabólicos de las leyes constituyentes se muestra en la figura 5.3.3

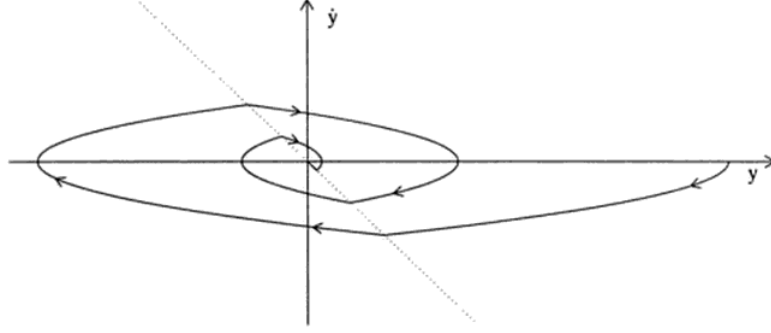


Figura 5.3.3: Retrato de fase del sistema para grandes valores de $\dot{y}$

La línea punteada de la Figura 5.3.3 representa el conjunto de puntos para los cuales $s(y, \dot{y}) = 0$. La función de conmutación obtenida por dicha expresión se define por

$$s(y, \dot{y}) = m\dot{y} + y \quad (5.3.8)$$

donde m es un escalar positivo. La expresión dada por (5.3.7) usualmente se escribe de la manera

$$u(t) = -\text{sign}(s(t)) \quad (5.3.9)$$

donde $\text{sign}(\cdot)$ es la función signo, la cual expone la propiedad de

$$s \text{ sign}(s) = |s|. \quad (5.3.10)$$

Tomando la función de Lyapunov tal que

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (5.3.11)$$

obtenemos que para valores de $\dot{y}$ que satisfacen la desigualdad $m|\dot{y}| < 1$ tenemos que

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(m\dot{y} + \ddot{y}) = s(m\dot{y} - \text{sign}(s)) < |s|(m|\dot{y}| - 1) < 0 \quad (5.3.12)$$

Por consiguiente, al cumplirse la desigualdad las trayectorias del sistema en ambos lados de la línea

$$\mathcal{L}_s = \{(y, \dot{y}) : s(y, \dot{y}) = 0\} \quad (5.3.13)$$

apuntan hacia la línea. Esto se demuestra en la Figura 5.3.4, que muestra diferentes retratos de fase interceptando el mismo punto en la línea, a partir de diferentes condiciones iniciales.

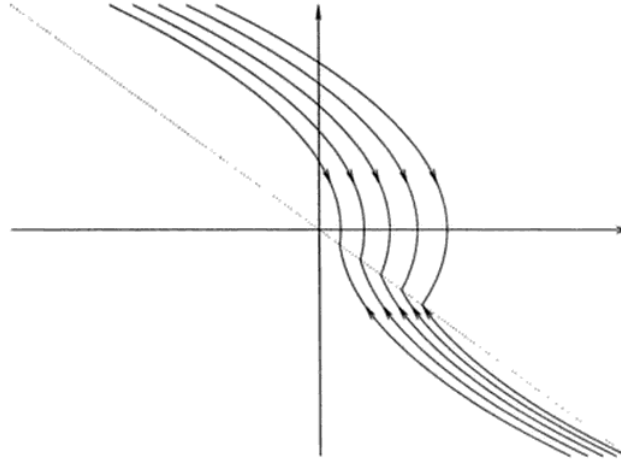


Figura 5.3.4: Retrato de fase del sistema bajo el control de estructura variable cerca del origen.

Según [22], la conmutación de alta frecuencia entre las dos estructuras de control diferentes tendrá lugar cuando las trayectorias del sistema crucen repetidamente la línea $\mathcal{L}_s$, a este movimiento de alta frecuencia se le llama *chattering* el cual fue descrito anteriormente.

El movimiento cuando está confinado a la línea $\mathcal{L}_s$ satisface la ecuación diferencial obtenida de reordenar $s(y, \dot{y}) = 0$, tal que

$$\dot{y}(t) = -my(t). \quad (5.3.14)$$

La Figura 5.3.5 representa un decaimiento de primer orden y las trayectorias se deslizarán a lo largo de la línea $\mathcal{L}_s$ al origen.

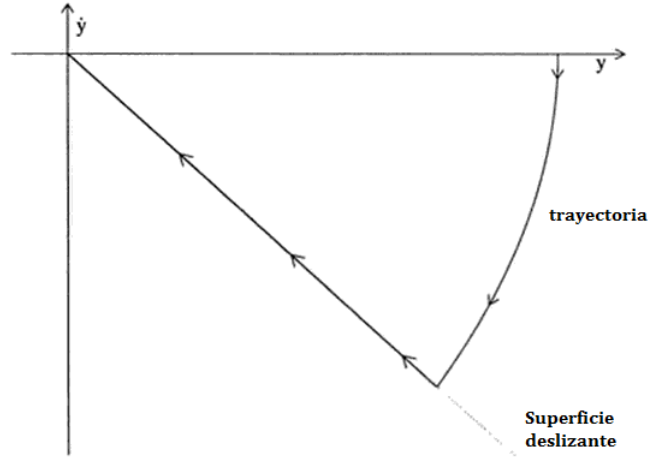


Figura 5.3.5: Retrato de fase de movimiento deslizante.

Dicho comportamiento dinámico se describe como un modo deslizante ideal y la línea $\mathcal{L}_s$ se denomina superficie deslizante.

La condición de (5.3.12) es usualmente escrita como

$$s\dot{s} < 0 \quad (5.3.15)$$

la cual es la condición de accesibilidad. Debe tenerse en cuenta que la acción de control requerida para provocar tal movimiento es discontinua, y en la superficie de deslizamiento ni siquiera está definida.

Capítulo 6

Modelado del quadrotor

El vehículo aéreo utilizado en este trabajo es el quadrotor Quanser QBall 2, tal como se muestra en la figura 6.0.1, el movimiento del mismo se genera a partir de los cambios de velocidad de los rotores. El QBall 2 es un helicóptero de cuatro motores *brushless*; sin escobillas y cuatro propelas colocadas en cada motor.



Figura 6.0.1: Quanser QBall 2

Para ejecutar el movimiento hacia adelante del quadrotor, la velocidad del rotor trasero debe aumentar y al mismo tiempo el rotor delantero disminuir, para el movimiento lateral es el mismo mecanismo pero usando los rotores de los lados (izquierda y derecha), *esto si nuestra configuración esta en cruz(+)*. Para obtener el movimiento de guiñada (yaw) es a partir de la diferencia en el par de torsión entre cada par de rotores, es decir, aumentar la velocidad en los rotores con sentido anti-horario y disminuir los de sentido horario o viceversa [1]. En la Figura 6.0.2 se ilustra una representación de los marcos de referencia y los movimientos relativos, la configuración que se utiliza en este caso, es *la configuración equis (×)*, el mayor beneficio de utilizar esta configuración es una cuestión física de repartición de potencia entre los motores, de forma que la carga individual que tenga que soportar cada uno es menor que la soportada en la configuración en cruz.

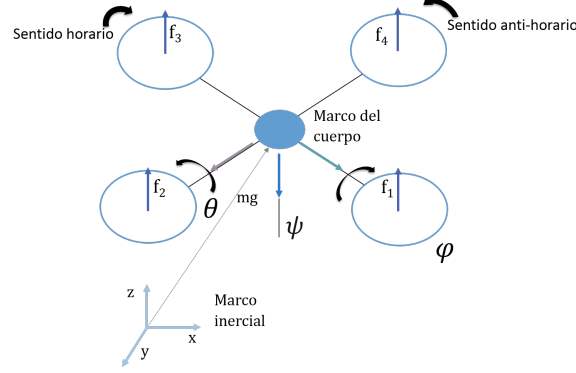


Figura 6.0.2: Esquema del quadrotor.

El quadrotor es un cuerpo rígido que se mueve en el espacio 3D y se considera no inercial [4]. Esta característica permite representar su dinámica con respecto al marco de referencia inercial, I , y también con respecto al marco de referencia del cuerpo, B .

Los vectores de estado del quadrotor se describen tal como

$$\begin{aligned} q &= [p^T \eta^T]^T \\ p &= [x \ y \ z]^T \\ \eta &= [\phi \ \theta \ \psi]^T \\ v &= [v^T \ \omega^T]^T. \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

Donde $q = [p^T \eta^T]^T \in \mathbb{R}^6$ es la posición del quadrotor con respecto al marco inercial, $p = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ es la posición lineal del vehículo, $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ es la orientación del mismo, en el cual ϕ , θ y ψ representan los ángulos de cabeceo (roll), alabeo (pitch) y guiñada respectivamente y $v = [v^T \ \omega^T]^T \in \mathbb{R}^6$ es el giro del quadrotor con respecto al marco del cuerpo, en el cual $v \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad lineal y $\omega \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular [4].

6.1. Orientación del quadrotor

Según [3], la relación de velocidad inercial y del cuerpo fijo del quadrotor puede representarse a través de la siguiente matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\eta) & 0 \\ 0 & W(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff \dot{q} = J(\eta)v. \tag{6.1.1}$$

Antes de obtener el modelo dinámico, se presentará cómo estimar la posición y orientación del vehículo con respecto a un sistema de coordenadas de referencia inercial [1]. Donde la orientación del vehículo se supondrá dada por una matriz de rotación $R(\eta) : \beta \rightarrow I$, donde $R(\eta) \in SO(3)$ es una matriz de rotación ortonormal es decir que es ortogonal y unitaria [7].

La rotación de un cuerpo rígido o en el caso específico de este trabajo, la rotación del quadrotor puede ser obtenida por el método de los ángulos de Euler. Una de las definiciones más populares de los ángulos de Euler es la *convención -xyz* (giro alrededor de x, y', z''), la cual es conocida también como ángulos de Tait-Bryan o ángulos Cardano los cuales son principalmente utilizados en ingeniería aeroespacial [2, 8], los mismos serán utilizados para describir la orientación del quadrotor.

La configuración de la rotación de un cuerpo rígido en el espacio es realizada a través de tres rotaciones sucesivas.

1. Rotación según x de ϕ : *roll* o balanceo ($-\pi < \phi < \pi$)

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

2. Rotación según y de θ : *pitch* o cabeceo ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (6.1.3)$$

3. Rotación según z de ψ : *yaw* o guiñada ($-\pi < \psi < \pi$)

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1.4)$$

La matriz de rotación completa de B respecto a I , llamada también matriz de coseno directo, esta dada por

$$R(\eta) = R(z, \psi) \cdot R(y, \theta) \cdot R(x, \phi)$$

$$R(\eta) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$R(\eta) = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & c(\psi)s(\theta)s(\phi) - s(\psi)c(\phi) & c(\psi)s(\theta)c(\phi) + s(\psi)s(\theta) \\ s(\psi)c(\theta) & s(\theta)s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\phi) & s(\theta)s(\psi)c(\phi) - c(\psi)s(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\psi) \end{bmatrix} \quad (6.1.5)$$

donde c : $\cos$ y s : $\sin$,

Debido a su propiedad de ortonormalidad, la traspuesta de $R(\eta)$ es la matriz de rotación expresada en el sistema de coordenadas B , tal como se muestra

$$R_B = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & c(\theta)s(\phi) & -s(\theta) \\ c(\psi)s(\theta)s(\phi) - s(\psi)c(\phi) & s(\theta)s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\phi) & c(\theta)s(\phi) \\ c(\psi)s(\theta)c(\phi) + s(\psi)s(\theta) & s(\theta)s(\psi)c(\phi) - c(\psi)s(\phi) & c(\theta)c(\psi) \end{bmatrix} \quad (6.1.6)$$

Podemos derivar una relación interesante de la matriz de rotación de (6.1.5) generada por las tres rotaciones sucesivas y su propiedad de ortonormalidad con una cierta matriz anti-simétrica [9], tal que se pueden obtener las ecuaciones cinemáticas de rotación del vehículo que establecen las relaciones entre las velocidades angulares.

Primeramente definiremos una matriz antisimétrica tal que , $S = -S^T$ de dimensión 3, la cual se

especifica por tres parámetros (s_x, s_y, s_z) , como

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.7)$$

Para cualquier $n \times n$ matriz ortonormal, R , tenemos que

$$RR^T = I_n \quad (6.1.8)$$

donde I_n es la matriz de identidad $n \times n$. En nuestro caso, $n = 3$ y R es una matriz de rotación con propiedad ortonormal ($R(\eta)$). Diferenciando tenemos

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0_n \quad (6.1.9)$$

donde 0_n es la matriz cero $n \times n$. En (6.1.9) se puede describir de igual forma tal que

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0_n \quad (6.1.10)$$

definiendo

$$S = \dot{R}R^T \quad (6.1.11)$$

de (6.1.10) obtenemos que

$$S + S^T = 0_n. \quad (6.1.12)$$

Así podemos observar que S es una matriz antisimétrica. Existe una propiedad que relaciona la derivada de matrices ortonormales con matrices antisimétricas y puede ser declarada como

$$S = \dot{R}R^{-1}. \quad (6.1.13)$$

Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas para determinar la postura del quadrotor, dada la matriz de rotación de (6.1.5), vienen dadas por

$$\dot{R}(\eta) = R(\eta) \cdot S(\omega) \quad (6.1.14)$$

donde como ya se mencionó $\omega = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$ son las velocidades angulares en el sistema de coordenadas fijado al cuerpo.

Dada (6.1.14) obtenemos la siguiente relación

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \frac{\text{sen}(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (6.1.15)$$

definiremos

$$W(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \frac{\text{sen}(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix}. \quad (6.1.16)$$

Tal que (6.1.16) es la matriz de transformación que relaciona la velocidad angular del vector ω con $\dot{\eta}$.

6.2. Modelo dinámico

El modelo dinámico se deriva utilizando el formalismo de Euler-Lagrange bajo las siguientes suposiciones [5]:

- La estructura es rígida.
- La estructura es simétrica.
- El centro de masa y el origen del marco fijo del cuerpo coinciden.
- Las hélices son rígidas.
- El empuje y el arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad de la hélice.

La representación del movimiento del quadrotor con respecto al marco de referencia del cuerpo se deriva usando el método quasi-Lagrangiano basado en ecuaciones de Kirchoff [4] tal que, su modelo dinámico es

$$M_B \dot{v} + C_B(v)v + g_B(q) = f_B(u) \quad (6.2.1)$$

donde $M_B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es una matriz de inercia constante y simétrica positiva

$$M_B = \begin{bmatrix} mI_3 & -mS(r)^T \\ mS(r) & I \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

en el que m es la masa del vehículo, $r \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del centro de masa del quadrotor con respecto al marco de referencia del cuerpo, I es la matriz tensora de inercia del cuerpo, $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad y S representa una matriz anti-simétrica.

Así mismo, $C_B(v) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de Coriolis dependiente de la torsión

$$C_B = \begin{bmatrix} mS(\omega) & -[mS(r)S(\omega)]^T \\ mS(r)S(\omega) & S(\omega)I \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$g_B(q) \in \mathbb{R}^6$ es el vector de fuerzas gravitacionales

$$g_B(q) = \begin{bmatrix} mgR(\eta)^T e_z \\ mgS(r)R(\eta)^T e_z \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y $e_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario en la dirección z del marco inercial.

Por último, $f_B(u) \in \mathbb{R}^6$ es el vector de entrada de fuerza y momento expresado en el marco del cuerpo

$$f_B(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Bu \end{bmatrix} \quad (6.2.5)$$

donde, $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T$ son las fuerzas de elevación generadas por las hélices y B la matriz de distribución de fuerza de entrada.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -l & 0 & l & 0 \\ -k_d & k_d & -k_d & k_d \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

en el cual, l es la distancia del centro de masa del quadrotor al rotor y k_d es el coeficiente de arrastre. En base a estas últimas dos expresiones tenemos que

$$f_B(u) = \begin{bmatrix} f_{Bp} \\ f_{Bo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 u_i \\ l(u_2 - u_4) \\ l(u_3 - u_1) \\ k_d \sum_{i=1}^4 (-1)^i u_i \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

con $f_{Bp} \in \mathbb{R}^3$, $f_{Bo} \in \mathbb{R}^3$.

Se puede obtener una representación de la dinámica del quadrotor en el marco inercial usando la relación cinemática presentada en (6.1.1), la cual queda expresada como

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = f(q, u) \quad (6.2.8)$$

con la que se tienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} H(q) &= J(\eta)^{-T} M_B J(\eta)^{-1} \\ C(q, \dot{q}) &= J(\eta)^{-T} [C_B(v) - M_B J(\eta)^{-1} \dot{J}(\eta)] J(\eta)^{-1} \\ g(q) &= J(\eta)^{-T} g_B(q) \\ f(q, u) &= J(\eta)^{-T} f_B(u) \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

esto se mantiene solo bajo la condición de $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, que se da cuando la matriz $\dot{J}(\eta)$ no es de rango completo, lo que implica la definición de $C(q, \dot{q})$.

Por otro lado, cuando el marco de referencia del cuerpo del vehículo coincide con el centro de masa, es decir $r = 0$, la dinámica del vehículo de (6.2.1), expresada con respecto al marco de referencia del vehículo, puede desacoplarse como

$$m\dot{v} + mS(\omega)v + mgR(\eta)^T e_z = f_{Bp} \quad (6.2.10)$$

$$I\dot{\omega} + S(\omega)I\omega = f_{Bo}. \quad (6.2.11)$$

Dada (6.2.8), la representación en el marco inercial de la posición y la dinámica de dirección del quadrotor puede describirse tal que

$$m\ddot{p} + mge_z = f_p \quad (6.2.12)$$

$$H_o(\eta)\ddot{\eta} + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = f_o \quad (6.2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} H_o(\eta) &= W(\eta)^T I W(\eta)^{-1} \\ C_o(\eta, \dot{\eta}) &= W(\eta)^{-T} [S(W(\eta)^{-1}\dot{\eta})I - IW(\eta)^{-1}\dot{W}(\eta)^{-1}]W(\eta)^{-1} \\ f_p(\eta) &= R(\eta)f_{Bp} \\ f_o(\eta) &= W(\eta)^{-T}f_{Bo}. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Cabe recalcar que

$$f_p = R(\eta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12}(\eta) \\ r_{23}(\eta) \\ r_{33}(\eta) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 u_i \quad (6.2.15)$$

$$f_o = W(\eta)^{-T} \begin{bmatrix} I(u_2 - u_4) \\ I(u_3 - u_1) \\ k_d \sum_{i=1}^4 (-1)^i u_i \end{bmatrix} \quad (6.2.16)$$

donde r_{ij} es el elemento « ij » de la matriz de rotación $R(\eta)$.

6.3. Objetivo de control

El objetivo de control consiste en garantizar el seguimiento de trayectoria de posición y orientación del quadrotor en base a (6.2.12) y (6.2.13). Consideremos los vectores de posición y orientación deseados como $p_d(t)$ y $\eta_d(t)$ respectivamente. Los valores para la posición deseada así como del ángulo de guiñada($\psi(t)$) son determinados por el operador y deben ser al menos dos veces diferenciables para todo $t \geq 0$. Por otro lado, los valores deseados de los ángulos de cabeceo y balanceo($\theta(t)$ y $\phi(t)$ respectivamente) se introducen con el fin de obtener una dinámica de error de posición estable.

El vector de error de posición esta dado por

$$\tilde{p} = p_d - p \quad (6.3.1)$$

y el vector de error de orientación

$$\tilde{\eta} = \eta_d - \eta. \quad (6.3.2)$$

Por lo tanto, el objetivo de control consiste en diseñar los controladores $f_p(t)$ y $f_o(t)$ tal que

$$\begin{bmatrix} \widetilde{p}(t) \\ \dot{\widetilde{p}}(t) \\ \widetilde{\eta}(t) \\ \dot{\widetilde{\eta}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \tag{6.3.3}$$

es uniformemente acotada.

Capítulo 7

Controlador

El controlador propuesto en [4], consta de dos etapas, una para el control de seguimiento de orientación y la otra para el seguimiento de posición. Es importante recalcar que el lazo de control de posición tiene como objetivo calcular el empuje necesario f_p y la orientación deseada para asegurar el seguimiento de posición adecuado.

7.1. Control de translación

La ley de control de translación propuesta esta definida con la siguiente estructura

$$f_p = r_c(\eta_d - \tilde{\eta})\mu \quad (7.1.1)$$

donde

$$r_c(\eta) = \begin{bmatrix} r_{13}(\eta) \\ r_{23}(\eta) \\ r_{33}(\eta) \end{bmatrix} \frac{1}{r_{33}(\eta)} \epsilon \mathbb{R}^3 \quad (7.1.2)$$

y μ es una señal de control auxiliar por definir. Se asume que el quadrotor no realizará maniobras acrobáticas por lo tanto, $|\phi(t)| < \frac{\pi}{2}$ y $|\theta(t)| < \frac{\pi}{2}$ para todo el tiempo $t \geq 0$. Por lo tanto, $r_{33}(\eta(t)) \neq 0$ y (7.1.2) es definida para todo el tiempo $t \geq 0$.

Dadas (6.2.12), (6.3.1) y (7.1.1) el error de posición dinámico puede expresarse de la manera

$$m\ddot{\tilde{p}} = m\ddot{p}_d + gme_z - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})\mu. \quad (7.1.3)$$

El producto de sumar y sustraer $r_c(\eta_d)\mu$ en la ecuación anterior es tal que

$$m\ddot{\tilde{p}} = m\ddot{p}_d + gme_z - r_c(\eta_d)\mu + [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})]\mu. \quad (7.1.4)$$

r_c en (7.1.2) es una función localmente Lipchitz, es decir

$$\|r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})\| \leq k\|\eta_d - \eta_d + \tilde{\eta}\| = k\|\tilde{\eta}\|. \quad (7.1.5)$$

Una estimación de la constante $k > 0$ de la ecuación anterior esta dada por [4] tal que

$$k = \max_{\forall w \in B_{rw}} \left\| \frac{\delta r_C(w)}{dw} \right\|, \quad (7.1.6)$$

con $w \in \mathbb{R}^3$ y $B_{rw} = \{w \in \mathbb{R}^3 : \|w\| \leq r_w\}$, siendo w algún vector genérico.

Se establece la siguiente ecuación para definir la señal auxiliar μ y los ángulos $\theta_d(t)$ y $\phi_d(t)$

$$r_c(\eta_d)\mu = f_i \quad (7.1.7)$$

donde

$$f_i = \hat{m}\ddot{p}_d + \hat{m}ge_z + K_{pp}\tilde{p} + K_{dp}\dot{\tilde{p}} \quad (7.1.8)$$

en la que $K_{pp} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $K_{dp} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices definidas diagonales positivas y $\hat{m} > 0$ es una estimación de la masa del quadrotor m .

En (7.1.7) se define un sistema de tres ecuaciones con cuatro variables independientes, dado un valor arbitrario de $\psi_d(t)$, las señales $\phi_d(t)$, $\theta_d(t)$ y $\mu(t)$ s están dadas por

$$\mu = f_{i3} \quad (7.1.9)$$

$$\theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\mu} [f_{i2} \sin(\psi_d) + f_{i1} \cos(\psi_d)] \right) \quad (7.1.10)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left(\frac{\cos(\theta_d)}{\mu} [f_{i1} \sin(\psi_d) + f_{i2} \cos(\psi_d)] \right) \quad (7.1.11)$$

donde f_{i1} , f_{i2} y f_{i3} son los componentes del vector f_i de (7.1.8) [4].

Además, la señal de control μ tiene una cota superior tal que

$$|\mu| = f_{i3} \leq c_1 + c_2 \left\| \frac{\tilde{z}}{\dot{\tilde{z}}} \right\| \leq c_1 + c_2 \left\| \frac{\tilde{p}}{\dot{\tilde{p}}} \right\| \quad (7.1.12)$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas, $\tilde{z} = \tilde{p}_3 = z_d - z$ es el error de posición vertical y $\dot{\tilde{z}}$ es el error de velocidad vertical.

