

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA



**SINCRONIZACIÓN ROBUSTA DE ARREGLOS DE
SISTEMAS DINÁMICOS CON TÉRMINOS NO LINEALES
FUERTES**

TESIS

que presenta para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS

ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID ISAIAS ROSAS ALMEIDA

Al Doctor David Isaias Rosas Almeida por haberme aceptado para realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo, confianza, consejos y ejemplos, me forman no solo como investigador sino también como persona. Por facilitarme siempre los medios necesarios para realizar mi trabajo.

A los miembros del comité de tesis: Dra. Marcela Rodríguez, Dr. Daniel Hernández, Dr. Marco Félix, M.C. Mario Mora, por sus valiosos consejos, comentarios y disponibilidad.

Al personal de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California por su disposición de apoyarme en todo momento.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

*A Dios por haberme proporcionado fuerza,
motivación y salud para cumplir mis objetivos.*

*A mi madre Gabriela, por estar siempre presente
apoyándome, dedicando su vida y desvelos para
corregir mis errores y educarme para ser un
hombre de bien. Por sus ejemplos de honradez,
lealtad y constancia.*

*A mi padre Héctor, por su motivación
constante, sus ejemplos de perseverancia,
disciplina, lealtad y honradez que me ha
infundado, apoyándome en todas las decisiones
que he tomado a lo largo de mi vida.*

*A mis hermanas Blanca y Mónica, que a pesar
de ser mis hermanas menores, en muchas
ocasiones aprendí de ellas. Por su apoyo y*

*comprensión directa o indirectamente en la
elaboración de esta tesis.*

*A mis profesores, que sin duda influyeron en
gran medida para motivarme a continuar con mis
estudios, proporcionándome las herramientas
necesarias para seguir adelante.*

*Sin ustedes, no sería lo que soy, y de lo cual me
siento orgulloso.*

¡Gracias a ustedes!

RESUMEN de la Tesis de ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS. Mexicali, Baja California, México, Marzo de 2013.

SINCRONIZACIÓN ROBUSTA DE SISTEMAS DINÁMICOS CON TÉRMINOS NO LINEALES FUERTES

Resumen aprobado por:

Dr. David Isaias Rosas Almeida

Director de Tesis

Se estudia la sincronización de sistemas dinámicos que contienen términos no lineales fuertes, consideradas como perturbaciones. Se utilizan observadores que emplean modos deslizantes para estimar estas perturbaciones y así compensarlas en la estructura de control que lleva a cabo la sincronización basada en el método del control equivalente. Las técnicas de modos deslizantes y control equivalente son usadas para estimar las perturbaciones. Aquí, un término discontinuo de alta frecuencia es filtrado para obtener las componentes de baja frecuencia, las cuales son igual a los términos de perturbación. Se propone una estructura de control para lograr la sincronización, para lo cual se presentan resultados numéricos y experimentales.

Palabras clave:

Sincronización, términos no lineales fuertes, perturbaciones, modos deslizantes.

ABSTRACT of the thesis, presented by ERNESTO VICTOR GONZÁLEZ SOLIS, in order to obtain the MASTER OF SCIENSES DEGREE. Mexicali, Baja California, México, March 2013.

SINCRONIZACIÓN ROBUSTA DE SISTEMAS DINÁMICOS CON TÉRMINOS NO LINEALES FUERTES

Approved by:

Dr. David Isaias Rosas Almeida

Thesis Advisor

We study the synchronization of dynamical systems that contain strong nonlinearities, considered as disturbances. We used observers that employ sliding mode for estimating these disturbances and thus compensate for these disturbances in the control structure that performs the synchronization based on the equivalent control method. Techniques sliding mode and equivalent control are used to estimate the disturbances. Here, a high frequency discontinuous term is filtered to obtain the low frequency components which are equal to the terms of disturbance. We propose a control structure to achieve synchronization, which are presented for numerical and experimental results.

Keywords:

Synchronization, strong nonlinear terms, disturbances, sliding mode.

Índice general

1. Introducción	1
2. Antecedentes	4
2.1. Fundamentos de sistemas dinámicos	4
2.2. Criterios de estabilidad	8
2.2.1. Estabilidad de equilibrios	8
2.3. Planta	13
2.4. Sincronización	17
2.4.1. Definición de sincronización natural	19
2.4.2. Definición de sincronización controlada	20
3. Observadores de estado	22
3.1. Concepto de observador	22
3.2. Observador de Luenberger	25
3.3. Diseño de observadores robustos	27
3.4. Implementación de un observador robusto que genera un modo deslizante para identificación de perturbaciones	29

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
3.4.1. Control por modos deslizantes	29
3.4.2. Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable	43
3.4.3. Diseño del observador de estado	49
3.4.4. Identificación de perturbaciones	52
3.4.5. Implementación de dos tipos de filtros para estimar perturbaciones	53
3.4.6. Resultados de la implementación de los filtros . .	59
4. Definición del problema de sincronización	62
4.1. Topologías de conexión empleadas	63
4.2. Definición de los sistemas mecánicos utilizados	63
4.2.1. Sistema Carro-Péndulo (CP)	66
4.2.2. Sistema Péndulo Simple (PS)	67
4.2.3. Sistema Mecánico bidireccional de dos ejes (XY) .	68
4.2.4. Definición del objetivo de sincronización	68
5. Solución del problema de sincronización	70
5.1. Definición de la técnica de sincronización	70
6. Aplicación de la técnica de sincronización	74
6.1. Sincronización de dos sistemas, un Carro y un Péndulo .	75
6.1.1. Resultados numéricos	77
6.2. Sincronización de tres sistemas tipo carro	81

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
6.2.1. Resultados Numéricos	84
6.2.2. Resultados Experimentales	90
7. Conclusiones	95
Bibliografía	104
8. Apéndices	104
A. Diagramas de bloques en simulink, sincronización de carro y péndulo	105
B. Diagramas de bloques en simulink, sincronización de tres carros	108
C. Video (Implementación de filtros en la estimación de perturbaciones)	110

Índice de figuras

2.1. Una curva solución.	6
2.2. Flujo del campo vectorial f	6
2.3. Retrato de fase de un sistema dinámico.	8
2.4. Concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov.	10
2.5. Concepto de estabilidad exponencial.	10
2.6. Conceptos de estabilidad de equilibrios.	11
2.7. Ciclo límite.	13
2.8. Representación de la descomposición gráfica de la Zona Muerta (a) como la resta de una función lineal (b) y una función saturación (c).	15
2.9. Representación gráfica del fenómeno no lineal backlash (juego mecánico).	16
2.10. Representación gráfica de: a) Fricción Viscosa, b) Fricción Estática, c) Fricción de Coulomb.	16
3.1. El observador, como parte esencial de un sistema de control.	23

3.2. Diagrama a bloques de un Observador de Luenberger.	26
3.3. Plano de estado de un sistema de conmutación.	31
3.4. Modo deslizante en un sistema lineal.	33
3.5. Relevador con histéresis.	34
3.6. Oscilaciones en una vecindad de la superficie de conmutación.	34
3.7. Modo deslizante.	36
3.8. Modo deslizante por el método de la frontera límite.	37
3.9. Método del control equivalente para sistemas no lineales con un control escalar.	39
3.10. Método del control equivalente para sistemas afines.	41
3.11. Comportamiento del decremento de las funciones de Lya- punov con respecto al tiempo.	46
3.12. Estructura con una señal de control nominal suave y ro- busta ante perturbaciones.	54
3.13. Diagrama a bloques de un filtro FIR.	56
3.14. Sistema de control implementado para comparar el desem- peño de los filtros.	58
3.15. Diagrama a bloques del filtro analógico.	58
3.16. Posición del mecanismo y error entre la señal de referencia.	60
3.17. Señal promediada por ambos filtros.	60
3.18. Señal de control.	61
4.1. Topología básica de arreglo.	64

4.2. Topología de arreglo de tres sistemas, bajo un esquema maestro esclavo.	64
4.3. Topología compleja de arreglo.	65
4.4. Sistema Carro-Péndulo.	68
4.5. Sistema Péndulo Simple.	69
4.6. Sistema bidireccional de dos ejes.	69
6.1. Posiciones del carro y el péndulo.	78
6.2. Posición real y posición estimada del sistema Σ_1	79
6.3. Posición real y posición estimada del sistema Σ_2	79
6.4. Perturbaciones reales contra estimadas del sistema Σ_1	80
6.5. Perturbaciones reales contra estimadas del sistema Σ_2	80
6.6. Señal de acoplamiento aplicada el sistema Σ_2	81
6.7. Posiciones de los carros.	86
6.8. Posición real y posición estimada del sistema Σ_1	86
6.9. Posición real y posición estimada del sistema Σ_2	87
6.10. Posición real y posición estimada del sistema Σ_3	87
6.11. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_1	88
6.12. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_2	88
6.13. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_3	89
6.14. Señales de acoplamiento aplicadas a los sistemas Σ_2 y Σ_3	89
6.15. Posiciones de los carros.	91
6.16. Posición real y posición observada del Sistema Σ_1	91

6.17. Posición real y posición observada del Sistema Σ_2	92
6.18. Posición real y posición observada del Sistema Σ_3	92
6.19. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_1	93
6.20. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_2	93
6.21. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_3	94
6.22. Señales de acoplamiento aplicadas a los sistemas Σ_2 y Σ_3	94
A.1. Diagrama a bloques de la estructura de control para sincronizar un carro y un péndulo.	107
B.1. Diagrama a bloques de la estructura de control para sincronizar tres carros.	109

Capítulo 1

Introducción

La sincronización de sistemas dinámicos es un tema de investigación actual y de mucha importancia debido a su aplicación en diferentes áreas; comunicaciones, teleoperación y automatización de procesos industriales son algunos ejemplos. Se pueden definir dos líneas principales de investigación relacionadas a la sincronización; la primera es el estudio de los mecanismos existentes en fenómenos de la naturaleza que conducen a un estado de sincronización, la segunda es el diseño de esquemas de interconexión y señales de acoplamiento para lograr que dos o más sistemas alcancen un estado de sincronización, con el objetivo de mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado para realizar una tarea común.

Un ejemplo de este caso es la sincronización de arreglos de robots móviles, en donde el objetivo es simular el comportamiento de grupos de animales, como hormigas, peces o aves, que a pesar de ser un gran número de elementos, trabajan en forma coordinada en la realización de un trabajo común.

El proyecto que se realizó está enfocado en la segunda línea de investigación y tiene como objetivo continuar con el trabajo que se ha desarrollado en el tema de sincronización de sistemas dinámicos por el grupo de investigación en el área de control de la UABC. El objetivo general de este proyecto es proponer técnicas para sincronizar

arreglos de sistemas mecánicos de un grado de libertad inciertos, con medición parcial del vector de estado y con términos no lineales fuertes. Los principales resultados obtenidos son técnicas para la sincronización de arreglos de sistemas mecánicos inciertos con no linealidades fuertes, con diferentes topologías de interconexión, que pueden presentar acoplamientos bidireccionales o unidireccionales; en el caso de ser bidireccionales, cada acoplamiento puede tener una prioridad diferente. En el capítulo 2 se presenta una introducción a los sistemas dinámicos, así como sus características y criterios de estabilidad. Además se define el concepto de sincronización tanto conceptual como analíticamente.

Para la implementación de la técnica de sincronización, se diseñaron observadores robustos para estimar los estados no medidos y las perturbaciones en la planta, y de esta forma obtener un sistema en lazo cerrado con buenas propiedades de robustez. En el capítulo 3 se presenta un análisis de la implementación de observadores, empleando para ello el concepto de control por modos deslizantes.

Aquí se presentan experimentos de sincronización aplicando dos tipos diferentes de topologías de interconexión. Estas topologías se definen de forma estructural en el capítulo 4, donde se definen también los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos que se emplearon en los experimentos de sincronización.

Las topologías empleadas definidas en el capítulo 4, satisfacen las condiciones necesarias para que los arreglos sean sincronizables, de tal forma que se pueden aplicar para cualquier tipo de sistemas, incluso modificando las fuerzas de acoplamiento entre éstos, pues los resultados aquí presentados son producto de un valor particular de estas fuerzas de interconexión. En otras palabras, las topologías que se emplearon, representan una forma general para el arreglo, sin embargo éstas pueden modificarse, cambiando los valores o incluso eliminando algunas fuerzas de acoplamiento.

La sincronización de los sistemas mecánicos se llevó a cabo en base a la técnica de sincronización que se define en el capítulo 5, donde se establecen las condiciones

matemáticas necesarias para que un arreglo sea sincronizable.

En un primer caso se sincronizaron dos sistemas mecánicos, un sistema péndulo y un sistema tipo carro; en un segundo caso se sincronizaron tres sistemas tipo carro, tales resultados se presentan en el capítulo 6.

Las conclusiones del trabajo realizado se presentan en el capítulo 7, donde además se definen algunos objetivos a futuro para aplicar los resultados obtenidos en otros esquemas.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se describen las características de un sistema dinámico, sus puntos de equilibrio y criterios de estabilidad. Se define el concepto de planta, así como algunas características inherentes que son consideradas como perturbaciones al momento de implementar un sistema de control.

2.1. Fundamentos de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo t , dicha evolución está gobernada por un conjunto de reglas (no necesariamente ecuaciones) que especifica el valor del estado para cada valor del tiempo, dependiendo del estado anterior.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de varias formas, dos de las más importantes son las siguientes:

1. Por la naturaleza del dominio del tiempo en que están definidos se clasifican en discretos y continuos.
2. Si la ecuación diferencial o de diferencias que los describe no depende explícitamente de la variable independiente se les llama autónomos, de lo contrario son no autónomos.

En este trabajo se estudian solamente sistemas dinámicos continuos en el tiempo y autónomos. Estos, por lo general, se pueden representar por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el *estado*, y f es un campo vectorial, donde cada uno de sus componentes es una función no lineal de x . A la ecuación (1.1) se le conoce como la *representación en variables de estado* del sistema dinámico.

El conjunto de las *variables de estado* permite modelar la dinámica de un sistema, mientras que el *estado* es el valor de estas variables en un instante dado y a \mathfrak{R}^n se le llama espacio de estado.

Una solución de (1.1) es una función $\varphi(t) : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ tal que satisface

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)).$$

La imagen de φ es una curva en \mathfrak{R}^n y $f(\varphi(t))$ representa un vector tangente a la curva en un tiempo t .

Cuando se da una condición inicial $x(0) = x_0 \in U \subset \mathfrak{R}^n$, entonces se encuentra una solución $\varphi(x_0, t)$ tal que $\varphi(x_0, 0) = x_0$. En este caso $\varphi(x_0, t) : I \rightarrow \mathfrak{R}^n$ define una curva solución, trayectoria u órbita de la ecuación (1.1) a través de x_0 , ver figura 2.1. Si x_0 varía en un conjunto $U_0 \subset U$, entonces el flujo del sistema (1.1), $\varphi_t : U_0 \rightarrow U$ puede verse como el conjunto de trayectorias que emanan de U_0 , como se puede ver en la figura 2.2.

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución $\varphi(x_0, t)$ del sistema (1.1).

Teorema 2.1 *Sea $U \subset \mathfrak{R}^n$ un subconjunto abierto de un subespacio Euclidiano real y $f : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ una función continuamente diferenciable (C^1) y $x_0 \in U$. Entonces existe una constante $c > 0$ y una única solución $\varphi(x_0, t) : (-c, c) \rightarrow U$ satisfaciendo la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(0) = x_0$.*

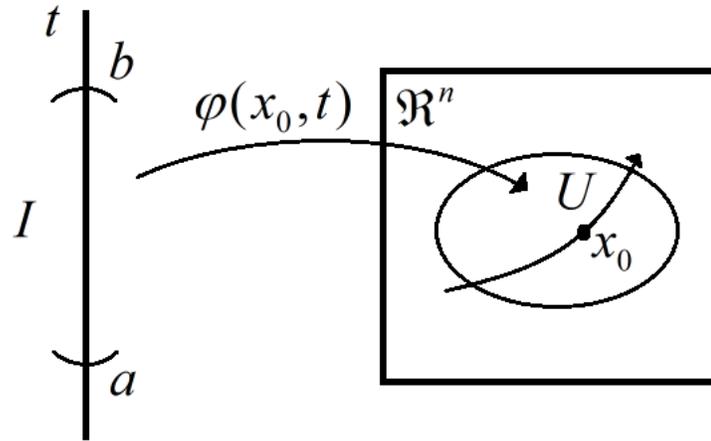


Figura 2.1. Una curva solución.

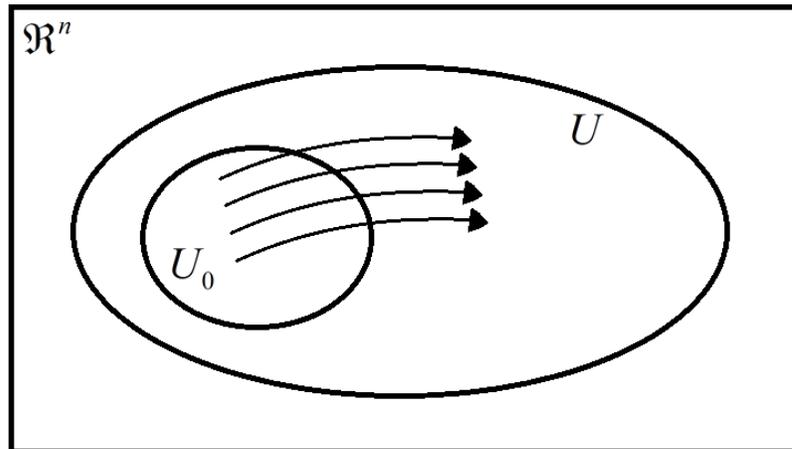


Figura 2.2. Flujo del campo vectorial f .

Una solución $\varphi(x_0, t)$ de un sistema dinámico puede ser constante o variante en el tiempo. Los llamados puntos fijos, puntos de equilibrio y soluciones estacionarias son otros tantos nombres para las soluciones constantes, mientras que soluciones dinámicas es otro nombre para las soluciones variantes en el tiempo.

Un punto de equilibrio se define como un punto en donde el sistema permanece por siempre, es decir, un punto en el espacio de estado en donde la variación del estado del sistema es cero. Estos puntos se pueden obtener resolviendo $f(x) = 0$.

Una clase importante de soluciones dinámicas son las soluciones periódicas, las cuales corresponden a oscilaciones, tal que $\varphi(t, x_0) = \varphi(t + T, x_0)$ para toda t , donde $T > 0$. Al menor valor de T se le conoce como el periodo de la oscilación. Un caso especial de soluciones periódicas son los ciclos límite, los cuales tienen la propiedad adicional de ser oscilaciones aisladas en el espacio de estado.

Frecuentemente se examina un conjunto de trayectorias emanando de varias condiciones iniciales en el espacio de estado. Cuando $t \rightarrow \infty$, la evolución se puede aproximar a diferentes soluciones del sistema dado. Un *retrato de fase* es una colección de trayectorias que representan la solución del sistema en el espacio de fase (estado). La figura 2.3 es un ejemplo de un retrato de fase en el espacio de estado. En general, el retrato de fase contiene información tanto del comportamiento transitorio así como del permanente.

La principal meta del estudio de sistemas dinámicos es *simple*, dado un sistema dinámico específico, dar una caracterización completa de la geometría de la estructura orbital. Si el sistema dinámico depende de algún parámetro, entonces caracterizar el cambio en la estructura orbital cuando se varían los parámetros. Sin embargo, esta tarea no es nada fácil. En las siguientes secciones se presentan algunas herramientas útiles para hacer este análisis. Algunas buenas referencias para un estudio detallado de sistemas dinámicos son [34] y [31].

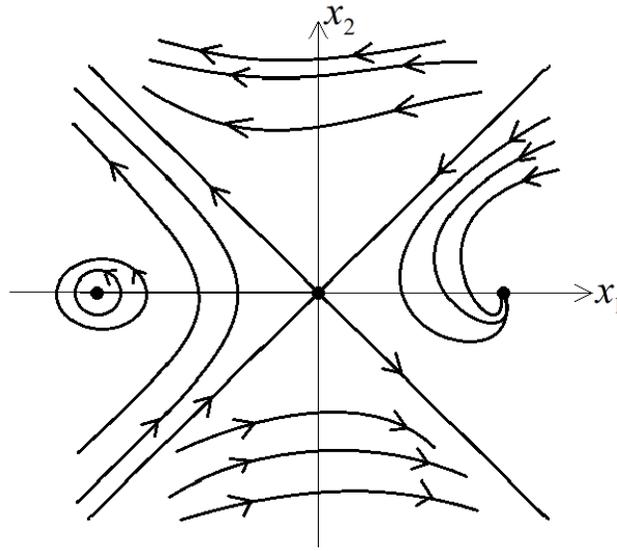


Figura 2.3. Retrato de fase de un sistema dinámico.

2.2. Criterios de estabilidad

Existen muchas definiciones de estabilidad, como estabilidad de puntos de equilibrio, estabilidad de ciclos límite, estabilidad entrada-salida, de Lyapunov, de Lagrange, etc.; las que se utilizan principalmente en este trabajo son la estabilidad de equilibrios y la estabilidad estructural y a continuación se describen en forma breve.

2.2.1. Estabilidad de equilibrios

Sin lugar a dudas, la teoría de estabilidad de equilibrios más importante es la introducida en el siglo XIX por el matemático ruso Alexandr Mikhailivich Lyapunov, la cual incluye dos métodos de análisis de estabilidad: el método por linealización y el método directo. El método por linealización da conclusiones acerca de la estabilidad local de un sistema no lineal en una vecindad de un punto de equilibrio, a partir de las propiedades de su aproximación lineal, mientras que el método directo determina las propiedades de estabilidad a partir del sistema no lineal.

Antes de enunciar estos métodos se presentan algunas definiciones importantes sobre estabilidad e inestabilidad.

Definición 2.1 (*Estabilidad en el sentido de Lyapunov*) El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ se dice que es estable si para cualquier $R > 0$ existe una $r > 0$, tal que si $\|x(0)\| < r$ entonces $\|x(t)\| < R$ para toda $t > 0$; de otro modo el punto de equilibrio es inestable, este concepto se ilustra gráficamente en la figura 2.4.

Definición 2.2 (*Estabilidad asintótica*) Un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es asintóticamente estable si éste es estable y si además existe alguna $r > 0$ tal que $\|x(0)\| < r$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede ver en la figura 2.6.

Definición 2.3 (*Estabilidad exponencial*) Un punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos α y λ tal que

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

en alguna región B_R alrededor del origen, este concepto se ilustra en la figura 2.5.

Definición 2.4 (*Estabilidad global*) Si la estabilidad asintótica (o exponencial) se mantiene para cualquier estado inicial entonces se dice que el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente (o exponencialmente) estable.??

Método por linealización de Lyapunov

Considere el sistema autónomo (1.1) y que $f(x)$ es continuamente diferenciable. Entonces el sistema puede ser escrito como

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} x + O(|x|^2),$$

así el sistema

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} x = Ax,$$

es una aproximación lineal del sistema no lineal en el punto de equilibrio.

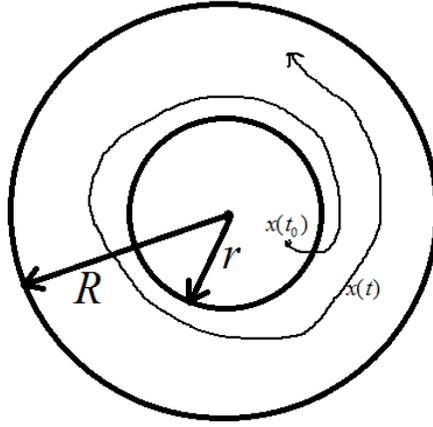


Figura 2.4. Concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

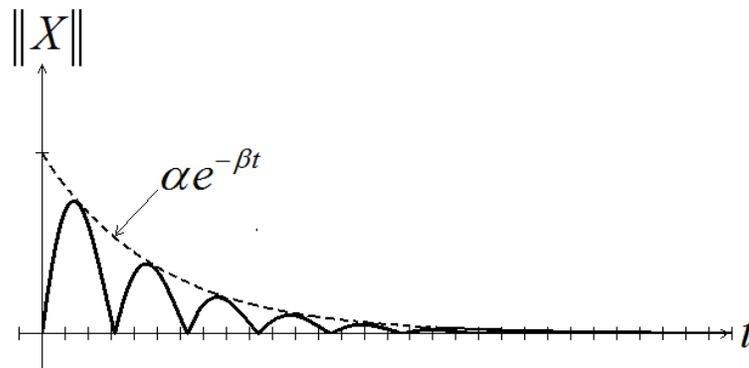


Figura 2.5. Concepto de estabilidad exponencial.

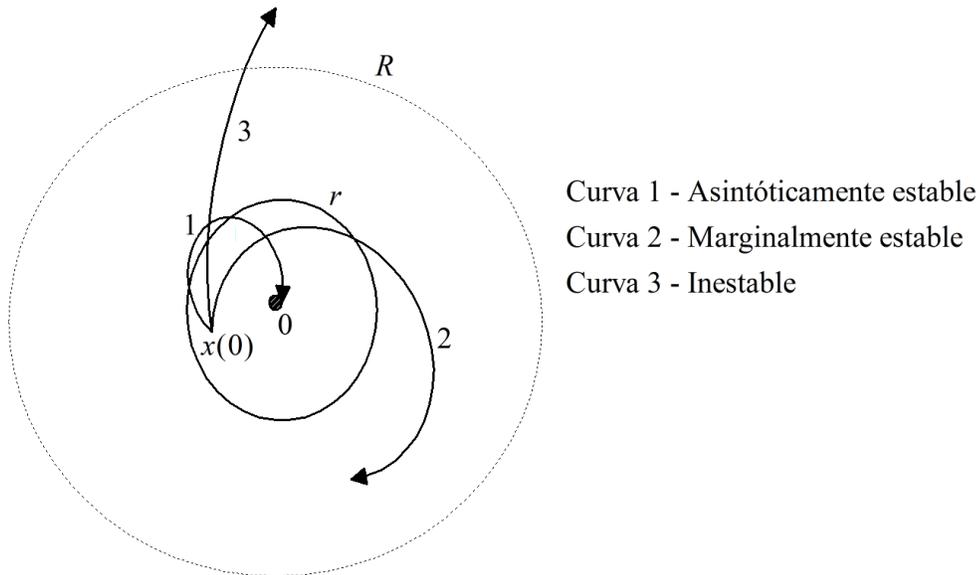


Figura 2.6. Conceptos de estabilidad de equilibrios.

