



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ciencias Marinas

SIMULACION DE OLEAJE DE AGITACION EN UN PUERTO POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS



TESIS

que para obtener el título de

OCEANOLOGO

presenta

JUAN ANTONIO DELGADO CONTRERAS

Ensenada, B.C.
Agosto 1994

RESUMEN

Haciendo uso de la ecuación de pendiente suave y de la teoría lineal de oleaje se simula oleaje de agitación en una dársena portuaria de geometría arbitraria.

El método de integración de la ecuación de pendiente suave es numérico y pertenece al método de elementos finitos, la solución buscada es estacionaria.

Se incluyen condiciones de frontera absorbentes y reflejantes (pudiendo el método ser aplicado a un puerto de geometría realista).

SIMULACION DE OLEAJE DE AGITACION EN UN PUERTO POR EL
METODO DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS
QUE PRESENTA:
JUAN ANTONIO DELGADO CONTRERAS

APROBADA POR:



PRESIDENTE DEL JURADO
M.C. RENE PINET PLASENCIA



SINODAL PROPIETARIO
M.C. RAMON LUNA HERNANDEZ



SINODAL PROPIETARIO
DR. EDGAR PAVIA LÓPEZ

Dedicado con cariño y amor a
mi mamá
y mi familia

A Esther

A la memoria de mi hermano Jorge (QPD)

AGRADECIMIENTOS

A Oc. Sergio Larios, Oc. Gil Silva, Oc. Blanco, Oc. Jorge Reyes, M.C. Oscar Delgado, M.C. Luis Felipe, Dr. Adan Mejía y al I.I.O.

A M.C. Ramón Luna, Dr. Edgar Pavia, M.C. Renté Pinet

A Oc. Victor Zavala, Oc. Francisco Becerril y Oc. Roberto Calderón, por enseñarme a ser un pez.

.....

a todos ellos por su ayuda y amistad.

A Oc. Maria Esther Cruz Colin por estar conmigo.

Por su apoyo:

A mis abuelitos, tíos; Antonia, Cleotilde, Anatolio, Angel, Cecilia, primos, Hermanos Paty, Bri, Alejandro, al meni, a mi papá

Muchas gracias mamá

INDICE

RESUMEN	II
HOJA DE APROBACION	III
DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTOS	V
TABLA DE CONTENIDO	VI
LISTA DE FIGURAS	VIII
SIMBOLOGIA	X
I INTRODUCCION	1
I.1 Importancia de los puertos	1
I.2 Ecuación de pendiente suave	2
I.3 Parámetros necesarios para la ecuación de pendiente suave	3
I.4 OBJETIVO	4
I.5 Planteamiento del problema	5
I.5.1 Definición de oleaje de agitación	5
I.5.2 Condiciones necesarias para aplicar la ecuación de pendiente suave en un puerto	5
II METODOS	7
II.1 Posibles métodos de solución	7
II.1.1 Métodos analógicos	7
II.1.2 Método de diferencias finitas	8
II.1.3 Método de elementos finitos	9
II.2 Justificación de la elección de FEM	10
II.2.1 Generalidades de FEM	11
II.3 Plan de solución	13
II.3.1 Teoría de olas en pendiente suave	13
II.3.2 Teoría de velocidad potencial compleja	14
II.3.3 Reseña histórica de la ecuación de pendiente suave	16
II.3.4 Teoría de elementos finitos	18
II.4 Plan general del método de Galerkin aplicado	19
II.4.1 Discretización del dominio	19
II.4.2 Selección de las funciones de interpolación	23

II.4.2.1	Elemento triangular lineal	24
II.4.2.1.1	Funciones de forma para el triángulo	24
II.4.2.2	Elemento rectangular bilineal	25
II.4.2.2.1	Funciones de forma para el rectángulo	25
II.4.3	Encontrar las propiedades de los elementos	26
II.4.3.1	Formulación de las condiciones de frontera	29
II.4.3.2	Especificación de las condiciones de frontera	30
II.4.4	Ensamblar las propiedades de los elementos para obtener el sistema de ecuaciones	31
II.4.5	Resolver el sistema de ecuaciones lineales	32
II.4.6	Postprocesado de resultados	33
III	MATERIALES	33
IV	RESULTADOS	34
V	DISCUSIONES	51
V.1	Discusiones de los resultados	51
V.2	Observaciones del método de FEM	55
VI	SUGERENCIAS Y RECOMENDACIONES	60
VII	CONCLUSIONES	61
VIII	BIBLIOGRAFIA	62

LISTA DE FIGURAS

Fig 1.- Canal unidimensional con fondo y pendiente.	21
Fig 2.- Malla empleada de elementos rectangulares	22
Fig 3.- Someramiento en un canal unidimensional de fondo variable	37
Fig 4.- Isolíneas de amplitud en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente reflejantes	38
Fig 5.- Perspectiva de amplitudes relativas en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente reflejantes	39
Fig 6.- Isolíneas de elevación del nivel de agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes	40
Fig 7.- Perspectiva de elevación de la superficie del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes.	41
Fig 8.- Cortes transversales y longitudinales en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes	42
Fig 9.- Isolíneas de amplitud relativa en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes	45
Fig 10.- Perspectiva de amplitudes relativas en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes	46
Fig 11.- Isolíneas de elevación del nivel del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes	47
Fig 12.- Perspectiva de la elevación de la superficie del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente aborbetes	48
Fig 13.- Cortes transversales y longitudinales en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes	49
Fig 14.- Amplitudes relativas de cortes transversales y	

