UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

APORTACIONES DE LAS CIVILIZACIONES BABILÓNICA Y EGIPCIA A LA CREACIÓN DEL ÁLGEBRA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ELIA LEYVA SÁNCHEZ

ENSENADA BAJA CALIFORNIA, JUNIO DE 1998

UNIVERSIDAD AUTÓNAMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

APORTACIONES DE LAS CIVILIZACIONES BABILÓNICA Y EGIPCIA A LA CREACIÓN DEL ÁLGEBRA

Tesis de Licenciatura

ELIA LEYVA SÁNCHEZ

DR. ARMENDO REYES SERRATO
Director de Tesis

Jesús R. Lerma A.

M.C. JESUS RAMON LERMA ARAGÓN
Sinodal

M.C. MIGUEL IBARRA RIVERA
Sinodal

Ensenada, B.C. Junio de 1998.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanos por la paciencia y apoyo que siempre me han brindado para alcanzar mis metas. A mis maestros que además de permitirme adquirir conocimiento en el área científica me han brindado su amistad y confianza.

A la universidad, a todo el personal administrativo, por permitirme realizarme profesionalmete y llevar con orgullo el emblema "por la realización plena del hombre" (incluyendo también a la mujer, no hay que ser machistas).

A mi hijo David quien es el impulsor de mis acciones y anhelos, a quien debo una de las experiencias mas gratas de mi vida y por último a Dios quien sin la ayuda de mis padres no se me hubiese permitido el compartir este trabajo con todos Ustedes.

Gracias...

RESUMEN

Resumen de la tesis de Aportaciones de las Civilizaciones Babilónica y Egipcia a la Creación del Álgebra presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas. Ensenada Baja California, México. 17 de Marzo de 1998.

En este trabajo de tesis se realizara una revisión bibliográfica de libros, revistas, trabajos, etc. que traten sobre el desarrollo del Álgebra a través de dos grandes civilizaciones, a saber, la civilización Babilónica y la civilización Egipcia.

Se reunirá la información que pertinentemente sea la mejor detallada sobre el surgimiento de las primeras reglas creadas en lo que al Álgebra se refiere y se contrastaran con las actuales.

Se resaltará la importancia de dichas reglas, para la construcción de lo que hoy conocemos como Álgebra. Por último se concluirá la importancia de la necesidad de adquirir un conocimiento sólido de las conceptos básicos que son el soporte de las teorías clásicas los cuales evolucionan para crear nuevos conceptos.

También esperamos que el trabajo realizado quede como material de lectura para los alumnos y maestros interesados en el materia de desarrollo conceptual de Álgebra y también para aquellos que se inetresen en el tema.

ÍNDICE

Contenido.

Figuras

Tablas

CAPITULO I. INTRODUCCIÓN.

La importancia de este trabajo recae en la necesidad de revisar las formas de pensamiento antiguas de algunos conceptos abstractos como los números, operaciones con números y estrategias de solución de problemas prácticos, los cuales han ido evolucionando hasta la actualidad y han producido un cambio en nuestra forma de enseñanza día con día.

Por tales motivos hemos de dividir el trabajo en los siguientes capítulos, el capítulo III tratará de algunos de los resultados más importantes que aportó la civilización de la antigua Babilonia, el cual inicia con una breve semblanza de su desarrollo histórico y culmina con los comentarios que derivaran de comparar sus resultados con los actuales, se podrá observar en lo seguido que aun cuando ellos no poseían una forma estructurada similar a la actual, esta civilización mostraba los primeros indicios de abstracción. En el capitulo IV trataremos de igual manera a la civilización del antiguo Egipto siguiendo la misma forma de desarrollo en el trabajo. Finalizaremos presentando el capitulo V y último el cual reúne lo que a nuestro particular punto de vista es lo más importante de considerar en las aportaciones de estas dos grandes civilización al Álgebra actual.

CAPITULO II. ANTECEDENTES

La idea de este trabajo surgió a partir de las materias llamadas Desarrollo Conceptual ya sea de álgebra, cálculo, geometría u otras ramas de las matemáticas, que fueron impartidas en la Maestría en Educación Matemática en 1996 en esta facultad. Nos mostraron un nuevo mundo de posibilidades para realizar trabajos de investigación sobre surgimiento, desarrollo y transformación de los conceptos utilizados en matemáticas. Estas materias nos permitieron reflexionar sobre nuestro manejo y percepción de los conceptos y métodos en matemáticas, más aún, creando un pauta para utilizar lo aprendido en la impartición de nuestras clases, que en ese momento y hoy día realizamos.

Las clases se desarrollaban tratando de evidenciar qué tanto sabíamos de un concepto, cómo lo manejábamos para el uso propio y para la impartición de nuestras clases. En el transcurso de estas materias hubo muchas sorpresas, en las cuales nosotros tuvimos la grata experiencia de compartir aciertos y limitantes. Además, nos percatamos que no basta con el conocimiento adquirido en una licenciatura en matemáticas para poder manejar un concepto en educación y que éste repercuta en el alumno al igual que en nuestro pensamiento, esto lo aprendimos de uno de los resultados más importantes que en educación se halla realizado, a saber, nos concientizamos de que "el conocimiento no se transmite, se elabora" de manera individual en cada persona (Piaget, 1987). Depende en mucho de la información que proporcionemos sobre un concepto dado, el cómo lo presentemos, para que a su vez sea elaborado por otro individuo y obtengamos una versión similar o muy aproximada a la nuestra.

En el transcurso de este trabajo tomaremos el reto de mostrar una breve pero sustanciosa semblanza del surgimiento de una de las ramas básicas de las matemáticas. Esperamos cumplir con los objetivos aprendidos en la maestría; a saber: que el trabajo que aquí se muestra esté lo suficientemente claro, atractivo y conciso, para que ustedes lectores descubran el desarrollo del nivel de pensamiento de aquellos humanos que dieron los primeros inicios de abstracción. Por otra parte, las matemáticas son una de las ciencias que se han desarrollado desde la antigüedad dejando a su paso resultados de gran importancia, tan es así que son pocos los descubrimientos que se han creado y posteriormente han sido descartados en su totalidad.

Los descubrimientos en matemáticas son acumulativos, por tanto los nuevos conocimientos están basados en los anteriores. Así pues, para poder entender las nuevas teorías hay que conocer, comprender y manejar con habilidad los conocimientos básicos, y qué mejor que conocer cómo surgieron dichos conocimientos, con el fin de comparar las formas en cómo se manejaban y cómo es que se utilizan en la actualidad.

Así pues, en este trabajo tenemos el gusto de presentar algunas de las fases del desarrollo o surgimiento de una de las ramas básicas en matemáticas, el Álgebra. Esta reseña histórica inicia en el año 3000 a.C. con la civilización Babilónica pasando por Egipto, es decir, el período prehelenístico (hasta el año 300 a.C.). Dichos períodos fueron, según los datos bibliográficos, las primeras aportaciones de reglas matemáticas más sencillas. Así se desarrollará el trabajo haciendo hincapié en los resultados más importantes que aportaron dichas civilizaciones a la creación y desarrollo del álgebra actual.

CAPITULO III. BABILONIA. Aportación de la civilización Babilónica al surgimiento del álgebra.