Definiendo $\tilde{m} = m - \hat{m}$ como el parámetro de estimación de error de la masa y sustituyendo en (7.1.7) y (7.1.4), obtenemos la siguiente dinámica en lazo cerrado del error de posición

$$m\ddot{\tilde{p}} = -K_{pp}\tilde{p} - K_{dp}\dot{\tilde{p}} + [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})]\mu + \tilde{m}[\ddot{p}_d + ge_z]. \quad (7.1.13)$$

7.2. Control de orientación

El controlador f_o que se introduce en este trabajo requiere que $\eta_d = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]^T$ sea, al menos, dos veces diferenciable. La primera y la segunda derivada de ϕ_d y θ_d de (7.1.10) y (7.1.11) pueden ser resueltas analíticamente. Sin embargo el cálculo explícito de estas señales requieren medidas de $\ddot{p}$ y $\ddot{p}$ las cuales no están disponibles.

Por esta razón, una aproximación usando diferenciación numérica se obtiene para $\dot{\phi}_d$ y $\dot{\theta}_d$ como se muestra a continuación

$$\dot{\phi}_d \approx \frac{\phi_d(t - \Delta t) - \phi_d(t)}{\Delta t} \quad (7.2.1)$$

$$\dot{\theta}_d \approx \frac{\theta_d(t - \Delta t) - \theta_d(t)}{\Delta t} \quad (7.2.2)$$

donde $\Delta(t)$ es el periodo de muestreo. De forma similar $\ddot{\phi}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ se calculan. Por propósito técnico, asumimos que $\dot{\phi}_d(t)$, $\dot{\theta}_d(t)$, $\ddot{\phi}_d(t)$ y $\ddot{\theta}_d(t)$ están disponibles.

Para simplificar la formulación del controlador propuesto, la señal de error de orientación filtrada s_η es definida como

$$s_\eta = \dot{\tilde{\eta}} + \Lambda \tilde{\eta} \quad (7.2.3)$$

donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz definida positiva. Usando (6.2.13) y (7.2.3), el error dinámico de orientación en términos de la señal s_η , puede ser expresado como

$$\dot{s}_\eta = \ddot{\tilde{\eta}}_r - H_o^{-1}(\eta)[f_o - C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}] \quad (7.2.4)$$

donde

$$\dot{\tilde{\eta}}_r = \dot{\eta}_d + \Lambda \tilde{\eta}. \quad (7.2.5)$$

Ahora, consideremos el siguiente controlador

$$f_o = \hat{H}_o(\eta)\ddot{\tilde{\eta}}_r + \hat{C}_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\tilde{\eta}}_r + K_{s_\eta}s_\eta \quad (7.2.6)$$

donde $\hat{H}_o(\eta)$ y $\hat{C}_o(\eta, \dot{\eta})$ son estimaciones de las matrices $H_o(\eta)$ y $C_o(\eta, \dot{\eta})$, respectivamente y $K_{s_\eta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz diagonal definida positiva.

7.3. Parámetros de simulaciones y resultados experimentales

Con el fin de evaluar el desempeño, en la siguiente sección se muestran las propuestas de control dadas las diferentes técnicas, sus simulaciones, así como los resultados experimentales de regulación y seguimiento de trayectoria. Los parámetros utilizados para ambos casos corresponden al quadrotor QBall2; dichos parámetros se toman de las aproximaciones dadas por el manual de usuario del mismo y sus valores correspondientes se muestran en el cuadro 7.1.

Notación	Descripción	Valor	Unidades
g	Gravedad	9.8	m/s^2
$\hat{m}$	Masa	1.79	kg
l	Distancia entre el centro de masa del quadrotor y el eje de posición de las hélices	.2	m
$\hat{I}_{xx}$	Momento de inercia con respecto al eje x	.03	$kg\ m^2$
$\hat{I}_{yy}$	Momento de inercia con respecto al eje y	.03	$kg\ m^2$
$\hat{I}_{zz}$	Momento de inercia con respecto al eje z	.04	$kg\ m^2$

Cuadro 7.3.1: Parámetros del quadrotor QBall2

Los experimentos de implementación, en tiempo real se llevaron acabo en el Instituto Politécnico Nacional-CITEDI usando la plataforma experimental QBall 2 de Quanser. La plataforma se opera a través de Matlab, el toolbox de Simulink y el software Quarc, el cual es necesario para compilar y descargar el código ejecutable en el computador Gumstix inscrustado en el quadrotor.

El quadrotor esta equipado con un acelerómetro de 3 ejes, un giroscopio de 3 ejes y un sonar utilizado para estimar la velocidad angular $\omega(t)$, orientación $\eta(t)$ y la altura $z(t)$, respectivamente.

Todos los experimentos se desarrollaron utilizando una frecuencia de muestreo de $2kHz$ para los sensores de inercia y $30kHz$ para el sistema visual.

Las mediciones de la posición del quadrotor fueron adquiridas usando el sistema de cámara OptiTrack, que consta de seis cámaras sincronizadas conectadas a la estación terrestre.

7.3.1. Parámetros de simulación

El objetivo de control se basa en el seguimiento de trayectoria de las posiciones deseadas definidas por $P_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ z_d(t)]$, así como del ángulo de guiñada deseado $\psi_d(t)$, este último no define un comportamiento particular de orientación sin embargo, permite observar el rendimiento del quadrotor cuando este comando cambia su valor. La trayectoria de posición deseada en el espacio de tres dimensiones es una trayectoria helicoidal. La posición deseada es tal que

$$P_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cos(\frac{2\pi}{5}t) \\ 4 \sin(\frac{2\pi}{5}t) \\ \frac{1}{60}t \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \forall t \geq 0 \quad (7.3.1)$$

y el ángulo de guiñada deseado esta dado por

$$\psi_d(t) = \frac{1}{60}t \text{ [rad]} \quad \forall t \geq 0. \quad (7.3.2)$$

Los valores de $\theta_d(t)$ y $\phi_d(t)$ se obtienen de calcular (7.1.10) y (7.1.11), respectivamente. Las señales $\dot{\phi}_d(t)$, $\dot{\theta}_d(t)$, $\ddot{\phi}_d(t)$ y $\ddot{\theta}_d(t)$ se obtienen por diferenciación numérica, tal como se mencionó anteriormente.

La simulación tiene en cuenta algunos factores que pueden surgir en una implementación real, tales como medidas de posición y velocidad ruidosas. Este efecto se simula al añadir ruido blanco con media cero y varianza $\sigma^2 = 10^{-5}$ para cada elemento de posición $p(t)$ y media cero y varianza $\sigma^2 = 10^{-4}$ para

cada elemento de $\dot{p}(t)$. De igual forma, ruido blanco con media cero y varianza $\sigma^2 = 10^{-4}$ se añade al vector $\eta(t)$ y media cero y varianza $\sigma^2 = 10^{-4}$ al vector $\dot{\eta}(t)$.

Un filtro pasa baja de primer orden dado por

$$G(s) = \frac{20\pi}{s + 20\pi}, \quad (7.3.3)$$

se utilizó en la salida del controlador para simular la dinámica del actuador. Finalmente, una saturación no lineal también se incluyó antes de la entrada del quadrotor para simular la restricción de potencia del rotor de un empuje entre 0 y $8N$.

7.3.2. Parámetros experimentales

En la parte experimental se realizaron pruebas de regulación, así como de seguimiento de trayectoria. La prueba de regulación consistió en subir el quadrotor a la altura deseada, tal que $z_d(t) = ,9$. La señal de referencia para el experimento de seguimiento de trayectoria esta dada por una trayectoria circular de radio de ,4m, altura constante de ,9m y un ángulo de guiñada deseado cero, tal que

$$P_d(t) = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ,4 \cos(\frac{2\pi}{10}t) \\ ,4 \sin(\frac{2\pi}{10}t) \\ ,9 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \forall t \geq 0 \quad (7.3.4)$$

y

$$\psi_d(t) = 0 \text{ [rad]} \quad \forall t \geq 0.$$

Con respecto a la implementación en tiempo real, tenga en cuenta que existe una relación entre la velocidad angular del motor ω_i y el empuje u_i generado por la i -ésima hélice, es decir

$$u_i = k_\tau \omega_i^2 \quad (7.3.5)$$

donde k_τ es una constante de empuje que puede ser derminado fácilmente por una prueba de empuje estático, esta relación se utilizó para obtener el empuje deseado en cada hélice. El quadrotor dispone de un ESC («electronic speed control») para cada motor, que permite ajustar la velocidad de rotación del motor y, en consecuencia, el empuje suministrado. Además, la resistencia aerodinámica está relacionada con la velocidad angular del motor tal que

$$\tau_d = k_d k_\tau \omega^2. \quad (7.3.6)$$

Para todos los experimentos en este trabajo los valores usados son $k_\tau = 8,35 \times 10^{-8}$, $k_d = ,05$.

Capítulo 8

Control H_∞ para el quadrotor

De acuerdo al modelo del quadrotor presentado en (6.2.12) y (6.2.13) se propone un controlador óptimo utilizando el método de H_∞ de acuerdo a la teoría presentada en el capítulo 4.

$$f_i = m\ddot{p}_d + mge_z + K_{pp}\tilde{p} + K_{dp}\dot{\tilde{p}} + u_{\infty 1} \quad (8.0.1)$$

$$f_o = H_o(\eta)\ddot{\eta}_r + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + K_{s\eta}(\dot{\tilde{\eta}} + \Lambda\tilde{\eta}) + u_{\infty 2} \quad (8.0.2)$$

donde $u_{\infty 1} = B_2^T P_1 \begin{bmatrix} \tilde{p} & \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}^T$ y $u_{\infty 2} = B_2^T P_2 \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix}^T$, B_2 viene de la estructura del sistema $\dot{x} = A_x + B_1\omega + B_2u$ y P_i con $i = 1, 2$ son las ganancias determinadas por la solución de la ecuación de Riccati.

8.1. Simulación en lazo cerrado utilizando el control H_∞

Las ganancias del controlador seleccionadas son

$$K_{pp} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix}, K_{dp} = \begin{bmatrix} 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 \end{bmatrix}, K_{s\eta} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \text{ y}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} ,3 & 0 & 0 \\ 0 & ,24 & 0 \\ 0 & 0 & ,5 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la estructura de diseño del controlador antes mencionada, se propone $\gamma^2 = 0,25$, $\gamma^2 = 0,16$ para $u_{\infty 1}$ y $u_{\infty 2}$ respectivamente, la cual es una constante de ponderación.

La solución se deriva entonces por medio de la ecuación de Riccati, por la cual determinamos P con ayuda de Matlab, dado el siguiente código de simulación.

```
[P]=care(A,B,Q);
```

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,2791 & 0 & 0 & 0,1111 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2791 & 0 & 0 & 0,1111 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2395 & 0 & 0 & 0,1561 \\ 0,1111 & 0 & 0 & 0,2136 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1111 & 0 & 0 & 0,2136 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1561 & 0 & 0 & 0,2674 \end{bmatrix} \quad (8.1.1)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,3290 & 0 & 0 & 0,0943 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3370 & 0 & 0 & 0,0943 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1928 & 0 & 0 & 0,1203 \\ 0,0943 & 0 & 0 & 0,1971 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0943 & 0 & 0 & 0,1991 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1203 & 0 & 0 & 0,1948 \end{bmatrix} \quad (8.1.2)$$

donde $B = \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T$, $Q = C_1^T C_1$ y A representa la planta en variables de estado.

Con el cual, finalmente se obtienen las ganancias del controlador dado por (4.5.10)

$$u_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -0,1111 & 0 & 0 & -0,2136 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1111 & 0 & 0 & -0,2136 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1561 & 0 & 0 & -0,2674 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} & \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}^T \quad (8.1.3)$$

$$u_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -0,0943 & 0 & 0 & -0,1971 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0943 & 0 & 0 & -0,1991 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1203 & 0 & 0 & -0,1948 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix}^T \quad (8.1.4)$$

Como se mencionó anteriormente la trayectoria de posición deseada en el espacio de tres dimensiones es una trayectoria helicoidal, la Figura 8.1.1 muestra la trayectoria deseada ($p_d(t)$) así como la trayectoria real($p(t)$) dada por la simulación.

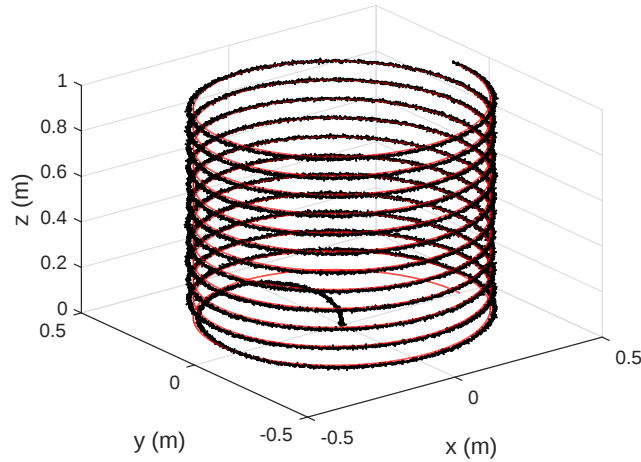


Figura 8.1.1: Trayectoria helicoidal simulación H_∞ (color negro), trayectoria deseada (color rojo).

Podemos observar un poco de ruido en la trayectoria esto se debe al ruido blanco añadido en la

simulación así como las diversas incertidumbres que genera sin embargo, hace el seguimiento de manera satisfactoria.

De la Figura 8.1.2 a la Figura 8.1.7 se muestran los resultados de la simulación, donde se pueden apreciar los valores deseados contra los medidos tanto de posición ($p_d(t)$, $p(t)$) como orientación ($\eta_d(t)$, $\eta(t)$). En cada uno de los casos, los valores deseados como los reales son similares, lo que indica un buen rendimiento de seguimiento del controlador. Podemos observar en la Figura 8.1.5 que la posición ϕ deseada resulta una señal ruidosa desde (7.1.11).

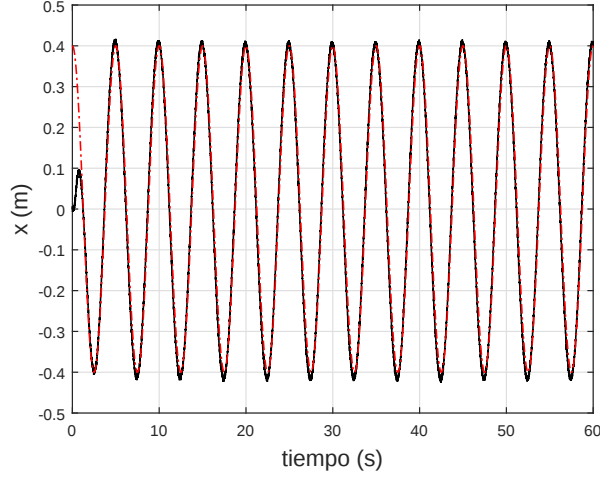


Figura 8.1.2: Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en x deseada (color rojo).

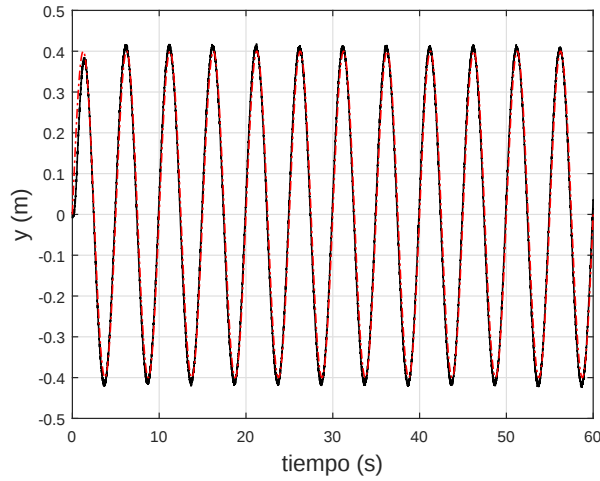


Figura 8.1.3: Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en y deseada (color rojo).

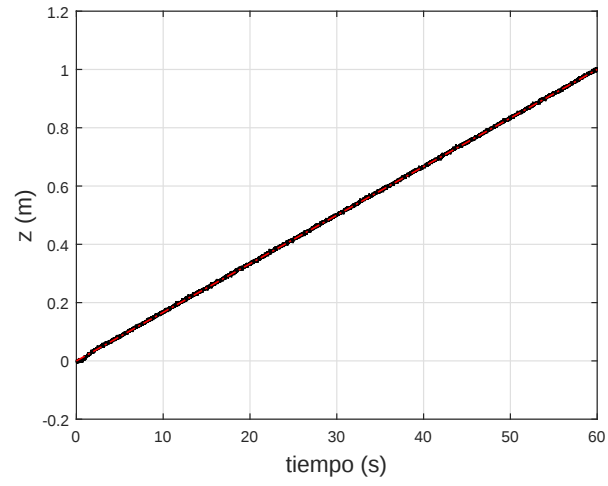


Figura 8.1.4: Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en z deseada (color rojo).

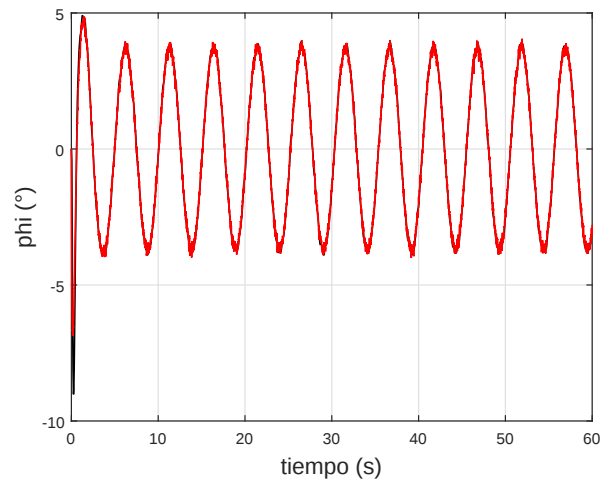


Figura 8.1.5: Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).

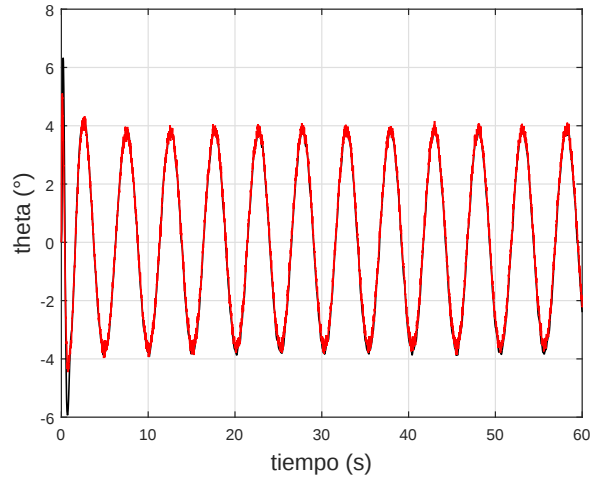


Figura 8.1.6: Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en θ deseada (color rojo).

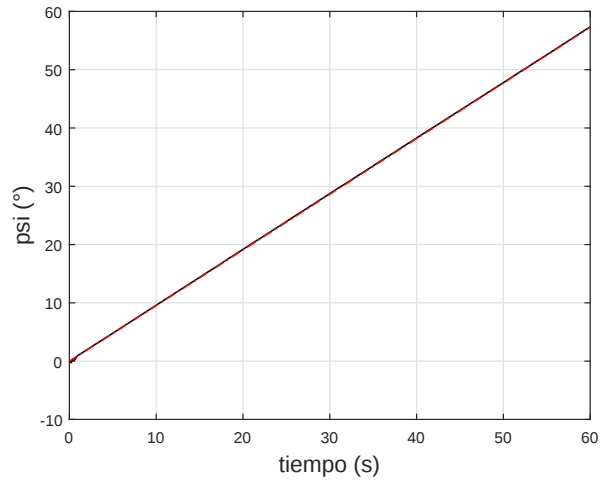


Figura 8.1.7: Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).

Los errores de posición y orientación correspondientes se muestran de la Figura 8.1.8 a la Figura 8.1.13. Aunque se añade ruido a las mediciones de posición y orientación, la magnitud de la señal de error de posición permanece acotada por $\pm 0,03\text{m}$ y el error de orientación por $\pm 0,75^\circ$ es decir aproximadamente $\pm 0,01\text{rad}$.

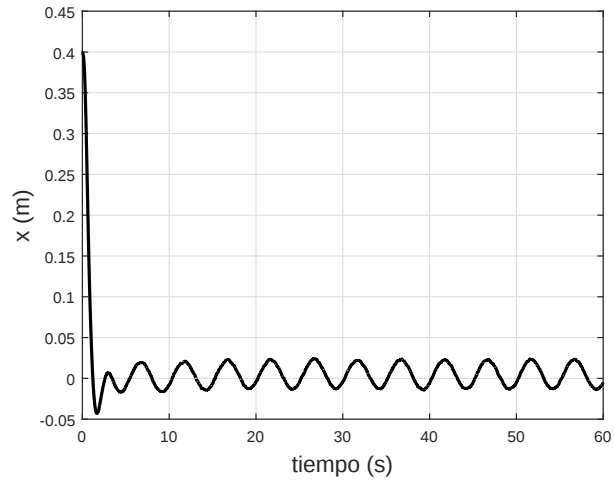


Figura 8.1.8: Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria H_{∞} .

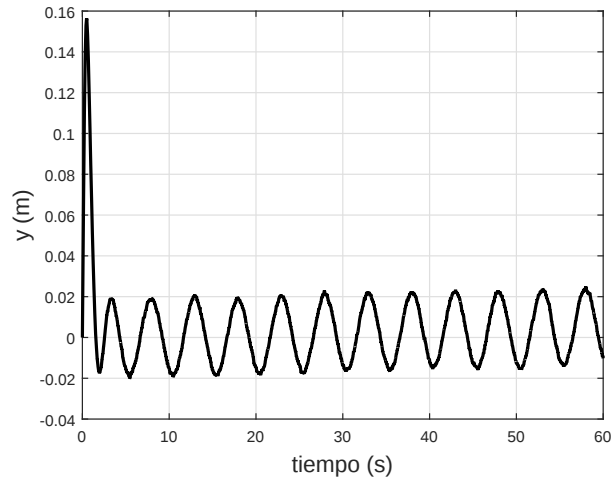


Figura 8.1.9: Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria H_{∞} .

