

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
ENSENADA



PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E
INGENIERÍA (MyDCI) EN ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL

Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden
entero y fraccional

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

presenta:

Oscar Ricardo Acosta Del Campo

Ensenada, Baja California, México, Noviembre 2013.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
UNIDAD ENSENADA

**Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden
entero y fraccional**

TESIS

que para obtener el grado de doctor en ciencias presenta:

Oscar Ricardo Acosta Del Campo

Y aprobada por el siguiente comité:



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Codirector del Comité



Dr. César Cruz Hernández

Codirector del Comité



Dr. Cornelio Posadas Castillo

Miembro del Comité



Dr. Martín Velasco Villa

Miembro del Comité



Dr. Liliana Cardoza Avendaño

Miembro del Comité

Noviembre 2013

RESUMEN de la tesis de **Oscar Ricardo Acosta Del Campo**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELÉCTRICA con orientación en CONTROL. Ensenada, B.C. México, Noviembre 2013.

Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden entero y fraccional

Resumen aprobado por:



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Codirector de Tesis



Dr. César Cruz Hernández

Codirector de Tesis

En este trabajo de tesis se presenta la sincronización de redes complejas en diferentes topologías. Particularmente se sincronizan redes con nodos caóticos de orden entero, es decir, el orden de las derivadas es un número entero. De igual forma, se realiza la sincronización de redes con nodos caóticos de orden fraccional, es decir, el orden de sus derivadas es una fracción (generalmente entre 0 y 1).

Se realizó la sincronización de redes en diferentes topologías, las topologías utilizadas para nodos de orden entero, fueron: la topología de vecino cercano y la de mundo pequeño, tales topologías fueron realizadas con el oscilador de Chua con retardo y el oscilador de Rössler como nodos. Para dichas sincronizaciones se calculó la fuerza de acoplamiento c necesaria para sincronizar la red en topología de mundo pequeño para un número N de nodos. Para la sincronización de mundo pequeño se utilizó la teoría de redes complejas, la cual, a partir de los valores propios de la red y una cantidad de N nodos podemos obtener el valor de la fuerza de acoplamiento c que garantiza la sincronización de la red. En dicha sincronización de mundo pequeño se obtuvo una gráfica que relaciona los valores propios con la cantidad de N nodos de la red y en la cual, se aprecia la región de sincronización de dicha red para N nodos. (La cantidad N de nodos es limitado solo por la capacidad de procesamiento computacional).

Las topologías utilizadas para nodos con orden fraccional fueron: la topología maestro-esclavo utilizando el oscilador de Chua de orden fraccional como nodo y la teoría hamiltoniana para su sincronización, se obtuvieron los valores de ganancias del observador que garantizan la sincronización maestro y esclavo. Además, para tal sincronización se realizó una aplicación a las comunicaciones seguras, donde se encriptó un mensaje el cual fue recuperado en el esclavo de forma satisfactoria. Otra topología utilizada es la de vecino cercano y mundo pequeño para el oscilador de Chua de orden fraccional, como en el caso de orden entero se obtuvo una gráfica que muestra la zona de sincronización de acuerdo a los valores propios y a los N nodos de la red donde se garantiza la sincronización de la red.

Para comprobar la efectividad de la teoría de sistemas complejos en la sincronización de redes, se recurrió la topología en estrella usando como nodos un sistema hipercaótico modificado de Lorenz fraccional propuesto recientemente, para el cual, se calculó la fuerza de acoplamiento c que garantiza la sincronización de la red, además se realizó una aplicación a las comunicaciones seguras, donde se encriptó una señal de audio, la cual, se recuperó satisfactoriamente en cada uno de los nodos receptores de la red.

Palabras clave: Sincronización, redes complejas, topologías de redes, sistemas fraccionales, caos, comunicaciones seguras.

ABSTRACT of the thesis presented by **Oscar Ricardo Acosta Del Campo**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR IN SCIENCE degree in ELECTRIC with orientation in CONTROL. Ensenada, B.C. México, November 2013.

Complex networks synchronization with chaotic nodes of integer and fractional order

Abstract approved by:



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Thesis codirector



Dr. César Cruz Hernández

Thesis codirector

In this thesis work presents the complex networks synchronization in different topologies. Particularly are synchronized networks with chaotic nodes of integer order, i.e. the derivatives order is an integer number. Similarly, network synchronization is performed with chaotic nodes of fractional order, i.e. the derivatives order is a fractional number (usually between 0 and 1).

It realized network synchronization in different topologies, the topologies used for nodes of integer order, were: the nearest-neighbor topology and small world topology, such topology were performed with delayed Chua oscillator and Rossler oscillator like nodes. For such synchronizations are calculated the coupling strength c necessary to synchronize the small world network topology for number N of nodes. For small world synchronization was utilized complex networks theory, which, from the eigenvalues of the network and a number of N nodes can obtain the value of the coupling strength c ensuring network synchronization. In the small world synchronization was obtained a graph, that relating the eigenvalues and the amount of N nodes in the network and in which, shows network synchronization region for N nodes. (The number N of nodes is limited only by the computational processing).

The topologies used for fractional order nodes were the master-slave topology using the fractional order Chua oscillator like node and Hamiltonian theory for your synchronization were obtained observer gain values that guarantee the master-slave synchronization. Additionally, for such synchronization was performed an application to secure communications, where was encrypted a message which was recovered in the slave satisfactorily. Other topologies used is the nearest-neighbor and small world for fractional order Chua oscillator, as in the case of integer order was obtained a graph showing the area of synchronization according to the values and the N nodes of the network which ensures network synchronization.

To test the effectiveness of the complex systems theory to network synchronization, we used the star topology using modified hiperchaotic fractional Lorenz system as nodes

recently proposed, for which we calculated the coupling strength c that ensures network synchronization also was performed an application to secure communications in networks, which was audio signal encrypted, which is successfully recovered in each one of the network nodes.

Keywords: Synchronization, complex networks, network topologies, fractional systems, chaos, secure communications.

A mis padres

*Pablo Acosta López y
Rosa María Del Campo Moreno*

Agradecimientos

A **Dios** por darme la vida y ponerme en el camino para llegar hasta donde estoy.

A **Mis Padres** ya que gracias a ellos soy quien soy, fueron los que me dieron el cariño y amor necesario, son los que han velado por mi salud, mis educación, alimentación y muchas cosas mas, son ellos a quien les debo todo, horas de consejos, de regaños, de tristezas y de alegrías, lo cual, estoy seguro que lo han hecho con todo el amor del mundo para formarme como un ser de bien y de los cuales me siento muy orgulloso .

A todos los miembros de mi comite de tesis, al **Dr. César Cruz Hernández** por la confianza que puso en mi, por su correcta dirección y compromiso en todo el trabajo realizado, sobre todo por su apoyo y amistad brindada, gracias. A la **Dra. Rosa Martha López Gutiérrez**, por sus valiosas aportaciones realizadas en este trabajo, su valiosa amistad, entusiasmo y gran apoyo, gracias. Al **Dr. Cornelio Posadas Castillo** por su contribución a la realización de esta tesis, además por el apoyo otorgado para la culminación de este proyecto, gracias. Al **Dr. Martin Velasco Villa** por su contribución, amistad y esfuerzo para el enriquecimiento de esta tesis, gracias. A la **Dra. Liliana Cardoza Avendaño** por su contribución a la culminación de esta tesis, por su amistad y apoyo, gracias.

A mi amada esposa **Roxana** por todo su amor y comprensión, gracias por ser parte de mi vida, te amo.

A **mis hermanos** Pablo, Jennifer, Breeanna y Marissa por el cariño y apoyo que me dan, por todo lo que hemos compartido y todos los momentos significativos que hemos vivido.

A **mis compañeros y amigos** por su amistad, apoyo y por todos los momentos que han hecho que la vida sea mas sencilla y alegre.

A la **Universidad Autónoma de Baja California** por darme la oportunidad de ingresar y continuar con mi preparación profesional.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por el apoyo económico brindado.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** a través del proyecto de grupos de investigación en ciencia básica, referencia 166654.

A todos mis **maestros** que de una u otra forma colaboraron o participaron en mi educación y en la realización de este trabajo.

Ensenada, B. C. México.
15 de Noviembre de 2013.

Oscar Ricardo Acosta Del Campo

Tabla de Contenido

Capítulo	Página
Tabla de Contenido	i
Resumen	iii
Abstract	v
Agradecimientos	ix
Lista de Figuras	xiv
I Introducción	1
I.1 Motivación	2
I.2 Objetivos	2
I.3 Estructura de la tesis	3
II Redes complejas	5
II.1 Introducción	5
II.2 Teoría de grafos	5
II.2.1 Variables medibles	6
II.2.1.1 Densidad	6
II.2.1.2 Grado	6
II.2.1.3 Distancia	6
II.2.1.4 Coeficiente de agrupamiento	7
II.2.1.5 Conectividad	7
II.2.1.6 Matriz de grafo	8
II.2.1.7 Espectro de grafo	8
II.2.1.8 Valores propios de grafo	8
II.2.2 Topologías de redes	9
II.2.2.1 Topología de anillo o vecino cercano	9
II.2.2.2 Topología jerárquica o de árbol	11
II.2.2.3 Topología en estrella	13
II.2.2.4 Topología global	14
II.3 Modelos de redes complejas	15
II.3.1 Redes aleatorias o de Erdős y Rényi	16
II.3.2 Redes de mundo pequeño o de Watts y Strogatz	17
II.3.3 Redes libres de escala o de Barabási y Albert	18
II.4 Conclusión	19
III Fundamentos de cálculo fraccional	20
III.1 Introducción	20
III.2 Ecuaciones integro-diferenciales de orden fraccional	21
III.2.1 Funciones especiales	21
III.2.2 Definición de derivadas e integrales fraccionales	21
III.2.3 Integral y derivada fraccional de Grünwald-Letnikov (GL)	22
III.2.4 Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville (RL)	24
III.2.5 Derivada fraccional de Caputo	25

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
III.3	Método numérico para el cálculo de derivadas e integrales de orden fraccional 25
III.4	Conclusión 26
IV	Aplicaciones del cálculo fraccional 27
IV.1	Introducción 27
IV.2	Aplicaciones al modelado de sistemas físicos con memoria 28
IV.2.1	Difusión 28
IV.2.2	Viscoelasticidad 29
IV.2.3	Movimiento browniano 30
IV.3	Aplicaciones en ingeniería 31
IV.3.1	Electrónica fraccional 31
IV.3.1.1	Circuito fractance 31
IV.3.2	Sistemas de control 32
IV.4	Aplicaciones en sistemas no lineales 34
IV.4.1	Sistemas caóticos de orden fraccional 34
IV.5	Conclusión 34
V	Sistemas caóticos 36
V.1	Introducción 36
V.2	Sistemas caóticos 36
V.3	Sistemas caóticos de orden entero 37
V.3.1	Oscilador de Rössler 37
V.3.2	Oscilador de Chua con retardo 37
V.4	Sistemas caóticos de orden fraccional 39
V.4.1	Oscilador de Chua de orden fraccional 39
V.4.2	Sistema hipercaótico de orden fraccional 42
V.5	Conclusión 42
VI	Sincronización de redes complejas 44
VI.1	Introducción 44
VI.2	Métodos de sincronización 44
VI.2.1	Teoría de redes complejas 44
VI.2.1.1	Condiciones de sincronización 46
VI.2.2	Formas hamiltonianas 46
VI.2.2.1	Diseño de un observador no lineal para una clase de osciladores en forma hamiltoniana generalizada 47
VI.2.2.2	Estabilidad del error de sincronía 48
VI.3	Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden entero . . 49
VI.3.1	Sincronización del oscilador de Rössler en mundo pequeño 49
VI.3.1.1	Sincronización de redes con nodos de Rössler en vecino cercano 49
VI.3.1.2	Sincronización de redes con nodos de Rössler en mundo pequeño 54

Tabla de Contenido (Continuación)

Capítulo	Página
VI.3.2 Sincronización en red del oscilador de Chua con retardo	58
VI.3.2.1 Sincronización de red acoplada en configuración de vecino más cercano	58
VI.3.2.2 Sincronización de red acoplada en configuración mundo pe- queño	68
VI.3.2.3 Sincronización de red acoplada en configuración anillo abierto	72
VI.3.2.4 Sincronización de red acoplada en configuración estrella . .	76
VI.3.2.5 Sincronización de red acoplada en configuración global . . .	79
VI.3.2.6 Sincronización de red acoplada en configuración árbol	82
VI.4 Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden fraccional	86
VI.4.1 Sincronización en maestro y esclavo del oscilador de Chua de orden fraccional por formas hamiltonianas	86
VI.4.2 Sincronización en mundo pequeño del oscilador de Chua de orden fraccional	88
VI.4.3 Sincronización en configuración estrella del sistema hipercaótico mo- dificado de Lorenz	95
VI.5 Conclusiones	100
VII Aplicación a las comunicaciones seguras	101
VII.1 Introducción	101
VII.2 Aplicación a las comunicaciones	101
VII.2.1 Transmisión de audio encriptado	101
VII.3 Conclusión	105
VIII Conclusiones	106
VIII.1 Aportaciones	106
VIII.1.1 Artículos publicados en revistas	106
VIII.1.2 Congresos	107
VIII.2 Principales contribuciones de este trabajo doctoral	108
VIII.3 Trabajos a futuro	108
Referencias	111

Lista de Figuras

Figura	Página
1 Red en anillo o vecino cercano con $N = 8$ nodos.	11
2 Red en topología jerárjica o árbol con $N = 7$ nodos.	12
3 Red en topología extrella con $N = 5$ nodos.	14
4 Red en topología global $N = 5$ nodos.	15
5 Red aleatoria: el incremento de la probabilidad de conexión p implica que va de una baja densidad de conexión para el que existen pocos enlaces y muchos componentes pequeños a una alta densidad de conexión para el que una amplia fracción de todos los nodos están unidos entre sí en un solo componente gigante. La figura se ha tomado de [23].	16
6 Red de mundo pequeño: el aumento de la probabilidad de recableado p_r implica que va de la red totalmente ordenada ($p_r = 0$) a la gráfica completamente aleatoria ($p_r = 1$): (a) $p = 0$, (b) $p = 0.2$ y (c) $p = 0.9$ respectivamente. La figura se ha tomado de [23].	18
7 Red libre de escala: un rasgo característico de estas estructuras es que algunos nodos tienen un grado que es varios órdenes de magnitud mayor que el valor promedio. La figura se ha tomado de [25].	19
8 Circuito de árbol fractance.	31
9 Estructura general del controlador $PI^\lambda D^\delta$	33
10 Atractor caótico generado por el oscilador de Rössler proyectado dentro del espacio (x_1, x_2, x_3)	37
11 Circuito electrónico del oscilador de Chua con retardo de tiempo [63].	38
12 Atractores hipercaóticos generados por el oscilador de Chua con retardo.	39
13 Oscilador clásico de Chua.	40
14 Atractores caóticos del oscilador de Chua de orden fraccional.	41
15 Atractores hipercaóticos del sistema modificado de Lorenz de orden fraccional.	43
16 Atractores en punto fijo generados por un nodo aislado de Rössler con una retroalimentación de control $-\bar{d}x_1$	51
17 Red en vecino cercano con $N = 8$ nodos caóticos de Rössler	51
18 Atractores caóticos proyectados en el plano (x_{i1}, x_{i2}) para $N = 8$ nodos caóticos de Rössler.	52
19 Sincronización de la red del primer estado de los 8 nodos caóticos de Rössler $x_{i1}, i = 1, \dots, 8$ en la red con nodos acoplados en vecino cercano.	52
20 Red en vecino cercano con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler.	53
21 Retrato de fase de la no sincronización entre 9 nodos de la red en configuración de vecino cercano.	54
22 Red en mundo pequeño con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler acoplados.	56
23 Atractores caóticos proyectados en el plano (x_{i1}, x_{i2}) en configuración de mundo pequeño de los $N = 9$ nodos.	56

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
24 Sincronización de los primeros estados (x_{i1} , $i = 1, \dots, 9$) de cada nodo entre los 9 nodos de la red en configuración de mundo pequeño.	57
25 Valores numéricos de $\lambda_{2ns}(p; N)$ como una función de la probabilidad p : (a) $N = 200$ nodos caóticos de Rössler, (b) $N = 500$ nodos caóticos de Rössler. .	59
26 Valores numéricos de $\lambda_{2ns}(p; N)$ como una función del número de N nodos caóticos de Rössler: (a) $p = 0.05$, (b) $p = 0.1$	60
27 Valores de p y N para lograr la sincronización de red en mundo pequeño de osciladores de Rössler.	61
28 Atractores punto fijo del circuito de Chua con retardo aislado con retroalimentación $-\bar{d}x_1$	62
29 Red en configuración vecino cercano bidireccional: a) con $N = 5$ nodos, b) con $N = 6$. nodos	63
30 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en la red, con acoplamiento bidireccional y con $N = 5$	63
31 Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano.	64
32 Plano de fase entre los 6 nodos de la red en vecino cercano acoplados bidireccionalmente.	65
33 Red en configuración de vecino cercano unidireccional. a) Con $N = 5$, b) Con $N = 6$	66
34 Atractores caóticos proyectados en el plano (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo con acoplamiento unidireccional con $N = 5$ nodos.	67
35 Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano unidireccional con $N = 5$ nodos.	67
36 Plano de fase en vecino cercano unidireccional entre los 6 nodos de la red. .	68
37 Red en configuración en mundo pequeño con $N = 6$: a) bidireccional, b) unidireccional.	70
38 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en configuración de mundo pequeño con $N = 6$ acoplados bidireccionalmente.	70
39 Plano de fase (sincronía) entre los 6 nodos de la red en configuración de mundo pequeño acoplados bidireccionalmente.	71
40 Número de nodos en función de los valores propios para lograr la sincronía. .	71
41 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en la red en configuración de mundo pequeño unidireccional con $N = 6$	73
42 Plano de fase entre los 6 nodos de la red en configuración mundo pequeño unidireccional.	73
43 Red en configuración anillo abierto con $N = 6$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.	74
44 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) generados por cada nodo en anillo abierto bidireccional, $N = 6$	75

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
45 Sincronización entre los 6 nodos de la red en anillo abierto bidireccional con $N = 6$	75
46 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en anillo abierto unidireccional, $N = 6$	76
47 Sincronización entre los 6 nodos de la red en anillo abierto unidireccional con $N = 6$	77
48 Red en configuración estrella con $N = 5$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.	78
49 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) generados por cada nodo en estrella bidireccional, $N = 5$	78
50 Sincronización entre los 5 nodos de la red en estrella bidireccional con $N = 5$	79
51 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en estrella unidireccional, $N = 5$	80
52 Sincronización entre los 5 nodos de la red en estrella unidireccional con $N = 5$	80
53 Red en configuración global con $N = 6$ nodos.	81
54 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en global, $N = 6$ nodos.	81
55 Sincronización entre los 6 nodos de la red con acoplamiento global.	82
56 Red en configuración árbol con $N = 7$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.	83
57 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en árbol bidireccional, $N = 7$	83
58 Sincronización entre los 7 nodos de la red en árbol bidireccional con $N = 7$	84
59 Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en árbol unidireccional, $N = 7$	85
60 Sincronización entre los 7 nodos de la red en árbol unidireccional con $N = 7$	85
61 Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$	87
62 Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 0.6$, $k_2 = 1.16$ y $k_3 = 0$	88
63 Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ y $k_3 = 0$	89
64 Atractores de un sistema de Chua de orden fraccional con retroalimentación $-\tilde{d}x_1$	90
65 Red en configuración vecino cercano: a) $N = 5$, b) $N = 6$	91
66 Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano.	91
67 Plano de fase entre los 6 nodos de la red en vecino cercano.	93
68 Red en configuración mundo pequeño con $N = 6$	94
69 Plano de fase ilustrando la sincronía entre los 6 nodos de la red en configuración mundo pequeño.	94
70 Número de nodos caóticos fraccionales en función de los valores propios para lograr la sincronización de la red compleja en configuración mundo pequeño.	95
71 Red en topología extrella con $N = 5$ nodos.	96
72 Atractores tridimensionales x_{i1} vs x_{i2} vs x_{i3} de cada uno de los 5 nodos.	99

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
73	Plano de fase de sincronización en topología estrella con $N = 5$ nodos. . . .	99
74	Esquema para encriptado, transmisión y desencriptado de información en la red de 5 nodos.	103
75	Sección de la canción “Vita E Bella” para encriptar y transmitir por la red. .	103
76	Señal $x_{11}(t)$ del transmisor donde el mensaje será encriptado.	104
77	Señal caótica de transmisión $s(t) = x_{11}(t) + m(t)$	104
78	Mensaje transmitido y recuperado en cada receptor.	105

Capítulo I

Introducción

Recientemente, se han estudiado de manera más adecuada fenómenos o procesos en diferentes campos científicos, relacionándolos con la teoría de grafos, el uso matemático de estos enfoques ha traído grandes ventajas, ya que permiten verlos como una red, donde varios de estos fenómenos pueden verse como redes con topologías sencillas, es decir, donde se conocen perfectamente sus características y tienen propiedades comunes entre ellas. Sin embargo, la complicada estructura de muchos fenómenos nos obliga a utilizar modelos de redes complejas.

Un ejemplo del uso de topologías sencillas es en el campo de estudio computacional. El uso de las diferentes topologías de red, se ha ampliado considerablemente en los últimos años, llegando a ser indispensable en este ámbito, por ejemplo, en las redes de computadoras, ya sea a nivel local o global (web) se tiene la capacidad de reducir recursos a través del uso de las diferentes topologías conocidas, el cual ha sido uno de los avances más significativos en el área, no se podría tener la velocidad actual en el flujo de información si no fuera por la optimización otorgada por las topologías de red utilizadas, así como la fiabilidad en los enlaces realizados.

Los modelos de redes complejas involucran fenómenos donde se tienen propiedades no triviales en las redes, dichas redes complejas emergen en un amplio rango de disciplinas de las ciencias naturales y sociales. Los ejemplos de redes complejas frecuentemente utilizados incluyen la internet, la World Wide Web (WWW), las redes eléctricas, redes de transporte, ecosistemas, redes genéticas, redes neuronales, etc. Las redes complejas pueden definirse simplemente como un sistema físico o virtual de componentes interconectados, donde las interacciones entre los componentes dan lugar a formas intrincadas de los elementos, las propiedades que emergen como producto de dichas interacciones son consideradas complejas en virtud a la estructura no trivial de la red.

Los componentes de tales redes, comúnmente conocidos como nodos, tienen características propias, que pueden o no afectar el comportamiento colectivo de la red. En esta tesis, nos enfocamos a utilizar sistemas caóticos como los nodos de las redes. Un sistema caótico se caracteriza por generar dinámicas complejas y dentro de sus características se encuentran: la sensibilidad de condiciones iniciales, una característica muy importante al hacer la aplicación a las comunicaciones seguras, donde es necesario realizar la sincronización entre los sistemas para poder recuperar la información.

El hecho de generar dinámica compleja (dinámica aparentemente aleatoria), ha sido la principal motivación para utilizar a dichos sistemas caóticos en diferentes protocolos de

comunicación, ya que se puede encriptar la información utilizando la dinámica compleja del sistema caótico como portadora, logrando una protección de información de forma eficiente.

Durante muchos tiempo, los modelos utilizados para los sistemas caóticos han sido de orden entero ver por ejemplo [1]-[3], es decir, un modelo es una representación matemática de un sistema físico, el cual, puede ser representado por medio de ecuaciones integro-diferenciales ordinarias de orden entero (la potencia de la derivada es un número entero), tales modelos nos ofrecen dinámicas lo más aproximadas a la del sistema físico y con lo cual, se pueden realizar las investigaciones y controles requeridas al sistema.

Sin embargo, recientemente se han propuesto y utilizado modelos de sistemas caóticos de orden fraccional, dichos modelos nos ofrecen aproximaciones más cercanas a la realidad (del sistema físico), si bien, aunque la teoría fraccional se conoce desde hace siglos, no podía ser tan fácilmente utilizada, debido a la complejidad de los cálculos matemáticos involucrados, con el avance de la tecnología y la disponibilidad de un alto poder computacional se han desarrollado técnicas para poder utilizar la teoría fraccional en los diferentes campos de estudio. En la literatura se reportan modelos fraccionales que generan caos, ver por ejemplo [4], [5].

En esta tesis doctoral se realiza la sincronización de redes en diferentes topologías utilizando nodos caóticos de orden entero y nodos caóticos de orden fraccional y se aplica dicha sincronización a la transmisión segura de información confidencial.

I.1 Motivación

La motivación principal y que incitó a la realización de este trabajo de tesis doctoral, es la creciente investigación en el campo de sincronización de redes complejas y su continuo desarrollo y aplicación en los diferentes campos de estudio. Las redes complejas las encontramos en la mayor parte de los fenómenos de estudio. Actualmente la sincronización de redes complejas ha tenido gran éxito, debido a la cantidad de aplicaciones donde se utiliza, ver por ejemplo [6], [7]. Una de las aplicaciones con mayor auge es la de encriptado de información, conociendo las características y ventajas de los sistemas caóticos fraccionales, podemos inferir que utilizándolos como nodos, tal encriptado será más eficiente en las redes de comunicaciones.

I.2 Objetivos

Dado el enorme interés que ha despertado el estudio de las redes complejas en los últimos años en muchas áreas científicas y tecnológicas, en particular, la sincronización de redes

complejas y a las muchas aplicaciones en la ingeniería; con la realización de este trabajo de tesis doctoral, se planteó alcanzar el siguiente **objetivo general**.

Sincronizar redes complejas con diferentes topologías, especialmente redes de mundo pequeño y redes regulares, utilizando como nodos algunos sistemas caóticos de interés, particularmente sistemas de orden entero y fraccional.

Los objetivos particulares que fueron abordados son los siguientes:

- Sincronizar redes complejas en mundo pequeño con sistemas caóticos de orden entero como nodos, específicamente los osciladores de Rössler y Chua con retardo.
- Sincronizar redes complejas en diferentes topologías con sistemas caóticos de orden entero como nodos, específicamente el oscilador de Chua con retardo, dichas topologías son: anillo abierto, estrella, global y árbol.
- Sincronización en maestro y esclavo utilizando formas hamiltonianas con sistemas caóticos de orden fraccional como nodos, específicamente el oscilador de Chua de orden fraccional.
- Sincronizar redes complejas en mundo pequeño con sistemas caóticos de orden fraccional como nodos, específicamente el oscilador de Chua de orden fraccional.
- Sincronizar redes en estrella con sistemas caóticos de orden fraccional como nodos, específicamente el sistema hipercaótico modificado de Lorenz.
- Realizar la comunicación segura de información en redes complejas utilizando como nodos sistemas caóticos de orden fraccional.

I.3 Estructura de la tesis

La estructura de este trabajo de tesis doctoral es la siguiente: En el capítulo II se proporciona información indispensable acerca de las redes complejas, es decir, se presenta la teoría de grafos y algunas definiciones utilizadas en este trabajo de tesis, además se muestran las topologías regulares utilizadas e información acerca de ellas, así como también los tipos de redes complejas más utilizadas en la actualidad y por último, se da una conclusión del capítulo. En el capítulo III se presentan los fundamentos del cálculo fraccional, es decir, la teoría fraccional utilizada en este trabajo de tesis, como las funciones que se utilizan, principales definiciones, etc., también se muestra el método numérico utilizado para realizar

las simulaciones hechas en este trabajo, al final se dan algunas conclusiones. En el capítulo IV se describen algunas de las principales aplicaciones que tiene el cálculo fraccional en la actualidad, principalmente aplicaciones en modelado, como la viscoelasticidad, aplicaciones en la ingeniería, como los sistemas de control fraccional y aplicaciones en sistemas no lineales, como los sistemas caóticos fraccionales, por último se dan las conclusiones del capítulo. En el capítulo V se da la información acerca de los sistemas caóticos utilizados en este trabajo de tesis, los cuales son sistemas de orden entero, como el oscilador de Rössler y el oscilador de Chua con retardo, también sistemas de orden fraccional, como el oscilador de Chua fraccional y el sistema hipercaótico modificado de Lorenz, al final se dan algunas conclusiones. En el capítulo VI se muestran los resultados obtenidos de la simulación de la sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden entero y fraccional, se muestra la sincronización de redes en mundo pequeño del oscilador de Rössler y del oscilador de Chua con retardo, también se muestra la sincronización de redes con topologías anillo abierto, estrella, global y árbol del oscilador de Chua con retardo. Por otra parte, utilizando nodos caóticos de orden fraccional se muestran los resultados de la sincronización en maestro y esclavo por formas hamiltonianas con el oscilador de Chua de orden fraccional, también se muestra la sincronización de redes en mundo pequeño utilizando este mismo sistema de orden fraccional y se muestra la sincronización en estrella utilizando como nodo el sistema hipercaótico modificado de Lorenz, por último se dan algunas conclusiones. En el capítulo VII se realiza la aplicación a las comunicaciones seguras, es decir, se realiza el encriptamiento y transmisión de información en redes complejas, esto se realiza con nodos caóticos de orden fraccional. Por último, en el capítulo VIII se dan las conclusiones generales resultadas de este trabajo de tesis doctoral; además, se plantean algunos trabajos a futuro derivados de esta tesis.

Capítulo II

Redes complejas

II.1 Introducción

Tradicionalmente, las redes complejas fueron modeladas como redes completamente aleatorias. Como la ciencia de las redes complejas ha ido aumentando en importancia y popularidad, se han desarrollado otros modelos de redes complejas. Los dos ejemplos más conocidos de modelos de redes complejas reportados en la literatura reciente, son los modelos de mundo pequeño y libre de escala. En este capítulo se presentan los tres modelos comúnmente citados. Antes de dar la descripción formal de los modelos, se establecerá la notación estandar de la teoría de grafos y la terminología de redes complejas, material necesario para la buena comprensión de los capítulos posteriores de este trabajo de tesis.

II.2 Teoría de grafos

Un grafo $G = (V, E, \epsilon)$ con aristas orientadas se define en el libro de Demel [8], donde V es un conjunto de vértices (en términos de redes les llamamos nodos), E es un conjunto de aristas (en términos de redes les llamamos conexiones) y ϵ es el mapeo $\epsilon : E \rightarrow V \times V$. $V_G(i)$ es un conjunto de nodos que son vecinos (en el sentido de conexión directa por una sola arista) del nodo i . Finalmente, $E_G(i)$ es un conjunto de conexiones que conectan el nodo i con sus vecinos.

La definición original implica la consideración de las conexiones orientadas. Sin embargo, la orientación de las conexiones puede ser información redundante en algunos modelos y en tal situación la orientación puede ser descartada. Tal estructura se denomina grafo con conexiones no orientadas.

Ambas definiciones de grafos incluyen múltiples conexiones, es decir, un par de nodos son conectados por múltiples conexiones, pero realmente basta con conexiones simples, es decir, un par de nodos pueden ser conectados una vez como máximo. Esta propiedad no influye en las funciones que se definen en los grafos. Por último, el grafo se puede generalizar para llevar información adicional. Estos grafos pueden definirse como $G = (V, E, \epsilon, v_V)$, $G = (V, E, \epsilon, v_E)$ y $G = (V, E, \epsilon, v_V, v_E)$, donde $v_V : V \rightarrow O_V$, $v_E : E \rightarrow O_E$ y O_V, O_E son conjuntos de un objeto adicional que puede ser un número real o natural.

II.2.1 Variables medibles

Además del modelado, el análisis de las propiedades topológicas relevantes, es uno de los principales objetivos que guían la investigación en redes complejas. Una propiedad topológica es una propiedad inherente gráfico-teórica, es decir, una propiedad que se conserva bajo todos los posibles cambios topológicos de un grafo. Esto significa que las redes con la misma propiedad topológica definen una cierta familia de grafos: los que tienen una determinada propiedad topológica especificada. Sin embargo, la propiedad topológica se refiere sólo a la caracterización descriptiva de las redes. Por ejemplo, la frase “una red no tiene nodos con un solo vecino” es una propiedad, mientras que “el número de nodos con más de dos vecinos en una red es igual a seis” es una medida topológica. En consecuencia, en los últimos años se propusieron una serie de medidas para expresar cuantitativamente propiedades topológicas relevantes de redes complejas. En esta sección se presenta un conjunto de medidas que se utilizarán con frecuencia al hablar de redes complejas.