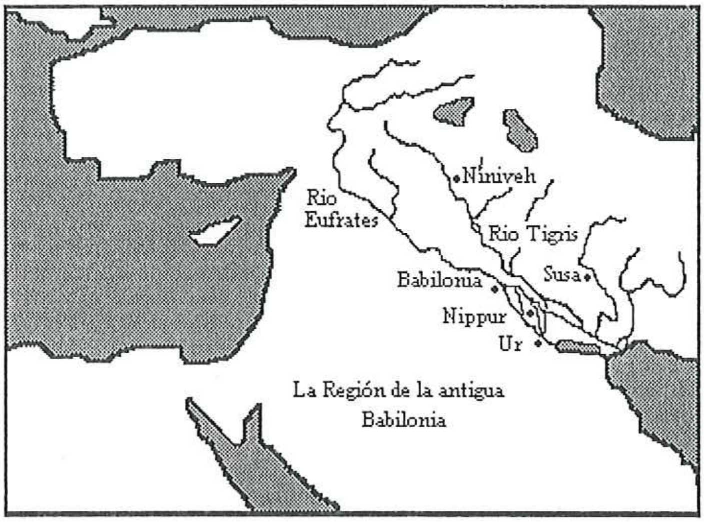


Figura 1. Mapa de la región de los asentamientos de Babilonia.

El término babilonios es usado meramente por conveniencia, el cual nos permite nombrar de manera general a las personas que habitaban en los asentamiento de la antigua mesopotamia, como fueron los Sumerios, Akkadianos y Asirios entre otros.

Se cree que los trabajos de Matemáticas datan de la primera Dinastía Babilónica, en la cual reinó Hammurabis hasta el año de 1600 a.C. Después, desde el año 600 a.C. hasta el año 300 a.C., prevaleció un período generoso habilitado por el nuevo imperio de Babilonia, perteneciente a Nabucodonosor al cual le sucedieron las eras Pérsica y

Seleucidena. Estas dos últimas eras coincidieron con un período turbulento para la historia de Babilonia. Estos son uno de los datos que se han podido rescatar de la vida política de la Antigua Babilonia.

Los conocimientos que generó esta gran civilización fueron conservados y plasmados en tablillas de arcilla, materia prima de sus construcciones, mediante un proceso de tallado de la arcilla.

Por otra parte los hallazgos del conocimiento contenido sobre matemáticas en las tablillas no datan antes de 1935. Dicho descubrimiento fue realizado por Otto Neugebauer y F. Thureau-Dandgin (Van der Waerden, 1975). El trabajo de interpretación de estas tablillas se encuentra en proceso, los nuevos conocimientos descubiertos coinciden y se remarcan con los que hoy tenemos como presentes, lo cual servira para los que después tendremos como futuros.

Así el trabajo arqueológico efectuado en Mesopotamia (Fig. 1) después de la mitad del siglo XX trajo consigo el descubrimiento de más de 30,000 tablillas en las excavaciones de los asentamientos de Nipur, éstas fueron la herencia de conocimiento que dejó la antigua civilización babilónica. Recordamos que nombraremos *babilonios* de manera general a todos los pueblos de los asentamientos de la antigua Mesopotamia.

Retomando el tema, las tablillas poseían, en lo que respecta a matemáticas, información tallada en arcilla presentada con un sistemas de numeración sexagesimal posicional (este se tratará de forma detallada más adelante), el cual conservó sus características durante 2000 años según las investigaciones. La escritura de los babilonios era en forma de cuña, nombrada escritura cuneiforme. Esta, como se mencionó antes era tallada en las tablillas para plasmar principalmente la siguiente información:

(i) tablas de multiplicar, de recíprocos, de raíces cuadradas y cúbicas[1];

(ii) colecciones de problemas ordenados de menor a mayor dificultad, al parecer hechos para ejercitación con fines pedagógicos;

(iii) problemas con datos numéricos específicos y sus soluciones, dadas por medio de algoritmos desarrollados poco a poco.

Es importante señalar que el último tipo de problemas, aun cuando son numéricos, sólo eran un punto de partida para el razonamiento, por lo cual podríamos decir que dichos problemas muestran el procedimiento algebraico, sin hacer uso naturalmente de la simbolización algebraica.

[1] Las tablas de raíces cuadradas y cúbicas están en la tablilla de Senkireh que fue encontrada en la biblioteca de Sardanápolo. Esta corresponde al siglo IX a. C.

III.1. Ejemplos matemáticos babilónicos.

Enseguida presentaremos algunos ejemplos del quehacer matemático de los babilonios. Primeramente mostraremos la simbología numérica que poseían y cúales eran las operaciones aritméticas básicas que utilizaban. A continuación veremos algunos problemas como tablas de multiplicar, tablas de recíprocos y algunas operaciones algebraicas simples. Por último, analizaremos un problema que se muestra en la tablilla del Rhind en el cual se hace el uso del teorema de Pitágoras según la versión actualizada de esta fórmula, esto se hace evidente mediante la interpretación simbólica del problema.

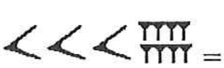
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
60	600	este símbolo se utilizaba para el 1, para el 60 y también para potencias de 60 (60^2,60^3,...; 1/60= 60^{-1}, 1/(60^2)= 60^{-2}, ...)			este símbolo era para representar a 10, para la notación 10×60 y en general para 10×60^n donde n es un entero positivo o negativo.		este símbolo representaba al cero, fué usado después, inicialmente se dejaba un espacio vacío para indicar que había un cero.	este símbolo se utilizaba para representar a la resta.	

Tabla I. Sistema de numeración babilónico.

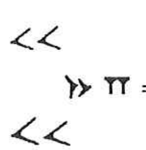
Iniciamos presentando su sistema de escritura (observe la Tabla I). Como se mencionó anteriormente, su forma numérica era sexagecimal a diferencia de la nuestra que es decimal, pero la forma de escritura era también posicional. Mostraremos cómo se realizaba la escritura de los números con dos ejemplos, a saber, uno para cifras pequeñas menores a 60 y otro para cifras mayores a 60, recordemos que su escritura era en base sexagesimal.

III.1.1. Ejemplo 1. Representación de números a base 60.

Representación del número 38 escrito en notación cuneiforme. Los números menores que 60 se escribían con la notación decimal ordinaria. Podríamos suponer que 38 se escribía de la siguiente forma

 = 38

Sin embargo, ellos también trataban de simplificar su notación y utilizaban el signo de resta para poder reducir la notación de manera que el número 38 era representado como

 = 40 - 2 = 38

III.1.2. Ejemplo 2. Representación de números mayores a 60.

El procedimiento a seguir al representar un número mayor que 60 es convertirlo en la suma de productos de potencias del 60. Por ejemplo, si representamos al número 2000 se tiene que

$$\begin{array}{r|l} & \underline{33} \longrightarrow \text{primer cociente} \\ 60 & 2000 \\ & 200 \\ & 20 \longrightarrow \text{primer residuo} \end{array}$$

Por tanto como

$$2000 = 33\times60^{1} + 20 \times 60^{0}$$

y como

$$33\times60 = 1980,$$

si le agregamos

$$20 \times 60^{0} = 20$$

obtendremos que la suma es 2000 y la notación en sexagesimal es,

$$2000 = 33 \; ; 20,$$

donde " ; " es para separar las potencias de 60 de mayor a menor, y ésta cifra en notación cuneiforme se escribe

 = 33 ; 20

III.1.3. Ejemplo 3. Representación de Fracciones.

Los babilonios poseían, como antes lo mencionamos, tablas de fracciones y la forma de representación de estas cantidades era más o menos semejante a lo siguiente. Por ejemplo, recordemos que la representación del número 60 en productos de potencias de los números 2, 3 y 5 es $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, de forma semejante todas las fracciones se representaban convirtiendo a la fracción en sumas de fracciones cuyos denominadores fueran potencias de 60, así tenemos que al representar a 11/9 en notación cuneiforme seguimos este proceso.