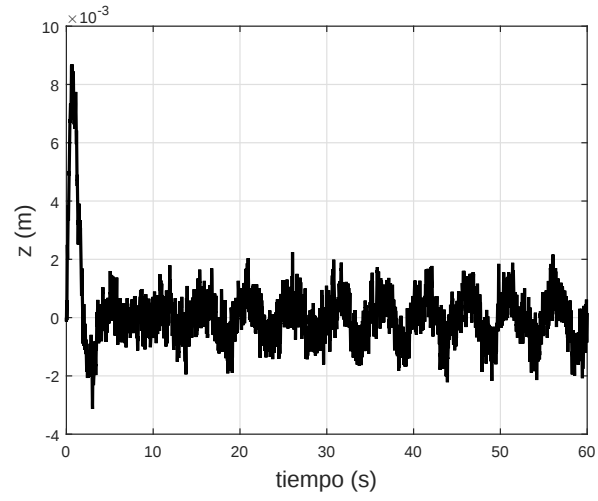


Figura 8.1.10: Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

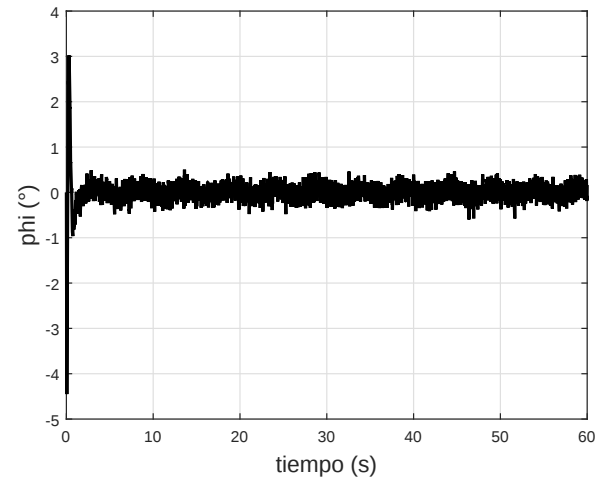


Figura 8.1.11: Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

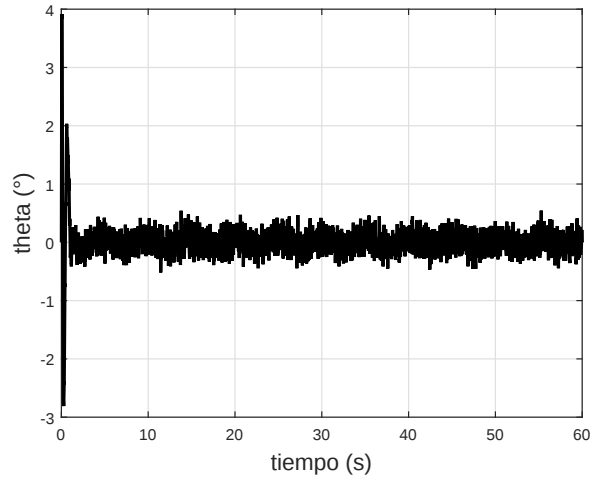


Figura 8.1.12: Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

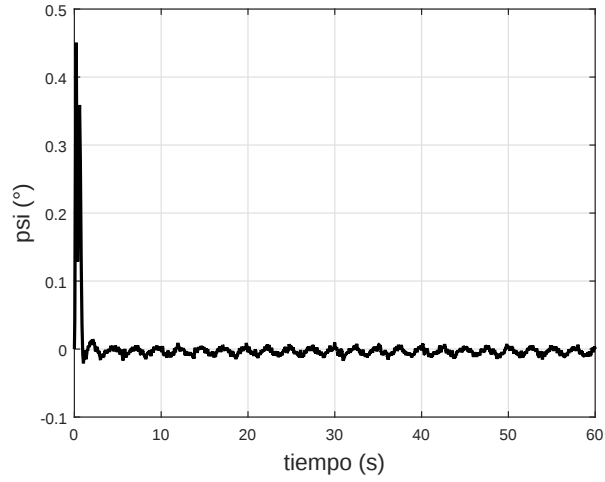


Figura 8.1.13: Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 8.1.14 a la Figura 8.1.17. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 5.5 N. El empuje total se muestra en la Figura 8.1.18 con un valor aproximado de 17.6 N. Vale la pena notar que el ruido presente en las mediciones de posición y orientación causa un contenido de alta frecuencia en la entrada de control $u(t)$.

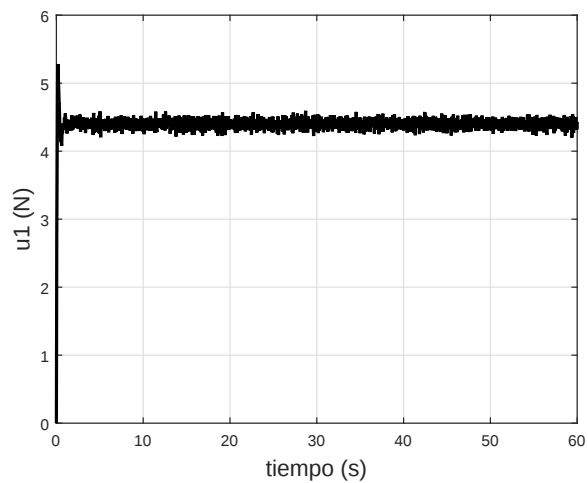


Figura 8.1.14: Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

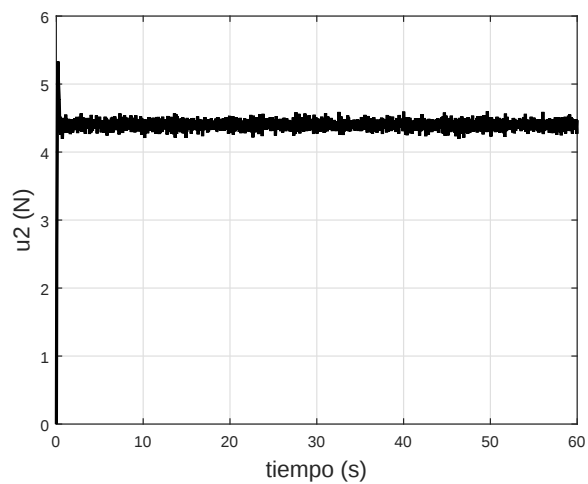


Figura 8.1.15: Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

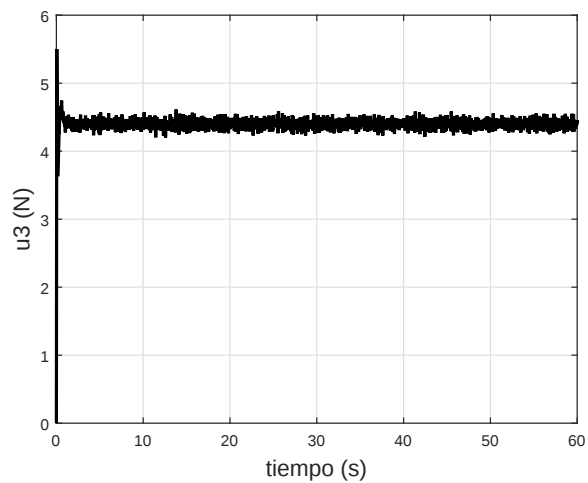


Figura 8.1.16: Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

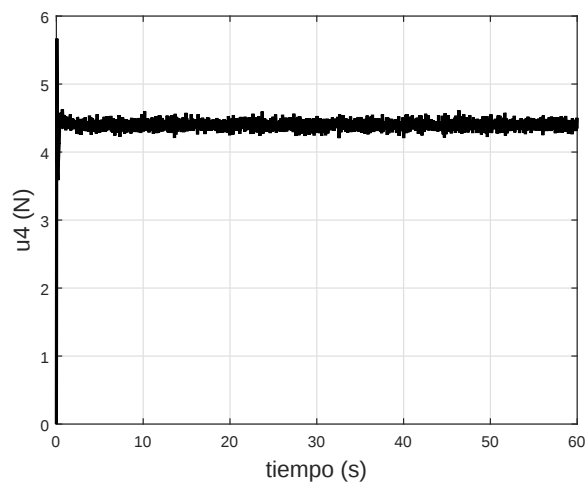


Figura 8.1.17: Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

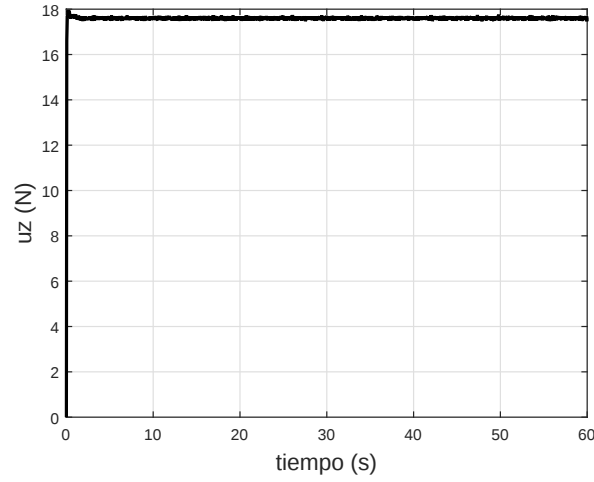


Figura 8.1.18: Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria H_∞ .

8.2. Experimentos con el controlador H_∞

Las ganancias del controlador seleccionadas son

$$K_{pp} = \begin{bmatrix} 11,5 & 0 & 0 \\ 0 & 11,5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, K_{dp} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 4,7 \end{bmatrix}, K_{s\eta} = \begin{bmatrix} ,4 & 0 & 0 \\ 0 & ,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 4,7 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo a la estructura de diseño del controlador antes mencionada, se propone $\gamma^2 = 0,5^2$, $\gamma^2 = 0,3^2$ para $u_{\infty 1}$ y $u_{\infty 2}$ respectivamente, la cual es una constante de ponderación.

La solución se deriva entonces por medio de la ecuación de Riccati, por la cual determinamos P con ayuda de Matlab, dado el siguiente código de simulación.

[P]=care(A,B,Q);

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2,091 & 0 & 0 & 0,0428 & 0 & 0 \\ 0 & 2,091 & 0 & 0 & 0,0428 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4101 & 0 & 0 & 0,0446 \\ 0,0428 & 0 & 0 & 0,1669 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0428 & 0 & 0 & 0,1669 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0446 & 0 & 0 & 0,1053 \end{bmatrix} \quad (8.2.1)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,0891 & 0 & 0 & 0,0845 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0891 & 0 & 0 & 0,0845 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1294 & 0 & 0 & 0,0631 \\ 0,0845 & 0 & 0 & 0,1031 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0845 & 0 & 0 & 0,1031 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0631 & 0 & 0 & 0,0956 \end{bmatrix} \quad (8.2.2)$$

donde $B = \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T$, $Q = C_1^T C_1$ y A representa la planta en variables de estado.

Con el cual, finalmente se obtienen las ganancias del controlador dado por (4.5.10)

Donde las ganancias calculadas de los controladores u_∞ son tales que

$$u_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -0,0428 & 0 & 0 & -0,1669 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0428 & 0 & 0 & -0,1669 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0446 & 0 & 0 & -0,1053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} & \dot{\tilde{p}} \end{bmatrix}^T \quad (8.2.3)$$

$$u_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -0,0845 & 0 & 0 & -0,1031 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0845 & 0 & 0 & -0,1031 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0631 & 0 & 0 & -0,0956 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix}^T \quad (8.2.4)$$

8.2.1. Control de regulación

Para la prueba de regulación se pretende alcanzar una posición deseada tal que $z_d(t) = ,9m$, la Figura 8.2.1 muestra la medición de la posición ($z(t)$) en comparación a la posición deseada ($z_d(t)$).

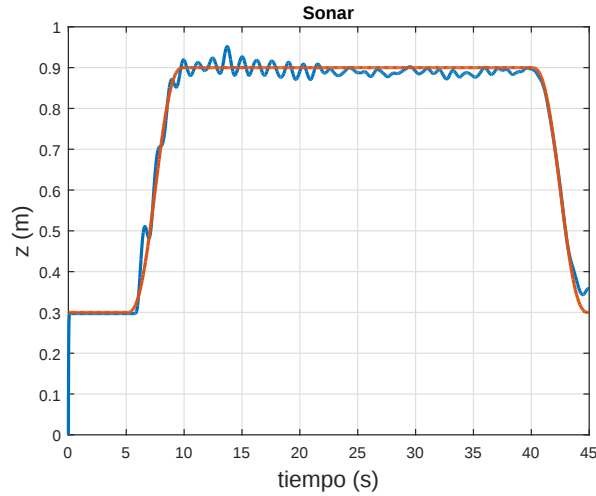


Figura 8.2.1: Posición en z experimental control de regulación H_∞ (azul), posición en z deseada (rojo).

El error de posición se muestra en la Figura 8.2.2 donde podemos observar que permanece acotado de $[-1, ,05]m$.

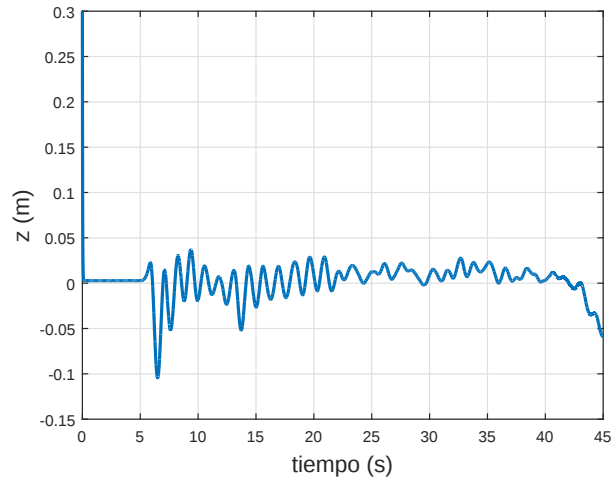


Figura 8.2.2: Error de posición en z experimental control de regulación H_∞ .

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 8.2.3 a la Figura 8.2.6. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 5.5 N.

En la Figura 8.2.7 podemos observar la medición del empuje total generado que corresponde a un valor alrededor de 18N.

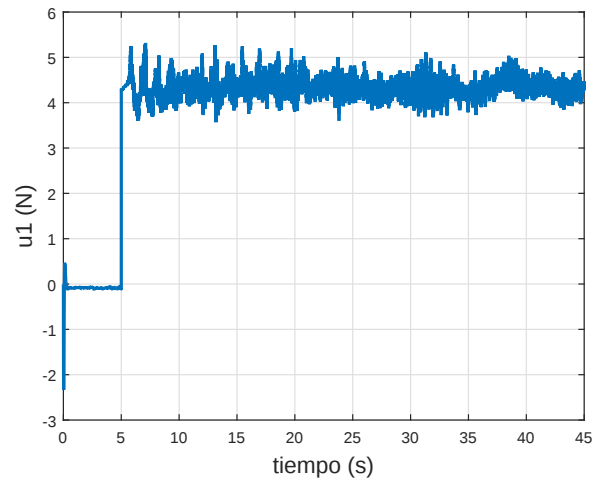


Figura 8.2.3: Señal de control 1 experimental control de regulación H_∞ .

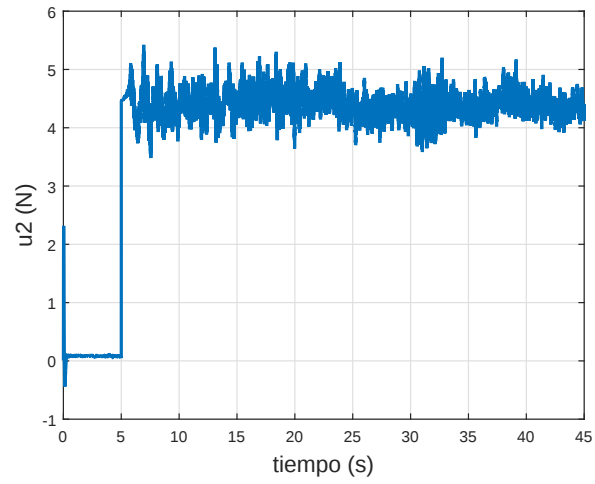


Figura 8.2.4: Señal de control 2 experimental control de regulación H_∞ .

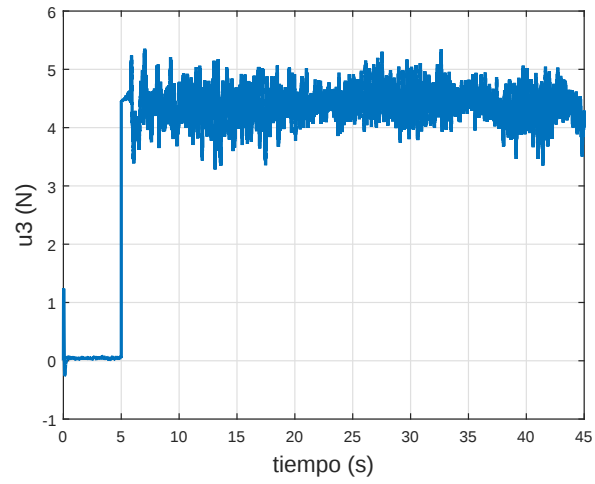


Figura 8.2.5: Señal de control 3 experimental control de regulación H_∞ .

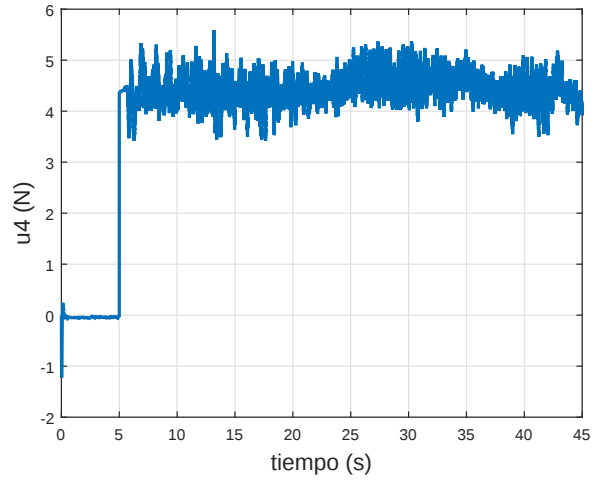


Figura 8.2.6: Señal de control 4 experimental control de regulación H_∞ .

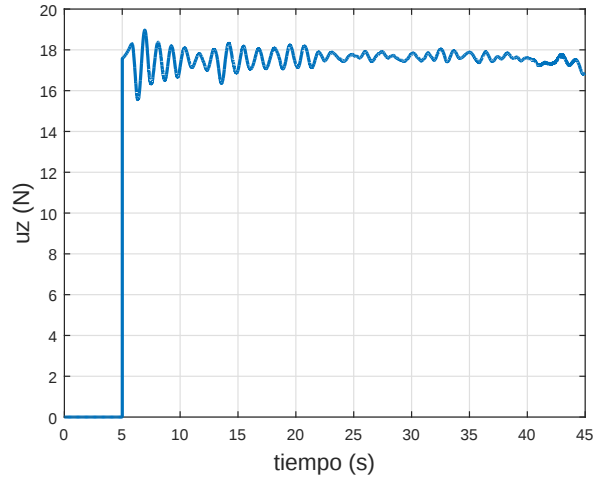


Figura 8.2.7: Empuje total experimental control de regulación H_∞ .

8.2.2. Control de seguimiento de trayectoria

El resultado experimental se presenta en la Figura 8.2.8 donde la línea roja corresponde a la trayectoria deseada $p_d(t)$ expresada en (7.3.4). La línea azul corresponde a la trayectoria real $p(t)$ del vehículo de $0s \leq t \leq 45s$.

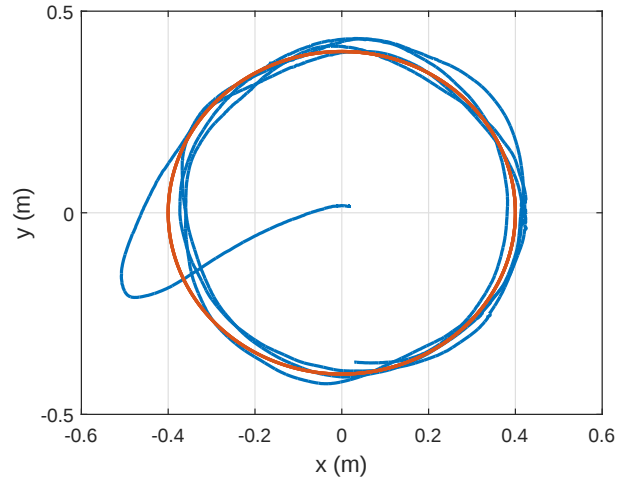


Figura 8.2.8: Trayectoria experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), trayectoria deseada (rojo).

Cabe destacar que la trayectoria resultante del quadrotor permanece cerca de la trayectoria deseada.

De la Figura 8.2.9 a la Figura 8.2.14 se muestra la evolución temporal de las señales de posición así como las de orientación.

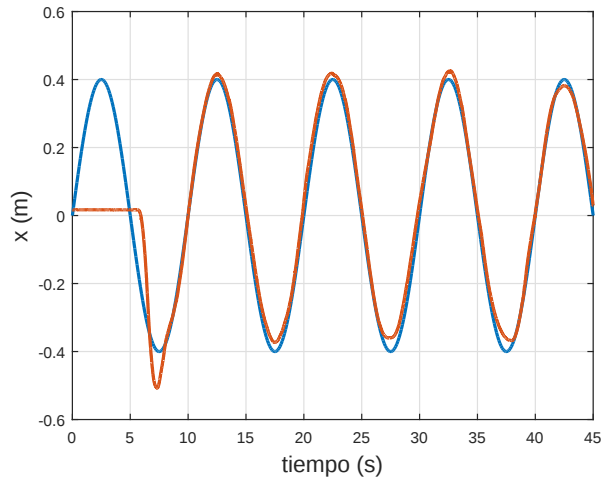


Figura 8.2.9: Posición en x experimental por seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en x deseada (rojo).

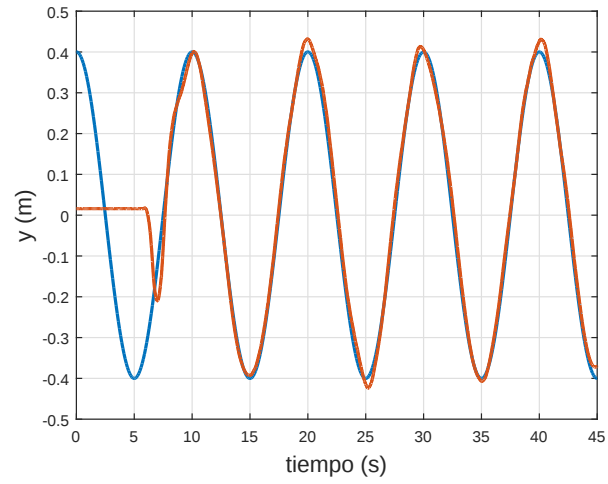


Figura 8.2.10: Posición en y experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en y deseada (rojo).

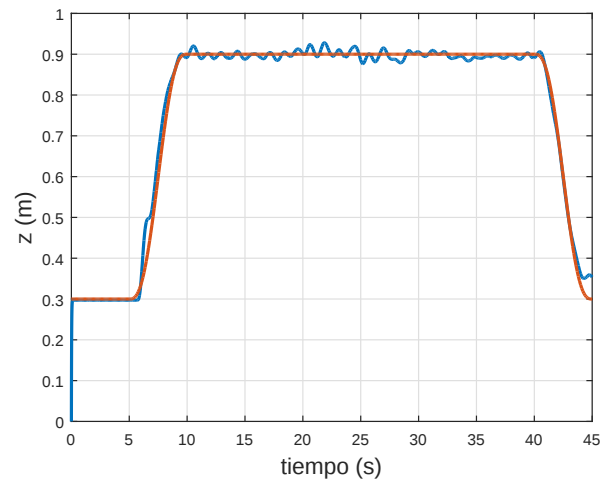


Figura 8.2.11: Posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en z deseada (rojo).

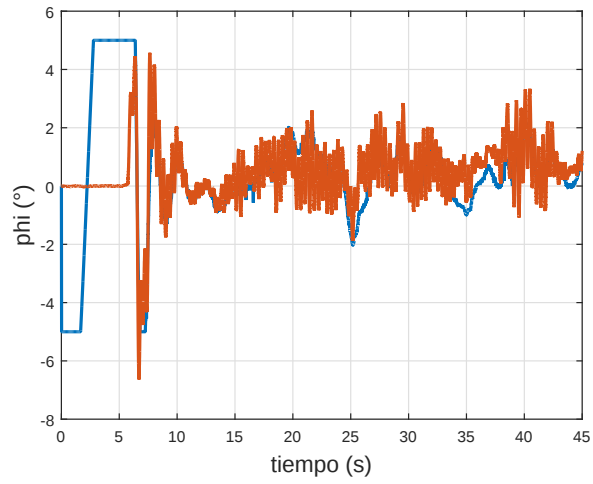


Figura 8.2.12: Posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en ϕ deseada (rojo).

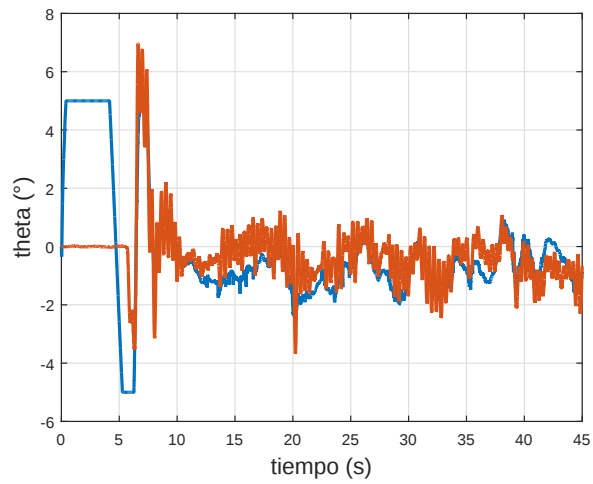


Figura 8.2.13: Posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en θ deseada (rojo).