II.2.1.1 Densidad

La *densidad* en una red, mide que tan completo es un grupo en términos de las relaciones entre sus miembros. En consecuencia, la densidad de enlace q , se define como la proporción del número máximo posible de enlaces que existen realmente entre todos los nodos.

II.2.1.2 Grado

El *grado* D de un nodo describe el número de enlaces o vecinos que un nodo tiene. La distribución de grado de un nodo es la probabilidad $Pr[D]$ que el grado D de un nodo seleccionado aleatoriamente tiene un valor determinado. El número de enlaces promedio que se conectan a un nodo se denomina *grado de nodo promedio*. El grado de nodo promedio se puede obtener fácilmente a partir de la distribución de grado a través de $E[D] = \sum_{d=1}^{D_{\max}} dPr[D]$, donde $D_{\max}$ es el grado máximo en un grafo dado.

El *grado de distribución conjunta* $Pr[D, \acute{D}]$ es la probabilidad de que los grados D y $\acute{D}$ de un par de nodos seleccionados aleatoriamente tengan un valor determinado. Una medida resumida del grado de distribución conjunta es el grado vecino promedio de nodos con un valor de grado determinado [?].

II.2.1.3 Distancia

El camino más corto H indica el número de saltos entre un determinado par de nodos. La distribución de *distancia* es la probabilidad $Pr[H]$ que el camino más corto H tiene entre

un par de nodos aleatorios. A partir de la distribución de distancia, la *distancia de nodo promedio* se deriva como $E[H] = \sum_{h=1}^{H_{max}} h \Pr[H]$, donde H_{max} es el más largo de los caminos más cortos entre un par de nodos cualquiera. H_{max} también se conoce como el diámetro de la red. Por otra parte, la *excentricidad* mide la distancia más grande entre un nodo dado y cualquier otro nodo de la red. La excentricidad de nodo promedio es el promedio de las excentricidades de todos los nodos. Obviamente, la excentricidad máxima es igual al *diámetro* de la red.

II.2.1.4 Coeficiente de agrupamiento

El *coeficiente de agrupamiento* c_i de un nodo i es la proporción del máximo número posible de enlaces que existen entre los nodos dentro de una vecindad del nodo i . Para una red no dirigida, un nodo i con el grado D_i tiene en la mayoría $\frac{D_i(D_i-1)}{2}$ enlaces entre los nodos dentro de su vecindad. En otras palabras, el coeficiente de agrupamiento es la relación entre el número de triángulos que contienen el nodo i y el número de triángulos que posiblemente podrían existir si todos los vecinos de i están interconectados [9]. El coeficiente de agrupamiento para todo el grafo c_G es el promedio de los coeficientes de agrupamiento de todos los nodos.

II.2.1.5 Conectividad

Una red se dice que está *conectada* si existe un camino entre cada par de nodos. Del mismo modo, cuando no hay un camino entre al menos un par de nodos, se dice que la red está desconectada. Si en la red hay un acoplamiento entre cada par de nodos, se dice que la red es completa y representada por K_N .

El *acoplamiento* K_L y la *conectividad* del nodo K_N son dos medidas de conectividad clásicas de una red. La conectividad de acoplamiento K_L es el número mínimo de enlaces cuya eliminación podría desconectar la red. La conectividad de nodo K_N se define de manera análoga (nodos unidos con enlaces adyacentes se eliminan). Para $k \geq 1$, una red es conectada k veces si una red es completa K_{k+1} o si tiene por lo menos $k + 2$ nodos y ningún conjunto de $k - 1$ nodos que los separa. Del mismo modo, para $k \geq 1$ una red es k veces acoplada si tiene por lo menos dos nodos y ningún conjunto de a lo mas $k - 1$ enlaces que los separa. El valor máximo de k para que una red sea conectada k veces es igual a la conectividad de nodos K_N . La conectividad de acoplamiento K_L se define de forma análoga [10]. El mínimo grado nodal D_{min} de una red incompleta es un límite superior tanto del nodo y la conectividad del acoplamiento $K_N \leq K_L \leq D_{min}$. Si una red es una red completa K_N , entonces $K_N = K_L = D_{min}$. Si $K_N = K_L = D_{min}$ también decimos que la conectividad de una red es óptima.

II.2.1.6 Matriz de grafo

Los métodos desarrollados en la teoría de grafos también ofrecen otra representación de una red, es decir, la matriz de adyacencia, la matriz laplaciana o cualquier otra característica de la matriz de una red. La matriz de adyacencia Ω de una red no dirigida de N nodos es una matriz de dimensión $N \times N$, donde los elementos fuera de la diagonal (i, j) son cero o uno, dependiendo de si el nodo i y el nodo j son adyacentes (están conectados). Todos los elementos de la diagonal (i, i) son cero. De esta manera, la matriz de adyacencia es simétrica. Un punto particular a destacar es que el número de elementos fuera de la diagonal en una fila i es igual al grado del nodo i . La matriz diagonal que contiene información sobre el grado de cada nodo, se denomina matriz de grado Δ . Se utiliza junto con la matriz de adyacencia para construir la matriz laplaciana de la red $\Lambda = \Delta - \Omega$.

La matriz laplaciana de una red no dirigida de N nodos es una matriz de dimensión $N \times N$, donde los elementos fuera de la diagonal (i, j) son cero o menos uno, dependiendo de si el nodo i y el nodo j están conectados. Los elementos de la diagonal (i, i) son igual al grado del nodo D_i . Otra representación de la matriz de una red es la matriz laplaciana normalizada Π . La matriz laplaciana normalizada de una red no dirigida de N nodos es una matriz de dimensión $N \times N$, donde los elementos fuera de la diagonal (i, j) son cero o menos la raíz cuadrada inversa del grado del nodo i y j , dependiendo de si el nodo i y el nodo j están conectados. Los elementos de la diagonal (i, i) son cero o uno, dependiendo de si el grado i del nodo es igual a cero.

II.2.1.7 Espectro de grafo

La relación entre una red y los valores propios de su matriz característica, se estudia en la teoría espectral de grafos. Para la matriz de adyacencia todos los valores propios son reales [11], mientras que para la matriz laplaciana [13] y la matriz laplaciana normalizada [12] todos los valores propios son reales, pero también no negativos. El conjunto ordenado de N valores propios de la matriz de adyacencia se llama el *espectro* de la matriz de adyacencia. Lo mismo aplica para los valores propios de la matriz laplaciana o laplaciana normalizada. Existe una matriz de adyacencia y laplaciana única para cada red (hasta permutando filas y columnas). Por otra parte, dos redes pueden ser *coespectrales*, es decir, que comparten los mismos valores propios, pero no son isomorfas. Sin embargo, al tener dos redes con el mismo conjunto de valores propios es casi seguro que conducen a la misma estructura topológica o a un isomorfismo de redes. Por consiguiente, el conjunto de valores propios de una matriz característica de una red es una herramienta poderosa hacia una clasificación cualitativa de las redes.

II.2.1.8 Valores propios de grafo

El mayor valor propio de la matriz de adyacencia de un grafo se representa como el *radio espectral* ρ . El segundo valor propio más pequeño de la matriz laplaciana se denota como

la conectividad algebraica λ_{N-1} . Hay muchos problemas en la teoría de grafos en los que la conectividad algebraica juega un papel especial [14], [13]. En particular, su importancia fue subrayada por el hecho de que el valor de la conectividad algebraica es igual a cero si y sólo si una red es desconectada o tiene dos componentes conectados. Por otra parte, si $\lambda_{N-i+1} = 0$ y $\lambda_{N-i} \neq 0$, entonces una red tiene exactamente i componentes. Esto también significa que la multiplicidad de cero como un valor propio de la matriz laplaciana corresponde al número de componentes de la red. Aparte de la importancia de la conectividad algebraica como la fuente primaria de la cantidad de los componentes conectados, la conectividad algebraica mide lo bien que está conectada una red: cuanto mayor es la conectividad algebraica es más difícil separar la red en componentes independientes [15].

II.2.2 Topologías de redes

Una red debe cumplir con tres condiciones principales. En primer lugar, una red debe tener miembros o elementos, por otra parte, los miembros deben estar conectados entre sí de alguna manera y en tercer lugar, todos los miembros de la red deben establecer la comunicación entre ellos claramente, para que la comunicación se lleve a cabo con eficiencia.

Una forma de clasificar las redes es por su topología, la cual describe el diseño básico de la red. *Topología* se refiere a la forma o estructura de una red, muestra cómo se interconectan los diferentes nodos y la manera de cómo se comunican. Las topologías básicas y mencionadas en este trabajo de tesis son: anillo o vecino cercano, anillo abierto, jerárquica o árbol, estrella y global.

II.2.2.1 Topología de anillo o vecino cercano

La *topología de anillo* se compone de nodos dispuestos en un anillo, donde cada nodo se acopla a los vecinos más cercanos, por lo que cada dispositivo está conectado directamente con dos dispositivos, uno a cada lado de este y se utiliza ampliamente en redes de área local [16].

Hay estándares de sincronización de redes en topología anillo que cumple con el estándar de sincronización mutua (democracia), esta estrategia se basa en el control mutuo entre los nodos.

Además, para esta red compleja en particular, todos los nodos están conectados y son finitos.

La matriz laplaciana de un grafo $L(G)$ con N nodos acoplados en anillo, es una matriz de dimensión $N \times N$; $L(G) = D(G) - A(G)$, con elementos l_{ij} definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Para el caso particular en que $K = 2$, entonces tenemos $d_1 = d_2 = \dots = d_N = K$. La matriz laplaciana $-L(G)$, para la mencionada red compleja con acoplamiento en anillo, corresponde a la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{nc}$, dada por

$$\mathbf{A}_{nc} = -L(G) = - \left[\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right]$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{nc}$ para una red con acoplamiento en anillo, es dada por

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{pmatrix} -K & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -K & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -K \end{pmatrix}.$$

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. En la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{nc}$, el segundo valor propio mayor puede ser encontrado mediante

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}} \text{sen}^2 \left(\frac{j\pi}{N} \right), \quad (1)$$

puede observarse claramente, que para un valor fijo de K , λ_{2nc} disminuye a cero cuando N tiende a infinito, es decir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{2nc} = 0. \quad (2)$$

La topología de anillo se ilustra en la figura 1, esta topología se construye por ejemplo con $N = 8$ nodos.

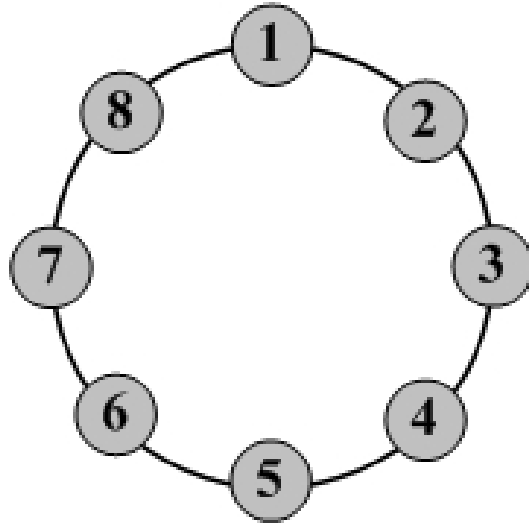


Figura 1: Red en anillo o vecino cercano con $N = 8$ nodos.

II.2.2.2 Topología jerárquica o de árbol

La topología *jerárquica* o también llamada de *árbol*, puede ser vista como una colección de redes en estrella dispuestas en una jerarquía. La topología jerárquica tiene nodos periféricos individuales necesarios para transmitir en un nodo y recibir en otro solamente, no necesitan actuar como repetidores o regeneradores, esta estructura se utiliza en aplicaciones de televisión por cable y también se ha utilizado en aplicaciones LAN de la banda analógica [16].

Hay estándares de sincronización de redes, en la cual, la topología jerárquica se encuentra en sincronización maestro y esclavo (despotismo), ésta estrategia se basa en la distribución de un nodo de referencia (N_1) o nodo maestro y los demás obedecen, es decir, son los nodos esclavos. Podrían tener 2 o más niveles de jerarquía, en la topología que se ilustra en la figura 2 se muestran 3 niveles, en los que el acoplamiento es directo, este tipo de red se adoptó en la sincronización de redes de telecomunicaciones.

La matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{tc}$ para esta red esta definida por

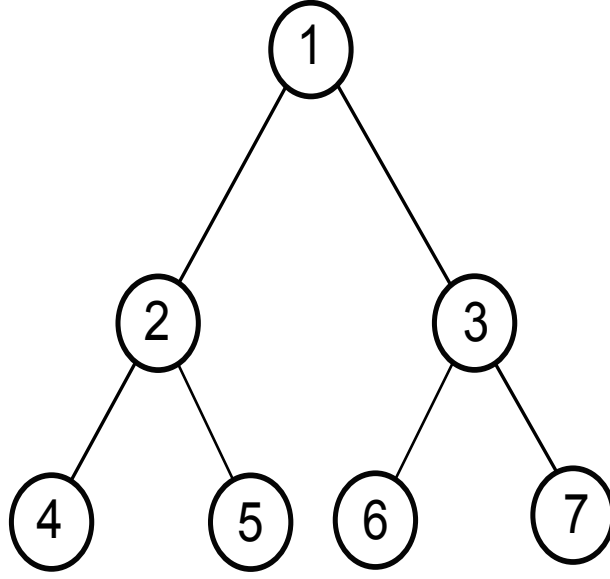


Figura 2: Red en topología jerárquica o árbol con $N = 7$ nodos.

$$\mathbf{A}_{tc} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

esta matriz tiene un valor propio 0 y los restantes $N - 1$ son -1 . Por lo tanto, el segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2tc} = -1. \quad (3)$$

La topología jerárquica se ilustra en la figura 2, esta topología se construye por ejemplo, con $N = 7$ nodos.

II.2.2.3 Topología en estrella

Una red en *estrella* es una red en la cual, los nodos están conectados directamente a un nodo central (o maestro en el caso de una red dirigida) y todas las comunicaciones se hacen necesariamente a través de este, donde los nodos restantes no están directamente conectados entre sí. Para esta red compleja en particular, todos los nodos están conectados y son finitos.

Hay estándares de sincronización de redes, en la cual la topología estrella se encuentra en sincronización maestro y esclavo (despotismo), ésta estrategia se basa en la distribución de un nodo de referencia o nodo maestro y los demás obedecen, es decir, son los nodos esclavos, este tipo de red es muy utilizada en la sincronización de redes de telecomunicaciones.

La matriz laplaciana $-L(G)$, para la mencionada red compleja con acoplamiento en estrella, corresponde a la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{stc}$, dada por

$$\mathbf{A}_{stc} = -L(G) = - \left[\begin{pmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right]$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{stc}$ para una red con acoplamiento en estrella, es dada por

$$\mathbf{A}_{stc} = \begin{pmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. En la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{stc}$, son $\{0, -N, -1, \dots, -1\}$, el segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2stc} = -1, \quad (4)$$

puede observarse que el valor λ_{2stc} no depende del tamaño (número de nodos) de la red, la topología en estrella se presenta en la figura 3, esta red se realizó con 5 nodos (sin maestro y sin esclavos).

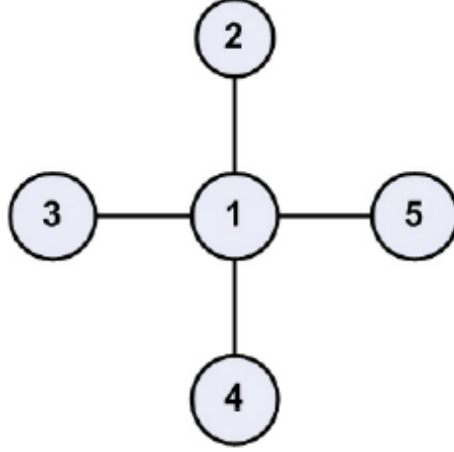


Figura 3: Red en topología estrella con $N = 5$ nodos.

II.2.2.4 Topología global

En la topología *global* cada nodo está conectado a todos los nodos, esto significa que cada nodo esta conectado a la misma cantidad de nodos, tenemos que en esta configuración de acoplamiento, cada nodo i esta conectado con $N - 1$ nodos. Esto hace que sea posible llevar mensajes de un nodo a otro de diferentes maneras, esta topología se utiliza principalmente para la conmutación de circuitos de redes públicas, etc. [16]. Además, para esta red compleja en particular, todos los nodos estan conectados y son finitos.

La matriz laplaciana de un grafo $L(G)$ con N nodos acoplados globalmente, es una matriz de dimensión $N \times N$; $L(G) = D(G) - A(G)$, con elementos l_{ij} definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Los elementos de la matriz laplaciana $-L(G)$, para la mencionada red compleja con acoplamiento global, corresponden a la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{gc}$, dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = -L(G) = - \left[\begin{pmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right].$$

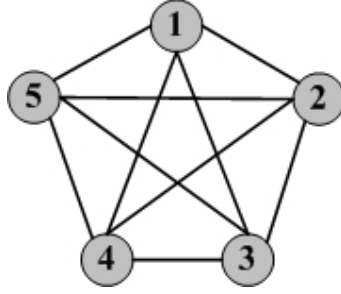


Figura 4: Red en topología global $N = 5$ nodos.

de esta manera, la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{gc}$ para una red con acoplamiento global, es dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = \begin{pmatrix} 1 - N & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 - N & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 - N \end{pmatrix}.$$

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. En la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{gc}$, tiene un valor propio en 0 y los demás en $-N$, el segundo valor propio mayor de esta matriz es $\lambda_{2gc} = -N$, por lo que podemos decir, que esta red siempre sincroniza sin importar la cantidad de nodos que formen la red. La topología global se ilustra en la figura 4, esta topología es construida con $N = 5$ nodos.

II.3 Modelos de redes complejas

En la sección anterior se presentaron algunos tipos de redes y sus variables medibles, todas las topologías anteriores eran regulares, es decir, sus características están bien definidas, sin embargo, se ha demostrado que las redes reales no presentan topologías regulares, por tanto, los modelos de estas redes presentan estructuras estocásticas donde las conexiones entre los nodos se realizan por medio de probabilidades de conexión surgidas aleatoriamente. En seguida se presentan los modelos más usados para este tipo de redes.

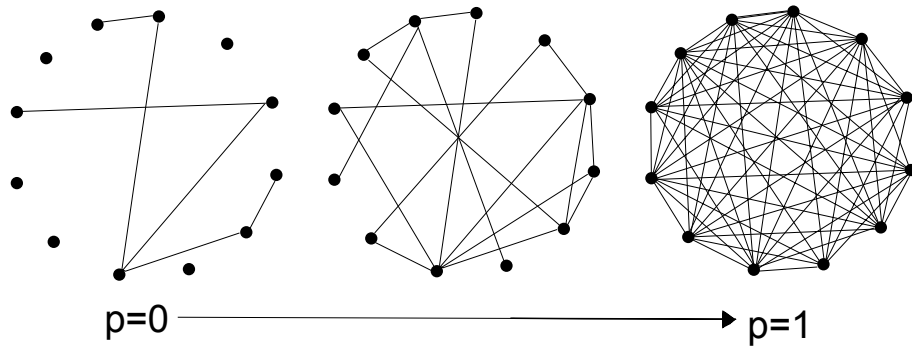


Figura 5: Red aleatoria: el incremento de la probabilidad de conexión p implica que va de una baja densidad de conexión para el que existen pocos enlaces y muchos componentes pequeños a una alta densidad de conexión para el que una amplia fracción de todos los nodos están unidos entre sí en un solo componente gigante. La figura se ha tomado de [23].

II.3.1 Redes aleatorias o de Erdős y Rényi

La teoría de redes aleatorias fue presentada por Paul Erdős y Alfréd Rényi en una serie de artículos [17]-[19]. Tiempo después se introdujo el enfoque probabilístico a la teoría de grafos.

Erdős y Rényi en el primer artículo sobre redes aleatorias las definen como redes con N nodos y las conexiones son tomados aleatoriamente de $\frac{N(N-1)}{2}$ posibles conexiones [17]. En un conjunto de tales redes, hay $C_n^{\frac{N(N-1)}{2}} = \binom{\frac{N(N-1)}{2}}{n}$ redes. Donde n es el número de conexiones.

Una definición alternativa de redes aleatorias se llama *modelo binomial*. Comenzamos con N nodos, donde un nodo está conectado con otro nodo con una probabilidad p . El número total de conexiones E , es una variable aleatoria con un valor expectativo $\langle E \rangle = p \frac{N(N-1)}{2}$. Teniendo una red G_0 con N nodos y n conexiones, entonces la probabilidad de obtener la red G_0 usando la construcción aleatoria es $P(G_0) = p^n (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2} - n}$.

Muchas de las propiedades de las redes aleatorias son conocidas analíticamente en el límite del tamaño mayor N de la red, como muestra Erdős y Rényi en una serie de artículos redactados en la década de 1960 [17], [18], [20] y más tarde por Bollobás [21]. Sin embargo, la más importante es la transición de fase que posee: de una baja densidad de conexión o de un bajo valor de probabilidad p , para los cuales, hay pocas conexiones y muchos componentes pequeños a una alta densidad de conexión o de un alto valor de p , para el cual, una amplia fracción de todos los nodos se unen entre sí en un solo componente gigante como se aprecia en la figura 5.

II.3.2 Redes de mundo pequeño o de Watts y Strogatz

En 1967, Stanley Milgram, en ese entonces profesor de psicología social en la Universidad de Harvard, se interesó por saber cuál es la probabilidad de que dos personas elegidas al azar se conozcan entre sí. Esto llevó a la pregunta ¿hasta qué punto se separaran dos personas entre sí?. La distancia fue expresada en términos de “A conoce a B, quién conoce a C, quién conoce a D,...,” y así sucesivamente. En otras palabras, la separación se determinó por una cadena de conocidos a través de la cual una persona podría finalmente conocer a alguien más.

En términos de grafos, a Milgram le interesaba conocer la *longitud del camino promedio* en lo que se conoce como una red social. En este tipo de red, un nodo representa a una persona y una conexión entre dos nodos A y B nos dice que A y B son conocidos. Milgram midió la longitud del camino promedio diciendo a gente arbitraria que enviara cartas a ciertas personas destinatarias. Sea Zach dicho destinatario y sea Alicia una persona que actualmente posee la carta. Si Alicia no conoce a Zach, ella tendría que enviar la carta a uno de sus conocidos, por ejemplo a Bob, bajo el supuesto de que Alicia espera que Bob tenga mejor suerte de hacer llegar la carta a Zach. En el experimento original, las cartas fueron enviadas inicialmente desde el Medio Oeste de los Estados Unidos con los destinatarios que se encontraban en Massachusetts. Para su sorpresa, a las cartas que llegaron a su destino, les tomó un promedio de sólo 5.5 saltos, lo que lleva a la famosa frase “seis grados de separación”.

¿Qué tiene esto que ver con las redes aleatorias? Lo que Milgram demostró y lo que se ha seguido demostrando, es que en muchas situaciones de la vida real, la longitud de camino promedio es relativamente pequeña. Sin embargo, en muchas redes sociales, sabemos que la gente tiende a agruparse en grupos relativamente pequeños: los conocidos de Alicia también se conocen entre sí. En otras palabras, muchas redes sociales (y de hecho, otras también), tienden a tener un alto coeficiente de agrupamiento. Por lo tanto, lo que nos encontramos son redes que combinan las propiedades de las redes aleatorias, sin embargo, difieren cuando se trata del coeficiente de agrupamiento.

El modelo de mundo pequeño describe el hecho de que a pesar del gran tamaño de una red, en la mayoría de las redes del mundo real hay un camino relativamente corto entre dos nodos. Hay diferentes realizaciones del modelo de mundo pequeño, pero el modelo original propuesto por Watts y Strogatz [9], es con mucho, el más ampliamente estudiado. Se inicia mediante la construcción de una red en anillo R_N con N nodos y luego se une cada nodo a sus $2s$ vecinos (s vecinos a cada lado del anillo). Esto se traduce en una red de anillo $R_{N,s}$ con $L = sN$ conexiones. La red de mundo pequeño entonces se crea moviendo, con una probabilidad p_r , el extremo de cada conexión a un nuevo nodo elegido de manera uniforme en la red de anillo, excepto que no hay conexiones dobles y ningún nodo puede estar conectado consigo mismo. Este proceso introduce conexiones de largo alcance $p_r N s$ y permite que el modelo de mundo pequeño pueda interpolar de una red regular ($p_r = 0$) a algo que es similar, aunque no idéntico, a una red aleatorio ($p_r = 1$). Para una pequeña p_r el mundo pequeño se convierte en una red agrupada localmente en el que dos nodos

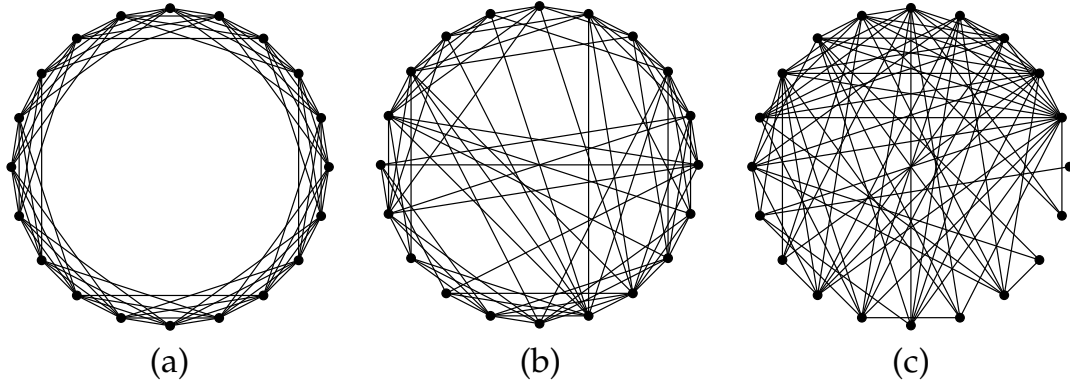


Figura 6: Red de mundo pequeño: el aumento de la probabilidad de recableado p_r implica que va de la red totalmente ordenada ($p_r = 0$) a la gráfica completamente aleatoria ($p_r = 1$): (a) $p = 0$, (b) $p = 0.2$ y (c) $p = 0.9$ respectivamente. La figura se ha tomado de [23].

arbitrarios están conectados por un pequeño número de conexiones intermedias, esto se aprecia en la figura 6.

II.3.3 Redes libres de escala o de Barabási y Albert

El interés en las redes libres de escala se inició a finales de 1990 con el manifiesto descubrimiento que en muchas de las redes del mundo real algunos nodos actúan como nodos centrales altamente conectados, es decir, unos pocos nodos tienen un gran número de vecinos de varios órdenes de magnitud mayor que el valor promedio. Esto está claramente en contraste con las redes aleatorias y de mundo pequeño, en el que cada nodo tiene más o menos el mismo número de vecinos, la red libre de escala se muestra en la figura 7. Esto ha permitido la identificación de clases de redes libres de escala, en las cuales, la red se considera como un sistema dinámico que evoluciona a través de la posterior adición y la supresión de nodos y conexiones. Barabási [24] ofreció dos importantes conceptos generales que crean redes con esta característica: el crecimiento y el acoplamiento preferencial de nodos. En consecuencia, el modelo Barabási y Albert incorpora estos dos conceptos de la siguiente manera: el modelo comienza con un pequeño número de nodos m_0 totalmente conectados, seguido en cada paso por un nuevo nodo unido a $m \leq m_0 = 2m + 1$ nodos ya presente en el sistema. Cada nuevo nodo está conectado a m nodos existentes con una probabilidad parcial que es proporcional al número de conexiones que el nodo existente ya tiene. Esto implica que los nodos con mayor grado tienen mayor probabilidad de acoplarse con nuevos nodos. Después de t pasos este procedimiento da como resultado en una red con $N = t + m_0$ nodos y $L = \frac{m_0(m_0-1)}{2} + mt$ conexiones.

Un ejemplo de tal mecanismo se puede encontrar en la red WWW (World Wide Web), donde el número de páginas electrónicas crece exponencialmente. La segunda característica

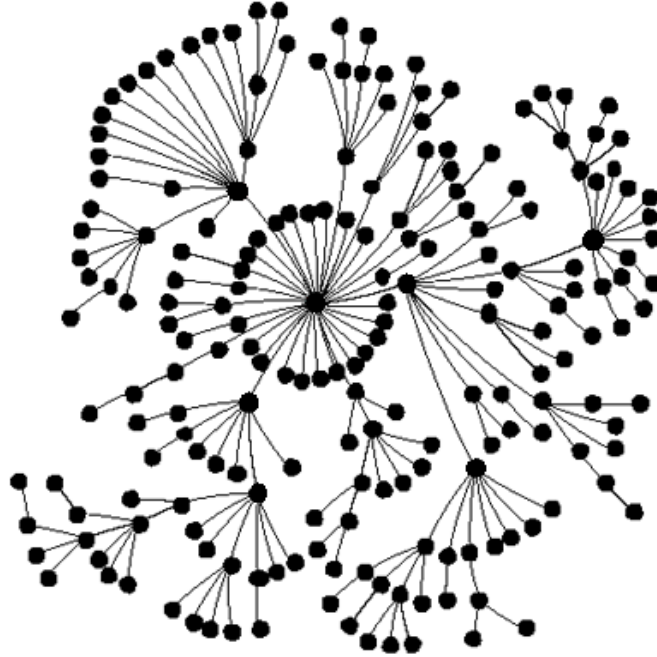


Figura 7: Red libre de escala: un rasgo característico de estas estructuras es que algunos nodos tienen un grado que es varios órdenes de magnitud mayor que el valor promedio. La figura se ha tomado de [25].

de la mayoría de este tipo de redes es el acoplamiento preferencial. Esto significa que un nuevo nodo es más probable que se conecte a un nodo con más conexiones que a uno con menos conexiones. Por ejemplo, una página web muy demandada (con muchos nodos y conexiones) tiene mayor probabilidad de agregar nuevos miembros.

II.4 Conclusión

En este capítulo se presentó la información básica acerca de las redes complejas más comunes. Se mencionaron las características principales de estas redes, así como algunas topologías de redes más utilizadas. Las redes reales tienen propiedades especiales que se modelan mediante redes aleatorias. Se presentaron los modelos de las redes reales más utilizados en la actualidad. En páginas posteriores de este trabajo de tesis doctoral, se mostrarán algunas aplicaciones de algunas de estas redes, como la sincronización de redes y comunicaciones seguras en redes.

Capítulo III

Fundamentos de cálculo fraccional

III.1 Introducción

La idea de generalizar el concepto de derivada para valores no enteros, surgió con el nacimiento del propio cálculo diferencial. En aquel entonces se planteó la cuestión del sentido o utilidad que tendría una derivada de orden fraccional, por ello se le asignó originalmente el nombre de *cálculo fraccional*.

Más tarde se amplió el alcance de la pregunta anterior: “¿Puede ser n un número cualquiera, fraccional, irracional o complejo en el orden de la derivada?”. Sabiendo ahora que la respuesta es afirmativa, el actual término de “cálculo fraccional” resulta impropio y deberíamos sustituirlo por el de *integración y diferenciación de orden arbitrario*. Fue el propio Leibnitz al inventar el concepto $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ y posiblemente un simple deseo de jugar con los símbolos, lo que empujó en 1695 a L'Hôpital a preguntarle “¿Qué sucedería en el caso de ser sustituida n por $\frac{1}{2}$?”. Leibnitz respondió de modo intuitivo que esta aparente paradoja permitiría en el futuro extraer interesantes consecuencias”.

También en su correspondencia con Bernoulli, Leibnitz mencionó “derivadas de orden genérico”. En 1697, en referencia al producto infinito de Wallis por $\frac{\pi}{2}$, Leibnitz utilizó la notación $d^{\frac{1}{2}}$, y afirmó que era posible razonar con el cálculo diferencial fraccionario para alcanzar el mismo resultado.

La primera referencia en un texto a una derivada de orden arbitrario aparece en un libro del matemático francés Lacroix de 1819 [26], en el que dedicó a este tema dos páginas de las 700 que lo constituyen. Lacroix desarrolló un ejercicio meramente matemático generalizando el caso de orden entero, a la manera típica de los formalistas de aquel periodo.

En este capítulo se presentan solo los fundamentos y conceptos utilizados a través de este trabajo de tesis. En conexión con el material del capítulo II, ya en capítulos posteriores se construirán redes complejas y su sincronización con nodos fraccionales acoplados en diferentes topologías.