longitudinales 50

SIMBOLOGIA

a	amplitud de onda
$a_{i,j,k}$	una constante con supraíndices i,j,k
a_o	amplitud de la onda incidente
α_n	coeficiente enesimo
A	área
$b_{i,j,k}$	una constante con supraíndices i,j,k
c	velocidad de fase (celeridad)
c_g	velocidad de grupo
$c_{i,j,k}$	una constante con supraíndices i,j,k
D	coeficiente de la velocidad de grupo
(e)	número de elemento
η	amplitud compleja de la ola
f	función conocida
Γ	frontera
ϕ	velocidad potencial
Φ	valor nodal de velocidad potencial
g	aceleración de la gravedad terrestre
h	profundidad en un punto
H	altura de la ola
$H_{1/3}$	altura de la ola de diseño
$\{I^{(e)}\}$	vector que contiene las condiciones de frontera
k	número de onda
$[K^{(e)}]$	matriz de rigidez
L	longitud de onda
L_o	longitud de la ola en aguas profundas
∇	laplaciano horizontal
∇_x	parcial respecto a x
∇_y	parcial respecto a y
N	función de forma
$[N]$	matriz de funciones de forma

$[N]^T$ matriz transpuesta de funciones de forma
 ∂ parcial
 Ω región de estudio
 ω frecuencia de la onda
 V velocidad real
 V_c velocidad compleja
 ζ operador diferencial
 W función de peso
 R residual
 $\{R^{(e)}\}$ vector de residual
 (s,t) coordenadas locales
 T período de la ola
 θ ángulo
 (x,y) coordenadas globales
 (X,Y) coordenadas de valores nodales
 $2a$ altura de un elemento rectangular bilineal
 $2A$ matriz
 $2b$ largo de un elemento bilineal rectangular
 i literal indicadora de números complejos

I. INTRODUCCION

I.1. Importancia de los puertos

Los puertos son centros de desarrollo, vitales para una nación; establecen flujos económicos, tienen importancia política, militar y son de bastante interés social. Es por eso que los puertos deben ser seguros, eficientes y estratégicos.

Uribe-Rojo (1989), define a los puertos como lugares de descanso y protección donde se espera seguridad y hospitalidad para los navíos.

Para planear un puerto es necesario un estudio detallado de las necesidades económicas, sociales y políticas. Decidida la construcción, es requerido un estudio físico en el lugar elegido, abarcando tres aspectos (Uribe-Rojo, 1989), aéreo, terrestre y oceanográfico. El estudio oceanográfico comprende los tópicos de batimetría, corrientes, mareas, sedimentos, meteorología y oleaje; este último aspecto es importante y debe ser bien analizado.

Tomando la idea de tranquilidad, las olas dentro del puerto deben ser débiles, pero la batimetría, geometría del puerto y el ángulo de aproximación de las olas, alteran la

estabilidad en el interior de la dársena (Bruun, 1989. Dalrymple, 1994), debido a fenómenos tales como: difracción, refracción, reflexión y efectos de fondo.

Oleajes internos de amplitudes relativamente mayores al oleaje incidente, son inconvenientes para las actividades portuarias (Bruun, 1989), ya que ocasionan problemas de depositación-erosión y provocan movimientos no deseados en los navíos atracados.

Para estudiar el comportamiento del oleaje dentro del puerto existen varios métodos: El geométrico (como es la teoría de rayos); modelos analógicos (hidráulicos); modelaciones numéricas y soluciones analíticas (USACERC, 1977. Unluata and Mei, 1973).

I.2. Ecuación de pendiente suave

La formulación propuesta fue desarrollada por Berkhoff (1972, 1976) y es conocida como la ecuación de pendiente suave (ecuación 1)

$$\nabla(cc_g \nabla\phi) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \phi = 0 \quad (1)$$

donde ϕ es la función de velocidad potencial, c es la celeridad de onda, c_g es la velocidad de grupo, ω es la frecuencia de la onda y ∇ es el gradiente horizontal ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$).

I.3. Parámetros físicos necesarios para la ecuación de pendiente suave

Los parámetros físicos necesarios para abordar la ecuación (1) son (Behrendt, 1985): batimetría, configuración costera (muros o playas), ángulo de aproximación del oleaje, frecuencia y amplitud de la ola. Los únicos parámetros variables para cada caso son los correspondientes al oleaje (amplitud, frecuencia y ángulo de arribo).

Para propósitos de diseño de un puerto, se puede variar la batimetría y la configuración costera; sin embargo, para propósitos de estudio es válido cambiar solo las características físicas del oleaje incidente, mientras que la batimetría y la configuración se mantienen fijas.

I.4. OBJETIVO

Seleccionar y poner en operación un modelo de elementos finitos para simular el oleaje de agitación en un puerto (con geometría flexible).

I.5. Planteamiento del problema

I.5.1. Definición de oleaje de agitación

El oleaje incidente que proviene de zonas lejanas y profundas, entra con un período, altura y longitud de onda características, sin embargo, en la rada portuaria sucede una suma de los efectos de reflexión, difracción, refracción y efectos de fondo, provocando un oleaje en el interior de la rada que en ocasiones se producen amplitudes de ola mayores a la amplitud de ola incidente, al aumento de la amplitud en el interior de la rada portuaria respecto a la amplitud de la ola incidente se ha denominado oleaje de agitación o agitación (Bruun, 1989) y repercute en la estabilidad de la superficie del mar.

I.5.2. Condiciones necesarias para aplicar la ecuación de pendiente suave a un puerto.

Las condiciones necesarias que debe cumplir un puerto para ser representado con la ecuación de pendiente suave son (Berkhoff, 1972. Behrendt, 1985):

La ecuación se restringe a ondas de gravedad de período corto y amplitud pequeña, debe cumplir con la relación de pendiente de la ola

$$\frac{H}{L} \ll 1,$$

donde H es la altura de la ola y L es su longitud de onda. La expresión significa que la pendiente de la onda debe ser pequeña. Similarmente el parámetro de Ursell HL^2/h^3 (donde h es la profundidad) debe también ser pequeño.