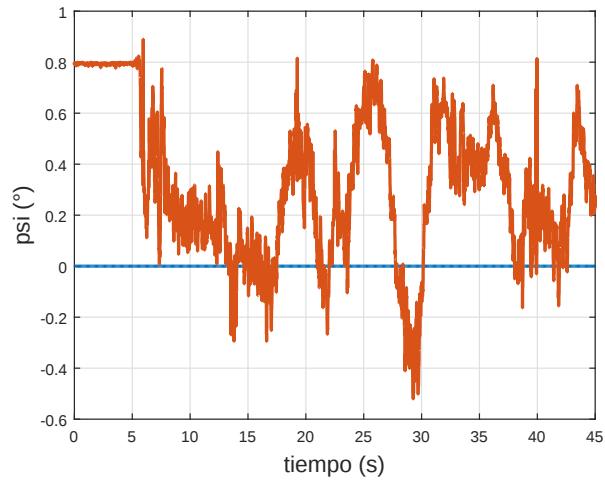


Figura 8.2.14: Posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ (azul), posición en ψ deseada (rojo).

Los errores de posición y orientación correspondientes se representan de la Figura 8.2.15 a la Figura 8.2.20. Podemos observar que los errores de posición después de 10s permanecen acotados y oscilan entre $\pm 0.05m$ aproximadamente. Los errores de orientación están acotados entre $\pm 2.5^\circ$ es decir $\pm 0.04\text{rad}$ aproximadamente.

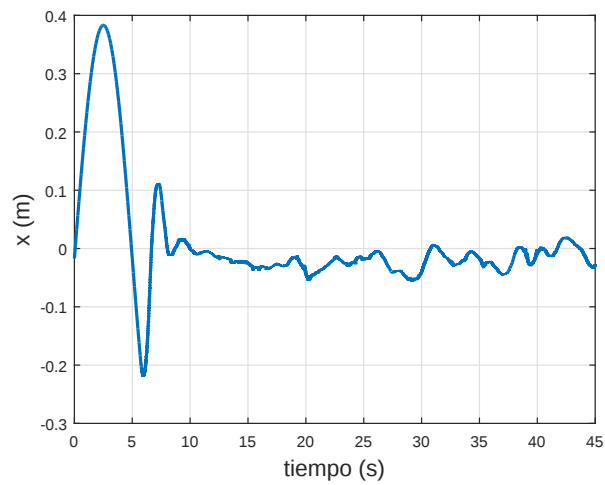


Figura 8.2.15: Error de posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

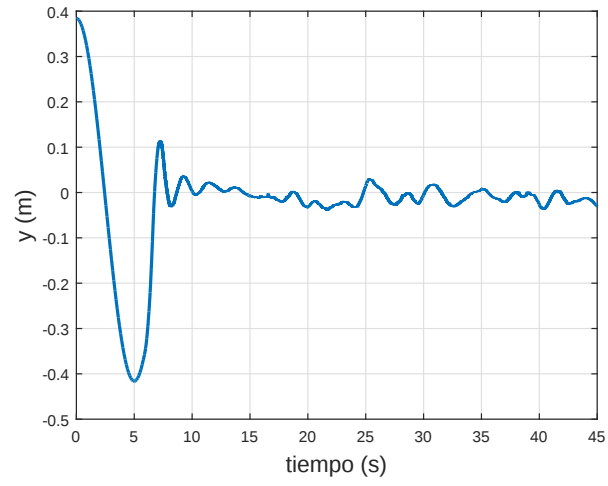


Figura 8.2.16: Error de posición de y experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

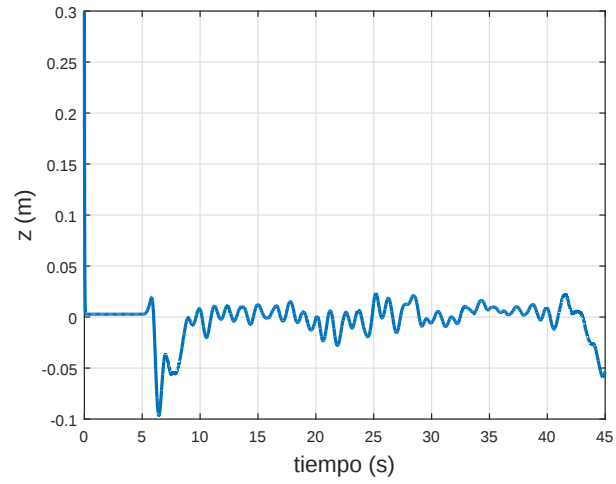


Figura 8.2.17: Error de posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

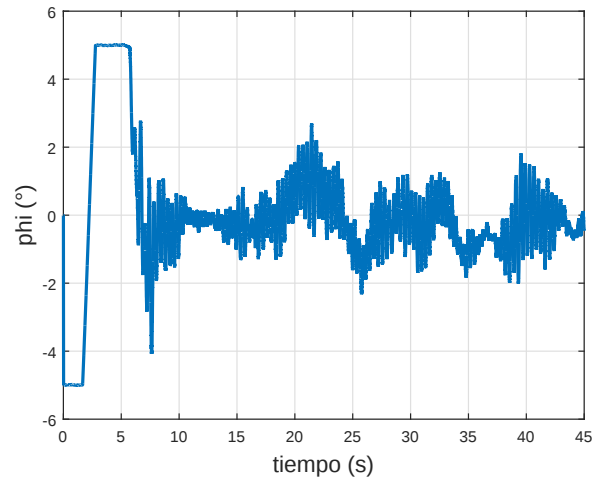


Figura 8.2.18: Error de posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

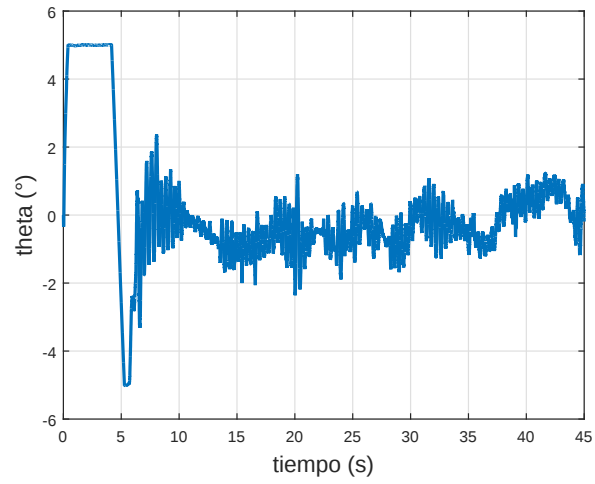


Figura 8.2.19: Error de posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

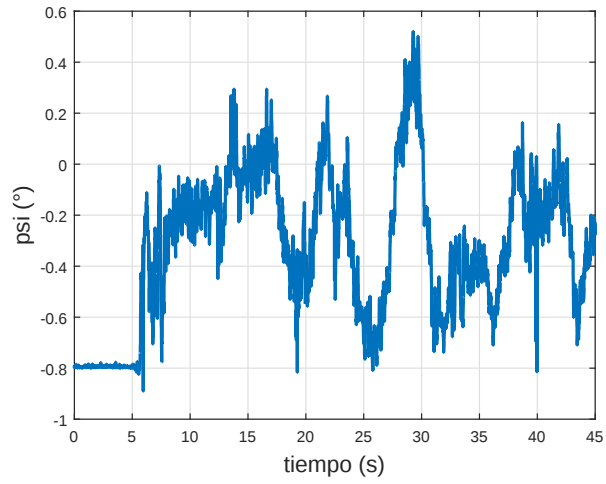


Figura 8.2.20: Error de posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

A continuación, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 8.2.21 a la Figura 8.2.24. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 6 N. El empuje total se muestra en la Figura 8.2.25 con un valor aproximado entre 17N y 18N.

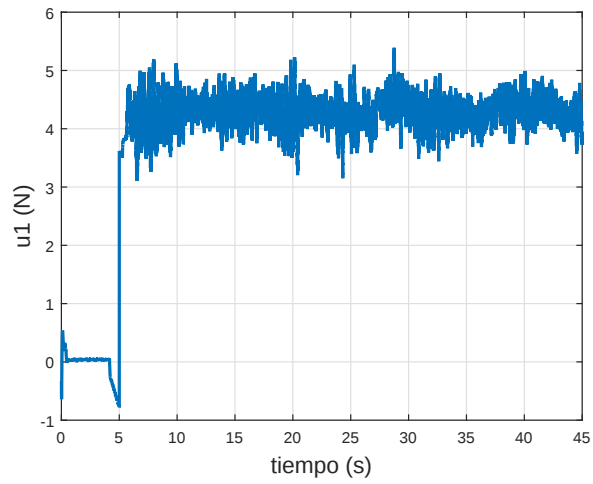


Figura 8.2.21: Señal de control 1 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

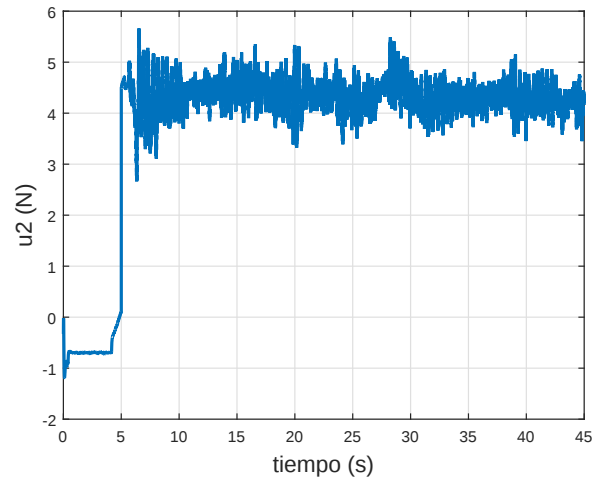


Figura 8.2.22: Señal de control 2 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

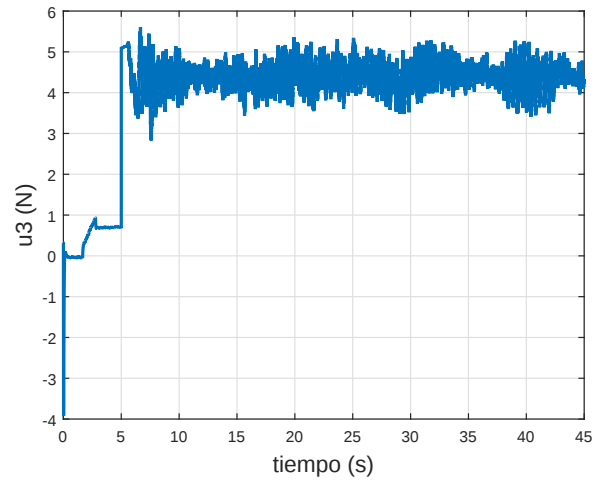


Figura 8.2.23: Señal de control 3 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

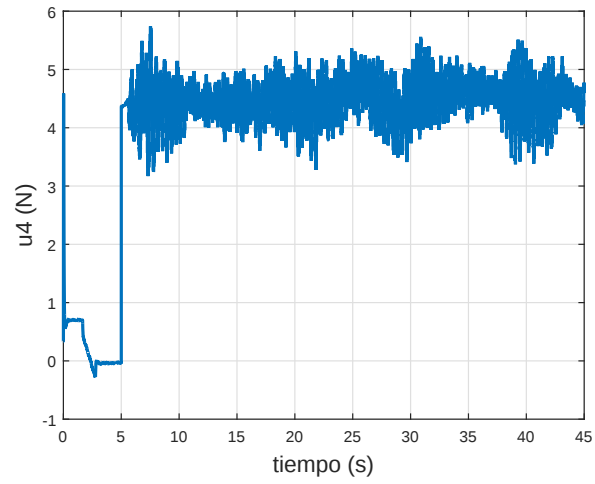


Figura 8.2.24: Señal de control 4 experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

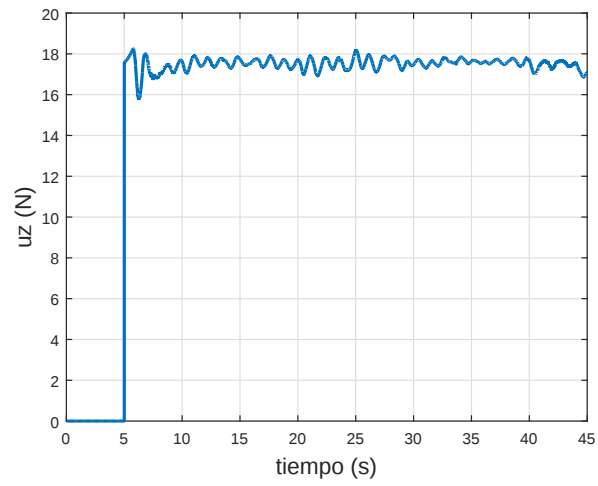


Figura 8.2.25: Empuje total experimental por control de seguimiento de trayectoria H_∞ .

Capítulo 9

Control por modos deslizantes para el quadrotor

De igual forma, considerando el modelo del quadrotor presentado en (6.2.12) y (6.2.13) se propone un controlador óptimo utilizando el método de modos deslizantes de acuerdo a la teoría presentada en el capítulo 5.

$$f_i = m\ddot{p}_d + mge_z + u_1 \quad (9.0.1)$$

donde se propone u_1 tal que $u_1 = K_2 \text{sign}(s_1) + K_3 s_1$ y la superficie deslizante $s_1 = \dot{\tilde{p}} + K_1 \tilde{p}$

$$f_o = H_o(\eta)\ddot{\eta}_r + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + u_2 \quad (9.0.2)$$

donde $u_2 = K_5 \text{sign}(s_2) + K_6 s_2$ y la superficie deslizante $s_2 = \dot{\tilde{\eta}} + K_4 \tilde{\eta}$.

9.1. Prueba de estabilidad control traslacional

Para el desarrollo de la prueba utilizaremos las propiedades de (7.1.5) y (7.1.12). Tenemos que $s_1 = \dot{\tilde{p}} + K_1 \tilde{p}$ que representa la superficie deslizante, por lo que se busca que $s_1 \dot{s}_1 < 0$ para lograr eso proponemos el control

$$f_i = m\ddot{p}_d + mge_z + mK_2 \text{sign}(s_1) + mK_3 s_1 + mK_1 \dot{\tilde{p}}. \quad (9.1.1)$$

Tenemos la dinámica en x, y, z dada por (7.1.4) donde $r_c(\eta_d)\mu = fi$ por lo tanto se sustituye f_i en (7.1.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{p}} &= \ddot{p}_d + ge_z - \frac{f_i}{m} + [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})] \frac{\mu}{m} \\ \ddot{\tilde{p}} &= -K_2 \text{sign}(s_1) - K_3 s_1 - K_1 \dot{\tilde{p}} + [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})] \frac{\mu}{m} \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

la cual es la dinámica en lazo cerrado, ahora buscamos que se cumpla la condición de alcanzabilidad $s_1 \dot{s}_1 < 0$.

$$\dot{s}_1 = \ddot{\tilde{p}} + K_1 \dot{\tilde{p}} = -K_2 \text{sign}(s_1) - K_3 s_1 + [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})] \frac{\mu}{m} \quad (9.1.3)$$

utilizando las propiedades anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} [r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})] \frac{\mu}{m} &\leq \|r_c(\eta_d) - r_c(\eta_d - \tilde{\eta})\| \frac{|\mu|}{m} \\ &\leq \frac{k}{m} \|\tilde{\eta}\| \left[c_1 + c_2 \left\| \frac{\tilde{p}}{\dot{\tilde{p}}} \right\| \right] \\ &\leq c_3 \|\tilde{\eta}\| \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

donde $c_3 \geq \frac{k}{m} \left[c_1 + c_2 \left\| \frac{\tilde{p}}{\dot{\tilde{p}}} \right\| \right]$.

Por lo tanto

$$\dot{s}_1 \leq -\lambda_{\min} K_2 \text{sign}(s_1) - \lambda_{\min} K_3 s_1 + c_3 \|\tilde{\eta}\| \quad (9.1.5)$$

$$s_1 \dot{s}_1 \leq -\lambda_{\min} K_2 \|s_1\| - \lambda_{\min} K_3 \|s_1\|^2 + c_3 \|\tilde{\eta}\| \|s_1\| \quad (9.1.6)$$

por lo tanto $\lambda_{\min} K_2 \geq c_3 \|\tilde{\eta}\|$ para garantizar que las trayectorias convergan a s_1 .

9.1.1. Análisis de tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante

Proponemos $V(s_1) = s_1^2$ por lo tanto $\dot{V}(s_1) = 2s_1 \dot{s}_1$

$$\dot{V}(s_1) \leq -2(\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|) \|s_1\| - 2\lambda_{\min} K_3 \|s_1\|^2 \leq -2(\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|) \|s_1\| \quad (9.1.7)$$

$$\dot{V}(s_1) \leq -2(\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|) \sqrt{V(s_1)}. \quad (9.1.8)$$

Con el fin de obtener el tiempo de convergencia

$$\frac{dv}{dt} \leq -2(\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|) \sqrt{V} \quad (9.1.9)$$

por lo que $\frac{dv}{-2(\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|) \sqrt{V}} \leq dt$ integrando ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\lambda_{\min} K_2 - c_3 \|\tilde{\eta}\|}.$$

Podemos ver que el tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante disminuye al aumentar la ganancia $\lambda_{\min} K_2$.

Una vez que las trayectorias están en la superficie deslizante $s_1 = \dot{\tilde{p}} + K_1 \tilde{p} = 0$ tenemos $\dot{\tilde{p}} = -K_1 \tilde{p}$ por lo que las trayectorias se desvanecen de manera asintótica hacia el punto de equilibrio que es el origen.

9.2. Prueba de estabilidad control de orientación

Tenemos que $s_2 = \dot{\tilde{\eta}} + K_4 \tilde{\eta}$ que representa la superficie deslizante, por lo que se busca que $s_2 \dot{s}_2 < 0$ para lograr eso proponemos el control

$$f_o = H_o(\eta)\ddot{\eta}_r + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + K_5 \text{sign}(s_2) + K_6 s_2 + H_o(\eta)K_4\dot{\eta} \quad (9.2.1)$$

sustituyendo la expresi3n anterior en (9.0.2) tenemos que

$$\begin{aligned} H_o(\eta)\ddot{\eta} &= -K_5 \text{sign}(s_2) - K_6 s_2 - H_o(\eta)K_4\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} &= H_o(\eta)^{-1}(-K_5 \text{sign}(s_2) - K_6 s_2 - H_o(\eta)K_4\dot{\eta}) \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

dada la propiedad $H_o(\eta)^{-1}H_o(\eta) = I$

$$\ddot{\eta} = H_o(\eta)^{-1}(-K_5 \text{sign}(s_2) - K_6 s_2) - K_4\dot{\eta} \quad (9.2.3)$$

la cual es la din1mica en lazo cerrado, ahora buscamos que la condici3n de alcanzabilidad $s_2\dot{s}_2 < 0$ se cumpla.

$$\dot{s}_2 = \ddot{\eta} + K_4\dot{\eta} = H_o(\eta)^{-1}(-K_5 \text{sign}(s_2) - K_6 s_2) \quad (9.2.4)$$

Por lo tanto

$$s_2\dot{s}_2 \leq -\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\| - \lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_6\}\|s_2\|^2. \quad (9.2.5)$$

9.2.1. An1lisis de tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante

Proponemos $V(s_2) = s_2^2$ por lo tanto $\dot{V}(s_2) = 2s_2\dot{s}_2$

$$\begin{aligned} \dot{V}(s_2) &\leq -2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\| - 2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_6\}\|s_2\|^2 \\ &\leq -2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\| \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

$$\dot{V}(s_1) \leq -2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\|\sqrt{V(s_1)}. \quad (9.2.7)$$

Con el fin de obtener el tiempo de convergencia

$$\frac{dv}{dt} \leq -2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\|\sqrt{V} \quad (9.2.8)$$

por lo que $\frac{dv}{(-2\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\|)\sqrt{V}} \leq dt$ integrando ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\lambda_{\min}\{H_o(\eta)^{-1}\}\lambda_{\min}\{K_5\}\|s_2\|}.$$

Podemos ver que el tiempo de convergencia hacia la superficie deslizante disminuye al aumentar la ganancia $\lambda_{\min}K_5$.

Una vez que las trayectorias estan en la superficie deslizante $s_2 = \dot{\eta} + K_4\tilde{\eta} = 0$ tenemos $\dot{\eta} = -K_4\tilde{\eta}$ por lo que las trayectorias se desvanecen de manera asint3tica hacia el punto de equilibrio que es el origen.

9.3. Simulación en lazo cerrado utilizando el control por modos deslizantes

Las ganancias del controlador seleccionadas son

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} ,3 & 0 & 0 \\ 0 & ,3 & 0 \\ 0 & 0 & ,1 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} ,001 & 0 & 0 \\ 0 & ,001 & 0 \\ 0 & 0 & ,002 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, K_5 = \begin{bmatrix} ,01 & 0 & 0 \\ 0 & ,01 & 0 \\ 0 & 0 & ,01 \end{bmatrix} \text{ y } K_6 = \begin{bmatrix} ,001 & 0 & 0 \\ 0 & ,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Según las condiciones deseadas dadas por (7.3.1) y (7.3.2) podemos observar la trayectoria deseada ($p_d(t)$) así como la medición de la trayectoria resultante($p(t)$) de la simulación en la Figura 9.3.1.

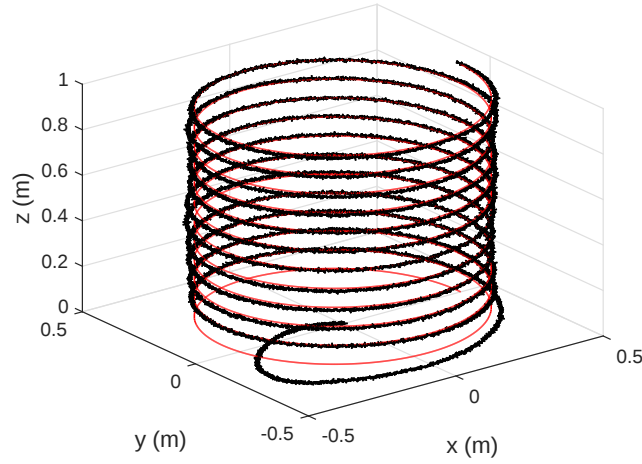


Figura 9.3.1: Trayectoria helicoidal simulación SMC (color negro), trayectoria deseada (color rojo).

Como primera impresión podemos notar que tarda más en seguir la trayectoria deseada, a diferencia del controlador por H_∞ sin embargo, al alcanzarla se mantiene en la misma.

De la Figura 9.3.2 a la Figura 9.3.7 se muestran los resultados de la simulación, donde se pueden apreciar los valores deseados contra los medidos tanto de posición($p_d(t)$, $p(t)$) como orientación($\eta_d(t)$, $\eta(t)$). En cada uno de los casos, los valores deseados como los reales son similares, lo que indica un buen rendimiento de seguimiento del controlador. En esta perspectiva es más sencillo observar el tiempo de diferencia en que convergen cada uno de los controladores.

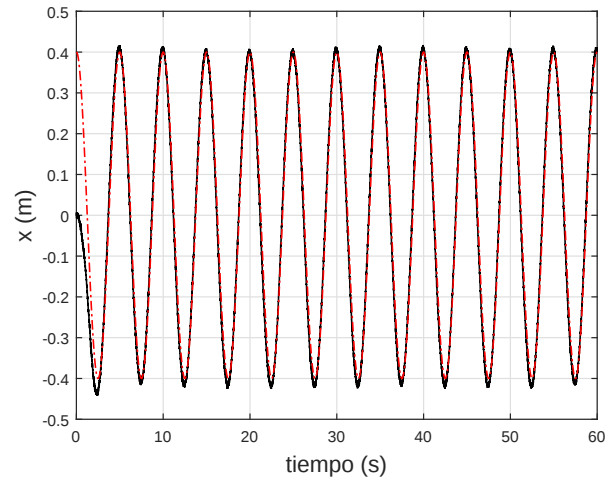


Figura 9.3.2: Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria SMC(color negro), posición en x deseada (color rojo).