III.2 Ecuaciones integro-diferenciales de orden fraccional

III.2.1 Funciones especiales

Comenzamos describiendo la función más importante que se utiliza en el cálculo fraccional la función Gamma de Euler, que se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (5)$$

Esta función es la generalización de un factorial de la siguiente forma

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (6)$$

Otra de las funciones, que desempeña un papel muy importante en el cálculo fraccional, presentada por Humbert y Agarwal en 1953. Es una función de dos parámetros del tipo Mittag-Leffler definido como [27]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (7)$$

Para $\beta = 1$, obtenemos la función de Mittag-Leffler en un parámetro [28], como sigue

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z). \quad (8)$$

III.2.2 Definición de derivadas e integrales fraccionales

El cálculo fraccional es una generalización de la integración y diferenciación de orden entera con el operador fundamental ${}_a D_t^{\alpha}$, donde a y t son los límites de la operación y $\alpha \in \mathbb{R}$. El operador continuo integro-diferencial se define como

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \alpha < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Las tres definiciones más utilizadas para la ecuación integro-diferencial fraccional general son: la definición de Grünwald-Letnikov (GL), la de Riemann-Liouville (RL) y la definición de Caputo ([29]-[31]). Otras definiciones están relacionadas con nombres bien conocidos como, por ejemplo, Weyl, Fourier, Cauchy, Abel, Nishimoto, etc. En este trabajo de tesis vamos a considerar principalmente la GL, RL y la definición de Caputo. Esta consideración se basa en el hecho de que para una amplia clase de funciones, las tres definiciones conocidas GL, RL y Caputo son equivalentes bajo ciertas condiciones [31].

III.2.3 Integral y derivada fraccional de Grünwald-Letnikov (GL)

Considerando la función continua $f(t)$. Su primera derivada se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (10)$$

se puede escribir una formula general de la derivada n de la función $f(t)$ con respecto a t para $n \in N$, $j > n$ en la siguiente forma

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) \equiv f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh). \quad (11)$$

La relación (11) expresa una combinación lineal de valores de la función $f(t)$ en la variable t . Los coeficientes binomiales con signos alternados para el valor positivo de n se definen como

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \quad (12)$$

En caso de valores negativos de n tenemos

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)(-n-2) \cdots (-n-j+1)}{j!} = (-1)^j \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right], \quad (13)$$

donde $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ se define como

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{n(n+1) \cdots (n+j-1)}{j!}. \quad (14)$$

Si sustituimos $-n$ en (11) para n podemos escribir

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} f(t) \equiv f^{(-n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} f(t-jh), \quad (15)$$

donde n es un número entero positivo.

De acuerdo a las ecuaciones (10) y (11) podemos escribir la definición de la derivada de orden fraccional de orden α , ($\alpha \in \mathbb{R}$) con respecto a t , la cual tiene la forma

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh). \quad (16)$$

Para el cálculo de los coeficientes binomiales podemos usar la relación entre la función *Gamma* de Euler y el factorial, definida como

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad (17)$$

para $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Si consideramos $n = \frac{t-a}{h}$, donde a es una constante real, la cual expresa el valor límite, podemos escribirla finalmente como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh). \quad (18)$$

III.2.4 Integral y derivada fraccional de Riemann-Liouville (RL)

Para la expresión de la definición de Riemann-Liouville, consideraremos la integral de Riemann-Liouville definida n veces como

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad (19)$$

para $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

La integral fraccional de orden α para la función $f(t)$ puede expresarse de la ecuación (19) como sigue

$${}_a I_t^\alpha f(t) \equiv {}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \quad (20)$$

para $\alpha, a \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$.

De la relación (20) podemos escribir la formula para la definición de Riemann-Liouville de la derivada fraccional de orden α en la siguiente forma

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (21)$$

para $(n-1 < \alpha < n)$, donde a y t son los límites de la operación ${}_a D_t^\alpha f(t)$.

Para el caso de $0 < \alpha < 1$ y $f(t)$ sea una función causal de t , que es, $f(t) = 0$ para $t < 0$, la integral fraccional se define como

$${}_0 D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad t > 0 \quad (22)$$

y la expresión de la derivada de orden fraccional finalmente es

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (23)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función *Gamma* de Euler [30].

III.2.5 Derivada fraccional de Caputo

La definición de la derivada fraccional de Caputo puede escribirse como [31], [32]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad \text{para } n - 1 < \alpha < n. \quad (24)$$

Como se mencionó antes, bajo condiciones iniciales homogéneas la derivada de Riemann-Liouville y Caputo son equivalentes. Definiendo la derivada fraccional de Riemann-Liouville por ${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)$ y la definición de Caputo por ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$, entonces la relación entre ellas es como sigue

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a) \quad (25)$$

para $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, \dots, n - 1$).

Las condiciones iniciales para la ecuación diferencial de orden fraccional de la derivada de Caputo son de la misma forma que las de las ecuaciones diferenciales de orden entero. Es una ventaja debido a que problemas aplicados requieren definiciones de las derivadas fraccionales, donde hay claras interpretaciones de las condiciones iniciales, que contienen $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, etc.

III.3 Método numérico para el cálculo de derivadas e integrales de orden fraccional

Existen varios toolbox para matlab, los cuales modelan las ecuaciones diferenciales de orden fraccional, sin embargo, la mayoría cumple con objetivos específicos, por ejemplo, el toolbox N-integer [33], o los mostrados en [34]-[36] los cuales son dedicados al control o problemas similares. Algunos métodos numéricos como [37]-[40] también modelan a los sistemas fraccionales, sin embargo, tomando en cuenta el hecho de que para una amplia clase de funciones, las tres definiciones ya mencionadas GL, RL y Caputo son equivalentes, el cálculo numérico de la derivada fraccional derivado de la definición de Grünwald-Letnikov (GL) es más apropiada, además de que entre las 3 definiciones, la definición de Grünwald-Letnikov es la más sencilla desde el punto de vista de la aplicación numérica.

La relación para la aproximación numérica explícita de la derivada $q - th$ en el punto kh , ($k = 1, 2, \dots$) tiene la siguiente forma [31], [37], [41]

$${}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}), \quad (26)$$

donde L_m es el tamaño de memoria, $t_k = kh$, h es el paso de cuantización del cálculo y $(-1)^j \binom{q}{j}$ son los coeficientes binomiales $c_j^{(q)} (j = 0, 1, \dots)$. Para su cálculo se utiliza la siguiente expresión [41]

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}. \quad (27)$$

De esta forma, la solución numérica general de la ecuación diferencial fraccional

$${}_a D_t^q y(t) = f(y(t), t), \quad (28)$$

puede expresarse como

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}). \quad (29)$$

Para el término de memoria expresado por la sumatoria, puede usarse el principio de memoria corta. Entonces el índice inferior en la sumatoria en la relación (29) será $v = 1$ para $k < (L_m/h)$ y $v = k - (L_m/h)$ para $k > (L_m/h)$, o sin el principio de memoria corta se utiliza $v = 1$ para toda k .

Este método numérico fue utilizado para las simulaciones en este trabajo de tesis.

III.4 Conclusión

En este capítulo se mostraron brevemente los fundamentos del cálculo fraccional, principalmente la teoría fraccional utilizada para este trabajo de tesis, se mencionan las funciones utilizadas, así como las tres principales representaciones de las ecuaciones integro-diferenciales fraccionales, las cuales, son equivalentes bajo ciertas consideraciones. También se mostró el método numérico utilizado para la simulación numérica de sistemas de ecuaciones de orden fraccional, que en capítulos posteriores son considerados como nodos en la sincronización de redes.

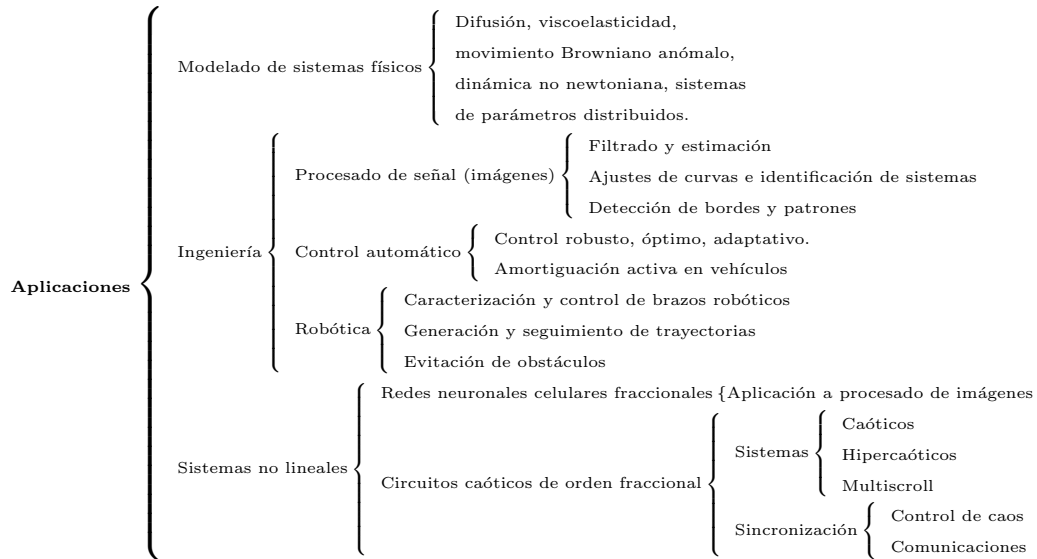
Capítulo IV

Aplicaciones del cálculo fraccional

IV.1 Introducción

En este capítulo, se describen una serie de aplicaciones científicas y en ingeniería, donde el cálculo fraccional ha encontrado útiles aplicaciones. En esta tesis solo se presentan algunas de las principales aplicaciones, aquí se incluyen aplicaciones en viscoelasticidad, control automático, dispositivos electrónicos y teoría del caos.

Enseguida se muestra un esquema con algunas de las muchas aplicaciones donde hoy en día se utiliza el cálculo fraccional, en el esquema se muestran las principales.



A continuación se describen y se muestran ejemplos de algunas de las principales aplicaciones mostradas previamente.

IV.2 Aplicaciones al modelado de sistemas físicos con memoria

IV.2.1 Difusión

La *difusión* se refiere a las fluctuaciones de densidad en un material que se difunde, es decir, el cambio de densidad en un volumen sólo puede deberse a flujo entrante de partículas de materiales que se introducen en un medio que inicialmente estaba ausente de él.

Por ejemplo, la distribución del calor (o variaciones de la temperatura) en una región de un conductor a lo largo del transcurso del tiempo. (esto es, como se propaga el calor en el sólido conforme pasa el tiempo). El modelo de este fenómeno siempre estuvo dado por una ecuación parcial de segundo orden. La solución de esta ecuación se logra de varias maneras, la más sencilla y utilizada es discretizando la variable, dando como resultado una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo y dimensión dependiente del número de segmentos utilizados. En años recientes la discretización del modelo de la ecuación de la difusión se aproximó a ecuaciones diferenciales de orden fraccional.

La ventaja de utilizar el modelo fraccional es que es más aproximado al real, que el discretizado y a su vez se reduce la representación, ya que los modelos que aplican derivadas clásicas (enteras) no describen de forma exhaustiva tales comportamientos.

Algunas de las aplicaciones donde se utiliza la ecuación de difusión son las siguientes:

- Fenómenos de transporte a través de un medio fractal
- Procesos de difusión ultra rápidos y ultra lentos
- Propiedades de super conductividad
- Propiedad de viscoelasticidad
- Dinámicas de procesos muy próximos a la turbulencia
- Resonancia magnética nuclear
- Difusión de los cosméticos a través de la piel
- Dinámicas de absorción de las proteínas por parte de las células
- Movimiento de las bacterias
- Transporte de contaminantes por medio de flujos líquidos

La aplicación más importante y estudiada es la ecuación de onda-difusión, la cual, es la relación encontrada entre la ecuación de difusión (orden 1) y la ecuación de onda (orden 2). Desde un punto de vista puramente matemático, se puede pasar de una a otra de forma continua, estudios realizados sobre la difusión anómala, muestran como es el proceso asociado a la ecuación fraccional cuando varía entre el orden de 1 a 2.

IV.2.2 Viscoelasticidad

La *viscoelasticidad* es entendida como la combinación de un sólido elástico (resorte-ley de Hooke) y un líquido viscoso puro (siguiendo la ley de Newton-amortiguador). Las ondas que se propagan en estos materiales pierden energía en forma de calor; la ecuación que modela este fenómeno es la ecuación de calor o de difusión, la cual tiene la derivada temporal de orden 1 y la ecuación que modela la propagación es la ecuación de onda cuya derivada temporal es de orden 2 [59]. Es lógico intentar entender que sucede cuando el orden de la derivada temporal cambia paulatinamente desde 1 hasta 2.

La aplicación de la derivada fraccional a la viscoelasticidad ha dado origen a lo que en la actualidad se conoce como reología fraccional [60]. Las ecuaciones constitutivas de los modelos reológicos, tradicionalmente son descritas por sistemas de ecuaciones diferenciales de orden 1 o de orden 2. Estos modelos se aproximan a la realidad, sin embargo no explican satisfactoriamente la reología sobre todo de ciertos polímeros. Desde la década de los 50 se viene estudiando los modelos reológicos cuyas ecuaciones son ecuaciones diferenciales fraccionales, las cuales nos dan una mejor representación y entendimiento de este fenómeno.

Un fenómeno de esfuerzo y deformación para materiales viscoelásticos en su forma fraccional se describe como $\epsilon(t) = \frac{1}{K_c} D_t^{-v} \sigma(t)$, o de otra forma cuando no se requiere la inicialización y por lo tanto es sin memoria se representa como (derivada no inicializada) $\epsilon(t) = \frac{1}{K_a} d_t^{-v} \sigma(t)$. Aquí ϵ es la deformación y σ es el esfuerzo (tensión). Para $v = 0$, el material es sólido elástico y para $v = 1$, el material es líquido viscoso. K es la constante que depende del material.

Al utilizar modelos fraccionales para la descripción de sistemas viscoelásticos es posible describir de manera precisa las manifestaciones mecánicas, dieléctricas y magnéticas del comportamiento reológico o viscoelástico. La aplicación más importante del modelo fraccional de la viscoelasticidad es el surgimiento de un elemento de tipo fraccional, análogo al resorte y al amortiguador, al que se le da el nombre de “spring-pot” (comportamiento intermedio entre un resorte y un amortiguador). Tal modelo (spring-pot) puede ayudar a resolver una serie de dificultades presentes actualmente en el modelado de elementos discretos de los tejidos biológicos.

Por ejemplo, la relajación de la tensión en las arterias, donde además de ajustar los datos de control, describe satisfactoriamente las drogas inducidas por activación del músculo liso a través de cambios en el orden fraccional (α). Por otra parte, el modelo de orden fraccional a sido observado en los tejidos, células, matrices extracelulares, membranas y podría reflejar

la dinámica de materiales blandos y vidriosos. El modelo matemático fraccional parece describir de manera concisa las propiedades viscoelásticas de la membrana de los glóbulos rojos, otras membranas celulares y de tejidos de varias capas como el cartílago o la pared arterial.

IV.2.3 Movimiento browniano

Es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo, polen en una gota de agua). El estudio del *movimiento browniano* ha sido motivado por la necesidad de modelar la evolución en el tiempo de ciertos fenómenos aleatorios, fue uno de los primeros modelos utilizados para describir la evolución en el tiempo de un proceso estocástico.

Por ejemplo, se ha utilizado para describir el fenómeno de turbulencia, las crecientes de los ríos y en aplicaciones como hidráulica, meteorología, comunicaciones y finanzas. El modelo esta representado con ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales, surgieron del cálculo estocástico en relación con el movimiento browniano. Con el paso de los años se observaron propiedades de auto semejanza (propiedades fractales), con lo que los modelos de orden entero no representaban adecuadamente los fenómenos, así que surgieron los modelos de orden fraccional llamado movimiento browniano fraccional.

La aplicación más común de este modelo es en finanzas. Se ha utilizado para describir el comportamiento de los precios de los activos y la volatilidad en los mercados de valores. La dependencia a largo plazo de propiedades de auto similitud hace que este proceso sea un modelo adecuado para describir a estas cantidades. Este modelo se utiliza para describir el precio de una acción, los datos empíricos no se ajustan del todo bien al modelo de orden entero, ya que los incrementos de los precios de la mayoría de las acciones representan cierta dependencia y su distribución empírica y difiere de la distribución normal. El modelo fraccional tiene una mayor aproximación a la distribución normal y no hay dependencia en las acciones.

En comunicaciones se utiliza para el modelado del tráfico en una red. El amplio estudio y medición del tráfico en redes de datos, servicios y aplicaciones, han demostrado convincentemente la naturaleza auto-similitud o fractal de tráfico de datos. Donde los modelos de orden entero utilizados, llevan a una subestimación considerable de calidad y servicio, como el retraso y el bloqueo. Los modelos fraccionales mejoran considerablemente el manejo de estos datos teniendo una mejor calidad y servicio.

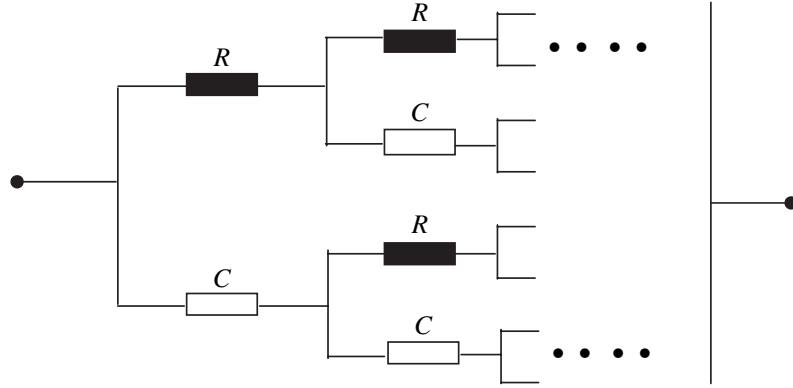


Figura 8: Circuito de árbol fractance.

IV.3 Aplicaciones en ingeniería

IV.3.1 Electrónica fraccional

IV.3.1.1 Circuito fractance

El circuito electrónico relacionado con cálculo fraccional es el *fractance*, es un circuito que se comporta como un capacitor y una resistencia. Un ejemplo de fractance es el árbol fractance que se muestra en la figura 8, en su circuito equivalente [61]. La impedancia del árbol fractance es

$$Z(j\omega) = \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \exp\left(\frac{-j\pi}{4}\right), \quad (30)$$

esto corresponde a la función de transferencia de orden fraccional

$$Z(s) = \sqrt{\frac{R}{C}} \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (31)$$

El orden puede ser de cualquier valor arbitrario en general, no necesariamente de $\frac{1}{2}$. El dispositivo fractance tiene las siguientes propiedades. Son elementos de fase constante, es decir, el ángulo de fase es constante, independientemente del valor que tenga la frecuencia. La segunda propiedad, es que es posible construir un filtro con características moderadas a partir de él, que no se puede realizar mediante el uso de dispositivos convencionales. En términos generales hay tres dispositivos fractance básicos. El más popular es el circuito dominó en red escalera, el cual es representado con una estructura de árbol binario como en la figura 8. Los valores de los elementos del circuito, que son necesarios para la realización de un fractance, se determinan a partir de la expansión en fracción continua (CFE) obtenida en [61].

Si todos los coeficientes de la CFE obtenidos son positivos, entonces el fractance puede ser hecho simplemente por elementos pasivos (R, L, C). Si algunos de los coeficientes son negativos, la realización del fractance requiere de circuitos activos como convertidores de impedancia negativa (inversores de corriente), realizados por circuitos con amplificadores operacionales, con los cuales se obtiene una función de transferencia negativa $\frac{V_i}{I_i} = -Z$.

De este modo, dependiendo del polinomio racional, descrito en [61], la realización con la CFE puede tener componentes R, C, L combinaciones entre ellos, o incluso impedancias negativas. Para la realización del fractance y para la síntesis de la función de transferencia racional para operador de Laplace se pueden aplicar los fundamentos de síntesis de circuitos comunmente utilizados.

IV.3.2 Sistemas de control

Las primeras aplicaciones del cálculo fraccionario en el área de control se produjeron a principios de los años 60, con Manabe 1963 [42], [43]. Éstas hacían uso del operador integral de orden no entero para el control de servos y de sistemas con saturación. Estos trabajos, probablemente sin conocimiento de los autores, hacían uso de las propiedades de la que Bode denominó función de transferencia ideal en lazo abierto, cuya forma era $F(s) = \frac{A}{s^\alpha}$, $\alpha \in R$, es decir, era un integrador fraccionario [58].

La principal propiedad de esta función es que, cuando se conecta en lazo cerrado, genera sistemas robustos a cambios en la carga o ganancia (A) del proceso, es decir, los cambios en la carga se reflejan en cambios en el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, pero se mantiene constante el margen de fase o, lo que es equivalente, la sobreoscilación máxima.

Esta propiedad es la que marcó las aplicaciones en control que a partir de los años 70 se han venido desarrollando en la Universidad de Burdeos dando como resultado el sistema CRONE (Control Robusto de Orden No Entero), descrito en [44], así como el criterio adoptado en un trabajo reciente [45] para sintonizar controladores PID tradicionales. Un estudio completo de este sistema de referencia se puede encontrar en [46].

El controlador de orden fraccional $PI^\lambda D^\delta$ (FOC) (también $PI^\lambda D^\delta$ controlador) fue propuesto en [31], [47] como una generalización del controlador PID con el integrador de orden real λ y el diferenciador de orden real δ . La función de transferencia de tal controlador en el dominio de Laplace tiene esta forma [31], [48]:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\delta, \quad (\lambda, \delta > 0), \quad (32)$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad, T_i es la constante de integración y T_d es la constante diferencial.

Como podemos ver en la figura 9, la estructura interna del controlador de orden fraccional consiste de la conexión en paralelo de la parte proporcional, integral y la parte derivativa

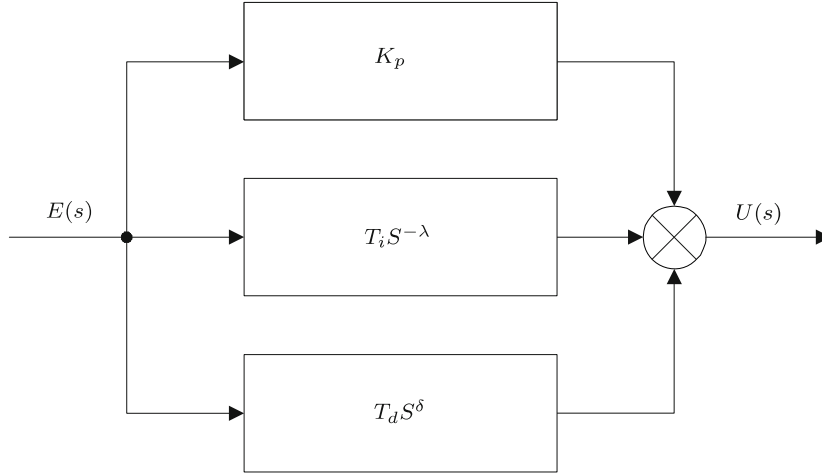


Figura 9: Estructura general del controlador $PI^\lambda D^\delta$.

[49]. La función de transferencia (32) en el dominio del tiempo corresponde a la ecuación diferencial fraccional

$$u(t) = K_p e(t) + T_i {}_0 D_t^{-\lambda} e(t) + T_d {}_0 D_t^\delta e(t). \quad (33)$$

Tomando $\lambda = 1$ y $\delta = 1$, se obtiene un controlador PID clásico. Si $\lambda = 0$ y $T_i = 0$, obtenemos un controlador PD^δ , etc. Todos estos tipos de controladores son casos particulares del controlador de orden fraccional, el cual es más flexible y da mejor oportunidad para ajustar las propiedades dinámicas del sistema de control de orden fraccional. También se puede mencionar que hay muchas otras consideraciones del controlador de orden fraccional [50]. Por ejemplo, podemos mencionar algunas de ellas:

- Controlador CRONE (primera generación) [51], caracterizado por el efecto conducción de banda limitada [52]. Hay varias aplicaciones de la vida real donde el controlador CRONE de sus tres generaciones se ha aplicado, tales como el control de la suspensión del coche [53], control de transmisión flexible [54] y el controlador del accionador hidráulico.
- El compensador fraccional de avance y retardo [55], [56].
- El compensador TID [57], que tiene una estructura similar a un controlador PID, pero el componente proporcional se sustituye por un componente inclinado que tiene una función de transferencia s a la potencia de $(-1/n)$.

IV.4 Aplicaciones en sistemas no lineales

En los últimos años, el uso de la teoría fraccional ha aumentado considerablemente, las aplicaciones donde se utiliza cada vez son mayores, en este apartado se menciona la aplicación en sistemas no lineales.

Aquí se considerará un sistema no lineal de orden fraccional inconmensurable representado de la siguiente manera:

$${}_0D_t^{q_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t),$$

$$x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

donde c_i son las condiciones iniciales. La representación vectorial de (34) es

$$D^{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (35)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ para $0 < q_i < 2$, ($i = 1, 2, \dots, n$) y $\mathbf{x} \in R^n$.

Los puntos de equilibrio del sistema (35) se calculan a través de la solución de la siguiente ecuación

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (36)$$

y suponemos que $E^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es un punto de equilibrio del sistema.

IV.4.1 Sistemas caóticos de orden fraccional

El uso de la teoría fraccional ha llegado hasta los sistemas caóticos trayendo nuevos modelos fraccionales y nuevas aplicaciones. Por ejemplo, las ventajas reales de los sistemas de orden fraccional [69] son que tenemos más grados de libertad en el modelo y que tenemos un proceso de “Memoria” incluido en el modelo (sistemas de orden fraccional tienen una memoria ilimitada).

IV.5 Conclusión

En este capítulo se describieron brevemente algunas aplicaciones donde el uso del cálculo fraccional ha tenido gran auge y donde los modelos fraccionales han traído grandes beneficios y mejoras para dichas aplicaciones. Por ejemplo, en el modelado de sistemas físicos con memoria, donde en difusión utilizando los modelos fraccionales se obtuvo una ecuación onda-difusión, la cual, es la relación encontrada entre la ecuación de difusión (orden 1) y la ecuación de onda (orden 2), en viscoelasticidad gracias al cálculo fraccional surge

un elemento con comportamiento entre un resorte y un amortiguador llamado “spring-pot”. En ingeniería se obtiene un elemento capaz de comportarse como un capacitor y una resistencia de acuerdo a la variación de su orden el cual es llamado fractance, en control se obtuvo un modelo PID fraccional con lo que los sistemas de control puede ser más eficientes. Por último, en sistemas no lineales, se han dado aplicaciones en la simulación de sistemas caóticos, hipercaóticos y con multiscroll fraccionales, además se ha logrado realizar comunicación segura de información, entre muchas más potenciales aplicaciones.

Capítulo V

Sistemas caóticos

V.1 Introducción

En este capítulo, se presentan los sistemas dinámicos de orden entero y fraccional que se utilizaron como nodos para la construcción de redes complejas en diferentes topologías y su posterior sincronización y aplicación a la transmisión segura de información en redes complejas de comunicaciones, que se mostrará en los siguientes capítulos. Primero se describen los sistemas de orden entero y posteriormente los sistemas de orden fraccional. Se muestra a través de simulaciones numéricas empleando Matlab, la generación de atractores caóticos para determinados intervalos de los parámetros de bifurcación.

V.2 Sistemas caóticos

En general, un sistema no lineal es un sistema que no satisface el principio de superposición. En matemáticas, un sistema no lineal es cualquier problema, donde las variables que hay que resolver no se pueden escribir como una combinación lineal de componentes independientes. Si la ecuación contiene una función no lineal, el sistema es no lineal también. El sistema es no lineal también si tiene una curva de transferencia no lineal como, por ejemplo, la curva característica de corriente y voltaje de un diodo.

Las ecuaciones diferenciales o en diferencias no lineales son difíciles de resolver por métodos analíticos y dan lugar a fenómenos tan interesantes como la bifurcación y caos. Incluso un simple sistema dinámico no lineal (o lineal a trozos) puede exhibir un comportamiento completamente impredecible, el llamado caos determinístico. La teoría del caos ha sido tan sorprendente, ya que el caos también se puede encontrar en sistemas triviales. El concepto de “caos” no está definido de forma exclusiva. En el sentido más utilizado, se dice que la dinámica caótica es dinámica originada por ecuaciones dinámicas regulares sin coeficientes estocásticos, pero al mismo tiempo, con las trayectorias que son similares o indistinguibles de algunos procesos estocásticos [64].

Hay algunas definiciones de dinámica caótica, por ejemplo: (i) un sistema con al menos un exponente de Lyapunov positivo es caótico, (ii) un sistema con entropía positiva es caótico, (iii) un sistema equivalente al sistema hiperbólico o Anosov es caótico, etc. La

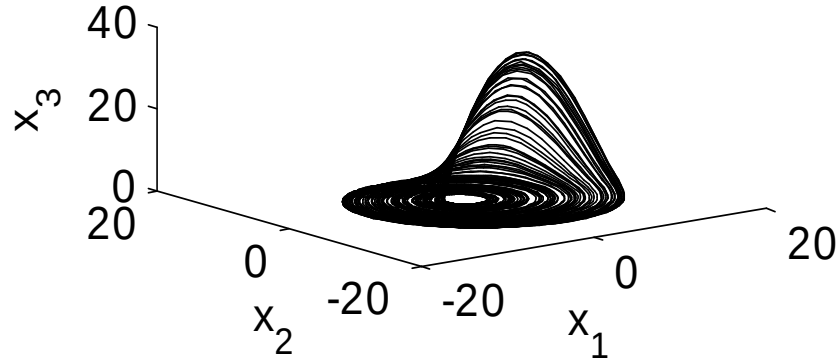


Figura 10: Atractor caótico generado por el oscilador de Rössler proyectado dentro del espacio (x_1, x_2, x_3) .

parte común de todas las definiciones es la existencia de inestabilidad local y la divergencia de trayectorias inicialmente cercanas.

V.3 Sistemas caóticos de orden entero

V.3.1 Oscilador de Rössler

El oscilador de Rössler es un sistema físico no lineal, el cual, presenta dinámicas caóticas, confirmadas experimental y teóricamente. Las ecuaciones de estado normalizadas del oscilador de Rössler están dadas por [62]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c). \end{cases} \quad (37)$$

Los valores de los parámetros para los cuales el oscilador de Rössler (37) genera dinámica caótica son: $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$. Por ejemplo, para las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (5, 5, 5)$, el oscilador de Rössler genera el atractor caótico mostrado en la figura 10.

V.3.2 Oscilador de Chua con retardo

El oscilador de Chua con retardo es un sistema físico, el cual presenta bien definidas dinámicas hipercaóticas confirmadas experimental y numéricamente. El oscilador de Chua con retardo se muestra en la figura 11. Este circuito es una variante del oscilador de Chua,

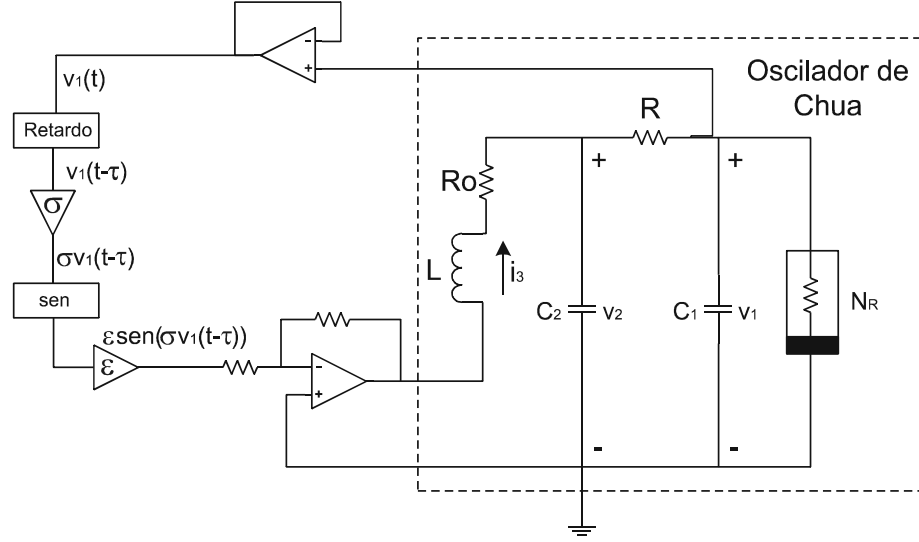


Figura 11: Circuito electrónico del oscilador de Chua con retardo de tiempo [63].

al cual, se le agregó una retroalimentación con retardo de tiempo. Con esta modificación el oscilador de Chua con retardo presenta múltiples exponentes de Lyapunov positivos y por tanto, genera dinámicas hipercaóticas. Las ecuaciones de estado que describen el comportamiento del oscilador de Chua con retardo en forma normalizada están dadas por [63]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(-x_1 + x_2 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 - \gamma x_3 - \beta \varepsilon \sin(\sigma x_1(t - \tau)), \end{cases} \quad (38)$$

con función no lineal

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|).$$

Los parámetros para los cuales se obtienen las dinámicas hipercaóticas son: $\alpha = 10$, $\beta = 19.53$, $\gamma = 0.1636$, $a = -1.4325$, $b = -0.7831$, $\sigma = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$ y el retardo $\tau = 0.001$. Las condiciones iniciales del oscilador son $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0.1, 0.5)$. Los atractores hipercaóticos generados se muestran en la figura 12.