Teorema 2.2 (*Método por linealización de Lyapunov*)

1. Si el sistema linealizado es estrictamente estable, es decir, todos los valores propios de la matriz A están en el lado izquierdo del plano complejo, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable.
2. Si el sistema linealizado es inestable, es decir, al menos un valor propio está en el lado derecho del plano complejo, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es inestable.
3. Si el sistema linealizado es marginalmente estable, es decir, los valores propios de A están en el lado izquierdo del plano complejo y al menos uno de ellos está en el eje imaginario, entonces no se puede concluir nada a partir de la aproximación lineal.

Método directo de Lyapunov

El método directo de Lyapunov es la extensión matemática de un fenómeno físico fundamental: si la energía de un sistema mecánico o eléctrico se disipa continuamente, entonces el sistema lineal o no lineal debe ir a un punto de equilibrio. Así se puede concluir la estabilidad de un sistema examinando la variación de una función escalar.

Esta teoría es bastante extensa, debido a esto aquí solo se presentan las definiciones y teoremas fundamentales de este método. Algunas buenas referencias para un estudio más detallado son Khalil H. (1996) y Slotine J. (1991).

Definición 2.5 *Una función escalar continua $V(x)$ es localmente positiva si $V(0) = 0$, y en una región B_{R_0} que contiene al origen, $x \neq 0 \implies V(x) > 0$. Si $V(0) = 0$ y la propiedad anterior se mantiene para el espacio de estado completo, entonces $V(x)$ es globalmente definida positiva.*

Definición 2.6 *Si en una región B_{R_0} que contiene al origen, la función $V(x)$ es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas y si su derivada en el tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (1.1) es semidefinida negativa, entonces $V(x)$ es una función de Lyapunov para este sistema.*

Teorema 2.3 (Estabilidad local) *Si en una región B_{R_0} existe una función de Lyapunov $V(x)$ entonces el punto de equilibrio es estable, si además $\dot{V}(x)$ es definida negativa en B_{R_0} entonces la estabilidad es asintótica.*

Teorema 2.4 (Estabilidad global) *Asuma que existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas tal que*

$V(x)$ es definida positiva

$\dot{V}(x)$ es definida negativa

$V(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$,

entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

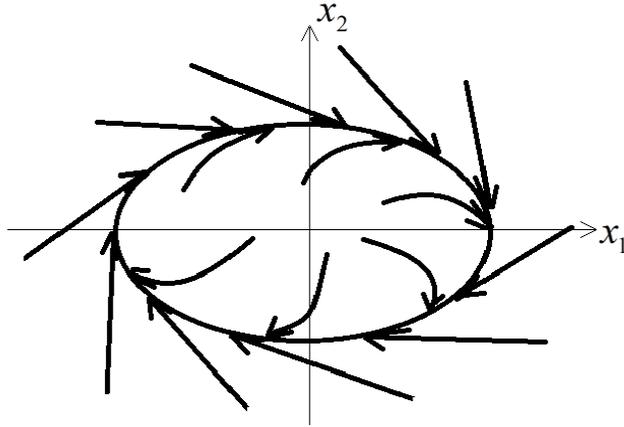


Figura 2.7. Ciclo límite.

Un punto de equilibrio muy importante son los llamados ciclos límite, los cuales son una trayectoria aislada cerrada, en otras palabras, no existen trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite. Ver figura 2.7.

Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. A pesar de que un sistema lineal puede tener órbitas cerradas, éstas no son consideradas ciclos límite pues no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo tipo centro.[36]

2.3. Planta

Una planta se define como un conjunto de elementos de una máquina que funcionan en conjunto, cuyo objetivo es realizar una tarea en particular. En el tema de control automático se incorporan sistemas eléctricos, mecánicos, neumáticos, hidráulicos, etc. Se sabe de antemano que existe una analogía total entre estos sistemas, de forma que de un circuito eléctrico se puede encontrar un sistema mecánico análogo y viceversa, desde luego la analogía se presenta en el tipo de ecuaciones que modelan estos sistemas,

ya que las variables en cada sistema son completamente diferentes. Para efecto de esta tesis, cuando se haga referencia a una planta, se entenderá que se trata de un sistema de naturaleza mecánica. [41]

Así una planta es cualquier objeto físico que se deseé controlar. En el momento que se determina el modelo de una planta sujeta a control, tal modelo matemático representa sólo una aproximación de la planta real, pues en ésta se presentan un conjunto de no linealidades no suaves que generalmente no se consideran en el diseño de sistemas de control, aún cuando en los sistemas reales siempre se presentan este tipo de características y otras dinámicas que no se modelan.

Los modelos que describen este tipo de componentes presentan usualmente términos no diferenciables, discontinuos, o incluso son de naturaleza híbrida, que requieren herramientas de análisis complicadas y para los cuales existen pocos resultados útiles en la práctica.

Dentro de estas no linealidades que se presentan con mayor frecuencia en las plantas reales están la zona muerta, el backlash tipo histéresis y los diferentes tipos de fricción.

La zona muerta es el fenómeno que se presenta por la fricción estática que existe entre el rotor y las escobillas de un motor; fenómeno que debe ser considerado debido a que si no se vence esta fuerza mecánica, el motor no girará. En el caso de un control de velocidad no es tan importante, sin embargo para un control de posición juega un papel crucial. El fenómeno de zona muerta se ilustra en la figura 2.8, donde se puede apreciar, que para cuestión de análisis este fenómeno de zona muerta (inciso a) puede ser representado como la resta de dos funciones, una función lineal (inciso b) y una función saturación (inciso c).

La holgura o huelgo ("backlash") es el juego mecánico que se presenta en los mecanismos. Los modelos propuestos para este fenómeno dependen de la rigidez o flexibilidad de los elementos de transmisión, los modelos más usados para describir el backlash corresponden a una zona muerta para transmisiones flexibles o una histéresis de amplitud

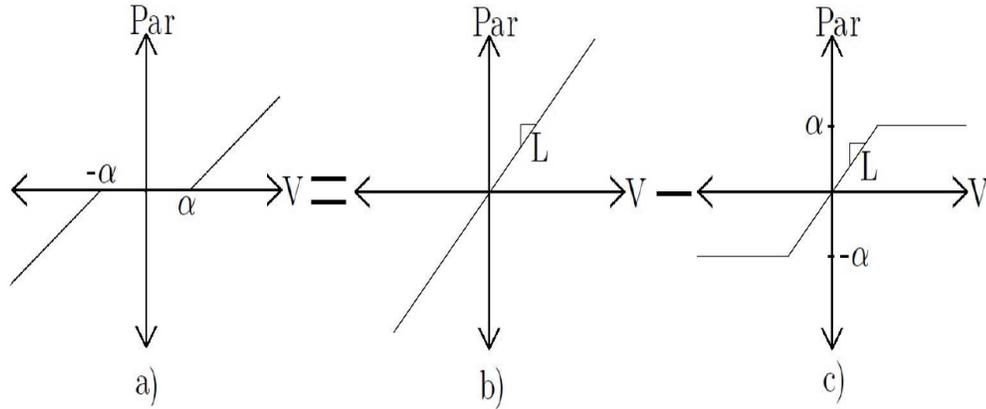


Figura 2.8. Representación de la descomposición gráfica de la Zona Muerta (a) como la resta de una función lineal (b) y una función saturación (c).

variable para transmisiones rígidas. La representación gráfica de este fenómeno se puede ver en la figura 2.9. [36]

La fricción se presenta cuando existe movimiento o tendencia a dicho movimiento entre dos elementos físicos. En la práctica, cuando se habla de un movimiento traslacional o rotacional, se presentan numerosos tipos de fricción, que pueden componerse de la fricción viscosa, la estática, la de Coulomb, entre otras. Algunos de estos tipos de fricción se muestran en la figura 2.10. [36]

La fricción viscosa representa una fuerza que es una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad. La fricción estática representa una fuerza que tiende a impedir el movimiento desde el comienzo, desaparece una vez que se inicia el movimiento. Finalmente la fricción de Coulomb es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad, pero el signo de la fuerza de fricción cambia al invertir la dirección de la velocidad, es decir, [36]

$$f(t) = F_c \frac{dx/dt}{|dx/dt|}.$$

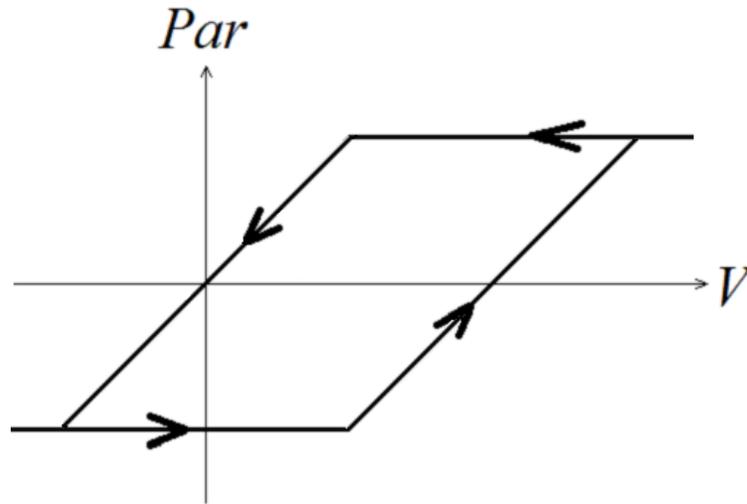


Figura 2.9. Representación gráfica del fenómeno no lineal backlash (juego mecánico).

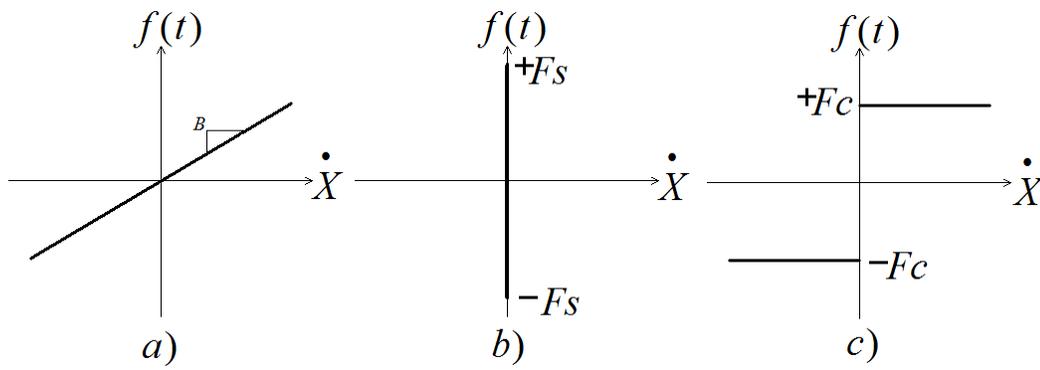


Figura 2.10. Representación gráfica de: a) Fricción Viscosa, b) Fricción Estática, c) Fricción de Coulomb.

2.4. Sincronización

La palabra sincronización significa coincidencia de hechos o fenómenos en el tiempo, correlación o correspondencia en tiempo entre dos o más sistemas dinámicos [4], [10], [13].

La sincronización es un fenómeno natural en muchos sistemas de la naturaleza y sistemas contruidos por el hombre; por ejemplo, la sincronización de dos relojes de péndulo sujetos a una barra flexible [9], o la sincronización de la rotación de la luna con su movimiento orbital, de manera que la luna siempre presenta el mismo lado hacia la tierra [4].

Por otro lado, la sincronización puede ser clasificada por el número de estados sincronizados y por la función que los relaciona [12], [13]. De acuerdo al número de estados sincronizados se clasifica en sincronización completa y en sincronización parcial, si todas las variables de estado o sólo un subconjunto de ellas se sincroniza. De acuerdo a la relación que existe entre los estados, la sincronización puede ser idéntica, de fase o aproximada, dependiendo de la función que relacione dichos estados. Al caso general se le llama sincronización generalizada.

La sincronización de sistemas dinámicos tiene muchas aplicaciones, una de ellas es la sincronización de sistemas caóticos [12], [42], [53]. La sincronización de sistemas caóticos se puede utilizar en el desarrollo de sistemas de comunicaciones privadas, algunos trabajos sobre este tema son: [3], [55], [32], [33] y [30].

Otra aplicación muy importante es la sincronización de sistemas mecánicos. Hoy en día, los desarrollos tecnológicos y los requerimientos en eficiencia y calidad en procesos de producción han resultado en el desarrollo de sistemas muy complejos formados por arreglos de robots manipuladores y mecanismos en general. En la práctica, muchos de estos sistemas trabajan bajo un esquema cooperativo o coordinado; en ambos casos la sincronización debe estar presente. Algunas de las aplicaciones de estos sistemas son en ensamble, pintura, doblado y soldadura; en algunas situaciones estas tareas no pueden

ser realizadas por un sólo sistema y se requieren dos o más robots manipuladores, además de que en estos sistemas el fenómeno de sincronización no se presenta de forma natural, por lo que se deben agregar conexiones artificiales o un sistema adicional cuyo objetivo sea generar señales de acoplamiento o control para obtener la sincronización entre los sistemas. Algunos trabajos importantes sobre sincronización de mecanismos son: [46], [23], [39], [11], [43] y [52]. Así, la sincronización puede verse como un problema de control; a la sincronización así obtenida se le llama sincronización controlada [10].

Actualmente existen varias propuestas para resolver el problema de sincronización bajo situaciones más reales para clases particulares de sistemas, algunas de estas propuestas son las siguientes. Para resolver el problema de incertidumbres paramétricas se han utilizado controles adaptivos, los cuales tratan de estimar los valores reales de los parámetros de los sistemas y de esta forma aplicar la señal de control adecuada para obtener sincronización. Algunas propuestas están reportadas en, [24], [23] y [25].

Los sistemas de segundo orden juegan un papel importante en la investigación sobre sincronización de sistemas dinámicos ya que pueden presentar diferentes tipos de soluciones como puntos de equilibrio, órbitas periódicas y para el caso no autónomo pueden presentar soluciones caóticas. En la práctica, muchos sistemas pueden modelarse como sistemas de segundo orden, algunos ejemplos son las neuronas artificiales y los sistemas mecánicos.

En lo que se refiere a sincronización de arreglos, en [14] se presenta una técnica para sincronizar arreglos de sistemas dinámicos lagrangianos con topologías particulares. Esta técnica, basada en un análisis de estabilidad por contracción, garantiza convergencia exponencial global.

Dos artículos recientes sobre sincronización de sistemas de segundo orden son [58] y [1]. En [58] se abordan topologías especiales de arreglos de sistemas de segundo orden pero considera sistemas idénticos, sin incertidumbres ni perturbaciones y medición completa del vector de estado. En el arreglo no existe un sistema de referencia, por lo

que no se conoce la solución en la que se van a sincronizar todos los sistemas que forman el arreglo. Las señales de acoplamiento son una combinación lineal de las posiciones y velocidades. Los resultados son interesantes pero difíciles de llevarlos a la práctica.

En ninguno de los trabajos antes mencionados se ha abordado el problema de sincronización de sistemas mecánicos con términos no lineales fuertes, como la zona muerta, fricción seca y backlash, es por esto que en esta tesis se buscarán procedimientos para el diseño de señales de acoplamiento que permitan la sincronización de esta clase de sistemas.

2.4.1. Definición de sincronización natural

Una de las definiciones analíticas de la sincronización es la siguiente. Considere k sistemas dinámicos de dimensión finita, desacoplados y sin entradas, definidos por

$$\Sigma_i : \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.2)$$

donde $x_i \in \mathfrak{R}_i^n$ es el vector de estado de cada sistema. Para cada Σ_i se define un conjunto de salidas $y_i = h_i(x_i) \in \mathfrak{R}^m$, $i = 1, \dots, k$, donde $h_i : \mathfrak{R}_i^n \rightarrow \mathfrak{R}_i^m$.

Cuando la sincronización ocurre en sistemas desconectados del tipo (4.2), se conoce como sincronización natural. Un caso más interesante es la sincronización de sistemas interconectados en donde los sistemas pueden ser representados como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= f_i(t, x_i, \dot{x}_i) + \tilde{f}_i(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= f_0(x_0, x_1, \dots, x_k, t), \end{aligned}$$

Considere ahora l funcionales ϵ_g , donde

$$\epsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)).$$

Se dice que los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, bajo condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están sincronizados con respecto a las funcionales $\epsilon_g(\cdot)$ si

$$\epsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)) \equiv 0, \quad g = 1, \dots, l,$$

y se satisface para todo $t \in T$, donde T es el conjunto de tiempo, $T = \mathfrak{R} \geq 0$ para tiempo continuo, o $T = \mathbb{Z} \geq 0$ para tiempo discreto.

Por otro lado se dice que los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, bajo condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están aproximadamente sincronizados con respecto a la funcional $\epsilon_g(\cdot)$ si existe una constante $\zeta > 0$ tal que

$$|\epsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot))| \leq \zeta,$$

para toda $t \in T$.

Finalmente, los sistemas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, bajo condiciones iniciales $x_1(0), \dots, x_k(0)$, están asintóticamente sincronizados con respecto a la funcional $\epsilon_g(\cdot)$ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_g(t, y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)) = 0. \quad (4.3)$$

2.4.2. Definición de sincronización controlada

Las definiciones anteriores sobre sincronización natural de k sistemas se aplican idénticamente para definir la sincronización de este nuevo conjunto de sistemas, descritos por ecuaciones diferenciales con un vector de entrada de dimensión finita, $P = P(V) \in \mathfrak{R}^m$, es decir

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, t) + \tilde{f}_i(t, x_{1i}, \dots, x_{ki}, P_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.4)$$

donde $P_i = u_{oi} + v_i$, u_{oi} es una entrada de control nominal y v_i es una entrada de acoplamiento para lograr la sincronización.

El problema de la sincronización controlada con respecto a la funcional ϵ_g es encontrar una entrada de acoplamiento v_i , como una función de retroalimentación de los estados x_1, \dots, x_n , tal que las condiciones de sincronización dada por dicha funcional sean satisfechas.

La forma más simple de retroalimentación es la retroalimentación estática de estado, donde la ecuación del controlador tiene la siguiente forma

$$v_i = v_i(t, x_{1i}, \dots, x_{ki}), \quad (4.5)$$

para alguna función $v_i : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_1^n, \dots, \mathfrak{R}_k^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$. Una forma más general es la retroalimentación dinámica de estados

$$\frac{dw}{dt} = W(t, x_1, \dots, x_k), \quad (4.6)$$

$$v_i(t) = v_i(t, x_1, \dots, x_k, w), \quad (4.7)$$

con $w \in \mathfrak{R}^v$, $W : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_1^n \times \dots \times \mathfrak{R}_k^n \times \mathfrak{R}^v \rightarrow \mathfrak{R}^v$, $v : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_1^n \times \dots \times \mathfrak{R}_k^n \times \mathfrak{R}^v \rightarrow \mathfrak{R}^m$. Ahora se pueden definir todos los casos de sincronización antes mencionados en su versión de sincronización controlada.

La sincronización controlada es relevante sólo en los casos cuando la sincronización natural no se presenta y la inclusión de una retroalimentación dinámica o estática del estado es necesaria para lograr la sincronización después de un transitorio, o bien si se desea una convergencia más rápida al estado de sincronización.

El problema de sincronización está íntimamente relacionado con el problema de estabilidad [60], [19], [45], [38]; por lo tanto, los problemas existentes también están relacionados con problemas de estabilidad. Una cantidad importante de trabajos sobre sincronización de sistemas dinámicos, incluyendo la sincronización de mecanismos, asumen que los sistemas son idénticos y que no existen incertidumbres paramétricas ni perturbaciones externas.

Enseguida se presentan algunos resultados previos y se establecen algunos problemas abiertos que serán abordados durante el proyecto.

Capítulo 3

Observadores de estado

Un observador es un sistema alterno, que permite estimar el comportamiento de las variables de estado, parámetros y términos desconocidos de un sistema real. En este capítulo se presenta un observador que estima términos desconocidos en la planta, los cuales pueden utilizarse para su compensación en un sistema de control.

3.1. Concepto de observador

La estimación de variables de estado no medibles se suele denominar observación. El concepto de observadores se puede atribuir a David Luenberger, quien lo desarrolló como resultado de su tesis doctoral. [36]

Los observadores de estado, o simplemente observadores, son sistemas dinámicos que se encargan de estimar información interna de un sistema, que no se puede medir directamente, como variables de estado, parámetros desconocidos de la planta o perturbaciones, en base a la información que sí se puede medir.

Una forma de clasificar los observadores de estado es de acuerdo al número de variables estimadas en función del número total de variables de estado de un sistema.

Los observadores de estado completo estiman todas las variables de estado de un

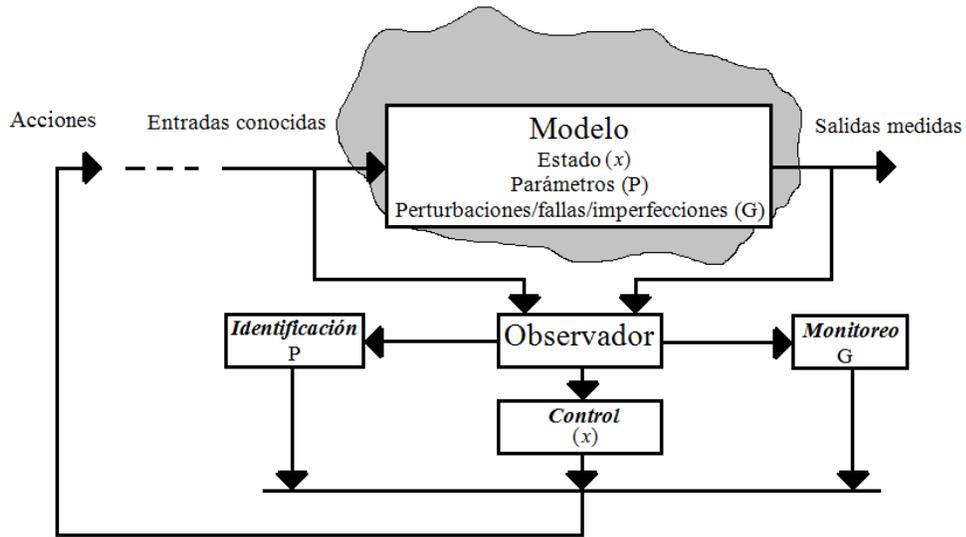


Figura 3.1. El observador, como parte esencial de un sistema de control.

sistema a partir de las variables de estado que pueden ser medidas. Los observadores de orden reducido son aquellos que estiman un subconjunto del total de las variables de estado del sistema. Un observador de este tipo, por lo general no estima las variables que son medibles físicamente.

Algunas de estas variables desconocidas se pudieran medir colocando diferentes tipos de sensores, lo cual en ocasiones no es posible o conveniente, por razones económicas o tecnológicas. Por ejemplo, cuando el elemento de medición está sometido a temperaturas extremas o ambientes corrosivos, debido a que los sensores no han sido diseñados para resistir estos ambientes.

Esta información interna del sistema puede ser requerida para fines de modelado del sistema, para un monitoreo de fallas en el sistema o para establecer un sistema de control. Esto hace que el diseño de un observador se convierta en la esencia de un sistema general de control, ver figura 3.1.[8]

En resumen, un observador se basa en un modelo de la planta, cuyo funcionamien-

to depende de la información que se puede medir, y cuyo objetivo es reconstruir las variables o parámetros que no se pueden medir. De este modo, un observador se puede caracterizar como un reconstructor de información y está basado en las mediciones que se pueden obtener del modelo del sistema.

Usualmente el modelo del sistema se representa en el espacio de estado y se asume que la información que alimenta al observador proviene de las variables de estado. En este sentido, se puede intentar diseñar un sistema dinámico alterno cuyo estado pueda dar una estimación del estado actual del sistema en cuestión.

Sea un sistema dinámico descrito por su representación en variables de estado

$$\dot{x}(t) = f(y(t), u(t)), \quad (1.1)$$

$$y(t) = h(x(t)). \quad (1.2)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $u(t)$ es la entrada, $y(t) \in \mathfrak{R}^m$ es la salida del sistema y $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$. [59]

Dado el sistema (1.1-1.2), para poder actuar sobre el sistema o monitorearlo, será necesario conocer el vector de estado $x(t)$, por otro lado, en la práctica sólo se tiene acceso a los vectores u y y . Así, el problema de observabilidad puede ser formulado como: Dado un sistema descrito por la ecuación (1.1), se puede encontrar una estimación $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ a partir del conocimiento de $u(\tau)$, $y(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq t$.

El problema toma sentido cuando no se puede invertir h con respecto a x para cualquier tiempo de entrada. En vista de esto se puede buscar una solución en términos de optimización, es decir, mediante la búsqueda de la mejor estimación $\hat{x}(0)$ de $x(0)$ que pueda dar origen a la evolución de $y(\tau)$ sobre el intervalo $[0, t]$, y de esta forma obtener una estimación de $\hat{x}(t)$ mediante la integración de (1.1) de $\hat{x}(0)$ y bajo $u(\tau)$.

En base al planteamiento anterior, se puede definir un observador.

Definición 5. Observador. Considérese el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), y(t), t,); \quad (1.3)$$

donde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ representa el vector de estado, $u(t)$ es la entrada y $y(t) \in \mathfrak{R}^m$ la salida del sistema. El sistema auxiliar

$$\dot{\hat{x}}(t) = H(x(t), u(t), y(t), t);$$

es un observador de estado si

$$\hat{x}(0) = x(0) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0; \quad (1.4)$$

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Si (1.5) se mantiene para todo $x(0), \hat{x}(0)$, entonces el observador es global. Si (1.5) se mantiene con una convergencia exponencial, el observador es exponencial, finalmente si (1.5) se mantiene con una tasa de convergencia que pueda ser sintonizada, entonces el observador es sintonizable.

Es importante notar que la diferencia $\hat{x} - x$, se tomará como el error del observador. Finalmente, de la definición anterior, se puede observar que el problema de observación se convierte en un problema de diseño del observador.

La función del observador, es entonces, disminuir conforme avanza el tiempo, la diferencia entre los estados reales y los estados estimados. Tal diferencia es originada por las diferentes condiciones iniciales del sistema.[44]

3.2. Observador de Luenberger

El problema de no poder medir, por razones económicas o tecnológicas, todas las variables de estado fue abordado por David G. Luenberger (1937), quien desarrolló el conocido Observador de Luenberger, que es un observador de orden completo, quizá el más famoso, y cuyo diagrama de bloques se representa en la figura 3.2 [22]. En un principio, fue diseñado solamente para sistemas lineales [37], pero actualmente hay varias versiones de este observador para su aplicación a sistemas no lineales, ver por ejemplo [20], [21] y [51].