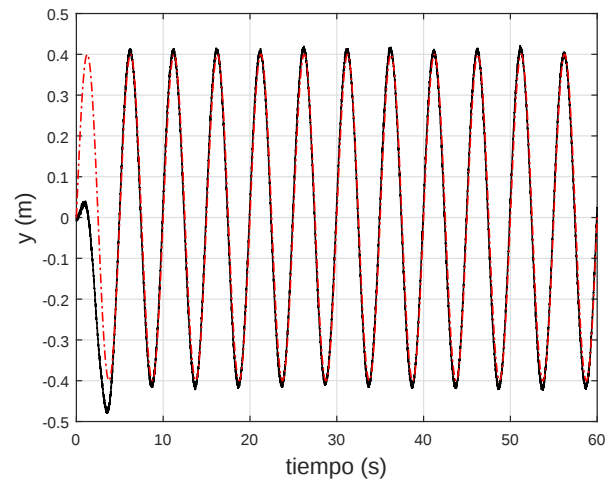


Figura 9.3.3: Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en y deseada (color rojo).

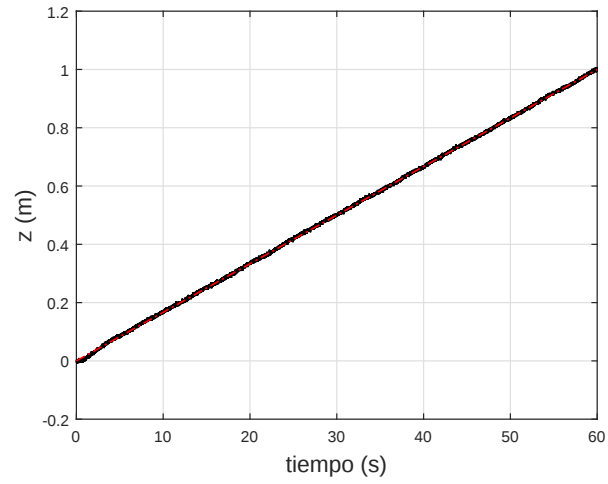


Figura 9.3.4: Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en z deseada (color rojo).

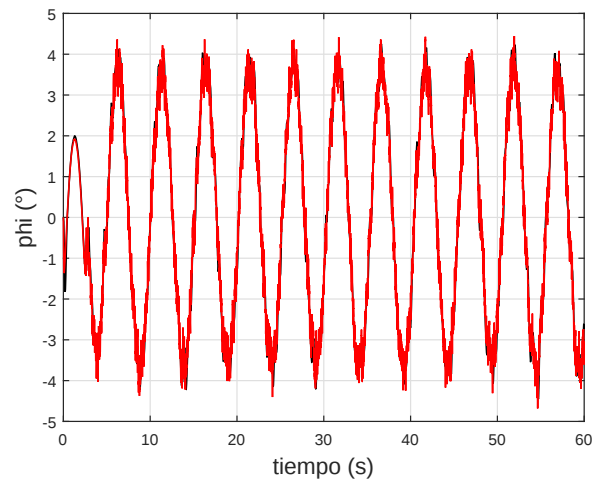


Figura 9.3.5: Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).

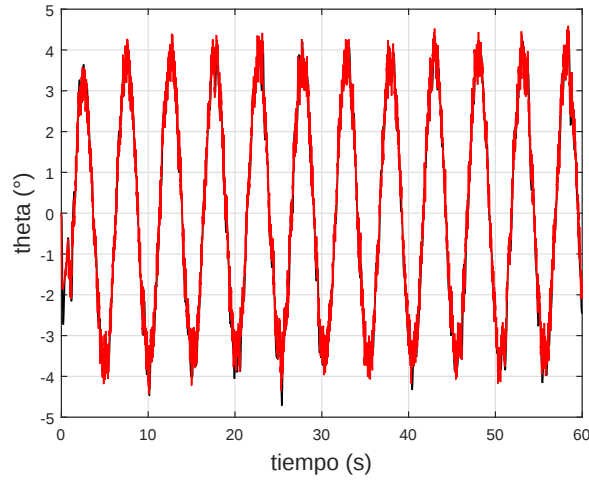


Figura 9.3.6: Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en θ deseada (color rojo).

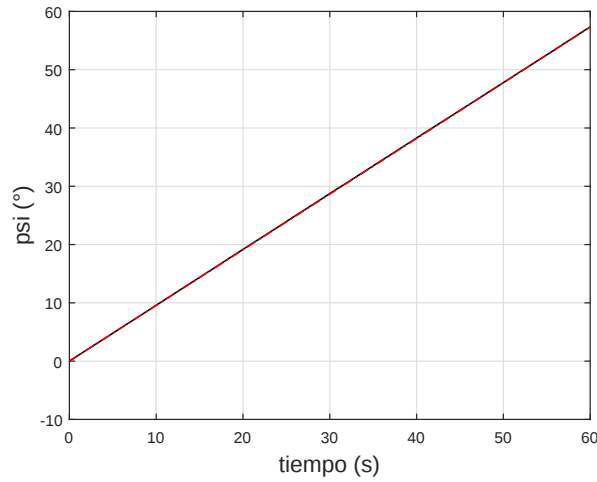


Figura 9.3.7: Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria SMC (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).

Los errores de posición y orientación correspondientes se representan de la Figura 9.3.8 a la Figura 9.3.13. Aunque como sabemos se añadió ruido a las mediciones de posición y orientación, la magnitud de la señal de error de posición permanece acotada por $\pm .03$ m y el error de orientación por $\pm 1.5^\circ$ es decir aproximadamente $\pm .026$ rad, el rango de error del controlador por modos deslizantes en la parte de orientación a diferencia del de H_∞ es un poco más amplio sin embargo, su rendimiento es aceptable.

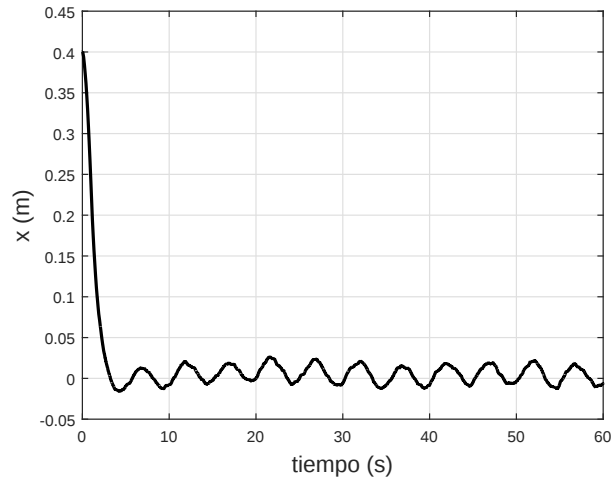


Figura 9.3.8: Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

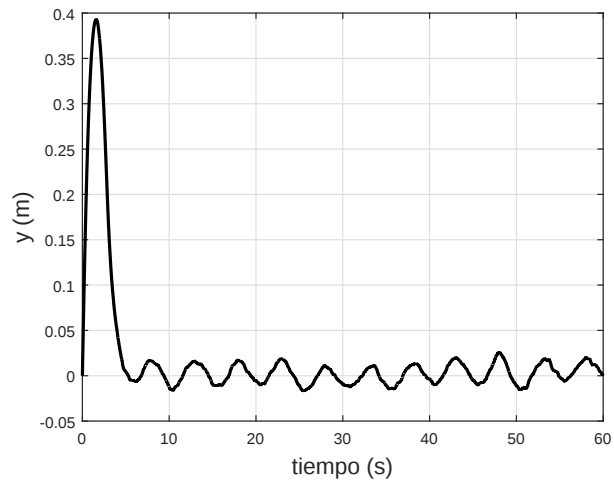


Figura 9.3.9: Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

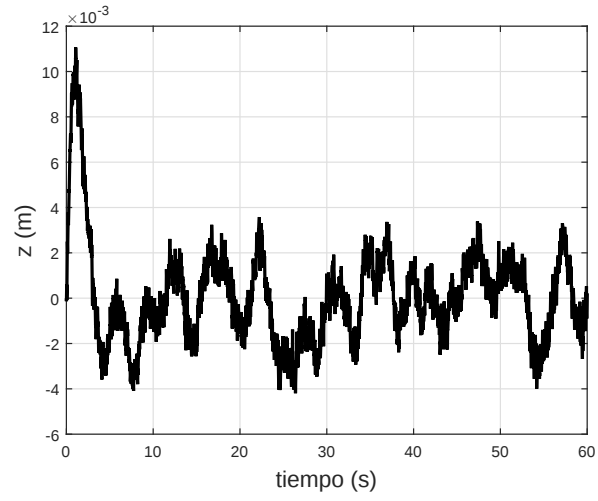


Figura 9.3.10: Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

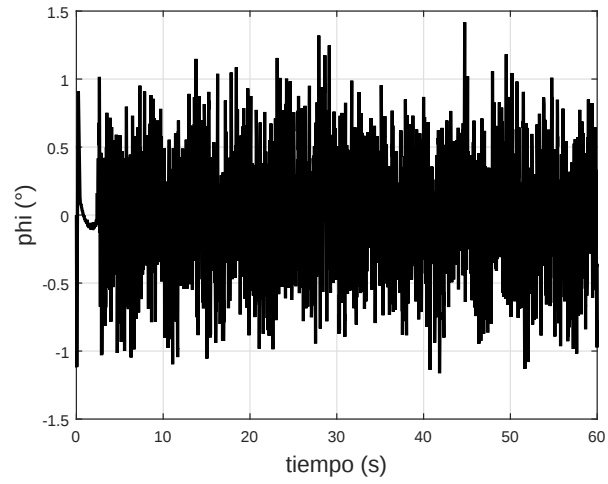


Figura 9.3.11: Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

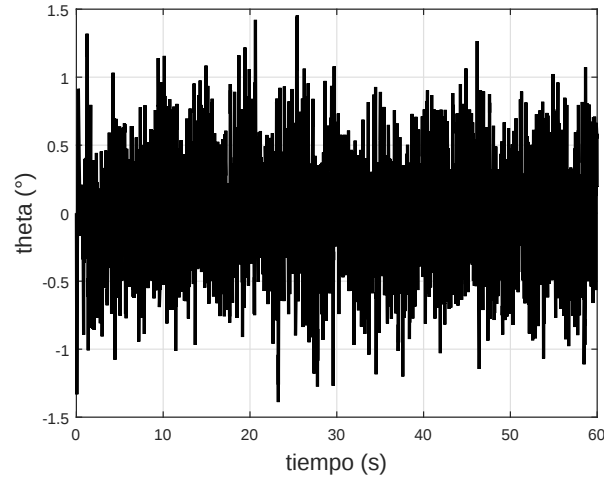


Figura 9.3.12: Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

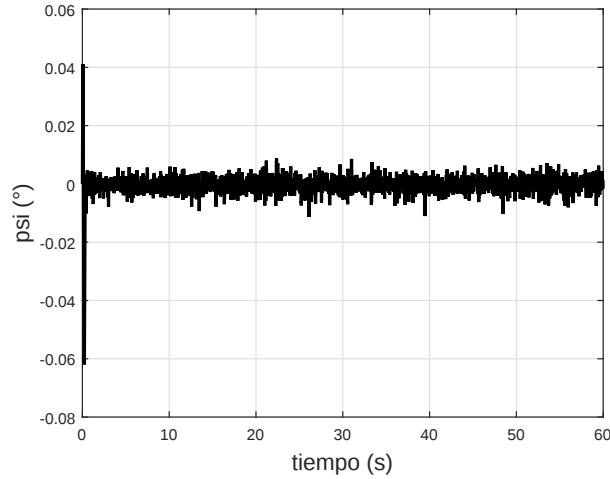


Figura 9.3.13: Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 9.3.14 a la Figura 9.3.17. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 5 N. El empuje total se muestra en la Figura 9.3.18 con un valor por debajo de 18N. Vale la pena notar que el ruido presente en las mediciones de posición y orientación causa un contenido de alta frecuencia en las entradas de control $u(t)$.

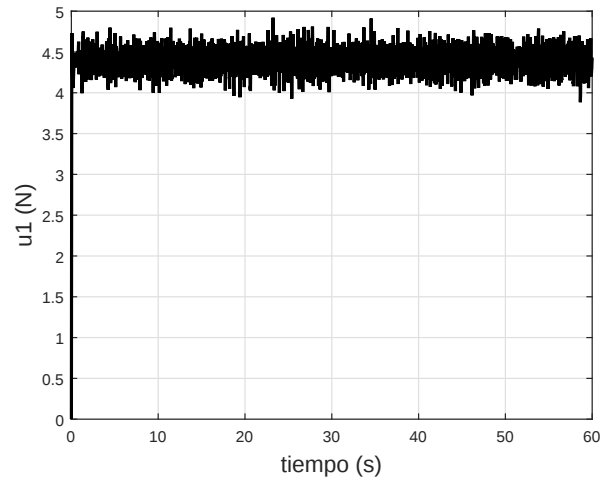


Figura 9.3.14: Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

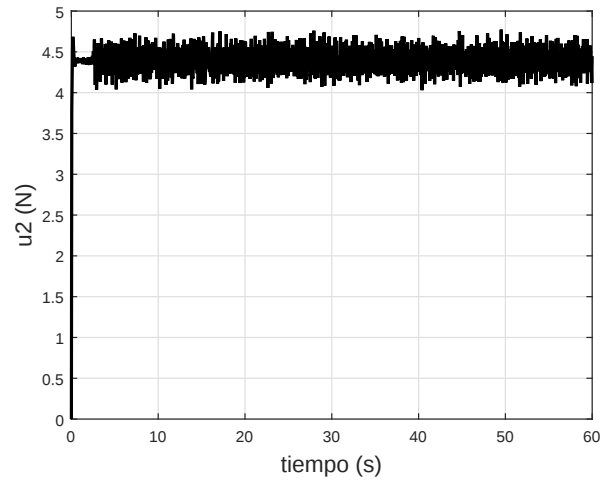


Figura 9.3.15: Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

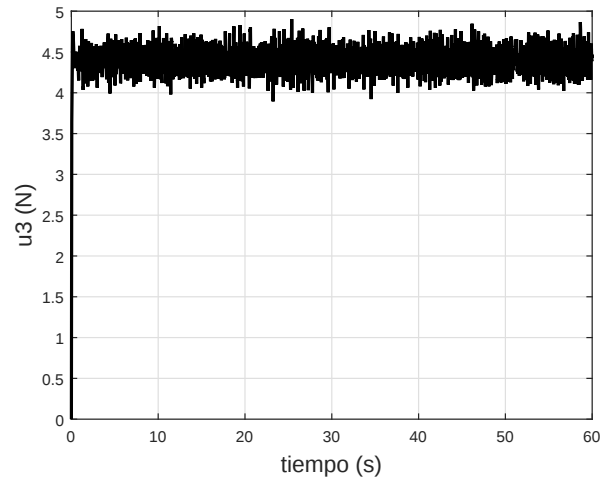


Figura 9.3.16: Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

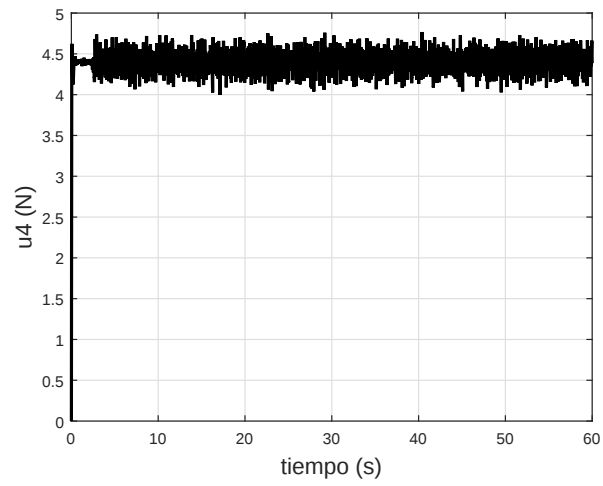


Figura 9.3.17: Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

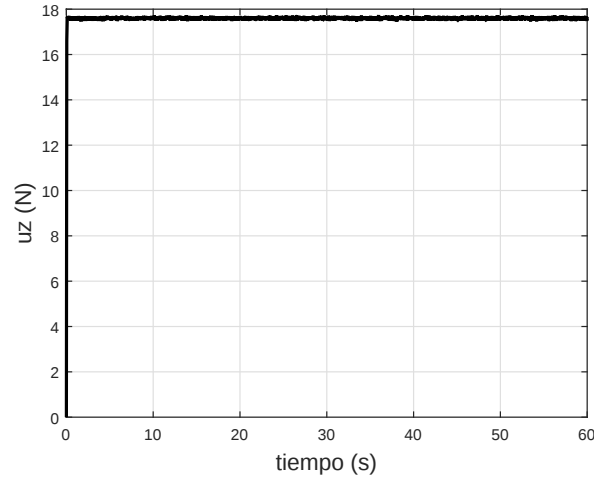


Figura 9.3.18: Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria SMC.

9.4. Experimentos por modos deslizantes

Las ganancias del controlador seleccionadas son

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 4,7 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} ,01 & 0 & 0 \\ 0 & ,01 & 0 \\ 0 & 0 & ,001 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 4,6 & 0 & 0 \\ 0 & 4,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2,34 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4,7 \end{bmatrix}, K_5 = \begin{bmatrix} ,0001 & 0 & 0 \\ 0 & ,0001 & 0 \\ 0 & 0 & ,0001 \end{bmatrix} \text{ y } K_6 = \begin{bmatrix} ,4 & 0 & 0 \\ 0 & ,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.4.1. Control de regulación

Para la prueba de regulación se pretende alcanzar una posición deseada tal que $z_d(t) = ,9m$, la Figura 9.4.1 muestra la medición de la posición ($z(t)$) en comparación a la posición deseada ($z_d(t)$).

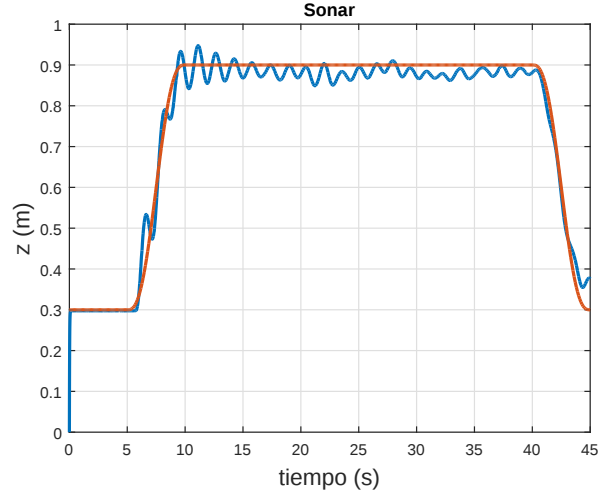


Figura 9.4.1: Posición en z experimental control de regulación SMC (azul), posición en z deseada (rojo).

El error de posición se muestra en la Figura 9.4.2 donde podemos observar que permanece acotado de $(-.15\text{m}, .1\text{m})$.

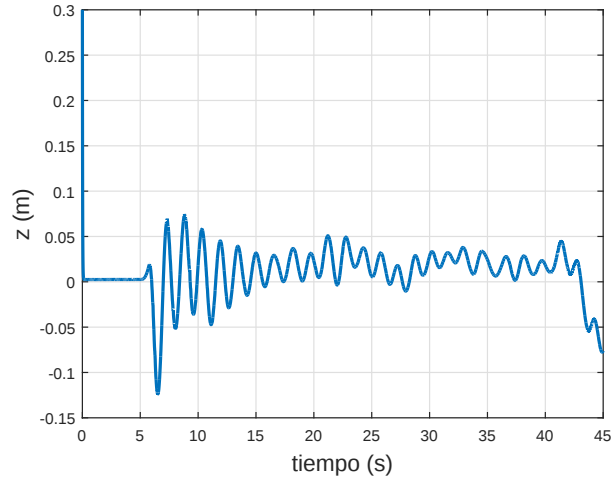


Figura 9.4.2: Error de posición en z experimental control de regulación SMC.

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 9.4.3 a la Figura 9.4.6. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 5.5 N. En la Figura 9.4.7 podemos observar la medición del empuje total generado que corresponde a un valor alrededor de 18N.

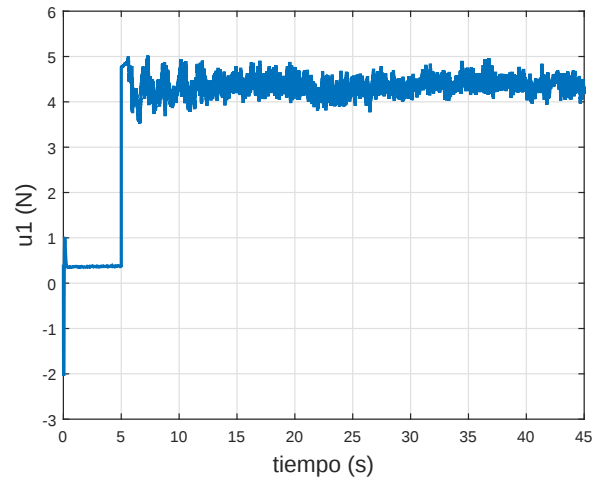


Figura 9.4.3: Señal de control 1 experimental control de regulación SMC.

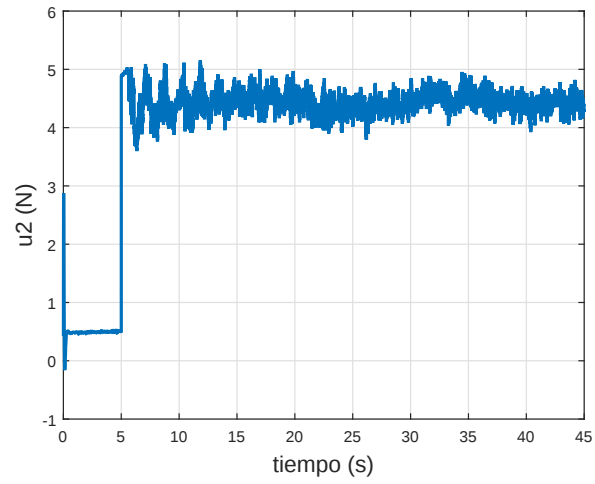


Figura 9.4.4: Señal de control 2 experimental control de regulación SMC.

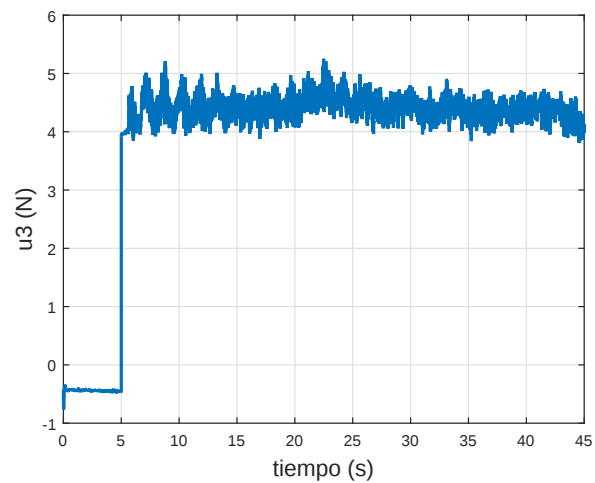


Figura 9.4.5: Señal de control 3 experimental control de regulación SMC.

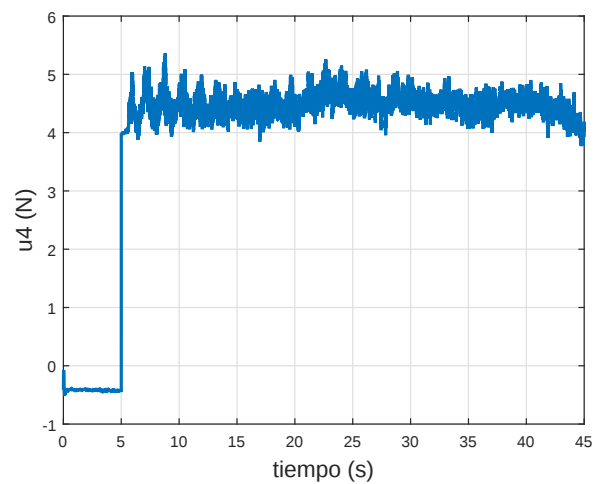


Figura 9.4.6: Señal de control 4 experimental control de regulación SMC.