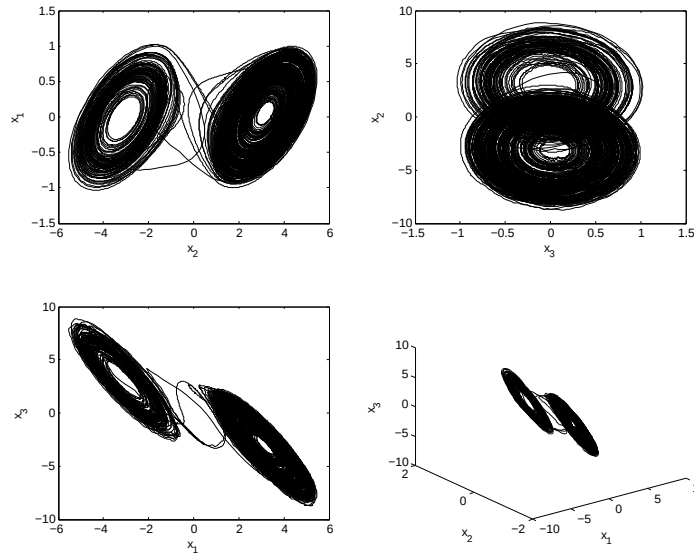


Figura 12: Atractores hipercaóticos generados por el oscilador de Chua con retardo.

V.4 Sistemas caóticos de orden fraccional

V.4.1 Oscilador de Chua de orden fraccional

El circuito clásico de Chua, que se muestra en la figura 13, es un circuito electrónico simple que exhibe fenómenos dinámicos no lineales, como bifurcación y caos. De hecho, con el fin de exhibir caos, un circuito electrónico autónomo debe satisfacer algunos criterios esenciales que son condiciones necesarias (no suficientes) para la aparición de caos [66]: el circuito debe contener al menos tres elementos de almacenamiento de energía, al menos un elemento no lineal y al menos una resistencia localmente activa. El diodo de Chua, siendo una resistencia no lineal localmente activa, permite que el circuito de Chua satisfaga las dos últimas condiciones. El circuito de Chua satisface todos los criterios mencionados anteriormente. La resistencia activa suministra energía a las trayectorias separadas, la no linealidad proporciona plegado, y el espacio de estados en tres dimensiones permite un continuo estiramiento y plegado en una región acotada del espacio de estado.

El circuito de Chua no lineal más simple y ampliamente estudiado, generalmente conocido como oscilador de Chua consta de cinco elementos: dos condensadores C_1 y C_2 , un inductor L , una resistencia R y una resistencia no lineal (NR), conocida como diodo de Chua. Mediante la aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito mostrado en la figura 13, la manipulación y normalización de sus variables, el oscilador puede describirse por las siguientes ecuaciones no lineales diferenciales [67], [68]

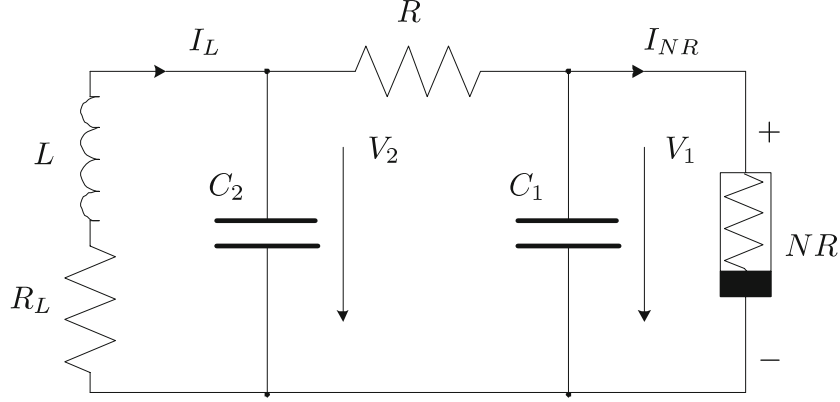


Figura 13: Oscilador clásico de Chua.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha(y(t) - x(t) - f(x)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) + z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = -\beta y(t) - \gamma z(t), \end{cases} \quad (39)$$

donde

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|). \quad (40)$$

Teniendo en cuenta las técnicas de cálculo fraccional, hay una serie de formas en las que el orden del sistema podría ser modificado. Tomando en cuenta que el modelo del capacitor y el inductor real es de orden fraccional y realizando los análisis anteriores (Kirchhoff, normalizacion, etc.) se puede obtener el sistema de ecuaciones no lineales diferenciales de orden fraccional del oscilador de Chua como [69]

$$\begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x(t) = \alpha(y(t) - x(t) - f(x)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t), \end{cases} \quad (41)$$

donde

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|), \quad (42)$$

y donde q_1 es el orden real del capacitor C_1 , q_2 es el orden real del capacitor C_2 , q_3 es el orden real del inductor L_1 y $f(x)$ es la curva lineal a tramos $v - i$ del diodo de Chua no lineal fraccional.

Para propósitos de simulación se utiliza una solución numérica de las ecuaciones de Chua (41), (42) obtenida mediante el uso de la relación (26), que se derivan de la definición Grünwald-Letnikov (18), lo que conduce a las ecuaciones en la forma

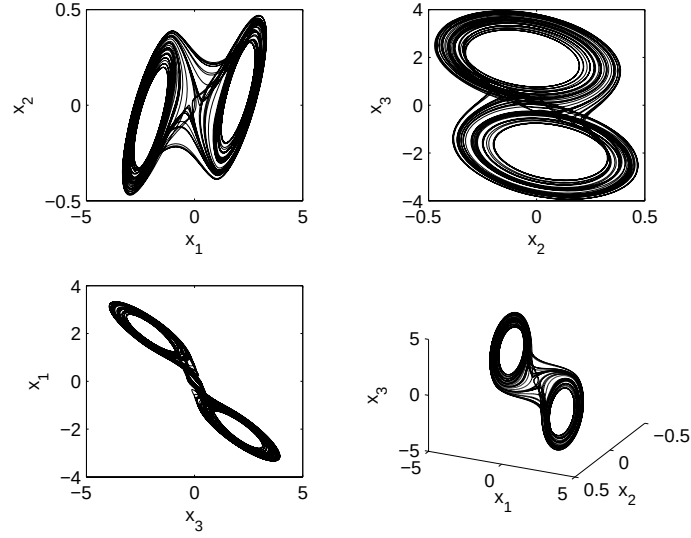


Figura 14: Atractores caóticos del oscilador de Chua de orden fraccional.

$$\begin{cases} x(t_k) = (\alpha(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1}) - f(x(t_{k-1}))))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}), \\ y(t_k) = (x(t_k) - y(t_{k-1}) + z(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}), \\ z(t_k) = (-\beta y(t_k) - \gamma z(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}), \end{cases} \quad (43)$$

donde

$$f(x(t_{k-1})) = m_1 x(t_{k-1}) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t_{k-1}) + 1| - |x(t_{k-1}) - 1|) \quad (44)$$

y donde T_{sim} es el tiempo de simulación, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, para $N = \lceil \frac{T_{sim}}{h} \rceil$ y $(x(0), y(0), z(0))$ es el punto inicial (condiciones iniciales). Los coeficientes binomiales $c_j^{(q_i)}$, $\forall i$, son calculados de acuerdo a la relación (27).

Los parámetros de la simulación para los cuales se genera la dinámica caótica fraccional son: Paso de cuantización $h = 0.001$, $q_1 = q_2 = 0.98$, $q_3 = 0.94$, $\alpha = 10.3$, $\beta = 10.53$, $\gamma = 0.268$, $a = -1.1726$, $b = -0.7872$ [65]. Las condiciones iniciales del oscilador de Chua fraccional son $\mathbf{x}(0) = (0.6, 0.1, -0.6)$. Los atractores caóticos fraccionales obtenidos se muestran en la figura 14.

V.4.2 Sistema hipercaótico de orden fraccional

Recientemente se publicó un nuevo sistema hipercaótico de orden entero [71], el cual, se obtuvo por la adición de un controlador cuadrático no lineal a la segunda ecuación del sistema caótico autónomo tridimensional modificado de Lorenz [72], dicho sistema hipercaótico esta determinado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = bx_1 + x_2 - x_1x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - cx_3, \\ \dot{x}_4 = dx_2x_3, \end{cases} \quad (45)$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las variables de estado a, b, c, d son los parámetros.

Basado en las descripciones del cálculo fraccional, se puede modificar el orden de la derivada del sistema (45), dando como resultado el sistema hipercaótico utilizado en esta tesis, que es un sistema modificado de Lorenz [70], tal sistema hipercaótico de orden fraccional esta determinado por

$$\begin{cases} D_t^{q_1} x_1 = a(x_2 - x_1), \\ D_t^{q_2} x_2 = bx_1 + x_2 - x_1x_3 - x_4, \\ D_t^{q_3} x_3 = x_1x_2 - cx_3, \\ D_t^{q_4} x_4 = dx_2x_3, \end{cases} \quad (46)$$

donde q_i , $i = 1, 2, 3, 4$ es el orden fraccional, $0 < q \leq 1$, x_1, x_2, x_3, x_4 son las variables de estado a, b, c, d son los parámetros.

Los parámetros que generan dinámicas hipercaóticas de orden fraccional son: $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$ y $d = 0, 1$. Las condiciones iniciales del sistema hipercaótico de orden fraccional son $\mathbf{x}(0) = (8, 9, 10, 11)$ [70]. Los atractores hipercaóticos obtenidos se muestran en la figura 15.

V.5 Conclusión

En este capítulo, se describieron los modelos matemáticos de los sistemas de orden entero y fraccional que se utilizarán como nodos para construir las redes en diferentes topologías de acoplamiento y su posterior sincronización. Dichos sistemas son el oscilador de Rössler, el oscilador de Chua con retardo, el oscilador de Chua fraccional y el sistema hipercaótico modificado de Lorenz. Además, se describió el método numérico utilizado para la simulación de los modelos de orden fraccional.

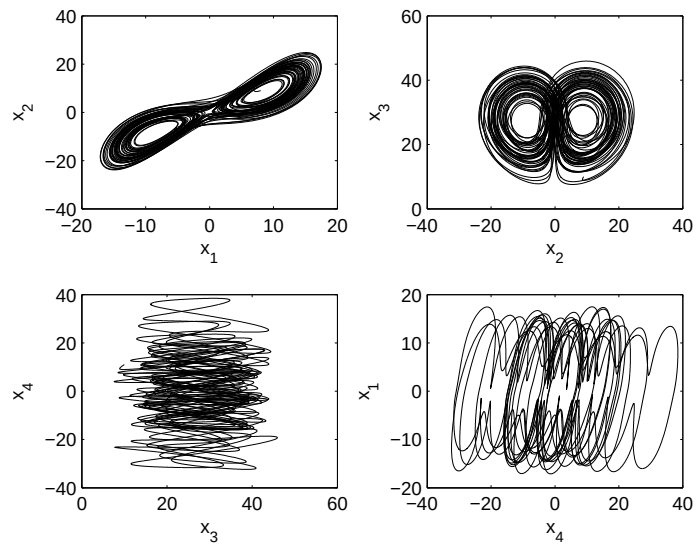


Figura 15: Atractores hipercaóticos del sistema modificado de Lorenz de orden fraccional.

Capítulo VI

Sincronización de redes complejas

VI.1 Introducción

En este capítulo se reportan los resultados de la sincronización de redes complejas utilizando nodos caóticos de orden entero y de orden fraccional, tal sincronización se logra en redes de mundo pequeño, con el oscilador de Rössler y el oscilador de Chua con retardo como nodos, los cuales son sistemas de orden entero. Además, se muestran los resultados de la sincronización en mundo pequeño del oscilador de Chua de orden fraccional, así como la sincronización en maestro y esclavo por formas hamiltonianas y el diseño de observadores. También se muestra la sincronización del sistema modificado de Lorenz fraccional en configuración estrella utilizando la teoría compleja, además la sincronización en maestro y esclavo por formas hamiltonianas y el diseño de observadores de dicho sistema.

VI.2 Métodos de sincronización

En esta sección se muestra la teoría utilizada para la sincronización de los nodos caóticos de orden entero y fraccional. Dicha teoría es la teoría de redes complejas y formas hamiltonianas y el diseño de observadores.

VI.2.1 Teoría de redes complejas

Consideremos una red compleja compuesta de N nodos idénticos, acoplados linealmente a través de la primera variable de estado de cada nodo. En esta red dinámica, cada nodo constituye un sistema dinámico de dimensión n , descrito como sigue

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (47)$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del nodo i , mientras que $u_i = u_{i1} \in \mathbb{R}^n$ es la señal de entrada del nodo i , definida por

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma \mathbf{x}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (48)$$

la constante $c > 0$ representa el grado de acoplamiento de los nodos en la red dinámica y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de conexiones, que conecta a las variables de estado de los nodos acoplados. Por simplicidad se asume que $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ es una matriz diagonal con $r_i = 1$ para una i en particular y $r_j = 0$ para $i \neq j$. Esto quiere, decir que cualquier par de nodos están acoplados a través de su i -ésima variable de estado.

La matriz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (49)$$

es la matriz de acoplamiento. Representa la configuración de acoplamiento de los nodos en la red dinámica. Si existe conexión entre el nodo i y el nodo j , entonces la entrada $a_{ij} = 1$; de otra manera, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los elementos de la diagonal de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$ se definen por

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (50)$$

Si el grado del nodo i es d_i , entonces

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (51)$$

Ahora, suponiendo que la red dinámica (47) está conectada de manera que no hay nodos aislados. Entonces, la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica irreducible. Se conoce que en este caso, cero es un valor propio de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$, con multiplicidad 1 y el resto de los valores propios son estrictamente negativos [73], [74].

La sincronización de los estados de los nodos de la red compleja, puede determinarse por los valores propios diferentes de cero de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$. Se dice que la red dinámica (47) sincroniza (asintóticamente), sí [73]

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (52)$$

La arquitectura de acoplamiento establecida en (50) garantiza que la sincronización de los estados de los nodos de la red corresponden a una solución $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^n$, de un nodo aislado, es decir satisfacen

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f(\mathbf{s}(t)), \quad (53)$$

donde la solución $\mathbf{s}(t)$, puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Esto implica que, la estabilidad de la sincronización de los estados de los nodos, es decir

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t), \quad (54)$$

de la red dinámica (47) está determinada por la dinámica de un nodo aislado, de la función no lineal $f(\bullet)$ y de su solución $\mathbf{s}(t)$, del grado de acoplamiento c , de la matriz de conexiones Γ y de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$.

La dinámica de un nodo aislado se determina por $\bar{d}$, la cual, es una constante positiva, tal que cero es un punto exponencialmente estable, el sistema n -dimensional aislado no lineal esta determinado por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z) - \bar{d}z_1, \\ \dot{z}_2 = f_2(z), \\ \vdots \\ \dot{z}_n = f_n(z). \end{cases} \quad (55)$$

Hay que notar que el sistema (55) corresponde al modelo matemático de un nodo aislado con una retroalimentación de estado $-\bar{d}z_1$.

VI.2.1.1 Condiciones de sincronización

Teorema 1 [73], [74] Considere la red dinámica compleja (47). Sean

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad (56)$$

los valores propios de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$. Suponiendo que existe una matriz diagonal (de dimensión $n \times n$) $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tales que

$$[\mathbf{D}f(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[\mathbf{D}f(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n \quad (57)$$

para todo $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Si además, se cumple que

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}, \quad (58)$$

entonces, la sincronización de los estados como expresado en (54), es exponencialmente estable.

Ya que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, la desigualdad (58) es equivalente a

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (59)$$

Esta condición dice, que dado que $|\lambda_2|$ puede ser muy grande, implica que la red dinámica compleja (47) pueda sincronizar con un valor de acoplamiento pequeño c . Así que, la sincronización de la red dinámica compleja (47) con respecto a una configuración particular de acoplamiento (regular o irregular) se puede determinar por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A}$, la cual, guarda estrecha relación con la configuración de acoplamiento de la red compleja.

VI.2.2 Formas hamiltonianas

Considere un sistema no lineal autónomo de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (60)$$

el cual, representa un sistema que exhibe un comportamiento caótico. Donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $f(\bullet)$ es una función no lineal. A partir de lo establecido en [75] muchos sistemas descritos por (60) pueden escribirse en la siguiente forma canónica de un hamiltoniano generalizado

$$\dot{x} = \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{S}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{F}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (61)$$

donde $H(x)$ nos indica una función de energía suave, la cual, es definida positiva globalmente en $\mathbb{R}^n$. El vector gradiente de H , representado por $\partial H / \partial x$ se considera que existe en cualquier parte. Frecuentemente utilizamos funciones de energía cuadráticas de la forma

$$H(x) = \left(\frac{1}{2} \right) x^T M x \quad (62)$$

con M una matriz constante, definida positiva y simétrica. En tales casos, $\partial H / \partial x = Mx$.

Las matrices cuadradas $\mathcal{J}(x)$ y $\mathcal{S}(x)$ mencionadas en la expresión (61) deben satisfacer para toda $x \in \mathbb{R}^n$ las propiedades:

$$\mathcal{J}(x) + \mathcal{J}^T(x) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(x) = \mathcal{S}^T(x).$$

El campo vectorial $\mathcal{J}(x) \partial H / \partial x$ representa la parte *conservativa* del sistema y el campo vectorial $\mathcal{S}(x) \partial H / \partial x$, nos describe la parte *no conservativa* del sistema. La matriz $\mathcal{S}(x)$ es en general, una matriz simétrica que representa la parte no conservativa del sistema. Para ciertos casos, la matriz simétrica $\mathcal{S}(x)$ es definida negativa o semi-definida negativa. En tales casos, el campo vectorial $\mathcal{S}(x) \partial H / \partial x$ representa la parte *disipativa* del sistema. Si por el contrario, $\mathcal{S}(x)$ es definida positiva, semi-definida positiva o indefinida, éste claramente representa, la parte *desestabilizante* del sistema, global, semi-global o local, respectivamente. En el caso de ser $\mathcal{S}(x)$ indefinida, ésta se descompone en la suma de una matriz simétrica semi-definida negativa $\mathcal{R}(x)$ y una matriz simétrica semi-definida positiva $\mathcal{N}(x)$. Y donde $\mathcal{F}(x)$ representa el vector de campo localmente desestabilizante.

VI.2.2.1 Diseño de un observador no lineal para una clase de osciladores en forma hamiltoniana generalizada

En el contexto de diseño de observadores, en nuestro caso, consideramos una clase especial de las formas hamiltonianas con un campo vectorial desestabilizante y un mapeo lineal de salida, expresada como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{J}(x) \frac{\partial H}{\partial x} + (\mathcal{I} + \mathcal{S}) \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{F}(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y &= \mathcal{C} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (63)$$

donde $\mathcal{S}$ es una matriz constante simétrica, no necesariamente de signo definido, la matriz $\mathcal{I}$ es una matriz constante antisimétrica, y es la salida del sistema y $\mathcal{C}$ es una matriz constante.

Para el diseño del observador de la forma (63), se estima el vector de estado x por $\hat{x}$ y se considera la función de energía hamiltoniana $H(\hat{x})$ como una particularización de H en términos del estado estimado $\hat{x}$. De la misma manera, se indica la salida estimada por $\hat{y}$ calculada en términos del estado estimado $\hat{x}$. Donde el gradiente $\partial H(\hat{x})/\partial \hat{x}$ es también de la forma $M\hat{x}$ siendo M una matriz, simétrica constante y definida positiva.

Por tanto, podemos obtener un observador de estado no lineal para (63) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \mathcal{J}(y)\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + (\mathcal{I} + \mathcal{S})\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + \mathcal{F}(y) + \mathcal{K}(y - \hat{y}), \\ y &= \mathcal{C}\frac{\partial H}{\partial \hat{x}},\end{aligned}\tag{64}$$

donde $\mathcal{K} = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ es una matriz constante, conocida como *ganancia del observador*. En el contexto de la sincronización, el observador (64) realizará el papel de oscilador esclavo, cuya función será estimar las dinámicas completas del sistema (63).

El error estimado del estado, definido como $e = x - \hat{x}$. Y el error estimado de la salida, definido como $e_y = y - \hat{y}$, son gobernados por

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathcal{J}(y)\frac{\partial H}{\partial e} + (\mathcal{I} + \mathcal{S} - \mathcal{K}\mathcal{C})\frac{\partial H}{\partial e}, \quad e \in \mathbb{R}^n \\ e_y &= \mathcal{C}\frac{\partial H}{\partial e}, \quad e_y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}\tag{65}$$

donde $\partial H(e)/\partial e$ con abusos de notación, es el vector gradiente de la función de energía modificada

$$\frac{\partial H(e)}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = M(x - \hat{x}) = Me.\tag{66}$$

VI.2.2.2 Estabilidad del error de sincronía

En esta sección, se dan condiciones de estabilidad para el error de sincronía definido por (65) entre el oscilador maestro (63) y el oscilador esclavo (64).

A continuación, se propone, cuando sea necesario, $\mathcal{I} + \mathcal{S} = \mathcal{W}$ y recordamos un par de conceptos relacionados con la estabilidad del error de sincronía (65).

Teorema 2 [10]: *El estado x del oscilador no lineal (63) puede ser global, asintótica y exponencialmente estimado por el estado $\hat{x}$ de un observador de la forma (64), si el par de matrices $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ o $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ son observables o al menos detectables.*

La observabilidad en cualquiera de los dos pares de matrices $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ o $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ es una condición suficiente, mas no necesaria para la reconstrucción asintótica de los estados del sistema maestro (63). Una condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica global del error de estimación, está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3 [75]: El estado x del sistema no lineal (63) puede ser global, asintótica y exponencialmente estimado por el estado $\hat{x}$ del observador (64), si y sólo si, existe una matriz constante tal que la matriz simétrica

$$[\mathcal{W} - \mathcal{K}\mathcal{C}] + [\mathcal{W} - \mathcal{K}\mathcal{C}]^T = [\mathcal{S} - \mathcal{K}\mathcal{C}] + [\mathcal{S} - \mathcal{K}\mathcal{C}]^T = 2[\mathcal{S} - \frac{1}{2}(\mathcal{K}\mathcal{C} - \mathcal{C}^T\mathcal{K}^T)], \quad (67)$$

sea definida negativa.

VI.3 Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden entero

En esta sección se reportan los resultados numéricos de la sincronización de redes complejas utilizando como nodos a sistemas caóticos de orden entero, tales sistemas son el oscilador de Rössler y el oscilador de Chua con retardo. Los resultados numéricos se obtuvieron por medio del programa Matlab.

VI.3.1 Sincronización del oscilador de Rössler en mundo pequeño

Aquí se consideran las ecuaciones del oscilador de Rössler en forma normalizada, las cuales, estan dadas por las ecuaciones (37). Sabemos que los valores de los parámetros para los cuales el oscilador de Rössler (37) genera dinámicas caóticas son: $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$ y las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (5, 5, 5)$.

VI.3.1.1 Sincronización de redes con nodos de Rössler en vecino cercano

Las ecuaciones de estado para múltiples nodos caóticos de Rössler que forman la red dinámica (de acuerdo a la ecuación (47)), están dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i1} &= -x_{i2} - x_{i3} + s \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_{j1}, & i = 1, 2, \dots, N, \\
\dot{x}_{i2} &= x_{i1} + ax_{i2}, \\
\dot{x}_{i3} &= b + x_{i3} (x_{i1} - c).
\end{aligned} \tag{68}$$

Para $\bar{d} = 0.2$, el nodo aislado de Rössler (37) (de acuerdo a la ecuación (53)) se estabiliza en un punto fijo como se muestra en la figura 16. En particular, con $N = 8$ nodos caóticos de Rössler, con el grado de conexión $K = 2$ y con las condiciones iniciales para el nodo 1 $\mathbf{x}_1(0) = (4, 4, 4)$, para el nodo 2 $\mathbf{x}_2(0) = (3, 3, 3)$, para el nodo 3 $\mathbf{x}_3(0) = (6, 6, 6)$, para el nodo 4 $\mathbf{x}_4(0) = (2, 3, 4)$, para el nodo 5 $\mathbf{x}_5(0) = (3, 4, 5)$, para el nodo 6 $\mathbf{x}_6(0) = (4, 5, 6)$, para el nodo 7 $\mathbf{x}_7(0) = (6, 5, 4)$ y para el nodo 8 $\mathbf{x}_8(0) = (5, 4, 3)$.

La red dinámica en configuración de vecino cercano se muestra en la figura 17. La matriz de acoplamiento correspondiente está dada por

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

El segundo valor propio mayor definido por (1) es como sigue,

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.5858. \tag{70}$$

Con la fuerza de acoplamiento elegida $s = 0.4$, la condición de sincronización (59) es como sigue,

$$0.4 \geq \left| \frac{0.2}{-0.5858} \right| = 0.3414. \tag{71}$$

La condición (59) se cumple y por tanto, la red dinámica (68) con 8 nodos caóticos de Rössler acoplados en configuración de vecino cercano sincronizará. La figura 18 muestra los atractores caóticos generados por los 8 nodos, los cuales, son proyectados sobre el plano

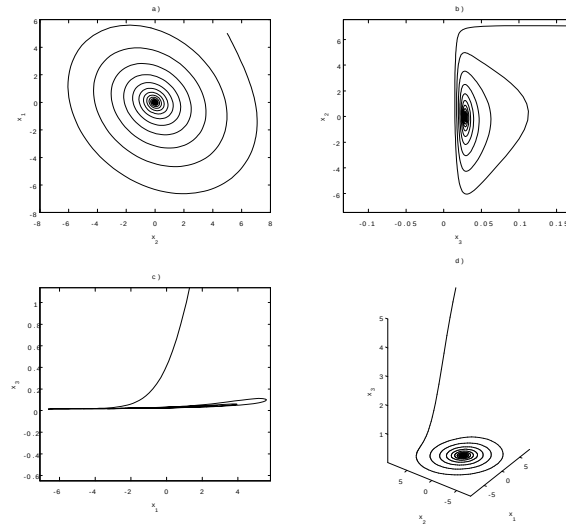


Figura 16: Atractores en punto fijo generados por un nodo aislado de Rössler con una retroalimentación de control $-dx_1$.

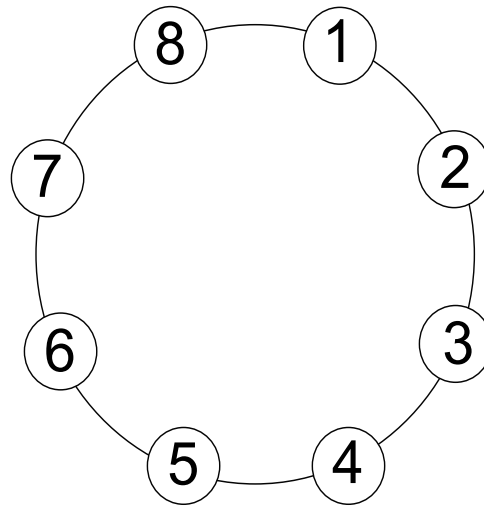


Figura 17: Red en vecino cercano con $N = 8$ nodos caóticos de Rössler

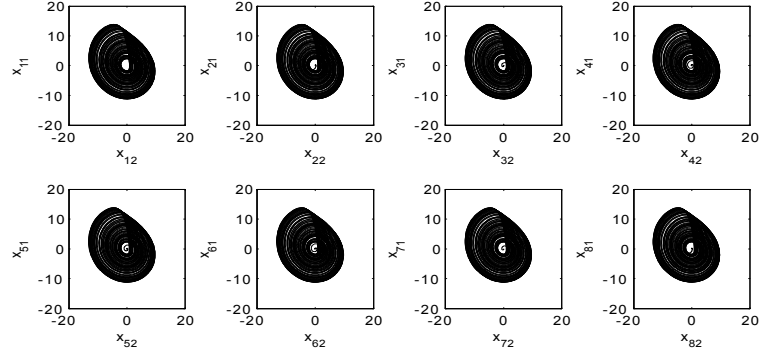


Figura 18: Atractores caóticos proyectados en el plano (x_{i1}, x_{i2}) para $N = 8$ nodos caóticos de Rössler.

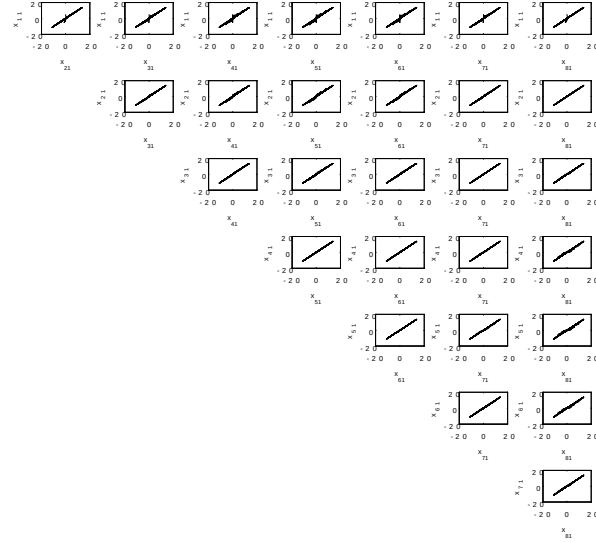


Figura 19: Sincronización de la red del primer estado de los 8 nodos caóticos de Rössler $x_{i1}, i = 1, \dots, 8$ en la red con nodos acoplados en vecino cercano.

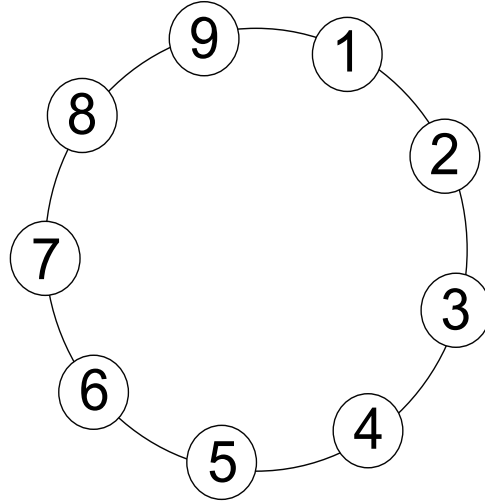


Figura 20: Red en vecino cercano con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler.

(x_{i1}, x_{i2}) . Mientras, la figura 19 ilustra la sincronización de la red dinámica entre los 8 nodos, mostrando la sincronización del primer estado de cada nodo, es decir, x_{i1} , $i = 1, \dots, 8$.

Ahora, considerando la red con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler acoplados, la red dinámica en configuración de vecino cercano es como se muestra en la figura 20. La matriz de acoplamiento correspondiente es definida por

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

El segundo valor propio mayor definido por (1),

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) = -0.4679. \quad (73)$$

La condición de sincronización (59) es como sigue,



Figura 21: Retrato de fase de la no sincronización entre 9 nodos de la red en configuración de vecino cercano.

$$0.4 \geq \left| \frac{0.2}{-0.4679} \right| = 0.4274.$$

Ahora, la condición de sincronización (59) no se cumple y por tanto, la red dinámica (68) con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler acoplados en vecino cercano no sincronizará. La figura 21 muestra el retrato de fase entre los nodos, mostrando el primer estado de cada nodo x_{i1} , $i = 1, \dots, 9$, se puede observar que no hay sincronización entre los nodos.