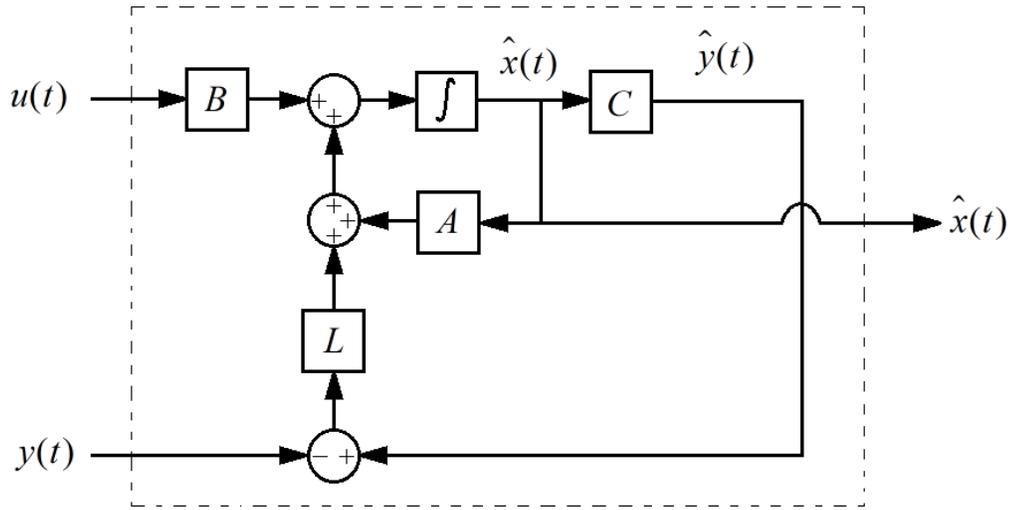


Figura 3.2. Diagrama a bloques de un Observador de Luenberger.

Considérese la planta

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.6)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad x(0) = x_o \neq 0, \quad (2.7)$$

en el que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ son escalares, y las matrices (A , B , C) son conocidas.

El observador de estado está compuesto por una reproducción del sistema más un término adicional de corrección. Se define $x(t)$ como el estado del sistema y $\hat{x}(t)$ como el estado estimado del sistema. Entonces la estructura del observador es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

el observador estima la entrada y la salida del sistema, además de corregir la ecuación dinámica mediante la ganancia L con un término que es proporcional al error entre la salida del sistema real $y(t) = Cx(t)$ y la salida estimada $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$.

Para demostrar el funcionamiento del observador, se define el error entre los estados reales del sistema y los estimados

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

cuya dinámica es

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

sustituyendo 2.6 y 2.8, se tiene

$$\dot{e}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(y(t) - \hat{y}(t)) = (A - LC)e(t),$$

de este modo $\hat{x} \rightarrow x(t)$ si los valores propios de la matriz $A - LC$ son estables, es decir, que se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo. Esto debido a que la solución de la ecuación $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$ es

$$e(t) = e^{(A-LC)t} e_0 = e^{(A-LC)} (x(0) - \hat{x}(0)).$$

De tal manera que si los valores propios de $A - LC$ tienen todas partes reales negativas, el error $e(t)$ tiende a ser cero sin importar su condición inicial. Lo cual se traduce en que el observador de Luenberger, a medida que pasa el tiempo, mejora asintóticamente la estimación de los estados, esto bajo el supuesto conocimiento exacto del modelo del sistema y de sus parámetros.

De esto se concluye que el problema de diseño de un observador se reduce a la determinación de una ganancia del observador L tal que los valores propios de la matriz $A - LC$ estén todos en el semiplano izquierdo.

3.3. Diseño de observadores robustos

Para diseñar cualquier un algoritmo de control es necesario contar con variables de estado que usualmente no se pueden medir, por lo que es necesario emplear un

observador de estado, que en esta tesis se implementa como una herramienta virtual que estima las variables de estado desconocidas. Se le considera una herramienta virtual, puesto que se desarrolla como software o programa dentro de una computadora.

Las propiedades que debe poseer un buen observador son robustez a errores en los parámetros del modelo y en las medidas, inmunidad al ruido, rapidez de convergencia y baja carga de software. Algunas de estas propiedades entran en conflicto, como la rapidez de convergencia y la inmunidad al ruido, por lo que al momento del diseño se da prioridad a una de ellas, reduciendo en lo posible la otra. Primordialmente los observadores se diseñan para optimizar la velocidad de convergencia.

El observador de Luenberger tiene buen desempeño cuando el modelo de la planta tiene un alto grado de exactitud. Idealmente, se necesita un modelo exacto de la planta para aplicar este esquema; sin embargo, la presencia de perturbaciones hace que la estimación del estado sea errónea y de esta manera se degrada el desempeño del sistema de control.

Para resolver este problema se han propuesto algunos esquemas de observadores robustos como los siguientes: en [20] se propone un observador robusto basado en el observador de Luenberger; en el diseño se requiere la solución de la ecuación algebraica de Riccati y es aplicado a sistemas lineales perturbados. Otros esquemas utilizan el filtro de Kalman, ver por ejemplo [50].

También hay propuestas de observadores robustos diseñados a partir de técnicas de control discontinuo, por ejemplo observadores por modos deslizantes, un compendio de estos observadores se encuentra en [7]. Muchos de ellos presentan buenas propiedades de convergencia en tiempo finito. Sin embargo, para sistemas con muchas entradas y muchas salidas el proceso de diseño es largo y difícil. Tales observadores son implementados en controladores que son robustos a perturbaciones externas y variaciones paramétricas [56].

3.4. Implementación de un observador robusto que genera un modo deslizante para identificación de perturbaciones

A lo largo de la historia del control automático, la investigación de sistemas con acciones de control discontinuo ha sido abordada con un gran interés. El término modo deslizante apareció por primera vez en el contexto de los sistemas controlados con relevadores.

Los sistemas de control de estructura variable son una clase de sistemas a través de los cuales la ley de control cambia deliberadamente durante el proceso de control de acuerdo con alguna regla, la cual depende del estado del sistema.

3.4.1. Control por modos deslizantes

La teoría que fundamenta las técnicas actuales de diseño y análisis del control por modos deslizantes, tiene sus orígenes en los años 30's, con los estudios realizados por B. Kulebakin (1932), quien utilizó un método de control por vibración en la regulación de voltaje de un generador de DC de una aeronave. Este y otros ejemplos muestran la antesala para la teoría que actualmente se conoce como el método de control por modos deslizantes, aunque este término no haya sido empleado directamente en ese momento.

Un ejemplo convencional para demostrar el método de los modos deslizantes, en términos del espacio de estado, es un sistema discontinuo invariante en el tiempo de segundo orden

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x &= u + \gamma(t), \\ u &= -M \operatorname{sign}(s), \quad s = \dot{x} + cx, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde M , a_1 , a_2 y c son parámetros constantes, $\gamma(t)$ es una perturbación acotada y s es la superficie de conmutación o deslizamiento.

El comportamiento del sistema puede ser analizado en el plano de estado (x, \dot{x}) . La figura 3.3 muestra el diagrama de estado para valores $a_1 = a_2 = 0$. El control u está en función de las discontinuidades de la superficie de deslizamiento $s = 0$. Las trayectorias de estado se dividen en dos familias: la primera corresponde a $s > 0$ y $u = -M$ (parte superior del semiplano); la segunda familia corresponde a $s < 0$ y $u = M$ (parte inferior del semiplano). Dentro del segmento \overline{mn} , sobre la superficie de conmutación, las trayectorias de estado son atraídas hacia la superficie. Habiendo alcanzado el segmento \overline{mn} en algún tiempo t_1 , el estado no puede abandonar la superficie de conmutación. Esto significa que la trayectoria de estado permanecerá en la superficie de conmutación para $t > t_1$. Este movimiento de las trayectorias de estado dentro de la superficie de deslizamiento es llamado modo deslizante. Dado que en el transcurso del modo deslizante, la trayectoria de estado coincide con la superficie de deslizamiento $s = 0$, esta ecuación puede ser interpretada como la ecuación de movimiento del sistema, es decir

$$\begin{aligned} s &= 0, \\ \dot{x} + cx &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Es importante notar, que su solución $x(t) = x(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ no depende de los parámetros de la planta ni de sus perturbaciones. Esto se conoce como propiedad de invarianza, que es deseable en sistemas de control. Es por eso que este método se aplica en plantas que operan bajo condiciones de incertidumbre.

Regularización

El primer problema de emplear modos deslizantes para el diseño de control de lazo cerrado, es la descripción matemática para este movimiento. Esto surge debido a las discontinuidades en las entradas de control que describen el movimiento del sistema. En los sistemas discontinuos, no se puede aplicar la teoría convencional para ecuaciones

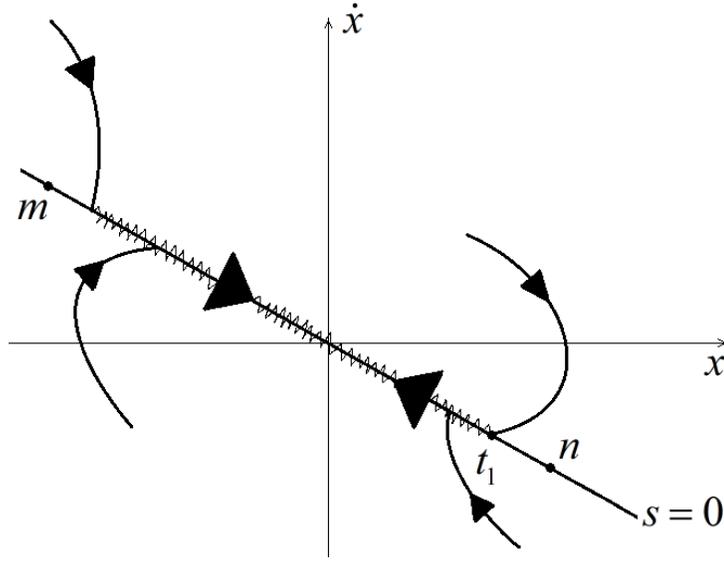


Figura 3.3. Plano de estado de un sistema de conmutación.

diferenciales con funciones de estado continuas, ya que esta teoría convencional no es aplicable para garantizar la existencia y unicidad de soluciones. Formalmente, aún para el ejemplo (4.9), el método que consiste en derivar la ecuación de movimiento no es correcto. Estrictamente hablando, se requiere que el lado derecho de la ecuación diferencial satisfaga la condición Lipschitz $\|f(x_1) - f(x_2)\| < L \|x_1 - x_2\|$ para un L positivo, conocida como constante de Lipschitz, para cualquier x_1 y x_2 . La condición requiere que la función no crezca más rápido que una función lineal, que no es el caso para funciones discontinuas si x_1 y x_2 son cercanas para un punto de discontinuidad.

La solución $x(t) = x(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ debería satisfacer la ecuación diferencial (4.9) mejor que la ecuación (4.10). Haciendo una sustitución de $x(t)$ en (4.9), se tiene $s(t) = 0$ y $(c^2 - ca_2 + a_1)x(t_1)e^{-c(t-t_1)} = -M \text{sign}(0) + f(t)$. Dado que la función $\text{sign}(\cdot)$ no está definida en cero, no se puede comprobar si la solución $x(t)$ es correcta.

En situaciones en que los métodos convencionales no son aplicables, lo común es emplear diferentes métodos de regularización. Para sistemas con controles discontinuos,

la regulación por aproximación tiene una simple interpretación física.

Las incertidumbres del comportamiento del sistema en la superficie de discontinuidad, aparecen porque las ecuaciones de movimiento son un modelo ideal del sistema, ya que esto no considera imperfecciones de dispositivos de conmutación, como retardos, histéresis, constantes de tiempo; además de dinámicas no modeladas de sensores y actuadores. Incorporando estos factores en el modelo del sistema hace que el punto de discontinuidad sea aislado en el tiempo y elimina la ambigüedad en el comportamiento del sistema. Se asume que los pequeños parámetros que caracterizan a estos factores tienden a cero. Si el límite de las soluciones existe cuando estos pequeños parámetros tienden a cero, entonces son tomadas como las soluciones a las ecuaciones que describen el modo deslizante ideal. Tal proceso de aproximación se conoce como el método de regularización para dar origen a las ecuaciones de modos deslizantes en sistemas dinámicos con control discontinuo.

Para ilustrar tal método, considérese un sistema lineal invariante en el tiempo con una entrada escalar de control en forma de relevador, como una combinación lineal del vector de estado:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (4.11)$$

A y b son $n \times n$ y $n \times 1$ matrices constantes, $u = M \text{sign}(s)$, M es un escalar positivo constante, $s = cx$, $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ = constante. De este modo, las trayectorias del estado deben ser atraídas hacia la superficie de conmutación $s(x) = 0$ en el espacio de estado $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Por tanto se dá lugar al modo deslizante en el plano de la figura 3.4, obteniendo así la ecuación de movimiento.

Continuando con el procedimiento de regularización, por ejemplo, si pequeñas imperfecciones de un dispositivo de conmutación como un relevador son tomadas en cuenta, produce una histéresis de ancho 2Δ , ver figura 3.5, entonces las trayectorias de estado oscilarían en una vecindad Δ de la superficie de deslizamiento, ver figura 3.6. Se entiende que el valor de Δ es pequeño tal que las trayectorias de estado podrían aproximarse

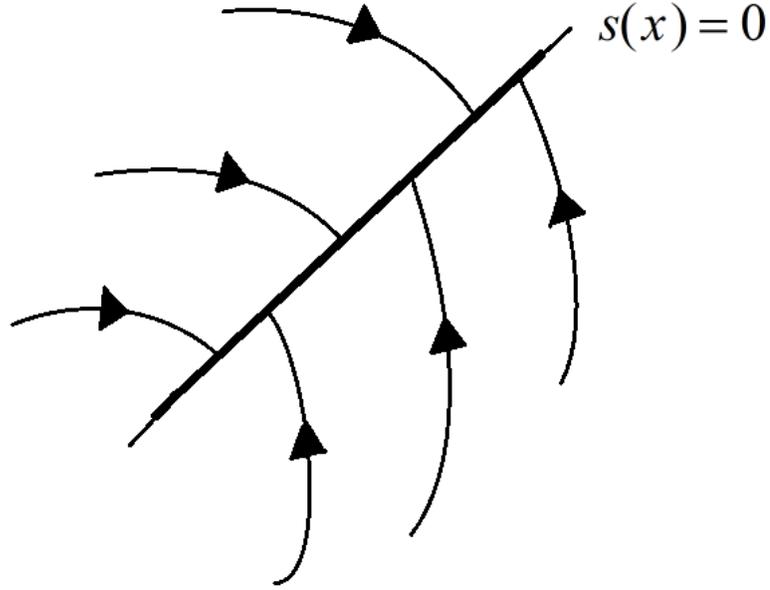


Figura 3.4. Modo deslizante en un sistema lineal.

por líneas rectas que representan el vector de velocidad de estado $Ax + bM$ y $Ax - bM$ en la vecindad de algún punto x en la superficie $s(x) = 0$.

Calculando los intervalos de tiempo Δt_1 y Δt_2 ; los incrementos Δx_1 y Δx_2 ; y el vector de estado del punto 1 al punto 2, y del punto 2 al punto 3, respectivamente:

$$\Delta t_1 = \frac{-2\Delta}{\dot{s}^+} = \frac{-2\Delta}{cAx + cbM},$$

$$\Delta x_1 = (Ax + bM)\Delta t_1 = (Ax + bM)\frac{-2\Delta}{cAx + cbM}.$$

De manera similar para el segundo intervalo

$$\Delta t_2 = \frac{2\Delta}{\dot{s}^-} = \frac{2\Delta}{cAx - cbM},$$

$$\Delta x_2 = (Ax - bM)\Delta t_2 = (Ax - bM)\frac{2\Delta}{cAx - cbM}.$$

Se debe suponer que el modo deslizante existe en el sistema ideal, además los valores de s y \dot{s} tienen signos opuestos, es decir $\dot{s}^+ = cAx + cbM < 0$ y $\dot{s}^- = cAx - cbM > 0$,

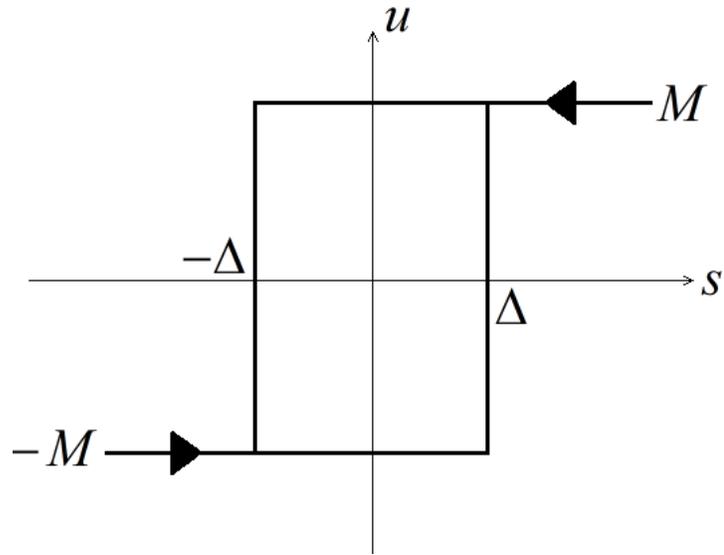


Figura 3.5. Relevador con histéresis.

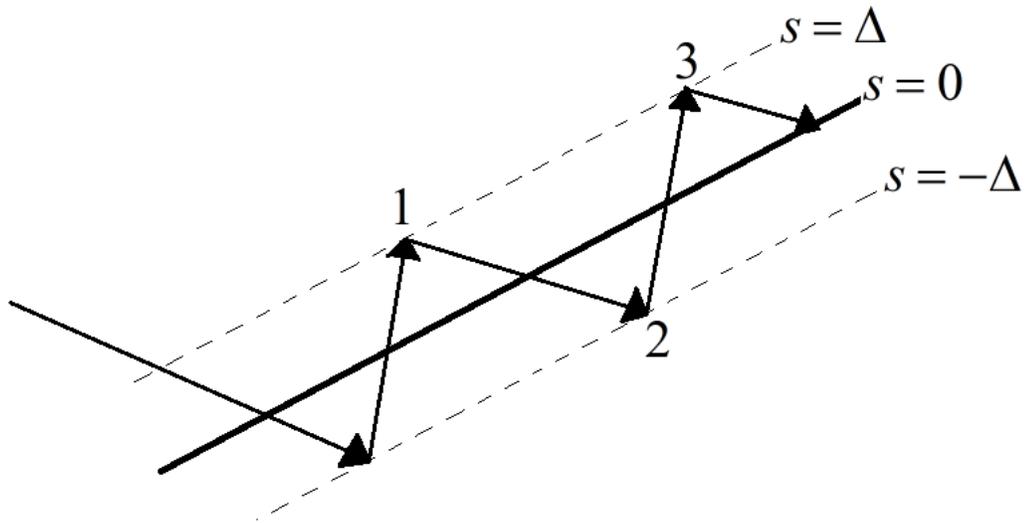


Figura 3.6. Oscilaciones en una vecindad de la superficie de conmutación.

esto implica que ambos intervalos de tiempo Δt_1 y Δt_2 son positivos. Nótese que las desigualdades pueden mantenerse si $cb < 0$. El promedio del vector de velocidad de estado en el intervalo de tiempo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ es

$$\dot{x}_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = Ax - (cb)^{-1}bcAx.$$

En el sistema (4.11), con imperfección de histéresis, el vector de estado de velocidad $f^+ = f(x, u^+)$ y $f^- = f(x, u^-)$, se asumen constantes para algún punto x sobre la superficie $s(x) = 0$ dentro de un corto intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. El intervalo de tiempo Δt consiste en dos conjuntos de intervalos Δt_1 y Δt_2 , tal que $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, $u = u^+$ para el tiempo del conjunto Δt_1 y $u = u^-$ para el tiempo del conjunto Δt_2 . Entonces el incremento del vector de estado despues del intervalo de tiempo Δt es

$$\Delta x = f^+ \Delta t_1 + f^- \Delta t_2,$$

y el promedio del vector de velocidad de estado es

$$\dot{x}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-,$$

donde $\mu = \Delta t_1 / \Delta t$ es el tiempo para que el control tome el valor u^+ y $(1 - \mu)$ es el tiempo para que tome el valor u^- , $0 \leq \mu \leq 1$. Para obtener el vector \dot{x} , el tiempo Δt debería tender a cero. Sin embargo, no es necesario realizar este proceso de límite, ya que se encuentra implícito en la suposición de que los vectores de velocidad de estado son constantes dentro del intervalo de tiempo Δt , además la ecuación

$$\dot{x} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-, \quad (4.12)$$

representa el moviemiento durante el modo deslizante. Dado que las trayectorias de estado durante el modo deslizante se encuentran sobre la superficie $s(x) = 0$, el parámetro μ debería de seleccionarse, tal que el vector de velocidad de estado del sistema (4.12) se encuentre en un plano tangencial a esta superficie, o

$$\dot{s} = \text{grad}[s(x)] \cdot \dot{x} = \text{grad}[s(x)] [\mu f^+ + (1 - \mu) f^-] = 0, \quad (4.13)$$

con $\text{grad}[s(x)] = [\partial s/\partial x_1 \dots \partial s/\partial x_n]$. La solución de (4.13) está dada por

$$\mu = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)}. \quad (4.14)$$

Sustituyendo la ecuación (4.14) en la (4.12), resulta en la ecuación de modo deslizante

$$\dot{x} = f_{sm}, \quad f_{sm} = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^-, \quad (4.15)$$

que representa el movimiento en el modo deslizante con condición inicial $s[x(0)] = 0$.

Se debe notar que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x) = 0$, además las funciones s y \dot{s} tienen signos diferentes en la vecindad de la superficie, ver figura 3.7, y $\dot{s}^+ = (\text{grad } s) \cdot f^+ < 0$, $\dot{s}^- = (\text{grad } s) \cdot f^- > 0$. Es fácil ver que $\dot{s} = (\text{grad } s) \cdot f_{sm} = 0$, para las trayectorias del sistema (4.15) y demostrar que éstas están confinadas a la superficie de conmutación $s(x) = 0$.

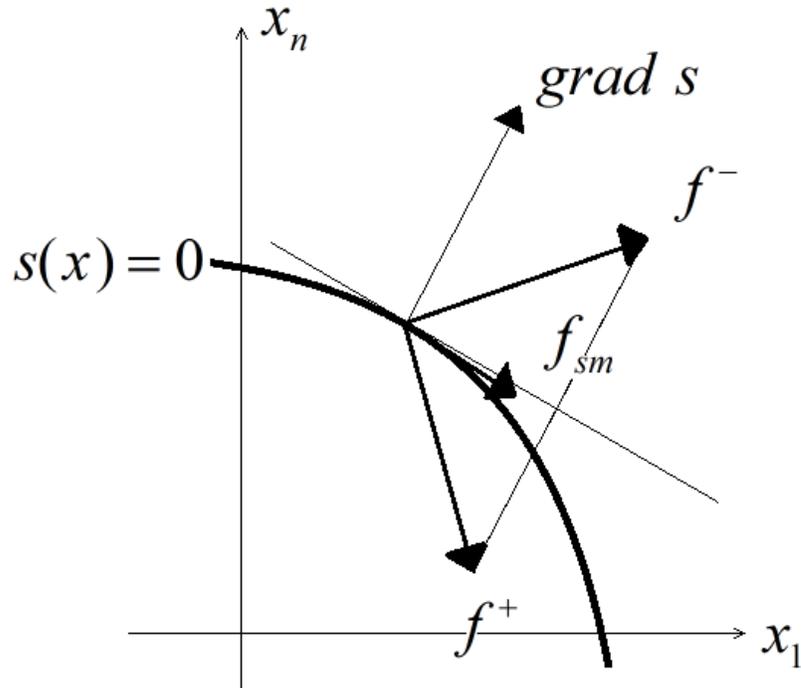


Figura 3.7. Modo deslizante.

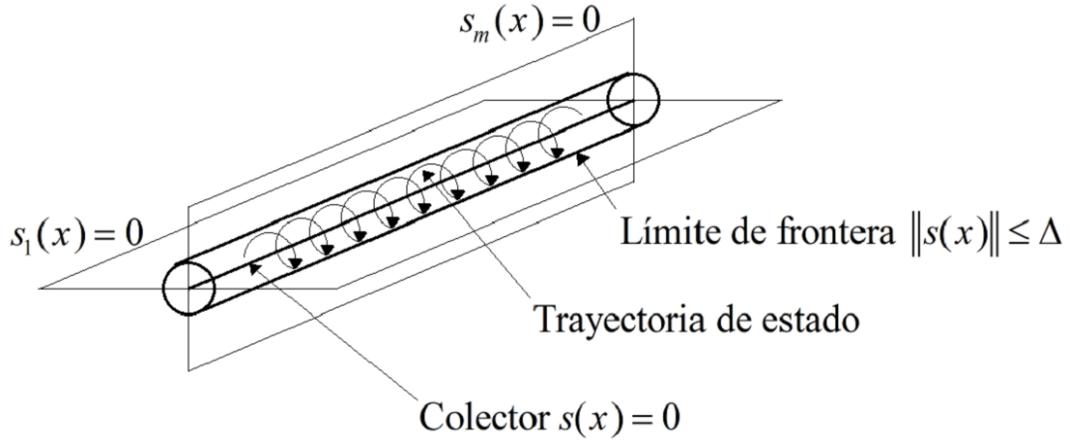


Figura 3.8. Modo deslizante por el método de la frontera límite.

Método del control equivalente

Desde un punto de vista metodológico es conveniente establecer un procedimiento para obtener las ecuaciones de modo deslizante para el sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad u(x) \in \mathbb{R}^m, \quad (4.16)$$

iniciando con un método heurístico y entonces emplear el método de regularización para aproximarse a la frontera límite, entonces se analizará si las ecuaciones se pueden tomar como el movimiento del modelo.

Se asume que el vector de estado inicial del sistema (4.16) es una intersección para todas las superficies de discontinuidad, es decir se encuentran en la superficie $s(x) = 0$, y el modo deslizante ocurre con las trayectorias de estado confinadas en esa superficie, que es la frontera límite de ancho $\Delta > 0$, para $t > 0$, como se muestra en la figura 3.8.

