UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

LA ECOLOGÍA DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS OBJETOS INTERVINIENTES Y SU RELACIÓN CON LAS DIFICULTADES PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

RUTH ELBA RIVERA CASTELLÓN

DIRECTOR

DR. RAMIRO ÁVILA GODOY

Mexicali, B. C. Marzo de 2012.

AGRADECIMIENTOS

A mi Alma Mater

La Universidad Autónoma de Baja California, porque me ha permitido alcanzar mis metas, a las Autoridades Docentes y Administrativas, tanto del Instituto de Investigaciones, como de la Facultad de Ingeniería, por todo el apoyo prestado.

A mi Director de Tesis

Al Dr. Ramiro Ávila Godoy, por sus enseñanzas, dedicación y paciencia, apoyo y amistad, que me han servido de guía y sin las cuales no hubiera logrado este objetivo.

A mis compañeros del Programa

En especial, a mis colegas del Cuerpo Académico, José Álvaro Encinas B. y Maximiliano De Las Fuentes L., que con su compañerismo y apoyo moral, han sido inspiración para llevar a término el presente trabajo.

A mis Sinodales

Y comité revisor de esta tesis, los cuales con sus comentarios y sugerencias me han hecho valiosas aportaciones para mejorar sustancialmente este documento.

Dr. Ramiro Ávila Godoy
Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Dr. Maximiliano De Las Fuentes Lara
Dr. José Luis Arcos Vega
Dr. Juan José Sevilla García

Y sobre todo a mi Familia

A mi querido esposo Humberto, a mis hijos Natalia, Humberto, Fadua y Abraham y a mis pequeños nietos Abraham y Adel, a quienes les escatime un valioso tiempo por estar dedicada a esta tesis, sin embargo quiero que sepan que ustedes son mi primera motivación para superarme.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Es indiscutible que las diferentes universidades del mundo se encuentran ante el reto de formar ingenieros con conocimientos sólidos en el área básica, con dominio en las asignaturas de física, química, matemáticas, entre otras, que les permitan abordar problemas de diseño y aplicación tecnológica.

La presente investigación tiene como objetivo realizar un análisis ecológico de los significados de los objetos intervinientes, su relación con las dificultades presentes en la resolución de problemas utilizando ecuaciones diferenciales. Explicar y caracterizar las relaciones entre los significados de los conocimientos previos y los significados que emergen cuando estudiantes de ingeniería resuelven problemas utilizando ecuaciones diferenciales. Y revisar qué pueden hacer posteriormente con dichos conocimientos, cómo los utilizan para resolver problemas relacionados de otros cursos.

Específicamente nos interesa la parte de resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden. Indagar cuáles son los objetos matemáticos, cuáles son las relaciones implícitas y explicitas de los elementos y los significados que se ponen en juego cuando los estudiantes resuelven éstos problemas.

Lo anterior se realizó desde el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), (Godino 2003). Se utilizó particularmente el Análisis Ecológico y se abordaron casos de estudiantes en etapa básica que cursaban la materia de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería

Campus Mexicali. Debido al carácter epistémico de la investigación se utilizó una metodología de corte cualitativo. Una combinación de diversas técnicas y métodos de recolección de datos (observación, encuestas, estudio de casos). Particularmente el estudio de casos fue seleccionado porque nos permitió mostrar la consistencia de los significados personales sobre los objetos puestos en juego.

En el análisis ecológico queremos mostrar que la posibilidad de entender un proceso está asociada a la significación que tienen los elementos que intervienen en dicho proceso y a las diferentes formas de representarse. En matemáticas, un objeto tiene sentido alrededor de otros objetos, por ejemplo hablemos del número cinco; ¿que se puedes decir del número cinco sin relacionarlo con otros números? -que es un número impar, que es un entero, es un número primo, que es un divisor de 5, 10, 15…,etc.- está dentro de una ecología (la de los números enteros). Siempre que se quiere hablar del número cinco se tiene que relacionar con otros números para poder hablar de él. Lo mismo sucede con las funciones y las ecuaciones diferenciales, no es posible hablar de una ecuación diferencial sin mencionar que proviene de relacionar, sumar o restar las derivadas de una función.

Otro de los propósitos de la presente investigación fue estudiar los fenómenos didácticos presentes dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Se adoptaron algunos recursos teóricos que nos ofrecen la epistemología, la psicología, la didáctica y la semiótica. Mismas que han adquirido cada vez mayor relevancia para la construcción de explicaciones, dentro de los procesos de aprendizaje matemático y los mecanismos de su enseñanza.

El presente documento está formado de cinco capítulos. El primero refiere los antecedentes, una breve historia de la evolución de cómo fueron surgiendo las ecuaciones diferenciales a través del tiempo y el problema de investigación. El segundo capítulo incluye el marco teórico, basado en el enfoque Ontológico-semiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS), desarrollada por D. Godino (2003). Compuesto con las herramientas teóricas utilizadas para abordar el problema de investigación, como un estudio Ontosemiótico de la Ecología de Significados.

El fundamento de esta teoría, que aun se encuentra en construcción, es el carácter antropológico del conocimiento, se sitúa tanto en lo cognitivo como en lo epistemológico. Muestra por una parte la preocupación por los procesos cognitivos del sujeto desde el punto de vista de la semiótica. Además la construcción de los significados personales y la simbología puesta en juego durante el aprendizaje. Por otro lado la propuesta epistemológica, argumenta que en el estudio de las situaciones didácticas es fundamental problematizar el conocimiento matemático, no considerarlo evidente.

El capítulo tres presenta la metodología utilizada para el desarrollo de la investigación, bajo las herramientas del Enfoque Ontólogico-semiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS).

El capítulo cuatro, muestra los diferentes problemas seleccionados y utilizados para documentar y desarrollar la presente investigación, el análisis realizado a varios textos, de los cuales podemos intuir como son abordados los objetos matemáticos involucrados dentro de los problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales en el aula, así como los resultados del estudio de casos.

El último capítulo lo componen las discusiones, las conclusiones y recomendaciones. De los resultados obtenidos se percibe que el análisis semiótico o de significados es un recurso de utilidad para la investigación en didáctica de las matemáticas. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad, tales como el uso de términos y expresiones; lo cual nos arroja luz sobre los conflictos y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos dan explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Capítulo 1.
Antecedentes y el problema de investigación.

1.1 Antecedentes

Dada la importancia que la formación de ingenieros tiene para el crecimiento y el desarrollo sustentable de un país, creemos primordial realizar investigaciones que incidan en la mejora continua de la enseñanza y el aprendizaje de los futuros ingenieros. La investigación en matemática educativa y particularmente la que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ha contribuido a aclarar aspectos de la problemática que se presenta en el salón de clases.

Entre los problemas comunes que los diversos organismos que durante la última década han analizado el sistema de educación superior mexicano (CIDE, OCDE, SEP, ANUIES), señalan como principales problemas de la trayectoria escolar, una baja eficiencia, determinada a través de sus altos índices de deserción (50%), un importante rezago en los estudios, resultado de altos índices de reprobación y bajos índices de titulación (50%) (ANUIES, 2001).

Por mencionar el bajo porcentaje de la eficiencia terminal en las Instituciones de Educación Superior (IES), que en cifras generales, y como promedio nacional, de cada 100 alumnos que inician estudios de licenciatura, entre 50 y 60 concluyen las materias del plan de estudios, cinco años después y, de éstos, tan sólo 20 obtienen su título. De los que se titulan, solamente un 10%; es decir 2 egresados, lo hacen a la edad considerada como deseable (24 ó 25 años); los demás, lo hacen entre los 27 y los 60 años (Díaz de Cossío, 1998).

La Facultad de Ingeniería no es la excepción, las deficiencias con que ingresan a la Facultad nuestros estudiantes, sobre todo en conceptos de Algebra, Geometría y trigonometría, lo cual provoca un alto porcentaje de deserción estudiantil. Estamos consientes de que los temas que se desarrollan en las unidades de aprendizaje de la licenciatura no son sencillos, los temas que se revisan son nociones que fueron desarrolladas a lo largo de años de dedicación de personas que han pasado a engrosar la lista de genios de la historia universal, tales como *Euler, Leibniz, el Márquez de Laplace, los hermanos Bernoulli, Fourier, Riemmann, Einstein, Newton* y muchos más. Y nosotros esperamos que con un curso de aproximadamente cuatro meses, nuestros estudiantes incorporen a sus estructuras mentales todos estos conceptos y procedimiento, así como sus significados que aún para nosotros como facilitadores tienen un grado de dificultad.

Dados los contenidos temáticos que nos ocupan, el cálculo y las ecuaciones diferenciales, mismas que contienen nociones y objetos matemáticos de estudio que estas interrelacionados, se ha observado que bajo la enseñanza tradicional, se estudia el cálculo por sí mismo, sin vincularlo, salvo en mínimos casos, con otras unidades de aprendizaje. No se aprovecha su otra faceta, como herramienta para modelar, analizar y resolver problemas de situaciones prácticas. Observamos que no se promueve la apropiación de significados de los objetos matemáticos, los conceptos de la física y la relación entre ellos.

Historia Breve de las Ecuaciones Diferenciales.

La más antigua de las ciencias es la Mecánica, situada dentro de la Física. Los documentos más antiguos fueron registros acerca de esta materia. Nos referimos a los principios de la palanca y al principio del empuje, de Arquímedes (287-212 a. C.), quien formula las leyes de composición vectorial de fuerzas dada mucho después por Stevin (1548-1620). Este mismo autor enuncio la mayoría de los principios de la Estática. El primer trabajo formulado dentro de la Dinámica se le debe a Galileo (1564-1642), presenta los primeros experimentos sobre la caída de los cuerpos. No podemos dejar de mencionar a Copérnico (1473-1543), quien se considera un precursor muy importante, con su sistema heliocéntrico, quien marco las bases de una nueva ciencia: la Mecánica Celeste.

Históricamente la integración antecedió a la diferenciación por prácticamente, dos mil años. El método de exhaución de los griegos y las medidas infinitesimales de Arquímedes, representan ejemplos antiguos de procesos límites de sumas integrales, pero no fue hasta el siglo XVI que Fermat, encontró las tangentes y los puntos críticos por métodos que equivalen a la evaluación de cocientes de incrementos. A finales del siglo XVII dan inicio los primeros intentos por resolver problemas de la física mediante el Cálculo Diferencial, dichos intentos llevaron a la creación de una nueva rama de las matemáticas, las ecuaciones diferenciales. A continuación se pretende mostrar de forma breve la historia de las ecuaciones diferenciales poniendo énfasis mayor en las ideas, en cómo fueron evolucionando los métodos para resolverlas.

El Calculus apareció impreso en una memoria de seis páginas de Leibniz (1646-1716), en lo que se conoce como el Acta Eruditorium de 1684, contenía una definición de la diferencial y donde se daban pequeñas reglas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces. También incluía aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos.

Los creadores del Cálculo infinitesimal Newton y Leibniz, fueron también, los precursores de las ecuaciones diferenciales. En su inicio se presentaban como un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal.

El término *aequatio differentialis* fue primeramente usado por *Leibniz* (en forma bastante restringida) en el año de 1676, para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y, este formato se conservaría hasta los tiempos de Euler (1768-1770). Es importante resaltar que las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen prácticamente con la aparición del Calculus, en la ya célebre polémica Newton-Leibniz.

Famoso es el momento en que Newton comunica (por medio de Oldenburg) a Leibniz el siguiente anagrama[1]:

6ª cc d ae 13e ff 7i el 9n 4º 4q rr 4s 9t 12v x,

que en latín quiere decir "Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa", o bien: "Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa". Este fue el descubrimiento fundamental de Newton que considero necesario mantener en secreto. En lenguaje matemático actual significa: "Es útil resolver ecuaciones diferenciales". Existe la afirmación por parte de historiadores como Ince (1926) que la fecha de aparición de estas es el 11 de noviembre de 1675, cuando Leibniz escribió la ecuación $\int ydy = \frac{y^2}{2}$, aunque acepta que no resolvió una ecuación diferencial, sino que fue el nacimiento de una herramienta muy poderosa y el signo de la integral.

La clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden (dada en el lenguaje de aquella época, ecuaciones fluxionales) la presentó Newton. El primer tipo estaba compuesto de todas aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones x', y', y un fluente x o y están relacionados, como por ejemplo $\frac{x'}{y'} = f(x)$, o bien como escribimos en la actualidad $\frac{dy}{dx} = f(x)$; el segundo tipo abarco las ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos

---

[1] Información tomada de Leibniz-Newton (1977) "El Cálculo Infinitesimal origen-polémica", Editorial Universitaria de Buenos Aires.

fluentes $\frac{x'}{y'} = f(x,y)$ $\left(\frac{dy}{dx} = f(x,y)\right)$, y finalmente, el tercer tipo se refiere a las ecuaciones diferenciales que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad nos llevan a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Es importante destacar que en esta época los problemas todavía eran abordados con una visión geométrico-euclidiana. Tanto Newton como Leibniz, construyen sus concepciones matemáticas en términos de entes geométricos en los cuales se ven representadas las propiedades y conceptos. Creemos que esto era una consecuencia de lo restringido que se encontraba el concepto de función en el siglo XVII, debido a que se ligaba fuertemente a las funciones con curvas geométricas. Todavía se mantenía el concepto euclidiano de lo que era una tangente. Leibniz mostraba un elemento diferente aunque ambiguo, de concebir la recta tangente como aquella que une dos puntos infinitamente próximos.

En lo que se refiere al Cálculo, tanto Leibniz como Newton, hablaban de cantidades variables; en Newton dichas cantidades variaban con el tiempo, mientras que con Leibniz la referencia era una sucesión de valores infinitamente próximos. El primero tiene una idea intuitiva de movimiento continuo muy cercana al concepto de límite, mientras que el segundo concibe el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales.

A fines del siglo XVII, los hermanos Bernoulli (James y Johan) introducen términos como el de *integrar* una ecuación diferencial, así como también aparece el método de *separación de variables,* para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Por 1692, Johan Bernoulli I (1667-1748) encontró un nuevo método utilizando una serie de problemas, la multiplicación por un *factor integrante,* que utilizó para resolver aquellas ecuaciones que no se permitían separar las variables o bien aquellas de la forma $\alpha xdy - ydx = 0$, que a pesar de ser de separación de variables no era integrable, debido a que en esa época no se conocía que la $\int \frac{dx}{x} = Lnx.$ Pero sin embargo, los métodos eran incompletos y la teoría general para las ecuaciones diferenciales a inicios del siglo XVIII no podía ser propuesta de forma completa.

Ya en 1693, Huygens hablaba explícitamente de ecuaciones diferenciales y Leibniz dice, ese mismo año, que las ecuaciones diferenciales son funciones de elementos del triangulo característico.

En los tiempos de Descartes a las curvas a las que se les podía asociar una ecuación algebraica se les denomino curvas algebraicas y a las que no curvas mecánicas. Después con los trabajos de *Leibniz*, las curvas mecánicas pudieron analizarse a través de asociarlas con las ecuaciones diferenciales que modelan su forma y así resolverlas igual que las otras, de hecho a partir de esto las curvas se caracterizan como algebraicas y trascendentes.

En 1690 Jacques Bernoulli planteo el problema de encontrar la curva que adopta una curva flexible inextensible y colgada de dos puntos fijos, a la cual Leibniz llamo catenaria (del latín cadena). En aquel tiempo Galileo pensó que esta curva era una parábola, pero Huygens demostró que esto no era correcto.

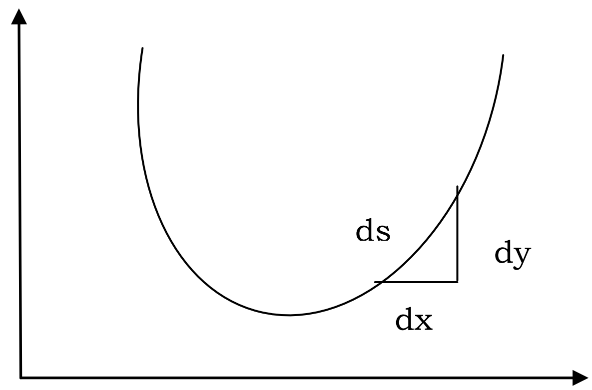


Figura 1. El triángulo Característico.