La pendiente del fondo debe cumplir con $|\nabla h| \ll kh$

donde $|\nabla h|$ es la máxima pendiente del fondo, k es el número de onda y se define como:

$$k = \frac{2\pi}{L}.$$

El oleaje que incide perpendicularmente en la entrada de un puerto posee un frente de onda con una amplitud que está asociada a un valor de velocidad potencial; por ejemplo, si la amplitud de la ola η fuera unitaria la relación siguiente indica una proporcionalidad directa de la velocidad potencial ϕ con la amplitud de la onda;

$$\eta = \frac{\omega}{g}\phi,$$

donde g es la aceleración de la gravedad terrestre.

II METODOS

II.1 Posibles métodos de solución

El problema de la agitación en un puerto puede ser estudiado y solucionado mediante una variedad de métodos de análisis. Existen muchos desarrollos alternativos que van desde el rango de completamente numéricos a completamente analíticos hasta soluciones analógicas (Huebner, 1982). Las soluciones analíticas son difíciles de encontrar y en ocasiones es imposible hallarlas, a causa de la irregularidad de la geometría del dominio (Ramming, 1980). Por esta razón los métodos relativamente sencillos que se aproximan con precisión a la solución son los métodos numéricos y analógicos.

II.1.1. Métodos analógicos

Un método analógico consiste en una representación física del puerto a una escala que permita su observación y donde se logra reproducir las condiciones físicas deseadas para estudiar el problema en cuestión. Los modelos hidráulicos (Bruun, 1989), proveen información del

comportamiento de las olas en un puerto; cambio de las aguas interiores con las aguas adyacentes al puerto; procesos litorales (depositación y sedimentación) y dan idea de los esfuerzos que deben soportar las estructuras marítimas que sufren el embate de las olas. Un ejemplo de modelación hidráulica es el trabajo de Medina-Enríquez (1993) donde se elabora un estudio de las corrientes provocadas por el oleaje incidente en el puerto de El Sauzal.

Es importante resaltar que ningún modelo hidráulico puede ser confiable si no se tiene el conocimiento preciso de las condiciones físicas de campo y una visión clara de los efectos de escala en el modelo (Sharp and Khader, 1984).

II.1.2. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un tipo de solución numérica, su particularidad consiste en representar las ecuaciones en términos de derivadas haciendo uso de las series de Taylor (Ramming, 1980), aproximándose a la solución de las ecuaciones. Se estima un orden de error, que puede ser disminuido, mejorando el esquema de solución. El método es ampliamente usado en Oceanografía y existe bastante literatura al respecto.

Para modelar el oleaje dentro del puerto se usan como

ecuaciones alternativas; el sistema de ecuaciones de aguas someras (Martínez-Alcalá, com. per. 1992); la ecuación de Boussinesq (Rottman-Sode, 1985).

Teniendo conocimiento de las condiciones físicas de la región, se construye una representación lógica y se obtiene una solución que corresponde a un campo de parámetros de oleaje como altura y velocidad de la ola, pudiendo obtenerse soluciones estacionarias y en tiempo.

II.1.3. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos (FEM) está basado en integrales que operan sobre una ecuación diferencial que gobierna un fenómeno en particular (Seegerlind, 1984). Para el caso de la modelación del oleaje se usa una formulación que describa ondas de gravedad. Este trabajo emplea la ecuación de pendiente suave (Berkhoff, 1972, 1976) la cual simula los efectos físicos del oleaje.

Para aplicar FEM el dominio de estudio es dividido en subdominios denominados elementos (Schwarz, 1988) que pueden ser figuras geométricas sencillas (por ejemplo triángulos). Cada elemento es definido por una función polinomial que depende de las coordenadas (x,y) y de los valores continuos en sus vértices (temperatura, velocidad, etc..). La función

sólo tiene validez dentro del subdominio a que corresponde.

La función representante de la geometría del subdominio es sustituida en la ecuación que gobierna el problema e integrada, esta operación produce un resultado aproximado a la solución en ese subdominio. Sumando las integraciones correspondientes a cada elemento se obtiene una solución del dominio.

El método alcanzó un gran desarrollo con la ingeniería aeronáutica de los 60's (Huebner, 1982). En el campo Oceanográfico existen pocos trabajos.

Los métodos numéricos y analógicos son alternativas viables. Martínez-Alcalá (1992) menciona que los dos métodos ofrecen buenos resultados, la diferencia está en el costo y en el tiempo empleado para el diseño y realización de ellos.

Si ambos métodos son trabajados en conjunto, se obtienen resultados extraordinariamente precisos (Bruun, 1989).

II.2. Justificación de la elección de FEM

La elección del método de elementos finitos se fundamenta en la facilidad para representar a las fronteras del dominio de estudio (Huebner, 1982). Es muy versátil para estudiar subregiones donde ocurren cambios rápidos, los elementos pueden ser de varias formas y tamaños. Una

característica importante en FEM es la formulación de soluciones para cada elemento antes de resolverse el dominio. La incorporación de las condiciones de frontera se facilita notablemente pudiéndose incorporar varios tipos de ellas en un solo caso.

II.2.1. Generalidades de FEM

Básicamente existen cuatro desarrollos en FEM. Autores como Segerlind (1984), Zienkiewicz (1977), Huebner (1982), Schwarz (1988) entre otros, describen con detalle los principios y teorías de los cuatro desarrollos. A continuación se da una breve descripción de los desarrollos:

El primer desarrollo para obtener las propiedades de un elemento (subdominio) es llamado "desarrollo directo", nombrado así por el paralelismo con el "método de desarrollo de rigidez" de análisis estructural en ingeniería civil.

Un segundo desarrollo consiste en encontrar las propiedades de los elementos por medio de "desarrollos variacionales", fundamentados en el cálculo de variaciones. Se requiere de encontrar una funcional que satisfaga la solución.