Dado que el movimiento en el modo deslizante implica que $s(x) = 0$ para $t > 0$, se puede asumir que $ds/dt = \dot{s} = 0$. Por tanto, además de $s(x) = 0$, la derivada respecto del tiempo $\dot{s}(x) = 0$ puede ser utilizado para caracterizar el estado de las trayectorias durante el modo deslizante. La rápida velocidad de conmutación del control u representa

un obstáculo para utilizar métodos convencionales, por tanto se debe ignorar el control discontinuo y calcular el vector u tal que la derivada temporal del vector sobre las trayectorias de estado de (4.16) sea igual a cero

$$\dot{s}(x) = G \cdot f(x, u) = 0, \quad (4.17)$$

donde $G = (\partial s / \partial x)$ es una matriz $m \times n$ con filas de funciones de gradientes $s_i(x)$. De este modo, la solución a la ecuación algebraica (4.17) existe. La solución $u_{eq}(x)$ será llamada control equivalente. Esta función continua es sustituida por los controles discontinuos u dentro del sistema original (4.16)

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}). \quad (4.18)$$

Es evidente que para la condición inicial $s(x(0)) = 0$, de conformidad con (4.17), el movimiento se rige además por (4.18) a lo largo de las trayectorias de estado en la superficie $s(x) = 0$, así como para el modo deslizante del sistema (4.16). La ecuación (4.18) se toma como la ecuación del modo deslizante en la intersección de la superficie discontinua m $s_i(x) = 0$, ($i = 1, \dots, m$). El procedimiento para la derivación de la ecuación es llamado el método del control equivalente.

Visto desde un punto de vista geométrico el método del control equivalente implica reemplazar el control discontinuo en la intersección de la superficie de conmutación por un control continuo tal que el vector de estado de velocidad se encuentra en la superficie tangencial. Por ejemplo, en el sistema (4.16), este vector de velocidad puede ser encontrado como la intersección del plano tangencial y el lugar geométrico $f(x, u)$ con el control u variando de u^- a u^+ , ver figura 3.9. El punto de intersección define el control equivalente u_{eq} y el miembro derecho $f(x, u_{eq})$ de la ecuación del modo deslizante.

De manera general, se puede aplicar el método del control equivalente a sistemas afines, es decir, sistemas no lineales con ecuaciones de movimiento como (4.16), que son

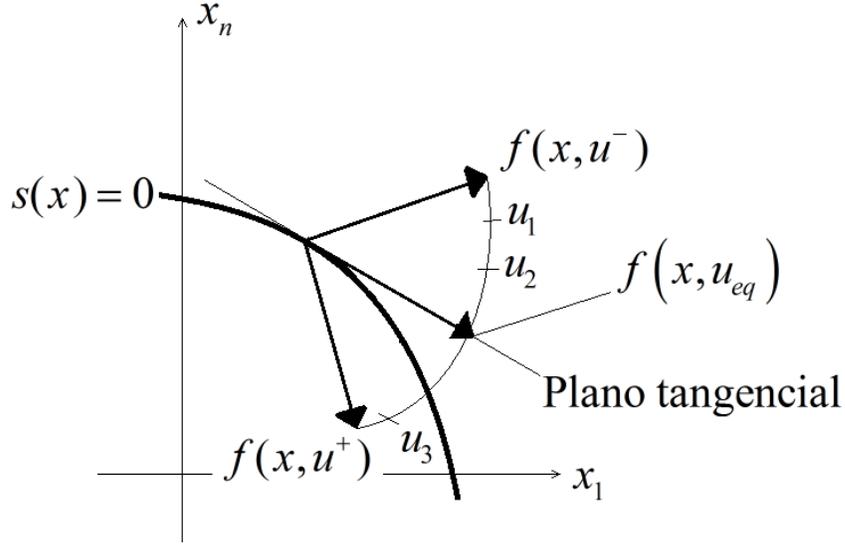


Figura 3.9. Método del control equivalente para sistemas no lineales con un control escalar.

funciones lineales de la entrada de control u :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + B(x)u, \quad x, f(x) \in \mathfrak{R}^n, B(x) \mathfrak{R}^{n \times m}, u(x) \in \mathfrak{R}^m, \quad (4.19) \\ u(x) &= \begin{cases} u^+(x) & \text{para } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{para } s(x) < 0 \end{cases}, \quad s(x)^T = [s_1(x), \dots, s_m(x)]. \end{aligned}$$

Igual que el sistema (4.16), cada superficie de $s_i(x) = 0$ es el conjunto de puntos de discontinuidad para el control correspondiente u .

La ecuación (4.17) del método del control equivalente para el sistema (4.18) toma la forma

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad \text{donde } G = (\partial s / \partial x), \quad (4.20)$$

donde GB es una matriz no singular para todo x , obteniendo el control equivalente u_{eq} como la solución de (4.20) se tiene

$$u_{eq}(x) = -[G(x)B(x)]^{-1}G(x)f(x),$$

sustituyendo $u_{eq}(x)$ en (4.19) para dar paso a la ecuación de modo deslizante

$$\dot{x} = f(x) - B(x) [G(x)B(x)]^{-1} G(x)f(x). \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) se toma como la ecuación del modo deslizante en la superficie $s(x) = 0$. La pregunta de si el modelo del modo deslizante (4.21) es correcto, puede responderse empleando el método de regularización considerando una frontera límite en la superficie $s(x) = 0$, de donde no deberán salir las trayectorias de estado. Para sistemas afines (4.19), la ecuación del modo deslizante se obtiene únicamente en la frontera de la superficie de discontinuidad y coincide con (4.21), que resulta del método del control equivalente. [57]

Cualitativamente, el resultado para sistemas afines puede ser explicado en términos del diagrama de bloques del sistema como se muestra en la figura 3.10. De acuerdo con el método del control equivalente, la derivada temporal \dot{s} es igual a cero. El movimiento en la frontera límite de la superficie s toma valores pequeños de orden Δ , pero \dot{s} toma valores finitos y no tiende a ser cero de acuerdo con Δ . Esto significa que el control real no satisface la ecuación (4.20) y puede obtenerse como

$$u = u_{eq} + (GB)^{-1}\dot{s}.$$

La ecuación de movimiento está regida por

$$\dot{x} = f + Bu_{eq} + (GB)^{-1}\dot{s}.$$

Lo que difiere con la ecuación ideal de deslizamiento (4.21) por el término adicional $(GB)^{-1}\dot{s}$.

Significado físico del control equivalente

El movimiento en el modo deslizante es establecido como una idealización. Se asume que el control cambia a una frecuencia muy alta, teóricamente infinita, frecuencia tal que

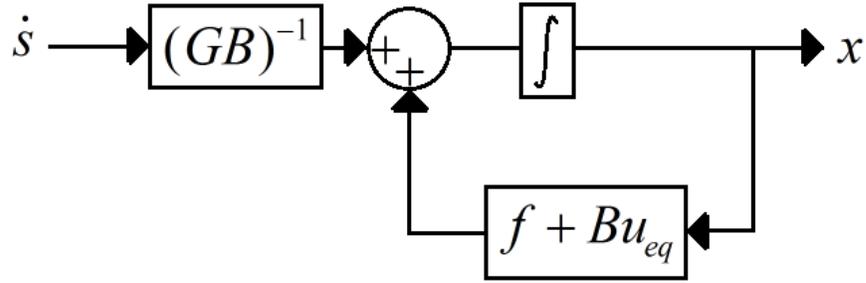


Figura 3.10. Método del control equivalente para sistemas afines.

el vector de velocidad de estado es orientado a lo largo de la intersección de las superficies de discontinuidad. Sin embargo, algunas imperfecciones en el sistema, hacen que en realidad, el estado oscile en una vecindad de esta intersección, y las componentes del control conmuten a una frecuencia infinita, tomando alternadamente los valores $u_i^+(x)$ y $u_i^-(x)$. Por otro lado, las ecuaciones del modo deslizante se obtienen sustituyendo el control equivalente por el control real. Es razonable pensar que el control equivalente es aproximado a la componente lenta, o de baja frecuencia del control real, que puede ser obtenida mediante el filtrado de la componente de alta frecuencia usando un filtro pasabajas. La constante de tiempo debería ser suficientemente pequeña para conservar sin distorsión la componente de baja frecuencia pero también lo suficientemente grande para eliminar la componente de alta frecuencia. Como se muestra en [57], la salida del filtro pasabajas es

$$\tau \dot{z} + z = u,$$

que tiende a ser el control equivalente

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, \Delta/\tau \rightarrow 0} z = u_{eq}.$$

De esta forma, que z tienda a u_{eq} no es complicado, pero naturalmente depende de las propiedades del sistema. Para ello, el ancho de la superficie de discontinuidad, donde oscila el estado del sistema, debe reducirse, para lograr que el movimiento real del estado

se aproxime al modo deslizante ideal. Si se reduce Δ , la frecuencia f de conmutación del control debe incrementarse, por otro lado la amplitud de oscilación será mayor a Δ dado que $\Delta \approx 1/f$. Para eliminar la componente de alta frecuencia del control en el modo deslizante, la frecuencia debe ser mucho mayor que $1/\tau$, o $1/f \ll \tau$, por tanto $\Delta \ll \tau$. Finalmente la constante de tiempo del filtro pasabajos debe tender a cero para que no distorisione la componente de baja frecuencia del control. En consecuencia, deben satisfacerse las condiciones $\tau \rightarrow 0$ y $\Delta/\tau \rightarrow 0$ (lo cual implica que $\Delta \rightarrow 0$) para poder extraer la componente de baja frecuencia que representa el control equivalente y rechazar las componentes de alta frecuencia.

Es interesante saber que el control equivalente depende de las perturbaciones y parámetros desconocidos de la planta. Por ejemplo, supongase que existe un modo deslizante en la línea $s = 0$ del sistema:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1x &= u + \gamma(t), \\ u &= -M \text{sign}(s); \quad s = \dot{x} + cx,\end{aligned}$$

donde M , a_1 , a_2 , c son parámetros constantes $\gamma(t)$ es una perturbación acotada. El control equivalente es la solución de la ecuación $\dot{s} = -a_2\dot{x} - a_1x + u + \gamma(t) = 0$ con respecto a u bajo la condición $s = 0$ o $\dot{x} = -cx$:

$$u_{eq} = (-a_2c + a_1)x - \gamma(t).$$

En este caso en particular el control equivalente depende de los parámetros a_1 , a_2 y la perturbación $\gamma(t)$. Obteniendo el control equivalente se obtiene información que puede ser utilizada para mejorar el desempeño del sistema de control en lazo cerrado, además se utiliza para el desarrollo de observadores robustos y para suprimir el efecto de chattering en las plantas, efecto que se produce por la vibración de los sistemas dinámicos que operan bajo una estructura de control que conmuta a alta frecuencia.

3.4.2. Estabilidad de una clase de sistemas de segundo orden con estructura variable

En esta sección se presenta un resultado, publicado en [49], que será utilizado posteriormente en el diseño del observador y en el diseño de señales de acoplamiento en los capítulos posteriores.

Considere el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c \operatorname{sign}(z_1),\end{aligned}\tag{4.22}$$

donde a y b son constantes positivas, $\xi(t)$ es una perturbación externa acotada

$$|\xi(t)| \leq \rho,$$

ρ es una constante, c es un parámetro de control, y $\operatorname{sign}(\cdot)$ es la función signo. Defina una matriz A de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix},\tag{4.23}$$

y una matriz P

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix},\tag{4.24}$$

que es la solución de la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -I$, donde I es la matriz identidad. Las propiedades de estabilidad del sistema (4.22) se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Para el sistema (4.22), si*

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho}{\theta}\right),$$

para algún $0 < \theta < 1$, entonces el origen del espacio de estado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global.

Demostración. La demostración se divide en dos partes; primero se define un sistema nominal con $\xi(t) = 0$, y se prueba estabilidad exponencial del origen usando herramientas para sistemas con estructura variable. Después de esto, se encuentran las condiciones sobre c tal que las propiedades de estabilidad se mantengan para el sistema perturbado.

El sistema nominal de (4.22) está definido por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 - c \operatorname{sign}(z_1).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Se puede demostrar estabilidad asintótica del origen del sistema (4.25) utilizando la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}az_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + c|z_1|$$

cuya derivada está dada por

$$\dot{V} = -bz_2^2,$$

que es semidefinida negativa y aplicando el teorema de invarianza para sistemas discontinuos presentado en [2] se concluye que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Sin embargo, la demostración que a continuación se presenta ayuda a visualizar las propiedades de robustez del sistema (4.22).

El sistema (4.25) tiene dos estructuras: S_1 para $z_1 > 0$,

$$S_1 : \begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 - c,\end{aligned}$$

y S_2 para $z_1 < 0$

$$S_2 : \begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -av_1 - bv_2 + c.\end{aligned}$$

Cada estructura tiene un punto de equilibrio; para S_1 su equilibrio es $\bar{z}_{S_1} = (-c/a, 0)$ y para S_2 es $\bar{z}_{S_2} = (c/a, 0)$. Note que estos equilibrios se ubican en la región donde la dinámica del sistema está dada por la otra estructura (S_2 para \bar{z}_{S_1} , S_1 para \bar{z}_{S_2}).

Cada punto de equilibrio es exponencialmente estable con las siguientes funciones de Lyapunov:

Para S_1

$$V_{S_1}(z) = z^T P z + 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (4.26)$$

$$\dot{V}_{S_1}(z) = -z^T z - 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (4.27)$$

y para S_2

$$V_{S_2}(z) = z^T P z - 2z^T P \gamma + \left(\frac{c}{a}\right)^2 p_{11}, \quad (4.28)$$

$$\dot{V}_{S_2}(z) = -z^T z + 2z^T \gamma - \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad (4.29)$$

donde $\gamma = \left[\begin{array}{c} c/a \\ 0 \end{array} \right]^T$.

Aplicando el criterio dado en [57] para probar la existencia de modos deslizantes se concluye que la superficie de discontinuidad dada por $z_1 = 0$ no es una superficie deslizante.

Note también que las soluciones cruzan la línea $z_1 = 0$ del cuadrante II al cuadrante I, y del cuadrante IV al cuadrante III.

Ahora considere las funciones $V_{S_1}(z)$, $V_{S_2}(z)$ y sus derivadas. Estas funciones se intersectan en el origen y toman el valor $V_{S_i}(0) = (c/a)^2 p_{11}$, para $i = 1, 2$. Defina dos vecindades del origen, Ω_ε con radio $\varepsilon > 0$, y Ω_β que se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Omega_\beta &= \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \Omega_1 &= \{v \in \mathfrak{R}^2 \mid v_1 \geq 0, V_{S_1}(v) \leq \beta\}, \\ \Omega_2 &= \{v \in \mathfrak{R}^2 \mid v_1 < 0, V_{S_2}(v) \leq \beta\}, \end{aligned}$$

donde $\beta > (c/a)^2 p_{11}$. Finalmente, defina una vecindad Ω_δ con radio $\delta < \varepsilon$ (δ puede depender de ε y β ; $\delta(\varepsilon, \beta)$) tal que $\Omega_\delta \subset \Omega_\beta$.

Defina un conjunto de tiempos $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots\}$, en estos tiempos se presentan las conmutaciones de estructura. Se asume que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ donde t_0 es el tiempo inicial.

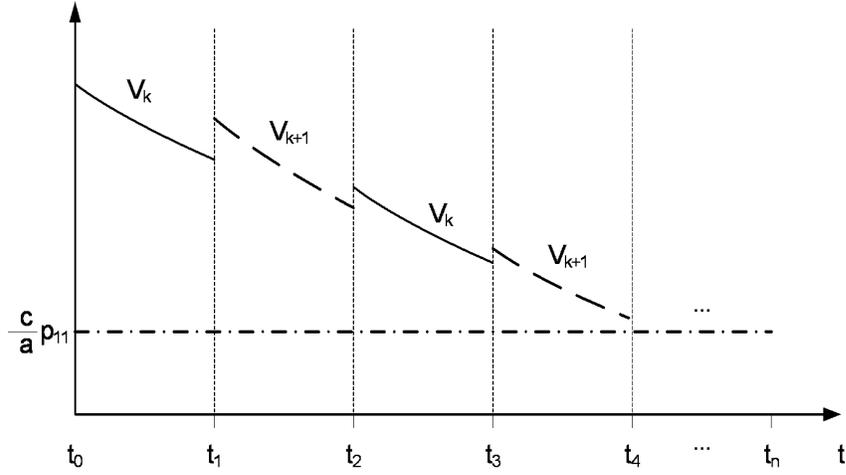


Figura 3.11. Comportamiento del decremento de las funciones de Lyapunov con respecto al tiempo.

Si $\|z(t_0)\| < \delta$ y $z(t_0) \in \Omega_k \subset \Omega_\beta$ para alguna $k = 1, 2$ (la k -ésima estructura está activa), entonces el primer cambio de estructuras se presenta en t_1 , y debido a que $\dot{V}_{S_k} < 0$, se tiene que $\|z(t_0)\| > \|z(t_1)\|$, entonces $V_{S_k}(z(t_0)) > V_{S_k}(z(t_1))$. Ahora $z(t_1)$ es la condición inicial para la siguiente estructura.

La segunda conmutación se presenta en t_2 ; el sistema pasa de Ω_{k+1} a Ω_k y $\|z(t_1)\| > \|z(t_2)\|$, $V_{S_{k+1}}(z(t_1)) > V_{S_{k+1}}(z(t_2))$. En cada instante de tiempo donde se presenta una conmutación $z_1 = 0$; por lo tanto $z_2(t_1) > z_2(t_2)$, y la condición inicial para la siguiente estructura es $(0, z_2(t_2))$. Este fenómeno se presenta para todo $t_i \in T$ por lo que se puede concluir que $V_{S_k}(z(t_j)) > V_{S_k}(z(t_{j+2}))$, es decir, el valor de cada función de Lyapunov disminuye cada que su estructura sale de operación, ver figura 3.11.

Entonces las secuencias $W_1 = \{V_{S_k}(t_1), V_{S_k}(t_3), \dots\}$ y $W_2 = \{V_{S_{k+1}}(t_2), V_{S_{k+1}}(t_4), \dots\}$ son estrictamente decrecientes y convergen a $(c/a)p_{11}$, y también se satisface que $\|z(t_{i+1})\| < \|z(t_i)\| < \dots < \|z(t_0)\| < \delta < \varepsilon \forall t > t_0, \forall i$.

Para todo $\varepsilon > 0$ y $\beta > (c/a)^2 p_{11}$ se puede encontrar una constante δ tal que las trayectorias iniciando en Ω_δ permanecerán en la vecindad Ω_ε para todo $t \geq t_0$. De esta

manera, el origen es estable en el sentido de Lyapunov.

Para demostrar estabilidad asintótica es suficiente notar que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_k}(t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} V_{S_{k+1}}(t_i) = \frac{c}{a} p_{11},$$

éste es el valor que toman ambas funciones de Lyapunov en el origen, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Para demostrar estabilidad exponencial note que la solución en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1)$ decrece en forma exponencial debido a la estabilidad exponencial del equilibrio de cada estructura. Cuando el sistema cambia de estructura, la solución mantiene su constante de tiempo porque ambas estructuras tienen la misma matriz A , por lo tanto, $\|v(t)\|$ en los intervalos de tiempo $[t_i, t_{i+1})$ estará por debajo de la función exponencial que domina a la solución en el intervalo $[t_0, t_1)$; entonces el origen es exponencialmente estable.

Finalmente, para demostrar que este resultado es global, note que el punto de equilibrio de cada estructura es exponencialmente estable en forma global, lo que implica que las propiedades que se mencionaron anteriormente se mantienen para cualquier condición inicial.

Ahora se analiza el sistema perturbado (4.22). Considere la estructura S_1 (el análisis para la estructura S_2 es similar),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) - c, \end{aligned} \tag{4.30}$$

y el cambio de variables $w_1 = z_1 + c/a$ y $w_2 = z_2$. La dinámica del sistema (4.30) en el nuevo espacio de estado está dado por

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= -aw_1 - bw_2 + \xi(t), \end{aligned}$$

o en forma simplificada

$$\dot{w} = Aw + g,$$

donde $g = \begin{bmatrix} 0 & \xi(t) \end{bmatrix}^T$.

Se propone la función de Lyapunov

$$V(w) = w^T Pw,$$

donde las matrices A y P se definen por (4.23) y (4.24) respectivamente. La derivada de V está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(w) &= -w^T w + 2w^T P g \\ &\leq -\|w\|^2 + 2|w^T P g| \\ &\leq -\|w\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|w\|\rho. \end{aligned}$$

Debido a que $a > 0$ y $b > 0$, se puede aplicar el lema 13 [34], y concluir que, para todo $\|w(t_0)\| > \tilde{\mu}$ la solución $w(t)$ satisface

$$\|w(t)\| \leq k \exp(-\gamma(t - t_0)) \|w(t_0)\| \quad \forall t_0 \leq t < t_0 + t_f,$$

y

$$\|w(t)\| \leq \tilde{\mu} \quad \forall t \geq t_0 + t_f,$$

donde t_f es un tiempo finito, y

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \\ \gamma &= \frac{(1 - \theta)}{2\lambda_{\max}(P)}, \\ \tilde{\mu} &= 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\rho}{\lambda_{\min}(P)\theta}}, \end{aligned}$$

para algún θ , $0 < \theta < 1$. Esta parte muestra que la bola de radio $\tilde{\mu}$, con centro ubicado en $(-c/a, 0)$, es un atractor para la estructura S_1 , denotado por B_{S_1} .

Similarmente, las trayectorias de la estructura S_2

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -az_1 - bz_2 + \xi(t) + c,\end{aligned}$$

convergen a la bola B_{s_2} de radio $\tilde{\mu}$ centrada en $(c/a, 0)$. De esta manera, cada estructura del sistema perturbado tiene un atractor (una bola) de radio $\tilde{\mu}$, simétricamente localizadas sobre el eje z_1 y a una distancia $r = c/a$ del origen. Si esta distancia es mayor que $\tilde{\mu}$, es decir, si

$$c > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{a\rho}{\theta}\right), \quad (4.31)$$

entonces los dos atractores B_{S_1} y B_{S_2} no se intersectan, y el comportamiento de la solución del sistema perturbado será cualitativamente igual al comportamiento del sistema nominal. De esta manera, el origen del sistema perturbado es un punto de equilibrio exponencialmente estable en el sentido de Lyapunov, en forma global. ■

3.4.3. Diseño del observador de estado

Considere un sistema lagrangiano de n grados de libertad definido por

$$\begin{aligned}M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t) &= \tau, \\ y &= q,\end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz centrífuga y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales, $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta$ contiene los términos producidos por variaciones en los parámetros θ ; $\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ es una matriz con dimensión $n \times m$ y θ es un vector con dimensión $m \times 1$. $\gamma(t) \in \mathfrak{R}^n$ es un vector de perturbaciones externas que se considera acotado, $\tau \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de fuerzas generalizadas de entrada y q es la salida del sistema.

Definiendo las variables de estado $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, la representación del sistema (4.32) en variables de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2) + g(x_1) + \xi(\cdot) + M^{-1}(x_1)\tau \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$y = x_1, \quad (4.34)$$

donde

$$f(x) = -M^{-1}(x_1)C(x_1, x_2)x_2,$$

$$g(x_1) = -M^{-1}(x_1)G(x_1),$$

$$\xi(\cdot) = -M^{-1}(x_1)(\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta + \gamma(t)).$$

Se asume que el vector de entarada τ y de perturbación $\gamma(t)$ son acotados tal que el comportamiento del sistema (4.33-4.34) es acotado.

Se propone el siguiente observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ f(\hat{x}) + g(x_1) + M^{-1}(\cdot)\tau \end{bmatrix} + H(y - \hat{y}), \quad (4.35)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (4.36)$$

donde el vector $H(y - \hat{y})$ tiene la forma siguiente

$$H(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y - \hat{y}) \\ C_2(y - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y - \hat{y}) \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son matrices diagonales definidas positivas.

Para encontrar las condiciones sobre las matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que el sistema (4.35-4.36) sea un observador para el sistema (4.33-4.34) se definen las variables de error $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$, la dinámica de estas variables está dada por el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 - C_1 e_1 \\ f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot) - C_2 e_1 - C_3 \text{sign}(e_1) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Debido a que la función $f(\cdot)$ es Lipschitz, se tiene que

$$\|f(x) - f(x - e)\| \leq \rho_1 \|e\|$$

donde ρ_1 es una constante positiva. De esta manera se puede definir un nuevo término de perturbación $\Psi(\cdot)$

$$\Psi(\cdot) = f(x) - f(x - e) + \xi(\cdot)$$

que está acotado de la siguiente forma

$$\|\Psi(\cdot)\| = \|f(x) - f(\hat{x}) + \xi(\cdot)\| \leq \rho_0 + \rho_1 \|e\|. \quad (4.39)$$

Proposición 3.1 *Para el sistema (4.38) es posible encontrar un conjunto de matrices C_1 , C_2 y C_3 tal que el origen del espacio del error sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. Entonces el sistema definido por (4.35) y (4.36) es un observador para el sistema definido por (4.33) y (4.34).*

Demostración. Se hace el cambio de variables

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1, \\ v_2 &= e_2 - C_1 e_1 \rightarrow e_2 = v_2 + C_1 e_1. \end{aligned}$$

La dinámica del sistema (4.38) en el nuevo espacio de coordenadas está dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= -C_2 v_1 - C_1 v_2 + \Psi(\cdot) - C_3 \text{sign}(v_1). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Este sistema es un conjunto de subsistemas con la forma (4.22). Sea $\rho_1 < 1/(2\lambda_{\text{máx}}(P))$, donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov para cada subsistema. Aplicando el teorema 1 termina la prueba. ■

Las condiciones para el diseño de cada elemento de las matrices C_1 , C_2 y C_3 son las siguientes:

Las constantes $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ y $c_{3,i}$ deben elegirse tal que

$$\rho_1 < 1/(2\lambda_{\max}(P)), \quad (4.41)$$

$$c_{3,i} > 2\lambda_{\max}(P) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \left(\frac{c_{2,i}\rho_0}{\theta}\right), \quad (4.42)$$

donde la matriz P y la constante θ se han definido en (4.23) y (4.24), respectivamente.