En 1691, *Leibniz, Huygens y Jean Bernoulli* publicaron sus resultados en forma independiente. La solución que aparece actualmente en los libros de texto de Mecánica, es la obtenida por Bernoulli y es la que presentamos a continuación:

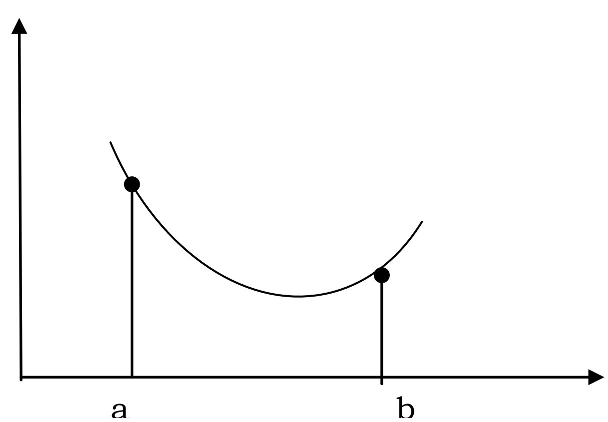


Figura 2. Una catenaria

Consideremos un cable homogéneo sujeto por sus dos extremos (que supondremos a la misma altura) y que distan 2a uno del otro, sea ρ la densidad del cable. Sea $y = y(x)$ la función que describe la posición del cable. Por conveniencia se asumirá que la altura mínima del cable ocurre en x=0 (o en otras palabras, $y'(0) = 0$,

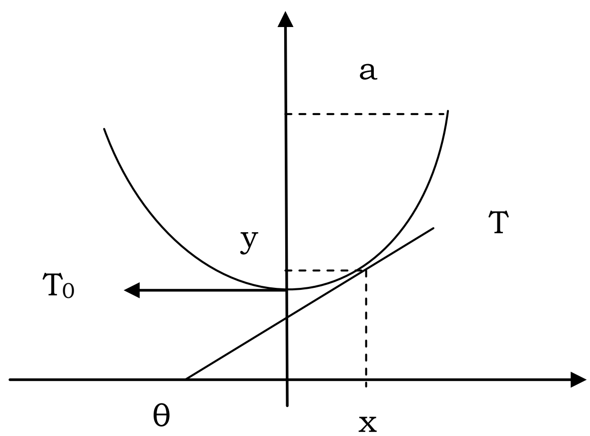


Figura 3. Deducción de la ecuación de la Catenaria

Sean (x,y) un punto arbitrario en el cable (por conveniencia se sitúa en el tramo positivo de las x; de la otra forma el razonamiento es igual), revisemos las fuerzas que actúan en el trozo de cable desde el punto de altura mínima hasta (x,y):El peso P, si m es la masa y s es la longitud del trozo considerado de cable, se tiene que $m = \rho s$ y por tanto, P = (0 - $g\rho s$), donde g es la constante de la aceleración terrestre.

La fuerza T_0 que ejerce la parte izquierda del cable sobre el punto de altura mínima. Se tiene que $T_0 = (-\|T_0\|, 0)$

La fuerza T que ejerce la parte derecha del cable sobre el extremo derecho (x,y) del trozo de cable considerado. Observando la fig. 3 se tiene que

$$T = \|T\|(cos\theta, sen\theta).$$

Por lo tanto la condición de equilibrio es $P + T_0 + T = 0$. O bien de componente a componente:

$$\|T_0\| = \|T\|cos\theta, \qquad g\rho s = \|T\|sen\theta.$$

Si dividimos ambas expresiones.

$$tan\theta = \frac{g\rho s}{\|T_0\|}. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

A partir de ahora, denotaremos $C = \frac{g\rho s}{\|T_0\|}$, si observamos la fig. 1 veremos que

$$\frac{dy}{dx} = tan\theta, \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

Si derivamos con respecto a x, la ecuación (1), se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx}$$

O escrito de otra forma tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Esta es una ecuación de segundo orden, que por supuesto podemos reducirla haciendo el cambio $v = \frac{dy}{dx}$, y se convierte en:

$$\frac{dv}{dx} = C\sqrt{1 + (v)^2}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

La ecuación (2) se resuelve usando y´(x) = 0, de este modo obtenemos la ecuación de la catenaria $y(x) = \frac{1}{C}\cosh(Cx) + B$ . . . . . . (3)

Donde B es una constante arbitraria. ¿Qué significado físico o geométrico posee B?

Otra forma de resolver la ecuación (2) es usando la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de orden dos. Lo que nos interesa resaltar con esta demostración es el contexto en que surgieron las ecuaciones diferenciales y como fue desarrollándose la forma de resolverlas. Naturalmente al inicio la atención se concentró en las ecuaciones diferenciales de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con métodos más o menos exitosamente elegidos.

La catenaria cumple otra importante propiedad: de entre todas las curvas de longitud dada, la que minimiza la energía potencial es precisamente la catenaria. Si y : [-a, a]→$\mathfrak{R}$ es la función que describe la forma de la catenaria (véase la figura 3), ρ es la densidad de cable y *g* es la aceleración de la gravedad terrestre, la energía potencial de un elemento infinitesimal de masa, *dm*, es:

$$dE = gydm = gy\rho ds = g\rho y\sqrt{1 + y'^2},$$

donde *ds* es el elemento diferencial de longitud de arco. La catenaria

minimiza $\int_{-a}^{a} g\rho y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$

si la longitud de la cuerda es constante, es decir $\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$ es constante.

El estudio de funciones minimizantes llevó a *Euler* al descubrimiento del cálculo de variaciones a mediados del siglo XVIII y *Lagrange* a finales de ese mismo siglo mejoró y amplio los métodos de *Euler.* Por lo mostrado anteriormente podemos ver que la catenaria se puede obtener por dos caminos distintos; a partir de las leyes de *Newton* o como la curva que minimiza una cierta magnitud física. Esto nos hace ver que muchos fenómenos o problemas físicos tienen esa dualidad. La reformulación de las Leyes de la física por medio de funciones minimizantes fue hecha por Hamilton a mediados del siglo XIX.

Leibniz descubrió la técnica de separación de variables en 1691: Indico como se resuelven ecuaciones diferenciales de la forma

$$y\frac{dx}{dy} = f(x)g(y),$$

También redujo en el mismo año la ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ a una separable de primer orden del modo utilizado actualmente, con el cambio de variable $y = vx$. En 1694, Leibniz publicó la resolución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

En 1694, Leibniz y Jean Bernoulli, estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dada. Bernoulli señalo que este problema es importante para determinar las trayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme, porque dichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. El problema fue resuelto de forma general e independiente por Leibniz y por Jean Bernoulli en 1698. El método empleado es el mismo que se utiliza hoy en día. También fue Jean Bernoulli quien planteo el problema de determinar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad, donde la ecuación diferencial planteada en este caso es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^n.$$

También por esas fechas fueron identificadas las ecuaciones diferenciales de primer orden exactas, es decir las ecuaciones de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

para las cuales existe una función $z = z(x,y)$ tal que $dz = Mdx + Ndy.$

Clairaut, en 1739 dió la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, condición que fue dada en forma independiente por *Euler* en 1734.

Cuando una ecuación de primer orden no es exacta, es posible muchas veces multiplicarla por una función, llamada factor integrante, que la convierte en exacta. Aunque se había usado esta técnica en algunas ecuaciones, fue *Euler* en 1734, quien se dió cuenta que este concepto proporcionaba un método de de integración e introdujo las expresiones que actualmente se usan. Clairaut amplió la teoría un tiempo más tarde.

Hacia 1740 se conocían los métodos elementales de resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Otro problema famoso que surge en esos años (1724), fue el de la cuerda vibrante, de nuevo Jean Bernoulli en sus esfuerzos por resolverlo, planteo y posteriormente resolvió la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y$$

Con la cual inician los trabajos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Anteriormente se dedujo la ecuación que satisface el movimiento del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgsen\theta = 0$$

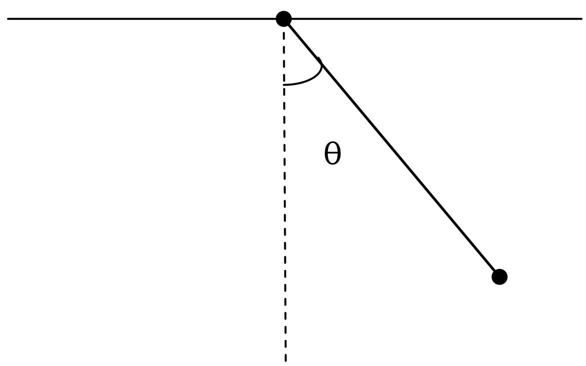


Figura 4. Un péndulo simple

Dicha ecuación fue presentada de la siguiente manera:

Por medio de la ley de la conservación y la energía se propone que la expresión $\dot{\theta}^2 = 2mgcos\theta$, donde el punto denota, la derivada con respecto al tiempo. A continuación se deriva esta ecuación con respecto al tiempo. Quedando entonces $\ddot{\theta} = mgsen\theta$ cuya solución no es posible encontrar en términos de funciones elementales.

Es importante destacar que antes de la ecuación de Jean Bernoulli, no se conocía la solución del péndulo simple, ni la que se conoce ahora, la cual se obtiene tras aproximar el *senθ* por el *ángulo θ. Euler* inicio a considerar ecuaciones de orden superior a uno en 1728.

Partiendo del punto de vista de la concepción de función que se tenía en esa época, a partir de Newton se disponía de un método general de integración de ecuaciones diferenciales mediante el desarrollo de funciones en forma de serie. En 1733, Daniel Bernoulli presento en un artículo cuyo título es "Teoremas sobre oscilaciones de cuerpos conectados por un hilo flexible y de una cadena verticalmente suspendida", donde deduce que una cadena de densidad constante en suspensión que oscila, se tiene

$$\alpha \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + y = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Donde x e y = y(x) tiene el significado que se muestra en la figura siguiente.

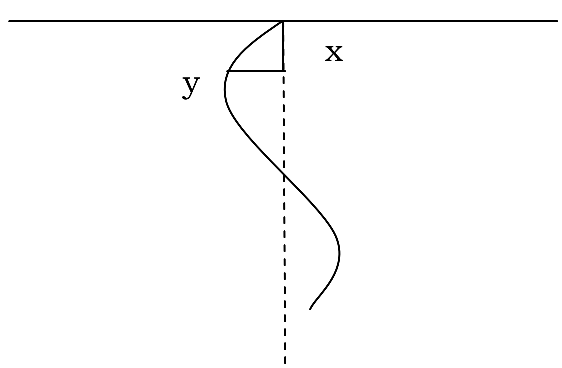


Figura 5. Una cadena vertical suspendida

A continuación mostraremos la resolución de la ecuación (5) del modo que uso Daniel Bernoulli:

Por comodidad supondremos α = 1. Por lo tanto sea

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots, \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

la función que se pretende encontrar. Los siguientes cálculos son fáciles de entender si se supone que una serie de potencias se puede derivar término a término (operación que hasta el siglo XIX se suponía valida):

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots$$

$$x\frac{dy}{dx} = Bx + 2Cx^2 + 3Dx^3 + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = B + 4Cx + 9Dx^2 + \cdots \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Igualando los coeficientes de (6) y (7) se tiene que:

A = B, B = 4C, C = 9D, …

todos los coeficientes se pueden poner en función del primero:

$$B = A, \quad C = \frac{A}{4}, \; D = \frac{A}{4*9}, \ldots$$

Por tanto la solución de (5) es:

$$y = A + Ax + \frac{Ax^2}{4} + \frac{Ax^3}{36} + \cdots + \frac{Ax^n}{(n!)^2} + \cdots$$

En 1739, *Euler* publicó un artículo denominado “De novo genere oscillationum” (sobre un nuevo tipo de oscilaciones), donde aparece la siguiente ecuación diferencial:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = F\mathrm{sen}(wt)$$

Y descubrió el fenómeno de resonancia mecánica. Ya en 1734, *Euler* afirmaba que podía resolver la ecuación

$$K^4\frac{d^4y}{dx^4} = y,$$

Dicha ecuación surgió tras estudiar el problema de desplazamiento transversal de una barra elástica fija en un extremo y libre del otro. En ese entonces el único modo disponible por *Euler* fue la utilización de series y obtuvo cuatro series distintas.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales surgieron en la historia de las matemáticas con la misma intención que las ecuaciones diferenciales ordinarias; analizar cuantitativamente determinados sistemas físicos, en particular los astronómicos. En el campo de la Astronomía los principios físicos (las leyes del movimiento de Newton y la ley de gravitación) estaban claros, pero los problemas matemáticos eran mucho más profundos. El problema fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros, es resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primero en tener éxito fue Newton, en su famoso *Principia,* al demostrar que a partir de sus leyes del movimiento y de la ley de gravitación universal se podían deducir las tres leyes planetarias de Kepler. El problema de los tres cuerpos sometidos a una acción de la gravedad común fue estudiado intensamente por *Euler, Laplace y Lagrange*, obteniendo solo resultados parciales. Debido a que no obtenían métodos generales de solución para resolver ecuaciones diferenciales, los matemáticos de aquel tiempo se ocuparon con los sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes. Este tipo de sistemas de ecuaciones surgió por primera vez al estudiar sistemas de muelles acoplados, a partir de la ley de Hooke. La noción de polinomio característico aparece ya de forma explícita en los trabajos de *Lagrange* sobre sistemas de ecuaciones diferenciales publicado en 1774 y en el trabajo de *Laplace* en 1775.

El mismo *Laplace*, desarrollo un método alternativo para hallar la solución de tales sistemas. Lo cual nos muestra en su ya famoso ensayo *Théorie analytique des probabilités,* publicado en el año de 1812. Por ese entonces *Laplace* presento lo que ahora conocemos como la transformada de *Laplace* para encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Esta transformada sirve también para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, siempre que tengan coeficientes constantes.

Posteriormente, a inicios del siglo XIX se trataron de demostrar algunos hechos que fueron dados por validos en el siglo anterior.

En 1820, *Cauchy* demostró la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, bajo ciertas condiciones.

Picard, en 1890, estableció un método de aproximaciones sucesivas que permite ver con precisión el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden n.

Cauchy trata de demostrar el mismo teorema para los sistemas de ecuaciones diferenciales, introduciendo la notación vectorial que todavía utilizamos en nuestros días.

Por último, las investigaciones de *Poincaré* sobre la estabilidad y periodicidad de las soluciones del sistema solar le condujeron a formular la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Retomando el contexto que imperaba a finales del siglo XVIII, los conceptos matemáticos debían ser explícitamente definidos en términos de otros conceptos cuya naturaleza era bastante conocida por un grupo de entendidos o eruditos de esa época. Para la demostración de los teoremas estos debían ser completamente justificados en cada etapa, o bien por un teorema anteriormente probado, por una definición o un axioma explicito. La intuición (geométrica o física) no era un criterio valido para desarrollar una demostración matemática.

Es necesario resaltar el origen y el contexto en que fueron dándose los conceptos que imperan en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, estos oscilaron entre los ambientes geométricos y los de la física. Cada personaje que intervino en esta historia participo poniendo en esta el enfoque de sus prácticas matemáticas y de sus creencias, el papel tan importante que jugaron sus preferencias en la producción de todos esos elementos que hoy denominamos objetos matemáticos adscritos al campo de las ecuaciones diferenciales. En donde podemos observar que en algunos momentos se convierten en herramientas y en otros, son objeto de estudio.

Antecedentes

Investigaciones realizadas en la Facultad de Ingeniería-Mexicali (Rivera, R., 2001), referidas a la enseñanza, los profesores y los textos (La Institución) reportan lo siguiente:

Los profesores y alumnos solo ven como problema a las ecuaciones diferenciales, esto es se ocupan solo de su resolución, no las reconocen como herramientas para resolver problemas, los significados en contextos físicos, gráficos y numéricos, representan un porcentaje mínimo de sus concepciones. El problema en el salón de clase se reduce solo a resolver ecuaciones diferenciales.