Un tercer desarrollo enteramente matemático es el conocido "desarrollo de residuales pesados". El desarrollo inicia con la ecuación de campo que gobierna el problema y procede sin tener una funcional o un enunciado variacional.

Este desarrollo es ventajoso porque puede atacar problemas donde no existen funcionales disponibles además es sencillo de implementar.

El cuarto desarrollo se basa en principios de conservación de energía en el sistema. Como el desarrollo anterior el "desarrollo de balance de energía" tampoco requiere de enunciados variacionales.

II.3. Plan de solución

II.3.1 Teoría de olas en pendiente suave

Se trabaja con la teoría de Airy, ondas monocromáticas de pequeña amplitud, sistema barotrópico, fluido incompresible y fondo impermeable. El fluido es irrotacional y por tanto, se puede aplicar la teoría potencial; sistema coordenado cartesiano (x,y) y sistema de unidades dimensionales MKS. Se definen las variables siguientes (McCormick, 1973):

Frecuencia angular de la onda

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Relación de dispersión

$$\omega^2 = g k \tanh(kh).$$

La longitud de onda se obtiene de

$$L = L_o \tanh kh,$$

tal que L_o es la longitud de onda en aguas profundas

$$L_o = \frac{g}{2\pi} T^2,$$

donde T es el período de la onda.

La velocidad de fase de la onda es

$$C = \frac{L}{T}.$$

La velocidad de grupo es

$$C_g = \frac{1}{2} C (1 + D),$$

donde D es un coeficiente

$$D = \frac{2kh}{\sinh 2kh}.$$

II.3.2. Teoría de velocidad potencial

Behrendt (1985) haciendo uso de la teoría potencial, usa la velocidad potencial compleja como una variable para resolver la ecuación de pendiente suave. El gradiente de ϕ ($\nabla\phi$) es por definición un vector de velocidad instantánea V (Lamb, 1945), la velocidad V_c es compleja en un punto (x,y) y su parte real puede ser encontrada como

$$V = \text{Re} [V_c]$$

donde el término V es el vector real de velocidad instantánea.

Con la velocidad potencial compleja puede obtenerse una amplitud de onda compleja $\eta = \eta(x,y)$

$$\eta = \frac{i\omega}{g} \phi$$

De η se encuentra el valor real de la amplitud de la onda

$$a = ABS[\eta]$$

donde $ABS[\eta]$ es el valor absoluto de η y a es un valor real de amplitud de onda.

La ecuación que gobierna la propagación de ondas gravitatorias superficiales de amplitud pequeña sobre un fondo de pendiente suave es conocida como la ecuación de pendiente suave (ecuación 1), linealizada tiene la forma

$$c c_g \nabla^2 \phi + \frac{c_g}{c} \omega^2 \phi = 0 \quad (2)$$

la ecuación 1 fue desarrollada por Berkhoff (op. cit.) para describir el fenómeno de difracción-refracción del oleaje para ondas armónicas simples en lugares donde los efectos sobre las ondas son severos.

Las ecuaciones 1 y 2 ayudan al diseño de las estructuras marítimas y a los diseñadores de puertos, produciendo resultados a partir de las ondas que entran a los puertos y del oleaje que rodea a las estructuras. La ecuación es usada para los casos de aguas profundas, intermedias y someras (Abbot, 1992), es elíptica

II.3.3. Reseña histórica de la ecuación de Pendiente Suave

En 1972 Berkhoff publica por vez primera la ecuación de pendiente suave (ecuación 1), siendo obtenida a partir de un desarrollo dimensional como un esfuerzo para encontrar una expresión apropiada que incluyera los efectos combinados de refracción-difracción del oleaje dentro de los puertos, a la vez que propone un método de solución empleando teoría de elementos finitos. Para 1976, publica un método de características en base a la ecuación (1). Radder en 1979, propone una ecuación parabólica a partir de la ecuación de pendiente suave para reducir la demanda de memoria en computadora, pero no es apropiada cuando se incluyen estructuras costeras tales como rompeolas. En 1979, Jonsson usa la ecuación para estimar amplitudes de ondas para un período de onda de 30 minutos sobre una isla usando un fondo paraboloidal e incluye una condición de frontera que fuerza al oleaje radiado a perderse al infinito. En 1982, Austin y Bettess publican un estudio de las condiciones de frontera y proponen un término que se adiciona a la funcional de la ecuación de pendiente suave cuando se usan desarrollos variacionales, estas condiciones de frontera corresponden a la absorción parcial y total del oleaje. Houston (1981), hace uso de la ecuación de pendiente suave y menciona que Berkhoff (1976) no usó un esquema apropiado para lograr un ancho de

banda simétrico, significando un inconveniente para resolver problemas de campo.

Casi en todos los trabajos mencionados se empleó un método de integración en elementos finitos usando desarrollos variacionales. Para 1982, Berkhoff reafirma sus estudios con la ecuación de pendiente suave y desarrolla tres métodos alternativos de solución, proponiendo casos especiales para cada proceso físico del oleaje. En 1988, Liu y Boissevain comparan resultados de simulación de difracción de olas entre dos rompeolas con una boca de fondo variable por medio de un modelo hidráulico vs un desarrollo parabólico de la ecuación de pendiente suave. En 1985 Ebersole propone un método de integración basado en diferencias finitas y refuerza la confiabilidad de la ecuación (1) ya que simula bien los efectos de refracción y difracción. En 1991, Jen-Men desarrolla una metodología a partir de la ecuación de pendiente suave para predecir condiciones de oleaje alrededor de una isla arbitraria usando diferencias finitas, además consigue reducir la necesidad de memoria en computadora.

En la actualidad según Abbot (1992), se usan dos formulaciones para analizar la agitación en los puertos:

- 1.- Modelos con la ecuación de pendiente suave.
- 2.- Modelos con la ecuación de Boussinesq.