3.4.4. Identificación de perturbaciones

El sistema (4.40) tiene una superficie de discontinuidad en $v_1 = 0 \in \mathfrak{R}^n$ y el término $C_3 \text{sign}(v_1)$ produce un modo deslizante de segundo orden [7]; es decir, el control (término discontinuo $C_3 \text{sign}(v_1)$) aparece hasta la segunda derivada de la superficie de discontinuidad

$$\ddot{v}_1 = f(x) - f(\hat{x}) + \xi(\cdot) - C_2 v_1 - C_1 v_2 - u_{eq}.$$

Entonces, el control equivalente se presenta en $v_1 = v_2 = 0$, que es equivalente a $e_1 = e_2 = 0$ e implica $x = \hat{x}$; de esta manera el control equivalente está dado por

$$\begin{aligned} u_{eq} &= \xi(\cdot) \\ &= -M^{-1}(\cdot) (\varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta + \gamma(t)) \end{aligned}$$

entonces

$$\Sigma(\cdot) \equiv -M(\cdot) u_{eq} = \varphi(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta + \gamma(t).$$

Como se ve de la expresión anterior, el control equivalente está formado por los términos de perturbación, y como es bien conocido, el control equivalente es el promedio del término $C_3 \text{sign}(z_1)$ cuando las trayectorias llegan al origen. En este caso, la convergencia a la superficie de discontinuidad es en forma exponencial, de esta manera se pueden aproximar los términos de perturbación en forma asintótica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{sign}(z_1(t))} = u_{eq},$$

donde $\overline{C_3 \text{ sign}(z_1(t))}$ indica el promedio.

Si el término $\xi(\cdot)$ no depende de variaciones paramétricas,

$$\xi(\cdot) = \gamma(t),$$

el término de perturbaciones externas $\gamma(t)$ puede identificarse directamente a partir del control equivalente,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &= -M(\cdot) u_{eq} \\ &= -M(\cdot) \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{ sign}(y(t) - \hat{y}(t))} \end{aligned}$$

3.4.5. Implementación de dos tipos de filtros para estimar perturbaciones

La implementación de un filtro pasabajas es uno de los objetos de estudio de esta tesis para el diseño de observadores robustos, su objetivo es obtener el promedio de la señal discontinua que da lugar al modo deslizante, y posteriormente este promedio sea realimentado al controlador para compensar las perturbaciones desconocidas en el sistema, como se muestra en la estructura de control de la figura 3.12. Por otro lado el empleo de filtros pasabajas presenta el inconveniente de producir retardos [7].

Se realizaron algunas pruebas para seleccionar un filtro que tuviera el mejor desempeño al momento de estimar las perturbaciones desconocidas en los sistemas. Para ello se utilizó en un primer experimento un filtro convencional, y finalmente un filtro digital FIR, comparando en ambos casos la robustez del control así como el efecto de chattering que produce.

Los filtros se utilizan en el procesado de señales para eliminar partes no deseadas de la misma, tales como ruido o sólo permitir el paso de un cierto rango de frecuencias. Hay dos tipos principales de filtros, los analógicos y los digitales, que se diferencian tanto en su aspecto físico como en su modo de funcionamiento.

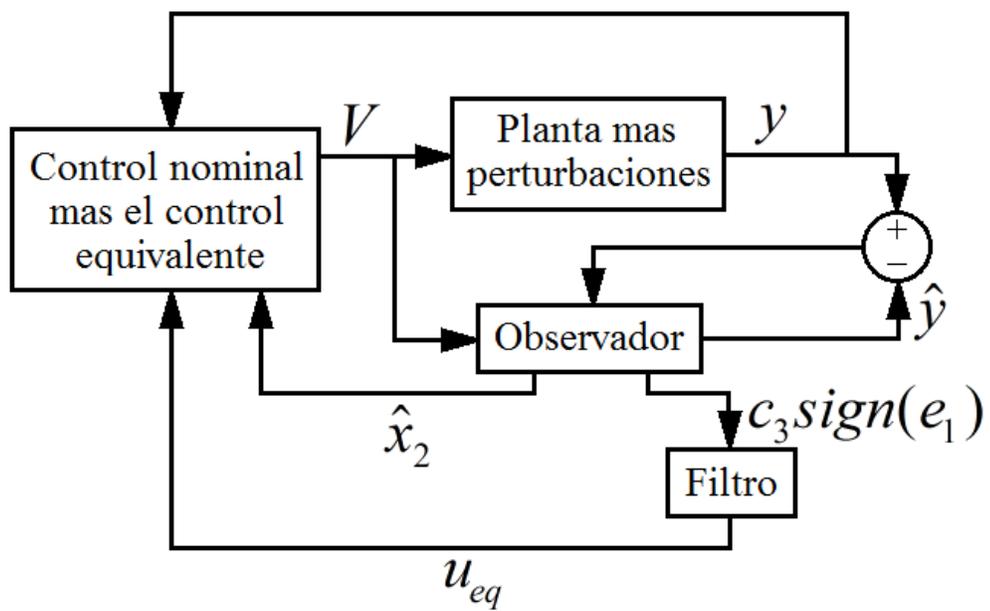


Figura 3.12. Estructura con una señal de control nominal suave y robusta ante perturbaciones.

Un filtro analógico emplea circuitos electrónicos con componentes discretos tales como resistencias, capacitores, amplificadores operacionales, etc., que sean requeridos para el filtrado deseado. Un filtro digital emplea un procesador digital que efectúa operaciones matemáticas en valores muestreados de la señal. El procesador puede ser de propósito general, tal como cualquier computadora personal.

La señal de entrada analógica debe ser muestreada y digitalizada usando un ADC. El resultado son números binarios que representan los valores sucesivos muestreados. Estos son transferidos al procesador, el cual efectúa operaciones matemáticas en ellos. Las operaciones pueden ser desde filtros de promediado de la muestra actual con alguna de las anteriores hasta multiplicaciones por constantes de los valores de entrada o de instantes anteriores almacenados en memoria, para posteriormente sumar estos resultados de la multiplicación y dar una salida. Para diseñar estos filtros suele usarse un impulso y desplazarlo sucesivas veces multiplicando por alguna constante, es decir, usando la transformada Z.

Finalmente si es necesario, los resultados de estos cálculos, que representan valores muestreados de la señal filtrada, son enviados a través de un DAC para devolver la señal a una forma analógica. Por tanto, en un filtro digital la señal está siempre representada por una secuencia de números, en vez de un voltaje o una corriente.

Un filtro FIR (Finite Impulse Response) es un filtro digital tal que si su entrada es un impulso la salida será un número limitado de términos no nulos. Para obtener la salida solo se emplean valores de la entrada actual y anteriores. También se llaman filtros digitales no recursivos. Su expresión en el dominio discreto es

$$y[n] = \sum_{k=0}^{P-1} b_k x[n-k].$$

El orden del filtro está dado por P , es decir, el número de coeficientes. La estructura de un filtro FIR se muestra en la figura 3.13 la cual puede verse reflejada en la aplicación

de la transformada Z [6]

$$H(Z) = h_k z^{-k}.$$

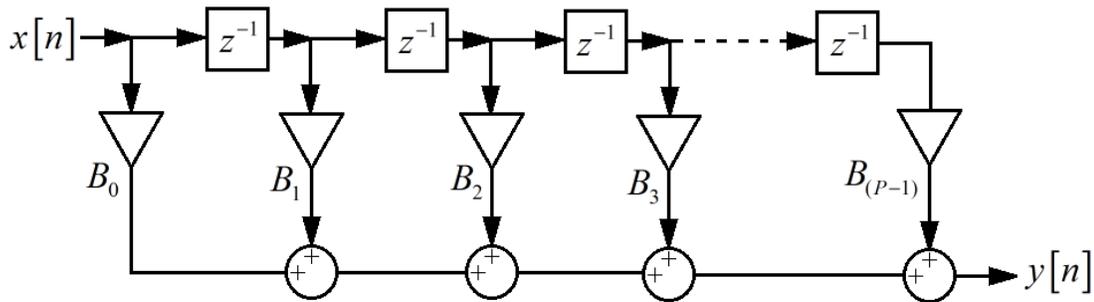


Figura 3.13. Diagrama a bloques de un filtro FIR.

Se puede ver que es la misma entrada retardada cada vez más en el tiempo, multiplicada por diversos coeficientes y finalmente sumada al final. Hay muchas variaciones de esta estructura. Si tenemos una respuesta de frecuencia como objetivo, conseguiremos que la respuesta del filtro se asemeje más a ella cuanto más largo sea o número de coeficientes tenga.

Los filtros FIR sólo tienen polos, es decir, elementos en el denominador en su función de transferencia. También tienen la ventaja de que pueden diseñarse para fase lineal, es decir, no introducen desfasamiento en la señal, a diferencia de los IIR o los filtros analógicos. Sin embargo tienen el inconveniente de ser más largos al tener más coeficientes que los filtros IIR capaces de cumplir características similares. Esto requiere un mayor tiempo de cálculo que puede dar problema en aplicaciones en tiempo real.

Para poner a prueba cada uno de los filtros, se llevó a cabo un objetivo de control de seguimiento usando como planta el sistema de la figura 4.6, un sistema mecánico traslacional con dos grados de libertad, con motores de corriente directa y encoders incrementales, donde se considera que cada eje tiene una dinámica independiente.

El modelo de tal planta es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\delta}{m}x_2 + \frac{k_\lambda}{m}P(V),\end{aligned}$$

donde x_1 (en metros) y x_2 (en metros por segundo) son la posición y velocidad respectivamente, δ (en kilogramos por segundo) es el coeficiente de fricción, m (en kilogramos) es la masa del mecanismo y k_λ es una constante de proporcionalidad implícita en la etapa de potencia que alimenta los motores de corriente directa del mecanismo, los valores de estos parámetros son constantes positivas conocidas y la $P(V)$ es la fuerza de entrada que es una función del voltaje que se aplica al motor.

Considerando que el motor que produce un movimiento en el mecanismo presenta una no linealidad del tipo zona muerta, entonces se define a $P(V)$ como

$$P(V) = zm(V, \alpha),$$

cuyo análisis se presenta con mayor detalle en la sección 2.3, donde V es el voltaje de entrada al motor y α es el ancho de la zona muerta.

En la figura 3.14, se puede ver el sistema de control que se implementó para comparar el desempeño del filtro analógico y el filtro digital en la estimación de perturbaciones desconocidas.

El filtro analógico promediador fue implementado mediante la ecuación diferencial,

$$\dot{y}_f = -\frac{1}{\tau}y_f + \frac{1}{\tau}x_f,$$

para $\tau = 1/70$. como se muestra en la figura 3.15, y el filtro digital FIR, figura 3.13, se implementó mediante software, un filtro de grado 485, representado matemáticamente por la ecuación

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{B_0 + B_1z^{-1} + \dots + B_Pz^{-P}}{1},$$

donde P representa el grado del filtro, en este caso en particular es 485.

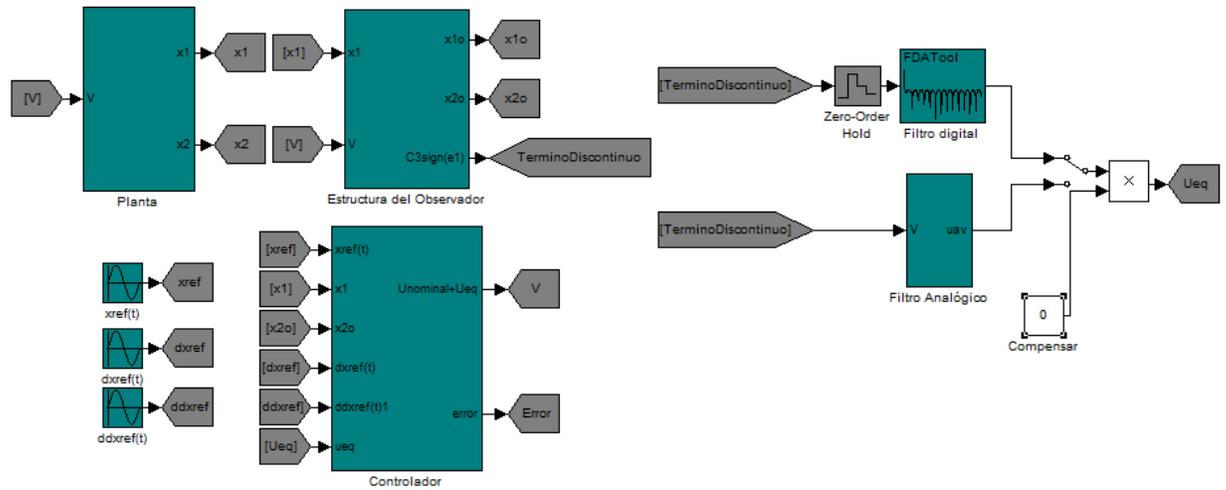


Figura 3.14. Sistema de control implementado para comparar el desempeño de los filtros.

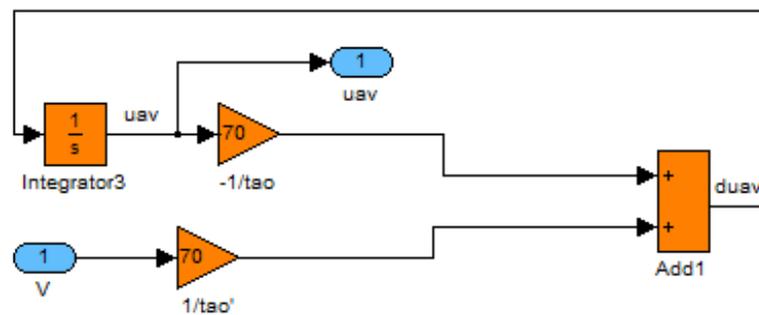


Figura 3.15. Diagrama a bloques del filtro analógico.

3.4.6. Resultados de la implementación de los filtros

De la implementación de ambos filtros se puede concluir que el filtro digital presentó un mejor desempeño. La experimentación se llevó a cabo en tiempo real en la plataforma dSpace, en la figura 3.18, se puede ver el comportamiento de la señal de control aplicada a la planta; en $0 \text{ seg} < t < 20 \text{ seg}$, se aplica la señal de control sin compensar las perturbaciones, simultáneamente se puede ver en la figura 3.16, que el error es de $0,01 \text{ m}$, aproximadamente; en $20 \text{ seg} < t < 40 \text{ seg}$, se aplica la señal de control, pero ahora incluyendo la compensación de las perturbaciones estimadas por el observador robusto y promediados con el filtro analógico, se puede ver en la figura 3.18 que el control se vuelve más robusto, de igual forma se puede ver en la figura 3.16, que el error disminuye a $0,005 \text{ m}$, aproximadamente; finalmente en $20 \text{ seg} < t < 40 \text{ seg}$, se continúan compensando las perturbaciones pero ahora promediadas con el filtro digital, en la figura 3.18, se puede notar que el controlador se vuelve más suave a diferencia de cuando se empleó el filtro analógico, y en la figura 3.16, se puede ver que el error disminuye en forma exponencial y se estabiliza en $0,002 \text{ m}$, aproximadamente. El promedio de las perturbaciones, que se obtiene mediante el filtrado de la componente de alta frecuencia de la señal discontinua que produce el modo deslizante de los observadores se muestra en la figura 3.17; en $0 \text{ seg} < t < 20 \text{ seg}$, no se encuentra operando ningún filtro, en $20 \text{ seg} < t < 40 \text{ seg}$, opera el filtro analógico y en $20 \text{ seg} < t < 40 \text{ seg}$, opera el filtro digital.

En resumen, aplicando el filtro analógico se disminuye el error en un 50 %, y con el filtro digital, se logra disminuir el error en un 80 %, cabe señalar que este último filtro tiene un tiempo de respuesta mayor.

De este modo se puede concluir que el filtro digital proporciona mejores propiedades de robustez a la señal de control, además de disminuir el efecto del chattering. Se anexa a esta tesis, un video que se describe en el apéndice C, donde se da un ejemplo de tales resultados.

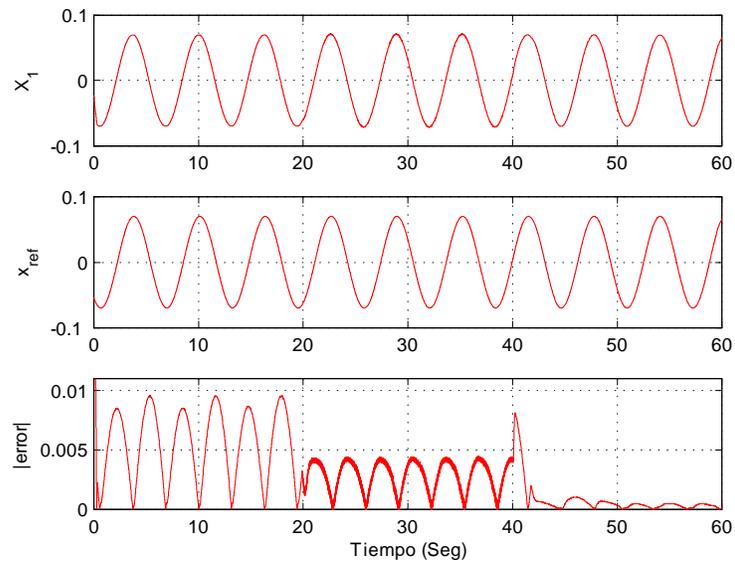


Figura 3.16. Posición del mecanismo y error entre la señal de referencia.

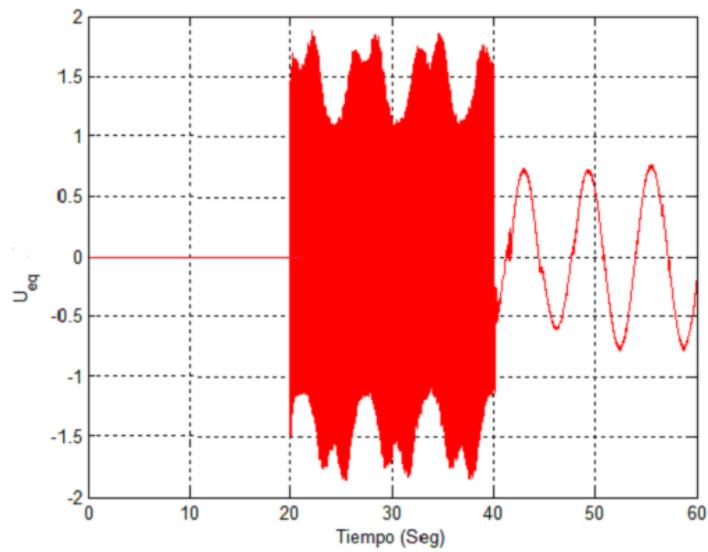


Figura 3.17. Señal promediada por ambos filtros.

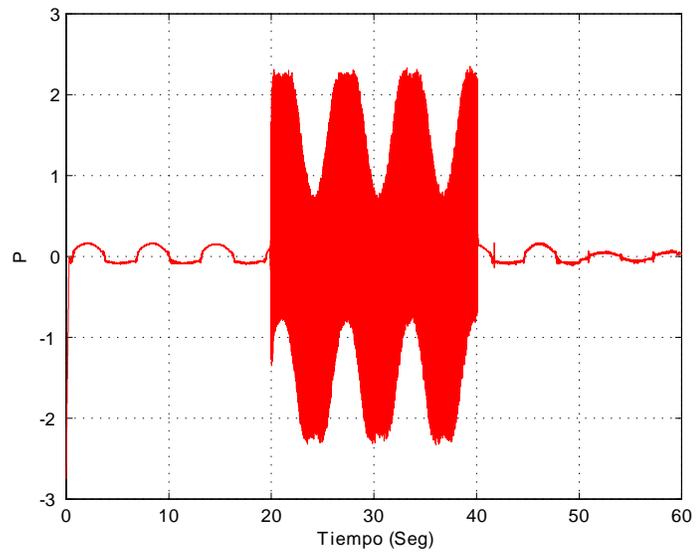


Figura 3.18. Señal de control.

Capítulo 4

Definición del problema de sincronización

El fenómeno de sincronización produce que un conjunto de sistemas con interconexiones pueda realizar una función o tarea común. Esta característica puede ser de mucha utilidad, y en algunos casos necesaria, en sistemas hechos por el hombre; por ejemplo en generadores de potencia, arreglos de mecanismos con aplicaciones industriales como pintura, ensamble y transporte. En muchos de estos sistemas el fenómeno de sincronización no se presenta en forma natural, por lo que se deben agregar interconexiones artificiales o un sistema adicional cuyo objetivo sea generar señales de acoplamiento o control para obtener sincronización entre los sistemas.

Los tipos de acoplamiento entre los sistemas juegan un papel muy importante en el problema de sincronización. Dos tipos de acoplamiento son el unidireccional o maestro-esclavo y el bidireccional. En el primero, un sistema, denominado maestro, impone su dinámica al resto de los sistemas denominados esclavos. En el segundo, la sincronización es el resultado de la interacción de todos los sistemas involucrados ya que la dinámica de cada sistema influye en los demás. Ambos tipos de acoplamiento pueden estar presentes en arreglos de sistemas; algunos trabajos sobre este tema son los siguientes: [17], [27],

[18], [47], [35], [54], [15] y [16].

En algunas aplicaciones, como la sincronización de sistemas caóticos en la configuración maestro-esclavo, el problema de sincronización también puede verse como un problema de diseño de un observador. En este enfoque se tiene la libertad de diseñar el sistema esclavo como un observador del sistema maestro y de esta forma lograr que los sistemas se sincronicen. Algunos trabajos importantes sobre esta forma de ver la sincronización son: [26], [28], [29], [40] y [5].

4.1. Topologías de conexión empleadas

La topología de conexión hace referencia a la forma en cómo están interconectados los sistemas. Tal arreglo es de vital importancia ya que de ello depende la posibilidad de sincronizar o no tal arreglo de sistemas, lo cual se puede ver directamente sobre la matriz de interconexión pues debe cumplir ciertas condiciones. En el capítulo 5 se define a detalle la estructura de esta matriz. La figura 4.1 muestra la topología del arreglo para dos sistemas bajo una configuración bidireccional (inciso a), y conexión unidireccional (inciso b). La figura 4.2 ilustra otro posible arreglo entre los sistemas. Finalmente en la figura 4.3 se puede ver que conforme aumenta el número de sistemas a sincronizar, crece el número de posibles combinaciones de un arreglo, así como diferentes estructuras para la matriz de interconexión, no obstante, esta estructura definirá cuales arreglos son sincronizables.

4.2. Definición de los sistemas mecánicos utilizados

Ahora se definen los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos que se van a sincronizar.

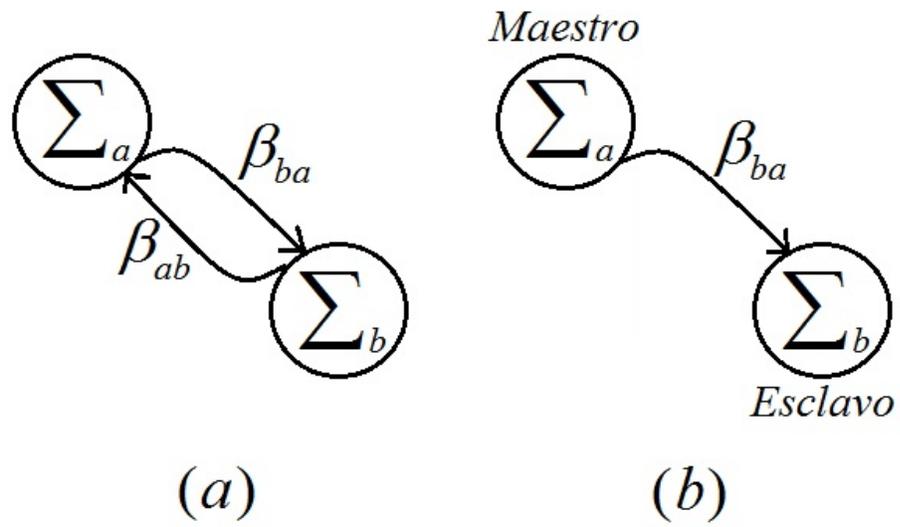


Figura 4.1. Topología básica de arreglo.

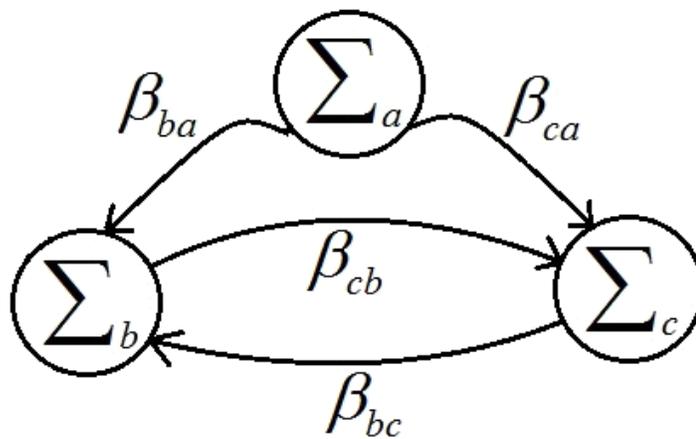


Figura 4.2. Topología de arreglo de tres sistemas, bajo un esquema maestro esclavo.

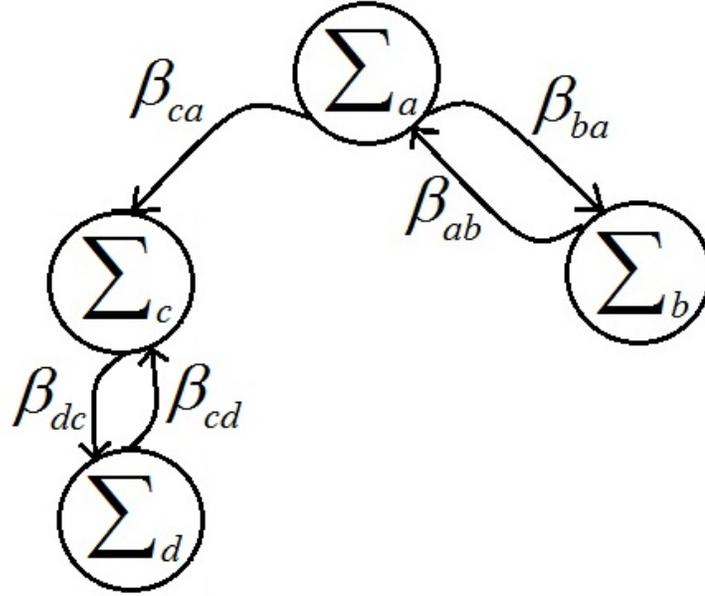


Figura 4.3. Topología compleja de arreglo.