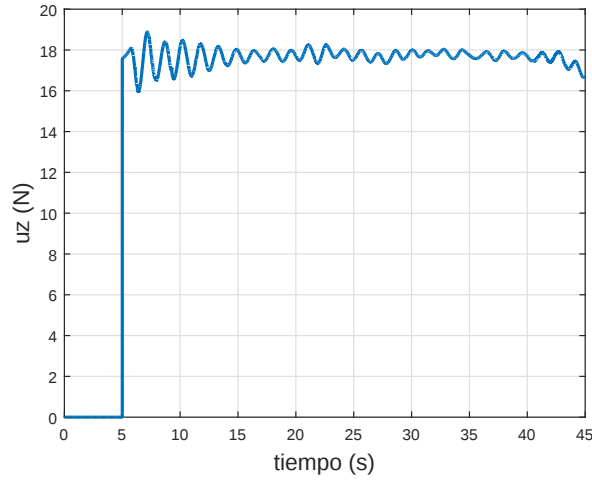


Figura 9.4.7: Empuje total experimental control de regulación SMC.

9.4.2. Control de seguimiento de trayectoria

El resultado experimental se presenta en la Figura 9.4.8 donde la línea roja corresponde a la trayectoria deseada ($p_d(t)$) expresada en (7.3.4).

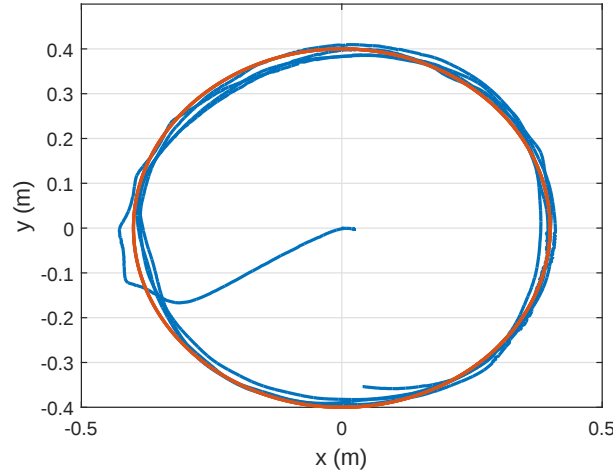


Figura 9.4.8: Trayectoria experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), trayectoria deseada (rojo).

Cabe destacar que de igual forma al controlador anterior, la trayectoria resultante del quadrotor permanece cerca de la trayectoria deseada.

De la Figura 9.4.9 a la Figura 9.4.14 se muestra la evolución temporal de las señales de posición así como las de orientación. A diferencia de la simulación el tiempo de convergencia en la parte experimental de los dos controladores hasta ahora presentados es similar.

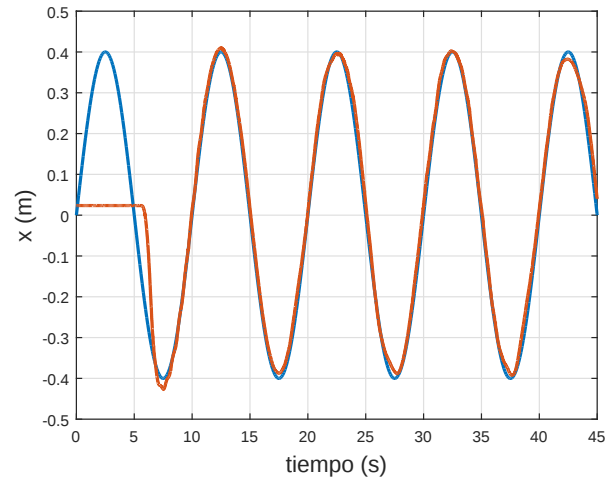


Figura 9.4.9: Posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en x deseada (rojo).

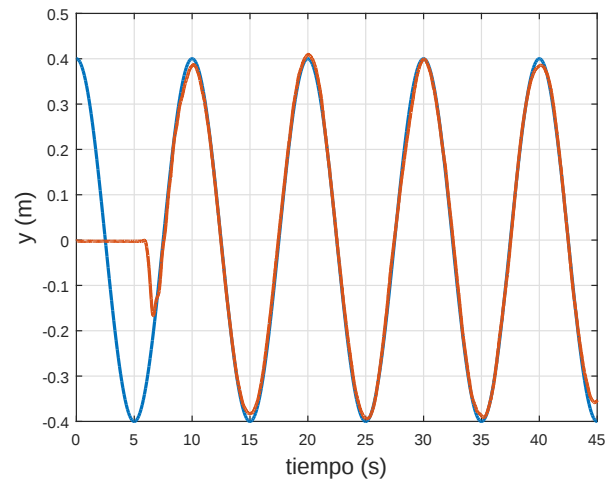


Figura 9.4.10: Posición en y experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en y deseada (rojo).

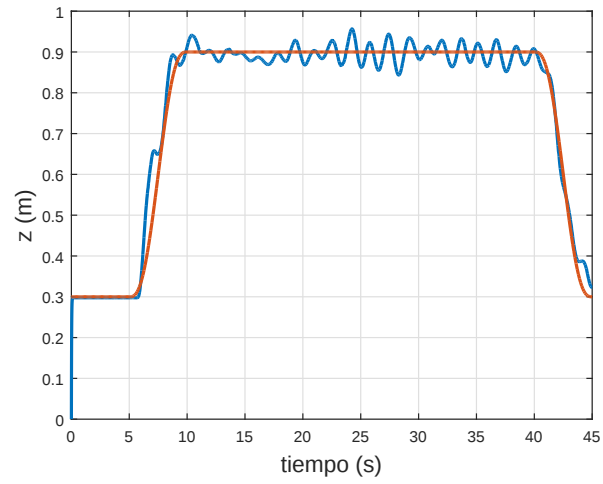


Figura 9.4.11: Posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en z deseada (rojo).

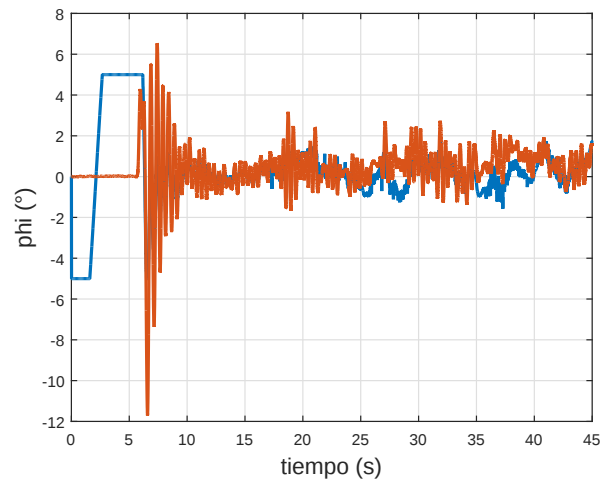


Figura 9.4.12: Posición en ϕ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en ϕ deseada (rojo).

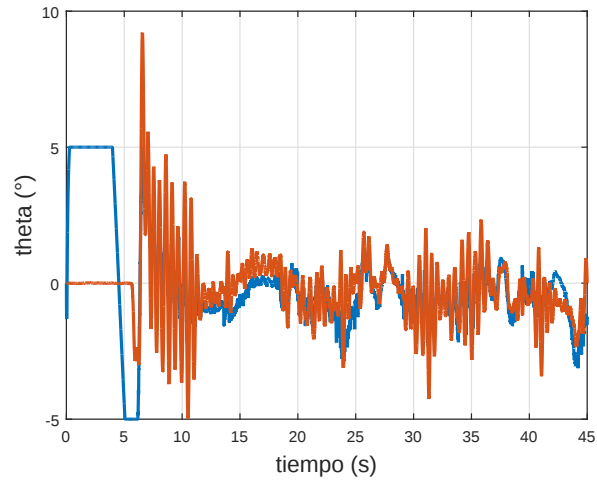


Figura 9.4.13: Posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en θ deseada (rojo).

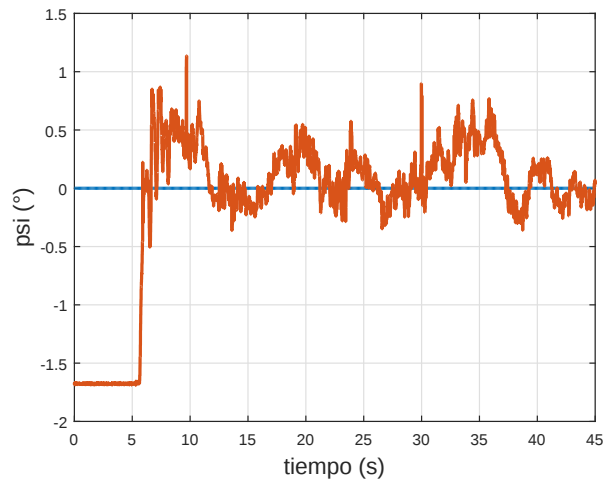


Figura 9.4.14: Posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC (azul), posición en ψ deseada (rojo).

Los errores de posición y orientación correspondientes se muestran de la Figura 9.4.15 a la Figura 9.4.20. Podemos ver que los errores de posición después de 10s permanecen acotados y oscilan entre $\pm .05\text{m}$ aproximadamente. Los errores de orientación están acotados entre $\pm 3.5^\circ$ es decir $\pm .06\text{ rad}$ aproximadamente.

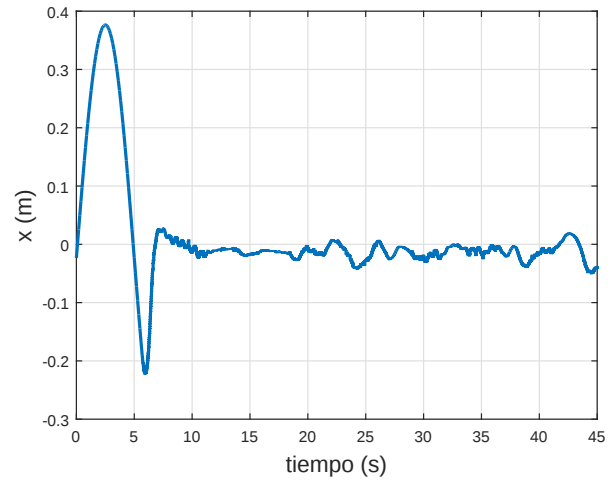


Figura 9.4.15: Error de posición en x experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

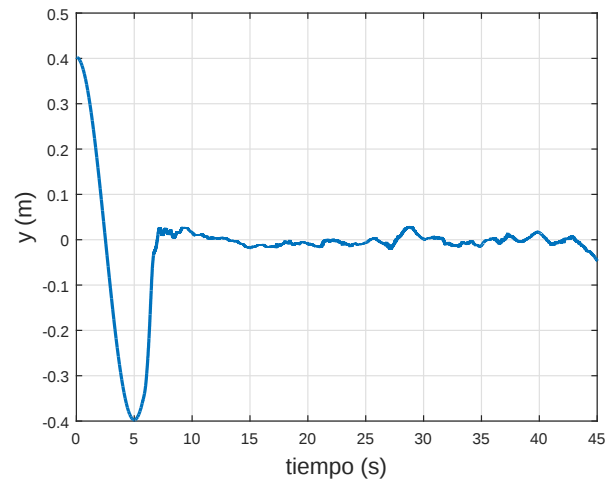


Figura 9.4.16: Error de posición de y experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

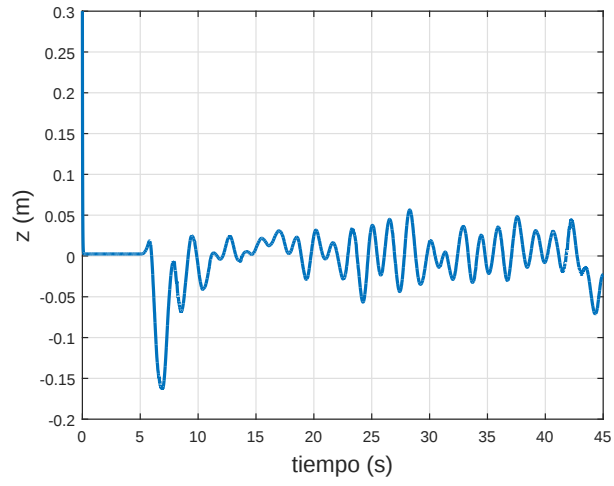


Figura 9.4.17: Error de posición en z experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

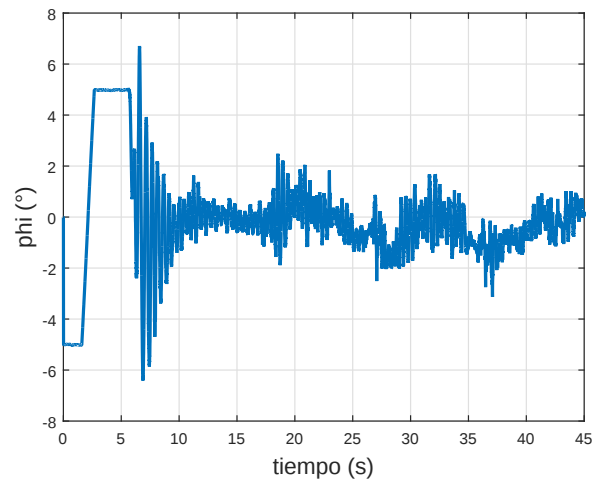


Figura 9.4.18: Error de posición en ϕ .

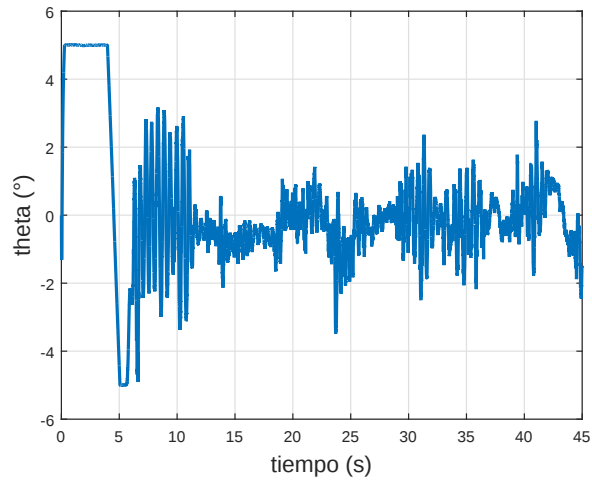


Figura 9.4.19: Error de posición en θ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

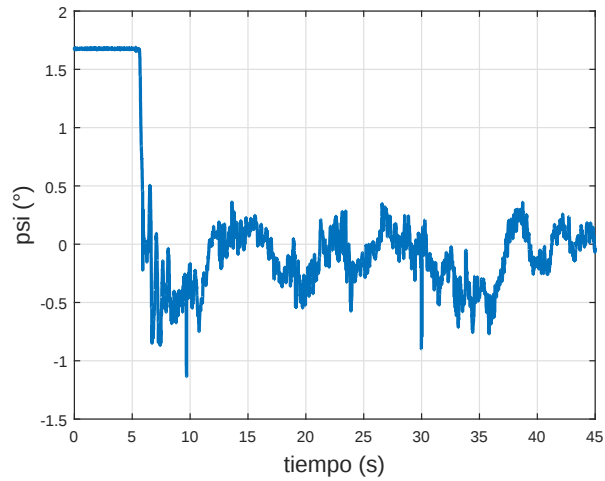


Figura 9.4.20: Error de posición en ψ experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 9.4.21 a la Figura 9.4.24. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 6.5 N. El empuje total se muestra en la Figura 9.4.25 con un valor aproximado entre 17N y 18N.

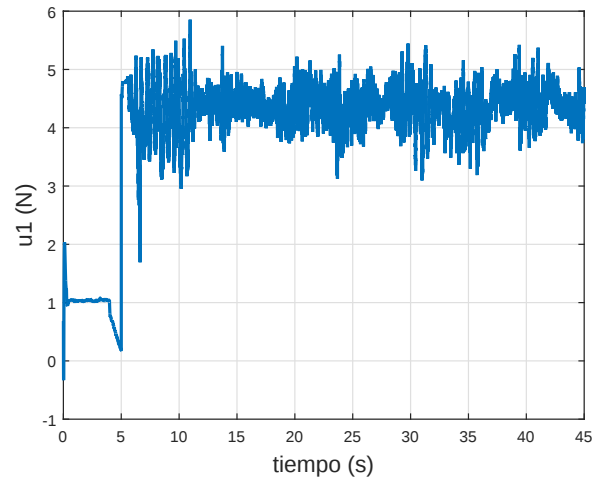


Figura 9.4.21: Señal de control 1 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

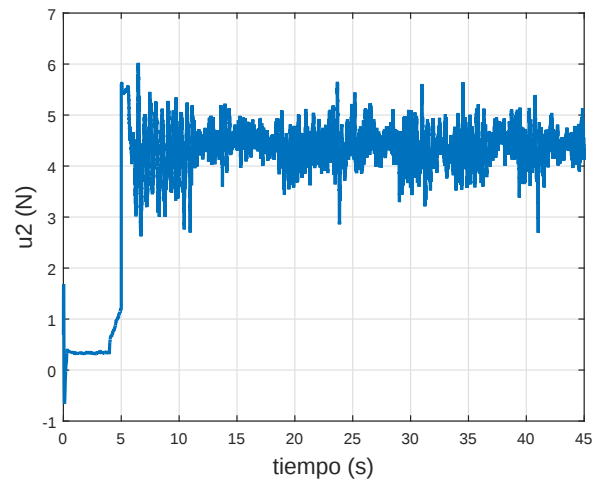


Figura 9.4.22: Señal de control 2 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

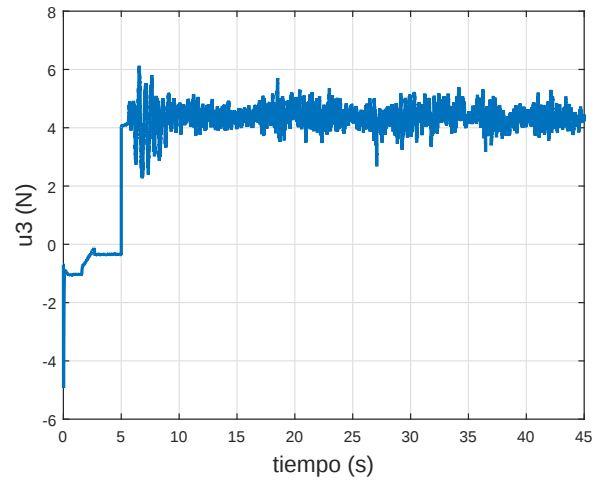


Figura 9.4.23: Señal de control 3 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

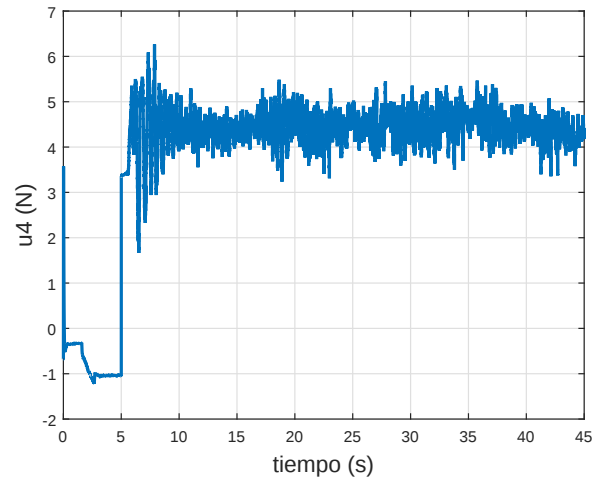


Figura 9.4.24: Señal de control 4 experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

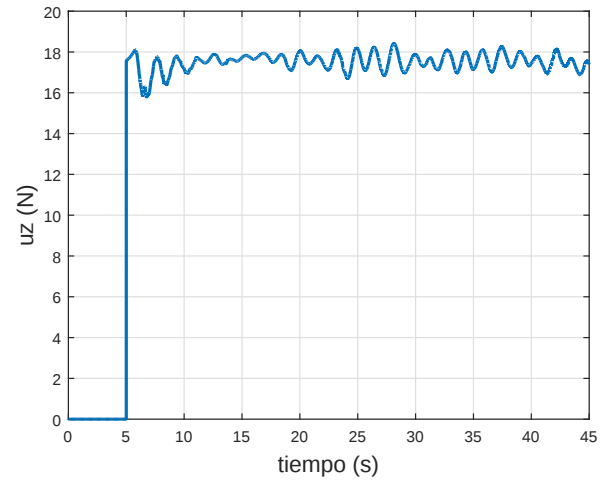


Figura 9.4.25: Empuje total experimental por control de seguimiento de trayectoria SMC.

Capítulo 10

Control dinámico para el quadrotor

Esta propuesta de control no utiliza mediciones de velocidades

$$f_i = m\ddot{p}_d + mge_z + u_1$$

con

$$u_1 = -K_1(K_0 + I)\tilde{p} - 2K_2y$$

y

$$\dot{y} = -K_1\tilde{p} - K_2y$$

donde I es una matriz identidad, ahora se define f_o

$$f_o = H_o(\eta)\ddot{\eta}_r + u_2$$

con

$$u_2 = -K_3(K_o + I)\tilde{\eta} - 2K_4z$$

y

$$\dot{z} = -K_3\tilde{\eta} - K_4z$$

10.1. Prueba de estabilidad

Si definimos $\tilde{\eta} = \eta - \eta_d$

$$H_o(\eta)\ddot{\eta} + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = f_o \quad (10.1.1)$$

$$f_o = H_o(\eta)\ddot{\eta}_d + u_2 \quad (10.1.2)$$

Sustituyendo 10.1.2 en 10.1.1 obtenemos que

$$\ddot{\tilde{\eta}} = H_o(\eta)^{-1}(-C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + u_2). \quad (10.1.3)$$

El controlador es

$$u_2 = -K_1(K_o + H_o(\eta))\tilde{\eta} + K_2(I + H_o(\eta))z + C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\eta}_d \quad (10.1.4)$$

$$\dot{z} = K_1\tilde{\eta} - K_2z. \quad (10.1.5)$$

Por lo tanto el sistema en lazo cerrado es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \dot{\tilde{\eta}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ -H_o(\eta)^{-1}[K_1(K_o + H_o(\eta))\tilde{\eta} - K_2(I + H_o(\eta))z - C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\eta}_d + C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}] \\ K_1\tilde{\eta} - K_2z \end{bmatrix} \quad (10.1.6)$$

Usando propiedades

$$\begin{aligned} C_o(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} &= C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}} + \dot{\eta}_d)(\dot{\tilde{\eta}} + \dot{\eta}_d) = C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}})(\dot{\tilde{\eta}} + \dot{\eta}_d) + C_o(\eta, \dot{\eta}_d)(\dot{\tilde{\eta}} + \dot{\eta}_d) \\ &= C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}})\dot{\tilde{\eta}} + C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}})\dot{\eta}_d + C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\tilde{\eta}} + C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\eta}_d \\ &= C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}})\dot{\tilde{\eta}} + 2C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\tilde{\eta}} + C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\eta}_d. \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

Sustituyendo (10.1.7) en (10.1.6)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \dot{\tilde{\eta}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ -H_o(\eta)^{-1}[K_1(K_o + H_o(\eta))\tilde{\eta} - K_2(I + H_o(\eta))z - C_o(\eta, \dot{\tilde{\eta}})\dot{\tilde{\eta}} + 2C_o(\eta, \dot{\eta}_d)\dot{\tilde{\eta}}] \\ K_1\tilde{\eta} - K_2z \end{bmatrix}. \quad (10.1.8)$$

Ahora usemos la siguiente función candidata de Lyapunov para propósitos de estabilidad

$$V(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z) = \frac{1}{2}\tilde{\eta}^T K_o K_1 \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^T K_2 z + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\eta}}^T H_o(\eta)\dot{\tilde{\eta}} + \dot{\tilde{\eta}}^T H_o(\eta)z + \frac{1}{2}z^T (K_o + H_o(\eta))z \quad (10.1.9)$$

Para demostrar que la función candidata es una función definida positiva y radiamente desacotada, procedemos a obtener la cota inferior de la función como se muestra

$$V(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| \\ \|\dot{\tilde{\eta}}\| \\ \|z\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_o K_1\} & 0 & -\lambda_{\max}\{K_2\} \\ 0 & \lambda_{\min}\{H_o\} & \lambda_{\max}\{H_o\} \\ -\lambda_{\max}\{K_2\} & \lambda_{\max}\{H_o\} & \lambda_{\min}\{K_o + H_o\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| \\ \|\dot{\tilde{\eta}}\| \\ \|z\| \end{bmatrix} \quad (10.1.10)$$

la condición para mantener $V(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z) > 0$ es

$$\lambda_{\min}\{K_o K_1\}\lambda_{\min}\{H_o\}\lambda_{\min}\{K_o + H_o\} > \lambda_{\max}\{K_2\}^2\lambda_{\min}\{H_o\} + \lambda_{\max}\{H_o\}^2\lambda_{\min}\{K_o K_1\}. \quad (10.1.11)$$

Es posible demostrar que la función candidata es acotada superiormente por la siguiente expresión

$$V(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z) \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| \\ \|\dot{\tilde{\eta}}\| \\ \|z\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_o K_1\} & 0 & -\lambda_{\max}\{K_2\} \\ 0 & \lambda_{\max}\{H_o\} & \lambda_{\max}\{H_o\} \\ -\lambda_{\max}\{K_2\} & \lambda_{\max}\{H_o\} & \lambda_{\max}\{K_o + H_o\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| \\ \|\dot{\tilde{\eta}}\| \\ \|z\| \end{bmatrix} \quad (10.1.12)$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada dadas las siguientes condiciones

1. $\lambda_{\max}\{K_o K_1\} \lambda_{\max}\{H_o\} > 0$
2. $\lambda_{\max}\{K_o K_1\} \lambda_{\max}\{K_o + H_o\} > \lambda_{\max}\{K_2\}^2 + \lambda_{\max}\{H_o\} \lambda_{\max}\{K_o K_1\}$

esto quiere decir que $V(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z)$ es decreciente.