Por tanto, podemos decir que para la fuerza de acoplamiento $s = 0.4$, la red dinámica en configuración de vecino cercano (68) sincronizará hasta con $N = 8$ nodos caóticos acoplados de Rössler.

VI.3.1.2 Sincronización de redes con nodos de Rössler en mundo pequeño

La red en vecino cercano con valores de parámetros previos no sincroniza para $N \geq 9$ nodos caóticos de Rössler acoplados en vecino cercano, por tanto, ahora usamos la configuración de acoplamiento entre nodos de mundo pequeño para sincronizar la red con $N \geq 9$ nodos caóticos de Rössler, sin alcanzar la configuración de acoplamiento global, donde la sincronización se logra sin “ningún problema”, además de tener conexiones innecesarias

(redundantes) que aumentarían los costos de construcción y un mayor consumo de energía, solo con algunas nuevas conexiones agregadas se puede lograr la sincronización de la red mediante la configuración de mundo pequeño, esto se describe a continuación.

Basado en la matriz de acoplamiento (72) con $N = 9$ en configuración de vecino cercano, se puede construir la nueva matriz de acoplamiento en mundo pequeño de la siguiente manera [74]. En la matriz de acoplamiento de vecino cercano $\mathbf{A}_{nc}$, los elementos $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pueden cambiar a $a_{ij} = a_{ji} = 1$ de acuerdo a una probabilidad elegida p . En este caso, se utiliza una probabilidad de conexión $p = 0.15$, se eligió una red con dos nuevas conexiones. Con estas nuevas conexiones, la red dinámica se muestra en la figura 22. Entonces, recalculando los elementos de la diagonal de acuerdo a (50), la matriz de acoplamiento correspondiente con dos nuevas conexiones se define como

$$\mathbf{A}_{swc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

El segundo valor propio mayor es -0.8732 . La condición de sincronización (59) es dada por

$$0.4 \geq \left| \frac{0.2}{-0.8732} \right| = 0.23. \quad (74)$$

Con lo anterior, la condición de sincronización (59) se cumple y por tanto, la red con 9 nodos caóticos de Rössler sincronizará en esta configuración de acoplamiento.

La figura 23 muestra el atractor x_1 vs x_2 de cada nodo. Mientras que, la figura 24 ilustra la sincronización entre los 9 nodos, mostrando la sincronización del primer estado de cada nodo.

Las figuras 25 y 26 muestran los valores numéricos de $\lambda_{2ns}(p; N)$ en función de la probabilidad p y el número de N nodos de Rössler. En estas figuras, cada par de valores

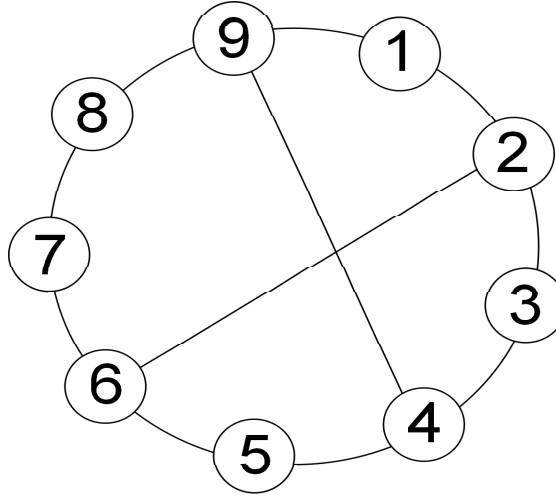


Figura 22: Red en mundo pequeño con $N = 9$ nodos caóticos de Rössler acoplados.

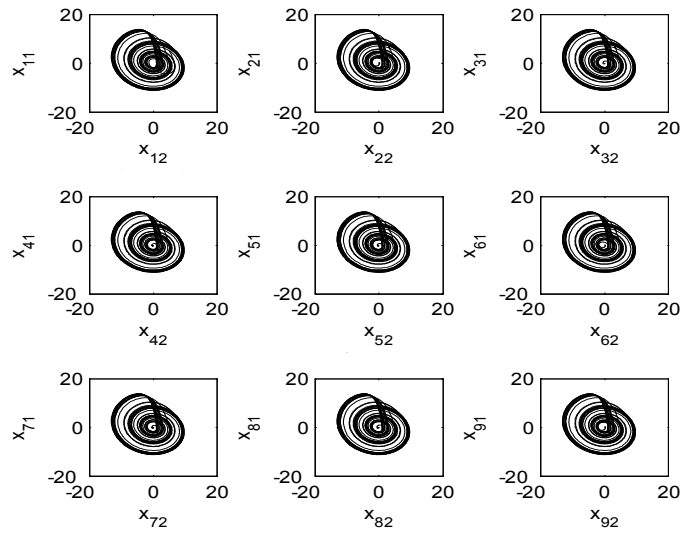


Figura 23: Atractores caóticos proyectados en el plano (x_{i1}, x_{i2}) en configuración de mundo pequeño de los $N = 9$ nodos.



Figura 24: Sincronización de los primeros estados (x_{i1} , $i = 1, \dots, 9$) de cada nodo entre los 9 nodos de la red en configuración de mundo pequeño.

de p y N , $\lambda_{2ns}(p; N)$ se obtienen promediando los resultados de 20 corridas implementadas en el lenguaje de programación Matlab. De estas figuras se puede observar que:

- (i) Para cualquier valor de N , el valor de $\lambda_{2ns}(p; N)$ decrementa a $-N$ conforme p incrementa de 0 a 1.
- (ii) Para cualquier valor de $p \in (0, 1]$, el valor de $\lambda_{2ns}(p; N)$ decrementa a $-\infty$ conforme N incrementa a $+\infty$.

Los resultados anteriores implican que, para cualquier fuerza de acoplamiento dada $s > 0$, tenemos:

- (i) Para cualquier $N > \bar{d}/s$, existe un valor crítico $\bar{p}$, tal que sí $\bar{p} \leq p \leq 1$, entonces la red conectada en mundo pequeño sincronizará.
- (ii) Para cualquier $p \in (0, 1]$, existe un valor crítico $\bar{N}$, tal que sí $N \geq \bar{N}$, entonces la red conectada en mundo pequeño sincronizará.

La figura 27 muestra los valores de p y N con los cuales se puede lograr la sincronización de la red. Por ejemplo, para $N = 50, 150$ y 200 , la sincronización de la red conectada en mundo pequeño se logra para $p > 0.018$, $p > 0.08$ y $p > 0.006$, respectivamente.

VI.3.2 Sincronización en red del oscilador de Chua con retardo

En esta sección se reportan los resultados en simulación numérica de la sincronización en red del oscilador de Chua con retardo en diferentes topologías, se muestra la sincronización en la topología de vecino cercano, mundo pequeño, anillo abierto, árbol, estrella y global. En cada una de estas topologías se evaluó la cantidad de nodos que se pueden conectar en base a una cierta fuerza de acoplamiento y como es que influye en cada una de las diferentes configuraciones de red, además se evaluó la sincronización de forma unidireccional en estas mismas topologías observando cómo cambian las condiciones de sincronización para cada caso.

Para las siguientes simulaciones se toman las ecuaciones normalizadas del oscilador de Chua con retardo, las cuales estan dadas por (38), sabemos que los valores de los parámetros para los cuales el oscilador de Chua con retardo (38) genera dinámica caótica son: $\alpha = 10$, $\beta = 19.53$, $\gamma = 0.1636$, $a = -1.4325$, $b = -0.7831$, $\sigma = 0.5$, $\epsilon = 0.2$ y el retardo $\tau = 0.001$ y las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (1.1, 0.1, 0.5)$.

VI.3.2.1 Sincronización de red acoplada en configuración de vecino más cercano

Sincronización bidireccional

Las ecuaciones de estado para múltiples nodos hipercaóticos del oscilador de Chua con retardo de la red dinámica (de acuerdo a la ecuación (47)) están dadas por

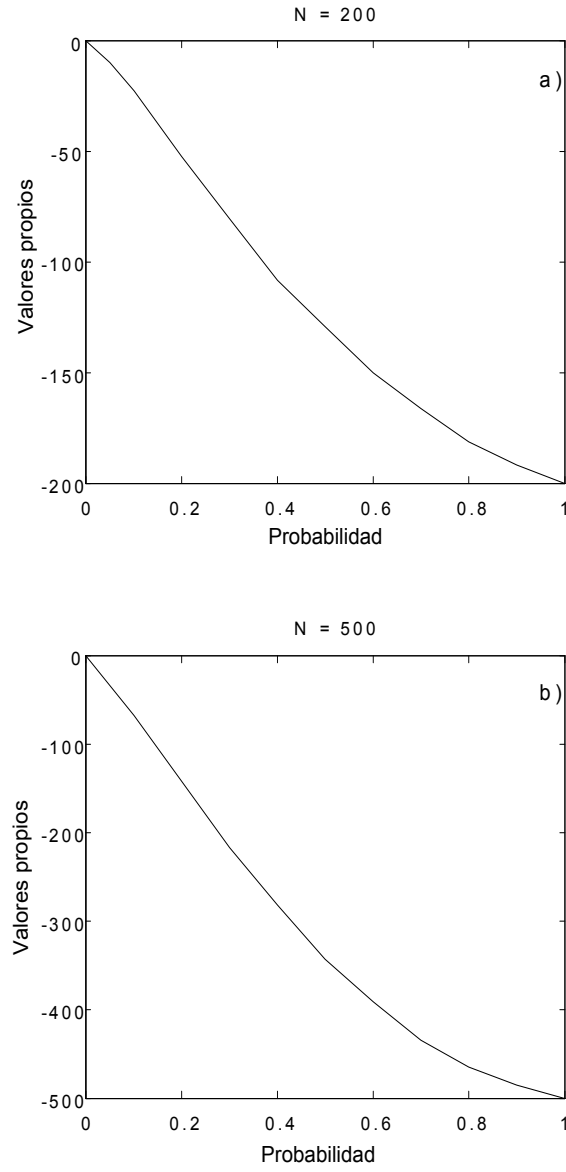


Figura 25: Valores numéricos de $\lambda_{2ns}(p; N)$ como una función de la probabilidad p : (a) $N = 200$ nodos caóticos de Rössler, (b) $N = 500$ nodos caóticos de Rössler.

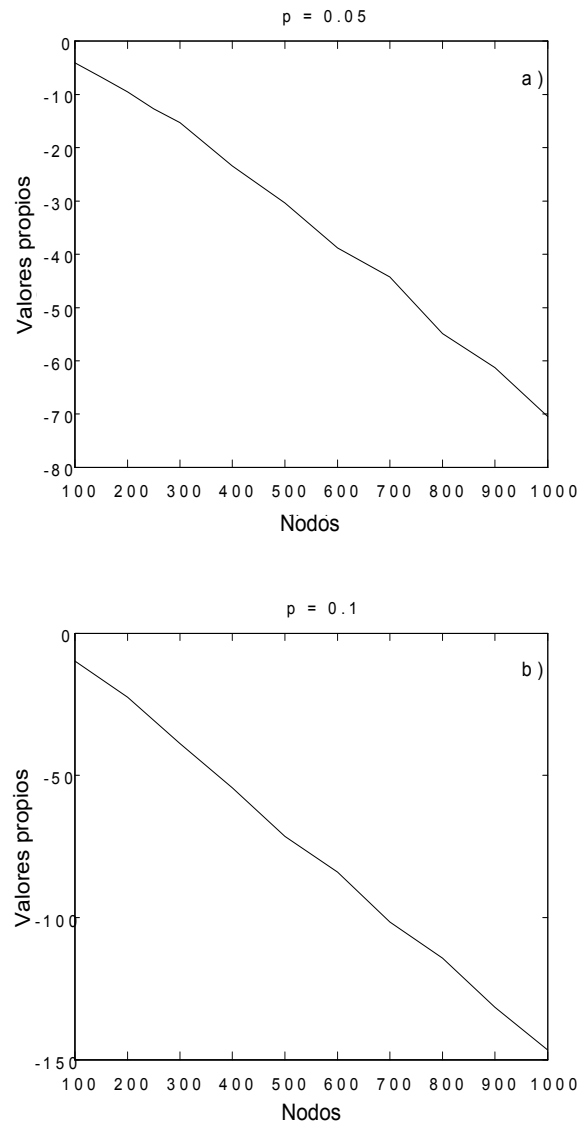


Figura 26: Valores numéricos de $\lambda_{2ns}(p; N)$ como una función del número de N nodos caóticos de Rössler: (a) $p = 0.05$, (b) $p = 0.1$.

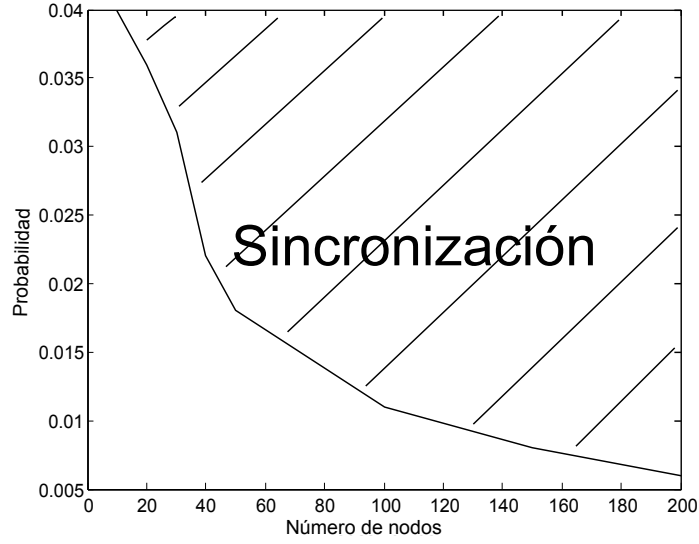


Figura 27: Valores de p y N para lograr la sincronización de red en mundo pequeño de osciladores de Rössler.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1} &= \alpha(-x_{i1} + x_{i2} - f(x_{i1})) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_{j1}, & i = 1, 2, \dots, N \\
 \dot{x}_{i2} &= x_{i1} - x_{i2} + x_{i3}, \\
 \dot{x}_{i3} &= -\beta x_{i2} - \gamma x_{i3} - \beta \varepsilon \sin(\sigma x_{i1}(t - \tau)),
 \end{aligned} \tag{75}$$

con función no lineal

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|).$$

Para el valor de $\bar{d} = 30$, el nodo aislado del circuito de Chua con retardo (53) se estabiliza en un punto como se aprecia en la figura 28. El valor de la fuerza de acoplamiento c elegida es $c = 25$ y el grado de conexión de la red es $K = 2$.

Con un número de $N = 5$ nodos la red queda definida como se aprecia en la figura 29 (a). La matriz de acoplamiento bidireccional queda definida como

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

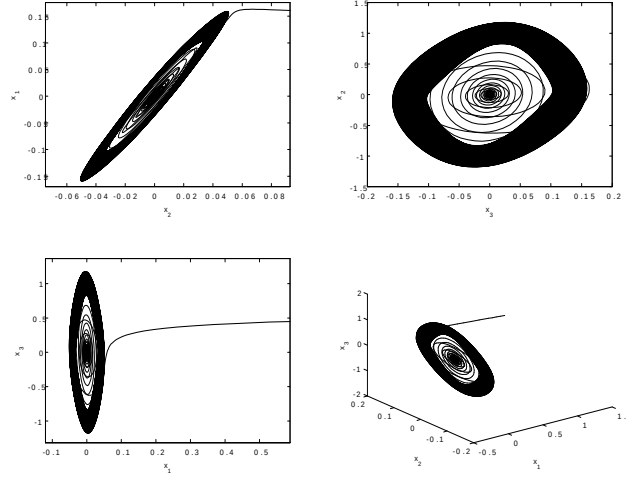


Figura 28: Atractores punto fijo del circuito de Chua con retardo aislado con retroalimentación $-\bar{d}x_1$.

El segundo valor propio mayor definido por (1),

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = -1.382. \quad (77)$$

La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$25 \geq \left| \frac{30}{-1.382} \right| = 21.7. \quad (78)$$

Con estos valores seleccionados, la condición (59) se cumple y por tanto, la red con 5 nodos sincronizará.

En la figura 30 se muestran los atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada uno de los 5 nodos. En la figura 31 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando solo el primer estado de cada nodo.

Con un número de nodos $N = 6$ la red queda definida como se aprecia en la figura 29 (b). La matriz de acoplamiento queda definida como

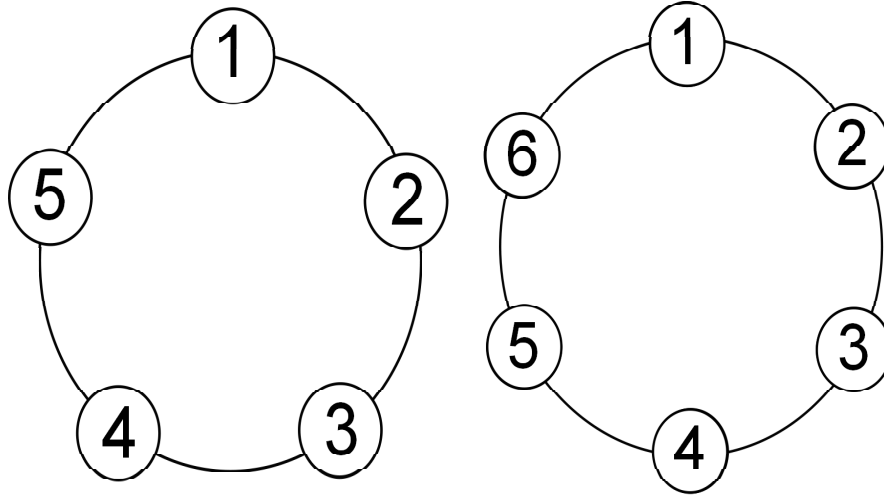


Figura 29: Red en configuración vecino cercano bidireccional: a) con $N = 5$ nodos, b) con $N = 6$. nodos

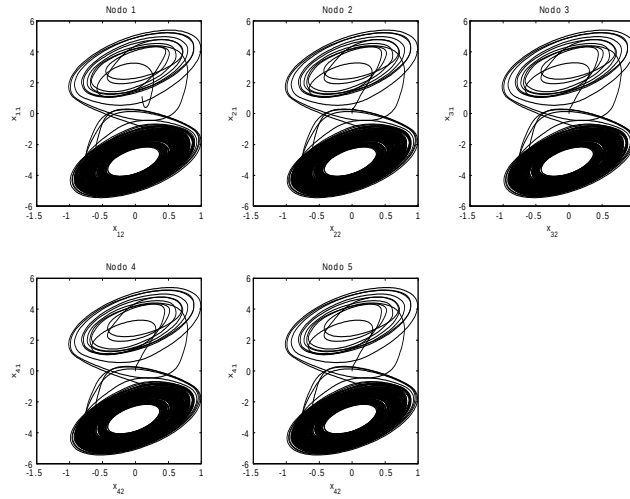


Figura 30: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en la red, con acoplamiento bidireccional y con $N = 5$.

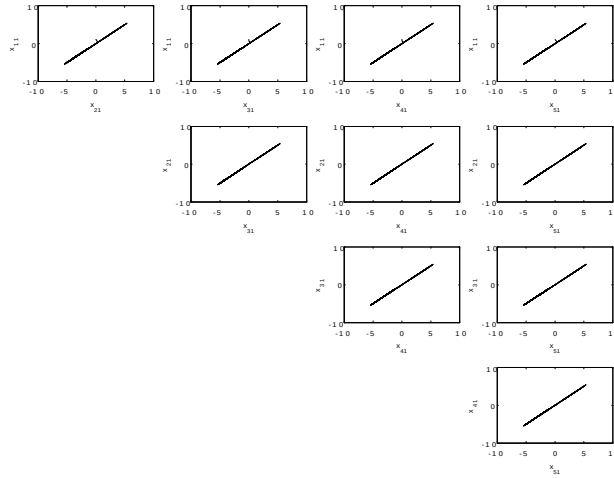


Figura 31: Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano.

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

El segundo valor propio mayor definido por (1),

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1. \quad (80)$$

La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$25 \geq \left| \frac{30}{-1} \right| = 30.$$

Con estos valores seleccionados la condición de sincronización (59) no se cumple y por tanto, la red con 6 nodos no sincronizará. En la figura 32 se muestra el plano de fase entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo (x_{i1} , $i = 1, 2, \dots, 6$), se puede apreciar que no hay sincronía entre los nodos.

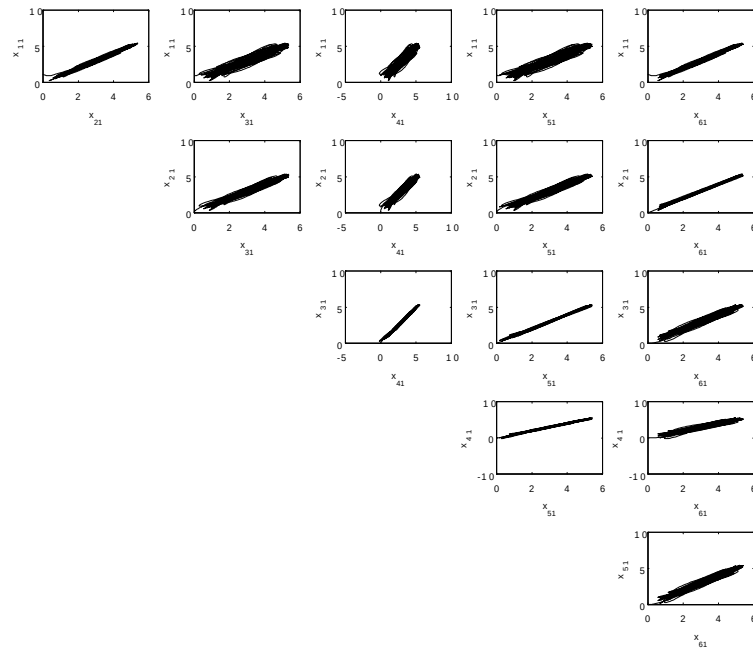


Figura 32: Plano de fase entre los 6 nodos de la red en vecino cercano acoplados bidireccionalmente.

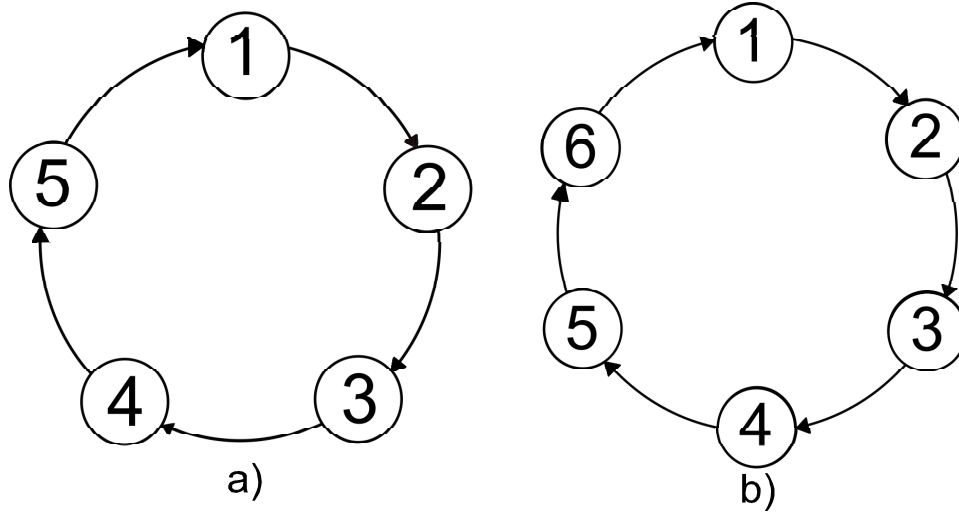


Figura 33: Red en configuración de vecino cercano unidireccional. a) Con $N = 5$, b) Con $N = 6$.

Por tanto, se puede decir que con los valores de los parámetros $c = 25$ y $N = 6$ no se logrará la sincronización de la red, la sincronización en una red en configuración de vecino cercano acoplados bidireccionalmente sincronizará hasta un máximo de 5 nodos.

Sincronización unidireccional

Con un número de $N = 5$ nodos, la red queda definida como se aprecia en la figura 33 (a). La matriz de acoplamiento queda como sigue

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Con una fuerza de acoplamiento $c = 10$ y con los valores anteriores, la red con 5 nodos sincronizará. En la figura 34 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1}$ vs $x_{i2})$ de cada uno de los 5 nodos. En la figura 35 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

Con un número de $N = 6$ nodos la red queda definida como se aprecia en la figura 33 (b). La matriz de acoplamiento queda como sigue

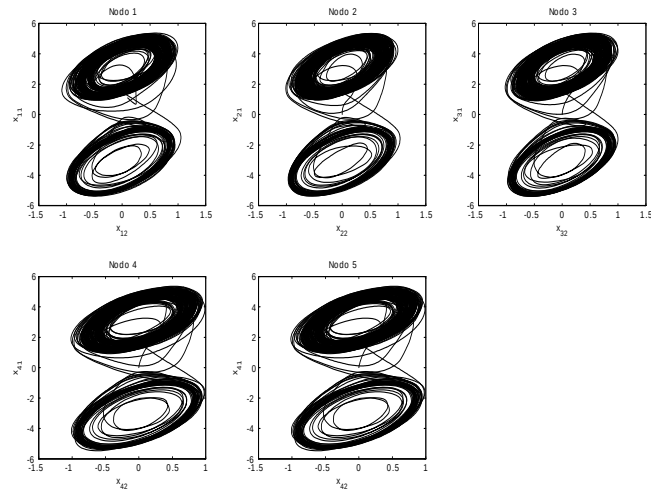


Figura 34: Atractores caóticos proyectados en el plano $(x_{i1}$ vs $x_{i2})$ de cada nodo con acoplamiento unidireccional con $N = 5$ nodos.

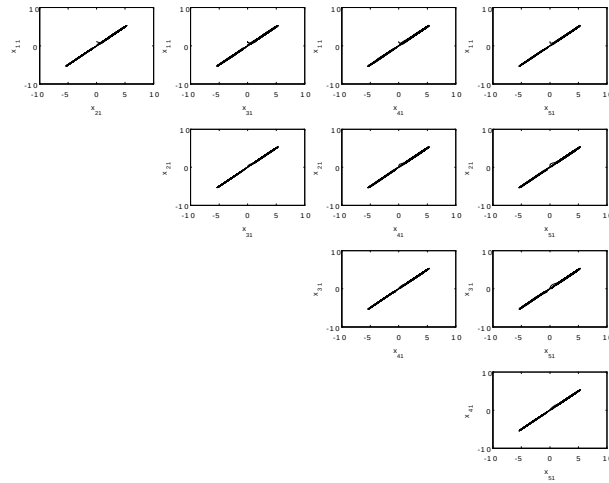


Figura 35: Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano unidireccional con $N = 5$ nodos.

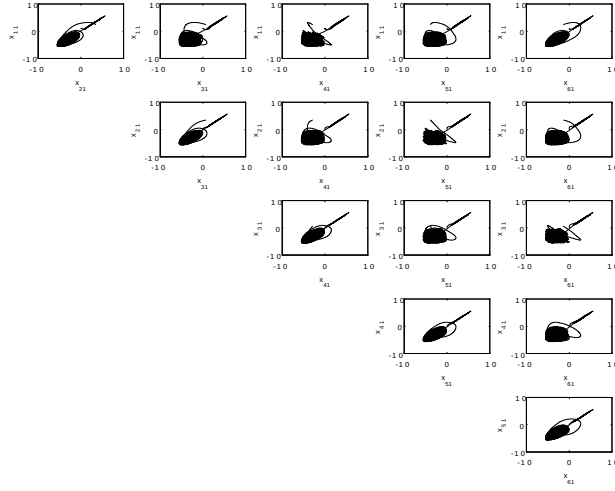


Figura 36: Plano de fase en vecino cercano unidireccional entre los 6 nodos de la red.

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Con una fuerza de acoplamiento $c = 10$ y los valores anteriores la red con 6 nodos no sincronizará. En la figura 36 se ilustra el plano de fase entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo x_{i1} , $i = 1, \dots, 6$, se puede apreciar que no hay sincronía entre los nodos.

Por tanto, se puede decir que con los valores de los parámetros $c = 10$ y $N = 6$ no se logrará la sincronización de la red, la sincronización en una red en configuración de vecino más cercano unidireccional sincronizará hasta un máximo de 5 nodos.

VI.3.2.2 Sincronización de red acoplada en configuración mundo pequeño

Sincronización bidireccional

La red de vecino cercano con los valores de los parámetros anteriores no sincroniza para $N \geq 6$, por tanto, se recurre a la configuración en mundo pequeño para lograr la sincronización para un número de nodos $N \geq 6$, sin necesidad de llegar a la configuración

de acoplamiento global, donde se lograría la sincronización “sin problema”, además teniendo conexiones innecesarias que aumentarían costos de construcción y un mayor consumo de energía, mientras que con algunas nuevas conexiones se puede tener sincronización completa de la red utilizando la configuración de mundo pequeño.

Partiendo de la matriz de acoplamiento (79) con $N = 6$ de la configuración de vecino cercano, se puede construir la nueva matriz de acoplamiento para mundo pequeño como sigue [74]. En la matriz de acoplamiento de vecino cercano A_{nc} , los elementos $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pueden cambiar a $a_{ij} = a_{ji} = 1$ de acuerdo a una probabilidad elegida p . En este caso, se utilizó una probabilidad de conexión $p = 0.15$ con lo cual se anexaron dos nuevas conexiones. Con estas nuevas conexiones la red queda como se muestra en la figura 37(a). Entonces reescribiendo los elementos de la diagonal principal de acuerdo con la ecuación (50) la matriz de acoplamiento con estas dos nuevas conexiones queda definida como

$$A_{swc} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

El segundo valor propio mayor es -1.3088 . La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$25 \geq \left| \frac{30}{-1.3088} \right| = 22.92. \quad (83)$$

Con estos valores seleccionados la condición (59) se cumple y la red en mundo pequeño con 6 nodos sincronizará. En la figura 38 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1} \text{ vs } x_{i2})$ de cada uno de los 6 nodos.

En la figura 39 se ilustra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando solo el primer estado de cada nodo, se puede apreciar la sincronía entre los 6 nodos.

La figura 40 muestra los valores numéricos de λ_{2ns} como función del número de nodos N . En esta figura cada par de valores de N , λ_{2ns} es obtenido promediando el resultado de 20 corridas, implementadas en el lenguaje de programación Matlab. Los resultados anteriores implican que para cualquier fuerza de acoplamiento $c > 0$, tenemos que:

- (i) Para cualquier número de nodos N , existe un valor crítico $\overline{\lambda_{2ns}}$, tal que si $\overline{\lambda_{2ns}} \geq \lambda_{2ns}$ entonces la red conectada en mundo pequeño sincronizará.

Sincronización unidireccional

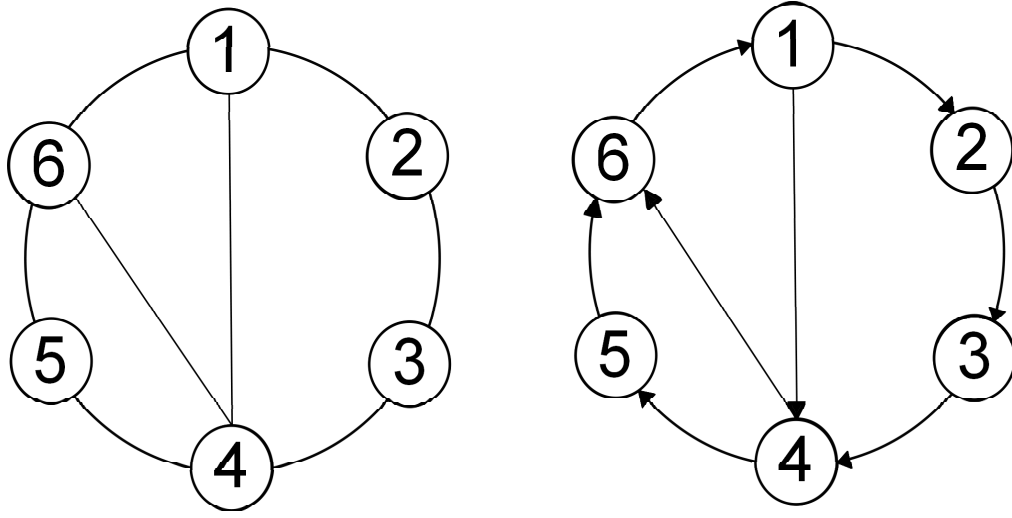


Figura 37: Red en configuración en mundo pequeño con $N = 6$: a) bidireccional, b) unidireccional.