Considérense k sistemas no lineales, descritos por la ecuación diferencial

$$\Sigma_i : \frac{d^2 y_i}{dt^2} = f_i(t, x_i, \dot{x}_i) + \tilde{f}_i(t, x_i, P_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.1)$$

donde $x_i = [x_{1i}, x_{2i}]$ es el vector de estado del nodo i , y_i es la salida del sistema, $f_i(t, x_i)$ es una función Lipschitz conocida, P_i es el vector de entrada. Si se considera el efecto no lineal de zona muerta en los motores de los sistemas, entonces

$$P_i(V_i) = V_i - \text{sat}(V_i, \alpha_i), \quad (2.2)$$

como se muestra en la figura 2.8, donde se considera el segundo término de esta ecuación como una perturbación del sistema, o sea, $\text{sat}(V_i, \alpha_i) = \gamma_i(t, x_i, \dot{x}_i)$, de esta manera se define $\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_k, P_i)$ como

$$\tilde{f}_i(x_i, P_i) = V_i + \gamma_i(t, x_i, \dot{x}_i),$$

definiendo

$$V_i = u_{oi} + v_i, \quad (2.3)$$

donde u_{oi} es una entrada de control nominal y v_i es una señal de acoplamiento, además el término $\gamma_i(t, x_i, \dot{x}_i)$ incluye perturbaciones externas y perturbaciones debidas a la variación de parámetros. Estas perturbaciones se consideran suaves en t , y_i y \dot{y}_i , y satisface

$$\|\gamma_i(t, x_i, \dot{x}_i)\| \leq \rho_{0i} + \rho_{1i} \|(x_i, \dot{x}_i)\|, \quad (2.4)$$

para algunos números positivos ρ_{0i}, ρ_{1i} . Condición que permite emplear el observador de Luenberger propuesto.

Una representación en variables de estado del sistema (2.1) es

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_{1i} = x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} = f_i(x_i) + u_{oi} + v_i - \gamma_i(t, x_i), \\ y_i = x_{1i}, \end{cases} \quad (2.5)$$

Los sistemas Σ_i definidos por (2.1) forman una arreglo definido por una topología de interconexión; en general este arreglo puede representarse en diferentes combinaciones, por ejemplo como se muestra en las figuras 4.1, 4.2 o 4.3. Cada una de las esferas de estas figuras representan los nodos Σ_i y las líneas representan una señal de acoplamiento, donde cada factor β , corresponde a la fuerza de interconexión entre los nodos. Estas líneas tienen una dirección particular, representadas por una flecha, que definen el flujo de la información.

Ahora se definen los modelos matemáticos, así como la representación en variables de estado, de los sistemas que se emplean para realizar los experimentos de sincronización que se presentan en esta tesis.

4.2.1. Sistema Carro-Péndulo (CP)

Para efecto de los experimentos realizados se considera el sistema CP, ilustrado en la figura 4.4, se ha tomando como dos sistemas independientes, es decir, un péndulo

(PCP) y un carro (CCP), donde se considera la dinámica de cada sistema de manera independiente. Cuyos modelos matemáticos son (2.6) para el CCP y (2.7) para el PCP,

$$\ddot{y}_i = -\frac{\delta_i}{m_i}y_i + \frac{k_i}{m_i}P_i(V_i), \quad (2.6)$$

$$\ddot{y}_i = -a_i \text{sen}(y_i) - b_i \dot{y}_i + c_i P_i(V_i), \quad (2.7)$$

donde y_i son las salidas de los sistemas, el subíndice i , será diferente para cada sistema, este dependerá del número de nodo que se le asigne, donde $i = 1, \dots, k$, k es el número de sistemas a sincronizar. La solución del problema de sincronización propuesta en esta tesis, asume que el sistema asignado con el subíndice $i = 1$, será el sistema de referencia; a_i es una constante que involucra el efecto de la fuerza de gravedad, la masa y longitud del péndulo; m_i es la masa del carro; δ_i y b_i son los coeficientes de fricción; el factor c_i es una constante de proporcionalidad implícita en la etapa de potencia de los motores y en el par aplicado a los sistemas a través de las entradas P_i .

Considerando (2.2) y (2.3), los sistemas (2.6) y (2.7) quedan descritos en variables de estado por los modelos (2.8) y (2.9), respectivamente,

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_{1i} = x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} = -\frac{\delta_i}{m_i}x_{2i} + \frac{k_i}{m_i}u_{0i} + \frac{k_i}{m_i}v_i - \gamma_i(\cdot), \\ y_i = x_{1i}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_{1i} = x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} = -a_i \text{sen}(x_{1i}) - b_i x_{2i} + c_i u_{0i} + c_i v_i - \gamma_i(\cdot), \\ y_i = x_{1i}, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde finalmente $\gamma_i(\cdot)$ son términos de perturbación debido a no linealidades del sistema, ya sean perturbaciones externas o debidas a variación de parámetros.

4.2.2. Sistema Péndulo Simple (PS)

El sistema de la figura 4.5, consiste en un péndulo, cuyo modelo es (2.7), y su representación en variables de estado tiene la forma de (2.9).

4.2.3. Sistema Mecánico bidireccional de dos ejes (XY)

Se ha empleado además, para la experimentación, otro mecanismo que se ilustra en la figura 4.6, formado por dos ejes con movimientos traslacional sobre un plano, considerados como sistemas independientes. El modelo de tales sistemas independientes se define también por la ecuación (2.6), tal que su representación en variables de estado esta dada por (2.8).

4.2.4. Definición del objetivo de sincronización

Basándonos en las definiciones precedentes, el problema a resolver, consiste en diseñar las señales de acoplamiento v_i , tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, \quad (2.10)$$

sea satisfecho para todo $x_i(0) \in \Omega_i \subset R^2$.



Figura 4.4. Sistema Carro-Péndulo.



Figura 4.5. Sistema Péndulo Simple.



Figura 4.6. Sistema bidireccional de dos ejes.

Capítulo 5

Solución del problema de sincronización

Se presenta el planteamiento de la técnica de sincronización que se emplea para para el desarrollo de los experimentos en ésta tesis. Se establecen las condiciones matemáticas que debe cumplir un arreglo de sistemas, para que sea sincronizable, proponiendo al final, una estructura de control por retroalimentación de estados.

5.1. Definición de la técnica de sincronización

Esta técnica de sincronización está basada en [48], donde se proponen las funcionales

$$\varepsilon_i(\cdot) = \sum_{j=1, j \neq i}^k \beta_{ij}(x_{1i} - x_{1j}), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.1)$$

en forma compacta se tiene

$$\varepsilon_i(\cdot) = \Theta x_i, \quad (1.2)$$

que constan de una suma ponderada de los errores entre las salidas de los sistemas (2.5), tal ponderación esta determinada por el factor β_{ij} que es una constante que representa la fuerza de acoplamiento del nodo j al nodo i . Cada funcional ε_i es una combinación

lineal de los errores entre la salida del nodo i y la salida de cada nodo conectado a él. Así, por ejemplo, si en el diagrama de conexiones, el nodo i no recibe información del nodo j , entonces $\beta_{ij} = 0$. De la ecuación (1.1) se define Θ como

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 1}^k \beta_{1j} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1k} \\ -\beta_{21} & \sum_{j=1, j \neq 2}^k \beta_{2j} & & -\beta_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\beta_{k1} & -\beta_{k2} & \cdots & \sum_{j=1, j \neq k}^k \beta_{kj} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

La matriz (1.3) es definida como la matriz de interconexión, que es una matriz cuadrada, no necesariamente simétrica. La suma de sus elementos en cada fila es cero.

Una condición necesaria para que el arreglo (2.5) sea sincronizable, es que el rango de la matriz de conexión Θ tenga un rango igual a $k - 1$, siendo así, mediante una eliminación Gaussiana sobre (1.3) se obtiene la matriz Ξ de la ecuación (1.5), para probar esto, se puede demostrar que el espacio nulo de Θ , que se obtiene de (1.2) mediante

$$0 = \Theta x_1, \quad (1.4)$$

es $x_i = x_j$, entonces se puede forzar a que el arreglo (2.5) se sincronice.

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & -a_{1\ k-1} & -a_{1k} \\ 0 & 1 & \cdots & -a_{2i} & & -a_{2\ k-1} & -a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & -a_{i\ k-1} & -a_{ik} \\ \vdots & & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Cabe señalar que si $\text{ran}(\Theta) = k$, la única solución del sistema (1.4) es $x_{11} = x_{12} =$

$\dots = x_{1k} = 0$, que reduce las posibles soluciones de los nodos (2.5) satisfaciendo el objetivo (2.10).

Empleando las funcionales (1.1) se definen dos problemas, uno es determinar bajo que topologías de arreglos el objetivo (2.10) se satisface cuando las funcionales (1.1) se desvanecen. El otro problema es encontrar las señales de acoplamiento que estabilizan asintóticamente el origen de la dinámica de tales funcionales.

Considérese un arreglo de sistemas (2.5), cuya conexión este determinada por las funcionales (1.1). Se dirá entonces que este arreglo es sincronizable si existen señales de acoplamiento tales que el objetivo (2.10) sea satisfecho.

Reescribiendo el sistema (1.1) en forma matricial, se tiene

$$\epsilon_1 = \Theta_1 x_1 - \Theta_2 x_{1\varpi}, \quad (1.6)$$

donde:

$x_{1\varpi}$ es la salida del sistema de referencia,

$$\epsilon_1 = [\epsilon_j]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$x_1 = [x_{1j}]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k,$$

donde k es el número de sistemas.

Si se toma el sistema Σ_1 como el sistema de referencia, las matrices Θ_1 y Θ_2 , toman la forma de (1.7) y de (1.8), dado que son submatrices de (1.3),

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq 2}^k \beta_{2j} & -\beta_{23} & -\beta_{24} & \cdots & -\beta_{2k} \\ -\beta_{32} & \sum_{j=1, j \neq 3}^k \beta_{3j} & -\beta_{34} & \cdots & -\beta_{3k} \\ -\beta_{42} & & \sum_{j=1, j \neq 4}^k \beta_{4j} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\beta_{(k-1)k} \\ -\beta_{k2} & -\beta_{k3} & \cdots & -\beta_{k(k-1)} & \sum_{j=1, j \neq k}^k \beta_{kj} \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} -\beta_{21} \\ \vdots \\ -\beta_{k1} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Se obtiene la dinámica del sistema (1.6),

$$\dot{\epsilon}_1 = \Theta_1 \dot{x}_1 - \Theta_2 \dot{x}_{1\varpi}, \quad (1.9)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \Theta_1 \dot{x}_2 - \Theta_2 \dot{x}_{2\varpi}, \quad (1.10)$$

donde

$$x_2 = [\dot{x}_{2j}]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k.$$

Se reescribe el sistema (1.9) en forma compacta,

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2 \\ \Theta_1 F(\cdot) + \Theta_1 \Delta(\cdot) - \Theta_1 \Gamma(\cdot) - \Theta_2 f_\varpi \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

donde

$$F(\cdot) = [f_j]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k, \quad (1.12)$$

$$\Delta(\cdot) = [\eta_j v_j]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k, \quad (1.13)$$

$$\Gamma(\cdot) = [\tilde{\gamma}_j]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k \quad \text{y} \quad (1.14)$$

$$f_\varpi \quad \text{es el sistema de referencia.} \quad (1.15)$$

Sea $U = \Theta_1 \Delta(\cdot)$, se propone entonces la estructura de control de la ecuación (1.16),

$$U = -\Theta_1 F(\cdot) + \Theta_1 \tilde{\Gamma}(\cdot) + \Theta_2 f_\varpi - k_p \epsilon_1 - k_v \dot{\epsilon}_1, \quad (1.16)$$

donde

$$U = [u_1, \dots, u_{(k-1)}]^T,$$

$$\tilde{\Gamma}(\cdot) = [\tilde{\gamma}_j]^T, \quad j \neq \varpi, \quad j = 1, \dots, k,$$

k_p y k_v son matrices $(k-1) \times (k-1)$ definidas positivas.

Capítulo 6

Aplicación de la técnica de sincronización

En este capítulo se presenta el desarrollo matemático para la sincronización de sistemas dinámicos, tomando como referencia la técnica de sincronización descrita en el capítulo anterior. Se presentan dos casos; la sincronización de un carro (CCP) y un péndulo (PS); y la sincronización de tres carros, los dos ejes del mecanismo XY y el carro (CCP).

En cada caso se presenta una descripción de los sistemas a través de sus modelos matemáticos, posteriormente se aplica la técnica de sincronización establecida. Finalmente se diseñan las señales de control y de acoplamiento para lograr el objetivo, posteriormente se muestran los resultados obtenidos tanto numéricos como experimentales para un caso en particular del tipo de arreglo entre los sistemas.

Los cálculos numéricos se llevaron a cabo a través del software *Simulink* de *MATLAB*, en cada caso se muestra el diagrama a bloques de los sistemas, los observadores y los sistemas de control. Por otro lado, los resultados experimentales se obtuvieron mediante el sistema de adquisición de datos *dSpace*.

6.1. Sincronización de dos sistemas, un Carro y un Péndulo

En esta sección se muestra el desarrollo analítico para lograr la sincronización entre dos sistemas bajo un esquema de conexión unidireccional, como se ilustra en la figura 4.1 (inciso a). Se establece el péndulo como sistema Σ_1 , y el carro como sistema Σ_2 , se definen los modelos (2.8), (2.9) en variables de estado como

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{21}, \\ \dot{x}_{21} = -a_1 \text{sen}(x_{11}) - b_1 x_{21} + c_1 u_{01} - \gamma_1(\cdot), \\ y_2 = x_{11}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_{12} = x_{22}, \\ \dot{x}_{22} = -\frac{\delta_2}{m_2} x_{22} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2} u_{02} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2} v_2 - \frac{\pi}{0,15} \gamma_2(\cdot), \\ y_2 = x_{12}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Para este caso en particular los valores de los parámetros de los modelos se presentan en la tabla 6.1.

Parámetro	Valor
a_1	$2/\text{seg}^2$
b_1	$1,5/\text{seg}$
c_1	3
δ_2	$12 \text{ kg}/\text{seg}$
k_2	2
m_2	1 kg

Tabla 6.1. Valores de los parámetros de los modelos del carro y el péndulo.

Debido a que la salida del carro está en metros y la salida del péndulo esta en radianes, se debe hacer un escalamiento en amplitud, por un factor de $\frac{\pi}{0,15}$ en la ecuación (1.2) para poder hacer una comparación directa entre las salidas de cada sistema.

Siguiendo la metodología de la técnica de sincronización propuesta, primero se definen las funcionales entre los sistemas,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \beta_{12}(x_{11} - x_{12}), \\ \varepsilon_2 &= \beta_{21}(x_{12} - x_{11}),\end{aligned}\tag{1.3}$$

de la figura (4.1), se puede ver que $\beta_{12} = 0$, ya que no hay conexión. Así el sistema (1.3), queda como

$$\varepsilon_2 = \beta_{21}x_{12} - \beta_{21}x_{11},$$

por lo tanto la ecuación (1.6), se defien como

$$\epsilon_1 = \beta_{21}x_{12} - \beta_{21}x_{11},\tag{1.4}$$

de donde se puede reconocer facilmente las matrices Θ_1 y Θ_2 ,

$$\Theta_1 = \beta_{21},\tag{1.5}$$

$$\Theta_2 = \beta_{21}.\tag{1.6}$$

Se obtiene la dinámica de (1.4),

$$\dot{\epsilon}_1 = \Theta_1\dot{x}_1 - \Theta_2\dot{x}_{11} = \epsilon_2,$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \Theta_1\dot{x}_2 - \Theta_2\dot{x}_{21},$$

en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2, \\ \Theta_1 \left| -\frac{\delta_2}{m_2}x_{22} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2}u_{02} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2}v_2 - \frac{\pi}{0,15}\gamma_2(\cdot) \right| - \xi_1 \end{bmatrix},\tag{1.7}$$

$$\text{donde } \xi_1 = \Theta_2 [-a_1 \text{sen}(x_{11}) - b_1 x_{21} + c_1 u_{01} - \gamma_1(\cdot)].\tag{1.8}$$

el cual se puede reescribir en forma compacta

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2, \\ \Theta_1 F(\cdot) + \Theta_1 \Delta(\cdot) - \Theta_1 \Gamma(\cdot) - \Theta_2 f_\varpi(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Se propon el control $U = \Theta_1 \Delta(\cdot)$ de la ecuación (1.16), para este caso en particular las ecuaciones (1.12), (1.13), (1.14) y (1.15) se establecen como

$$\begin{aligned} F(\cdot) &= -\frac{\delta_2}{m_2} x_{22} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2} u_{0_2}, \\ \Delta(\cdot) &= \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2} v_2, \\ \Gamma(\cdot) &= \frac{\pi}{0,15} \gamma_2(\cdot), \\ f_\varpi &= -a_1 \text{sen}(x_{11}) - b_1 x_{21} + c_1 u_{0_1} - \gamma_1(\cdot). \end{aligned}$$

De este modo el control de la ecuación (1.16) toma la forma

$$u_1 = -\Theta_1 \left[-\frac{\delta_2}{m_2} x_{22} + \frac{\pi}{0,15} \frac{k_2}{m_2} u_{0_2} \right] + \Theta_1 \left[-\frac{\pi}{0,15} \tilde{\gamma}_2(\cdot) \right] + \xi_2 - \xi_3, \quad (1.10)$$

$$\text{donde } \xi_2 = \Theta_2 [-a_1 \text{sen}(x_{11}) - b_1 x_{21} + c_1 u_{0_1} - \tilde{\gamma}_1(\cdot)], \quad (1.11)$$

$$\xi_3 = k_p(\beta_{21} x_{12} - \beta_{21} x_{11}) + k_v(\beta_{21} x_{22} - \beta_{21} x_{21}). \quad (1.12)$$

6.1.1. Resultados numéricos

Se presentan los resultados de la simulación de este experimento. En la figura 6.1 se muestran las posiciones del péndulo x_{11} y el carro x_{12} , así como el error existente entre estas posiciones. En esta gráfica se puede notar que despues de $t = 5 \text{ seg}$, x_{11} y x_{12} convergen, pues en $t = 5 \text{ seg}$ se aplica la señal de acoplamiento v_1 al sistema Σ_2 . De $5 \text{ seg} < t < 20 \text{ seg}$, esta señal de acoplamiento logra la sincronización de los dos sistemas, no obstante es fácil notar que en $20 \text{ seg} < t < 40 \text{ seg}$, cuando se compensan las perturbaciones desconocidas de los sistemas, se logra disminuir este error en un 77%, lo que representa una disminución del error de 0,09 a 0,0207 metros. En las figuras 6.2 y 6.3 se pueden ver las posiciones de cada sistema y las posiciones observadas, así como

el error del observador. Por otra parte, las figuras 6.4 y 6.5 , muestran la estimación de los términos desconocidos. Y finalmente en la figura 6.6 se presenta la señal de acoplamiento que se aplica al sistema Σ_2 .

En el apéndice A se presenta el diagrama a bloques programado en Simulink para aplicar la técnica de sincronización a estos sistemas.

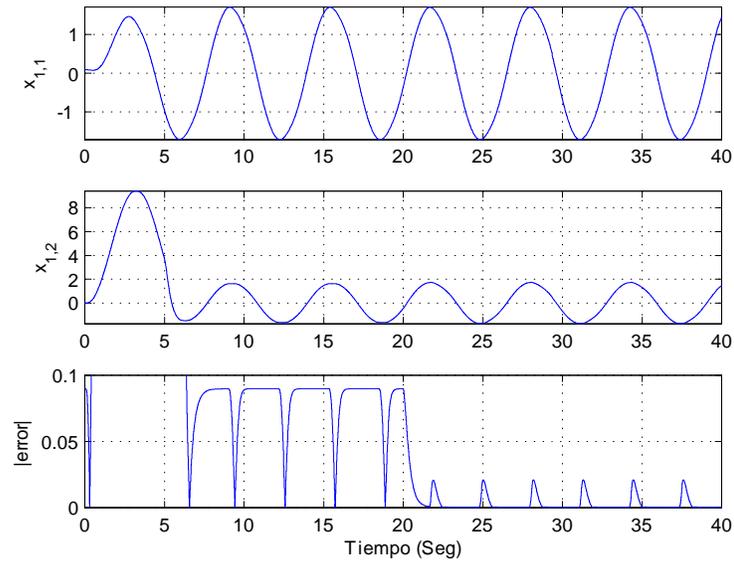


Figura 6.1. Posiciones del carro y el péndulo.

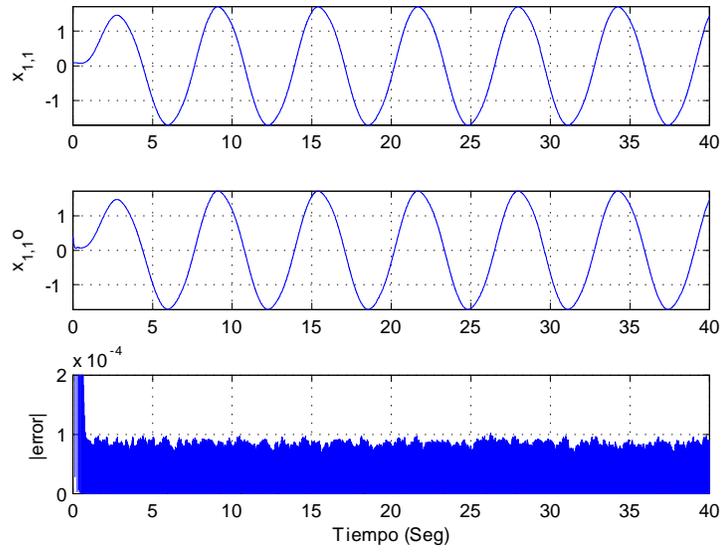


Figura 6.2. Posición real y posición estimada del sistema Σ_1 .

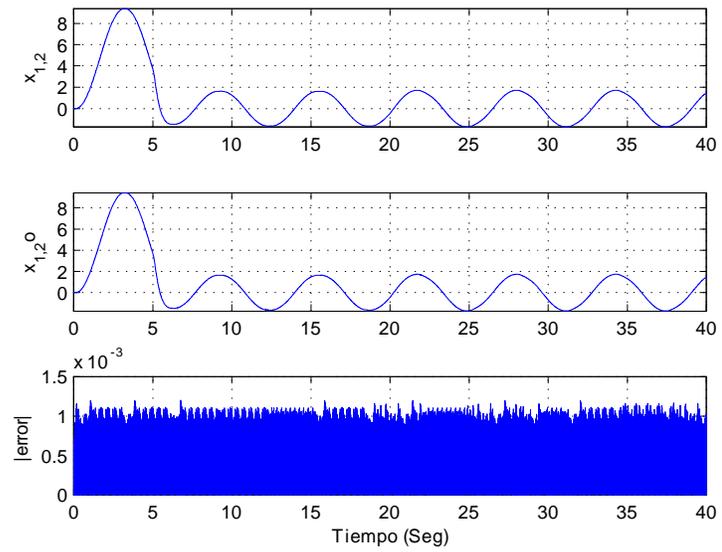


Figura 6.3. Posición real y posición estimada del sistema Σ_2 .

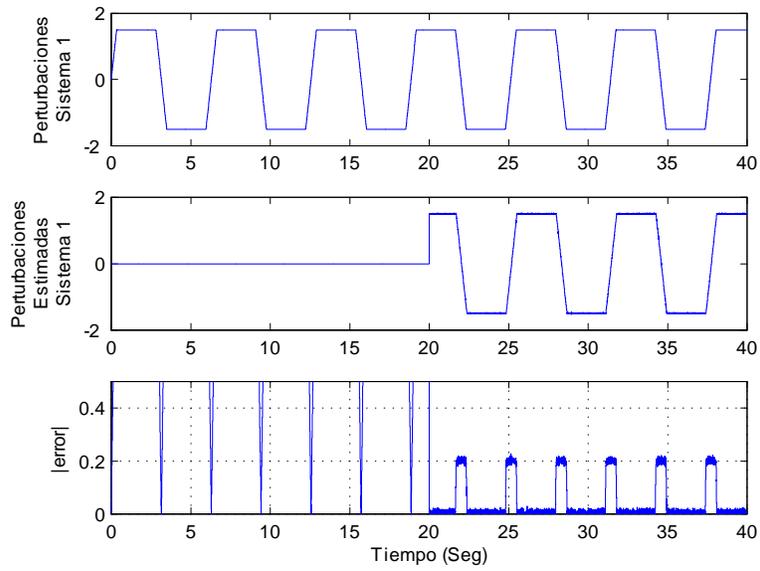


Figura 6.4. Perturbaciones reales contra estimadas del sistema Σ_1 .

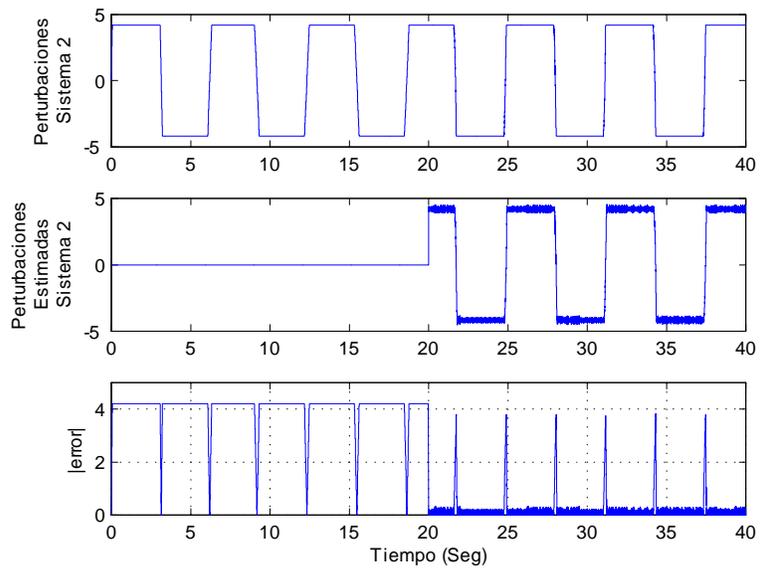


Figura 6.5. Perturbaciones reales contra estimadas del sistema Σ_2 .

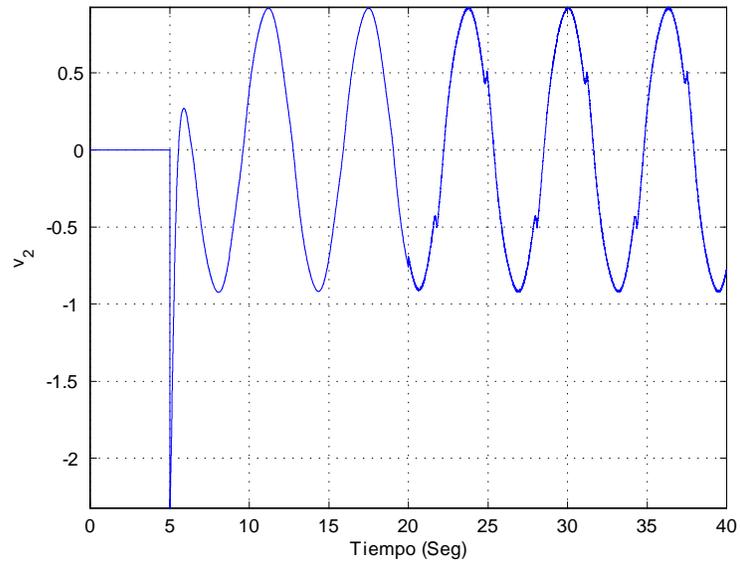


Figura 6.6. Señal de acoplamiento aplicada el sistema Σ_2 .