Se procede a convertir el denominador de la fracción en productos de potencias de 60, sin alterar la fracción,

$$\frac{11}{9} = \frac{11}{3^2} = \frac{11\times 2^2\times 5}{3\times 3\times 2^2\times 5} = \frac{220}{3\times 60} =$$

$$\frac{220\times 2^2\times 5}{3\times 2^2\times 5\times 60} = \frac{4400}{60^2} =$$

Una vez convertido el denominador, se procede a separar el numerador en sumas de múltiplo de potencias de 60 de forma descendente,

$$= \frac{1\times 3600+13\times 60+20}{60^2}$$

Luego se procede a separar la fracción en suma de fracciones,

$$= \frac{1\times60^2}{60^2} + \frac{13\times60^1}{60^2} + \frac{20\times60^0}{60^2} =$$

se reduce cada fracción de forma tal que sólo el denomidador posea potencias de 60 de forma descendente ,

$$= 1 + \frac{13}{60^1} + \frac{20}{60^2}$$

los numeradores de cada fracción son tomados como la expresión sexagesimal de la fracción,

$$= 1\times60^0 + 13\times60^{-1} + 20\times60^{-2} = 1;13;20$$

así, para ellos la notación sexagesimal de

$$11/9 = 1;13;20 =$$ 

El método es muy similar a la presentación de $4400 = 1\times60^2 + 13\times60^1 + 20\times60^0$; sólo que en sus escritos se especificaba de manera muy clara lo que se estaba realizando, ya que el orden de la magnitud del número quedaba claro, en el contenido del texto en el que aparecía. Por tal motivo no existía la probabilidad de que se confundieran en la realización de sus operaciones.

Así tenemos que por su forma muy particular de usar la simbología para representar sus números, sobre todo de las fracciones, se muestran de forma evidente los procedimientos que siguieron, que comparados con los actuales parecen ser más elaborados, lo cual nos conduce a pensar que las personas que se encargaban de realizar estas operaciones debian de poseer un hábil manejo de los métodos y una gran memorización de las cifras.

Respecto al sistema de numeración podemos decir que todos los números enteros podían ser representados, sin embargo, las fracciones tenian una restricción ocasionada por la expresión en base sesenta, esto se muestra en el desarrollo de algunos algoritmos de obtención de recíprocos.

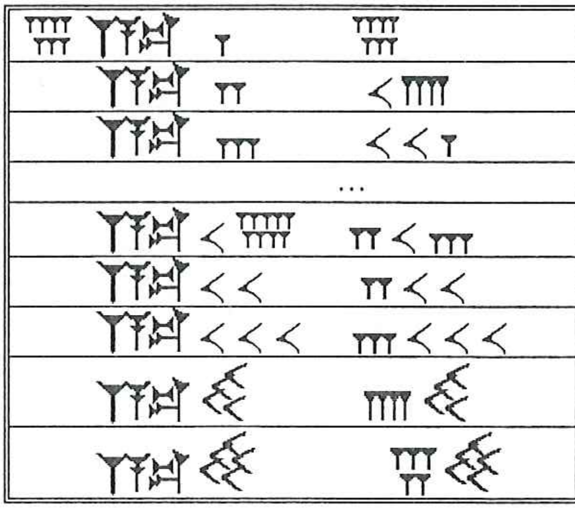
III.1.4. Ejemplo 4. Obtención de los números recíprocos.

Antes que nada, es prudente aclarar que este tipo de algoritmos venían desarrollados en tablillas, las cuales podían tener las siguientes presentaciones:

(a) algoritmos de multiplicaciones simples;

(b) algoritmos de combinaciones;

esto es, con frecuencia las tablillas simples se combinaban con una tablilla de recíprocos y una de cuadrados para formar una gran tablilla de combinaciones. Así los problemas que enseguida se presentan en la Tabla II y la Tabla III, son la tabla del número siete y una tabla de recíprocos respectivamente (Figueroa et al, 1990).



7	a-rá 1	7
	a-rá 2	14
	a-rá 3	21
	. . .	
	a-rá 19	2 ; 13
	a-rá 20	2 ; 20
	a-rá 30	3 ; 30
	a-rá 40	4 ; 40
	a-rá 50	5 ; 50

Tabla II. Tablilla que describe el algoritmo de multiplicación del número 7, se distingue claramente que el símbolo  (a - rá) significa "veces".

Las tablas de recíprocos no son muy extensas, contienen solamente los recíprocos de los números enteros entre el 0 y 81 que sólo tienen a 2, 3 y 5 como divisores. Por esta razón se pueden expresar como fracciones sexagecimales finitas, de manera que los recíprocos de 7, 11, 13, 17, etc. no aparecen en estas tablas. Esto nos conduce a pensar que la expresión sexagesimal de tales números no era exacta ni finita. Sin embargo, los babilonios sólo utilizaban algunas aproximaciones para cálculos en problemas particulares y no en algoritmos.

Recíproco de	Su representación en notación sexagecimal
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7;30
9	6;40
10	6
12	5
15	4

Tabla III. Presentación de recíprocos.

Enseguida se muestra un ejemplo donde se realiza el proceso de cálculo del recíproco del número 8, el cual tiene una expresión sexagesimal finita. El proceso para obtenerlo es idéntico al cálculo de fracciones.

$$\frac{1}{8} = \frac{1\times3\times5}{2\times2^2 3\times5} = \frac{15\times 3\times5\times2}{60\times2^2\times3\times5} = \frac{450}{60\times60} =$$

$$\frac{420+30}{60^2} = \frac{7\times 60^1 + 30\times60^0}{60^2} =$$

$$= \frac{7\times 60^1}{60^2} + \frac{30\times 60^0}{60^2}$$

$$= \frac{7}{60^1} + \frac{30}{60^2} =$$

$$7\times60^{-1} + 30\times60^{-2} = 7\,;30$$

El proceso antes descrito muestra cómo se completaba el denominador del recíproco hasta formar potencias del número 60 exactas, una vez completado el denominador se procedía a separar la cantidad en sumas de fracciones con denominadores de potencias del 60 de menor a mayor. Los coeficientes de estas fracciones eran los números que representaban al recíproco.

Por último, mencionaremos que las tablas no sólo se utilizaban para la multiplicación ordinaria $a \times b$, sino especialmente para multiplicaciones de la forma $a \times b^{-1}$, es decir, para la división $a \div b$. Se ve, por tanto, que las tablas de cálculos babilónicos estaban arregladas de una manera muy útil ya que por medio de la notación posicional las operaciones pueden hacerse rápidamente sin pensar demasiado.

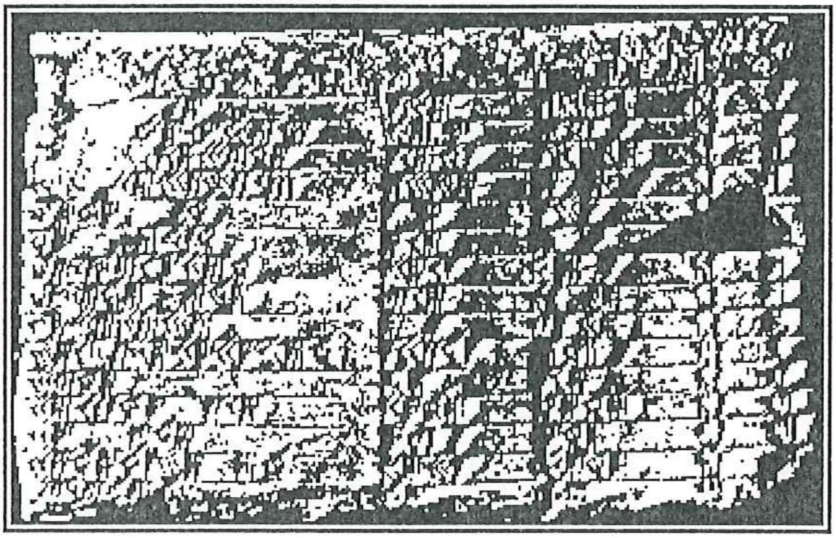


Figura 2. Tablilla babilónica al natural llamada Plimpton 322.