En ambos casos el problema se reduce a dos dimensiones.

La diferencia entre ambos modelos consiste en la

linealidad y solución tipo estacionaria del primero y la alinealidad y variaciones en tiempo del segundo.

II.3.4. Teoría de elementos finitos

El método de residuales pesados (Seegerlind, 1984) consiste en sustituir una función de aproximación por la variable dependiente ϕ en la ecuación diferencial

$$\zeta(\phi) - f = 0$$

y en sus condiciones de frontera, donde ζ es un operador diferencial y f es una función conocida. La sustitución de ϕ con una función de aproximación en la ecuación diferencial y en sus condiciones de frontera da como resultado un residual R

$$R \neq 0$$

diferente de cero. El método de residuales pesados requiere que el residual sea multiplicado por una función de peso W y el producto sea integrado

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \quad (3)$$

donde Ω es el dominio espacial, el resultado de la integral es cero.

Convenientes funciones de peso se pueden elegir de diferentes métodos (Seegerlind, 1984): método de colocación, método del subdominio, método de Galerkin, método de mínimos cuadrados, etc. Para este trabajo se usó el método de Galerkin.

II.4. Plan general del método de Galerkin aplicado.

EL método se rige de acuerdo a la ecuación 3, las funciones de peso (W) son provenientes de las funciones de aproximación y dependen únicamente de (x,y)

La ecuación 2 es integrada por el método de Galerkin y de acuerdo a un planteamiento general (Huebner, 1982. Seegerlind 1984) para FEM es implementado un algoritmo numérico para obtener soluciones para la ecuación de pendiente suave (ecuación 2).

II.4.1. Discretización del dominio.

Consistió en dividir las regiones de estudio en una cantidad finita de elementos rectangulares y triangulares eligiéndose puntos convenientemente.

La primera discretización corresponde a un canal unidimensional de 360 metros de largo con una pendiente en el

fondo de 1:20, donde la profundidad máxima es de 20 metros en la entrada y la mínima de 2 metros (figura 1) en el extremo opuesto. Se usó una ola con un período de 5 segundos, y se comparó la solución obtenida con el método de Galerkin vs. solución analítica (USACERC, 1977).

La siguiente forma de discretización se hizo para un puerto idealizado, de forma rectangular (figura 2) con dos rompeolas a la entrada del puerto.

Se utilizó un período de onda de 9.0 con una longitud de onda de 95.57 metros (15 metros profundidad) y una amplitud incidente unitaria, en todos los casos el oleaje arribó normal a la entrada del puerto (caso de Behrendt, 1985).

El puerto empleado tiene las siguientes dimensiones: 390 metros de ancho por 670.36 metros de largo, con una profundidad máxima de 15 metros, los rompeolas tienen dimensiones de 156 metros de largo por 6.26 metros de ancho.

El origen del sistema coordenado esta localizado en la parte inferior izquierda de las dos figuras anteriores.

Para discretizar el dominio de estudio se localizaron un número finito de puntos (nodos) en las fronteras y dentro del dominio; los nodos son valores a determinar de velocidad potencial. Se subdividió el dominio uniendo puntos nodales y se formaron rectángulos con lados paralelos al sistema coordenado y triángulos con orientación arbitraria. Se asignó a cada nodo una etiqueta numérica que identificaba un valor

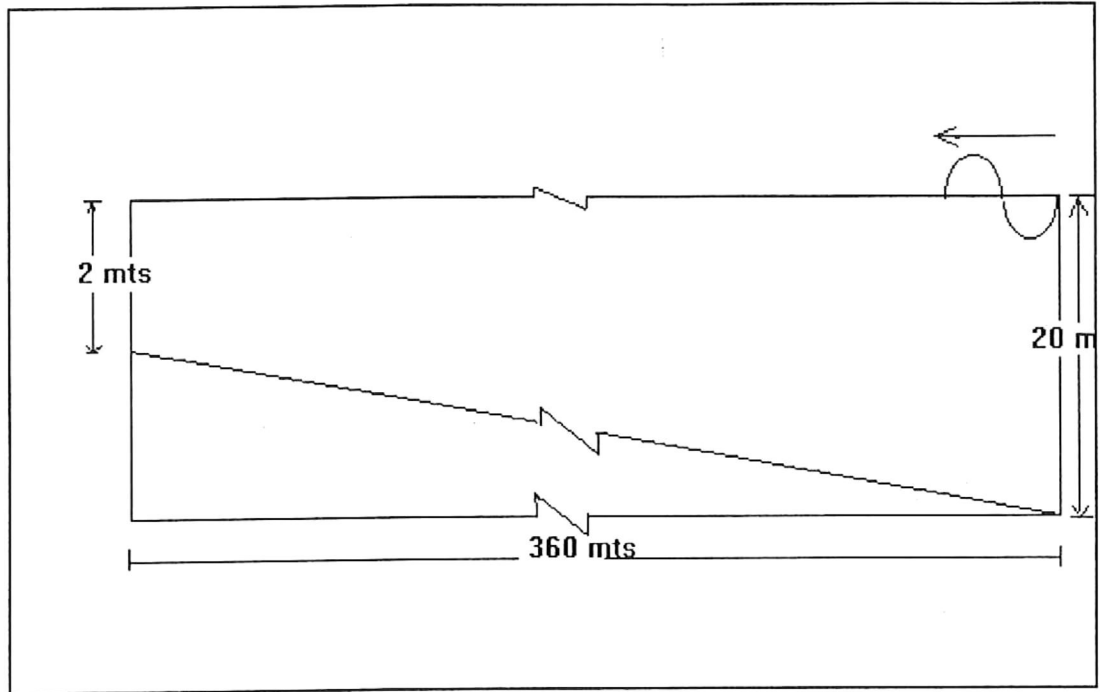


Figura 1.- Canal unidimensional con fondo y pendiente (1:20). La entrada del canal es a la derecha de la figura (la escala está exagerada).