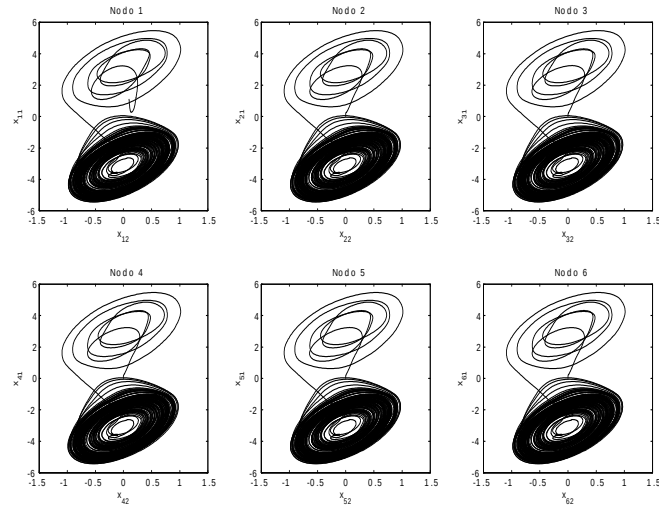


Figura 38: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en configuración de mundo pequeño con $N = 6$ acoplados bidireccionalmente.

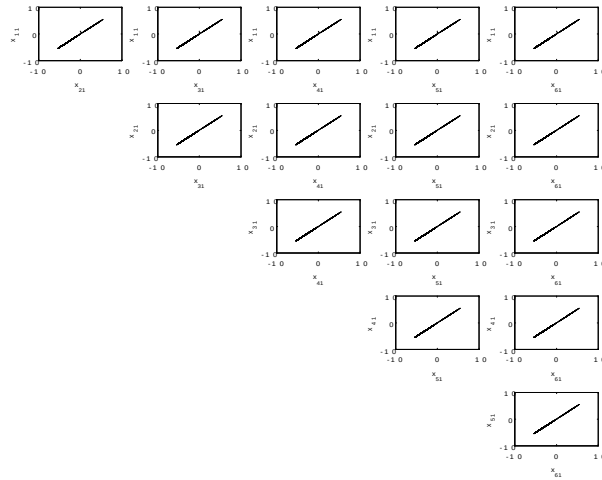


Figura 39: Plano de fase (sincronía) entre los 6 nodos de la red en configuración de mundo pequeño acoplados bidireccionalmente.

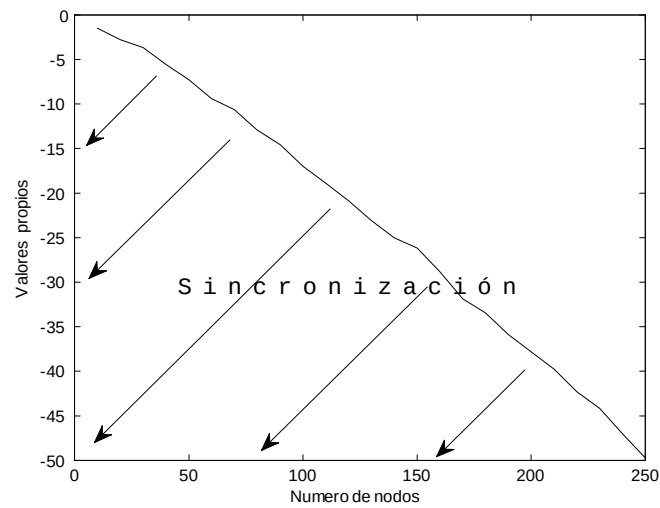


Figura 40: Número de nodos en función de los valores propios para lograr la sincronía.

Partiendo de la matriz de acoplamiento (82) con $N = 6$ de la configuración de vecino cercano unidireccional, se puede construir la nueva matriz de acoplamiento para mundo pequeño como sigue [74]. En la matriz de acoplamiento de vecino cercano A_{nc} , los elementos $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pueden cambiar a $a_{ij} = a_{ji} = 1$ de acuerdo a una probabilidad elegida p . En este caso, se utilizó una probabilidad de conexión $p = 0.15$ con lo cual se anexaron dos nuevas conexiones. Con estas nuevas conexiones la red queda como se muestra en la figura 37(b). Entonces reescribiendo los elementos de la diagonal principal de acuerdo con la ecuación (50), la matriz de acoplamiento correspondiente con estas dos nuevas conexiones queda definida como

$$A_{swc} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

El segundo valor propio mayor es $-0.9293 + 0.7587i$.

Con estas dos nuevas conexiones agregadas a la red original y valores anteriores la red en mundo pequeño unidireccional con 6 nodos sincronizará. En la figura 41 se muestran los atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada uno de los 6 nodos.

En la figura 42 se aprecia la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo x_{i1} , $i = 1, 2, \dots, 6$, se puede apreciar la sincronía entre los 6 nodos.

VI.3.2.3 Sincronización de red acoplada en configuración anillo abierto

Sincronización bidireccional

Con un número de $N = 6$ nodos acoplados bidireccionalmente la red en anillo abierto queda configurada como se aprecia en la figura 43(a). Para este caso, la matriz de acoplamiento queda definida como

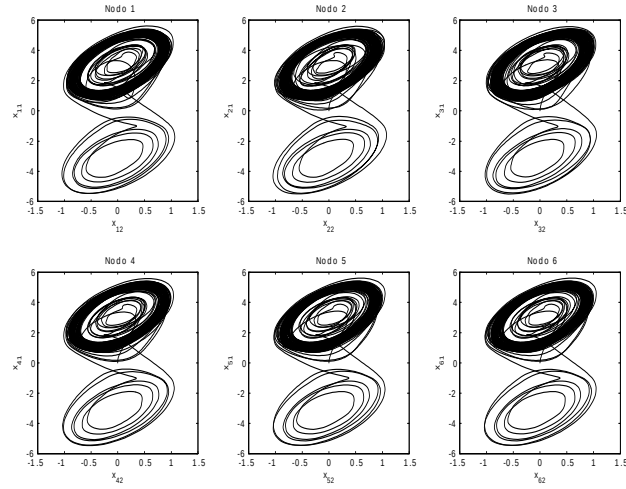


Figura 41: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en la red en configuración de mundo pequeño unidireccional con $N = 6$.

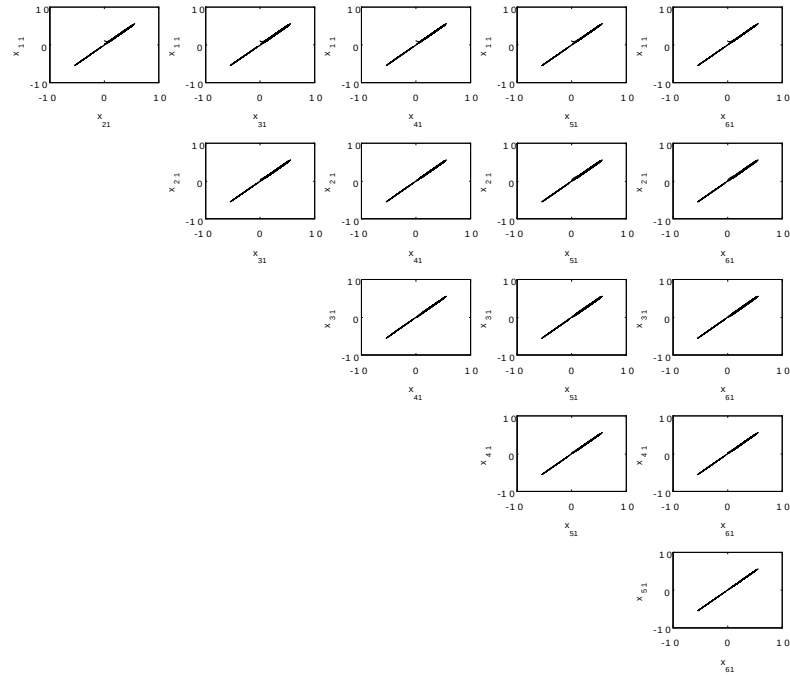


Figura 42: Plano de fase entre los 6 nodos de la red en configuración mundo pequeño unidireccional.

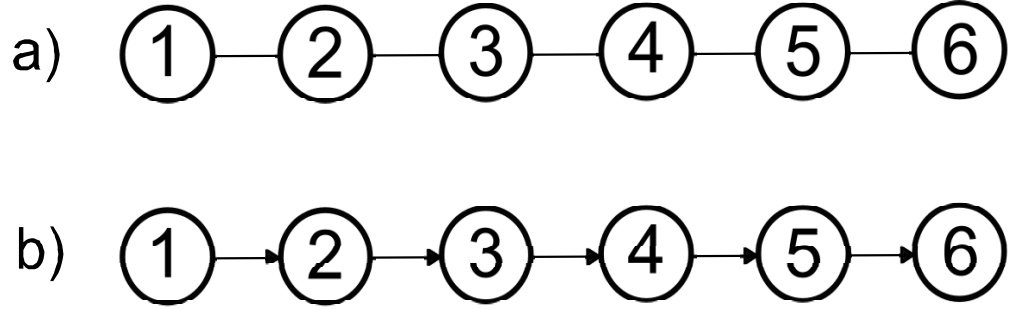


Figura 43: Red en configuración anillo abierto con $N = 6$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.

$$A_{roc} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (84)$$

El segundo valor propio mayor es -0.2679 . Para este caso, la condición de sincronización del teorema 1 [74] no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 50$.

En la figura 44 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1} \text{ vs } x_{i2})$ de cada uno de los 6 nodos. En la figura 45 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, ilustrando sólo el primer estado de cada nodo, x_{i1} , $i = 1, 2, \dots, 6$.

Sincronización unidireccional

Con un número de nodos $N = 6$ la red queda definida como se aprecia en la figura 43(b). La matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{roc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

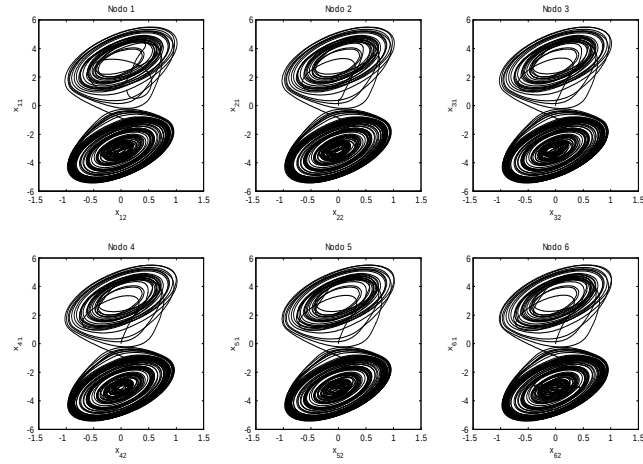


Figura 44: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) generados por cada nodo en anillo abierto bidireccional, $N = 6$.

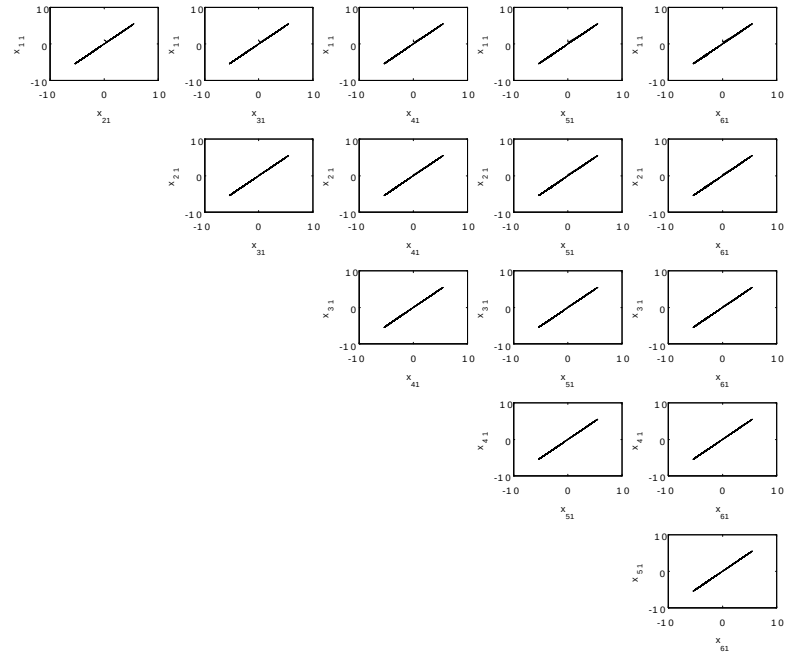


Figura 45: Sincronización entre los 6 nodos de la red en anillo abierto bidireccional con $N = 6$.

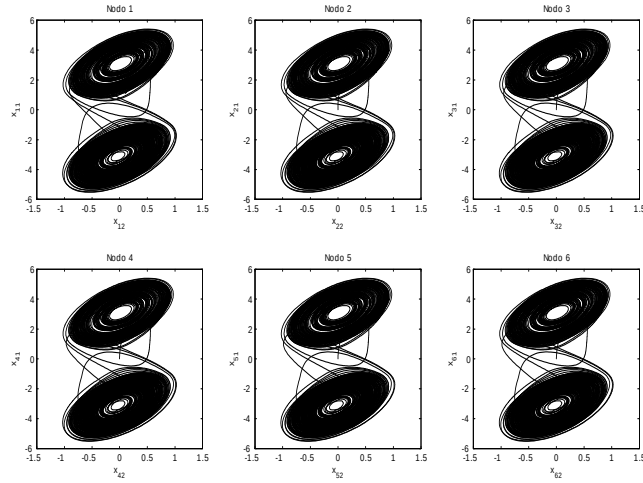


Figura 46: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en anillo abierto unidireccional, $N = 6$.

El segundo valor propio mayor es -1 . Para este caso, la condición de sincronización del teorema 1 [74] no se satisface, sin embargo, esta red en anillo abierto con nodos acoplados unidireccionalmente sincroniza con un valor de ganancia $c = 50$.

En la figura 46 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1}$ vs $x_{i2})$ generados por cada uno de los 6 nodos. Mientras en la figura 47 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

VI.3.2.4 Sincronización de red acoplada en configuración estrella

Sincronización bidireccional

Con un número de $N = 5$ nodos (osciladores de Chua con retardo) la red queda definida como se aprecia en la figura 48(a). La matriz de acoplamiento queda como sigue

$$A_{stc} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (86)$$

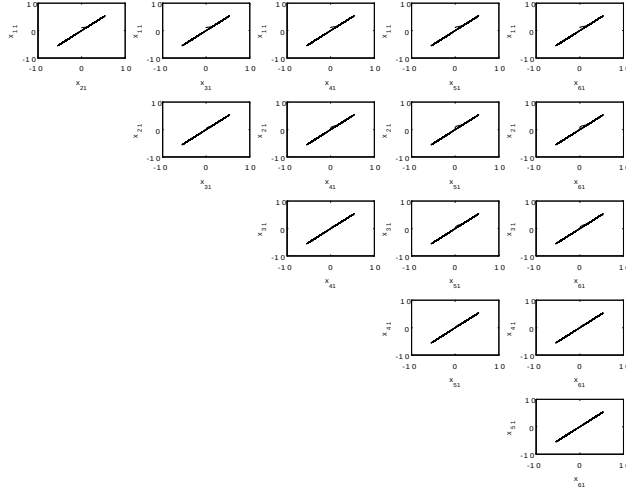


Figura 47: Sincronización entre los 6 nodos de la red en anillo abierto unidireccional con $N = 6$.

El segundo valor propio mayor es -1 . Para este caso, la condición de sincronización establecida en el teorema 1 no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 20$.

En la figura 49 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1}$ vs $x_{i2})$ de cada uno de los 5 nodos. En la figura 50 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando solo el primer estado de cada nodo.

Sincronización unidireccional

Con un número de $N = 5$ nodos (osciladores de Chua con retardo) la red queda definida como se aprecia en la figura 48(b). La matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{stc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

El segundo valor propio mayor es -1 . Para este caso, la condición de sincronización establecida en el teorema 1 no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 20$.

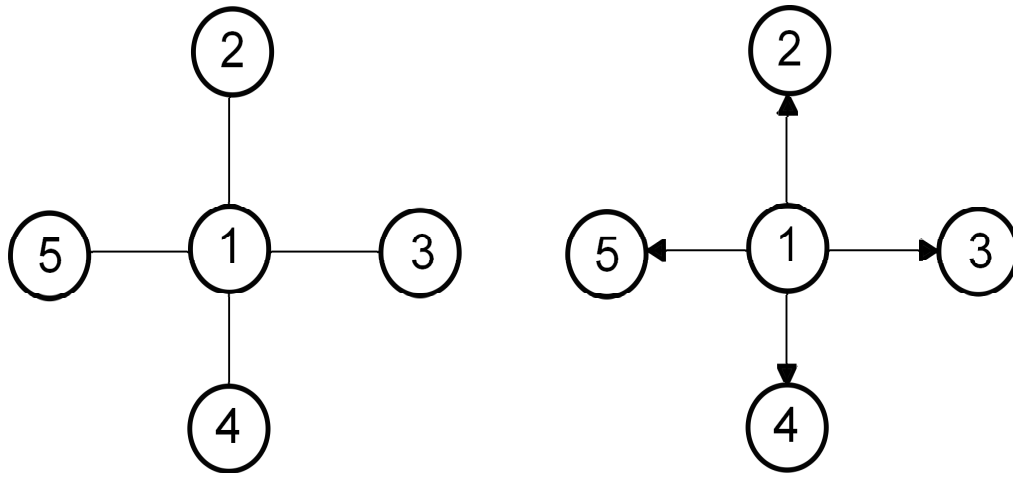


Figura 48: Red en configuración estrella con $N = 5$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.

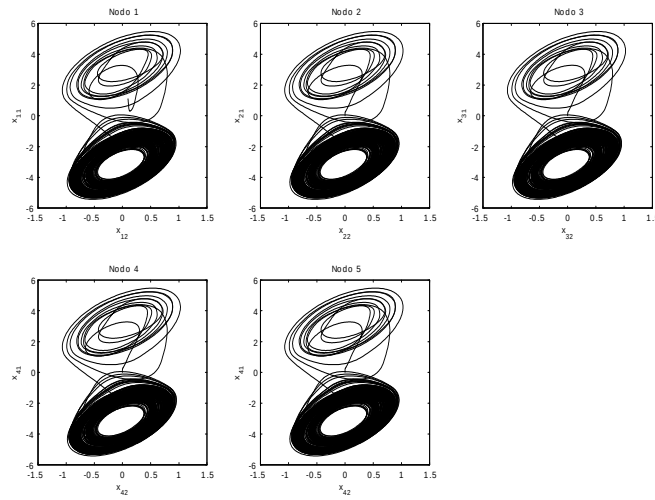


Figura 49: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) generados por cada nodo en estrella bidireccional, $N = 5$.

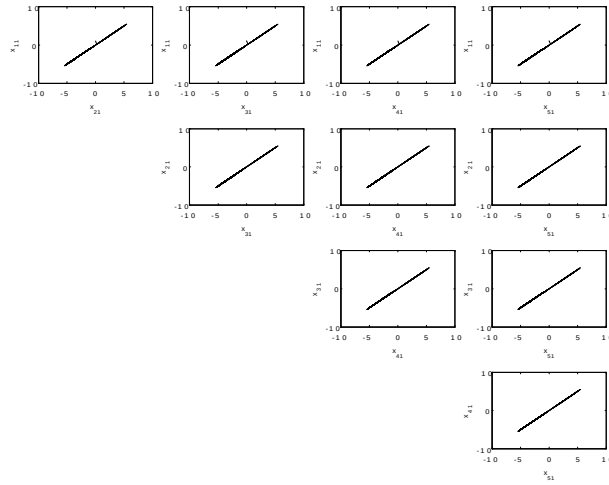


Figura 50: Sincronización entre los 5 nodos de la red en estrella bidireccional con $N = 5$.

En la figura 51 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1} \text{ vs } x_{i2})$ de cada uno de los 5 nodos. En la figura 52 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo x_{i1} , $i = 1, 2, \dots, 5$.

VI.3.2.5 Sincronización de red acoplada en configuración global

Sincronización bidireccional

Con un número de $N = 6$ nodos (osciladores de Chua con retardo), la red queda definida como se aprecia en la figura 53. La matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{gc} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

El segundo valor propio mayor es -6 . Para este caso, la condición de sincronización establecida en el teorema 1 no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 10$. En la figura 54 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1} \text{ vs } x_{i2})$ de cada uno de los 6 nodos. En la figura 55 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

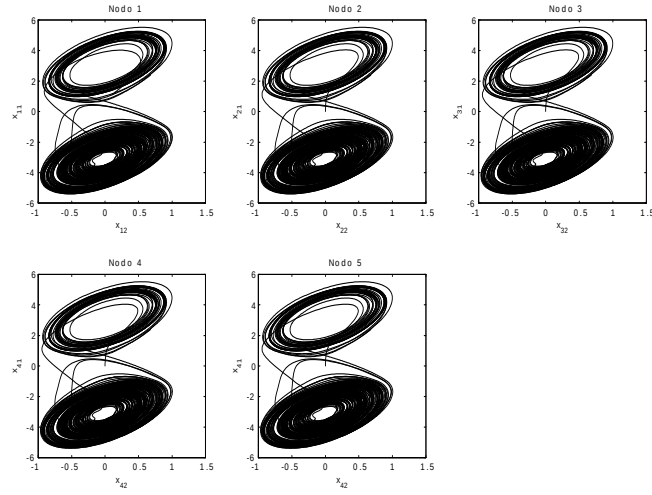


Figura 51: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en estrella unidireccional, $N = 5$.

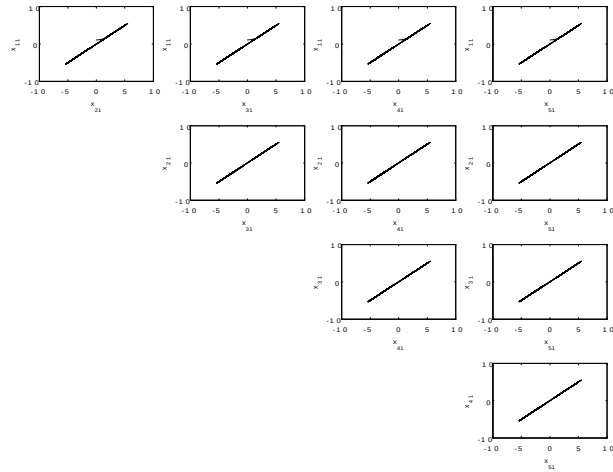


Figura 52: Sincronización entre los 5 nodos de la red en estrella unidireccional con $N = 5$.

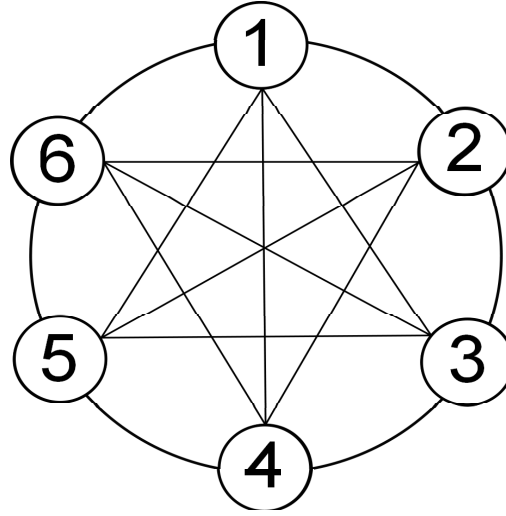


Figura 53: Red en configuración global con $N = 6$ nodos.

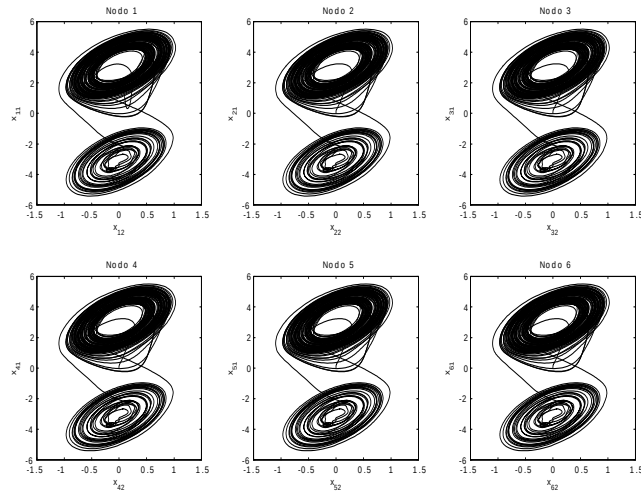


Figura 54: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en global, $N = 6$ nodos.

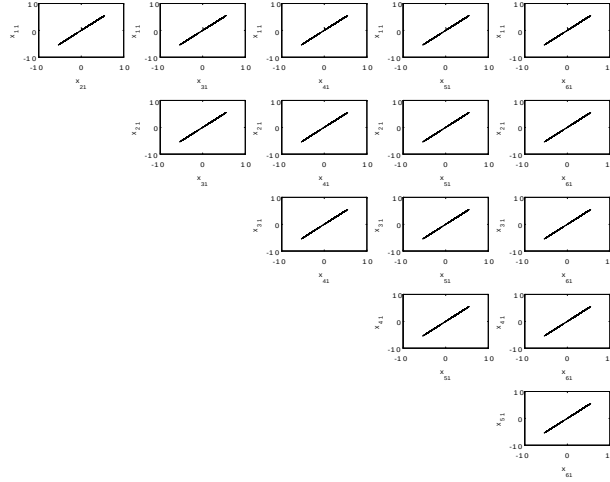


Figura 55: Sincronización entre los 6 nodos de la red con acoplamiento global.

VI.3.2.6 Sincronización de red acoplada en configuración árbol

Sincronización bidireccional

Con un número de $N = 7$ nodos (osciladores de Chua con retardo), la red queda definida como se aprecia en la figura 56(a). La matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{tc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

El segundo valor propio mayor es -0.2679 . Para este caso, la condición de sincronización establecida en el teorema 1 no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 10$.

En la figura 57 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1} \text{ vs } x_{i2})$ de cada uno de los 7 nodos. En la figura 58 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

Sincronización unidireccional

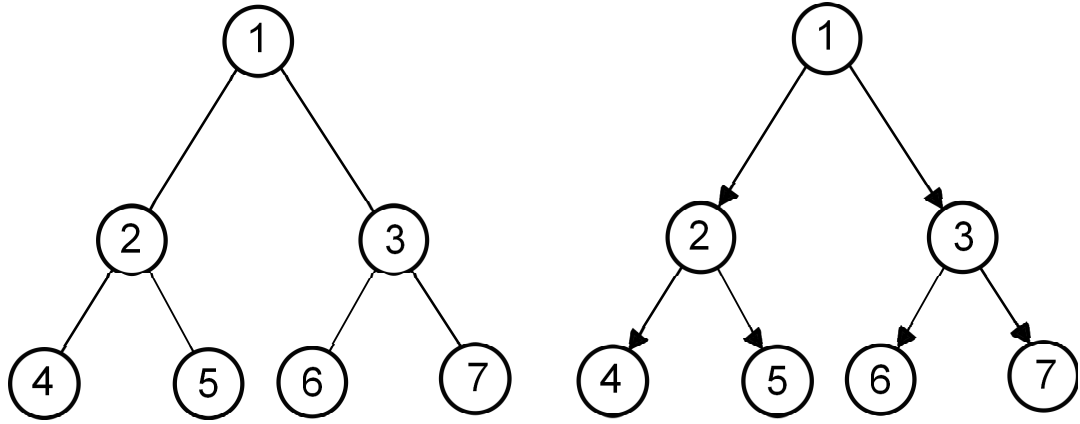


Figura 56: Red en configuración árbol con $N = 7$: a) acoplamiento bidireccional, b) acoplamiento unidireccional.

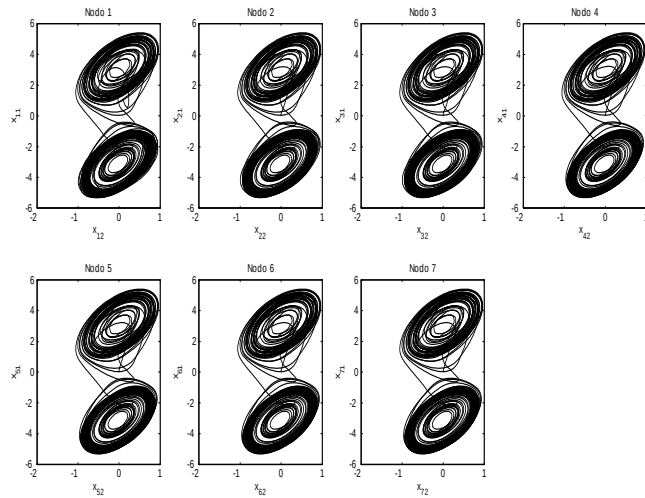


Figura 57: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en árbol bidireccional, $N = 7$.

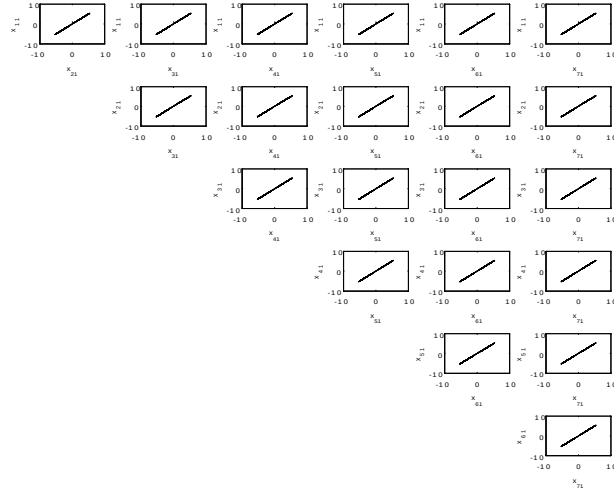


Figura 58: Sincronización entre los 7 nodos de la red en árbol bidireccional con $N = 7$.

Con un número de $N = 7$ (osciladores de Chua con retardo), nodos la red queda definida como se aprecia en la figura 56(b). La matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{tc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

El segundo valor propio mayor es -1 . Para este caso, la condición de sincronización establecida en el teorema 1 no se satisface, sin embargo, esta red sincroniza con un valor de ganancia $c = 20$. En la figura 59 se muestran los atractores caóticos proyectados en $(x_{i1}$ vs $x_{i2})$ de cada uno de los 7 nodos. En la figura 60 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

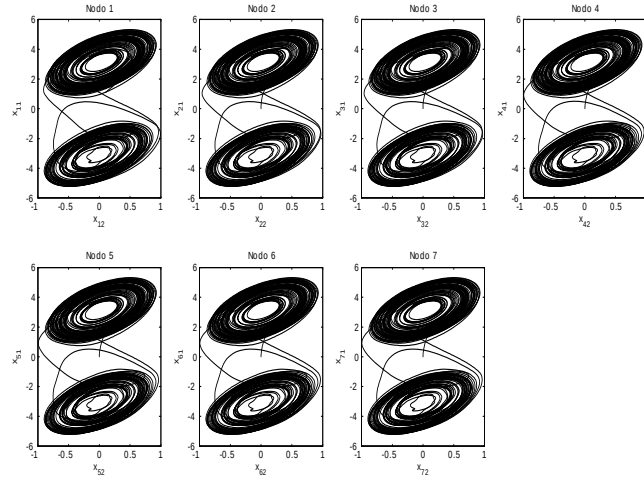


Figura 59: Atractores caóticos (x_{i1} vs x_{i2}) de cada nodo en árbol unidireccional, $N = 7$.