6.2. Sincronización de tres sistemas tipo carro

En este apartado se realiza la sincronización de tres sistemas tipo carro, bajo un esquema de conexión como se muestra en la figura 4.2. Se define el carro de la figura 4.4 como sistema Σ_1 , y los dos ejes de la figura 4.6, como carros independientes Σ_2 y Σ_3 . Así el modelo (2.6), se particulariza para cada sistema, quedando como se muestra en (2.13), (2.14) y (2.15) para cada sistema respectivamente.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{21}, \\ \dot{x}_{21} = -\frac{\delta_1}{m_1}x_{21} + \frac{k_1}{m_1}u_{01} - \gamma_1(\cdot), \\ y_1 = x_{11}. \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_{12} = x_{22}, \\ \dot{x}_{22} = -\frac{\delta_2}{m_2}x_{22} + \frac{k_2}{m_2}u_{02} + \frac{k_2}{m_2}v_2 - \gamma_2(\cdot), \\ y_2 = x_{12}. \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x}_{13} = x_{23}, \\ \dot{x}_{23} = -\frac{\delta_3}{m_3}x_{23} + \frac{k_3}{m_3}u_{03} + \frac{k_3}{m_3}v_3 - \gamma_3(\cdot), \\ y_3 = x_{13}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Para este caso en particular los valores de los parámetros de los modelos se presentan en la tabla 6.2.

En el modelo (2.13), es importante señalar, que el factor $\frac{k_1}{m_1}v_1$ tiene un valor de cero, ya que el sistema Σ_1 , se ha definido como el sistema de referencia, el sistema lider.

Se definen las funcionales entre estos sistemas, empleando la ecuación (1.1), se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \beta_{12}(x_{11} - x_{12}) + \beta_{13}(x_{11} - x_{13}), \\ \varepsilon_2 &= \beta_{21}(x_{12} - x_{11}) + \beta_{23}(x_{12} - x_{13}), \\ \varepsilon_3 &= \beta_{31}(x_{13} - x_{11}) + \beta_{32}(x_{13} - x_{12}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

de la figura (4.2), se puede ver que $\beta_{12} = 0$, $\beta_{13} = 0$.

Así el sistema (2.16), queda como

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \beta_{21}(x_{12} - x_{11}) + \beta_{23}(x_{12} - x_{13}), \\ \varepsilon_3 &= \beta_{31}(x_{13} - x_{11}) + \beta_{32}(x_{13} - x_{12}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

tomando como referencia a (1.6), el sistema ϵ_1 es

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{bmatrix} |x_{11}|, \quad (2.18)$$

Parámetro	Valor
m_1	1 <i>kg</i>
δ_1	12 <i>kg/seg</i>
k_1	2
m_2	2 <i>kg</i>
δ_2	10 <i>kg/seg</i>
k_2	3
m_3	3 <i>kg</i>
δ_3	11 <i>kg/seg</i>
k_3	4

Tabla 6.2. Valores de los parámetros de los modelos de los tres carros.

de donde se puede ver facilmente el valor de las matrices Θ_1 y Θ_2 ,

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{21} + \beta_{23} & -\beta_{23} \\ -\beta_{32} & \beta_{31} + \beta_{32} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Se obtiene la dinámica de (2.18),

$$\dot{\epsilon}_1 = \Theta_1 \dot{x}_1 - \Theta_2 \dot{x}_{11} = \epsilon_2,$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \Theta_1 \dot{x}_2 - \Theta_2 \dot{x}_{21},$$

en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2, \\ \Theta_1 \begin{bmatrix} -\frac{\delta_2}{m_2} x_{22} + \frac{k_2}{m_2} u_{02} + \frac{k_2}{m_2} v_2 - \gamma_2(\cdot) \\ -\frac{\delta_3}{m_3} x_{23} + \frac{k_3}{m_3} u_{03} + \frac{k_3}{m_3} v_3 - \gamma_3(\cdot) \end{bmatrix} - \Theta_2 \begin{bmatrix} -\frac{\delta_1}{m_1} x_{21} + \frac{k_1}{m_1} u_{01} - \gamma_1(\cdot) \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

Se propone el control de la ecuación (1.16), donde la representación matricial de $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, que consta de las señales de control que se aplican a cada uno de los sistemas que deben sincronizarse al sistema de referencia, así estas señales de control se establecen como

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\Theta_1 \begin{bmatrix} -\frac{\delta_2}{m_2} x_{22} + \frac{k_2}{m_2} u_{02} \\ -\frac{\delta_3}{m_3} x_{23} + \frac{k_3}{m_3} u_{03} \end{bmatrix} + \Theta_1 \begin{bmatrix} \gamma_2(\cdot) \\ \gamma_3(\cdot) \end{bmatrix} + \xi_4 + \xi_5, \quad (2.21)$$

$$\text{donde } \xi_4 = \Theta_2 \begin{bmatrix} -\frac{\delta_1}{m_1} x_{21} + \frac{k_1}{m_1} u_{01} - \gamma_1(\cdot) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\xi_5 = -k_p(\beta_{21}x_{12} - \beta_{21}x_{11}) - k_v(\beta_{21}x_{22} - \beta_{21}x_{21}). \quad (2.23)$$

6.2.1. Resultados Numéricos

En esta sección se presentan los resultados obtenidos bajo un esquema de simulación, en la sincronización de los tres carros. La figura 6.7 ilustra las posiciones de los tres

carros, así como el error existente entre estas posiciones, el error que se muestra en la parte inferior de la figura representa una suma de los errores entre las posiciones de los tres carros, se puede observar como los carros tienden a sincronizarse en $t = 5 \text{ seg}$, tiempo en el que se aplican las señales de acoplamiento, se puede notar que en $5 \text{ seg} < t < 30 \text{ seg}$, se comienza a aplicar las señales de acoplamiento, y el error entre las posiciones de los carros permanece en un rango de $14 \times 10^{-3} \text{ metros}$, ahora que en $30 \text{ seg} < t < 50 \text{ seg}$, se compensan las perturbaciones de los sistemas, siendo evidente que disminuye el error entre las posiciones hasta en un 77%, lo que equivale a disminuir el error de $14 \times 10^{-3} \text{ metros}$ a $3,22 \times 10^{-3} \text{ metros}$ aproximadamente, lo que demuestra la eficiencia de las estructuras de los observadores en la estimación de las perturbaciones desconocidas de los sistemas. En las figuras 6.8, 6.9 y 6.10 se muestran las posiciones reales y las posiciones observadas, así como el error de cada uno de los observadores.

Por otro lado, en las figuras 6.11, 6.12 y 6.13, se muestran las señales que representan una estimación de las perturbaciones para cada sistema. Finalmente en la figura 6.14 se pueden ver las señales de acoplamiento aplicadas al sistema Σ_2 y Σ_3 .

En el apéndice B se presenta el diagrama a bloques programado en Simulink para aplicar la técnica de sincronización a estos sistemas.

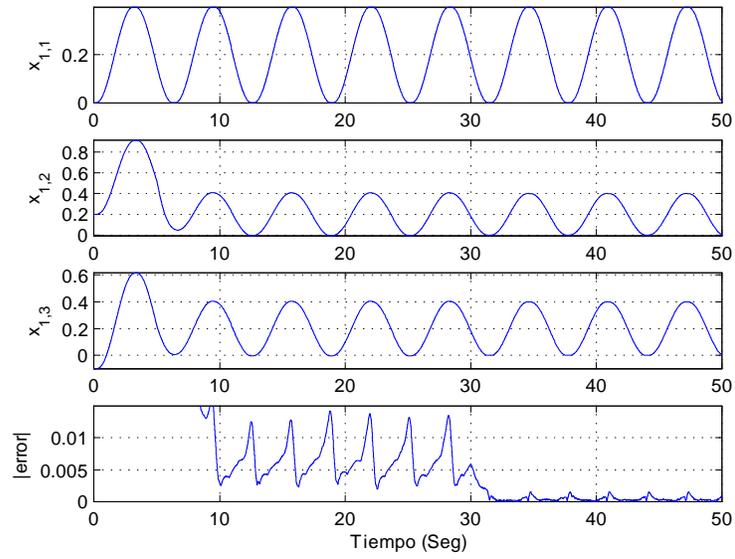


Figura 6.7. Posiciones de los carros.

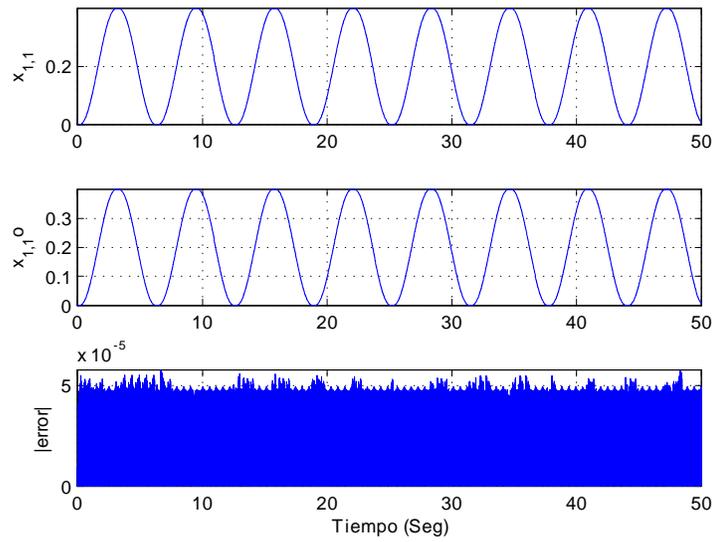


Figura 6.8. Posición real y posición estimada del sistema Σ_1 .

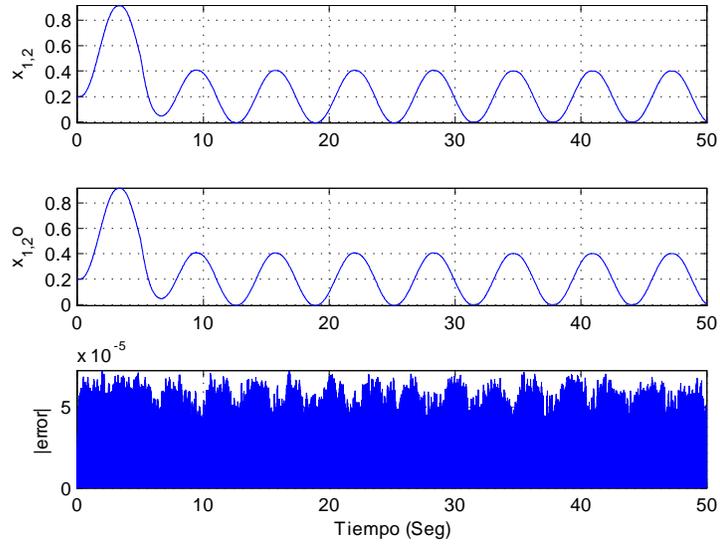


Figura 6.9. Posición real y posición estimada del sistema Σ_2 .

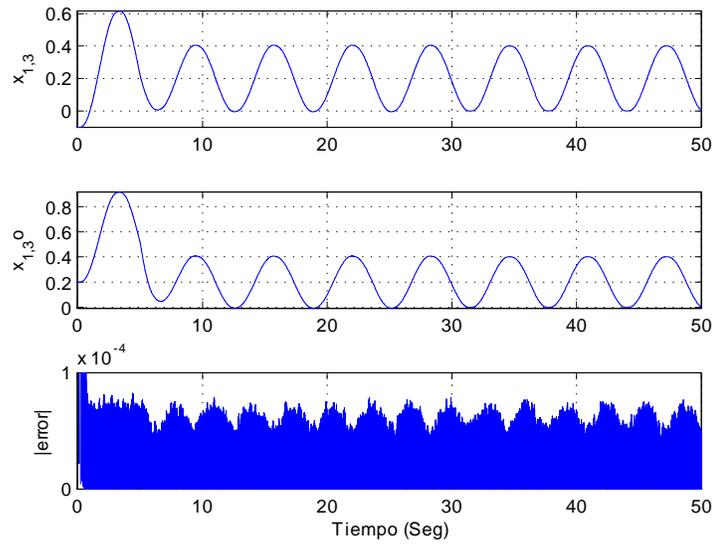


Figura 6.10. Posición real y posición estimada del sistema Σ_3 .

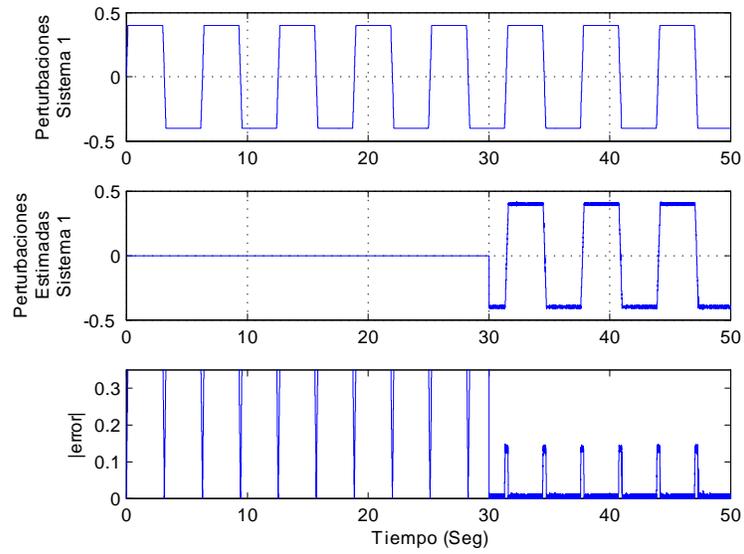


Figura 6.11. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_1 .

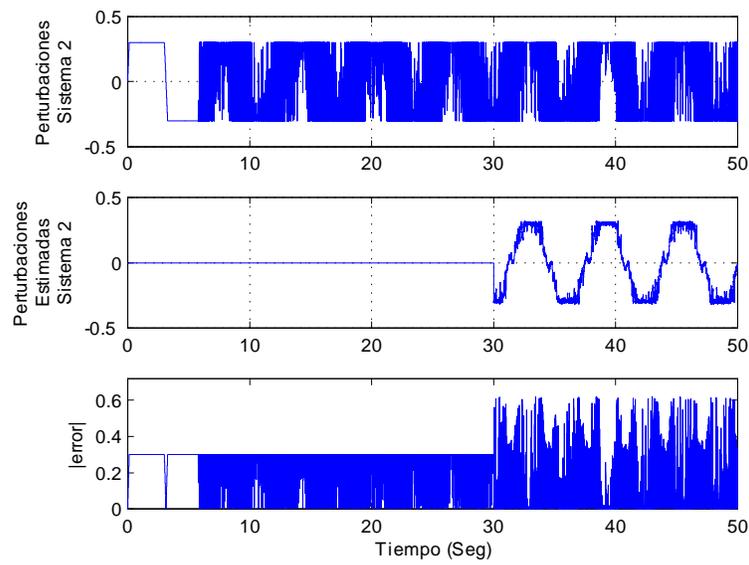


Figura 6.12. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_2 .

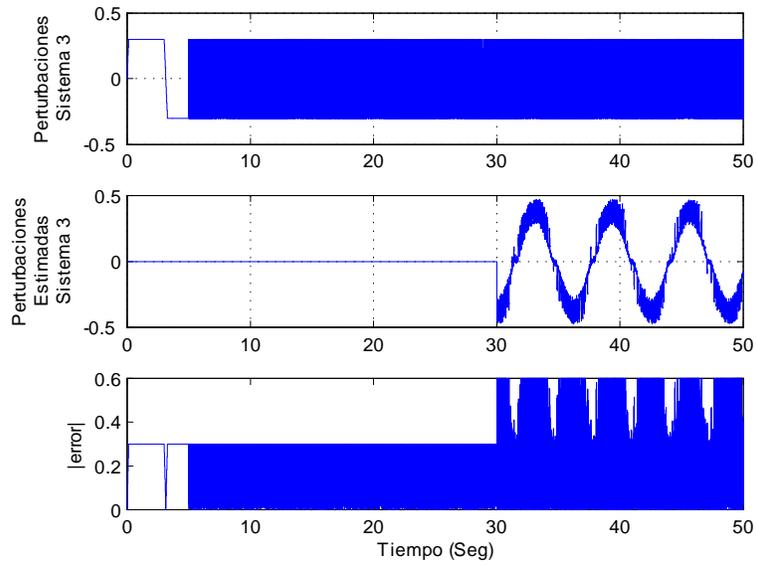


Figura 6.13. Perturbaciones reales contra estimadas del Sistema Σ_3 .

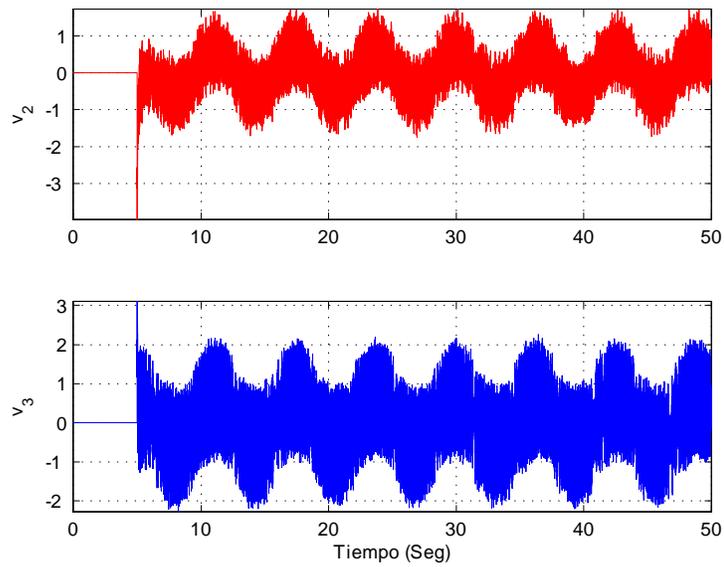


Figura 6.14. Señales de acoplamiento aplicadas a los sistemas Σ_2 y Σ_3 .

6.2.2. Resultados Experimentales

Se muestran los resultados experimentales; en la figura 6.15 se pueden ver las posiciones de los tres carros así como el error existente entre éstas. En $t = 10 \text{ seg}$ se aplica una señal de control nominal a los carros lazo abierto, en $t = 17 \text{ seg}$ se aplica las señales de control sin la compensación de perturbaciones, se puede apreciar como en este tiempo el error existente entre las posiciones disminuye a $0,06 \text{ m}$, en $t = 30 \text{ seg}$, se incorpora en el controlador, el término que compensa las perturbaciones y parámetros desconocidos del sistema, siendo evidente que el error disminuye notablemente hasta en un 80% , lo que representa una disminución del error de $0,06 \text{ metros}$ a $0,012 \text{ metros}$.

En las figuras 6.16, 6.17 y 6.18 se pueden apreciar la posición real y la posición estimada por el observador para cada sistema, Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 , respectivamente. En las figuras 6.19, 6.20 y 6.21, se muestran las señales que representan una estimación de las perturbaciones para cada sistema. Por último, en la figura 6.22 se presentan las señales de acoplamiento aplicadas al sistema Σ_2 y al sistema Σ_3 , señales que permiten la sincronización de éstos con el sistema de referencia Σ_1 .

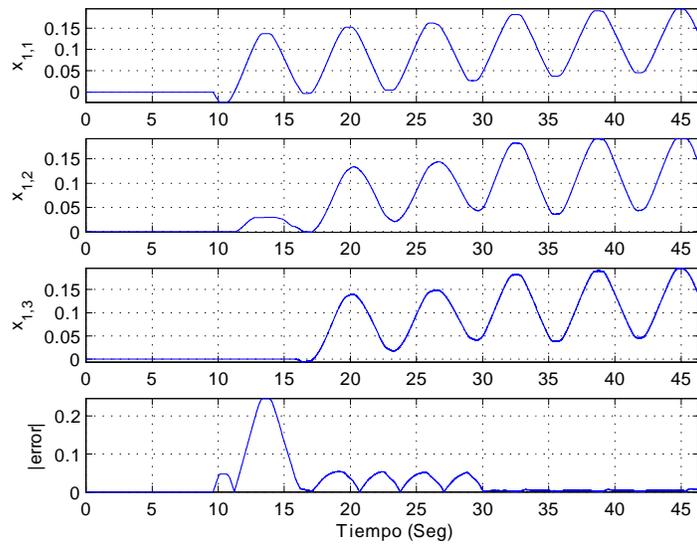


Figura 6.15. Posiciones de los carros.

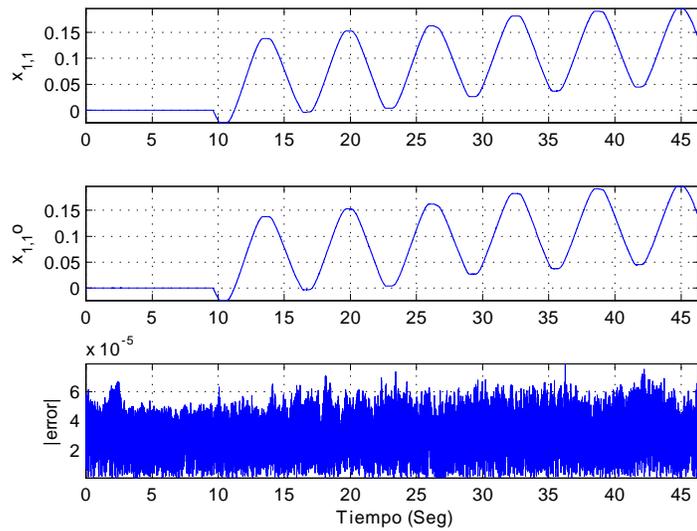


Figura 6.16. Posición real y posición observada del Sistema Σ_1 .

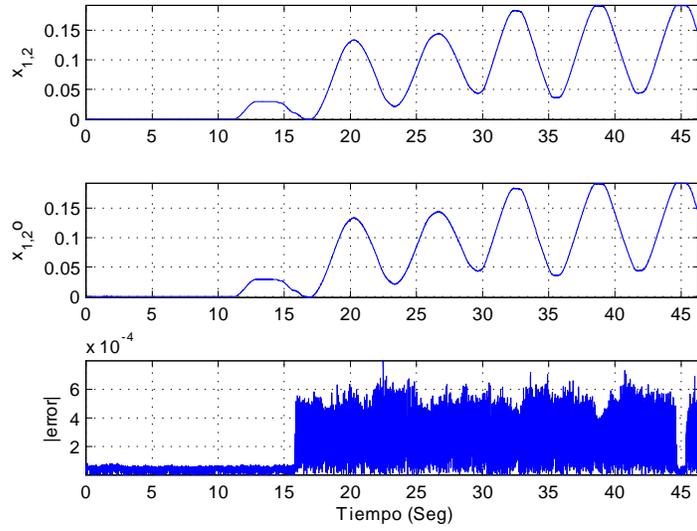


Figura 6.17. Posición real y posición observada del Sistema Σ_2 .

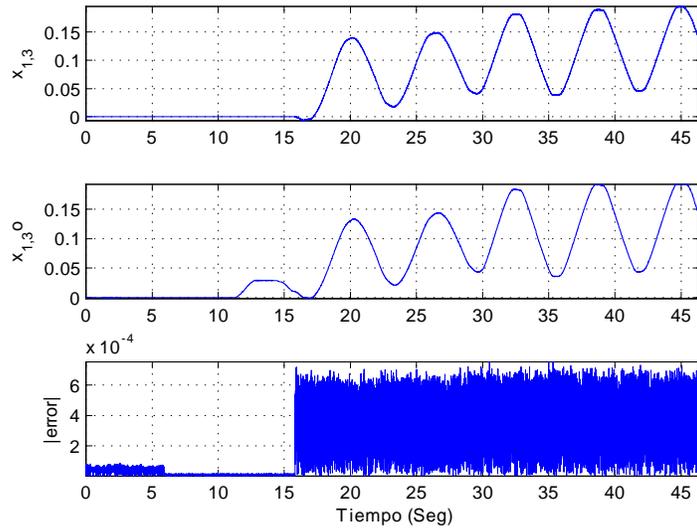


Figura 6.18. Posición real y posición observada del Sistema Σ_3 .

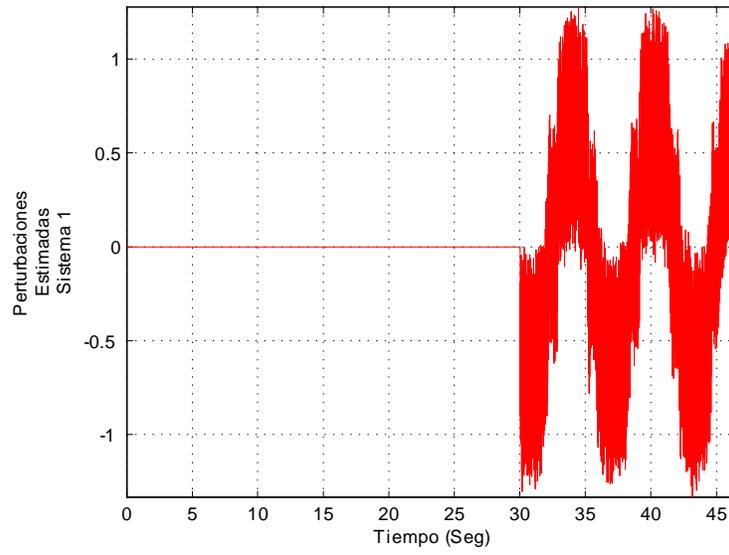


Figura 6.19. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_1 .