La mayoría los profesores apoyados en los textos, dan privilegio al marco algebraico y desaprovechan el marco numérico y grafico, cuya utilización enriquece el aprendizaje significativo.

Son pocos los profesores que se apoyan en las herramientas tecnológicas actuales, tales como computadoras o calculadoras graficadoras para visualizar conceptos y generar habilidades de análisis, propiciando de esta manera la apropiación de significados en los estudiantes.

En la parte correspondiente a los estudiantes, el reporte anterior menciona lo siguiente:

Para un gran número de estudiantes encuestados en la Facultad de Ingeniería, las ecuaciones diferenciales tienes significaciones muy limitadas, restringidas mas a la cuestión algebraica, son pocos los que muestran que las ecuaciones diferenciales tienen sentido en algún contexto, a saber el físico o bien el geométrico.

Se observó también que aunque muchos de ellos son alumnos exitosos, no tienen la habilidad para relacionar las ecuaciones diferenciales entre sus diferentes representaciones, no logran hacer la transferencia entre los diferentes contextos.

La mayoría de los estudiantes encuestados mostraron que ven a las ecuaciones diferenciales como problemas matemáticos, meramente algebraicos, no las relacionan con modelos de variación y que pueden ser representadas mediante valores numéricos o gráficos, o bien que pueden darnos información de fenómenos reales.

Desde supuestos antropológicos, para que el estudiante se apropie de los significados y comprenda los objetos matemáticos; este deberá poner en juego todo un sistema de prácticas ante un tipo de situaciones problemáticas, según Dubinski (1996, págs. 32-33), el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones percibidas de problemas matemáticos por medio de la reflexión sobre dichos problemas y sus soluciones en un contexto social y por medio de la construcción y reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos y por medio de la organización de éstos en esquemas para usar al tratar con las situaciones.

Y para Dummett (1991), los significados caben dentro de una teoría de la comprensión, se dice que alguien conoce algo, *cuando conoce el lenguaje, los significados de las expresiones, así como las oraciones del lenguaje.*

Si iniciamos un recorrido desde una perspectiva histórica reciente, Martínez L. (2002), afirma que la enseñanza de la matemática como asignatura de servicio (o simplemente la matemática para no matemáticos), ha sido un tema de interés desde hace muchos años. Podemos mencionar al famoso matemático francés Joseph Fourier, quien escribió una carta proponiendo sus ideas sobre cómo debía enseñarse la matemática a los ingenieros, (Langinis, 1981). Muchos años después, en 1911, el ICMI[2] decidió organizar un congreso internacional sobre el tema, que finalmente tuvo lugar al año siguiente. Más recientemente el ICMI resolvió crear un grupo de estudio, al más alto nivel internacional, dedicado especialmente a la Matemática como asignatura de servicio. A partir de esto el tema ha sido tratado reiteradamente en eventos internacionales, como el VIII ICME[3], realizado en Sevilla en 1996 (Muller *et al.*, 1996) o el Study Group on the theching and

[2] International Committee in Mathematical Instruction
[3] International Congress in Mathematical Education.

learning of Mathematics at Univerisity level, que tuvo lugar en Singapur en 1998 (Bourguignon et al., 1999).

Uno de los puntos destacados en estos documentos es el tema de la motivación. A un estudiante de Química, de Economía o de Ingeniería, no lo motiva demasiado un teorema de existencia y unicidad, o ver qué sucede si se debilita la hipótesis en un teorema intrincado, etc., sino que la motivación surge de ejemplos y aplicaciones que tengan que ver con la carrera que dicho estudiante eligió. Se ha comprobado que el hecho de tener un significado práctico de un objeto de estudio, motiva a querer saber más de dicho objeto. El estudiante de ingeniería es práctico por naturaleza. Consideramos que para estudiantes de nivel universitario resolver problemas que tengan relación con áreas de ingeniería o bien con problemas de la vida diaria, les permite rescatar los significados de los objetos de estudios. Resolver una ecuación diferencial que le arroje un resultado que pueda vincular a una situación real.

Camarena (1984 a 1999); aborda el diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos, lo cual permite contribuir al aprendizaje significativo promoviendo la enseñanza de las matemáticas en el contexto de la Ingeniería. Modelar en matemáticas no es una tarea fácil, es una de las prácticas cognitivas más complejas.

En la revisión de estos documentos se puede constatar la importancia de continuar realizando investigación alrededor de los problemas que se abordan en el campo de las ecuaciones diferenciales, por la relevancia que estos tienen en la formación de ingenieros.

Se hace notar que las matemáticas, vistas desde el contexto de la ingeniería, abordan una etapa representativa de los modelos matemáticos, donde las matemáticas son utilizadas para representar problemas reales, a través de ecuaciones, relaciones y distribuciones. Lo anterior es un punto de conflicto para el ingeniero, dado que los fenómenos y problemas que se le presentaran en el campo laboral, fueron abordados en sus cursos de matemáticas desvinculados de los cursos de ingeniería.

Sea esta la importancia de indagar cuales problemas son de mayor relevancia e interés para el fututo ingeniero y de qué modo se pueden utilizar para promover el aprendizaje significativo. La misma Camarena (1999), nos presenta una clasificación de los modelos matemáticos que se emplean en ingeniería, en particular se enfoca en la ingeniería electrónica, mismos que permiten que el estudiante se familiarice con los problemas que se le presentaran al egresar e insertarse en el mundo laboral.

Por otro lado Cantoral, *et al.* (2000), hace mención a que las ecuaciones que aparecen en los diferentes campos de la física (tales como las ecuaciones de electromagnetismo, circuitos, las de la mecánica de fluidos, de la teoría de elasticidad, de las reacciones químicas y la segunda ley de Newton) y aun en otras ciencias, son a menudo, casi iguales, de manera que muchos fenómenos tienen analogías en estos diferentes campos, tanto para ecuaciones diferenciales de primero orden como, de segundo orden. Tan útiles son los resultados del análisis de estos fenómenos para encontrar significados de *y(x)* y sus variaciones de la ecuación diferencial.

Otro punto que se aborda es el de la enseñanza actual: La enseñanza de las matemáticas (en particular de las ecuaciones diferenciales) se ha basado en la algoritmización como el medio ideal para acceder al conocimiento por muchos años; en la actualidad la forma de presentar los saberes ha cambiado, centrándose en la construcción de conocimientos matemáticos donde el alumno es el protagonista principal de este proceso tan complejo, jugando de esta forma un papel importante el del investigador en matemática educativa.

Se han encontrado trabajos desde el enfoque de los significados, como el de Buendía A. y García P. (2001), donde los autores proponen el empleo de la grafica para resignificar las condiciones iníciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias, mismo tema que es abordado solo desde la perspectiva algorítmica o analítica en su presentación o justificación.

Se hace notar que los trabajos de propuestas en el tema de Ecuaciones Diferenciales, dentro de la línea de la Matemática Educativa, son menos en comparación con los de Cálculo. Y menos aun aquellos que abordan el tema de las ecuaciones diferenciales dentro de la línea de matemática educativa con enfoque en la Teoría del EOS, se considera necesario señalar que el marco teórico que se utilizará en el presente trabajo de investigación, no es un trabajo acabado, se encuentra en desarrollo, lo cual nos permitió aportar evidencias para el crecimiento del mismo.

Godino y colaboradores (1994, 2003) han construido una teoría denominada Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Esta teoría considera la naturaleza de los objetos matemáticos (Ontología), toma un punto de vista pragmático y se centra en los significados (Semiótica). En, Godino (2009: 9) se señala que la resolución de problemas, y de manera general, la modelización debe ser considerada más bien como *híper-procesos* matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de conexiones entre los objetos y generalización de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos *meta-cognitivos*.

Lo anterior nos hace ver lo complejo que es la modelación, y sin embargo en el salón de clases exigimos a los estudiantes que dada una expresión verbal desarrollen el modelo matemático apropiado para resolver una situación problemática dada. Esto no implica que los estudiantes no puedan hacerlo, pero si debemos estar consientes que los procesos cognitivos que llevan de la particularidad a la generalidad no son fáciles de concebir, debido a que requieren de un nivel taxonómico más elevado comparado con el de describir. Además de que es aquí donde entran en juego las relaciones ecológicas entre los significados de las nociones que emergen al interactuar con estos modelos matemáticos.

En el presente trabajo nos hemos dado a la tarea de realizar un estudio de la Ecología de significados de los objetos matemáticos intervinientes y su relación con las dificultades presentes en la resolución de problemas a través de las ecuaciones diferenciales. En este documento utilizaremos el término *Ecología* como una analogía. Debido a que la ecología se encarga de estudiar la relación entre los seres vivos y su ambiente, entendido como la suma de los factores abióticos (como el clima y la geología) y los factores bióticos (organismos que comparten el hábitat). La ecología analiza también la distribución y la abundancia de los seres vivos como resultado de la mencionada relación. Igualmente en el contexto de la Educación, hablamos de una ecología de significados de los objetos matemáticos intervinientes en los procesos de la instrucción matemática.

El término *Ökologie* data de 1866 y fue acuñado por el biólogo y filósofo alemán Ernst Haeckel. La palabra está compuesta por dos vocablos griegos: *oikos* (casa, vivienda, hogar) y *logos* (estudio). Por eso, la ecología significa *el estudio de los hogares*. Al comenzar a desarrollar sus estudios, Haeckel se refería a la ecología como la ciencia que estudia las relaciones de los seres vivos con su ambiente. Sin embargo, con el tiempo extendió el concepto hasta abarcar el estudio de las características del medio, incluyendo el transporte de materia y energía y su transformación por las comunidades biológicas.

En la actualidad y desde hace varios años, la ecología se encuentra muy relacionada con un heterogéneo movimiento político y social, que intenta defender el medio ambiente. Si nos traemos todos estas nociones al campo de la Docencia, podemos mencionar que ya desde principio de los años 80's, algunos trabajos realizados por Lakoff y Johnson (1980) mencionan el relevante papel de los conceptos metafóricos utilizados para crear una estructura en el sistema conceptual de las personas, y justificando la utilización de la metáfora como medio para comprender y visualizar una realidad en términos de otra. Pensando en función de los saberes matemáticos institucionales, la metáfora ecológica, aplicada a la noosfera matemática (Godino, 1993), constituye una alternativa útil para comprender su origen (la génesis), el desarrollo y las funciones de dichos saberes.

El análisis de la ecología institucional de un saber nos permite conocer sus dominios, sus hábitats, o sea los lugares donde se ubica, los objetos de estudio con los que se relaciona, las estructuras de soporte (conocimientos previos) y las funciones de sus interrelaciones. La metáfora ecológica también nos puede servir para estudiar la evolución de los significados institucionales de los objetos matemáticos (Chevallard, 1989, Godino, 1993), esto es, dado un objeto particular, este desempeña una función diferente de acuerdo a las distintas clases de instituciones y es de nuestro interés determinar las condiciones que este requiere para desempeñar acertadamente su papel en cada una de ellas.

En el análisis ecológico queremos mostrar que la posibilidad de entender un proceso está asociada a la significación que tienen los elementos que intervienen en dicho proceso y las diferentes formas de representarse. En matemáticas, un objeto tiene sentido alrededor de otros muchos objetos, el ejemplo del número cinco, cuando se pregunta: ¿qué puedes decir del número cinco? No podemos responder sin relacionarlo con otros números, es un número impar, es un número entero, es número primo…es un divisor de los números cinco, diez, quince,… está dentro de una ecología (la de los números enteros), siempre tienes que relacionarlo con otros números para poder describirlo.

1.2 El Problema de Investigación

Se tienen reportes por parte de instituciones reconocidas a nivel nacional (CENEVAL) que los resultados de los exámenes aplicados a estudiantes potenciales a egresar de las carreras de ingeniería (egel), muestran promedios en el área de matemáticas, que están por debajo del mínimo deseable estipulado. La situación es preocupante, y requiere de atención, ya que una característica esperada de los ingenieros egresados es que cuenten con conocimientos básicos sólidos que les permitan abordar toda clase de problemas en su vida profesional.

En la mayoría de las Licenciaturas de Ingeniería, el 40% de la carga curricular está compuesto por cursos del área de matemáticas: como son álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo multivariable, probabilidad y estadística, métodos numéricos y ecuaciones diferenciales y algunos cursos de matemáticas avanzadas. Las ecuaciones diferenciales permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; el crecimiento y decrecimiento poblacional, ubicar variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Por lo anterior se considera una asignatura clave para todas las ramas de la ingeniería. Su importancia estriba en que es el enlace, el eslabón que une los cursos de cálculo con los problemas propios de ingeniería. Es aquí donde el estudiante se inicia en la resolución de problemas simples; como averiguar cuando podrá tomarse una taza de café sin sufrir quemaduras, cuánto tardará en duplicarse un cultivo de bacterias, que corriente circulará en un circuito a un tiempo determinado o bien, cuanto tendrá que esperar para ver vaciarse un tanque de mezclado.

Actualmente los índices de reprobación estudiantil en la Facultad de Ingeniería, en los cursos de ecuaciones diferenciales son del un 40% en promedio[4], por tal motivo se tiene la deserción de más de 100 o más

---

[4] Esta información fue generada por la Coordinación de Formación Básica y se obtuvo promediando los resultados de las Actas de Calificaciones de los semestres 2005-2, 2006-1,

alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura. De una investigación anterior (Rivera, 2001), realizada en la Facultad de Ingeniería-Campus Mexicali, se encontró que de 10 estudiantes que aprueban el curso de ecuaciones diferenciales solo 3 recuerdan algún método de solución de las mismas y lo que es más preocupante, se observó que después de algunos semestres, esos mismos estudiantes, que en su momento fueron exitosos al cursar la materia, no pueden utilizarlas como herramientas para sus cursos disciplinarios, lo cual nos dice que el estudiante no logró apropiarse de los significados de las ecuaciones diferenciales y por lo tanto no se está cumpliendo con los objetivos del curso; que es dotar al estudiante de herramientas matemáticas para la resolución de problemas de ingeniería.

El curso de ecuaciones diferenciales se encuentra situado en el tercer y último semestre de la Etapa Básica, para las carreras de Ingeniero Civil, Industrial, Mecánico, Electrónico, Electricista, en Computación, en Mecatrónica, Bioingeniería, Aeroespacial y de Energías Renovables, estas tres últimas son de nueva creación en la Facultad de Ingeniería Mexicali. Para que un estudiante pueda cursar esta materia debe haber aprobado los cursos de Calculo Diferencial y Calculo Integral, estos cursos le proporcionan los *conocimientos previos*, además se supone que el estudiante tiene dominio del algebra, algebra lineal y probabilidad y estadística. Los cursos

---

2006-2 correspondiente al total de grupos de Ecuaciones Diferenciales en la Facultad de Ingeniería-Mxli.

mencionados y los significados adquiridos dentro de dichos cursos, forman el bagaje o cimiento necesario para asignar significados a los nuevos objetos matemáticos que se abordan dentro de la materia de ecuaciones diferenciales.

La Ecología de significados, en forma metafórica, es el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y de las funciones o papeles que desempeña en relación a los restantes objetos del sistema. El análisis de la ecología institucional de un saber nos lleva a conocer sus hábitats, o sea los "lugares" donde se encuentran, los objetos con los cuales entra en asociación, las estructuras de soporte y las funciones de estas interrelaciones, esto es, los nichos ecológicos de los saberes matemáticos.

Al momento de resolver una ecuación diferencial o un problema que las involucre los conocimientos se adecuan, se transforma al ser utilizados en otro contexto u otro hábitat. Veamos algunos ejemplos: El caso de la expresión un cuarto si nos situamos en el contexto de los números fraccionarios su significado es $\frac{1}{4}$, pero si nos movemos al contexto de las casas pues un cuarto significa una habitación de cuatro paredes. Dentro de la expresión matemática $y = 2x$, el significado del número dos tiene varias interpretaciones en relación al contexto en que se esté analizando (Rivera, 2001)

- En el contexto geométrico, la expresión es la ecuación de una recta, y el número dos significa la pendiente de esa recta.
- En el contexto del movimiento, la expresión representa la posición con respecto al tiempo de una partícula, el dos significa la velocidad con que se mueve dicha partícula.
- Si nos vamos al contexto de la Energía, la expresión es una fuerza que es proporcional al desplazamiento, aquí el numero dos es la constante de proporcionalidad de esa fuerza.
- En el contexto de la matemática, la expresión representa una relación en la cual el valor de y depende del valor que le asignemos a x y el numero dos significa que y es el doble del valor de x.