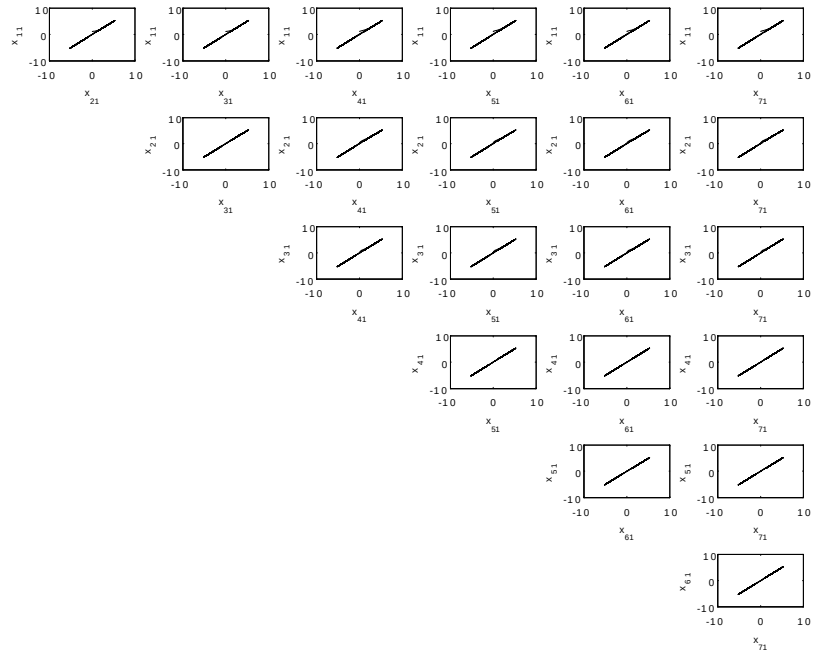


Figura 60: Sincronización entre los 7 nodos de la red en árbol unidireccional con $N = 7$.

VI.4 Sincronización de redes complejas con nodos caóticos de orden fraccional

VI.4.1 Sincronización en maestro y esclavo del oscilador de Chua de orden fraccional por formas hamiltonianas

Para realizar las simulaciones numéricas se tomaron en cuenta las ecuaciones normalizadas del circuito de Chua de orden fraccional (41)-(42), los parámetros de la simulación para los cuales se genera la dinámica caótica fraccional son: paso de cuantización $h = 0.001$, $q_1 = q_2 = 0.98$, $q_3 = 0.94$, $\alpha = 10.3$, $\beta = 10.53$, $\gamma = 0.268$, $a = -1.1726$, $b = -0.7872$ [65].

El circuito de Chua de orden fraccional (41)-(42) puede ser representado en forma canónica hamiltoniana (61), como se aprecia a continuación

$$\begin{bmatrix} D_t^{q_1} x_1 \\ D_t^{q_1} x_2 \\ D_t^{q_1} x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & -\beta & -\gamma\beta \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} + \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Realizando el análisis de detectabilidad y observabilidad podemos obtener el observador diseñado (64) de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} D_t^{q_1} \hat{x}_1 \\ D_t^{q_1} \hat{x}_2 \\ D_t^{q_1} \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & -\beta & -\gamma\beta \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \hat{x}} + \begin{bmatrix} -\alpha f(\hat{x}_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} e_y. \quad (92)$$

El observador diseñado expresado en forma fraccional está determinado por

$$\begin{aligned} D_t^{q_1} \hat{x}_1(t) &= \alpha(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t) - f(\hat{x}_1)) + k_1(x_1(t) - \hat{x}_1(t)), \\ D_t^{q_2} \hat{x}_2(t) &= \hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) + \hat{x}_3(t) + k_2(x_1(t) - \hat{x}_1(t)), \\ D_t^{q_3} \hat{x}_3(t) &= -\beta\hat{x}_2(t) - \gamma\hat{x}_3(t) + k_3(x_1(t) - \hat{x}_1(t)), \end{aligned} \quad (93)$$

donde

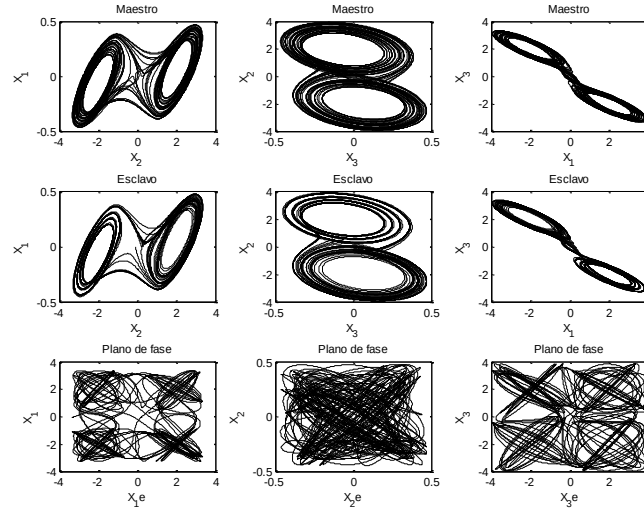


Figura 61: Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$.

$$f(\hat{x}_1) = m_1 \hat{x}_1(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|\hat{x}_1(t) + 1| - |\hat{x}_1(t) - 1|) \quad (94)$$

Aplicando el teorema 3 podemos obtener los valores de las ganancias del observador con las cuales se puede obtener la sincronización entre el maestro y el esclavo. Los valores de las ganancias obtenidas fueron $k_1 > 0.5$, $k_2 > 1.15$ y $k_3 = 0$. Con estos valores se logra la sincronización entre el maestro y el esclavo, lo cual lo observamos en las siguientes figuras. Los valores de los parámetros y condiciones iniciales utilizadas por el maestro y esclavo son las siguientes: Las condiciones iniciales para el maestro son $x_1(0) = 0.6$, $x_2(0) = 0.1$, $x_3(0) = -0.6$, las condiciones iniciales para el esclavo son $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0$ y $\hat{x}_3(0) = 0$. Los valores de los parámetros utilizados tanto para el maestro y para el esclavo son: Paso de cuantización $h = 0.005$, $\alpha = 10.3$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$, $m_0 = -0.7872$ y $m_1 = -1.1726$. El orden de la derivada del maestro es: $q_1 = 0.93$, $q_2 = 0.99$, $q_3 = 0.92$ el orden de la derivada para el esclavo es: $\hat{q}_1 = 0.93$, $\hat{q}_2 = 0.99$, $\hat{q}_3 = 0.92$ y el tiempo de simulación fue $T_{sim} = 200$.

La figura 61 muestra los atractores caóticos generados por el maestro y el esclavo, así como el plano de fase entre ellos, cuando las ganancias del observador son $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$. Es decir, no hay acoplamiento alguno entre el maestro y esclavo. Se observa que tanto el maestro como el esclavo generan los atractores caóticos pero al ver el plano de fase se aprecia que no hay una sincronía entre ellos.

La figura 62 muestra la sincronización entre el maestro y esclavo cuando las ganancias del observador son $k_1 = 0.6$, $k_2 = 1.16$ y $k_3 = 0$. Es decir, ya hay acoplamiento entre el

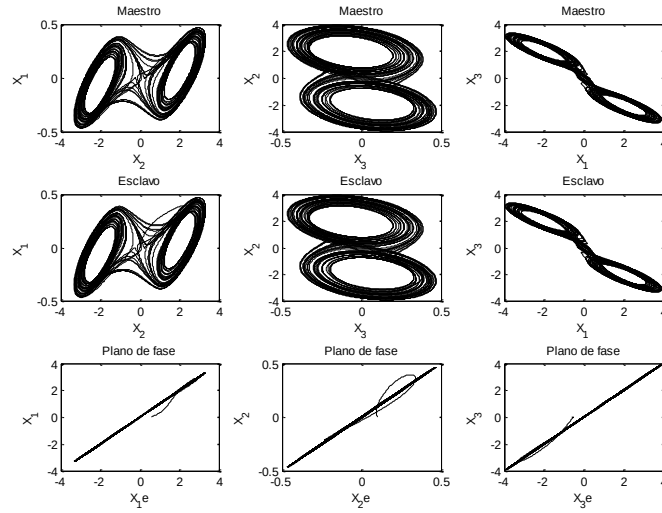


Figura 62: Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 0.6$, $k_2 = 1.16$ y $k_3 = 0$.

maestro y esclavo, con los valores de ganancias en el rango donde se logra la sincronización. Se observa que tanto el maestro como el esclavo generan atractores caóticos y al ver el plano de fase se aprecia que hay sincronía entre ellos. Es decir, las dinámicas son exactamente iguales después de un tiempo.

Para lograr una sincronización más rápida se puede aumentar la ganancia del observador, la figura 63 muestra la sincronía entre el maestro y esclavo cuando las ganancias del observador son $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ y $k_3 = 0$. Es decir, se aumentó la fuerza de acoplamiento entre el maestro y esclavo logrando una sincronización mas rápida entre ellos, esto se puede apreciar en el plano de fase de esta figura.

VI.4.2 Sincronización en mundo pequeño del oscilador de Chua de orden fraccional

Para las siguientes simulaciones se tomaron en cuenta las ecuaciones normalizadas del circuito de Chua de orden fraccional (41)-(42). Las ecuaciones de estado para múltiples nodos caóticos de Chua fraccional de la red dinámica (de acuerdo a la ecuación (47)) están dadas por

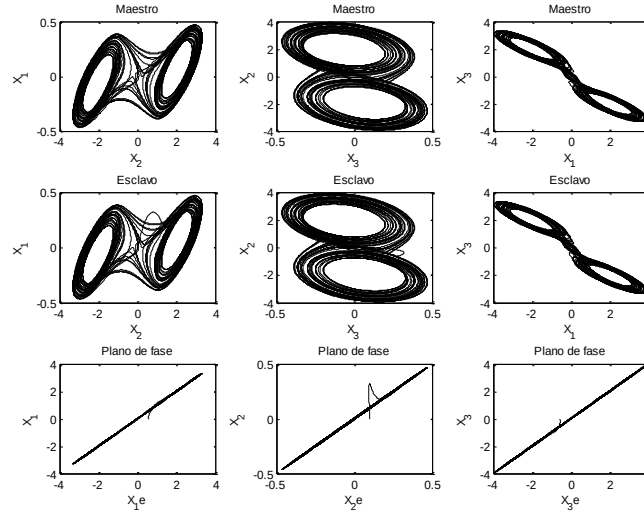


Figura 63: Atractores caóticos y plano de fase entre el maestro y esclavo con $k_1 = 10$, $k_2 = 10$ y $k_3 = 0$.

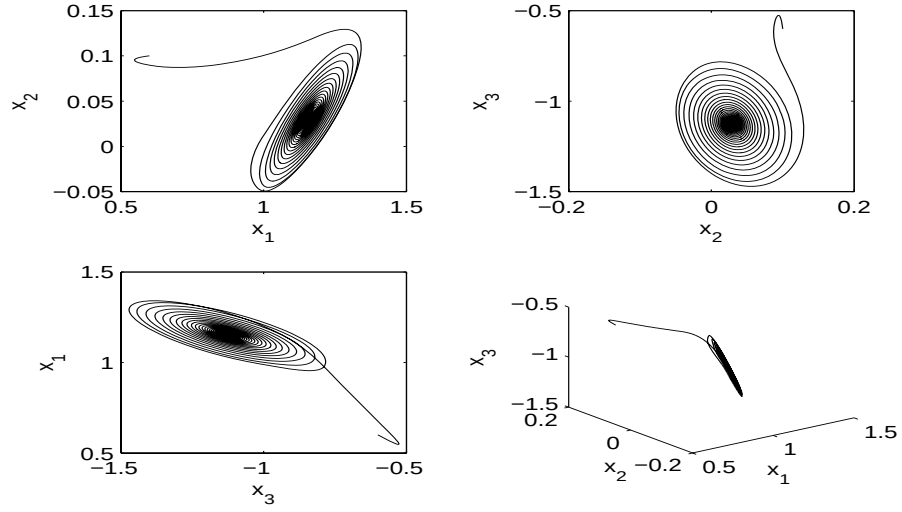
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1} &= \alpha(x_{i2} - x_{i1} - f(x_{i1})) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_{j1}, & i = 1, 2, \dots, N, \\
 \dot{x}_{i2} &= x_{i1} - x_{i2} + x_{i3}, \\
 \dot{x}_{i3} &= -\beta x_{i2} - \gamma x_{i3}.
 \end{aligned} \tag{95}$$

donde

$$f(x_{i1}) = m_1 x_{i1} + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_{i1} + 1| - |x_{i1} - 1|)$$

Para el valor de $\bar{d} = 2.5$, el nodo aislado del sistema de Chua de orden fraccional (53) se estabiliza en un punto como se muestra en la figura 64. La fuerza de acoplamiento elegida $c = 2.4$, con un grado de conexión de red $K = 2$ y con $N = 5$ sistemas caóticos de Chua de orden fraccional como nodos, la topología de red se muestra en la figura 65(a). La matriz de acoplamiento esta dada por

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{96}$$



El segundo valor propio mayor está definido por (1),

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = -1.382. \quad (96)$$

La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$2.4 \geq \left| \frac{2.5}{-1.382} \right| = 1.809. \quad (96)$$

Con estos valores seleccionados, la condición (59) se cumple y por tanto la red con 5 nodos sincronizará.

En la figura 66 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo.

Con un número de nodos $N = 6$ la red queda definida como se aprecia en la figura 65 (b). La matriz de acoplamiento queda definida como

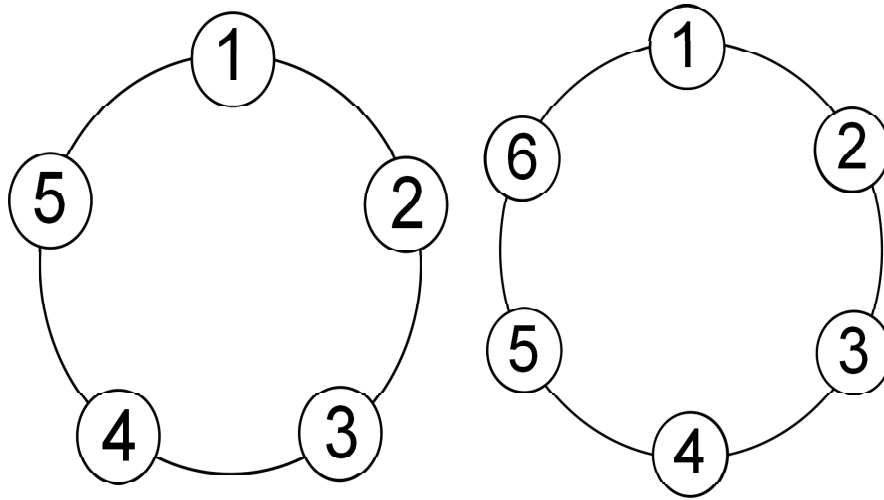


Figura 65: Red en configuración vecino cercano: a) $N = 5$, b) $N = 6$.

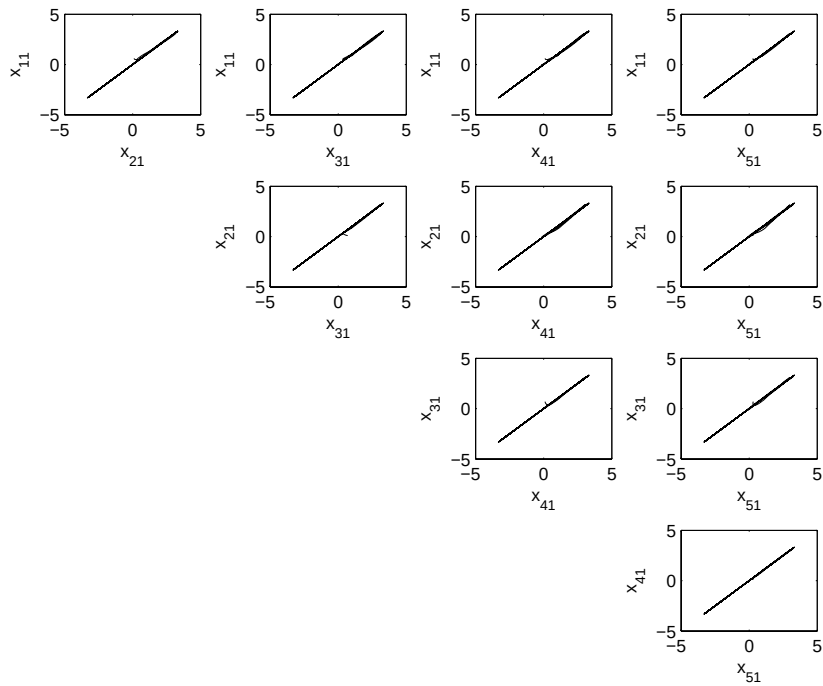


Figura 66: Sincronización entre los 5 nodos de la red en vecino cercano.

$$A_{nc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (96)$$

El segundo valor propio mayor definido por (1),

$$-4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1. \quad (96)$$

La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$2.4 \geq \left| \frac{2.5}{-1} \right| = 2.5.$$

Con estos valores seleccionados la condición de sincronización (59) no se cumple y por tanto, la red con 6 nodos no sincronizará. En la figura 67 se muestra el plano de fase entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo, se puede apreciar que no hay sincronía entre los nodos.

Por tanto, se puede decir que con los valores de los parámetros $c = 2.5$ y $N = 6$ no se logrará la sincronización de la red, la sincronización en una red en configuración de vecino cercano sincroniza hasta un máximo de 5 nodos.

Partiendo de la matriz de acoplamiento (96) con $N = 6$ de la configuración de vecino cercano, se puede construir la nueva matriz de acoplamiento para mundo pequeño como sigue [74]. En la matriz de acoplamiento de vecino más cercano A_{nc} , los elementos $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pueden cambiar a $a_{ij} = a_{ji} = 1$ de acuerdo a una probabilidad elegida p . En este caso, se utilizó una probabilidad de conexión $p = 0.15$ con lo cual se anexaron dos nuevas conexiones. Con estas nuevas conexiones la red queda como se muestra en la figura 68. Entonces reescribiendo los elementos de la diagonal principal de acuerdo con la ecuación (50) la matriz de acoplamiento con estas dos nuevas conexiones queda definida como

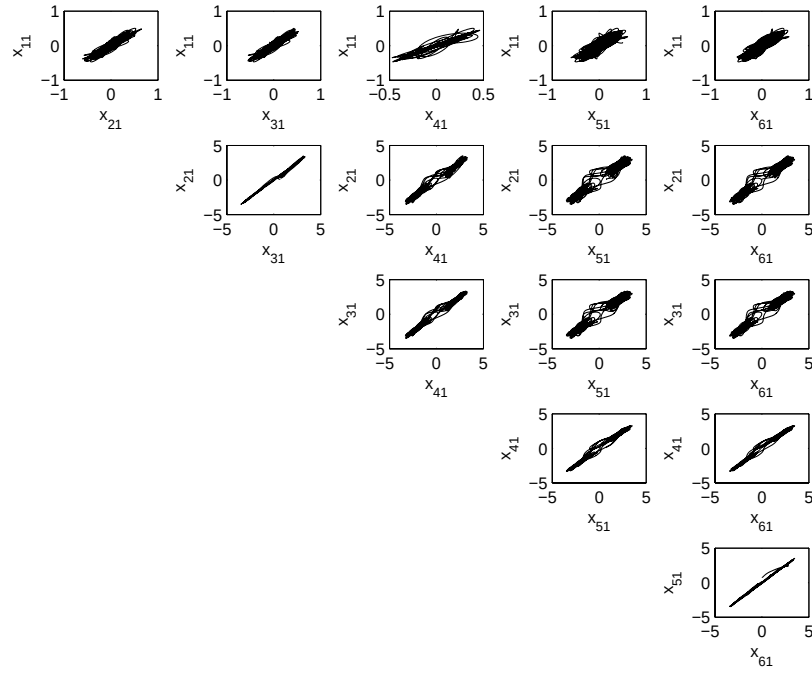


Figura 67: Plano de fase entre los 6 nodos de la red en vecino cercano.

$$A_{swc} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

El segundo valor propio mayor es -1.1864 . La condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera

$$2.4 \geq \left| \frac{2.5}{-1.1864} \right| = 2.10. \quad (92)$$

Con estos valores seleccionados la condición de sincronización (59) se cumple y la red en mundo pequeño con 6 nodos sincronizará. En la figura 69 se muestra la sincronía entre cada uno de los nodos, mostrando sólo el primer estado de cada nodo, se puede apreciar la sincronía entre los 6 nodos.

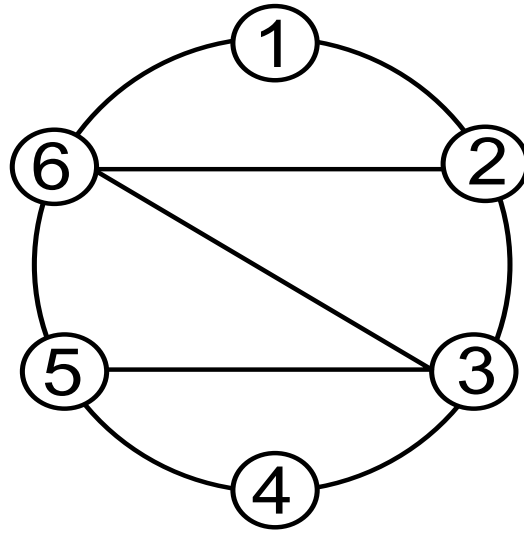


Figura 68: Red en configuración mundo pequeño con $N = 6$.

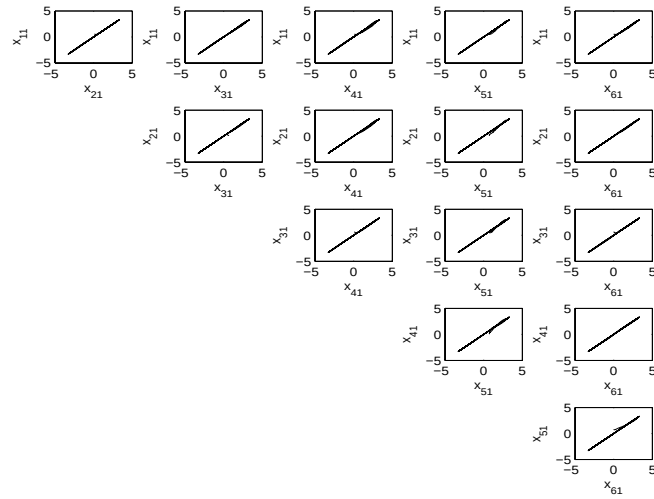


Figura 69: Plano de fase ilustrando la sincronía entre los 6 nodos de la red en configuración mundo pequeño.

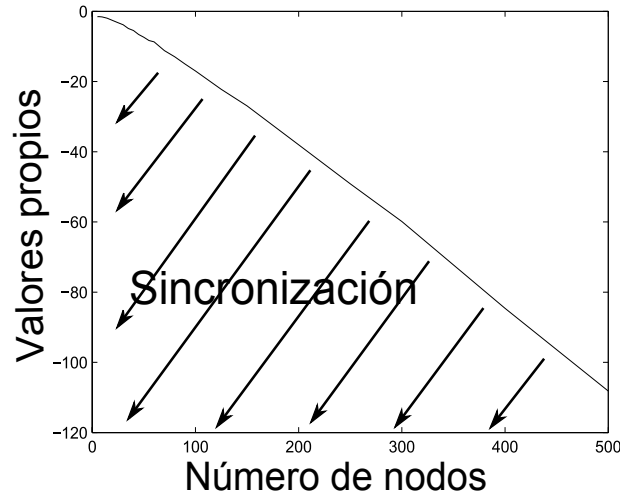


Figura 70: Número de nodos caóticos fraccionales en función de los valores propios para lograr la sincronización de la red compleja en configuración mundo pequeño.

La figura 70 muestra los valores numéricos de λ_{2ns} como función del número N de nodos caóticos fraccionales. En esta figura, cada par de valores de N y λ_{2ns} se obtienen promediando los resultados de 20 corridas implementadas en el lenguaje de programación Matlab. Los resultados anteriores implican que para cualquier fuerza de acoplamiento dada c y para cualquier N existe un valor crítico $\overline{\lambda_{2ns}}$, tal que si $\overline{\lambda_{2ns}} \geq \lambda_{2ns}$ entonces la red acoplada en mundo pequeño sincronizará.

VI.4.3 Sincronización en configuración estrella del sistema hipercaótico modificado de Lorenz

Para las siguientes simulaciones se tomaron en cuenta las ecuaciones normalizadas del sistema hipercaótico modificado de Lorenz (45). Las ecuaciones de estado para múltiples nodos caóticos del sistema hipercaótico modificado de Lorenz de la red dinámica (de acuerdo a la ecuación (47)) están dadas por

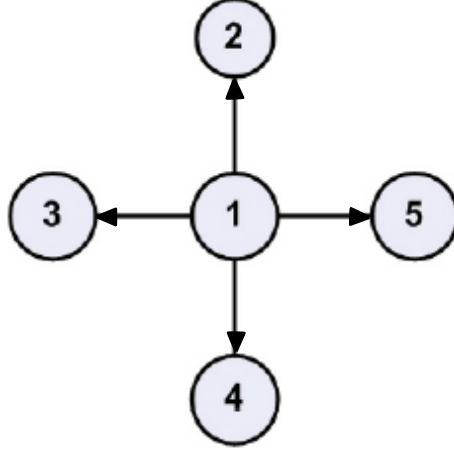


Figura 71: Red en topología estrella con $N = 5$ nodos.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{i1} &= a(x_2 - x_1) + c_{st} \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_{j1}, & i = 1, 2, \dots, N, \\
 \dot{x}_{i2} &= bx_1 + x_2 - x_1x_3 - x_4, \\
 \dot{x}_{i3} &= x_1x_2 - cx_3, \\
 \dot{x}_{i4} &= dx_2x_3.
 \end{aligned} \tag{91}$$

Los parámetros que generan dinámicas hipercaóticas de orden fraccional son: $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$ y $d = 0, 1$. Las condiciones iniciales del sistema hipercaótico de orden fraccional son $\mathbf{x}(0) = (8, 9, 10, 11)$ [70].

La red en configuración estrella consiste en un arreglo de N nodos acoplados en estrella, teniendo un nodo central o maestro acoplado a los otros $N - 1$ nodos esclavos. La red en configuración estrella con $N = 5$ nodos se puede apreciar en la figura 71.

Para el valor de $\bar{d} = 11$, el nodo aislado del sistema hipercaótico modificado de Lorenz (53) se estabiliza en un punto, el grado de conexión de la red es $K = 2$. Para la red acoplada en estrella, existe una fuerza de acoplamiento crítica $\bar{c}_{st} = \bar{d} > 0$, tal que si $c_{st} > \bar{c}_{st}$ la red sincronizará [73]

Con un número de $N = 5$ nodos la matriz de acoplamiento queda definida como

$$A_{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

El segundo valor propio mayor es -1 . De la condición de sincronización establecida en el teorema 1, tenemos que con $\bar{d} = 11$ el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del nodo aislado (53), tal que la condición de sincronización (59) queda de la siguiente manera,

$$c_{st} \geq \left| \frac{11}{-1} \right| = 11. \quad (89)$$

El valor elegido de c_{st} es 20, con estos valores seleccionados, la condición (59) se cumple y por tanto, la red con 5 nodos sincronizará.

Las condiciones iniciales para cada nodo son: para el nodo central son (8, 9, 10, 11), para el nodo 2 (N_2) son (6, 7, 8, 9), para el nodo 3 (N_3) son (9, 10, 11, 12), para el nodo 4 (N_4) son (7, 10, 9, 12), y para el nodo 5 (N_5) son (9, 8, 11, 10). Las ecuaciones de estado para esta red son: Para el nodo central N_1 :

$$\begin{cases} D_t^{q_{11}} x_{11} = a(x_{12} - x_{11}) + u_{11}, \\ D_t^{q_{12}} x_{12} = bx_{11} + x_{12} - x_{11}x_{13} - x_{14}, \\ D_t^{q_{13}} x_{13} = x_{11}x_{12} - cx_{13}, \\ D_t^{q_{14}} x_{14} = dx_{12}x_{13}, \end{cases} \quad (89)$$

con

$$u_{11} = 0. \quad (89)$$

Para el nodo N_2 :

$$\begin{cases} D_t^{q_{21}} x_{21} = a(x_{22} - x_{21}) + u_{21}, \\ D_t^{q_{22}} x_{22} = bx_{21} + x_{22} - x_{21}x_{23} - x_{24}, \\ D_t^{q_{23}} x_{23} = x_{21}x_{22} - cx_{23}, \\ D_t^{q_{24}} x_{24} = dx_{22}x_{23}, \end{cases} \quad (89)$$

con

$$u_{21} = c_{st}(x_{11} - x_{21}). \quad (89)$$

Para el nodo N_3 :

$$\begin{cases} D_t^{q_{31}} x_{31} = a(x_{32} - x_{31}) + u_{31}, \\ D_t^{q_{32}} x_{32} = bx_{31} + x_{32} - x_{31}x_{33} - x_{34}, \\ D_t^{q_{33}} x_{33} = x_{31}x_{32} - cx_{33}, \\ D_t^{q_{34}} x_{34} = dx_{32}x_{33}, \end{cases} \quad (89)$$

con

$$u_{31} = c_{st}(x_{11} - x_{31}). \quad (89)$$

Para el nodo N_4 :

$$\begin{cases} D_t^{q_{41}} x_{41} = a(x_{42} - x_{41}) + u_{41}, \\ D_t^{q_{42}} x_{42} = bx_{41} + x_{42} - x_{41}x_{43} - x_{44}, \\ D_t^{q_{43}} x_{43} = x_{41}x_{42} - cx_{43}, \\ D_t^{q_{44}} x_{44} = dx_{42}x_{43}, \end{cases} \quad (89)$$

con

$$u_{41} = c_{st}(x_{11} - x_{41}). \quad (89)$$

Para el nodo N_5 :

$$\begin{cases} D_t^{q_{51}} x_{51} = a(x_{52} - x_{51}) + u_{51}, \\ D_t^{q_{52}} x_{52} = bx_{51} + x_{52} - x_{51}x_{53} - x_{54}, \\ D_t^{q_{53}} x_{53} = x_{51}x_{52} - cx_{53}, \\ D_t^{q_{54}} x_{54} = dx_{52}x_{53}, \end{cases} \quad (89)$$

con

$$u_{51} = c_{st}(x_{11} - x_{51}). \quad (89)$$

La figura (72) muestra los atractores tridimensionales generados por cada nodo en la red. La figura (73) muestra la sincronización en el primer estado de cada uno de los 5 nodos hipercaóticos, es decir, $x_{i1}, i = 1, 2, \dots, 5$, se muestra la sincronía entre el nodo 1 y el nodo 2, nodo 1 y el nodo 3, nodo 1 y el nodo 4, nodo 1 y el nodo 5. Sólo se muestra un estado, pero hay sincronización completa de la red, es decir, todos los estados logran la sincronización.

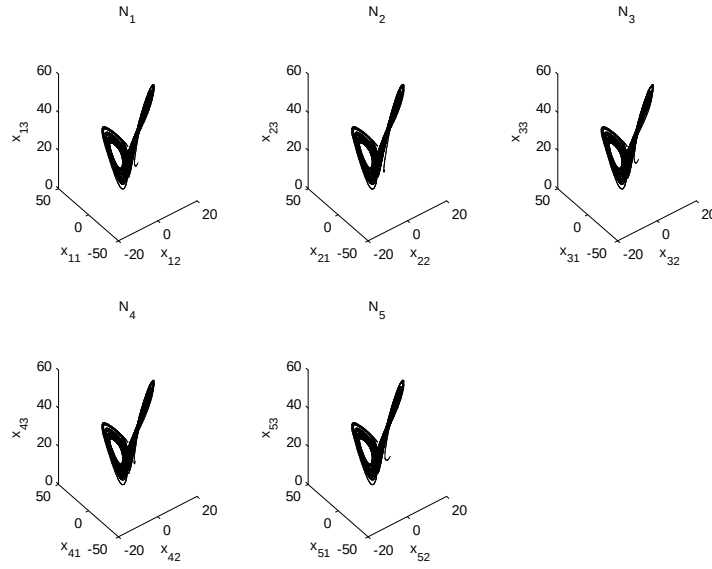


Figura 72: Atractores tridimensionales x_{i1} vs x_{i2} vs x_{i3} de cada uno de los 5 nodos.