III.1.5. Ejemplo 5. Teorema de Pitágoras.

Los ejemplos anteriores forman parte de tablillas sencillas. Ahora pasaremos a mostrar un ejemplo de tablillas compuestan. Este es el caso muy peculiar de la tablilla llamada Plimpton 322, la cual recibe este nombre por encontrarse contenido en el catálogo 322 de la colección G.A. de la Universidad de Columbia. Esta tablilla fue escrita en el viejo lenguaje babilónico y data aproximadamente del período de 1900 a 1600 a.C. y fue traducida por Neugebauer y Sanchs en 1945 (Van der Waerden, 1975).

a	*b*	*c*	U	V
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
4	3	5	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Tabla IV. Traducción de la tablilla Plimpton 322.

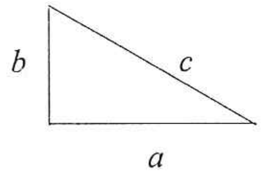
Pasando a la información contenida en esta tablilla, veremos que ésta consta esencialmente de tres columnas casi completas como se muestra en la Fig. 2, en la cual se presenta la forma natural de la tablilla. Se nota que la primera y las dos últimas columnas están parcialmente quebradas. Sin embargo, mediante la traducción de ésta se pudo obtener, siguiendo los algoritmos, el resto de las cifras contenidas en la tablilla.

También, situandonos en la Tabla IV, veremos la traducción de dicha tablilla al lenguaje actual y en notación decimal. La forma en que se presentan las cantidades de manera general es la siguiente, llamémosles a las dos últimas columnas U y V de izquierda a derecha respectivamente. Tenemos entonces que las tres primeras columnas son, de izquierda a derecha, $2UV$, $U^2 - V^2$ y $U^2 + V^2$ respectivamente. Ahora supongamos que $a = 2UV$, $b = U^2 - V^2$ y $c = U^2 + V^2$, además que $U > V$ y de diferente paridad, de aquí podemos observar que los valores correspondientes a las columnas a, b y c tienen relación con los lados de un triángulo rectángulo.

Por ejemplo, si tomamos la tripleta de la primera fila tenemos que $a = 120$, $b = 119$. Así,

$$c = \sqrt{(120)^2 + (119)^2} = \sqrt{14400 + 14161} = \sqrt{28561} = 169$$
$$c = 169$$

lo cual se puede aplicar a las demás tripletas que se encuentran contenidas en la tablilla, así a y b son los lados de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa.



Por otra parte, todos los valores contenidos en la primer columna son números sexagesimales regulares, lo cual induce a pensar que aparentemente los valores de U y V fueron elegidos deliberadamente para que a = 2UV dieran valores sexagesimales regulares.

Con esta tablilla se muestra que, además de tener un sistema numérico y reglas aritméticas para operar, poseían algoritmos de cálculo en los cuales utilizaban formas derivadas de lo que ahora conocemos como teorema de Pitágoras.

III.1.6. Ejemplo 6. Aplicación del Teorema de Pitágoras.

Enseguida se muestra otro ejemplo de una tablilla donde se trata la solución de un problema práctico el cual no corresponde a algoritmos. Este pertenece a la época de la antigua babilonia, alrededor de 1700 a.C.; en él se observa de nuevo el conocimiento que poseían los babilonios sobre el teorema de Pitágoras (Figueroa et al, 1990). La forma geométrica que presenta esta tablilla (ver Fig. 3 inciso (a)) es muy semejante a un cuadrado con sus diagonales inscritas; esta figura mide en su forma natural 19.6 cm. de lado. En el inciso (b) de la misma figura se dispuso una copia de la misma tablilla en la cual se muestran de forma más clara los lados que se encuentran en notación cuneiforme;

así mismo, en el inciso (c) se presenta la traducción en notación sexagesimal pero con los números actuales. A continuación mostraremos la interpretación de este problema.

Observando la transcripción de las cifras contenidas notamos que aparecen tres números, a saber,

(i) 30 al cual le asignaremos la letra "*a*"

(ii) 1;24;51;10 al cual le asignaremos "*b*"

(iii) 42;25;35 al cual le asignaremos "*c*"

Si realizamos el producto "*ab*" obtenemos,

$$\begin{aligned}
30 \times (1;24;51;10) &= 30 \times (1 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3}) \\
&= 30 \times 60^0 + 720 \times 60^{-1} + 1530 \times 60^{-2} + 300 \times 60^{-3} \\
&= 30 \times 60^0 + 12 \times 60^1 \times 60^{-1} + 25 \times 60 \times 60^{-2} + 30 \times 60^{-2} + 60 \times 5 \times 60^{-3} \\
&= 30 + 12 + 25 \times 60^{-1} + 30 \times 60^{-2} + 5 \times 60^{-2} \\
&= 42 + 25 \times 60^{-1} + 35 \times 60^{-2} \\
&= 42\,;\,25\,;\,35
\end{aligned}$$

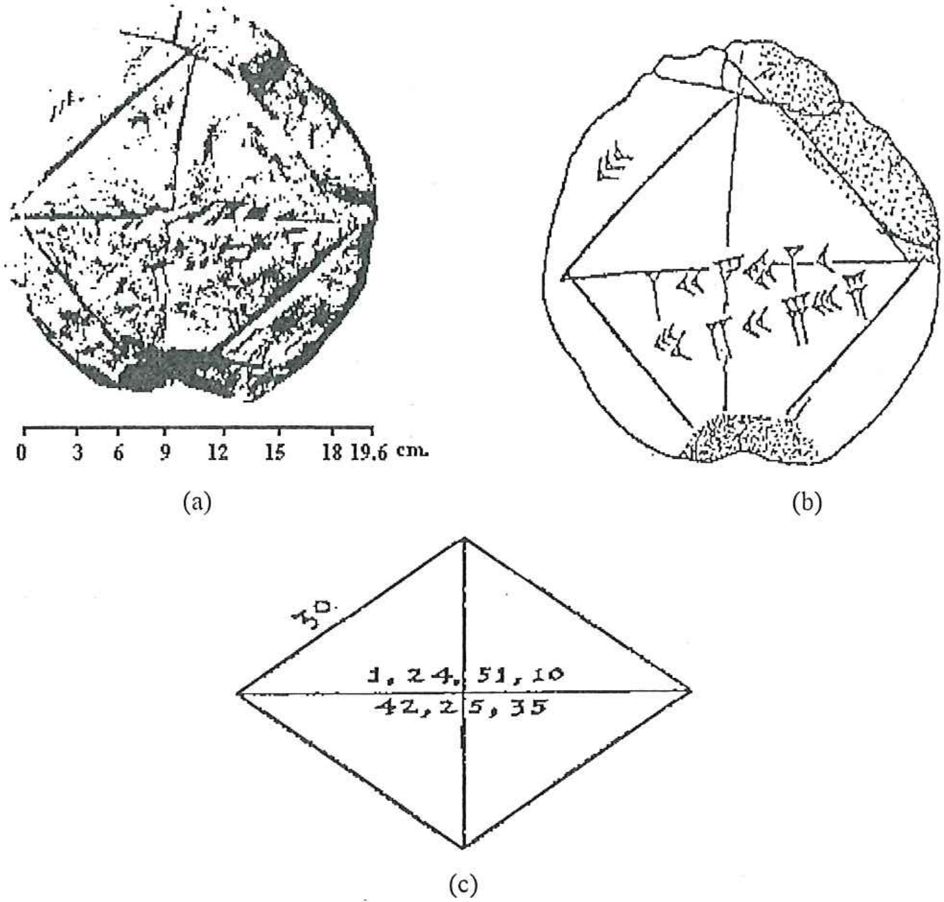
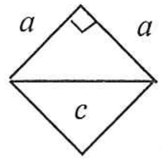


Figura 3. (a) Aquí se muestra la tablilla en tamaño natural; (b) Esta es una copia de la tablilla para mostrar de forma clara su contenido; (c) Aquí se observa una representación del contenido de la tablilla en notación actual.