El problema que se aborda en la presente investigación es dada una situación-problémica que se resuelve con ecuaciones diferenciales, cuales son los objetos matemáticos intervinientes, cuales son las relaciones que los estudiantes hacen entre estos y los nuevos objetos de estudios que se les presentan para resolver dicha situación.

1.2.1 Preguntas de la Investigación

La noción de significado es frecuentemente utilizada en la mayoría de los estudios didácticos, debido a que se ha demostrado por diferentes medios y en diferentes situaciones que el estudiante es capaz de realizar acciones y resolver problemas, cuando le ha asignado sentido y significado a los objetos matemáticos que se ponen en juego para tal acción. Cuando un estudiante resuelve ecuaciones diferenciales surgen los conceptos o significados emergentes debido a la interacción entre sus conocimientos previos y los nuevos que van apareciendo durante dicho proceso. Importantes investigadores, dentro de esta línea de trabajo, han dado evidencia de la importancia del aprendizaje significativo, como lo muestra el comentario siguiente:

La *ecología de significados* será concebida como el "***lugar***" donde se encuentra situado nuestro objeto de estudio, cuales son las condiciones de soporte de un objeto, de forma metafórica pudiéramos decir en qué lugar se encuentra un tigre, el contexto del tigre es la selva, pero también pudiera estar en un Zoológico o en un Circo. Refiriéndonos a los problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales, éstas pueden ser en contexto grafico: problemas geométricos; físico: Crecimiento, Descomposición, temperatura, etc. Y no necesariamente en el ámbito escolar, pueden ser en la investigación, en una Fábrica.

Las condiciones de soporte del uso de las ecuaciones diferenciales en el análisis e interpretación y resolución de problemas de ingeniería, son los significados de los objetos intervinientes mismos que se adquieren de través de su tránsito por los cursos que preceden al de ecuaciones diferenciales, así como los relacionados con los temas que rodean a dichos tipos de problemas, se pueden mencionar los problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales de segundo orden, sólo por dar un ejemplo.

Partiendo de lo anterior, el problema que se abordará en esta investigación pretende dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿En qué medida las relaciones ecológicas entre los objetos matemáticos intervinientes dificultan el análisis, la interpretación y la resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones diferenciales?

1.2.2. Preguntas específicas

Para dar respuesta a la pregunta anterior, necesitamos dar respuesta a las siguientes:

¿En qué medida se enriquecen o maduran los prerrequisitos del objeto de estudio con el nuevo conocimiento?

¿Qué factores afectan a los significados personales que los estudiantes construyen al resolver problemas con ecuaciones diferenciales?

Las dos preguntas anteriores van encaminadas a establecer las relaciones y los factores que afectan la adquisición de significados personales en los estudiantes, cuando en el salón de clase son promovidos por el profesor los significados institucionales. Interesa conocer si efectivamente el estudiante relaciona los significados adquiridos con anterioridad con los nuevos significados abordados en el aula. Se tiene la premisa de que el estudiante puede no haber adquiridos los significados necesarios o bien si los adquirió le cuesta trabajo relacionarlos con los nuevos significados.

En Base a esto se formularon los objetivos y la metodología por lo que se hizo necesario conocer de forma más precisa cuáles de todos los conocimientos previos que el estudiante adquirió en los cursos que preceden al de ecuaciones diferenciales, son los más relevantes o bien son indispensables, para que puedan embonar los nuevos conocimientos que se requieren para la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problémicas; Por lo tanto las Instituciones se conciben como “comunidades de prácticas”, e incluyen, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Los *significados institucionales*, son todos aquellos que se desprenden del currículo, de cada asignatura dentro del plan de estudio, están plasmados en la carta descriptiva del curso y en los textos que los profesores utilizan para desarrollar su trabajo en el aula. El estudiante normalmente trata de reproducir lo que el profesor promueve dentro de su salón de clase, de ahí la importancia de caracterizar los significados institucionales que el profesor les presenta a sus estudiantes con la finalidad de que estos resuelvan problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para que los estudiantes resuelvan problemas o se desenvuelvan con éxito en situaciones problémicas, esto es, argumenten en forma verbal, grafica, numérica o analítica, requieren adquirir o mejor dicho construir sus propios significados de los objetos matemáticos, que una vez puestos en juego les permitan realizar dichas acciones. Para el desarrollo de este estudio es importante conocer y caracterizar los significados personales de los estudiantes para generar propuestas que mejoren nuestro desempeño como docentes.

Las ecuaciones diferenciales son el enlace entre el cálculo y los problemas de ingeniería, se cree que este curso viene a enriquecer los significados adquiridos en las asignaturas de cálculo diferencial e integral, por lo que la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden deben enriquecer los conocimientos previos adquiridos en dichos cursos, pues es aquí donde pueden observar la gran potencialidad que tiene el utilizar algunos de los objetos matemáticos (llámese graficar, derivar e integrar, por mencionar algunos) para resolver problemas como el de un objeto en caída libre, un pastel que se enfría y de algunos propios de ingeniería, como el calcular la corriente que circula por una bobina en un circuito RL, la carga en un Condensador, las posiciones de una masa sujeta a un resorte o la trayectoria que seguirá una nave espacial o la de un satélite de comunicación.

Los profesores no siempre están conscientes de los patrones que se generan al realizar ciertas acciones en el salón de clase, en la enseñanza tradicional, la rutina normal es más o menos la siguiente: el profesor dicta o escribe el problema en el pintarrón o bien le entrega al alumno una hoja que contiene el problema que se desea resolver, posteriormente él mismo profesor, resuelve el problema en el pintarrón, explicando paso a paso el porqué de sus acciones, esto es en el mejor de los casos, algunos solo lo resuelven y al final, la pregunta de siempre, entendieron, tienen alguna duda, -ahora procederemos a resolver otro, o bien -ahora ustedes pasarán a resolverlo en el pintarrón o en su hoja de trabajo. El estudiante solo se dedicó a observar y a anotar el procedimiento realizado por el profesor y comúnmente alguien suele hacer alguna pregunta sobre el por qué de algún despeje o simplificación. El estudiante se queda con la idea de que todos los problemas se resuelven igual, y toma como receta de cocina el desarrollo realizado por el profesor. Cuando el estudiante se enfrenta a un problema diferente, o puede ser un problema semejante pero con diferente información y/o diferentes incógnitas, regularmente no sabe por dónde abordarlo. Tomando como ejemplo el problema de un circuito eléctrico; lo normal es pedirle a estudiantes que calcule la corriente que circula por los elementos del circuito. Supongamos ahora que no quiero saber cuánta corriente circula, si no, cuánto tiempo tiene que pasar para que en el circuito circulen 10 amperes, el estudiante por más que busca dentro de sus problemas resueltos, alguno que se parezca, se siente perdido pues no encuentra la receta para resolverlo.

El conocer al detalle que patrones son generados en el salón de clase por el docente, nos permitirá tomar conciencia de que acciones son las ideales para generar significados de los objetos matemáticos requeridos para que el estudiante resuelva problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.3 Objetivos del Estudio

Antes de abordar el objetivo de la investigación se hace necesario ahondar en la idea de las relaciones ecológicas. Cuando hablamos de ecología de significados tratamos de mostrar que todo objeto matemático está ligado o requiere de otros objetos para sobrevivir, dicho de otra forma, si se sabe resolver sistemas de ecuaciones lineales, el estudiante aparte de conocer los métodos de solución para dichas ecuaciones, debe saber despejar, multiplicar y dividir, sumar y restar, pues de otro modo seguramente no tendrá éxito al abordar dicha actividad. Aunque parezca simple, si el estudiante adolece de alguno de estos saberes, no podrá tener éxito en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Centrándonos en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en ingeniería y su utilización para resolver problemas de forma eficiente; el estudiante tiene que tener dominio de todos aquellos objetos matemáticos que habitan alrededor de una ecuaciones diferencial; derivadas, integrales, y de cómo se encuentran interrelacionadas con los métodos de solución, incluso tener conocimientos de física, química, circuitos, etc.

Por lo anterior se proponen los objetivos siguientes.

1.3.1 Objetivo General

- ❖ Caracterizar los significados personales de los objetos matemáticos previos que los estudiantes de ingeniería ponen en juego al interactuar con los problemas que se resuelven utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden.
- ❖ Establecer las relaciones que existen entre los significados institucionales y los significados personales de los objetos matemáticos previos y que factores afectan dichas relaciones.
- ❖ En qué medida se ven afectados los prerrequisitos con la adquisición de nuevos conocimientos (objetos emergentes).

1.3.2 Objetivos Específicos

Para poder dar respuesta a los objetivos generales de esta investigación, tendremos que:

- ❖ Determinar cuáles son los prerrequisitos necesarios que necesitan los estudiantes al enfrentarlos a la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.
- ❖ Indagar los factores que influyen en la relación de significados personales e institucionales de los problemas en contexto.
- ❖ Caracterizar los significados de los objetos matemáticos previos y los significados institucionales que se promueven al enfrentar a los

estudiantes a la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.

- ❖ Determinar las facetas o dimensiones inherentes a los significados institucionales de los campos de problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales de primer orden. (que se presentan en los textos, o bien dentro del salón de clases)
- ❖ Caracterizar los significados personales que los estudiantes construyen al interactuar con problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales de primer orden.

Posteriormente señalamos la forma en que se desarrolló la investigación para dar cumplimiento a cada uno de los objetivos propuestos en esta sección.

1.4 Justificación

El interés en realizar un estudio Ontosemiótico de la ecología de los significados, que se ponen en juego al enfrentar a estudiantes de ingeniería, para que resuelvan problemas que involucran a las ecuaciones diferenciales de primer orden, tiene la finalidad de poder impactar favorablemente en el sistema escolar.

Proponer acciones que mejoren la enseñanza, aprendizaje y la evaluación de los cursos de cálculo (diferencial e integral) y a su vez el de ecuaciones diferenciales.

Mejorar el perfil de egreso de la etapa básica de los estudiantes al integrarse a su carrera de preferencia, habiendo adquiridos habilidades, así como herramientas para la resolución de problemas de ingeniería.

El estudio se realizó poniendo en juego, nuevas estrategias teóricas. El enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática, aun en construcción, sirvió de apoyo teórico para este trabajo. Por lo que a su vez, podrá retroalimentarse su desarrollo.

El realizar una reflexión sobre las nociones de significado personal e institucional y sus relaciones dadas (ecología), se obtendrá un mayor conocimiento de ellas, dentro de este enfoque.

Al utilizar la herramienta del análisis de textos denominada "análisis semiótico" para determinar significados personales o institucionales, nos proporcionó otra lupa para analizar los textos que se utilizan para la enseñanza del tema que se aborda.

Se considera al presente estudio viable, porque se cuenta con los recursos humanos; profesores y alumnos, con los recursos materiales, temporales y económicos. Por las razones anteriores es factible realizar la presente investigación dentro de la Facultad de Ingeniería-Mexicali. Actualmente se cuenta con dos grupos asignados de la materia de ecuaciones diferenciales y eso facilita el realizar las actividades de docente-investigador dentro del aula.

Asimismo con colegas especialistas en el tema, con buena disposición a apoyar las actividades requeridas tanto fuera como dentro del aula.

1.5 Alcances del estudio

Según el contenido temático de la materia de Ecuaciones Diferenciales, el tema seleccionado, se ubica en segundo lugar, dentro del curso, el cual se imparte en el tercer semestre de Tronco Común en la Facultad de Ingeniería-Mexicali, primero se revisan las definiciones y la terminología de las ecuaciones diferenciales en general, sus características, su clasificación y se estudian algunos métodos de resolución, posteriormente se abordan, con el nombre de Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, tema donde se encuentra ubicados los problemas que nos interesan. Por tanto, la investigación estará centrada en los estudiantes que se encuentran cursando esta materia. No es interés de este estudio dar seguimiento a estudiantes cuando egresen a la etapa disciplinaria por no ser un estudio de tipo longitudinal, sino de tipo cognitivo. Sin embargo, se revisarán textos y entrevistas a profesores de esta última etapa, con el fin de definir el campo de problemas de mayor utilidad para centrarnos en ellos.

La investigación se ubicará en tiempo presente exceptuando la revisión bibliográfica, donde se requiere un viaje al pasado para la formulación de la epistemología del tema.

La Facultad de Ingeniería, campus Mexicali, de la Universidad Autónoma de Baja California, será el espacio que nos servirá de marco para esta investigación.

Capítulo 2.

Marco teórico

2.1 Introducción

Para conformar el marco teórico de la presente investigación hemos realizado la revisión de las más importantes teorías de aprendizaje que nos lleven a dar explicación a la problemática que queremos abordar en este trabajo: la teoría de aprendizaje significativo y la teoría que se basa en el aprendizaje en base a problemas o bien la llamada enseñanza problémica. En relación a la primera, se tienen a partir de la perspectiva de *Ausubel* (1963), quien hizo su primer intento por explicar la teoría cognitiva del aprendizaje verbal significativo, publicado en su monografía "The Psychology of Meaningful Verbal learning", en el mismo año que se celebro en Illinois el Congreso PHI, Delta, Kappa, en el presento su ponencia "Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento". En la década de los 70`s, las propuestas de *Bruner* sobre el aprendizaje por descubrimiento estaban tomando fuerza. En ese momento, las escuelas buscaban que los niños construyeran su conocimiento a través del descubrimiento de contenidos. Ausubel considera que el aprendizaje por descubrimiento no debe ser presentado como opuesto al aprendizaje por exposición (recepción), ya que este puede ser igual de eficaz, si se cumplen algunas características. Así, el aprendizaje escolar puede darse por recepción o por descubrimiento, como estrategia de enseñanza, y se puede lograr un aprendizaje significativo o memorístico y repetitivo.

De acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos (los llamados conocimientos previos); pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

Ventajas del aprendizaje significativo:

- Produce una retención más duradera de la información.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos en forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria por más largo plazo.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.
- Es personal, ya que la significación de aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

Tipos de aprendizaje significativo:

- *El aprendizaje de representaciones*: es cuando el estudiante adquiere el vocabulario. Primero aprende palabras que representan objetos reales que tienen significado para él. Sin embargo no los identifica como categorías.
- *El aprendizaje de conceptos*: el estudiante a partir de experiencias concretas, comprende que la palabra "mamá" puede usarse también por otras personas refiriéndose a sus madres. También se presenta cuando los niños de edad preescolar se someten a contextos de aprendizaje por recepción o por descubrimiento y comprenden conceptos abstractos como "gobierno", "país", "mamífero".
- *Aprendizaje de proposiciones*: cuando conoce el significado de los conceptos, puede formar frases que contengan dos o más conceptos en donde afirme o niegue algo. Así, un concepto nuevo es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos.
- La enseñanza problémica ha sido definida en un gran número de publicaciones de carácter pedagógico de la manera siguiente:
- M. I. Majmutov (1983), la define como "la actividad del maestro encaminada a la creación de un sistema de situaciones problémicas, a la exposición del material docente y a su explicación (total o parcial) y a la dirección de la actividad de los alumnos en lo que respecta a la

asimilación de conocimientos nuevos, tanto en forma de conclusiones ya preparadas como mediante el planteamiento independiente de problemas docentes y su solución".

Según M. A. Danilov y M. N. Skatkin (1985), la enseñanza por medio de problemas consiste en que "los alumnos guiados por el profesor se introducen en el proceso de búsqueda de la solución de problemas nuevos para ellos, gracias a lo cual, aprenden a adquirir independientemente los conocimientos, a emplear los antes asimilados, y a dominar la experiencia de la actividad creadora".

Por lo expresado por estos autores, independientemente de que consideren la enseñanza problémica como un sistema de situaciones problemitas, una regularidad o una concepción del proceso docente-educativo, el autor entiende que su esencia radica en enfrentar a los estudiantes a contradicciones que deben resolver en forma activa e independiente de manera que adquieran los elementos integradores: aprender a aprender, aprender a ser y aprender a hacer.