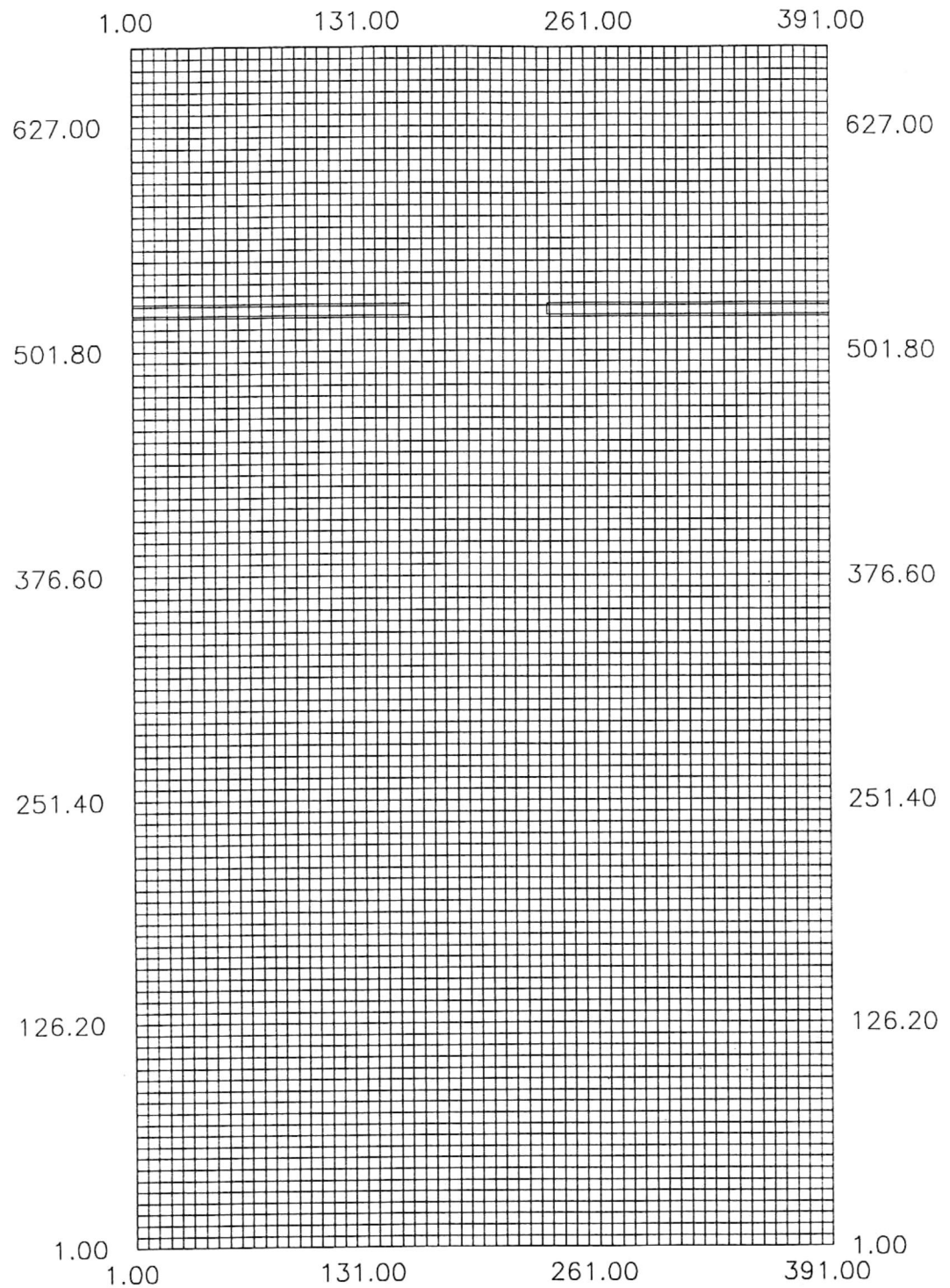


Fig 2.- Malla empleada de elementos rectangulares. Las dos barras marcadas corresponden al rompeolas (156 x 6.26 metros), la numeración de los elementos es de izquierda a derecha comenzando en el primer elemento localizado en la parte inferior izquierda de la figura.

real de coordenadas x y y , igualmente a cada elemento se le asignó una etiqueta que identificaba al elemento y a su profundidad correspondiente.

II.4.2. Selección de las funciones de interpolación.

Cada elemento se definió con una función de interpolación que dependía de las coordenadas (x,y) y de los valores nodales de velocidad potencial (Seegerlind, 1984). En este trabajo, se eligieron las funciones polinomiales que representan elementos triangulares lineales y rectángulos bilineales.

La expresión general de la función de interpolación de cualquier elemento (Seegerlind, 1984) en base a las funciones de forma es

$$\phi = \sum_{i=1}^n [N_i] \Phi_i \quad (4)$$

donde $i=1,2,3,\dots,n$. indica etiquetas en los nodos en sentido contrario a las manecillas del reloj y $[N]$ es la matriz con las funciones de forma.

II.4.2.1 Elemento triangular lineal

Un triángulo lineal corresponde a $\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ donde α_n son coeficientes constantes y expresado en términos de las funciones de forma $N=N(x,y)$

$$\phi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 \quad (5)$$

donde ϕ tiene dominio en el interior del triángulo y Φ_n es un valor nodal de velocidad potencial en el nodo $n_{\text{enésimo}}$.

II.4.2.1.1 Funciones de forma para el triángulo

A partir de la función del triángulo lineal se obtienen las funciones de forma que dependen de x,y (Seegerlind, 1984)

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (6)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y]$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y]$$

donde $2A$ (A area de elemento) y $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}$ son:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, & b_i &= Y_j - Y_k, & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k, & b_j &= Y_k - Y_i, & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, & b_k &= Y_i - Y_j, & c_k &= X_j - X_i \end{aligned} \quad (8)$$

y $X_{i,j,k}, Y_{i,j,k}$ son las coordenadas de los nodos.