Considerando la siguiente propiedad de antisimetría $\frac{1}{2}\dot{H}_o(\eta) - C(\eta, \dot{\eta}) = 0$ tenemos que

$$\dot{V} = \begin{aligned} & \tilde{\eta}^T K_2 K_1 \tilde{\eta} + \tilde{\eta}^T K_2^2 z - 2\dot{\tilde{\eta}}^T C_o(\eta, \dot{\eta}_d) \dot{\tilde{\eta}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}}^T \dot{H}_o(\eta) z - \\ & z^T K_2 (K_o - I) z - 2z^T C_o(\eta, \dot{\eta}_d) \dot{\tilde{\eta}} + \frac{1}{2} z^T \dot{H}_o(\eta) z \end{aligned} \quad (10.1.13)$$

Procedemos a acotar superiormente los términos de $\dot{V}(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z)$

$$\begin{aligned} & -2\dot{\tilde{\eta}}^T C_o(\eta, \dot{\eta}_d) \dot{\tilde{\eta}} \leq 2K_{c1} \|\dot{\eta}_d\| \|\dot{\tilde{\eta}}\|^2 \\ & -z^T K_2 (K_o - I) z + \frac{1}{2} z^T \dot{H}_o(\eta) z \leq -\lambda_{\min}\{K_2(K_o - I)\} \|z\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{\dot{H}_o\} \|z\|^2 \\ & -\tilde{\eta}^T K_2 K_1 \tilde{\eta} \leq -\lambda_{\min}\{K_2 K_1\} \|\tilde{\eta}\|^2 \\ & \tilde{\eta}^T K_2 z \leq \lambda_{\max}\{K_2^2\} \|\tilde{\eta}\| \|z\| \\ & \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}}^T \dot{H}_o(\eta) z - 2\dot{\tilde{\eta}}^T C_o(\eta, \dot{\eta}_d) z \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{\dot{H}_o\} \|\dot{\tilde{\eta}}\| \|z\| + 2K_{c1} \|\dot{\eta}_d\| \|\dot{\tilde{\eta}}\| \|z\| \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

por lo tanto

$$\dot{V}(\tilde{\eta}, \dot{\tilde{\eta}}, z) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| & \|\dot{\tilde{\eta}}\| & \|z\| \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} \|\tilde{\eta}\| \\ \|\dot{\tilde{\eta}}\| \\ \|z\| \end{bmatrix} \quad (10.1.15)$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_2 K_1\} & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_2^2\} \\ 0 & -2K_{c1} \|\dot{\eta}_d\| & -\frac{1}{4} \lambda_{\max}\{\dot{H}_o\} - K_{c1} \|\dot{\eta}_d\| \\ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_2^2\} & -\frac{1}{4} \lambda_{\max}\{\dot{H}_o\} - K_{c1} \|\dot{\eta}_d\| & \lambda_{\min}\{K_2(K_o - I)\} - \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{\dot{H}_o\} \end{bmatrix} \quad (10.1.16)$$

Se deben seleccionar las ganancias del controlador de tal forma que R sea una matriz definida positiva, esto con la finalidad de garantizar estabilidad asintótica de manera global del sistema en lazo cerrado.

10.2. Simulación en lazo cerrado del controlador dinámico

Las ganancias del controlador seleccionadas son

$$K_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix}, K_2 = 2 \begin{bmatrix} 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = ,1 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \text{ y } K_4 = ,1 \begin{bmatrix} 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 1,9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9 \end{bmatrix}.$$

La trayectoria de posición deseada en el espacio de tres dimensiones es una trayectoria helicoidal, dada por la expresión (7.3.1), la Figura 10.2.1 muestra la trayectoria deseada ($p_d(t)$) así como la trayectoria real($p(t)$) dada por la simulación.

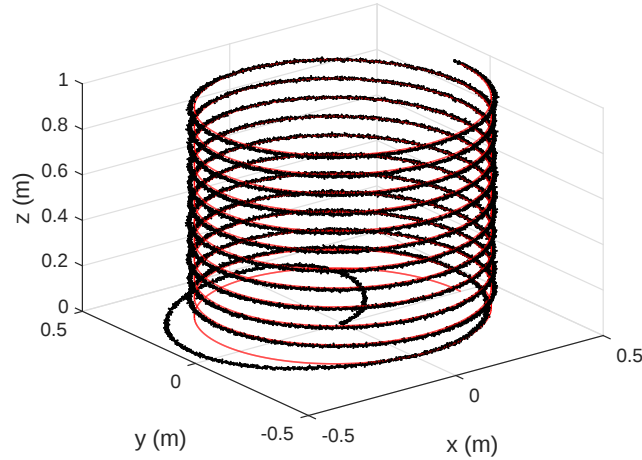


Figura 10.2.1: Trayectoria helicoidal simulación Control Dinámico(color negro), trayectoria deseada (color rojo).

De la Figura 10.2.2 a la Figura 10.2.7 se muestran los resultados de la simulación, donde se pueden apreciar los valores deseados contra los medidos tanto de posición($p_d(t)$, $p(t)$) como orientación($\eta_d(t)$, $\eta(t)$). En cada uno de los casos, los valores deseados como los reales son similares. El tiempo de convergencia es menor al del controlador anterior y similar al del controlador H_∞ .

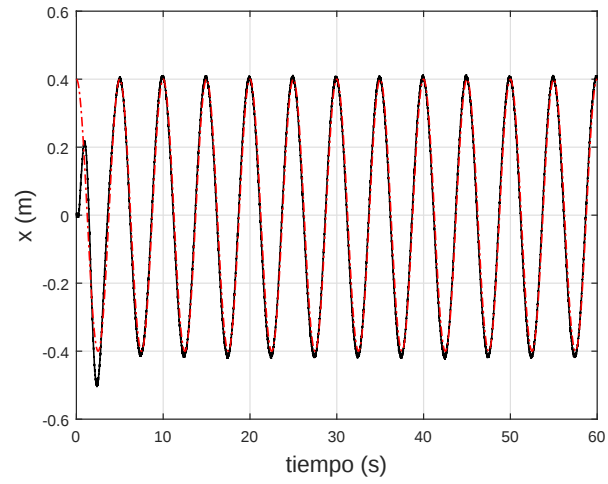


Figura 10.2.2: Posición en x simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en x deseada (color rojo).

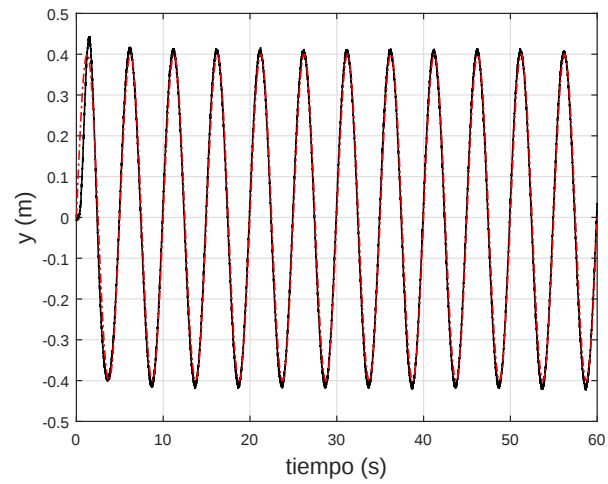


Figura 10.2.3: Posición en y simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en y deseada (color rojo).

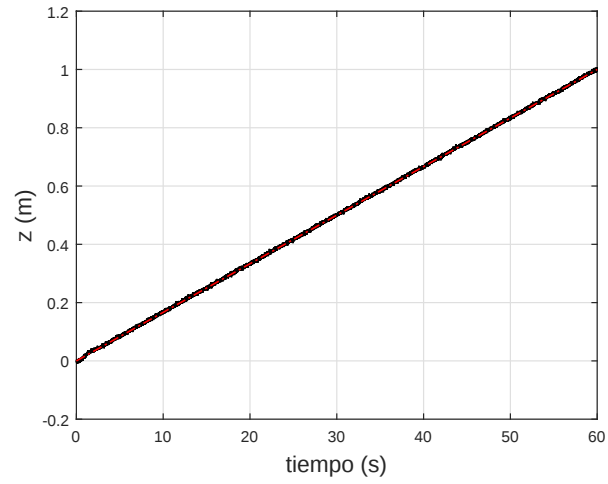


Figura 10.2.4: Posición en z simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en z deseada (color rojo).

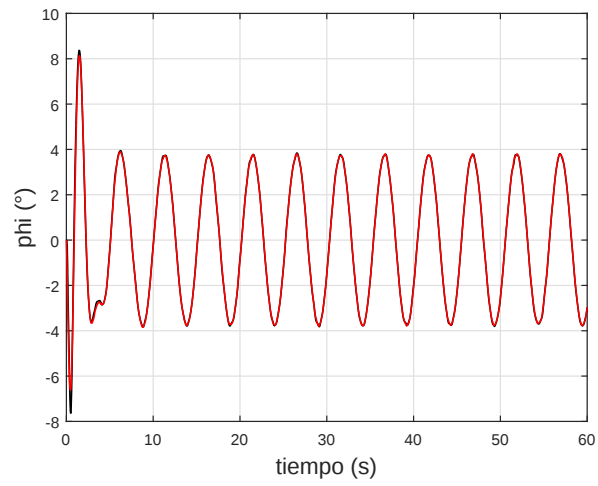


Figura 10.2.5: Posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en ϕ deseada (color rojo).

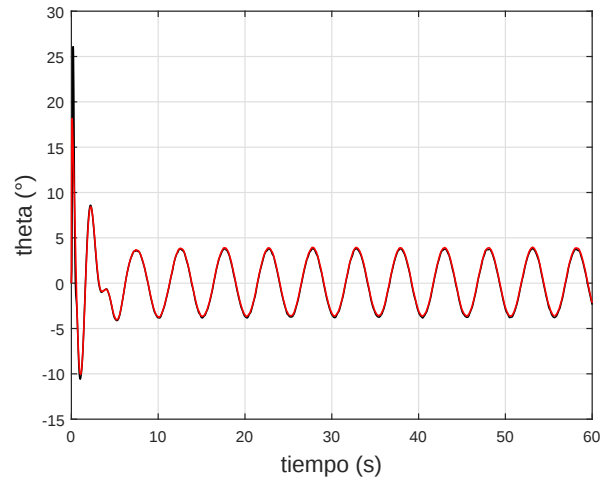


Figura 10.2.6: Posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en θ deseada (color rojo).

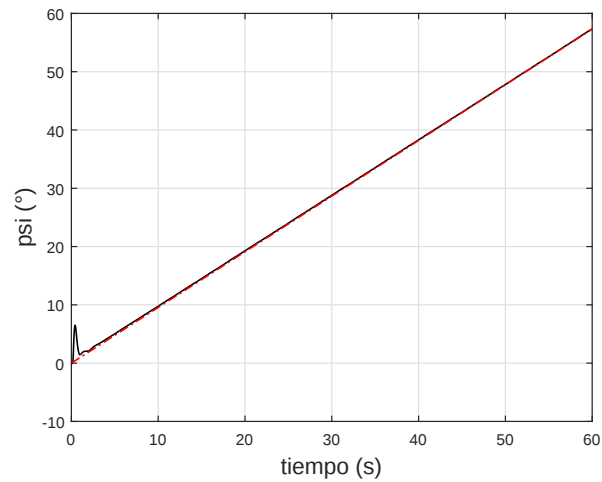


Figura 10.2.7: Posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico (color negro), posición en ψ deseada (color rojo).

Los errores de posición y orientación correspondientes se representan de la Figura 10.2.8 a la Figura 10.2.13. La magnitud de la señal de error de posición permanece acotada por $\pm .03$ m y el error de orientación por $\pm .2^\circ$ es decir aproximadamente $\pm .003$ rad, lo cual demuestra un mejor desempeño aún cuando en este controlador no se toma en cuenta la medición de velocidad.

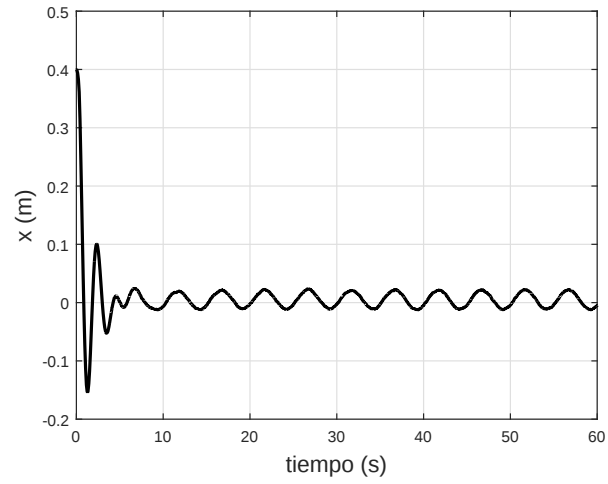


Figura 10.2.8: Error de posición en x simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

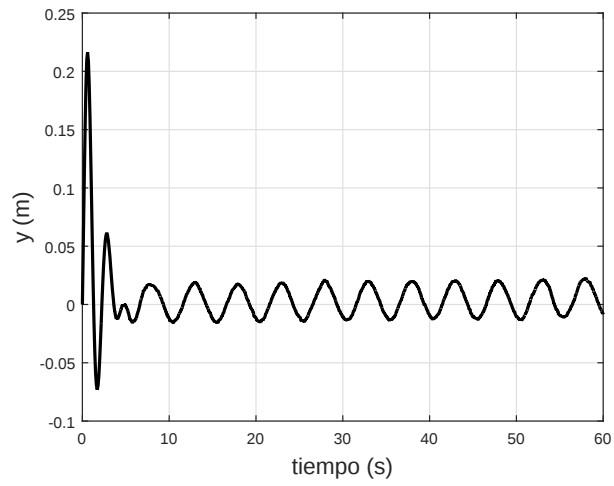


Figura 10.2.9: Error de posición en y simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

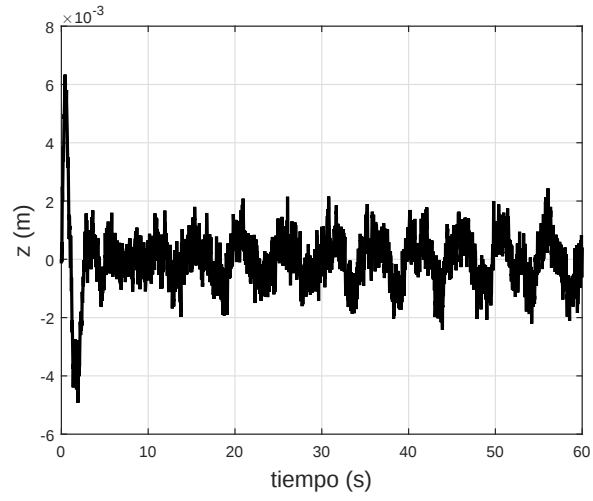


Figura 10.2.10: Error de posición en z simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

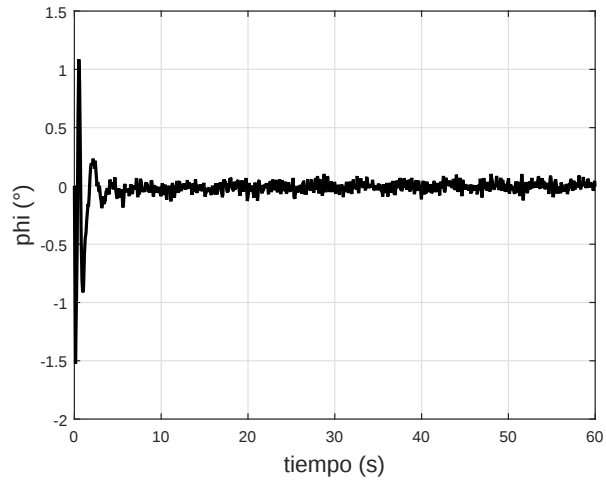


Figura 10.2.11: Error de posición en ϕ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

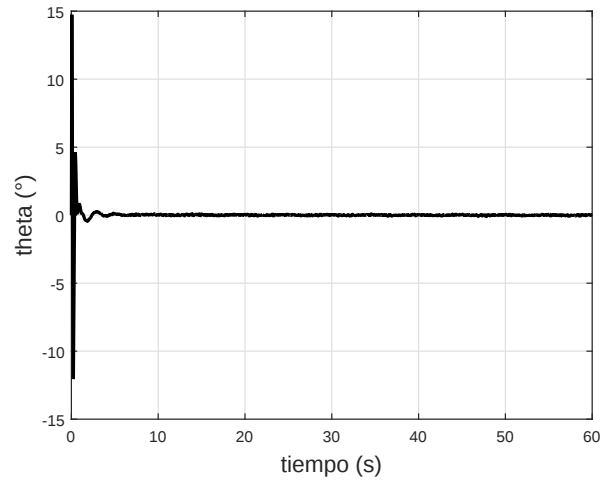


Figura 10.2.12: Error de posición en θ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

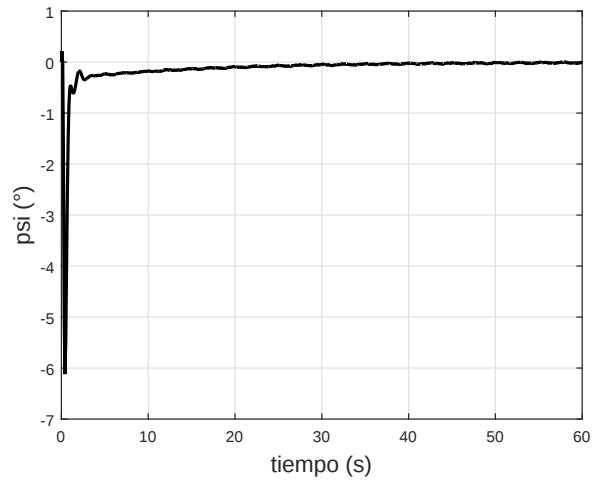


Figura 10.2.13: Error de posición en ψ simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

Finalmente, se muestra el empuje generado por los actuadores del quadrotor de la Figura 10.2.14 a la Figura 10.2.17. La magnitud del empuje en cada rotor permanece bajo un valor alrededor de 5 N. El empuje total se muestra en la Figura 10.2.18 con un valor aproximado de 18 N.

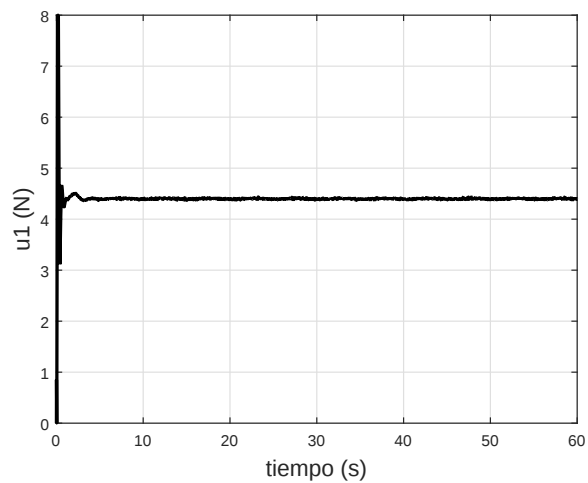


Figura 10.2.14: Señal de control 1 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

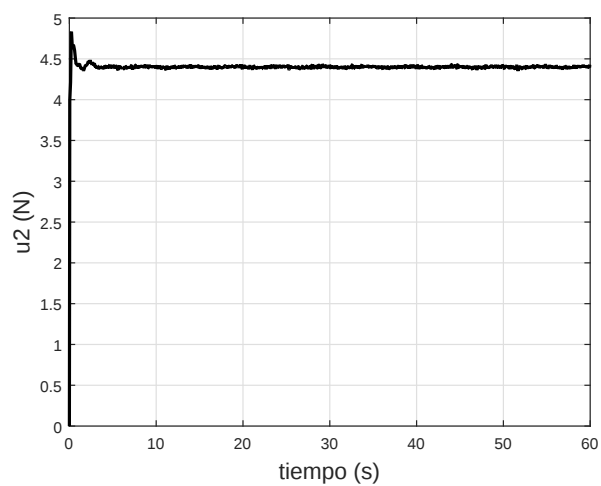


Figura 10.2.15: Señal de control 2 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

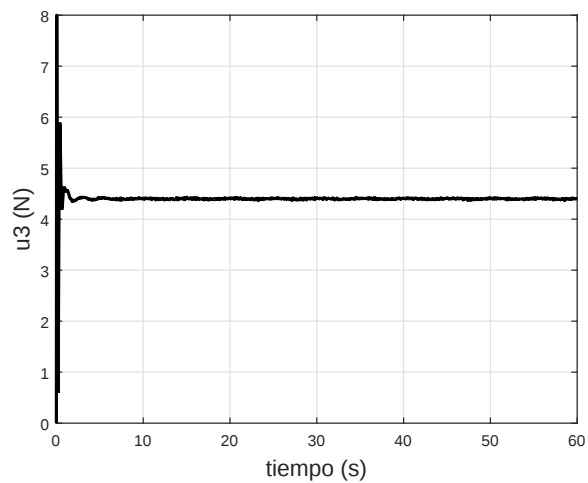


Figura 10.2.16: Señal de control 3 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

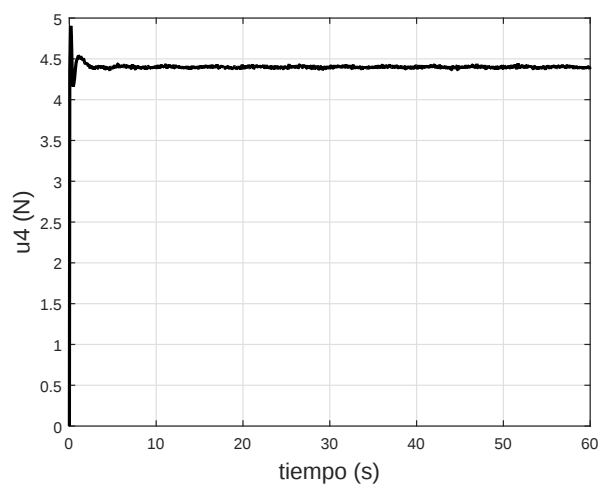


Figura 10.2.17: Señal de control 4 simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

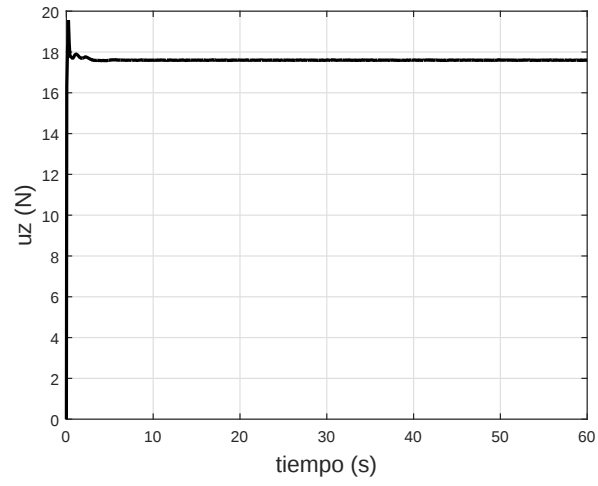


Figura 10.2.18: Empuje total simulación para seguimiento de trayectoria Control Dinámico.