La enseñanza problémica tiene como base metodológica la teoría del conocimiento, lo que se fundamenta en las contradicciones que los estudiantes deben resolver, mismas que son la fuerza que mueve su propio aprendizaje. La contradicción entre la tarea que surge y el nivel de desempeño alcanzado son la fuente interna del aprendizaje. La solución de cada tarea docente es un acto de conocimiento. Para que la contradicción se convierta en una fuerza motriz de la enseñanza, debe tener sentido ante los estudiantes: solo así se mantiene consciente y necesaria por parte de ellos, debe estar equiparada con el potencial cognitivo de los alumnos.

La base psicológica que fundamenta a la enseñanza problémica, es la concepción de la naturaleza social de la actividad del hombre y los procesos productivos del pensamiento creador. El pensamiento productivo a diferencia del pensamiento reproductivo, se caracteriza por la capacidad del hombre para apropiarse de lo nuevo, de lo desconocido; por esta razón, desarrollar este tipo de pensamiento implica lograr un aprendizaje basado en la búsqueda, en la solución de problemas, y no en la simple asimilación de los conocimientos ya elaborador por el profesor, por lo tanto, si el núcleo básico de todos los procesos del desarrollo psíquico de la personalidad, lo constituyen los procesos productivos, estos son los considerados elementos rectores de la enseñanza problémica.

Su base pedagógica, está fundamentada en la enseñanza desarrolladora cuya esencia radica en la necesidad de desarrollar las capacidades cognitivas de los estudiantes. Lograr una enseñanza desarrolladora, presupone no solamente una sólida asimilación de los conocimientos, sino que a su vez produzcan el desarrollo integral de la personalidad de los alumnos, por ser este un objetivo fundamental de la enseñanza problémica y constituir un verdadero motor impulsor de desarrollo, nos confiere una gran responsabilidad al profesor que dirige el proceso docente-educativo, el que debe organizar de manera activa y creadora las actividades del alumno para producir este desarrollo.

P. Ya. Rubinstein es preciso cuando plantea que "el hombre empieza a pensar solo cuando surge la necesidad de emprender algo".

Los trabajos de J. Piaget (1896-1980), sobre psicología genética y epistemología, buscaban una respuesta a la pregunta fundamental de la construcción del conocimiento. Sus distintas investigaciones llevadas a cabo en el dominio del pensamiento infantil, le permitieron poner en evidencia que la lógica del niño no solamente se construye progresivamente, siguiendo sus propias leyes sino que además se desarrolla a lo largo de su vida pasando por distintas etapas, antes de alcanzar el nivel adulto. Se considera la contribución esencial de Piaget al conocimiento, el haber demostrado que el niño tiene maneras de pensar especificas que lo diferencian del adulto.

Vigosky (1995), también está de acuerdo con Piaget, en el sentido de que no aprendemos individualmente, siempre lo hacemos en grupo, por imitación, interiorización social o bien interacción grupal.

La presente investigación se fundamenta en la teoría denominada Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, que actualmente es desarrollada en España por Juan D. Godino y colaboradores: Carmen Batanero, Miguel R. Wilhelmi, Vincenç Font, Ángel Contreras y

Delisa Bencomo; Luque y Ordoñez (2005) la se inicia a partir de 1994 y a la fecha, es una teoría que actualmente está en construcción.

Entre 1994 y 1998, los autores desarrollan sus propias versiones de las nociones de "***significado institucional***" y "***significado personal***" de un "***objeto matemático***".

Posteriormente en el periodo comprendido entre 1999 y 2004, se profundiza el concepto de "objeto matemático" introduciendo sus cinco facetas o dimensiones duales. Son consideradas fuertemente en esta teoría, la ontología y la semiótica. Así como el análisis de tipo semiótico para la revisión de textos.

Y a partir del 2005 en adelante, se ven preocupados por proponen modelos sobre instrucción matemática, para el ambiente escolar.

Paralelamente se proponen seis dimensiones; cada una modela un proceso con sus respectivas trayectorias y estados. Finalmente, se proponen los criterios de idoneidad para el proceso de instrucción matemática.

El enfoque Ontosemiótico (EOS) es configurado por los tres modelos teóricos siguientes:

Teoría de los significados sistémicos, institucionales y personales de los objetos matemáticos. TSS (Godino, Batanero, 1994) que es el equivalente al componente epistemológico de la teoría de Chevallard (1992, 1997), debido a que ambas parten de los presupuestos de tipo antropológico sobre las matemáticas, (Wittgenstein, 1987). Se considera a las matemáticas como una actividad humana mediada por instrumentos lingüísticos o de otro tipo y con relación a los contextos institucionales, así como socioculturales.

Teoría de las funciones semióticas. TFS (Godino, 2002), que es el inicio de una teoría semiótico-cognitiva, que también se basa en presupuestos lingüísticos (Hjemslev, 1971; Eco, 1979) basada en las entes primarias con sus diferentes facetas y dimensiones del conocimiento.

Teoría de las configuraciones didácticas. TCD (Godino, Contreras y Font, 2007). Aquí se modela la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto por seis subprocesos: el epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus trayectorias y sus respectivos estados potenciales.

Para avanzar en el análisis de esta Teoría se requiere definir algunos términos que utilizaremos a lo largo del desarrollo de esta investigación.

_ _ _ _ _ _

2.2 Objetos Matemáticos

¿A que llamamos objetos matemáticos? Situados desde la perspectiva del EOS, un *objeto matemático* es aquel que surge de un sistema de prácticas (acciones) que realiza una persona, si las realiza sola les asigna un *significado personal* o bien dichas prácticas pueden ser compartidas en el seno de una institución, en el aula (por lo que adquieren un *significado institucional*). Dichas prácticas están asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado. (Godino, 1994)

Los sistemas de prácticas, sean operativas o discursivas siempre están ligadas a campos o tipos de problemas. Se consideran *prácticas matemáticas* a toda actuación o expresión (verbal, grafica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334)

2.2.1 Noción de situación-problema.

La Noción primitiva.

Las situaciones-problemas en matemáticas, promueven y contextualizan la actividad matemática. Son situaciones que incluyen problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, ejercicios, etc. Son las tareas que inducen a la actividad matemática.

Los problemas "no vienen solos", sino que se agrupan en tipos, clases o **campos de problemas.**

2.2.2 Objeto-Matemático. *La Noción derivada.*

La Ontología.- Estudia la naturaleza de los objetos matemáticos. Pragmatismo-realismo. Tomar posición. Si los objetos matemáticos no existen fuera de nuestra realidad de donde vienen? Son emergentes de los sistemas de prácticas.

Epistémico. De donde surgen los objetos matemáticos, (O-M)? Emergen de las prácticas a lo largo del tiempo. Desechando las practicas no eficientes y sobreviviendo las que llamaríamos significativas, o bien, prototípicas (de un grupo)

Se considera un O-M **Institucional** como ***emergente*** del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas.

Se considera un O-M **Personal** como ***emergente*** del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.(Godino,1994)

Significado Institucional de un O-M es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto.

Significado Personal de un O- M es el sistema de prácticas personales para resolver el campo de problemas de las que emerge el objeto.

Tipología de los Objetos Matemáticos:

Situaciones-problemas: (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra o intramatemáticas, ejercicios); son las tareas que inducen la actividad matemática.

Acciones: procedimientos del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

Conceptos: dados mediante definiciones o descripciones (numero, punto, recta, media, función,..)

Propiedades: o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Argumentaciones: que se usan para validar y explicar las proposiciones (deductivas o de otro tipo)

Lenguaje: (términos, expresiones, notaciones, gráficos,..) Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

(Godino, 2002)

2.2.3 Las cinco facetas duales de los objetos matemáticos.

a) *Personal/Institucional*.- Se denomina objeto personal a la manifestación de un sujeto en forma individual como respuesta a una prueba de evaluación, o puede ser también de una tarea escolar. (se consideran portadores de rasgos idiosincrásicos de su conocimiento). Los objetos institucionales son todos los documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase. (tienen connotaciones normativas o convencionales), esto es objetos que son usados como referencia en el proceso *enseñanza/aprendizaje*.

Las interacciones de un grupo de estudiantes pueden dar lugar a acuerdos en el seno del grupo produciendo “maneras de actuar y hablar” compartidas con cierto grado de regulación interna (micro institución).

b) *Elemental/Sistémico.*- Se dice que un objeto matemático es elemental cuando aparece en unitario, indescomponible en el contexto dado. Y de forma contraria el objeto es sistémico cuando se presenta compuesto, estructurado, cuando es analizable en elementos constituyentes.

Con lo anterior se trata de tomar en cuenta el carácter recursivo y complejo del conocimiento matemático.

Cuando nos interrogamos por cualquier objeto (problema, acción, concepto, propiedad, argumento, lenguaje) aparece un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos y en la trama de relaciones que los relacionan.

c) *Ostensivo/No ostensivo.*- Un objeto ostensivo es una palabra escrita, un grafico, etc., puede ser pensado, imaginado por una persona, o puede estar implícito en un discurso matemático institucional. Por ejemplo el signo de multiplicar en la notación algebraica. Un cálculo puede ser realizado por una persona de manera ostensiva o mentalmente, una computadora calcula internamente de manera no ostensiva, esto es como si los objetos ostensivos también pudieran funcionar como no ostensivos.

Esta paradoja la resolvemos hablando de objetos lingüísticos (lenguaje en sus diversos registros) como entidades funcionales primarias, las cuales pueden ser funcionales, primarias, ser ostensivas o no ostensivas tanto si son considerados como objetos personales o institucionales.

d) *Ejemplar/Tipo.*- También lo podemos denominar extensivo/intensivo. La distinción entre ejemplar y tipo, es clásica en la teoría del lenguaje. Es una distinción lingüística de la distinción concreto/abstracto, que se puede aplicar no solo a los objetos conceptuales, sino a cualquiera de los seis tipos de entidades primarias y secundarias.

Es una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas derivadas de la confusión entre ejemplo y tipo.

Se debe precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo) o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo de componentes de un sistema.

Expresión/Contenido ó Significante/Significado.- Los distintos objetos descritos con sus diversos "apellidos" que les asignamos según su naturaleza y función, no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras. Las distintas formas de expresión/contenido, nos permiten tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática (Hjemsler, 1943).

La siguiente figura muestra los componentes y las facetas de la cognición matemática.

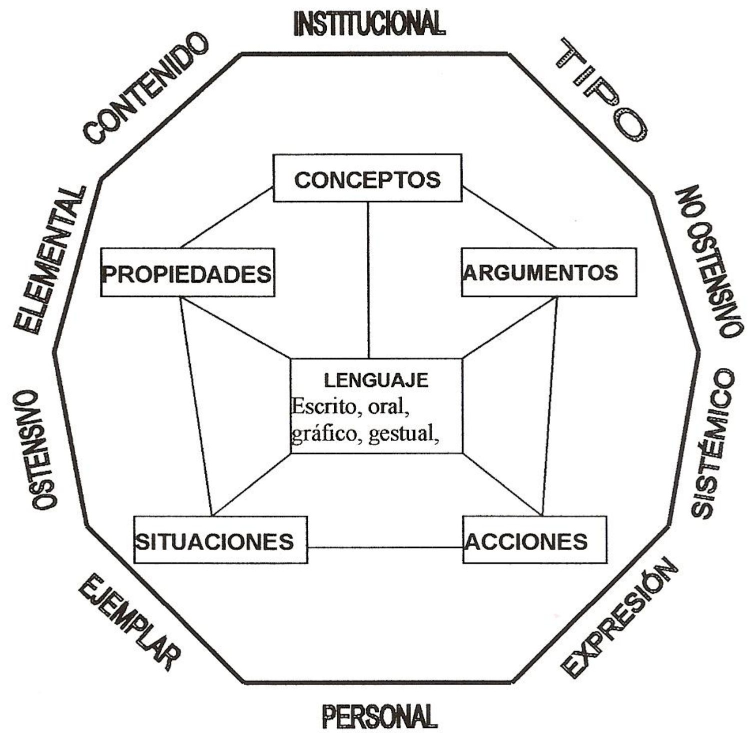


Figura 5. Síntesis de los elementos y facetas de los objetos matemáticos (Godino, 2006).

2.3 Modelización de instrucción matemática.

Para formular la modelización de la instrucción matemática, esta se ha dividido en trayectorias: las cuales se revisan a continuación:

Trayectoria y configuración epistémica

Se denomina análisis epistémico de un proceso de instrucción. Se trata de descomponer en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa en forma efectiva. Esto requiere identificar los objetos matemáticos que se ponen en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen ente los mismos. Con este fin se introducen trayectorias epistémicos y estados potenciales de dichas trayectorias.

El análisis de las trayectorias epistémicos de un proceso instruccional permitirá caracterizar e significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica.

Trayectoria y configuración docente

Se utiliza la expresión “trayectoria docente” para referirnos a la secuencia de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio de un contenido o tema matemático. Cuando tales actividades se circunscriben en una situación-problema (o tarea) especifica estamos hablando de “configuración docente”. Estas actividades o acciones del profesor son una respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales propondremos después su caracterización.

Trayectoria y configuración discente

De forma similar al caso de las trayectorias epistémica y docente, interesa definir el término “configuración discente”, como el sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémico. Posteriormente se señalaran las relaciones que pueden constituir un primer inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante durante el proceso instruccional.

Configuraciones y trayectorias didácticas.

En el proceso instruccional se podrán utilizar diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio. Esto incluirá medios de presentación de la información en clase (pizarra, retroproyector, etc.) dispositivos de cálculo y graficación (calculadora, ordenadores), materiales manipulativos, etc. El uso de estos recursos (tipo, modalidad, secuenciación, articulación con los restantes elementos del proceso, etc.) debe ser objeto de atención en la práctica y en la investigación didáctica. La noción de trayectoria didáctica o mediacional pretende servir de herramienta para analizar los usos potenciales y efectivamente implementados de los medios instruccionales y sus consecuencias cognitivas.

Como las anteriores también podemos mencionar otras trayectorias como son: La Trayectoria cognitiva y la emocional. Las cuales por lo pronto no son objeto de estudio en esta investigación.

Idoneidad didáctica de procesos de estudio.

Las nociones teóricas introducidas en los apartados anteriores proporcionan herramientas para realizar análisis descriptivos pormenorizados de los procesos de instrucción matemática, lo que a su vez abre la posibilidad de encontrar explicaciones de las regularidades observables. Pero la didáctica de las matemáticas tiene que afrontar además el reto de la ingeniería didáctica, entendida como la disciplina que orienta el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática.

Consideremos que la ideonidad global de una configuración didáctica, y de las trayectorias didácticas, se debe valorar teniendo en cuenta las diversas facetas o dimensiones que serán propuestas posteriormente.

2.4 Análisis semióticos

Los análisis semióticos tienen el propósito de determinar o caracterizar significados que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Se requiere que la información a analizar esté en forma de texto. Por tanto entrevistas, grabaciones de clases, etc. deberán estar transcritas.

El análisis ***ontológico-semiótico*** de un texto matemático requiere su descomposición en unidades, identificar las entidades en juego y las funciones semióticas (de signo) que se establecen entre los mismos por los sujetos. Ejemplo: cuando el texto corresponde a las respuestas a exámenes o cuestionarios nos permite caracterizar los significados del sujeto ante el problema. Esto es al comparar con los significados institucionales correspondientes, es posible detectar discrepancias o conflictos de significados (semióticos).

Sea el caso de *analizar un texto matemático*, las unidades naturales U (Godino, 2003) para descomponerlo corresponderán a una frase u oración. Las unidades U, se deberán agrupar usando como criterio los elementos primarios del significado: las situaciones-problemas, las acciones, los conceptos, propiedades, argumentos y registros de lenguaje. Otra forma sería agruparlos por aspectos de praxis (competencia) y logos.- (comprensión).