La figura muestra que la longitud del lado del cuadrado a es igual a 30 (a=30), así que su diagonal es c= 42;25;35.

Por otra parte si damos la interpretación moderna del problema tenemos que,



$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, por lo que $c= \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\ a$, de esta manera el valor b= 1;24;51;20 debe ser una aproximación de $\sqrt{2}$, si elevamos al cuadrado dicho valor obtenemos un número muy cercano a 2, por lo que 1;24;51;10 es una buena aproximación de la raíz cuadrada de 2. De los hechos anteriores podemos interpretar el problema de la siguiente manera

"si el lado del cuadrado es 30 entonces su diagonal es en forma sexagesimal 42;25;35 ó 42.42638 en forma decimal"

Este problema corresponde a la tercera parte de las siete que forman la tablilla, tal tablilla se encuentra en el museo de Berlín y nos muestra una forma más evidente del uso de lo que hoy llamamos teorema de Pitágoras, además de mostrar cálculos aproximados de valores irracionales como lo es $\sqrt{2}$. No obstante, lo que se ha mostrado en esta parte sobre el quehacer matemático de los babilonios, es sólo una semblanza del gran trabajo que se realizó en aquella era, aun cuando sus problemas recaían en soluciones aritméticas no debemos olvidar que tales conocimientos especiales estaban destinados a jugar con el tiempo un papel decisivo en el desarrollo de las matemáticas.

III.2. Resumen de algunas aportaciones babilónicas.

A continuación presentamos una resumen de las aportaciones de la matemática babilónica en lo que a la aritmética y álgebra se refiere. Es importante aclarar que las formas más usuales que los babilonios podían resolver fácilmente y a las cuales trataron de reducir todas las soluciones de las ecuaciones algebraicas, son las siguientes:

(i) Ecuaciones con una incógnita

$$ax = b$$

$$x - a = a$$

$$x^2 = b$$

$$x^2 + ax = b$$

$$x^2 - ax = b$$

$$x^3 = a$$

$$x^2 (x+1) = a$$

(ii) Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = a \qquad x^2 + y^2 = b \qquad xy = b \qquad x - y = a$$

además, se conocían la fórmulas siguientes:

$(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2- b^2$

$1+2+4+ \dots +2^n = 2^n +(2^n-1)$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2= (1/3 + 2/3\ n)(1 + 2 + \dots+ n)$

y también la suma de progresiones aritméticas.

Los números pitagóricos $x^2 + y^2 = z^2$ se encontraban usando la formula

$$\frac{x}{y} = \sqrt{(z/y)^2 - 1}$$

Todo lo que aquí se ha presentado forma parte de los descubrimientos más importantes en relación con el trabajo matemático que realizaron los babilonios. Esta herencia de conocimientos es debido al gran trabajo de arqueólogos e investigadores que tenazmente han descubierto e interprertado el contenido de estas piezas arqueológicas. Así pues, tenemos hoy día la posibilidad de deleitarnos, con los más antiguos indicios registrados de la labor matemática humana, conocidos a la fecha.

CAPITULO IV. EGYPTO. Contribución de la Civilización Egipcia al Desarrollo del Álgebra.

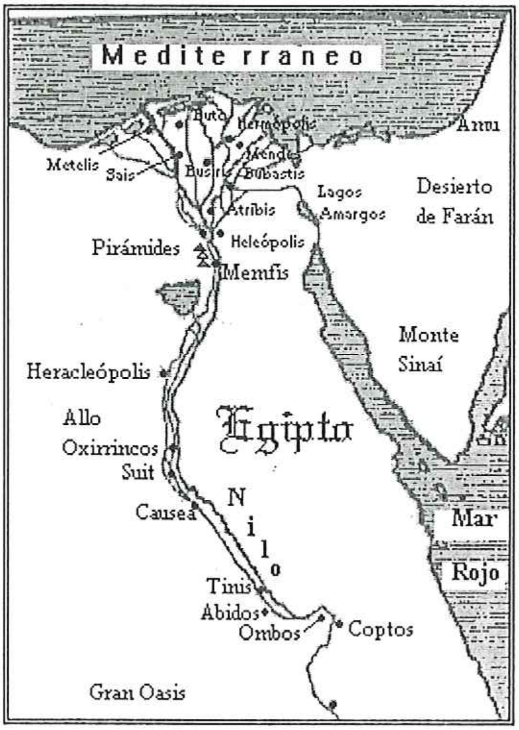


Figura 4. Egipto en los milenios IV y III a.C.

IV.1. Antecedentes.

La civilización Egipcia inició con el antiguo imperio de Menfis que data del año 3200 a.C. hasta 2300 a.C. El desarrollo de la civilización dio sus primeros pasos en la creación de su sistema de numeración (se crearon los símbolos numéricos del 1 hasta el 100,000) y la construcción de las primeras pirámides. Del año 2050 hasta 1750 a.C.

el imperio dirigido por el emperador Tebas, permite el desarrollo de la literatura y la orfebrería, en tal fecha, fueron realizados los papiros de Rhind y de Moscú, además de los calendarios estelares en sarcófagos. Del año 1700 hasta 1600 a.C. la dominación de Hicsos mantuvo un período de recesión en el imperio y fue cuando Ahmes copió el papiro del Rhind. De 1600 a 110 a.C. el nuevo imperio de Tebas trajo consigo la creación de la nueva Teología, desarrollándose la arquitectura, la escultura, así como la astronomía primitiva. Del año 300 a.C. hasta el año 300 d.C. imperó la época Helenística, la ciudad de Alejandría se desarrolla como centro del arte y de la ciencia griega. Aquí se dio el mayor desarrollo de la ciencia griega y los niveles primitivos de la astronomía y aritmética egipcia.

Las matemáticas del antiguo Egipto, contrariamente a las muchas opiniones populares, nunca rebasaron el nivel obtenido de las matemáticas babilónicas. Esto puede suponerse ya que mientras los descubrimientos realizados en Mesopotamia nos proporcionan una gran cantidad de información, a decir por las tablillas rescatadas, los correspondientes descubrimientos hechos en Egipto no son tan numerosos, esta civilización está ubicada en una zona con un clima seco extremo y por tal motivo la conservación de sus papiros y algunas inscripciones en paredes de templos y otros objetos se perdieron con el paso del tiempo. No obstante algunos de estos valiosos medios de información fueron rescatados.