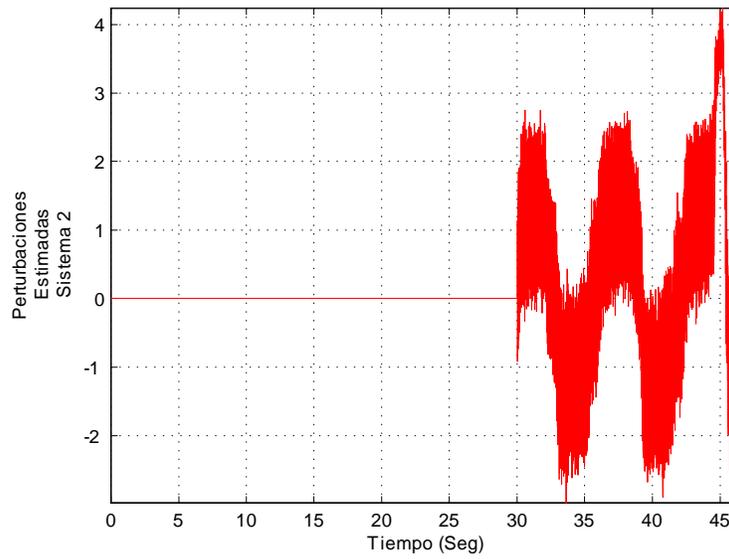


Figura 6.20. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_2 .

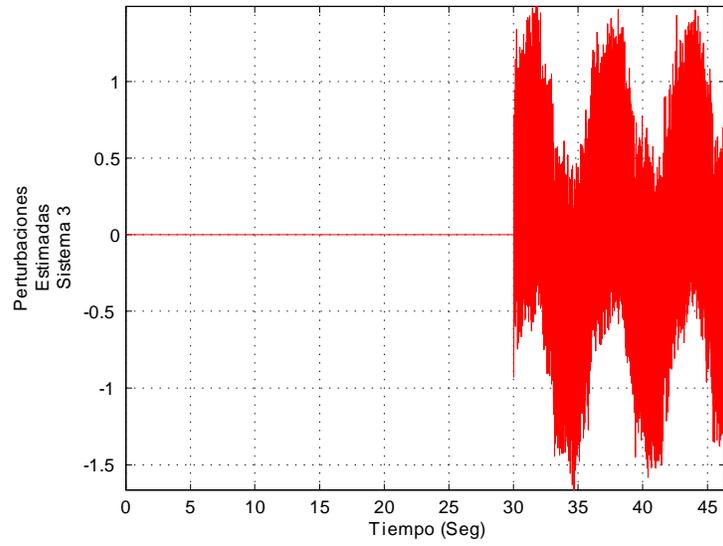


Figura 6.21. Estimación de perturbaciones del Sistema Σ_3 .

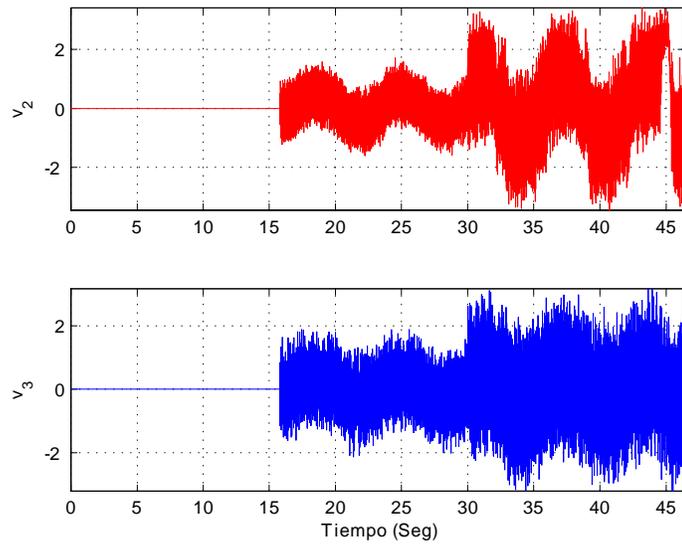


Figura 6.22. Señales de acoplamiento aplicadas a los sistemas Σ_2 y Σ_3 .

Capítulo 7

Conclusiones

El trabajo realizado se llevó a cabo en diferentes fases; la primer etapa consistió en el diseño de un observador que fuera robusto ante perturbaciones externas y variaciones paramétricas, para lo cual se tomó como referencia la estructura del Observador de Luenberger, ya que los sistemas satisfacen las condiciones para ello. Para obtener propiedades de robustez en este observador se empleó el concepto de modos deslizantes, de lo cual se obtiene una señal de frecuencia teóricamente infinita del observador. Si se logra filtrar esta señal mediante un filtro pasabajas, la señal resultante es un promedio de las perturbaciones y términos desconocidos de la planta, de tal forma que si se compensa la estructura de control con esta señal promediada, se idealiza en cierta medida el modelo de la planta, y el sistema de control presenta mejores resultados.

En una siguiente fase, se abordó la objetivo de seleccionar un filtro tal que el promedio de esta señal discontinua fuera lo mas preciso, y por otro lado suave, ya que al compensar estas perturbaciones estimadas, se produce el efecto de chattering en las plantas, que básicamente consiste en la vibración de los mecanismos, produciendo un desgaste y riesgo para éstos, por lo cual es un efecto no deseable. Dentro de esta experimentación se trabajo con dos filtros, un filtro analógico y un filtro digital. Los resultados que se obtuvieron demostraron que el segundo filtro implementado logró que el error

disminuyera en el objetivo de control, por lo cual fue este filtro que se utilizó en los experimentos sucesivos de sincronización.

Posteriormente se obtuvo una técnica de sincronización basada en otras técnicas ya establecidas, considerando otros factores, ya que en este trabajo se aborda la situación de sincronización considerando no linealidades en las plantas, cuestión que no se aborda en esas otras técnicas. Para aplicar esta técnica de sincronización se requiere se satisfagan algunas condiciones matemáticas en los arreglos de los mecanismos, para lo cual se definieron algunos arreglos topológicos que cumplen estas condiciones de sincronizabilidad, y fueron los que se emplearon al momento de realizar los experimentos aquí presentados. Es importante destacar que la robustez del control de sincronización es tal, que se diseñó un control para los experimentos numéricos, en donde se propusieron los valores de los parámetros de los modelos, y esa misma estructura de control se empleó cuando se cambiaron los modelos teóricos por las plantas reales, es decir, a pesar de que los parámetros de los modelos y de las plantas no eran los mismos, la estructura de control en el experimento numérico funcionó también para obtener resultados favorables en el experimento real.

Finalmente, se llevaron a cabo los experimentos para sincronizar mecanismos, obteniendo resultados satisfactorios en la implementación de esta técnica de sincronización, sin embargo se pueden plantear algunos objetivos a futuro; tales como considerar otros tipo de fenómenos no lineales presentes en las plantas, e investigar si la técnica de sincronización aquí presentada puede aplicarse también en esos casos. Por otro lado, se empleó un tipo de observador, por lo que se podría implementar otra clase de observador, e incluso, analizar los resultados con otra estructura de filtrado de la señal discontinua.

Bibliografía

- [1] A. Das and F. L. Lewis, “Cooperative adaptive control for synchronization of second-order systems with unknown nonlinearities”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, DIO:10.1002/rnc.1647.
- [2] Alvarez, J., Orlov, I y Acho, L. 2000. An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a Coulomb friction oscillator. *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*. 122: 687-690 p.
- [3] Andrievsky, B. R. y Fradkov, A. L. 2001. Adaptive synchronization in presence of noise with applications to telecommunications. *Proc. of the European Control Conference 2001*. 2953-2957 p.
- [4] Arkady, P., Michael R. y Kurths, J. 2003. Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge Press. Cambridge. 411 pp.
- [5] Asad, A. y Edwin, E. Y. 2000. Sliding-mode adaptive observer approach to chaotic synchronization. *Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control*. 122: 758-765 p.
- [6] Ashok, Ambardar, *Procesamiento Digital de Señales*, segunda edición, México, D. F.

- [7] Barbot, J. P., Djemai, M. y Boukhobza, T. 2002. Sliding mode observers. En: Sliding Mode Control in Engineering. Wilfrid Perruquetti y Jean Pierre Barbot. Marcel Dekker, Inc. New York, 409 pp.
- [8] Besancon, Gildas. 2007. Nonlinear Observers and Applications. Vol. 363. Springer. 224 p
- [9] Blekhman, I. I. 1988. Synchronization in science and technology. ASME Press. New York. 255 pp.
- [10] Blekhman, I. I., Fradkov, A. L., Nijmeijer, H. y Pogromsky, A. Y. 1997. On self-synchronization and controlled synchronization. Systems & Control Letters. 31: 299-305 p.
- [11] Blekhman, I. I., Landa, P. S. y Rosenblum, M. G. 1995. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems. Applied Mechanical Review. 48(11): 733-752 p.
- [12] Boccaletti, S., Pecora, L. M. y Pelaez, A. 2001. Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems. Physical Review E. 63: 066219.
- [13] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L. y Zhou, C. S. 2002. The synchronization of chaotic systems. Physics Reports. 366: 1-101 p.
- [14] C. Soon-Jo and E. Slotine, "Cooperative Robot Control and Synchronization of Lagrangian Systems", Proc. of the 46th Conference on Decision and Control, New Orleans, USA, 2007.
- [15] Chai, W. W. 2002. Synchronization in coupled chaotic circuits and systems. World Scientific, New Jersey, 174 pp.

- [16] Chai, W. W. 2000. Synchronization in arrays of chaotic circuits coupled via dynamical coupling elements. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 10(4): 819-827 p.
- [17] Chai, W. W. y Chua, L. O. 1995. Application of Kronecker products to the analysis of systems with uniform linear coupling. *IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications*. 42(10): 775-778 p.
- [18] Chai, W. W. 2001. Synchronization in arrays of coupled nonlinear systems: Passivity, circle criterion, and observer design. *IEEE Transactions on circuits and systems I: Fundamental theory and applications*. 48(10): 1257-1261 p.
- [19] Chai, W. W. y Chua, L. O. 1994. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems. *International Journal Of Bifurcation and Chaos*. 4(4): 979-998 p.
- [20] Da,W. y Fu, W. P. 2001. A robust state observer scheme. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 46(12): 1958-1963 p.
- [21] Deniz, E., A. Umut, G. y Principe, J. C. 2002. A neural network perspective to extended luenberger observers. *Institute of Measurement and Control*. 35(2):10-16 p.
- [22] Donald M. Wiberg, 1971, *Espacio de Estado y Sistemas Lineales*, Mc. Graw-Hill, México.
- [23] Dong, S. y Mills, J. K. 2002. Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 18(4): 498-510 p.

- [24] Femat, R., Alvarez, J. y Fernández, G. 2000. Adaptive synchronization of high-order chaotic systems: a feedback with low-order parametrization. *Physica D*. 139: 231-246 p.
- [25] Fradkov, A. L. y Markov, A. Y. 1997. Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 44(10): 905-912 p.
- [26] Fradkov, A. L., Nijmeijer, H. y Pogromsky A. Yu. 2000. Adaptive observer-based synchronization. En: Guanrong Chen. *Controlling chaos and bifurcations in engineering systems*. CRC Press. 417-438 p.
- [27] Gang, H., Ladislav, P. y Zheleznyak, A. L. 1995. Synchronization of a one-dimensional array of Chua's circuits by feedback control and noise. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, I: Fundamental Theory and Applications*. 42(10): 736-740 p.
- [28] Giovanni, S., Pogromsky, A. Y. y Nijmeijer, H. 2003. Partial observers and partial synchronization. *International Journal on Bifurcations and Chaos*. 13(2): 453-458 p.
- [29] Giuseppe, G. y Saverio, M. 1999. Synchronization of high-dimensional chaos generators by observer design. *International Journal on Bifurcation and Chaos*. 9(6): 1175-1180 p.
- [30] Gregory, D. V. y Bajarshi, R. 1999. Chaotic communication using time-delay optical systems. *International Journal on Bifurcations and Chaos*. 9(11): 2129-2156 p.
- [31] Hernández Fregoso, David. *Sincronización de sistemas mecánicos, un estudio experimental*. 2011. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior. Ensenada, B. C.. México.

- [32] Hervé, D., Kennedy, M. P. y Hasler, M. 1993. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*. 40(10): 634-642 p.
- [33] Kevin, M. C., Oppenheim, A. V. y Strogatz, S. H. 1993. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*. 40(10): 626-632 p.
- [34] Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear systems*. Prentice Hall. Tercera edición. New Jersey. 742 pp.
- [35] Koichi, O., Hajime, A., Yoshiki, I., Akihiro, M., Kazutaka, Y., Hayato, K. y Isao, E. 1993. Synchronized motion by multiple mobile robots using communication. *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Yokohama, Japan. 1164-1170 p.
- [36] Loaiza Ramirez, Manuel. *Diseño y Simulación de un Criptosistema Caótico para Comunicaciones Seguras*. Tesis, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Universidad de las Américas Puebla.
- [37] Luenberger, D. 1971. An introduction to observers. *IEEE Transaction on Automatic Control*. AC-16: 596-602 p.
- [38] Makoto, I y Chua, L. O. 2002. Reconstruction and synchronization of hyperchaotic circuits via one state variable. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 12(10): 2069-2085 p.
- [39] Makoto, K., Ryota, W., Junichi, S., Ryuichi, K., Ikuro, M. y Zenta, I. 2002. Controlled synchronization of two 1-DOF coupled oscillators. *Proc. of 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*.

- [40] Nijmeijer, H. 1997. Control of chaos and synchronization. *Systems and Control Letters*. 31: 259-262 p.
- [41] Ogata, Katsuhiko. 2002. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall. México, D.F.
- [42] Pecora, L. M. y Carroll, T. H. 1990. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*. 64(8): 821-824 p.
- [43] Pogromsky, A. Y. 1997. Synchronization and adaptive synchronization in semi-passive systems. *Proc. of Control and Decision Conference, St Petersburg, Russia*. 64-68 p.
- [44] Primbs, Jim. *Survey of Nonlinear Observer Design Techniques*. 1996. Prof. Sluis.
- [45] Reggie, B. y Rulkov, N. F. 1997. Designing a coupling that guarantees synchronization between identical chaotic systems. *Physical Review Letters*. 78(22): 4189-4192 p.
- [46] Rodríguez, A. A.. 2002. *Sincronización de sistemas mecánicos*. Tesis doctoral, Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands.
- [47] Rodriguez, A. A. y Nijmeijer, H. 2004. Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: A cooperative approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 12(4): 542-554 p.
- [48] Rosas, David, Álvarez, Joaquin, Álvarez, Ervin. Robust synchronization of arrays of uncertain nonlinear second-order dynamical systems. *Journal of Nonlinear Dynamic*. DOI 10.1007/s11071-011-0185-1, por aparecer.
- [49] Rosas Almeida, David I. 2005. *Sincronización robusta de sistemas lagrangianos utilizando controladores discontinuos*. Tesis, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

- [50] Sang, J. K., Wan, K. C., y Youngil, Y. 2003. A combined observer for robust state estimation and Kalman filtering. American Control Conference (ACC), Denver, Colorado.
- [51] Soichi, I., Shashikanth, S. y Masayoshi, T. 2001. H-infinity optimization of Luenberger state observers and its application to fault detection filter design. Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, FL. 1011-1016 p.
- [52] Sunghwan, R., Myung, W. K., Dong, U. H., Young, J. P. y Chil, M. K. 2001. Reconsideration of intermittent synchronization in coupled chaotic pendula. Physical Review E. 64: 060101.
- [53] Tang, Y. S., Alistair, I. M. y Chua, L. O. 1993. Synchronization and chaos. IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-30(9): 620-626 pp.
- [54] Teasushi, U. y Guanron, C. 2001. On synchronization and control of coupled Wilson-Cowan neural oscillators. International Journal of Bifurcations and Chaos. 13(1): 163-175 p.
- [55] Thomas L. Carroll. 1995. Communicating with use of filtered, synchronized, chaotic signals. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental, Theory and Applications. 42(3): 105-110 p.
- [56] Utkin, I. U., Jürgen, G. y Jingxin, S. 1999. Slidin mode control in electromechanical systems. Taylor and Francis. London. 325 pp.
- [57] Vadim, I. U. 1992. Sliding modes in control and optimization, Springer-Verlag, Berlin.
- [58] W. Yu, G. Chen, M. Cao and J. Kurths. "Second-order consensus for multiagent systems with direct topologies and nonlinear dynamics", IEEE Transactions on

Systems, Man, and Cybernetics- Part B: Cybernetics, Vol 40, No. 3, 2010, pp. 881-891.

[59] Williams Colmenares M. Estimadores de estado. 2006. Universidad Simón Bolívar, Departamento de Procesos y Sistemas.

[60] Yonghong ,C., Govindan, R. y Mingzhou, D. 2003. General stability analysis of synchronized dynamics in coupled systems. Physical Review E. 67: 026209.

Apéndice A

Diagramas de bloques en simulink, sincronización de carro y péndulo

En la figura A.1, el bloque 1 contiene internamente los modelos matemáticos de las plantas a sincronizar, incluyendo términos que producen no linealidades. El bloque 2 presenta los observadores robustos diseñados para estimar las variables de estado y los términos de perturbación desconocidos de las plantas. El bloque 3 contiene los dos filtros que se emplearon, el analógico y el digital, para promediar la señal de alta frecuencia obtenida con el observador, que teóricamente representa los términos desconocidos de la planta, para posteriormente adicionarla al controlador a modo de compensación. El bloque 4, internamente, contiene las operaciones matemáticas que dan lugar a las señales de acoplamiento, en este caso genera la señal v_2 , que es la señal que obliga a la planta Σ_2 a sincronizarse con el sistema de referencia Σ_1 , por lo que la señal de acoplamiento $v_1 = 0$, como se puede ver en el bloque 5. Estas señales de acoplamiento se activan mediante el interruptor del bloque 7, y la compensación de los términos desconocidos de las plantas se realiza con el interruptor del bloque 6. Finalmente, en base a que la salida de éstas plantas se miden en unidades diferentes, radianes y metros, fue necesario incluir un factor de escalamiento que permitiera comparar directamente las unidades

de ambas plantas, este escalamiento se incluye en el bloque 8.

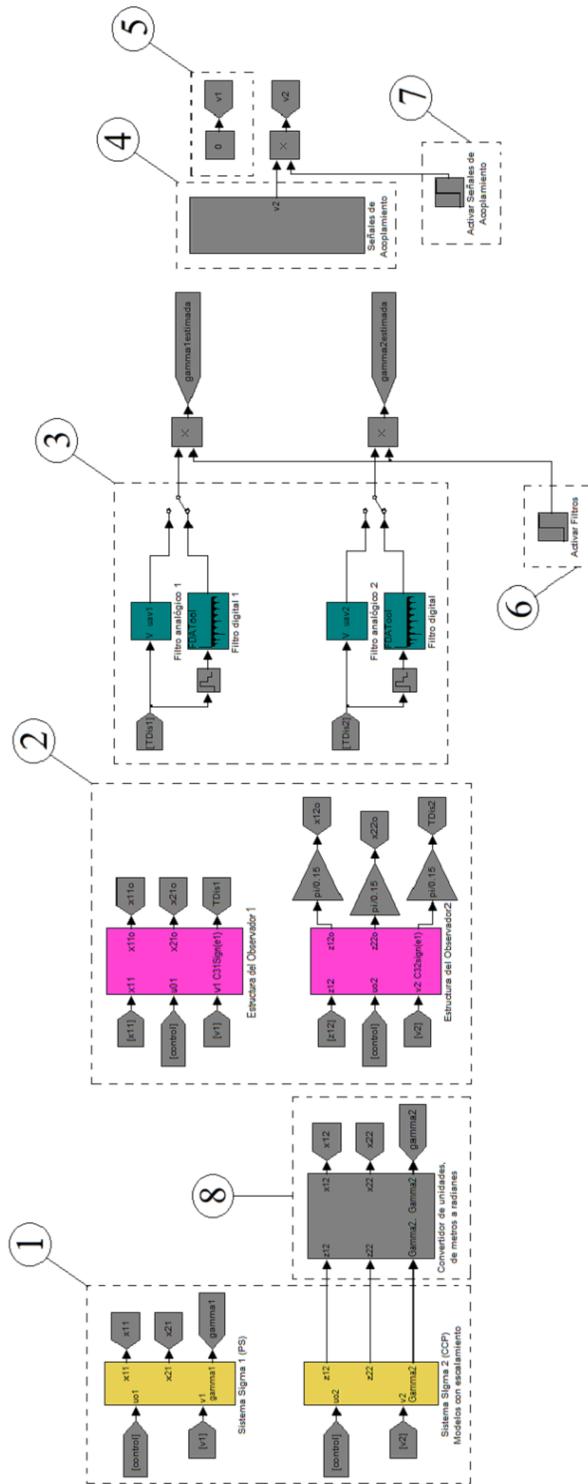


Figura A.1. Diagrama a bloques de la estructura de control para sincronizar un carro y un péndulo. 107

Apéndice B

Diagramas de bloques en simulink, sincronización de tres carros

En la figura B.1, el bloque 1 contiene internamente los modelos matemáticos de las plantas a sincronizar, incluyendo términos que producen no linealidades. El bloque 2 presenta los observadores robustos diseñados para estimar las variables de estado y los términos de perturbación desconocidos de las plantas. El bloque 3 contiene los dos filtros que se emplearon, el analógico y el digital, para promediar la señal de alta frecuencia obtenida con el observador, que teóricamente representa los términos desconocidos de la planta, para posteriormente añadirla al controlador a modo de compensación. El bloque 4, contiene las operaciones matemáticas que dan lugar a las señales de acoplamiento, en este caso se genera la señal v_2 , y v_3 , que son las señales que obligan a las plantas Σ_2 y Σ_3 a sincronizarse con el sistema de referencia Σ_1 , por lo que la señal de acoplamiento $v_1 = 0$, como se puede ver en el bloque 5. Estas señales de acoplamiento se activan mediante el interruptor del bloque 7, y la compensación de los términos desconocidos de las plantas se realiza con el interruptor del bloque 6.

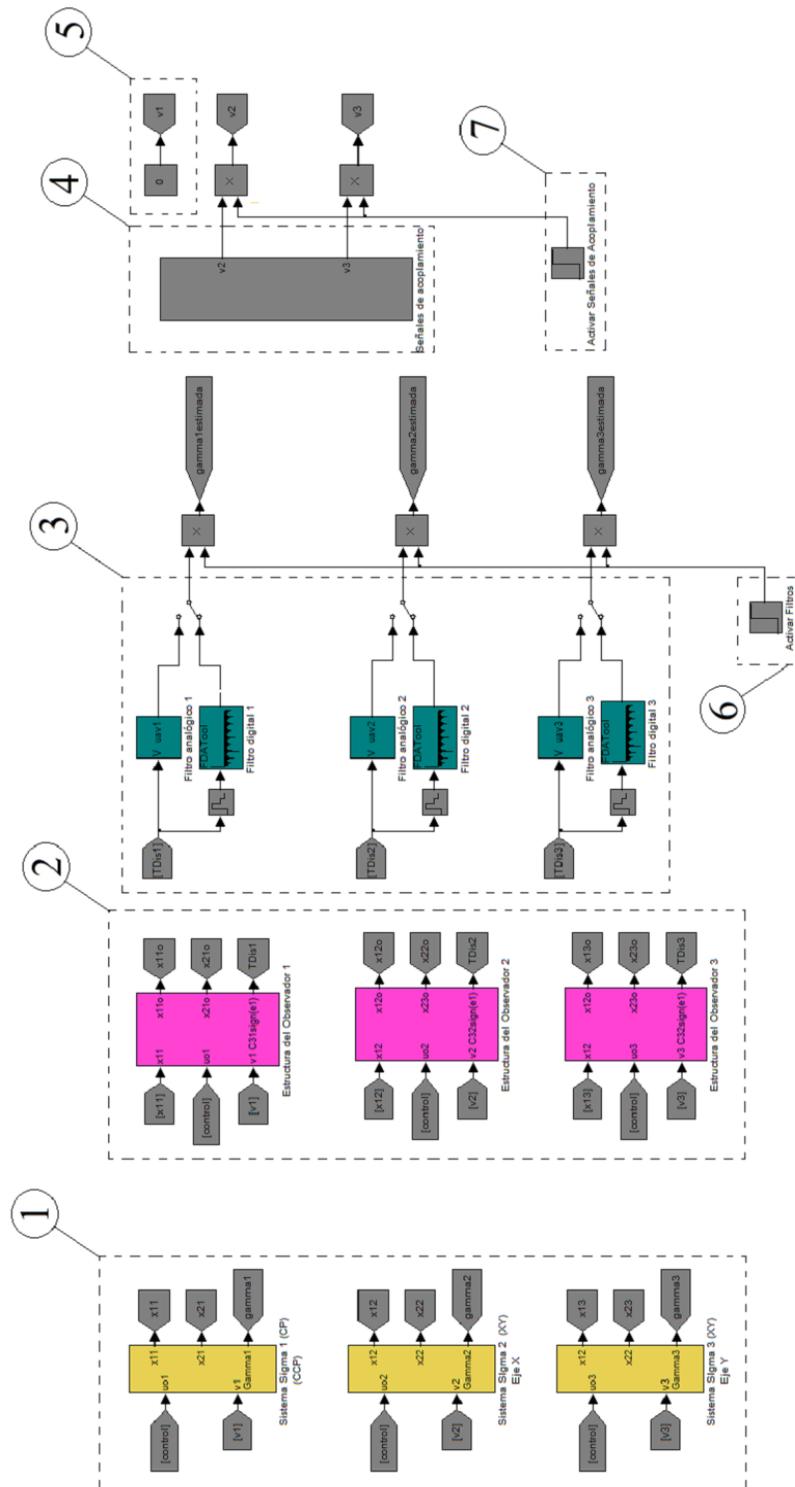


Figura B.1. Diagrama a bloques de la estructura de control para sincronizar tres carros.

Apéndice C

Video (Implementación de filtros en la estimación de perturbaciones)

En este video se muestra un ejemplo de la aplicación de los dos diferentes filtros empleados en la estimación de términos desconocidos de una planta. En este caso en particular se utilizó un eje tipo carro del mecanismo bidireccional que se describe en la sección 4.2.3. Este video se puede dividir en tres partes, en la primera parte de $9 \text{ seg} < t < 11 \text{ seg}$, se le aplica a la planta una señal de control sin compensar las perturbaciones desconocidas de la planta; en una segunda parte de $11 \text{ seg} < t < 21 \text{ seg}$, se aplica la misma señal de control, compensando ahora las perturbaciones estimadas de la planta mediante el filtro analógico, en esta segunda parte se puede notar como el error en el objetivo de control disminuye un 50 % como se describe en la sección 3.4.6, sin embargo el mecanismo comienza a vibrar, produciéndose el fenómeno de chattering; finalmente, en una tercera parte de $21 \text{ seg} < t < 36 \text{ seg}$, se compensan las perturbaciones, pero ahora con el filtro digital, y es muy notorio como el controlador se suaviza, logrando disminuir el efecto de chattering, simultáneamente disminuyendo el error en un 80 % como se menciona en la sección 3.4.6.