Si lo que se desea *analizar* es la transcripción de *una clase de matemáticas*, se deberá descomponer en unidades naturales U (Godino, 2006), tal como se especifica en el párrafo anterior. Estas unidades podrán ser agrupadas en *unidades epistémicas* cuyos cambios obedecerán a cambios de elementos semejantes al párrafo anterior. Los cuales a otro nivel podrán ser agrupadas en *configuraciones epistémicas*. Una configuración está ligada a la resolución de una situación problémica. Las unidades U, también pueden ser agrupadas en *unidades docentes* cuyos elementos de identificación y cambio serían: planificación, motivación, asignación, regulación, evaluación e investigación. A su vez se pueden reagrupar alrededor de la figura *configuración docente* que correspondería a la actuación del profesor respecto a la solución de una situación problema. De forma correspondientemente habrá una actuación del alumno frente a la configuración epistémica, que se denomina *configuración discente,* con unidades discentes y con los elementos: aceptación, exploración, formulación, recuerdo, argumentación, recepción, demanda, ejercitación y por último la evaluación.

Los seis elementos mencionados en párrafos anteriores: Situaciones, acciones, conceptos, propiedades, argumentos y lenguaje, de acuerdo con el juego de lenguaje en el que participan, pueden ser consideradas desde cinco facetas o dimensiones duales: 1. Personal-institucional, 2.Ostensiva-no ostensiva, 3.Ejemplar-tipo. 4. Elemental-sistémica y 5. Expresión-contenido.

El estudio lo pretendemos abordar desde dos enfoques: *Semiométrico* y *Ecológico.*

En un estudio semiométrico se requiere caracterizar aquellos problemas que se presentan a los estudiantes para generar el significado propio de las ecuaciones diferenciales; revisar que tipo de representaciones se utilizan con este fin, buscar los conceptos y argumentos utilizados; el lenguaje, etc. En esta parte sólo se pretende caracterizar el objeto matemático de estudio. Y por otro lado, desde el enfoque ecológico: Si continuamos centrados en el objeto, damos cuenta que para analizar, para interpretar y resolver el campo de problemas que requiere nuestro objeto de interés, las ecuaciones diferenciales no son un objeto aislado, requieren de conocimientos previos, existen conceptos que lo rodean, todos los conocimientos que se ponen en juego para entender el concepto de ecuación diferencial: tales como derivar, integrar, etc., se le denomina su hábitat. Los prerrequisitos necesarios para estudiar los problemas que se resuelven utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. Así como los objetos matemáticos que interactúan con dichos conocimientos previos para la posibilidad de su desarrollo.

El enfoque Ontosemiótico de la Cognición para la Instrucción Matemática, se basa en:

Una concepción pragmática u operacional del significado. "El verdadero significado de una palabra ha de encontrarse observando lo que un hombre hace con ella, no lo que dice acerca de ella", "el significado de una palabra es su uso en el lenguaje". (Godino, 2003; Wittgenstein 1953)

Un enfoque antropológico: Considera la matemática como una actividad humana. Que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones por lo que todo conocimiento es relativo a una institución. (Godino, 2003; Chevallard, 1992)

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta un triple aspecto de la matemática:

- Actividad de resolución de problemas, socialmente compartida.
- Lenguaje simbólico
- Sistema conceptual lógicamente organizado.

(Godino, 1994).

Dentro del enfoque del EOS, se denomina **práctica matemática**, a toda actuación o expresión (verbal, grafica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, 1994).

La práctica la puede desarrollar: tanto una persona, o una institución

Una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. (Godino, 1994).

Significados Institucionales: Implementado: Sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

Evaluado: Subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Pretendido: Sistema de prácticas consideradas en la planeación del proceso de estudio.

Referencial: Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. Toma en cuenta la epistemología del objeto. (Godino,2003)

En virtud de que el planteamiento del problema, así como los objetivos de la investigación involucran de manera preponderante la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos, se habrá de revisar y analizar las teorías cognitivas de Juan Díaz Godino, a la par de la enseñanza tradicional y sus efectos, así como sus enfoques.

2.5 Elementos teóricos de la resolución de problemas

En esta sección hacemos énfasis en la importancia de una herramienta clave del análisis cognitivo en educación matemática. Esta noción denominada “sistema de prácticas operativas y discursivas de una persona ante un cierto tipo de situaciones-problemas” (D. Godino, 2003).

Se entiende lo anterior cuando un estudiante interactúa con una situación problémica (problema de tipo rutinario o no rutinario), este echa mano de todo el bagaje de significados que él conoce para poder resolver dicho problema, de esta noción se desprende también que un Objeto Matemático (OM) (Institucional o personal) es un emergente del sistema de prácticas (sociales o personales) asociadas a un campo de problemas. El Significado Institucional (SI) o el Significado Personal (SP) de un OM corresponde al sistema de prácticas discursivas u operatorias asociadas al campo de problemas. El SI se puede descomponer en de sistema de referencia, planeado e implementado. Mientras los SP, los podemos descomponer en globales, declarados y logrados.

Los SI de referencia, se pueden encontrar en los documentos curriculares y en libros de texto y en sujetos tales como el profesor, el coordinador de área, autoridades, etc. El SI planeado es lo pretendido por el profesor para su clase y el SI implementado es lo realmente efectuado en ella.

Los Objetos Matemáticos se clasifican en: Lenguaje, Problemas, Conceptos, Procedimientos, Proposiciones y Argumentos. (Godino y Batanero, 1994; Godino et al.2007).

Los objetos matemáticos (OM) son identificados como entidades complejas que se van construyendo de manera progresiva y se van adecuando, enriqueciendo y determinando a partir de la actividad reflexiva en la resolución se ciertos tipos o campos de problemas. Los OM son el resultado de la construcción humana y estos pueden cambiar a lo largo del tiempo, ya que van siendo dotados por significados diferentes tanto por personas como por instituciones diferentes.

Existen muchas definiciones validas de problema, entre ellas podemos mencionar las de Lester (1980) y Simon (1978) respectivamente:

- “Una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución”
- “Un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente”.

Para el tema que nos ocupa consideraremos que una situación-problema es aquella circunstancia que requiere y pone en juego actividades de matematización.

Capítulo 3

Metodología

3.1 Acciones para desarrollar la investigación.

Las investigaciones desarrolladas dentro del enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, deben combinar diversos métodos y técnicas para las distintas fases de la investigación, de acuerdo al problema abordado.

La investigación que se llevó a cabo se identifica como "ecología de significados" y el foco de atención es la búsqueda de relaciones entre los diversos tipos de significados y los factores que los condicionan, dado que la importancia de nuestro trabajo es establecer que cuando un estudiante se enfrenta a la resolución de un problema con ecuaciones diferenciales, requiere echar mano de los objetos intervinientes que quizá para el no están tan claros, o bien, tan a la mano, a la hora de resolver un problema de este tipo.

A pesar de que el curso de ecuaciones diferenciales es considerado un curso de tipo integrador, pues en él se están retomando saberes de cálculo, algebra e incluso física general, cuyas relaciones ecológicas son fuertes, es importante resaltar nuestra premisa de que al momento de enseñar ecuaciones diferenciales, se está descuidando el fortalecimiento de estas relaciones. Y esto es un factor que hace poco eficaz la enseñanza de las mismas. En la medida de que se conozcan y se replanteen las relaciones entre los objetos intervinientes, se podrán diseñar cursos para enfatizar sus significaciones. Cursos que incluyan los diferentes contextos y la forma de transitar entre ellos, tales como darle al estudiante la información en tablas, graficas, en lenguaje Natural (con términos técnicos) y que el alumno los entienda. Debemos dejar de considerar que el alumno lo tiene todo claro, **por ello hacemos énfasis en lo importante que es establecer las relaciones entre los diversos objetos matemáticos intervinientes en el análisis, modelación y resolución de las situaciones problémicas.**

Para lograr el objetivo se emplearon en cada caso los enfoques y técnicas de recogida y análisis de datos pertinentes para cada etapa de la investigación. Como lo que se desea es indagar todo lo concerniente a las situaciones desarrolladas al poner en juego un tipo de problemas en el salón de clase, el estudio requiere registrar de manera sistemática y fiable la trama de hechos didácticos y matemáticos ocurridos. Las actuaciones del profesor, estudiantes, elementos de significados puestos en juego durante la instrucción, las interacciones, etc.

a) Estudio bibliográfico para definir el campo de problemas que se resuelven utilizando las ecuaciones diferenciales de primer orden a partir de los problemas que aparecen en los textos más utilizados.

Se realizó la búsqueda, caracterización y clasificación de problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales de primer orden, de uso común en los textos utilizados para el curso de ecuaciones diferenciales, para identificar los elementos intervinientes que se presentan al modelar y resolver ecuaciones diferenciales y sus relaciones ecológicas.

b) Identificar en el currículo el momento de la utilización de los problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales en la etapa disciplinaria y la profesional.

Se realizo la búsqueda, caracterización y clasificación de algunos problemas que se resuelven con ecuaciones diferenciales en etapas posteriores.

Un estudio, para definir los significados epistémicos de los problemas anteriores.

Se realizó un rastreo Bibliográfico de como surgen las primeras intervenciones de las matemáticas a través de la historia, como se resolvían en la antigüedad los problemas. Cuando no se contaba con el Cálculo, o bien después de este.

Caracterización de los significados personales de estudiantes de ingeniería sobre la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para tal efecto, primero se diseñaron algunas encuestan que nos permitieron rescatar información, tanto sobre los conocimientos previos que dominan los estudiantes al iniciar el curso como los que obtuvieron después de la instrucción matemáticas del tema I, de ecuaciones diferenciales.

Lo anterior se llevó a cabo mediante las diversas técnicas y métodos de recogida de datos como son: observación, encuestas y la puesta en escena de situaciones problémicas. En particular se consideró el estudio de casos, ya que permite mostrar las consistencias de los significados personales sobre los objetos puestos en juego. Nos interesa obtener información tanto por parte de los estudiantes como de los profesores, los textos utilizados y la parte institucional (curricular).

Se hizo con la intención de poner en evidencia del porque los conocimientos alrededor de las ecuaciones diferenciales son de gran importancia para desarrollar una variedad de habilidades sobre ellos.

Capitulo 4.

Resultados

4.1 Problemas que se resuelven utilizando las ecuaciones diferenciales de primer orden. Sus significados personales e institucionales.

El Análisis Ecológico consiste en revisar las relaciones implícitas y explicitas dentro de los elementos que aparecen cuando un estudiante trata de resolver problemas. Cuáles son los significados que él pone en juego, o bien, utiliza para dar explicación a los nuevos conceptos que aparecen en dicho ejercicio; por ejemplo el caso de una expresión matemática, un signo, etc. Se considera conflicto semiótico a la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción, puede explicar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

Lo que hace tanto el autor del texto como el profesor, el autor al escribir su libro y el profesor al impartir clase, está basado en sus creencias de lo que es el objeto de estudio, como creen que las personas y que las cosas se aprenden, entonces cuando alguien lee un texto, cuando se analiza un texto, se puede hacer tratando de rescatar cual es la idea del autor, también se puede analizar bajo la propia versión y así valorar el texto. De igual forma cuando se va a una aula y se observa a un profesor dar su discurso, entonces igual se tienes dos posibilidades, de darse cuenta que piensa el al respecto de que es la matemática y como se aprende o puedes hacer un análisis bajo tu propia versión de que es la matemática y como se aprende y de ese modo se puede estar de acuerdo o no con su forma de manejar dicho proceso de enseñanza. Basados en nuestra experiencia, podemos asegurar que los profesores preparan sus discursos matemáticos, siempre apoyados en un libro de texto de su preferencia. Por lo anterior la importancia de revisar cuales son aquellos textos más utilizados por dichos profesores y cuál es la metodología de enseñanza que en ellos se plantea.

Si un profesor cree que la matemática son los conceptos y los métodos y que estos se aprenden cuando alguien nos los dice, entonces el va al aula y dice "muchachos hoy vamos a ver ecuaciones diferenciales de primer orden…y empieza un discurso, empieza dando la definición literal del texto, *"una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes…"* él piensa que esa es la matemática eso que él escribe y que se aprende cuando él lo dice. Pero si por otro lado el maestro cree que así no se aprende, que se aprende cuando la persona interacciona con el objeto de estudio, que explora y conjetura, dialoga, etc., y entonces el profesor va al aula y genera un ambiente proponiendo una situación problémica, en lugar de dar un discurso el expone el tema, se analiza, se discute y él asume que el aprendizaje es una actividad o más bien es consecuencia de una actividad que realiza el sujeto que está aprendiendo, por mencionar otro ejemplo, si alguien cree que aprender a jugar básquet ball, es aprender las reglas del juego, entonces el profesor va a sus clases de básquet ball, y dice: "*el básquet ball se juega con estas reglas y empieza a numerar las reglas que se requieren para jugar básquet ball,*" y el asume que sus alumnos están aprendiendo a jugar básquet ball, pero si alguien cree que el básquet ball se aprende jugando, entonces se lleva a los estudiantes a la cancha de básquet ball y les da el balón. Cuando se lee a un autor Y a uno le puede parecer bien o no, si yo veo a un profesor que y dice muchas cosas y él cree que porque ya las definió, ya las clasifico y dijo muchas cosas de las ecuaciones diferenciales, cuales son las de primer orden, la de segundo, las de condiciones iniciales y como ya dijo todo eso, entonces les dice les voy a poner un ejemplo y el desarrolla el ejemplo y les habla de cómo resolver las ecuaciones, pues él piensa que así se aprende a resolver ecuaciones diferenciales. Después como él cree que ya aprendieron, porque discutieron cuales son las ecuaciones de primer orden y sus características, les pone una lista de ejercicios y dice ahora háganlos ustedes, les pide que los resuelvan.

Cuando los profesores hacen eso y los alumnos aprenden, los alumnos se convencen que esa es la forma de aprender, lo que pasa inadvertidos es que gracias a que les puso ejercicios y que los estudiantes se pusieron a resolverlos, que gracias a que ahí fue donde se encontraron las dificultades, y preguntaron, discutieron, gracias a eso están aprendiendo, pero no queda claro si esas dificultades que tienen al hacerlos los ejercicios, son producto de su ignorancia o si son parte natural del proceso de aprendizaje. Por lo tanto de lo que aquí se trata es que de rescatar la versión del autor respecto a cuál es su propuesta de enseñanza, que piensa el autor del texto que se tiene que hacer para que los estudiantes se apropien de los objetos de estudios, se puede hacer análisis de problema en un momento posterior, pero antes tenemos que analizar todo lo que el autor expone, como realizó su discurso y se debe revisar todo lo que antecede a manera de introducción para abordar el problema y como piensa que se debe preparar el terreno.

A continuación se presenta un grafico que muestra un esquema de las acciones principales del análisis ontológico semiótico:

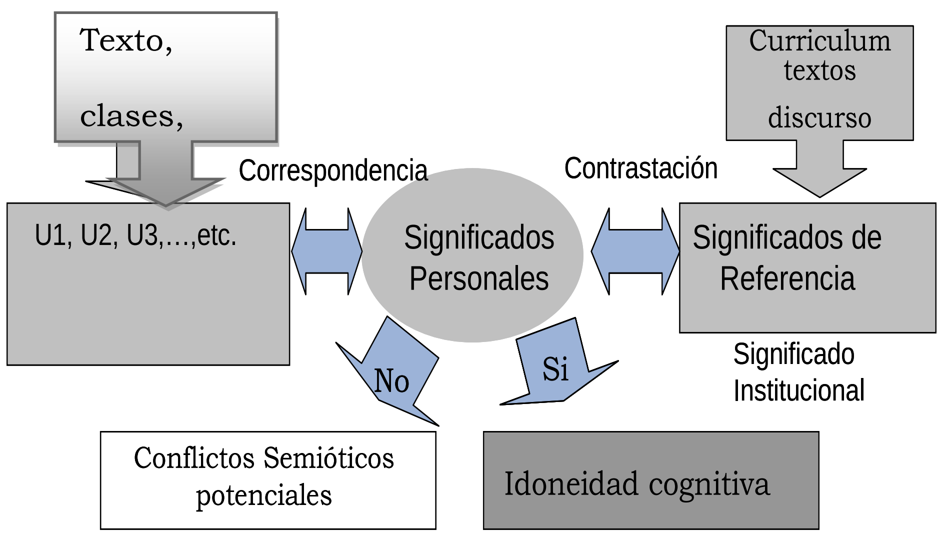


Fig. 7 Análisis Ontológico-semiótico

Los elementos primarios del EOS son: El lenguaje, las situaciones-problémicas, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos. Los elementos anteriores, de acuerdo al rol de lenguaje con que participan pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal-institucional, Elemental-sistémico. (Godino, 1994).