Por otra parte, la situación política de Egipto se desarrolla cronológicamente de manera siguiente: hubo dos reinados, uno en el norte y otro en el sur que hoy día conocemos como el actual Egipto. Entre los años 3500 y 3000 a.C., el rey Mena o Menes unificó el alto y bajo Egipto. A partir de esta fecha reinaron tres dinastías, Menes fue el fundador de la primera dinastía; sin embargo, en la tercera dinastía alrededor del año 2500 a.C. cuando el apego a la cultura egipcia se desarrollo construyéndose las grandiosas pirámides, de 1700 a 1600 a.C., Egipto fue invadido por los Hicsios. Posteriormente se establecen contactos con la civilización babilónica. Luego alrededor del año 332 a.C. fue conquistado por Alejandro Magno, iniciándose el período de la dominación griega conocido como período Ptolomeíco, en el que Alejandría se convirtiera en el centro de la civilización griega y, con cuya universidad están relacionados cantidad de matemáticos griegos entre ellos Arquímides, Euclides y Apolonio. De estos hechos se puede deducir que las matemáticas desarrolladas en este último período son producto del pueblo de Grecia.

IV.2. Representación egipcia de los números.

Los antiguos egipcios desarrollaron su propio sistema de escritura llamado "los jeroglíficos", el cual fue pictórico, es decir, cada jeroglífico era una pintura de algún objeto, los cuales eran plasmados en monumentos hasta fechas cercanas a la era cristiana. Desde el año 2500 a.C. los egipcios usaron para la vida cotidiana la escritura hierática que es silábica; cada sílaba se representa por un ideograma y una palabra entera era una colección de ideogramas. El significado de una palabra no estaba ligada a ideogramas separados.

Enfocándonos al álgebra desarrollada por los egipcios tenemos que los jeroglíficos utilizados para representar números fueron:

| para el número 1

ϱ o 9 para el número 100

∩ para el número 10

 para el número 1000

 para el número 10,000

y otros símbolos para unidades más grandes. Estos símbolos, al ser combinados, forman números intermedios. La dirección de la escritura era de izquierda a derecha; es decir, primero se escribian las unidades, después las decenas, luego las centenas y así sucesivamente. Tenemos por ejemplo,

12 = ||∩ ó 1997 = 

Además de la simbología anterior se utilizaba la escritura hierática, donde los números del 1 al 10 eran simbolizados en la forma siguiente:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Queda claro que el sistema de numeración de los egipcios es en base 10; pero de carácter aditivo, a diferencia del babilónico que era posicional.

IV.3. Operaciones aritméticas.

Las operaciones aritméticas que efectuaban los egipcios eran suma y resta las cuales se hacian contando el número de unidades, decenas, centenas, etc. También realizaban un proceso de multiplicación, sin embargo, la forma en como la hacian era muy peculiar; ésta la efectuaban por medio de duplicaciones y sumas de resultados de dichas duplicaciones, así que el producto era un proceso de sumas como veremos a continuación.

IV.3.1. Multiplicación.

El siguiente ejemplo fue tomado del papiro del Rhind, en él se muestra la multiplicación de 12 por 12. Lo presentamos en jeroglíficos y en notación moderna para mostrar la forma peculiar de realizarlo, como se muestra en las Tablas V y VI respectivamente.

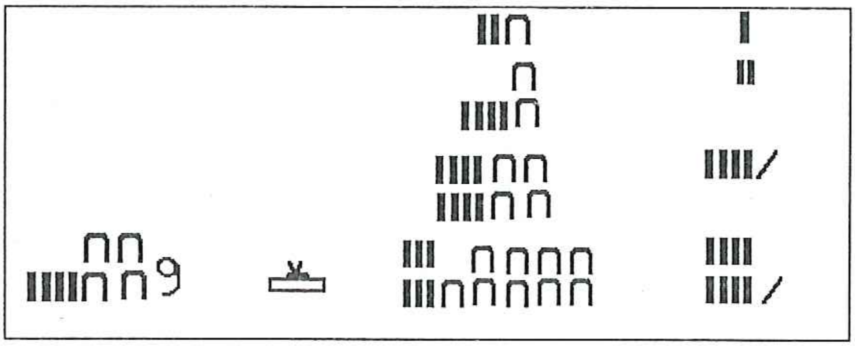


Tabla V. Aquí se muestra la tabla del 12 que se encuentra en el papiro del Rhind.

En este ejemplo el símbolo / sirve para indicar que esa cantidad se sumará con otra que posea el mismo símbolo.

	12	1
	24	2
	48	4 /
4 + 40 + 100 dmd	96	8 /

Tabla VI. Traducción en numeración actual de la tabla de multiplicar del 12.

Así el algoritmo describe que 4 veces 12 y 8 veces 12 sumados producen 12 veces 12. El resultado 144 es acompañado por el jeroglífico dmd = , que como puede observarse esta representado en forma de un rollo (pergamino) con un sello en la parte superior y significa igualdad o resultado, además este problema muestra que los egipcios manejaban la multiplicación, particularmente el elevar un número al cuadrado.

Este método de multiplicación es la base de todo el arte de la calculación egipcia, el cual aparenta ser un método muy rudimentario, pero fue capaz de mantenerse hasta el período helenístico.

IV.3.2. División.

Junto con la duplicación, el proceso de la bipartición o mediación también fue considerado. Por tanto el proceso de división era considerado por los egipcios como una forma de multiplicación, pero en forma inversa. Por ejemplo, en el papiro del Rhind se realiza la *división* de 1120÷80, el cual se efectúa de la siguiente manera, multiplicar 80 (sumar empezando con 80) hasta obtener 1120:

80	I	1
800	∩/	10/
160	II	2
320	IIII/	4/

Este ejemplo muestra una división exacta, el proceso para realizar la división es muy similar a la de la multiplicación. Podemos observar del anterior ejemplo que el denominador 80 es multiplicado por números pares hasta que los resultados de estas multiplicaciones sumen exactamente 1120 y se obtiene que 14 es el resultado de la división, ya que los productos de 80×10 más 80×4 suman exactamente 1120.

IV.3.3. Representación de fracciones.

Por otra parte los egipcios también echaron mano del valioso recurso de las *fracciones*, cuando los resultados de las divisiones no eran exactas. En primer lugar, había un número limitado de *fracciones* naturales, que ocurrían en la vida diaria y que eran designadas con números específicos; a saber, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4 y 3/4 (escritos en notación actual), estas *fracciones* eran unidades individuales consideradas como conceptos básicos a un nivel igual al de los números enteros.

El conjunto de fracciones desarrolladas incluía sólo a las fracciones unitarias; esto es, fracciones con numerador igual a 1. Los egipcios no fueron capaces de escribir cualquier fracción excepto las que se han mencionado (2/3 y 3/4). Ellos representaban las fracciones unitarias, escribiendo sólo el denominador y el símbolo especial  que significaba parte, así,  = 1/12.

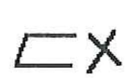
Cualquier otra fracción era reducida a una suma de fracciones unitarias, por ejemplo:

4/6 =2/3

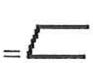
4/9=1/9+1/3

Además, 2/3 era la única fracción que no necesitó ser reducida, había un nombre especial para ella, a saber, "las dos partes" que se representaba en jeroglíficos como :

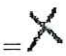
La simbolización para 3/4 era



que era igual a

1/2 = 

más

1/4 = 

Los cálculos con fracciones naturales son muy simples, tenemos por ejemplo que

significa en notación actual la siguiente igualdad de fracciones:

$$1/3 = 1/6+1/6$$

donde  es el signo de igualdad.

Otro ejemplo es

que en notación actual es,

$$2/3 = 1/3 + 1/3.$$

Por otra parte, con el uso de las fracciones, los egipcios pudieron desarrollar divisiones con números enteros cuyo resultado no fuera exacto. También llevaron al cabo divisiones con fracciones.