II.4.2.2 Elemento rectangular bilineal

Un rectángulo bilineal corresponde a un polinomio de cuatro términos $\phi = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4xy$, expresado en función de las funciones de forma y valores nodales

$$\phi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4 \quad (9)$$

donde los subíndices 1,2,3,4 indican las etiquetas de los nodos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Para simplificar las integraciones numéricas y poder ser expresadas en forma matricial, el rectángulo bilineal es representado en coordenadas locales (s,t) . Además por carecer de los términos cuadráticos x^2 y y^2 (s^2 y t^2) el rectángulo no puede ser orientado arbitrariamente.

II.4.2.2.1 Funciones de forma para el rectángulo.

Para un rectángulo bilineal en coordenadas locales s y t con origen en el nodo i las funciones de forma son

$$\begin{aligned} N_i &= \left(1 - \frac{s}{2b}\right)\left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_j &= \frac{s}{2b}\left(1 - \frac{t}{2a}\right) \\ N_k &= \frac{st}{4ab} \\ N_m &= \frac{t}{2a}\left(1 - \frac{s}{2b}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

donde $2b$ es el largo y $2a$ el ancho del elemento rectangular bilineal.

II.4.3. Encontrar las propiedades de los elementos.

Una vez que se ha seleccionado el tipo de polinomio para cada elemento, se determinan las ecuaciones matriciales que expresan las propiedades de cada elemento.

La contribución de cada elemento es de la forma (según la ecuación 3, Segerlind, 1984)

$$R^{(e)} = - \int_A [N]^T (cc_g \nabla^2 \phi - \frac{c_g}{C} \omega^2 \phi) dA \quad (11)$$

donde (e) indica el elemento, $[N]^T$ es el vector transpuesto que contiene las funciones de forma y corresponde a las funciones de peso (W) de la ecuación 3.

Las derivadas de segundo orden en la expresión 11 ($[N]^T \nabla^2 \phi$), se transforman a derivadas de primer orden mediante la regla de la derivada de un producto de funciones.

Considerando el término $\nabla_x ([N]^T \nabla_x \phi)$, donde $\nabla_x = \partial / \partial x$

$$\nabla_x ([N]^T \nabla_x \phi) = [N]^T \nabla_x^2 \phi + \nabla_x [N]^T \nabla_x \phi \quad (12)$$

ordenando y sustituyendo $[N]^T cc_g \nabla_x^2 \phi$ (término de 11)

$$- \int_A [N]^T cc_g \nabla_x^2 \phi dA = - \int_A cc_g \nabla_x ([N]^T \nabla_x \phi) dA + \int_A cc_g \nabla_x [N]^T \nabla_x \phi dA \quad (13)$$

la primera integral a la derecha del signo igual es sustituida por una integral de frontera, según el teorema de Green (Olmstead, 1961. op cit Segerlind 1984):

Para las derivadas en función de x

$$\int_A \nabla_x ([N]^T \nabla_x \phi) dA = \int_{\Gamma} [N]^T \nabla_x \phi \cos \theta d\Gamma \quad (14)$$

donde θ es un ángulo normal a la frontera Γ . Sustituyendo la ecuación 14 en la ecuación 13

$$\begin{aligned} - \int_A c c_g [N]^T \nabla_x^2 \phi dA &= - \int_{\Gamma} c c_g [N]^T \nabla_x \phi \cos \theta d\Gamma \\ &+ \int_A c c_g \nabla_x [N]^T \nabla_x \phi dA \end{aligned} \quad (15)$$

Haciendo el mismo procedimiento con las derivadas en función de y . Considerando $\nabla_y ([N]^T \nabla_y \phi)$ se obtiene

$$\begin{aligned} - \int_A c c_g [N]^T \nabla_y^2 \phi dA &= - \int_{\Gamma} c c_g [N]^T \nabla_y \phi \sin \theta d\Gamma \\ &+ \int_A c c_g \nabla_y [N]^T \nabla_y \phi dA \end{aligned} \quad (16)$$

la integral $\int_A [N]^T c_g / c \omega^2 \phi dA$ de la ecuación 11 es

$$\int_A G [N]^T \phi dA \quad (17)$$

donde $G = c_g \omega^2 / c$. Sustituyendo 15, 16, 17 en la ecuación 11

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} &= - \int_{\Gamma} ([N]^T (c c_g \nabla_x \phi \cos \theta + c c_g \nabla_y \phi \sin \theta)) d\Gamma \\ &+ \int_A (c c_g \nabla_x [N]^T \nabla_x \phi + c c_g \nabla_y [N]^T \nabla_y \phi) dA \\ &+ \left(\int_A G [N]^T \phi dA \right) \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\{R^{(e)}\}$ es un vector.

Sustituyendo la función de aproximación (ecuación 4) sin los subíndices $\phi^{(e)} = [N] \{\Phi^{(e)}\}$ en la ecuación 18, obtenemos la

ecuación que actúa en cada elemento

$$\begin{aligned} \{R^{(e)}\} = & - \int_{\Gamma} ([N]^T (cc_g \nabla_x \phi \cos \theta + cc_g \nabla_y \phi \sin \theta) d\Gamma \\ & + \left(\int_A (cc_g \nabla_x [N]^T \nabla_x [N] + cc_g \nabla_y [N]^T \nabla_y [N]) dA \right) \{\Phi^{(e)}\} \quad (19) \\ & + \left(\int_A G [N]^T [N] dA \right) \{\Phi^{(e)}\} \end{aligned}$$

la representación matricial tiene la forma general

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} \quad (20)$$

donde la primera integral de la ecuación 19, corresponde a $\{I^{(e)}\}$ de la ecuación 20 y la suma de la segunda y tercera integral de la ecuación 19, construyen $[K^{(e)}] \{\Phi\}$ de la ecuación 20. Históricamente $[K^{(e)}]$ es llamada matriz de rigidez. El término $\{I^{(e)}\}$ lleva implícitas las condiciones de frontera específicas y fue sumado a la matriz de rigidez después de que se eligió el tipo de frontera.