Se seleccionaron problemas típicos, de crecimiento y de temperatura, del texto de Ecuaciones Diferenciales de Dennis G. Zill (Pág. 96-97). Y del Simmons, George F. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas.

Debido a que el primero es uno de los más utilizados por los profesores que imparten este curso en la Facultad de Ingeniería y el segundo adquiere también cierta relevancia pues contiene una buena cantidad de reseñas históricas de interés para motivar el estudios de los temas a partir de cómo los va desarrollando el autor.

Para el análisis de los problemas, cada uno de ellos, se ha dividido en unidades, que están relacionadas en función de los elementos primarios del EOS.

El lenguaje, se revisó el lenguaje utilizado en el texto para ver de qué tipos son las notaciones que aparecen, si contiene expresiones representadas en forma de gráficos o numérico.

Las situaciones, en esta parte se revisa como son presentados o abordados los ejemplos de problemas en el texto. *Las acciones o procedimientos*, que hace el autor del texto para resolver ejemplos tipo. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino, 1994). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

4.2 Análisis de Textos

El autor de un libro de texto de Ecuaciones Diferenciales, que es muy utilizado en los cursos a nivel licenciatura para Programas de Ingeniería, hace lo siguiente a la hora de abordar un problema que presenta resuelto:

Veamos el caso de uno a cual el autor denomina ***Crecimiento bacteriano.***

Este es el primer ejemplo que aborda el autor en la sección que el denomino como Modelado con Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. A manera de introducción primero trata de ubicar en el contexto al lector (estudiante o profesor) dando una pequeña introducción al problema, enunciando el numero de ecuación (3) y la sección (1.3) en que se vio con anterioridad muchos modelos matemáticos, como los del crecimiento demográfico, la desintegración radioactiva, las reacciones químicas, etc. Los cuales son modelados con ecuaciones diferenciales de primer orden, se menciona que en la sección 2.3 “al multiplicar la forma estándar de una ecuación lineal,

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = f(x),$$

Por el factor integrante $e^{\int P(t)dt}$, se escribe la ecuación diferencial en la forma $\frac{d}{dt}\left[e^{\int P(t)dt}y\right] = e^{\int P(t)dt}f(t)$. La ecuación se resuelve integrando ambos lados de esta ultima forma".

Posteriormente el autor escribe "*el problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(t_0) = x_0$$

En donde k es una constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos en los que intervienen crecimiento o decaimiento o desintegración". A continuación el autor nos remite de nuevo a la sección 1.3 donde se describió que "en biología, se ha observado que en cortos periodos la rapidez de crecimiento de algunas poblaciones (como las de bacterias o animales pequeños) es proporcional a la población presente en el tiempo t."

El paso siguiente es enunciar el problema utilizando solamente lenguaje verbal.

Crecimiento Bacteriano

Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t=1 h. la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$, si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

De aquí se continúa a presentar la solución del problema:

Solución

Que pretende el autor con su forma de abordar el problema?. El autor esta considerando que el lector comprende, entiende y recuerda todos los términos que aparecen en la definición verbal, en ningún momento el autor describe el, o sea, porque está cambiando el símbolo $\propto$ por el símbolo de igual mas una k.

La tabla 1, muestra en la primera columna las unidades de análisis; la segunda describe el tipo de elemento de significado y en la última columna aparecen las observaciones correspondientes. El criterio para definir cada unidad de análisis, fue el cambio de elemento de significado, el cambio de notación, el uso o identificación de una propiedad, o la descripción, sistematización y validación.

A continuación se presenta la tabla 1, como resultado del análisis realizado a uno de los problemas de Crecimiento.

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_0	Crecimiento y Decaimiento	Elemental-Sistémico	Titulo de la introducción
U_1	El problema de valor inicial: $\frac{dx}{dt} = kx$ (1) $x(t_0) = x_0$	Situación-problémica sistémica, que se puede subdividir en: U_{1-1} lenguaje natural + U_{1-2} lenguaje simbólico	El autor hace mención a un concepto revisado en una unidad anterior (conocimiento previo). Utiliza una situación sistémica. No explicando los términos involucrados.

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_2	en donde k es una constante de proporcionalidad	Concepto expresado en lenguaje natural	El autor asume que el estudiante comprende lo que significa *constante de proporcionalidad*, lo cual no siempre es cierto.
U_3	Se emplea como modelo de distintos fenómenos en los que intervienen crecimiento o decaimiento o desintegración	Situación sistémica expresada en lenguaje natural	Aquí el autor le asigna un sentido a la expresión anterior (un uso)
U_4	Haciendo mención a la primera sección del texto "en biología se ha observado que en cortos periodos, la rapidez de crecimiento de algunas poblaciones (como bacterias o animales pequeños) es proporcional a la población presente en el tiempo t.	Se define la situación en lenguaje natural utilizando dos conceptos Se puede subdividir en: U_{4-1} rapidez de crecimiento U_{4-2} proporcional a la población presente	El autor menciona dos conceptos asumiendo que el estudiantes los sabe interpretar y relacionar: Rapidez y proporcionalidad
U_5	Si conocemos una población en cierto tiempo inicial arbitrario t_0 la solución de (1) nos sirve para predecir la población en el futuro – esto es, para $t>t_0$.	Situación general expresada en lenguaje natural	El autor pretende reforzar las afirmaciones anteriores en forma general de cuando usar la ecuación (1) y para que nos sirve.
U_6	Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t=1h, la cantidad medida de bacterias es 3/2 P_0. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.	U_{6-1} Situación problema Especifico expresada en lenguaje natural U_{6-2} rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) (concepto)	El autor supone que el lector deberá interpretar este problema presentado en lenguaje natural e identificar y relacionar los datos con la expresión utilizada para su resolución

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_7	**Solución**: primero resolveremos la ecuación diferencial (1) reemplazando el símbolo x por P	Procedimiento expresado en lenguaje natural	Falta información: por qué se están cambiando las variables? No menciona la relación entre el caso general con lo particular.
U_8	Si $t_0=0$, la condición inicial es $P(0)=P_0$ A continuación usaremos la observación empírica que $P(1)=3/2P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k	Proposiciones expresadas en lenguaje natural	Escrita de esta manera la información no es fácil para el lector reconocer los datos del problema.
U_9	Observe que la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt}=kP$, es separable y lineal al mismo tiempo.	Proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	Se motiva al lector a relacionar el modelo matemático con dos de los métodos vistos previamente.
U_{10}	Cuando se escribe en la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dP}{dt}-kP=0$, Se aprecia por inspección, que el factor integrante es e^{-kt}	U_{10-1} Procedimiento expresado en lenguaje natural U_{10-2} proposición expresada en lenguaje simbólico. U_{10-3} proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por el lector. El registro simbólico también.
U_{11}	Al multiplicar ambos lados de la ecuación por este término, e integrar, se obtiene $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P]=0 \quad y \quad e^{-kt}P=c$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Se asume que el lector reconoce el método anterior y se omiten los pasos completos del procedimiento de resolución de la ecuación.
U_{12}	Por consiguiente, $P(t)=Ce^{kt}$ ahora sustituiremos las condiciones iniciales del problema, cuando t=0, $P(0)=P_0$, por lo que $P_0=Ce^0 \Rightarrow P(t)=P_0e^{kt}$.	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	En esta parte se presentan las sustituciones de las condiciones iniciales, para obtener la solución particular del problema

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_{12}	Cuando t =1, $P(1)=3/2P_0$, luego entonces $\frac{3}{2}P_0 = P_0 e^{k(1)} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^{k(1)}$ por lo que $k = Ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx$ 0.4055, con lo cual nos queda la siguiente ecuación $P(t) = P_0 e^{0.4055t}$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Los procedimientos son claros pero de nuevo se valen de algunas simplificaciones que para el estudiante no son obvias, se da por hecho que se cuenta con el dominio de algunas reglas de los logaritmos y/o exponenciales.
U_{13}	Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias despejamos t de $3P_0 = P_0 e^{0.4055t} \Rightarrow$ $0.4055t = Ln3$, y así tenemos: $t = \frac{Ln3}{0.4055} \approx 2.71 horas$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Aquí de nueva cuenta se presentan los procedimientos, con las omisiones mencionadas en él la unidad anterior.

Tabla 1. Análisis de un problema tipo de Crecimiento

El mismo autor del libro de texto de Ecuaciones Diferenciales, para Programas de Ingeniería, hace lo siguiente a la hora de abordar otro problema que presenta también resuelto:

Veamos el caso de uno al cual el autor denomina ***Enfriamiento de un Pastel***.

Primero trata de ubicar en el contexto al lector (estudiante o profesor) dando una pequeña introducción al problema, enunciando el numero de ecuación (3) y la sección (1.3) en que se vio con anterioridad la formulación matemática de la Ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un objeto, la cual expresa de forma inmediata, con la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Si nos regresamos a la sección de donde se obtuvo dicha ecuación, en la pagina el autor enuncia en forma verbal dicha Ley de la siguiente manera: "Según la Ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente". Posteriormente pasa a definir algunos términos antes de escribir el modelo resultante del enunciado anterior, define T(t), diciendo que representa la temperatura del objeto a cualquier tiempo t, a T_m la define como la temperatura constante del medio que rodea al objeto y el cociente $\frac{dT}{dt}$ es la razón con que la temperatura del cuerpo cambia. Sin más comentarios nos plantea las dos expresiones siguientes:

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m, \ \ o\ sea\ \ \frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

En la primera expresa la relación de proporcionalidad entre dos cantidades y en la segunda matematiza la relación.

Y de inmediato aclara que k es una constante de proporcionalidad. Además comenta que en ambos casos ya sea calentamiento o enfriamiento si T_m es constante es razonable que k sea menor que cero. Esto no es tan obvio para los estudiantes, sin embargo para las concepciones del autor pareciera que es bastante obvio.

El paso siguiente es enunciar el problema utilizando solamente lenguaje verbal.

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300 grados F. Después de tres minutos, de 200 grados F, ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 70 grados F?

De aquí se continúa a presentar la solución del problema:

Solución

El autor esta considerando que el lector comprende, entiende y recuerda todos los términos que aparecen en la definición verbal de la Ley de Newton…

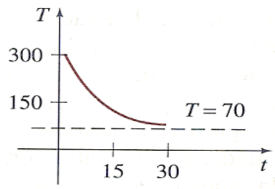
En ningún momento el autor describe el porqué las dos expresiones siguientes: $\frac{dT}{dt} \propto T - T_m,\ \ o\ sea\ \ \frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ son iguales, o sea, porque está cambiando el símbolo $\propto$ por el símbolo de igual mas una k. Se considera que algunos conceptos requieren ser abordados de modo que el estudiante los relaciones entre sí.

A continuación presentamos la Tabla No. 2 que representa el análisis ontológico semiótico realizado al ejemplo resuelto anterior.

	Descripción	Tipo	Observaciones
U_1	En la sección anterior, con la ecuación (3) vimos que la formulación matemática de la ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un cuerpo, se expresa con	Expone una situación general que se puede subdividir en: U_{1-1} lenguaje natural + U_{1-2} lenguaje	El autor asume que el estudiante adquirió el conocimiento previo Pero no se tiene la seguridad que el estudiante entiende todos los elementos que están

	la ecuación diferencial lineal de primer orden: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ (3)	simbólico en su faceta intensiva	involucrados
U_2	Enseguida aclara "en donde k es una constante de proporcionalidad"	Utiliza un concepto expresado en lenguaje natural	El autor asume que el estudiante comprende lo que significa *constante de proporcionalidad*, lo cual no siempre es cierto.
U_3	T(t) es la temperatura del objeto cuando t > 0 y T_m es la temperatura ambiente, o sea la temperatura del medio que rodea al objeto.	Proposición expresada en lenguaje natural	
U_4	Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300°F. Después de 3 minutos, de 200°F. ¿En cuánto tiempo se enfriara hasta la temperatura ambiente de 70°F?	Situación problema Especifico expresada en lenguaje natural Expone una situación particular en su faceta intensiva	El autor supone que el lector deberá interpretar este problema presentado en lenguaje natural e identificar y relacionar los datos con la expresión utilizada para su resolución
U_5	**Solución:** Utilizando la ecuación anterior del enfriamiento de Newton para la Tm =70°F, Por consiguiente debemos resolver el problema de valor inicial: $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$; donde T(0)=300	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	El autor asume que el estudiante adquirió el conocimiento previo Pero no se tiene la seguridad que el estudiante entiende todos los elementos que están involucrados.
U_6	Tenemos que determinar el valor de k de tal forma que T(3)=200 La ecuación anterior es lineal y de variables separables, a la vez.	Proposiciones expresadas en lenguaje natural	Escritas de esta manera no es fácil para el lector interpretar la información y reconocer los datos del problema.

	Descripción	Tipo	observaciones
U_7	Al separar las variables, $\frac{dT}{T-70}=kdt$ Integrando ambos lados de la igualdad Se tiene que $Ln\|T-70\|=kt+C$ $\Rightarrow$ $T(t)=70+Ce^{kt}$	U_{7-1} Procedimiento expresado en lenguaje natural U_{7-2} proposición expresada en lenguaje simbólico. U_{7-3} proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	Los procedimientos son claros pero de nuevo se valen de algunas simplificaciones que para el estudiante no son obvias, se da por hecho que se cuenta con el dominio de algunas reglas de los logaritmos y/o exponenciales.
U_8	cuando sustituimos T(0)=300, encontramos que C=230 entonces $T(t)=70+230e^{kt}$	U_8 Proposiciones expresadas en lenguaje natural y simbólico	En esta parte el autor asume que el lector interpreta la información y además omite algunos pasos del desarrollo
U_9	por último la determinación de T(3)=200 conduce a $e^{3k}=\frac{13}{23}....sea,k=\frac{1}{3}Ln\left\|\frac{13}{23}\right\|$ = -0.19018, así podemos escribir $T(t)=70+230e^{-0.19018}$ (4)	U_{9-1} Procedimiento expresado en lenguaje natural U_{9-2} proposición expresada en lenguaje simbólico. U_{9-3} proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	El autor asume que el lector interpreta la información y además omite algunos pasos del desarrollo No nos queda muy claro si el estudiante podrá llegar hasta aquí sin la ayuda del profesor
U_{10}	Observemos que la ecuación (4) no tiene una solución finita a T(t) = 70, puesto que el $Lim_{t\to\infty}T(t)=70$; no obstante en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo.	U_{10-1} Procedimiento expresado en lenguaje natural U_{10-2} Proposición expresada en lenguaje simbólico y natural ostensivo	Este problema no cuenta con una solución analítica, y el autor muestra dichos resultados haciendo énfasis en la situación.
U_{11}	¿Cuán largo es “largo”? No nos debe inquietar el hecho de que el modelo (4) no se apegue mucho a nuestra intuición física.	U_{11} Proposición expresada en lenguaje natural	El autor trata de dar explicación lógica al resultado encontrado en el paso anterior
U_{12}	Las partes a y b de la siguiente figura muestran que el pastel estará a la temperatura ambiente pasada una media hora.	U_{12} Proposición expresada en lenguaje natural	Aquí se añade una propuesta para resolver el problema que no tiene solución analítica

<table>
<tr><th></th><th>Descripción</th><th>Tipo</th><th>observaciones</th></tr>
<tr><td>U_{13}</td><td>

(a)
<table>
<tr><th>$T(t)$</th><th>t(min)</th></tr>
<tr><td>75°</td><td>20.1</td></tr>
<tr><td>74°</td><td>21.3</td></tr>
<tr><td>73°</td><td>22.8</td></tr>
<tr><td>72°</td><td>24.9</td></tr>
<tr><td>71°</td><td>28.6</td></tr>
<tr><td>70.5°</td><td>32.3</td></tr>
</table>
(b)</td><td>$U_{13\text{-}1}$ Procedimiento expresado en lenguaje grafico ostensivo

$U_{13\text{-}2}$ Procedimiento expresado en lenguaje numérico ostensivo</td><td>En esta parte el autor hacer referencia en forma implícita a la necesidad de utilizar métodos de tipo numérico y grafico para la resolución del problema, ya que este no cuenta con solución analítica.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Análisis de un problema tipo de Temperatura

Comentarios a los textos.