Utilizando la notación $1/n = \overline{n}$ y $2/3 = \overline{\overline{3}}$, las siguientes tres divisiones que aparecen en el papiro del Rhind serian semejantes a:

$19 \div 8$		$16 \div 3$		$4 \div 15$	
8	1	3	1/	15	1
16	2/	6	2	1+2	$\overline{10}$
4	$\overline{2}$	12	4/	3	$\overline{5}$/
2	$\overline{4}$/	2	$\overline{\overline{3}}$	1	$\overline{15}$/
1	$\overline{8}$/	1	$\overline{3}$/		
$2 + \overline{4} + \overline{8}$		$1 + 4 + \overline{3} = 5 + \overline{3}$		$\overline{5} + \overline{15}$	

El cociente en cada división tiene un resultado exacto con la ayuda de las fracciones, a las que ellos les denominaban números auxiliares; por ejemplo, si observamos el resultado de la división 19÷8 veremos que el resultado que ellos obtenían era 2 enteros más 1/4 más 1/8. Recordemos que su sistema de división era más bien un sistema de bipartición. Esto quiere decir que sólo se usaban números pares como cocientes y las fracciones sólo eran con numerador uno.

Los egipcios también desarrollaron un método general para completar una suma de fracciones a 1, esta regla se describe en notación actual de la siguiente forma:

$$1/a + 1/b + 1/c + \ldots + x = 1$$

En consecuencia si consideramos el mínimo común múltiplo como k, tenemos que

$$\frac{k/a + k/b + \dots + x}{k} = \frac{k}{k}$$

Así tendremos que

$$x = \frac{k - (k/a + k/b + \dots)}{k}$$

como ejemplo la suma 2/3 + 1/15 debe completarse a 1. Se buscan los números auxiliares que nos ayuden a completarla, es decir,

$$2/3 + 1/15 = 10/15 + 1/15 = 11/15$$

Como 2/3 es equivalente a 10/15, si a este le agregamos 1/15 nos da como resultado 11/15. El problema es cómo completar esta cantidad hasta formar 15/15; es decir, la unidad. Como podemos observar, a 11/15 le faltan 4/15 para ser 1, así que el residuo es 4; o sea, que nos faltan 4/15 para completar la suma a 1. El procedimiento para completarlo con numeración actual es el siguiente

$$\begin{array}{rl}
15 & 1 \\
1 + \overline{2} & \overline{10} \\
3 & \overline{5}\ / \\
1 & \overline{15}\ /
\end{array}$$

Los números auxiliares 10 y 1 son los numeradores de las fracciones $\overline{\overline{3}}$ y $\overline{15}$, respectivamente, cuando se reducen al denominador común 15. Como su suma es 11, es necesario buscar 4/15 para obtener 15/15, de aquí que se calcule el valor de 4/15, así 3 veces $\overline{5}$ más $\overline{15}$ es la cantidad deseada.

IV.4. Ecuaciones lineales.

Además de las operaciones aritméticas presentadas, los egipcios realizaban otras tareas matemáticas como los cálculos "*Aha*", los cuales están asociados a la resolución de problemas que se plantean por medio de *ecuaciones lineales con una incógnita*. En el papiro del Rhind se encuentran varios de estos cálculos, como ejemplo veamos los siguientes problemas traducidos ya al lenguaje actual.

IV.4.1. Problema 1. Ecuaciones lineales de la forma "a x = b".

"Una cantidad y una cuarta parte de ella, juntas dan 15".

Esto implica que se debe determinar dicha cantidad. Para este efecto el procedimiento egipcio que se sigue es:

"Calcula con 4, toma la cuarta parte de él, es decir 1; juntos dan 5"

después se realiza la división de $15 \div 5 = 3$ y finalmente una multiplicación, $4 \times 3 = 12$ y se tiene que la cantidad buscada es "12", su cuarta parte es 3, y juntas dan 15.

El método seguido aqui, parece ser, el de la falsa suposición. Se inicia con un número elegido arbitrariamente como la cantidad requerida, en este caso es 4, porque hace más simple la determinación de la cuarta parte. Cuatro y una cuarta parte de cuatro da 5. Pero el resultado requerido es 15, entonces la cantidad tienen que ser multiplicada por un número, de este modo si,

$$15 \div 5 = 3$$

y

$$(3 \times 4) + (12 \div 4) = 12 + 3 = 15$$

donde 3 es el factor de corrección, entonces 12 es la cantidad buscada.

Este problema puede interpretarse de la forma siguiente, tenemos una ecuación lineal con una incógnita; es decir, $a\,x = b$. Consideremos a x_1 un número arbitrario con una aproximación a la solución, sustituimos en la ecuación y obtenemos, ax_1. Esta cantidad es distinta de b, es decir,

$$ax_1 \neq b$$

Por tanto tenemos que buscar un número k tal que multiplicado por ax_1 de b, es decir,

$$k\,(ax_1) = b$$

Se tiene que el valor de k debe ser

$$k = \frac{b}{ax_1}$$

y dicho valor es el factor de corrección. Así la cantidad buscada es

$$x = k\,x_1$$

IV.4.2. Problema 2. "*Cálculo de lados de cuadrados*".

Otro problema del grupo de cálculos *Aha*, que aparece en el inicio del papiro del Rhind, tiene como solución la extracción de raíces cuadradas. El texto del problema no se puede descifrar completamente pero tiene el sigue desarrollo:

" *Un cuadrado y un segundo cuadrado, cuyo lado es 3/4 (en el texto real 1/2 + 1/4) del lado del primer cuadrado, tienen juntos un área de 100. Muéstrame como calculas sus lados*".

La solución inicia con una falsa suposición:

" *tomo un cuadrado de lado 1, y tomo 3/4 de 1, es decir, 1/2 + 1/4, como el lado de la otra área. Multiplico 1/2 + 1/4, por sí mismo, esto da 1/2 + 1/16. De aquí, si el lado de una de las áreas se toma como 1, y del otro lado como 1/2 + 1/4, entonces la adición de las áreas da 1 + 1/2 + 1/16. Toma la raíz cuadrada de esto, es decir, 1 + 1/4.*

Toma la raíz cuadrada del número dado 100, que es 10.

¿Cuántas veces es contenido 1 + 1/4 en 10?, 8 veces."

A partir de esta última operación el texto en el papiro se hace indescifrable, pero se puede ver que el resto es como sigue:

$$8 \times 1 = 8 \quad \text{y}$$

$$8 \times (1/2 + 1/4) = 6$$

donde 8 y 6 son respectivamente los lados de los cuadrados.

Resolver este problema con los métodos modernos implicaría que x^2 es el área del primer cuadrado y $3/4\ x^2$ es el área del segundo cuadrado, de esta manera,

$$x^2 + 3/4\ x^2 = 100$$

proponiendo $x_1 = 1$ como aproximación se obtiene

$$1 + 9/16 = 25/16 \neq 100$$

Este procedimiento es equivalente al que se realiza en el problema, a saber, $5/4 \neq 10$, después se busca el valor k tal que,

$$k \times (4/5) = 10$$

donde $k = 8$, y así

$$(3/4) \times k = (3/4) \times 8 = 6$$

de este modo 8 y 6 son los lados de los cuadrados respectivamente.

En este problema la solución de una ecuación cuadrática $(ax)^2 = b^2$, se reduce a la solución de una ecuación lineal $ax = b$.

IV.5. Comentarios finales.

Los cálculos *Aha* no están basados en problemas prácticos; estos resultados testifican el interés puramente teórico de los calculistas egipcios; podemos decir que eran científicos que gozaban con los cálculos puros y que buscaban ejercitar a sus alumnos en problemas realmente fuertes.