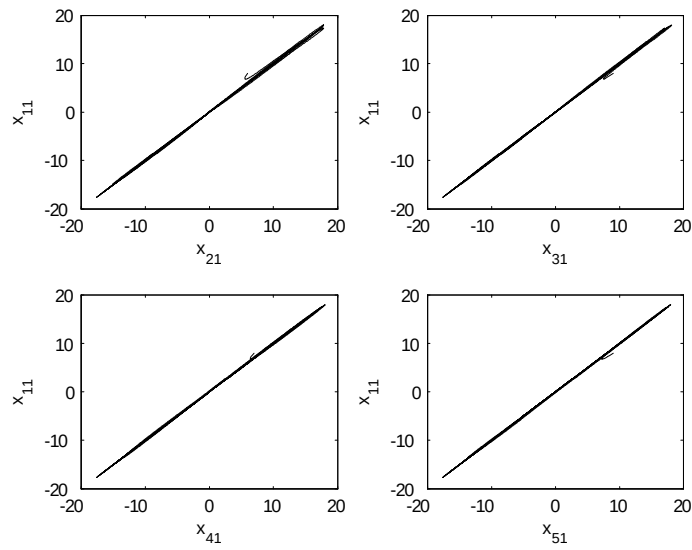


Figura 73: Plano de fase de sincronización en topología estrella con $N = 5$ nodos.

VI.5 Conclusiones

En este capítulo se mostraron los resultados de la simulación de la sincronización de redes en diferentes topologías, también se mostró la teoría de control utilizada para sincronizar las diferentes configuraciones de redes, estas teorías son: la teoría de sistemas complejos que se caracteriza por utilizar un sólo estado para lograr la sincronía, la otra teoría utilizada son las formas hamiltonianas y el diseño de un observador caracterizada por ser sistemática y con una retroalimentación en todos los estados del sistema. En este capítulo se sincronizaron redes con nodos caóticos de orden entero y fraccional, las topologías utilizadas para la sincronización de redes con nodos de orden entero fueron: sincronización en vecino cercano y mundo pequeño con sistemas de Rössler como nodos, sincronización en vecino cercano, mundo pequeño, anillo abierto, estrella, global y árbol con sistemas de Chua con retardo como nodos. Las topologías utilizadas para la sincronización de redes con nodos de orden fraccional fueron: sincronización en maestro y esclavo, vecino cercano y mundo pequeño con sistemas de Chua de orden fraccional como nodos, sincronización en configuración estrella utilizando el sistema hipercaótico modificado de Lorenz fraccional como nodos. En cada configuración de red se obtuvieron los resultados de la ganancia requerida para lograr su sincronización, se puede observar que los valores de ganancias tanto para sistemas de orden entero y sistemas de orden fraccional son similares, aunque para algunos casos específicos no se cumple con los teoremas de sincronización se obtuvo la sincronización en todas las configuraciones utilizadas.

Capítulo VII

Aplicación a las comunicaciones seguras

VII.1 Introducción

En este capítulo, se presenta una aplicación de la sincronización de redes con nodos caóticos a las comunicaciones seguras, mediante la transmisión de una señal de audio encriptada por caos, a través de los nodos de una red. Para esto se utilizó la topología de red reportada en el capítulo VI; en configuración en estrella con un nodo como maestro y los restantes $N - 1$ como esclavos utilizando el sistema hipercaótico modificado de Lorenz de orden fraccional.

VII.2 Aplicación a las comunicaciones

La sincronización de red con 5 nodos hipercaóticos modificados de Lorenz de orden fraccional conectados en configuración estrella, nos permite disponer de esquemas de comunicación para información privada/segura, donde la información confidencial se encripta dentro de la dinámica del transmisor por alguna técnica de modulación, como puede ser enmascaramiento caótico aditivo, conmutación caótica o la conmutación paramétrica. En particular, para nuestra red, el nodo aislado N_1 es el sistema transmisor y los nodos N_2 , N_3 , N_4 y N_5 son los sistemas receptores. La señal caótica transmitida a través de un canal público es la combinación de la información confidencial con la señal de salida caótica del sistema hipercaótico modificado de Lorenz de orden fraccional. El encriptado, transmisión y desencriptado del mensaje de audio se muestran en la siguiente subsección.

VII.2.1 Transmisión de audio encriptado

La información confidencial es un mensaje de audio $m(t)$, que se encripta y transmite a través de un canal público. En este caso es necesario sincronizar el transmisor y los receptores para recuperar la información confidencial. El esquema de comunicación utilizado fue encriptamiento aditivo caótico, este esquema de comunicación puede usar un único canal de transmisión, pero es bien conocido, que la información recuperada es sólo aproximada,

debido a los procesos de sincronización y encriptado por el mismo canal de interferencia. Por otra parte, podemos utilizar dos canales de transmisión donde tenemos una recuperación de información exacta en los receptores. Con el fin de recuperar (exactamente) la información encriptada en cada uno de los receptores, basta con restar la señal caótica de cada receptor a la señal caótica con la información proveniente del transmisor, en este trabajo de tesis sólo se muestran los resultados de la transmisión de información encriptada por dos canales.

La figura 74 muestra el esquema de comunicaciones seguras para la transmisión de audio encriptado, el cual, utiliza el sistema hipercaótico modificado de Lorenz de orden fraccional como maestro y como esclavos. Este esquema de comunicación caótica utiliza dos canales de transmisión, el primero se utiliza para sincronizar el transmisor con el receptor a través de la señal $x_{11}(t)$. Mientras que el segundo se utiliza para encriptar el mensaje de audio confidencial $m(t)$: La señal caótica $x_{11}(t)$ se añade a $m(t)$, donde $m(t)$ se escala a una mucho menor amplitud, esto para que $m(t)$ no se aprecie en la señal caótica, tal mensaje de audio se encripta en la señal caótica transmitida $s(t)$ como sigue

$$s(t) = x_{11}(t) + m(t). \quad (89)$$

En el receptor, la señal caótica recibida $s(t)$ con el mensaje de audio encriptado se resta de la señal caótica de $x_{i1}(t)$, $i = 2, \dots, 5$, de tal manera que el mensaje de audio original $m(t)$ es recuperado como $\hat{m}(t)$, de la siguiente manera

$$\hat{m}(t) = s(t) - x_{i1}(t), \quad i = 2, \dots, 5. \quad (89)$$

La información confidencial $m(t)$ es una sección de la canción “Vita e Bella”, esta sección es encriptada y transmitida para esta demostración. La figura 75 muestra el mensaje $m(t)$ ha encriptar y transmitir, este mensaje se escaló aproximadamente 20 veces menos que la señal caótica $x_{11}(t)$ del transmisor.

La figura 76 muestra el estado de $x_{11}(t)$ donde se observa el comportamiento caótico, el mensaje $m(t)$ es añadido al estado $x_{11}(t)$, como se observa en la figura 77. Como se aprecia en la figura (76) y (77), no hay distinción entre las dos señales caóticas, se pudiera decir que son iguales, por lo tanto, el mensaje pasa desapercibido y el intruso no podrá recuperarlo por métodos convencionales.

Una vez que la información está encriptada, esta señal se transmite a través de un canal público, que llega a cada receptor, donde se desencripta y recupera el mensaje original. La figura 78 muestra la información confidencial $m(t)$ a encriptar y transmitir a los receptores, podemos ver la información recuperada en cada receptor, donde se muestra que el mensaje se recuperó satisfactoriamente en todos los receptores.

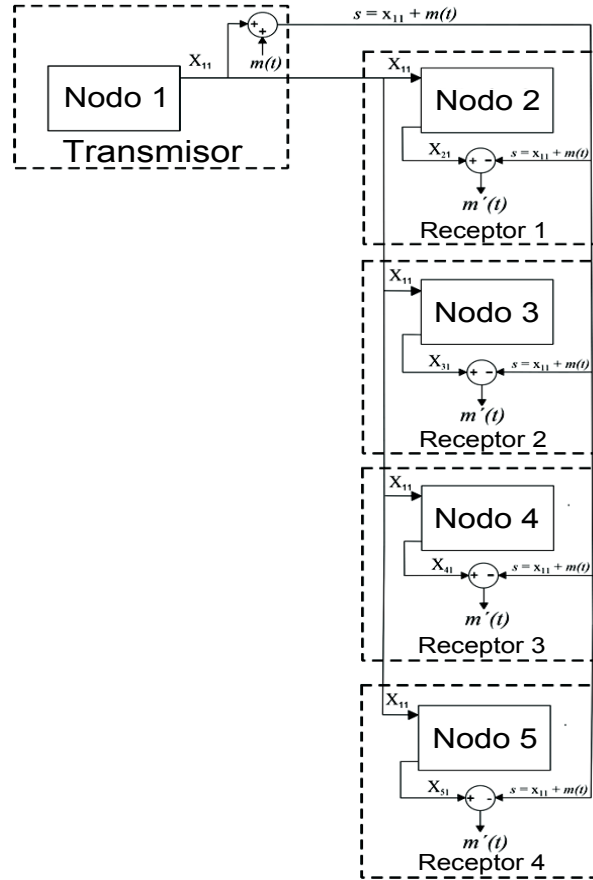


Figura 74: Esquema para encriptado, transmisión y desencriptado de información en la red de 5 nodos.

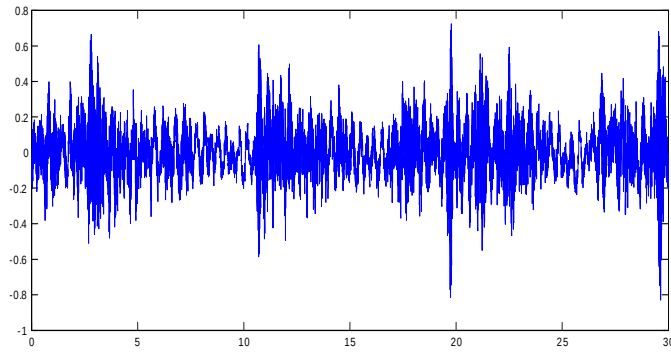


Figura 75: Sección de la canción "Vita E Bella" para encriptar y transmitir por la red.

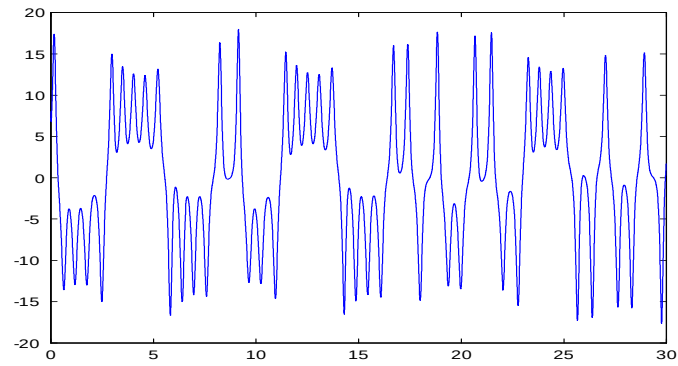


Figura 76: Señal $x_{11}(t)$ del transmisor donde el mensaje será encriptado.

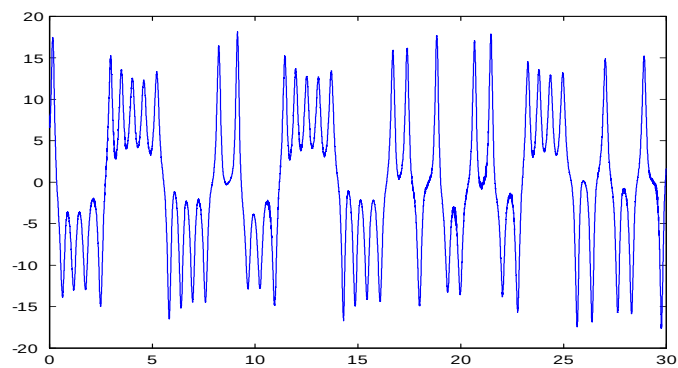


Figura 77: Señal caótica de transmisión $s(t) = x_{11}(t) + m(t)$.

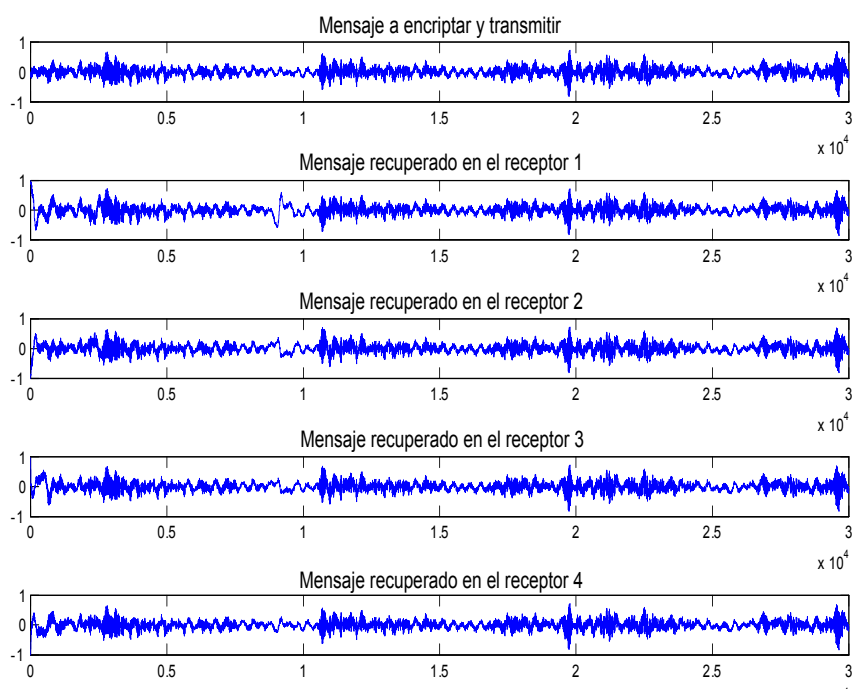


Figura 78: Mensaje transmitido y recuperado en cada receptor.

VII.3 Conclusión

En este capítulo de la tesis se utilizó la sincronización de la red compleja en topología de estrella, utilizando como nodos al sistema hipercaótico modificado de Lorenz de orden fraccional. Se realizó el encriptado, transmisión y descryptado de información confidencial utilizando un esquema de comunicación hipercaótica. En particular, se encripta, transmite y se recupera la sección de una canción, donde podemos observar que en cada receptor se recupera satisfactoriamente el mensaje de audio original.

Capítulo VIII

Conclusiones

En este trabajo de tesis doctoral, se realizó un estudio sobre la sincronización de redes complejas. En particular, se estudio la sincronización de redes complejas conformadas por nodos que exhiben dinámicas extremadamente complejas, como caos e hipercaos, además, dichas dinámicas fueron generadas por sistemas caóticos de orden entero y fraccional. Los nodos caóticos seleccionados para formar las redes fueron: el oscilador de Rössler, el oscilador de Chua con retardo, el oscilador de Chua de orden fraccional y el sistema hipercaótico modificado de Lorenz fraccional. En este trabajo de tesis se sincronizaron diferentes redes en topologías regulares e irregulares.

Se realizó un estudio numérico para obtener las condiciones de sincronización apropiadas, para obtener la sincronía en las diferentes topologías de acoplamiento, las cuales fueron: vecino cercano, mundo pequeño, anillo abierto, estrella, global y árbol, se realizó dicho estudio para obtener la sincronización en vecino cercano y mundo pequeño, tanto para sistemas caóticos de orden entero y sistemas caóticos de orden fraccional, donde los resultados, es decir, el valor de ganancia que logra la sincronización es similar para ambos casos, con lo que se puede concluir que la teoría de sistemas complejos puede ser aplicable para sistemas de orden entero y sistemas de orden fraccional. Para el resto de configuraciones se utilizó la teoría de sistemas complejos aunque las condiciones de sincronización no son válidas se logró obtener la sincronización.

También se mostró la transmisión de información encriptada (una sección de una canción) desde un nodo central (transmisor) a múltiples nodos remotos (receptor), utilizando redes complejas formadas por el sistema hipercaótico modificado de Lorenz. Con esto se demuestra que es posible la transmisión de información encriptada en redes de comunicación.

VIII.1 Aportaciones

Los principales productos derivados de este trabajo de investigación a la sincronización de sistemas complejos, se resumen a continuación:

VIII.1.1 Artículos publicados en revistas

- **Acosta Del Campo O. R.**, Cruz Hernández C., López Gutiérrez R. M., Arelano Delgado A., Cardoza Avendaño L. y Chávez Pérez R. (2011) Complex Network

Synchronization of Coupled Time-Delay Chua Oscillators in Different Topologies. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 11(4): 341-372.

- **Acosta Del Campo, O. R.**, C. Cruz Hernández, R. M. López Gutiérrez, A. Arellano Delgado, L. Cardoza Avendaño. (2011) Complex network synchronization of time-delay Chua oscillators. *Sometido a Mathematical Problems in Engineering*.

VIII.1.2 Congresos

- **Acosta del Campo O. R.**, Arellano-Delgado A., Cruz-Hernández C., E., López-Gutiérrez R.M., García Guerrero E., Cardoza Avendaño L. Experimental confirmación de comunicaciones segura de información utilizando sincronización de circuitos de Chua de cuarto orden, LIII Congreso Nacional de Física Boca del Río Veracruz, 25 al 29 de octubre de 2010.
- **Acosta Del Campo O.R.**, Cruz-Hernández C, López Gutiérrez R.M. Arellano-Delgado A y Cardoza Avendaño L. Complex network synchronization of time-delay Chua's oscillators. *International Conference on Computer, Electrical and System Science and Engineering (ICESSE2011)*, 14 al 16 de noviembre de 2011, Paris, Francia.
- **Acosta Del Campo O.R.**, C. Cruz Hernández, A. Arellano Delgado, R.M. López Gutiérrez, y A. Aguilar Yañez. Complex network synchronization of fractional-order chaotic Chua systems, *Complex Systems Design Management (CSDM) Paris, Francia 2012*.
- **Oscar R. Acosta Del Campo**, César Cruz-Hernández, Rosa Martha López Gutiérrez, Adrian Arellano-Delgado, Synchronization of chaotic Chua oscillators of fractional order, 16 Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura (CUJAE), 26 al 30 de noviembre de 2012, La Habana, Cuba.
- **Oscar R. Acosta Del Campo**, César Cruz-Hernández, Rosa Martha López Gutiérrez, Adrian Arellano-Delgado, Communication in star coupled network with fractional hyperchaotic nodes, *IEEE 4th Latin American Symposium on Circuits and Systems (LASCAS)*, del 27 de febrero a marzo 1 de 2013, Cusco, Perú.
- Arellano-Delgado A., **Acosta del Campo O. R.**, Cardoza Avendaño L., García Guerrero E. E., Abundís Pérez F., López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C., Comunicaciones privadas en una red de multiusuario. LIII Congreso Nacional de Física Boca del Río Veracruz, 25 al 29 de octubre de 2010.
- H. Serrano-Guerrero, C. Cruz-Hernández, R.M. López-Gutiérrez, **O.R. Acosta-Del Campo** y A. Arellano-Delgado. Synchronization in complex networks with nearest-neighbor coupling configuration. *Complex Systems Design Management 2010-CSDM octubre 27-29 Paris, Francia 2010*.

- Serrano-Guerrero H., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., **Acosta-Del Campo O.R.**, Arellano-Delgado A. y Cardoza-Avendaño L. Synchronization in complex networks of time-delay Chua's oscillators, Symposium on Low Dimensional Systems Workshop on Complex Systems, 150th Orbit of Alexander Von Humboldt, 7 al 11 de junio de 2010, La Habana, Cuba.
- Serrano-Guerrero H., Cruz-Hernández C., López-Gutiérrez R.M., **Acosta-Del Campo O.R.**, Arellano-Delgado A. y Cardoza-Avendaño L. Synchronization in perturbed complex network with star coupling configuration. Dynamics Days South America 2010, International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics, 26 al 31 de julio de 2010, San José dos Campos, SP, Brasil.

VIII.2 Principales contribuciones de este trabajo doctoral

Un resumen a modo de puntuario, de las principales contribuciones de este trabajo de investigación, se da a continuación:

- Análisis teórico y numérico de las condiciones de sincronización de diferentes topologías de redes complejas utilizando la teoría de sistemas complejos y nodos caóticos de orden entero.
- Análisis teórico y numérico de las condiciones de sincronización de diferentes topologías de redes complejas utilizando la teoría de sistemas complejos y nodos caóticos de orden fraccional.
- Bajo ciertas condiciones, se determinó una manera sistemática de obtener sincronización, utilizando teoría de sistemas complejos utilizando nodos caóticos de orden entero y fraccional.
- Transmisión de información encriptada (señal de audio) desde un nodo a múltiples nodos de manera simultánea, en redes complejas formadas por sistemas hipercaóticos modificados de Lorenz.

VIII.3 Trabajos a futuro

Las numerosas investigaciones y contribuciones reportadas en la literatura y congresos sobre el tópico muestran que el estudio de los sistemas complejos se encuentra en pleno

auge. Las aplicaciones a distintas disciplinas científicas y tecnológicas va en aumento. A continuación, se mencionan brevemente algunos problemas abiertos detectados al realizar esta investigación y que representan trabajo a futuro en esta dirección:

- Sincronizar redes complejas con nodos caóticos de orden fraccional con otra teoría de control, por ejemplo, control “pinning”.
- Extender estos resultados a la sincronización de redes con “cientos” o “miles” de nodos.
- Analizar la sincronización de redes complejas en el caso que se tenga perturbaciones en la señal acoplante.
- Analizar la sincronía de estas redes ante fallas en los nodos y en las conexiones.
- Aplicación de la sincronización de redes complejas a equipos de trabajo formados por robots manipuladores o móviles.
- Implementar físicamente la sincronización de redes complejas formadas por nodos caóticos de orden fraccional.
- Analizar la sincronización de redes complejas considerando diferentes “pesos”, es decir, fuerzas de acoplamiento.
- Aplicación de la sincronización de redes complejas con nodos caóticos fraccionales a comunicación privada de multiusuarios, utilizando información digital (audio, video, imágenes, etc.).
- Realizar la implementación de algún sistema caótico de orden fraccional en sistemas digitales, tales como microcontroladores o FPGAs.

Referencias

- [1] Serrano Guerrero, H., C. Cruz Hernández, R.M. López Gutiérrez, L. Cardoza Avendaño y R.A. Chavez Perez. (2013) Chaotic synchronization in nearest-neighbor coupled networks of 3D CNNs. *Journal of Applied Research and Technology*. 11(1): 26-41.
- [2] Arellano Delgado, A., R.M. López Gutiérrez, C. Cruz Hernández, C. Posadas Castillo, L. Cardoza Avendaño y H. Serrano Guerrero. (2012) Experimental network synchronization via plastic optical fiber. *Optical Fiber Technology*.
- [3] Cardoza Avendaño L., R.M. López Gutiérrez, C. Cruz Hernández, V. Spirine , R. A. Chavez Perez y A. Arellano Delgado. (2012) Encrypted audio transmission via synchronized chaotic Nd:YAG lasers. *Revista Mexicana de Física*. 58(6): 472-480.
- [4] Angulo-Guzman S.Y., Posadas-Castillo C., Diaz-Romero D.A., López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C. Chaotic synchronization of regular complex networks with fractional-order oscillators. 20th Mediterranean Conference on Control Automation (MED), 2012.
- [5] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, y H.K. Qammer. Chaos in a fractional order Chua's system. *Transactions on Circuits and Systems*, 42(8), pp. 485–490, 1995.
- [6] Acosta Del Campo O.R., C. Cruz Hernández, R.M. López Gutiérrez, A. Arellano Delgado, L. Cardoza Avendaño y R.A. Chavez Perez. (2011) Complex network synchronization of coupled time-delay Chua oscillators in different topologies. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 11(4): 341-372.
- [7] Serrano Guerrero, H., C. Cruz Hernández, R. M. López Gutiérrez, C. Posadas Castillo y E. Inzunza González. Chaotic synchronization in star coupled networks of three dimensional cellular neural networks and its application in communications. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 11(8): 571-580, 2010.
- [8] J. Demel, *Grafy a jejich aplikace (Graphs and their applications)*, Academia, 2002, ISBN 80-200-0990-6.
- [9] D.J. Watts y S.H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- [10] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Springer-Verlag, 1998.
- [11] D.M. Cvetković, M. Doob y H. Sachs. *Spectra of graphs, theory and applications*. Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.
- [12] F.R.K. Chung. *Spectral graph theory (CBMS regional conference series in mathematics)*. American Mathematical Society, 1997.

- [13] B. Mohar, Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellermann y A.J. Schwenk. The Laplacian spectrum of graphs. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2:53–64, 1991.
- [14] R. Merris. A survey of graph Laplacians. *Linear and Multilinear Algebra*, 39:19–31, 1995.
- [15] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305, 1973.
- [16] José Luis Raya, Laura Raya y Miguel A. Martínez. *Redes locales instalación y configuraciones básicas*. Alfaomega, 2008.
- [17] P. Erdős y A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, 1959.
- [18] P. Erdős y A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5:17–61, 1960.
- [19] P. Erdős y A. Rényi, *Bull. Inst. Int. Stat.* 38, 343, 1961.
- [20] P. Erdős y A. Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 12:261–267, 1961.
- [21] B. Bollobás. *Random graphs*. Cambridge University Press, 2001.
- [22] D.J. Watts y S.H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- [23] Wolfram Mathworld Web Mathematics Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RandomGraph.html>.
- [24] A.-L. Barabási y R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [25] S.H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410:268–276, 2001.
- [26] Lacroix S.F., *Trait du calcul diferencial et du calcul integral 3ed.*, Paris: Courcier, 1820.
- [27] Gorenflo R., Kilbas A. A. y Rogosin S. V. On the generalized mittag-leffler type functions, *Integral Transform. Spec. Funct.*, 7: 215–224, 1998.
- [28] Mittag-Leffler M. G., Sur la nouvelle fonction $E(x)$, *Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris*, 137: 554–558, 1903.
- [29] Miller K.S. y Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley Sons. Inc., New York, 1993.
- [30] Oldham K. B. y Spanier J. *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [31] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

- [32] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13: 529–539, 1967. (Reprinted recently in: *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 11: 3–14, 2008).
- [33] D. Valério. Ninteger Toolbox. [online] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/file-exchange/8312-ninteger>
- [34] D.Y. Xue, Y.Q. Chen. *Advanced Applied Mathematical Problem Solutions with MATLAB*. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [35] D.Y. Xue, Y.Q. Chen. *Solving Applied Mathematical Problems with MATLAB*. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [36] D.Y. Xue, Y.Q. Chen y D.P. Atherton. *Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB*. Philadelphia: SIAM Press, 2007.
- [37] Vinagre B.M., Chen Y.Q. and Petráš I. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator, *J. Franklin Inst.*, 340, 349–362, 2003.
- [38] Tseng C.C. y Lee S.L. Digital IIR integrator design using recursive Romberg integration rule and fractional sample delay, *Signal Processing*, 88: 2222–2233, 2008.
- [39] Barbosa R.S., Machado J.A.T. y Silva M.F. Time domain design of fractional differ-integrators using least squares, *Signal Processing*, 86: 2567–2581, 2006.
- [40] Maione G. Continued fractions approximation of the impulse response of fractional-order dynamic systems, *IET Control Theory Appl.*, 2: 564–572, 2008.
- [41] Dorcák L. *Numerical Models for the Simulation of the Fractional-Order Control Systems*, UEF-04-94, The Academy of Sciences, Inst. of Experimental Physic, Kosice, Slovakia, 1994.
- [42] S. Manabe. The non-integer integral and its application to control systems, *ETJ of Japan*, 6 (3/4) pp. 83–87, 1961 (Shorter English version), *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, 80 (860) pp. 589–597, May 1960 (Japanese).
- [43] S. Manabe. The system design by the use of a model consisting of a saturation and non integer integrals, *ETJ of Japan*, 8 (3-4) pp. 147–150, 1963, *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, vol. 82, no. 890, pp. 1731–1740, November 1962 (Japanese).
- [44] A. Oustaloup. *La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications*. Paris, France: Hermès Sciences Publicat., Février 1995.
- [45] R.S. Barbosa, J.A.T. Machado y I.M. Ferreira. Tuning of PID Controllers based on Bode's Ideal Transfer Function, *Nonlinear Dynamics*, 38: 305–321 (17), 2004.
- [46] B.M. Vinagre, C.A. Monje, A.J. Calderón, Y.Q. Chen y V. Feliú Battle. The Fractional Integrator as a Reference Function, in *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Applications*, Bordeaux, France, 2004, pp. 150–155.

- [47] Podlubny, I.: Fractional-Order Systems and PID -Controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (1): 208–213, 1999.
- [48] Podlubny, I., Petras, I., Vinagre, B.M., O’Leary P. y Dorcak L.: Analogue Realizations of Fractional-order Controllers. Nonlinear Dynamics, 29 (1–4): 281–296, 2002.
- [49] Dorf R. C. y Bishop R. H., Modern Control Systems, Addison-Wesley, New York, 1990.
- [50] Xue D. y Chen Y.A. Comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers, In: Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, Shanghai, China, 2002.
- [51] Oustaloup A. La dérivation non entière : théorie, synthèse et application dans les sciences pour l’ingénieur, Editions Hermès, 1995.
- [52] Oustaloup A. Systèmes asservis linéaires d’ordre fractionnaire, Editions Masson, Paris, Francia, 1983.
- [53] Oustaloup A., X. Moreau y M. Nouillant. The CRONE suspension - Control Engineering Practice, Journal of the International Federation of Automatic Control, 4 (8): 1101-1108, 1996.
- [54] Oustaloup A., X. Moreau, M. Nouillant y D. Camon, AFCET trophy distinguishing the best technological innovation in the university-industry relations - La suspension CRONE: du concept à la réalisation - Projet mené en collaboration avec PSA (Vélizy) - Toulouse, 26 Octobre 1995.
- [55] Raynaud, H.F. y A. Zerga Inoh. State-space representation for fractional order controllers, Automatica, 36: 1017-1021, 2000.
- [56] C.A. Monje, B.M. Vinagre, V. Feliu y Y.Q. Chen. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. IFAC: Control Engineering Practice, 16(7):798–812, 2008.
- [57] Boris J. Lurie. Three-parameter tunable tiltintegral-derivative (TID) controller. US Patent US5371670, 1994.
- [58] B.M. Vinagre y C. A. Monje. Introducción al Control Fraccionario, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI), 3(3): 5–23, 2006.
- [59] Carcione J.M. Wave fields in Real Media. Wave propagation in Anisotropic, Anelastic, porous and electromagnetic media, volume 38. Elsevier, 2007.
- [60] West. B.J., Bologna M. y Grigolini P. Physics of Fractal Operators, vol. 1. Springer, 2003.
- [61] Shantanu Das. Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, 2008.
- [62] O. E. Rössler. An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters 57A (5): 397–398, 1976.

- [63] C. Cruz-Hernández. Synchronization of time-delay Chua's oscillator with application to secure communication, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 4(1): 1-13, 2004.
- [64] Zaslavsky G.M. *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [65] Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems*, Springer, 2011.
- [66] Kennedy M. P. Three steps to chaos part I: Evolution, *IEEE Transactions on Circuits and Systems –I: Fundamental Theory and Applications*, 40: 640–656, 1993.
- [67] Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit, *IEEE Transactions on Circuit and Systems, CAS-31*, 1055–1058, 1984.
- [68] Chua L.O., Wu Ch. W., Huang A. y Zhong G.Q. A universal circuit for studying and generating chaos – part I: Routes to chaos, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40: 732–744, 1993.
- [69] Petrás I., A note on the fractional-order Chua's system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 38: 140–147, 2008.
- [70] Xiangjun W. y Hui W., Hongtao L. Modified generalized projective synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system and its application to secure communication. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 13: 1441–1450, 2012.
- [71] T. Gao, G. Chen, Z. Chen, S. Cang. The generation and circuit implementation of a new hyper-chaos based upon Lorenz system, *Phys. Lett. A* 361: 78–86, 2007.
- [72] S. Vlikovský, G. Chen. On the generalized Lorenz canonical form, *Chaos Solitons Fractals* 26: 1271–1276, 2005.
- [73] Wang X.F. Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(5): 885-916, 2002.
- [74] Wang X.F. y Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12: 187-192, 2002.
- [75] Sira-Ramírez H. y Cruz-Hernández C. Synchronization of chaotic systems: A generalized Hamiltonian systems approach. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 11(5): 1381-1395, 2001.