A partir del análisis mostrado en la tabla 1, del problema de crecimiento de bacterias y al de la Tabla 2 del enfriamiento de un pastel, podemos concluir lo siguiente:

a) Conocimientos Previos de la materia: en los libros de texto de cálculo se dice que la expresión $\frac{dy}{dx}$, es un símbolo inseparable y que significa entre algunas cosas una razón de cambio, más sin embargo en el contexto de las ecuaciones diferenciales el autor separa este cociente sin los argumentos suficientes.

b) Conocimientos del Contexto (Biología, Física, Química, etc.): un error u omisión muy frecuente en los libros de texto de ecuaciones diferenciales, es que el autor supone que el lector conoce una gran variedad de contextos de aplicación para la presentación de sus problemas. Siendo este punto donde se da comúnmente un conflicto entre los significados del lector y los del autor.

c) Manejo adecuado del lenguaje: el lenguaje natural que utiliza el autor no está escrito en una forma lo suficientemente clara y precisa.

d) La descripción de los procedimientos: los procedimientos desarrollados no son argumentados y presentan omisiones. Los pasos descritos para la resolución del problema, presentan laguna o brincos, de procedimientos que para el estudiante no son obvios. Además falta argumentar el por qué de los pasos descritos en tal procedimiento.

4.3 Conocimientos Previos.

El cuestionario (pre-test y post-test) que se presenta a continuación, fue conformado de forma especial, para indagar el estado de los conocimientos previos en un grupo de 31 estudiantes inscritos en el curso de Ecuaciones Diferenciales, dentro del programa de licenciatura que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California.

El cuestionario esta divido en tres secciones; la primera, denominada la sección A, contiene seis preguntas abiertas, sobre las características, propiedades y desarrollo de las funciones *logarítmicas y exponenciales*. La siguiente, es la sección B, y está compuesta por seis preguntas abiertas sobre *diferenciación*. Y la tercera y última, la sección C, la forman seis ejercicios de tipo rutinario y representativos de la aplicación de métodos y técnicas de *integración*.

Para analizar las respuestas dadas en el cuestionario cada enunciado se ha clasificado en unidades de análisis, mismas que están relacionadas con los elementos primarios del EOS: *El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado por los estudiantes, si se introducen notaciones y de qué tipo, grafico, numérico, etc. *Las acciones o procedimientos*, que hace el estudiante para resolver los ejercicios planteados. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. [2] Por cuestiones de tiempo y espacio en esta parte del trabajo solo se presentaran los resultados dados a las preguntas del cuestionario asignándole 0 a la incorrecta y uno a la correcta, en forma estadística y el análisis semiótico será presentado en un reporte posterior.

A continuación aparecen las tablas con los resultados de los cuestionarios aplicados antes y después del curso, las tablas están organizadas de forma en que se pueden comparar las respuestas dadas en cada reactivo, por cada estudiante y por secciones:

	Pre-Test						Post-Test						Pre	Post
Alumno	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	Total	Total
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	4
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	3	5
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	4
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	5	6
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	3
12	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	5	5
13	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	4
14	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	4
16	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	2	2
17	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	2	3
18	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	4	3
19	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	3
20	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	2
21	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	3	5
22	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	3
25	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	5
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
28	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	2
29	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	2	4
30	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totales	**3**	**6**	**6**	**3**	**12**	**2**	**6**	**17**	**20**	**7**	**26**	**10**	***32***	***86***

Tabla 1. Respuestas dadas en el cuestionario a la Sección A

Las tablas, muestran en la primera columna a los alumnos numerados del 1 al 31, las unidades de análisis se muestran en las siguientes 12 columnas y en las última dos, aparecen las sumas correspondientes de las respuestas correctas. Se le asigno valor de cero a la respuesta incorrecta y uno a la respuesta correcta, para efecto de un análisis estadístico posterior.

De las secciones analizadas puede observarse un avance significativo en la sección B, donde se evaluaban los conocimientos previos sobre la diferenciación, en general los estudiantes presentaron una mejora significativa en respuestas correctas de un 81%, comparada con el 46% y 58% que obtuvieron en las secciones A y C, respectivamente.

La sección A, referente a las propiedades y manejo de logaritmos y exponenciales fue la que presenta los más bajos porcentajes tanto en conocimiento como en el manejo de estos. A su vez igual muestra una mejora mínima con respecto a las otras dos secciones, esta mejora fue por debajo del 50%.

	Pre-Test						Post-Test						Pre	Post
Alumno	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	Total	Total
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	4	5
2	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	4	5
3	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	3	6
4	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	4	5
5	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	3	5
6	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	3	4
7	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	3	4
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6
9	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	2	4
10	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	4
11	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	2	5
12	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	5	6
13	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	5
14	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	3	6
15	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	4	5
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	6	5
17	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	4	6
18	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	3	4
19	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	6
20	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	2	5
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6
22	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	3	5
23	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	2	5
24	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	6
25	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	5	6
26	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3	2
27	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	3	5
28	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	4	5
29	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	3
30	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	3
31	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	2	3
Totales	**26**	**23**	**21**	**8**	**6**	**12**	**30**	**30**	**25**	**15**	**25**	**25**	***96***	***150***

Tabla 2. Respuestas dadas en el cuestionario a la Sección B

	Pre-Test						Post-Test						Pre	Post
Alumno	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	Total	Total
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	4
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	4
3	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	3	4
4	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	2	3
5	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	4
6	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	2	3
7	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	4
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6
9	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	4
10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2
11	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3	2
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6
13	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	2
14	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	4
15	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	5
16	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	2
17	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	3
18	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	5
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
20	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	3	3
21	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	2	4
22	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	3	3
23	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	2	5
24	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	4	5
25	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3	2
26	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	3
27	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	4	4
28	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	3	4
29	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
30	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	3
31	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	2	3
Totales	**21**	**13**	**9**	**7**	**6**	**2**	**28**	**28**	**25**	**15**	**6**	**5**	58	107

Tabla 3. Respuestas dadas en el cuestionario a la Sección C

La Tabla 3, muestra un porcentaje un tanto mejor, del 58% de respuestas correctas al cuestionario, no es lo que se esperaba, pues los temas integración son más utilizados en el curso de ecuaciones diferenciales.

En las tablas 1, 2 y 3 podemos reconocer de forma fácil aquellos reactivos que tuvieron más dificultad para los estudiantes, por ejemplo en la sección A, fueron los reactivos 1, 4 y 6, los que denotan menos respuestas correctas; de la sección B, fueron el 4 y el 6 y por último de la sección C, el reactivo 6 fue el que no respondieron los estudiantes. Esto nos da una pauta para reconocer deficiencias en la enseñanza de dichos temas.

De realizar un análisis de los resultados obtenidos en las tablas anteriores, donde seleccionamos aquellos casos más sobresalientes, basándonos tanto por sus logros, como por sus desaciertos. Normalmente se espera que aquel estudiante que obtuve mejores resultados en dichos cuestionarios, es el estudiante que obtendrá mejores resultados en el curso de forma general. Se han seleccionados nueve estudiantes etiquetados con la misma numeración que se muestra en las tablas anteriores.

Alumno	Sección A		Sección B		Sección C		Resuelve Problemas?	Calificación 1er. Parcial[1]	Calificación del curso[2]
1	0	4	4	5	1	4	Resuelve con errores	58	66
5	1	4	3	5	1	4	Solo plantea el problema	80	88
8	5	6	6	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	98
12	5	5	5	6	6	6	Resuelve bien el problema	100	85
13	0	4	1	5	2	2	Hace intentos no lo resuelve	23	66
19	0	3	2	6	1	0	Hace intentos no lo resuelve	45	59
20	1	2	2	5	3	3	Solo plantea el problema	20	52
22	0	2	3	5	3	3	Resuelve bien el problema	45	68
31	0	0	2	3	2	3	Ni siquiera intenta	20	60
Nota[1]. Examen primera unidad contiene problemas para resolver con antiderivadas									
Nota[2]. El mínimo aprobatorio es de 60									

Tabla 4. Comparación entre conocimientos previos y resolución de problemas

Los estudiantes 1 y 5 obtuvieron un avance significativo entre la aplicación de los dos cuestionarios, no les va muy bien a la hora de resolver problemas, pero son exitosos con el curso al final. Los estudiantes 8 y 12, son aquellos que mostraron solidez y buenos resultados en ambas aplicaciones del cuestionario, resuelven problemas y son bastante exitosos con el curso en general. Los demás estudiantes seleccionados no muestran un avance consistente ni significativo entre una aplicación y otra. Con excepción del alumno 22, ninguno resuelve problemas, pero al finalizar el curso solo dos de ellos no logran aprobar el curso.

Los resultados obtenidos por estos últimos estudiantes, salen de los parámetros esperados, lo cual nos permiten visualizar otro tipo de situaciones que ameritan un estudio amplio sobre estos casos.

Capitulo 5.

Discusiones, Conclusiones y Recomendaciones.

A partir de la recopilación de datos que se obtuvieron con el cuestionario y los exámenes aplicados a estos 31 estudiantes y los resultados que se obtuvieron, sobre los cuales podemos decir varias cosas con relación a lo sucedido con los conocimientos previos que traen los estudiantes del grupo encuestado:

a) ***Conocimientos Previos de la materia***: Los estudiantes del grupo en general vienen con conocimientos previos deficientes en lo que se refiere al manejo y caracterización de las funciones logarítmicas y exponenciales, deficiencias en métodos y técnicas de integración, y si bien saben realizar derivadas y diferenciales sencillas, tienen problemas con conceptos y significados de la misma, me atrevo a decir esto, porque el reactivo 4 de la sección B, es un reactivo para evaluar en cierta forma el significado de la derivada y fue uno de los reactivos que obtuvieron más bajo puntaje de toda la sección y a su vez de toda la encuesta.

b) ***Manejo adecuado del lenguaje***: se pudo observar también que el lenguaje natural que se debería utilizar para dar respuesta a algunos reactivos como el 4 de la sección A y el 4 de la sección B, al estudiante le ocasiona dificultad, es decir no le es fácil al alumno argumentar o discutir en forma verbal escrita en forma clara y precisa.

d) ***La descripción de los procedimientos***: los procedimientos en muchos de los casos presentados son escuetos, a pesar de haberle solicitado al estudiante en forma verbal al inicio de cada evaluación, que justificaran todas sus respuestas con procedimientos claros y concisos, muchos de los resultados son presentados sin dicho argumento.

Este tipo de análisis de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad, tales como el uso de términos y expresiones que el estudiante maneja en base de sus conocimientos previos; nos arroja luz sobre los conflictos de significado y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se utilizan en el salón de clases. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Resultados Esperados

De la investigación se espera obtener:

Información acerca de los significados de los objetos matemáticos previos que el estudiante adquiere en sus cursos de cálculo.

Que sucede con esos significados cuando el estudiante aborda problemas nuevos

Un panorama más o menos completo de lo que sucede en el aula al implementar situaciones problémicas para resolver problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden

Lo anterior nos servirá para crear estrategias que nos permitan mejorar la comprensión de los objetos matemáticos que se forman los estudiantes de ingeniería al interactuar con dichos problemas. Elevar en lo posible el índice de aprobación y minimizar la deserción de estudiantes en la Facultad de Ingeniería-Mexicali.

De lo anterior se percibe que del análisis semiótico o de significados que se ha aplicado y desarrollado en este trabajo es un recurso de utilidad para la investigación en didáctica de las matemáticas. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad, tales como el uso de términos y expresiones; nos arroja luz sobre los conflictos de significado y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

BIBLIOGRAFÍA

Benítez, J. (2008). El Pensamiento Matemático: de la antigüedad a nuestros días. *Alianza Universidad.* Universidad Politécnica de Valencia, España.

Buendía, G. y García, C. A. (2001). Un Análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol.15, 2002. pp. 468-473.

Camarena G., P. (1995) La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G., P. (1999) Los modelos matemáticos y el contexto de la ingeniería. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. República Dominicana.

Camarena G., P. (1999). La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. República Dominicana.

Camarena G., P y Ponce C., J. (1999) Modelos matemáticos de la física en ingeniería. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. República Dominicana.

Camarena, G. P. (2000). Modelos Matemáticos y su clasificación para ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol.14, 2001. pp. 468-473.

Cantoral U, R. et al. (2000). Resignificación de las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol.14, 2001. pp. 525-531.

Dujet, C. (2006). Las matemáticas para ingenieros: finalidades, contenidos, didáctica y prácticas pedagógicas (Proyecto Matemáticas para Ingenieros). Lyon, Francia: Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas.

Dummett M. A. E. (1991) ¿Qué es una teoría del significado? En: L. M. Valdez (Ed.) *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos. [Original en inglés publicado en 1975].

Duval, R. (1999). Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de la Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille.

http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf

Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. Educaço Matemática Pesquisa, 8(1), 67-98.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. R*echerches en Didactique des Mathématiques,* 14(3):325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. R*echerches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3):237-284.

Godino, J.D.(2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. (URL:http//www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to researh in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2),127-135.Versión ampliada en español, recuperado el 9 de marzo de 2008 de http//www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. R*echerches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1):39-88.

Godino, J.D., Wilhelmi, M.R. y Bencomo, D.(2005). Suitable criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4.2:1-26.

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R., (2006). Análisis Ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial,* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. *pp 131-155*

Grijalva, A. (2007). El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos. El Caso de la Integral de una Función. Tesis para obtener el grado de Doctor en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Langinis, J. (1981). “Une letter inédite de Fourier sur I’ enseignement destiné aux ingénieurs en 1797 », *Rev Histoire Sci. Appl.* 34,3-4, pp. 193-207.

Martínez Luaces, V. (2000). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol.15, 2001. pp. 49-54.

Muller, E. et al. (1996). “Mathematics as a service subject”. *Reporte del Grupo de Trabajo No. 17 en ICME-8.* Sevilla, España.

Rivera, R. E. (2001). Sobre el Sentido y Significado que los estudiantes del Área de Ingeniería dan a las ecuaciones diferenciales. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Hermosillo, Sonora. Universidad de Sonora.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the learning of Mathematics*, 10, 3, p. 24-36.

Simmons, George F. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Editorial Mc. Graw Hill. México.

Zill, Dennis G. (2003). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado. Editorial Thomson, México.

ANEXO

PreTest – PostTest. Para evaluar conocimientos Previos.

A) Logaritmos y Exponenciales

1.-Simplifica la expresión: $\frac{Ln9}{Ln3} =$

2.- Resuelve para la variable *x*: $25 = 5^x$

3.- Si $y(x) = 8e^{kx}$ y $y(2) = 10$ cuánto vale *k*?

4.- Si $y(x) = Ln(e^{2x})$ cuánto vale *y*?

5.- Si $Ln(y) = Ln(x-1) + Ln(x+1) + LnC$, cuánto vale *y*?

B) Diferenciación

1.- Si $f(x) = sen(5x)$, calcula $f^{'}(x)$.

2.- Si $f(x) = e^{-ax}$, cuánto vale $f^{'}(x)$?

3.- Encuentra la primera derivada de $f(x) = x^2 Ln(x)$

4.- Calcula la derivada parcial de $y\tan(x) + 6xe^y$, con respecto a *y*:

5.- Si $y = e^{5x}$, hallar: $y'' + 2y' - 3y =$?

C) Integración

1.- $\int (\cos(3x) + 5e^{2xx})dx =$ **2.-** $\int xe^{x}dx =$ **3.-** $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

4.- $\int_{0}^{\pi} sen^{3}(t)dt =$

Temas relacionados

1. A continuación escribe las leyes de movimiento de Newton que recuerdes:

2. Analiza las siguientes formulas de física y di que representan para ti y donde las puedes utilizar:

a) *F = ma* b) *F = -kx* c) *F = mg* d) *E=IR*