Además de los problema mencionados, los egipcios desarrollaron trabajos relacionados a la geometría, los cuales eran tratados aritméticamente. El calculista dedicado a estos problemas, al parecer, tenía conocimiento de reglas a partir de las cuales los cálculos eran realizados. No se ha encontrado una derivación sistemática de dichas reglas. En algunos casos, por ejemplo en el cálculo del área del círculo, estas son fórmulas aproximadas.

Las áreas de triángulos, rectángulos y trapezoides son determinadas por el uso de fórmulas correctas. La base del triángulo se dividide a la mitad, "en el orden de hacer el triángulo cuadrado" y entonces se multiplica por la altura. En forma similar, la suma de los lados paralelos de un trapezoide se dividide y luego se multiplica por la altura.

Para concluir esta última parte sobre los egipcios podríamos decir que aún no se concebían sus métodos como algebraicos. Sin embargo, fueron un puente para el desarrollo de los mismos, ya que con la entrada de los griegos en el período helenístico (invasión a Egipto por Alejandro Magno) estos métodos fueron la base para el desarrollo de la época de oro en las matemáticas griegas. A saber, los egipcios cuadraban 8/9 del diámetro, es decir, el área era:

$$A = 4\,(8/9)^2\, r^2$$

el valor

$$4\,(8/9)^2 = 3.1605\ldots$$

este era una buena aproximación del número π.

En el papiro de Moscú, aparece un problema donde, según ciertas interpretaciones actuales, se obtiene correctamente la fórmula para el volumen de una semiesfera.

Los volúmenes de cubos, de vigas y de cilindros fueron determinados multiplicando el área de la base por la altura. La principal dificultad que se les presentaba en este tipo de problemas provenía de las relaciones entre diferentes unidades de medida para volúmenes y para cantidades de grano.

CAPITULO V. CONCLUSIONES

Haciendo un recuento de las matemáticas realizadas por los babilonios podemos observar que tenían desarrollado un sistema de numeración con el cual podían representar todo número entero y además una notación para fracciones que por su sistema sexagesimal tenía algunas limitantes. Además, poseían la noción de las operaciones aritméticas fundamentales. También resolvieron problemas mediante nociones de ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas (con una y dos incógnitas) y las primeras aportaciones del que hoy conocemos como teorema de Pitágoras y sus relaciones con ángulos, entre tantos otros conocimientos.

Este recuento nos muestra que parte de las bases de las matemáticas actuales tienen sus inicios en esta cultura.

Por otra parte, los egipcios también poseían su propio sistema de numeración que es un poco más rudimentario que el de los babilonios, ya que pudieron expresar a los números enteros; pero en lo que corresponde a fracciones sólo se muestran con forma unitaria, es decir, fracciones con numerador uno. Por otra parte, las operaciones aritméticas eran más rudimentarias por su forma peculiar de realizarlas que es mediante duplicaciones y mediaciones (multiplicación y división, respectivamente). Con respecto a la solución de problemas prácticos, en el desarrollo del trabajo se menciona que ellos pudieron resolver sólo aquellos relacionados a ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita. En la geometría hicieron cálculos de áreas y volúmenes; sin embargo las nociones del teorema de Pitágoras no se muestra en sus problemas tratados.

De aquí que podemos concluir que las bases de las matemáticas actuales dieran inicio en estas dos grandes civilizaciones; pero es notorio que los babilonios poseían un conocimiento más avanzado que los egipcios, según las evidencias encontradas. No obstante, se podría pensar que los egipcios contribuyeron más ya que con la entrada de los griegos a Egipto se dio forma a lo que hoy conocemos como las bases del álgebra actual. Sin embargo, los conocimientos ya se habían creado; sólo bastaba que alguien llegara y les diera una forma más definida y ese carácter de generalidad que debe poseer un concepto para ser considerado como abstracto .

Reafirmamos que las evidencias que se han descubierto y han sido investigadas nos muestran que tanto los babilonios como los egipcios no desarrollaron métodos abstractos para la solución de sus problemas; sin embargo, según las datos de sus escritos, muestran que poseían una alta preparación y un hábil manejo de las reglas de sus métodos para realizar la operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y otras que son consecuencias de estas. Estos hechos nos llevan a pensar que es realmente importante que los niños adquieran un conocimiento profundo del sistema decimal y un nivel adecuado de los algoritmos de las cuatro operaciones fundamentales. De esta manera su comprensión de la matemática será mas accesible, aclarando que esto no quiere decir que se debe hacer énfasis en la memorización, mecanización y/o en el verbalismo. Por el contrario debe de lograrse que el niño comprenda la estructura del sistema de numeración decimal y desarrolle habilidades para operar con él.

Como ya mencionamos, lo trabajos desarrollados por estas dos grandes civilizaciones fundaron las bases para lo que hoy conocemos como álgebra. Aún cuando sus métodos sólo fueron experimentales y no se describe de manera general cada algoritmo o procedimiento de cálculo, sus reglas son muy semejantes a las que utilizamos hoy en día. Es importante hacer hincapié en que el álgebra tardo más de 15 siglos en desarrollarse y tomar una forma definida.

Por tales motivos debe tenerse en consideración que si un solo concepto tardó siglos en tomar una forma definida, no debemos esperar que todos los estudiantes lo manejen en un pequeño instante de tiempo. Hay que darles la oportunidad de tener el suficiente contacto con él, para que adquieran una información más amplia y puedan construirlo de forma adecuada en sus pensamientos. Es cierto que estos conocimientos hoy son las bases más sencillas del Álgebra, y que se están creando nuevas teorías a partir de éstas y que deben seguir desarrollándose, pero no olvidemos que éstas son las bases y si no se tiene un hábil manejo de las mismas ¿podemos esperar entonces que se puedan crear nuevas teorías sin conocer bien las bases en matemáticas? Esta pregunta se queda como reflexión para los lectores de este modesto trabajo.

Resta mencionar que fue una grata experiencia el adentrarnos en el quehacer matemático de una era muy lejana y el resolver los problemas como ellos lo hacían, además, esperamos que el trabajo realizado sirva como un complemento a materias que traten sobre el desarrollo conceptual del Álgebra, a mis compañeros de la carrera de matemáticas aplicadas.

BIBLIOGRAFÍA

Alanis L., Cuevas O. y Menchaca V. 1991. Lecturas en Educación Matemática "historia del álgebra parte II". UNAM, México. Primera Edición, No. 10, p.p. 1-15.

Bourbaki, Nicolas. 1972. Elementos de la Historia de las Matemáticas. Alianza Editorial, Madrid, p.p. 11-12.

Eves, Howard. 1976. Am Introduction to the History of Mathematics. Holt Pinehart and Winston, New York

Figueroa O., Escalante C. 1990. Lecturas en Educación Matemática, "Historia del Álgebra Parte I". UNAM, México. Primera Edición, No. 9, p.p. 1-88

Heath, Sir Thomas. 1981. A History of Greek Mathematics, Vol I. Dover.

Kline, Morris. 1985. Matemáticas, La Pérdida de la Certidumbre. Siglo XXI de España Editores S. A., Madrid, p. 19-22.

Neugebauer, Otto. 1962. The exact sciences in antiquity, 2nd ed. New York: harper and Row.

Piaget, Jean. 1985. Proceso cognitivo en el aprendizaje de los niños, Desarrollo de formadores. CONALEP, México D.F., p.p. 40-60.

Smith, David Eugene. 1985. History of Mathematics; Vol I. Dover Publications, Inc. Nueva York.

Van der Waerdem. 1961. Science Awakening; P. Nardkoof, New York.