Capítulo 11

Conclusiones

La propuesta de control se define por dos componentes: un lazo de control para garantizar el seguimiento de trayectoria de posición y un lazo de control para garantizar la orientación del quadrotor.

Es importante destacar que se presentó un nuevo esquema de control, el controlador dinámico, finalmente la ventaja que tiene este controlador es que no requiere medición de velocidad sin embargo en la experimentación, los sensores que nos proveen las velocidades angulares y traslacionales del QBall 2 como son el giroscopio y las cámaras del OptiTrack, hacen que el atractivo de este controlador disminuya, ya que al momento de implementación el control de orientación requiere de la medición de velocidad y al utilizar derivación numérica impacta considerablemente en el desempeño sin embargo, no se descarta que pueda utilizarse y tener un desempeño favorable para otro tipo de plataforma o al utilizar otro tipo de sensores.

Las simulaciones numéricas ilustran el rendimiento garantizado por el análisis de estabilidad de las trayectorias del sistema de lazo cerrado, que muestran que las tres propuestas de control cumplen el objetivo de control.

Finalmente, se presentó la validación experimental del controlador por modos deslizantes y H_∞ en los cuales se demuestra su robustez para absorber fallas parciales. Los resultados obtenidos, así mismo mostraron un seguimiento de trayectoria aceptable.

La conclusión principal derivada del presente estudio, es que los controladores propuestos muestran un desempeño robusto, bajo estimaciones aproximadas de los parámetros y las perturbaciones presentadas en un ambiente interior.

Capítulo 12

Descripción el equipo experimental

QBall 2

El QBall 2 es un helicóptero de cuatro motores *brushless* y cuatro propelas de 10 pulgadas de largo colocadas en cada motor. Todo el vehículo esta encerrado en una jaula de fibra de carbono, la cual esta diseñada para proteger el chasis, motores, propelas y módulo de control integrado contra colisiones menores; no puede soportar caídas de más de 2 metros de altura. El QBall 2 fue diseñado para usarse en interiores, donde normalmente existen riesgos de choque de corto alcance [54].

Para obtener las mediciones de los sensores y controlar los motores, el QBall 2 utiliza una tarjeta de adquisición de datos(DAQ) y un sistema integrado inalámbrico Gumstix DuoVero. La adquisición de datos es de alta resolución, además, la unidad de medición inercial(IMU) y la tarjeta de entrada/salida de avionics están diseñadas para soportar una amplia variedad de aplicaciones para la investigación. El software utilizado de Quanser es el QU ARC versión 2.4, el cual permite utilizar la interfaz de Matlab Simulink.

Los controladores son desarrollados en Simulink con QU ARC en una computadora de mando y los modelos son descargados y compilados en archivos ejecutables en el vehículo sin problemas. El diagrama de esta configuración se muestran en la Figura 12.0.1.



Figura 12.0.1: Modelo del sistema

12.1. Componentes del QBall2

12.1.1. Tarjeta de adquisición de datos

En conjunto con la computadora integrada Gumstix, la DAQ controla el vehículo leyendo los sensores a bordo y las salidas del motor. La DAQ esta localizada dentro de una carcasa en el chasis del QBall 2.

Cada controlador de velocidad de los motores esta conectado a una salida del PWM de la DAQ.

12.1.2. Tarjeta de alimentación del QBall 2

El QBall 2 usa 2 baterías de 3 celdas de LiPo a 2700mAh para alimentar la DAQ y los motores. Estas baterías se encuentran en lo alto de la tarjeta de alimentación del QBall 2. El par de baterías LiPo están conectadas en paralelo a la tarjeta de alimentación de energía y conectados a los motores y la DAQ.

12.1.3. Propelas y motores del QBall 2

El QBall 2 usa 4 motores E-Flite Park 480 (1020 Kv) equipados con un par de propelas APC de 10 x 4.7. Los controladores electrónicos de velocidad (ESCs por sus siglas en inglés) reciben instrucciones desde el controlador en forma de salidas PWM de 1ms (aceleración mínima) a 2ms (acelerador máximo). Las aceleraciones mínima y máxima se asignan con valores entre 0 y 1, respectivamente, utilizando el bloque de escritura HIL (*Hardware In the Loop*) a las salidas de las instrucciones del motor.

12.2. Sensores del QBall 2

El conjunto de bloques HIL de QU ARC se utiliza para comunicarse con la tarjeta de adquisición de datos de Quanser. La DAQ del QBall 2 ofrece algunos sensores de aviónica de alta resolución, los cuales son usados para controlar y medir la estabilidad de los vehículos aéreos. Las E/S de la DAQ del QBall 2 incluyen:

- 4 salidas PWM a motor
- 2 salidas PWM configurables
- Giroscopio de 3 ejes, 250/500/2000 grados por segundo en un rango elegible
- Sensor de altura sonar, en un rango de 0.2 - 7.65 m, 1cm de resolución
- Medidor de voltaje de baterías
- 2 Entradas análogas de 12 bits de 0 a 5V
- 1 bus tipo SPI
- 8 E/S digitales
- 1 UART
- 1 bus tipo I^2C

Los bloques HIL se usan para comunicarse con el hardware de adquisición de datos del QBall 2, para inicializar la tarjeta DAQ del QBall 2, un bloque HIL Initialize debe ser colocado en el modelo. El bloque es usado para inicializar la tarjeta de adquisición de datos y la configuración de los parámetros de E/S. El bloque HIL Read Write es usado para leer las mediciones de los sensores de la DAQ y escribir las instrucciones de los cuatro motores del QBall 2.

Las mediciones del giroscopio y acelerómetro de 3 ejes son usados para medir la dinámica y orientación (alabeo, cabeceo y guiñada) del QBall 2. Dichas entradas del IMU son cruciales para controlar el vuelo del QBall 2. La DAQ del QBall 2 utiliza un giroscopio de 3 ejes STMicroelectronics y un acelerómetro Freescale de 3 ejes. El sensor sonar del QBall 2 es ek Maxbotix XL-Maxsonar EZ3, el cual mide las distancias entre 20 cm y 765 cm con 1 cm de resolución. Los objetos entre los 0-20 cm son puestos como 20 cm. El sensor sonar se encuentra en la parte inferior del QBall 2 y es usado para medir la altura del QBall 2 en el control de altura en lazo cerrado.

La entrada de voltaje de la batería mide la fuente de alimentación conectado a la DAQ del QBall 2. Debido a que las baterías LiPo se utilizan para alimentar el QBall 2 deben cargarse cuando llegan a un voltaje no inferior a 10 V.

12.3. Conexión wireless

El QBall 2 utiliza una conexión TCP/IP ad-hoc punto a punto para la comunicación inalámbrica con el equipo host u otros vehículos no tripulados Quanser. El QBall 2 viene con un adaptador inalámbrico USB para configurar el equipo host con una conexión inalámbrica para su uso con el QBall 2 y otros vehículos no tripulados Quanser. El PC Host y cada uno de los vehículos deben tener direcciones IP únicas y la gama de estas direcciones se definen a continuación:

PCs Host	192.168.2.10 a 192.168.2.19
Vehículos Quanser (Gumstix)	192.168.2.20 a 192.68.2.254

12.4. Archivos de Simulink

La tabla enumera los distintos archivos y su propósito. El QBall 2 funciona con una estructura de host-vehículo. El equipo central (estación de tierra PC) ejecuta un modelo del host para transmitir los datos de la palanca de mando (y posiblemente la localización) al QBall 2.

Nombre del archivo	Descripción
setup_qball_2.m	Script de Matlab que se ejecuta cada vez que el modelo de controlador QBall 2 es abierto. Este script ejecuta el script controller_design.m y configura cualquier otro parámetro del modelo.
controller_design.m	Configura ganancias del controlador tanto de posición como de altura del vehículo QBall 2. Este archivo se ejecuta por setup_qball_2.m
plot_log_data.m	Script utilizado para graficar los datos del experimento y guardarlos en un archivo MAT mediante el controlador qball_2_control_v1.mdl
qball_2_control_v1.mdl	Este archivo contiene el controlador de vuelo principal del QBall 2. Este modelo es descargado y ejecutado en el QBall 2 y controla la estabilidad de la orientación y, si la información de localización está disponible, la posición. Al abrir este archivo se ejecutan automáticamente los scripts de configuración anterior.

12.5. El controlador del QBall

La Figura 12.5.1 muestra el nivel superior del controlador QBall y los diversos subsistemas que contiene el modelo.

QBall 2 Flight Controller



Figura 12.5.1: Controlador de vuelo del QBall 2 en Simulink.

12.5.1. Modo de control

Este subsistema se utiliza para cambiar el modo de funcionamiento del QBall 2 de la palanca de mando en el control en lazo abierto para el control autónomo de lazo cerrado. Tenga en cuenta que el modo de altura se fija en lazo cerrado, lo que obliga al controlador en la PC manejar la altura usando el sensor de sonar que se encuentra en el vehículo.

12.5.2. Configuración de la posición

Este subsistema contiene los puntos de referencia (setpoints) para la posición horizontal, altura y orientación del QBall 2. Estos puntos de referencia son utilizados en los modos de operación en lazo cerrado.

12.5.3. Guardado de datos (caja negra)

Este subsistema recopila los datos del QBall 2 para guardarlos en un archivo MAT en la PC usando el QUARC To Host File. El archivo plot log data.m puede ser usado para extraer y graficar algunos de los datos guardados una vez que el archivo MAT ha sido cargado en Matlab.

12.5.4. Tarjeta de adquisición de datos (DAQ)

El subsistema de adquisición de datos contiene los bloques de Hardware-In-the-Loop (HIL) utilizados para configurar la DAQ del QBall 2 y los valores de lectura/escritura. El bloque de ganancia es utilizado para activar o desactivar los motores del QBall 2 multiplicando las señales motoras por 1 ó 0, respectivamente. La señal de salida digital también se utiliza para activar los ESCs (1) o deshabilitarlos (0). Al probar los sensores del QBall 2 desactive los motores por seguridad multiplicando las señales de motor por el valor 0 con el bloque de ganancia y desactivar los ESCs utilizando la señal digital habilitadora.

12.6. Sistema de localización OptiTrack

Cuando se opera el QBall 2 en la posición de lazo cerrado o en el modo de control de orientación, se requiere un sistema de localización para proporcionar la retroalimentación. Los ejes del espacio de trabajo del OptiTrack están dispuestos en una orientación específica. Con respecto al operador, el lado positivo del eje X es a la derecha, el lado positivo del eje Z está hacia el operador y la estación en tierra, y el eje Y positivo apunta hacia arriba cuando el origen se encuentra en el suelo en el centro del espacio de trabajo. Por lo general, el área de trabajo será sometida a una transformación en el modelo del PC que se conecta con el sistema de localización para que se ajuste a esta orientación deseada. Con el fin de configurar el sistema de localización de los ejes para el sistema de localización OptiTrack, debe configurar el plano en tierra después de la calibración de las cámaras.

Los sistemas de localización apoyados en QU ARC típicamente siguen posiciones marcadas u objetos de cuerpo rígido (formas geométricas rígidas hechas de 3 o más marcadores de seguimiento, también conocidos como trackables). Para operar la QBall 2 en los modos de lazo cerrado, el sistema de localización OptiTrack se utiliza para proporcionar mediciones de la posición y orientación del QBall 2. El controlador de posición en lazo cerrado asume que hay un objeto de cuerpo rígido colocado en la parte superior de la jaula de protección del QBall 2 y configurado de tal manera que el punto de giro (o centro) corresponde a la posición del centro de rotación de QBall 2 donde se encuentra el marco en forma de cruz. El cuerpo rígido también proporciona la medición de la rotación alrededor del eje vertical para controlar la guiñada del QBall 2.

Anexos

Código MATLAB. Ejemplo ilustrativo para representar el control por reconfiguración de la velocidad de guiñada de una aeronave (modelo lineal).

```
function dy = fault_control_quadrotor(t,y)
x1=y(1);
x2=y(2);
x3=y(3);
xd=1;
% ur=(-x3+xd);
% ut=0;
ut=2*(-x3+xd); %doble para contrarrestar
dy = zeros(3,1); % a column vector
dy(1) = -x1; %falla
% dy(1) = -x1+ur;
dy(2) = -x2+ut;
dy(3) = 0.27*x1+0.13*x2+0.001*x3;
```

Bibliografía

- [1] Raffo, G. V. (2007). Modelado y Control de un Helicóptero Quad-Rotor. MS, disertación, Dept. telemática, automática y robótica, Univ. de Sevilla.
- [2] Noth, A., Bouabdallah, S., & Siegwart, R. (2006). Dynamic Modeling of Fixed-Wing UAVs. Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- [3] Kim, J., Kang, M. S., & Park, S. (2009). Accurate modeling and robust hovering control for a quad-rotor VTOL aircraft. In Selected papers from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA. (pp. 9-26). Springer Netherlands.
- [4] Pérez-Alcocer, R., Moreno-Valenzuela, J., & Miranda-Colorado, R. (2016). A robust approach for trajectory tracking control of a quadrotor with experimental validation. ISA transactions, (Vol. 65, pp. 262-274).
- [5] Bouabdallah, S., Noth, A., & Siegwart, R. (2004, Septiembre). PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, (IROS 2004). Proceedings. (Vol. 3, pp. 2451-2456).
- [6] Bouabdallah, S., Murrieri, P., & Siegwart, R. (2004, Abril). Design and control of an indoor micro quadrotor. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, (ICRA 2004). Proceedings. (Vol. 5, pp. 4393-4398).
- [7] Fantoni, I., & Lozano, R. (2002). Non-linear control for underactuated mechanical systems. Springer Science & Business Media.
- [8] Dziugys, A., & Peters, B. (2001). An approach to simulate the motion of spherical and non-spherical fuel particles in combustion chambers. Granular matter. (Vol. 3 no. 4, pp. 231-266).
- [9] Craig, J. J. (2005). Introduction to robotics: mechanics and control (Vol. 3, pp. 48-70). Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
- [10] Ortega Linares, M. G. (2001). Aportaciones al control H_∞ de sistemas multivariables. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- [11] Albea-Sanchez, C., Ortega, M. G., Salas, F., & Rubio, F. (2006, Septiembre). Aplicación del control H infinito al PPCar. In XXVII Jornadas de Automática (p. 1).
- [12] Gadewadikar, J., Lewis, F., Subbarao, K., Chen, B., & Peng, K. (2006, Agosto). H-infinity static output-feedback control for rotorcraft. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit (p. 6238).

- [13] Gadewadikar, J. (2007). H-infinity Output Feedback Control: Application To Unmanned Aerial Vehicle. Doctoral dissertation. University of Texas at Arlington.
- [14] Jafar, A., Fasih-UR-Rehman, S., Fazal-UR-Rehman, S., Ahmed, N., & Shehzad, M. U. (2016, Noviembre). A robust H_∞ control for unmanned aerial vehicle against atmospheric turbulence. In 2016 2nd International Conference on Robotics and Artificial Intelligence (ICRAI), (pp. 1-6).
- [15] Doyle, J. C. (1983, Diciembre). Synthesis of robust controllers and filters. In The 22nd IEEE Conference on Decision and Control, 1983. (Vol. 22, pp. 109-114).
- [16] Doyle, J. C. (1984, Octubre). Lecture notes in advances in multivariable control. In ONR/Honeywell workshop. Minneapolis, USA.
- [17] Boyd, S., Balakrishnan, V., & Kabamba, P. (1989). A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems. Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS). (Vol. 2 no. 3, pp. 207-219).
- [18] Doyle, John C., et al. (1989). "State-space solutions to standard H_2 /and H_∞ control problems." IEEE Transactions on Automatic control . (Vol. 34 no. 8 pp. 831-847).
- [19] Evangelista, C. A. (2012). Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden (Doctoral dissertation, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata).
- [20] Rascón, R., Calvillo, A., Ocampo, J. D. D. & Cárdenas-Valdez, J. (2015). Control por Modos Deslizantes Mejorado. Revista Aristas Investigación Básica y Aplicada.
- [21] Morse, A. A. A. S., Sussmann, E. D. S. H. J., & Utkin, V. I. (2008). Nonlinear and Optimal Control Theory. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy.
- [22] Edwards, C., & Spurgeon, S. (1998). Sliding mode control: theory and applications. Crc Press.
- [23] Alwi, H., Edwards, C. and Tan, C. (2011). Fault detection and fault-tolerant control using sliding modes. London: Springer.
- [24] Sadeghzadeh, I., Mehta, A., Zhang, Y., & Rabbath, C. A. (2011, Septiembre). Fault-tolerant trajectory tracking control of a quadrotor helicopter using gain-scheduled PID and model reference adaptive control. In Annual conference of the prognostics and health management society (Vol. 2).
- [25] Ortiz-Torres, G., García-Beltrán, C. D., Reyes-Reyes, J., Vidal-Rosas, A., & Astorga-Zaragoza, C. M. (2015). Control Tolerante a Fallas Pasivo de un Octorotor tipo X8 utilizando Controladores Backstepping en Cascada.
- [26] Berbra, C., Lesecq, S., & Martinez, J. J. (2008, Junio). A multi-observer switching strategy for fault-tolerant control of a quadrotor helicopter. In IEEE Control and Automation, 16th Mediterranean Conference. (pp. 1094-1099).
- [27] Altug, E., Ostrowski, J. P., & Mahony, R. (2002). Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. In IEEE International Conference on Robotics and Automation. Proceedings. ICRA'02. (Vol. 1, pp. 72-77).

- [28] Bibik, P., Narkiewicz, J., Zasuwa, M., & Żugaj, M. (2016). Quadrotor Dynamics and Control for Precise Handling. In *Innovative Simulation Systems* (pp. 335-351). Springer International Publishing.
- [29] Lunze, J., & Richter, J. H. (2008). Reconfigurable fault-tolerant control: a tutorial introduction. *European journal of control*. (Vol. 14 no. 5, pp. 359-386).
- [30] M. H. Amoozgar, A. Chamseddine, and Y. Zhang. (2013). "Experimental test of a two-stage kalman filter for actuator fault detection and diagnosis of an unmanned quadrotor helicopter," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. (Vol. 70 no. 1-4, pp. 107-117).
- [31] A. Bani Milhim and Y. Zhang. (2010). "Gain scheduling based pid controller for fault tolerant control of a quad-rotor uav".
- [32] L. Fridman, S. Li, A. Levant, X. Chen, and X. Yu. (2015). "Editorial: Sliding-mode based disturbance estimation, attenuation and fault detection," *IET Control Theory Applications*. (Vol. 9 no. 4, pp. 511-514).
- [33] A. Lanzon, A. Freddi, and S. Longhi. (2014). "Flight control of a quadrotor vehicle subsequent to a rotor failure," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. (Vol. 37 no. 2, pp. 580-591).
- [34] L. Sevilla Fernández. (2014). "Modelado y control de un cuadricóptero". ICAI – Universidad Pontificia Comillas.
- [35] F. Sharifi, M. Mirzaei, B. W. Gordon, and Y. Zhang. (2010). "Fault tolerant control of a quadrotor uav using sliding mode control," in *IEEE Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*. (pp. 239-244).
- [36] Altuğ, Erdiñç, James P. Ostrowski, and Robert Mahony. (2002). "Control of a quadrotor helicopter using visual feedback." In *IEEE International Conference on Robotics and Automation. Proceedings. (ICRA 2002)*. (Vol. 1).
- [37] A. Hualde, J. Carrillo, C. la colaboración de Ricardo Domínguez, M. J. Fernández, R. Gomis, J. A. Rodríguez, and R. Zárate. (2005). "Diagnóstico de la industria aeroespacial en Baja California. características productivas y requerimientos actuales y potenciales de capital humano".
- [38] A. Hualde and J. Carrillo. (2007). *La industria aeroespacial en Baja California: Características productivas y competencias laborales y profesionales*. Colegio de la Frontera Norte.
- [39] "México y la industria aeronáutica global. Una publicación para entender, obtener información y generar estrategia". Producen-Centro de Inteligencia Estratégica. Tijuana. Edición 2005-2006.
- [40] Aguilar, L., Orlov, Y. and Acho, L. (2003). Nonlinear H_∞ -control of nonsmooth time-varying systems with application to friction mechanical manipulators. *Automatica* (Vol. 9, pp.1539-1542).
- [41] Rascón, R., Alvarez, J. and Aguilar, L. (n.d.). Discontinuous H_∞ control of underactuated mechanical systems with friction and backlash. *International Journal of Control, Automation, and Systems*.
- [42] I. A. y Astolfi A. (1992). "Disturbance attenuation and h-infinity control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*. (Vol. 37, pp. 1283-1293).

- [43] Y. V. Orlov and L. T. Aguilar. (2014). Advanced H_∞ Control: Towards Nonsmooth Theory and Applications. Springer Science & Business Media.
- [44] A. F. Filippov. (1988). "Differential equations with discontinuous right-handsides," Dordercht, The Netherlands: Kluwer.
- [45] U. VI. (1992). Sliding modes in control optimization, Berlin, Ed. Springer-Verlag.
- [46] R. Rascón, J. Alvarez, and L. Aguilar, (2012). "Regulation and force control using sliding modes to reduce rebounds in a mechanical system subject to a unilateral constraint," Control Theory & Applications, IET. (Vol. 6 no. 18, pp. 2785–2792).
- [47] R. Rascón, J. Alvarez, and L. T. Aguilar. (2014). "Control robusto de posición para un sistema mecánico subactuado con fricción y holgura elástica," Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI. (Vol. 11 no. 3, pp. 275–284).
- [48] B. T. y Bernhard P. (1990). H-infinity optimal control and related minimax design problems: A dynamic game aproach. Birkhauser, Boston.
- [49] N. K. y. K. P. Ravi R. (1991). "H-infinity control of linear time-varying systems: A state-space approach". (Vol. 29, pp. 1394–1413).
- [50] V. D. S. A.J. (1992). "L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback control," IEEE Transactions on Automatic Control. (pp. 770–784).
- [51] A. L. Aguilar L., Orlov Y. (2003). "Nonlinear h-infinity tracking control of friciton machanical manipulator," Proc. American Control Conference, Anchorage, Alaska.
- [52] B. Brogliato. (1996). "Nonsmooth impact mechanics. models, dynamics and control," New York: Springer Verlag.
- [53] O. Y. y Acho L. (1999). "Nonlinear h-infinity control of time-varying systems," Proc. of the 38th. conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona. (pp. 3764–3769).
- [54] CITEDI (2016). Manual de usuario del Qball 2 para QUARC.
- [55] Itkis, U. (1976). Control systems of variable structure. Jerusalem: Israel University Press.
- [56] Utkin, V. (1977). Variable structure systems with sliding modes. IEEE Transactions on Automatic Control. (Vol. 22 no. 2, pp. 212-222).