II.4.3.1. Formulación de las condiciones de frontera.

El término correspondiente a $\{I^{(e)}\}$ contiene las condiciones de frontera (Segerlind, 1984, Austin 1982)

$$\begin{aligned}
 \{I^{(e)}\} &= - \int_{\Gamma} [N]^T (cc_g \nabla_x \phi \cos \theta + cc_g \nabla_y \phi \sin \theta) d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} [N]^T (ikcc_g \phi_b) d\Gamma \quad (21) \\
 &= \left(\int_{\Gamma} ikcc_g [N]^T [N] d\Gamma \right) \Phi^{(e)}
 \end{aligned}$$

esta integral es de línea y depende del tipo de elemento que se esté empleando, por ejemplo; para un triángulo corresponde a una suma de tres integrales (cada lado un término), para un rectángulo una suma de cuatro integrales, por tanto se especificó el lado del elemento donde se definió la condición de frontera y el largo correspondiente de ese lado se multiplicó por el valor numérico de la integral.

II.4.3.2. Especificación de las condiciones de frontera

Las condiciones de frontera específicamente son (Austin and Bettes, 1982. Segerlind, 1984)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = ik\phi \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

$$\phi = \phi_0(x, y) \quad (24)$$

donde ϕ_0 es la velocidad potencial incidente de la onda. Las condiciones de frontera representan los casos de absorción del oleaje (reflexión parcial), reflexión total de oleaje y amplitud del oleaje incidente (respectivamente ecuaciones 22, 23, 24) y corresponden a las condiciones de frontera de Cauchy, Neumann y Dirichlet (Schwarz, 1988). Para representar el grado de absorción se emplea un factor entre 0 y 1 que multiplica el término que contiene k de la ecuación 22, por ejemplo: para representar una frontera totalmente reflejante se emplea un factor igual a cero y para representar una playa totalmente absorbente se emplea el factor de 1. Coeficientes entre valores de 0 a 1 representan absorciones parciales (ó reflexiones parciales).

La literal i (ecuación 22) indica que la condición de frontera es un número complejo que depende del número de

onda. Por otra parte la condición de frontera de Dirichlet (velocidad potencial de la ola incidente) es un valor real (de acuerdo a la metodología seguida por Behrendt, 1985).

Las condiciones de frontera de Dirichlet se aplican después de que se formó la matriz de rigidez (ver sección II.4.4).

II.4.4. Ensamblar las propiedades de los elementos para obtener el sistema de ecuaciones.

Esto implicó sumar la matrices individuales que describen las propiedades de cada elemento con el objeto de formar una matriz general que representa un sistema de ecuaciones simultáneas que incluye las propiedades de todos los elementos. Antes de que el sistema de ecuaciones esté listo para resolverse se incorporan las condiciones de frontera de Dirichlet.

Las condiciones de Dirichlet (Behrendt, 1985) son amplitudes de oleaje incidente (valor proporcional de la velocidad potencial) a la entrada del puerto (para fines prácticos se considera la amplitud incidente como $\frac{1}{2}$ de la altura de ola de diseño $H_{1/3}$). Básicamente esta condición de frontera provoca el forzamiento de la onda.

II.4.5. Resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Este paso consistió en resolver el sistema de ecuaciones simultáneas con un algoritmo que usó un mínimo de memoria. La forma original del sistema de ecuaciones simultáneas fue una matriz general de $n \times n$. Una ventaja del método de Galerkin es que la matriz de rigidez es bandeda (la matriz tiene una densidad de valores en la diagonal diferentes a cero, mientras que fuera de la banda de la diagonal los valores son cero) y simétrica, lo cual permite desechar los valores fuera de la banda matricial, considerándose solo los valores dentro de un ancho de banda de la matriz, esta peculiaridad retribuye en un ahorro de memoria en computadora. La ecuación $NBW = \max[BW] + 1$ (Huebner, 1982) dio el ancho de banda de la matriz de rigidez, donde NBW es el ancho de banda y BW es la diferencia entre el valor más grande entre y el valor más pequeño de los números de los nodos de un elemento (se considera la diferencia de nodos máxima). La relación anterior permite calcular el número de valores a almacenar en la memoria de la computadora y el resto de valores igual a cero son desechados.

II.4.6. Postprocesado de resultados

Con las soluciones obtenidas, se hicieron figuras de isolineas y perspectivas de amplitudes relativas y elevación del mar a un tiempo cero. Primero se elaboró un programa para visualizar líneas de contorno de las soluciones dadas por el método de Galerkin, después se usó el programa SURFER (versión 1991).

III MATERIALES

Se empleó el algoritmo numérico TDFIELD (Seegerlind, 1984) desarrollado para encontrar una solución estacionaria para la propagación de calor en dos dimensiones.

Al algoritmo se le hicieron modificaciones para resolver la ecuación de pendiente suave en su forma lineal (ecuación 2).

Se realizaron algoritmos numéricos de interpolación en lenguaje C para visualizar y revisar la disposición de los elementos y detectar errores.

Se usó una computadora AT-286 de 12 Mhz de velocidad y capacidad de memoria de 1 Mb para hacer pequeñas pruebas, posteriormente una vez listo el algoritmo numérico se trabajó

en la HP9000 de la UABC.

IV RESULTADOS

Los resultados obtenidos con la ecuación de pendiente suave (integrada con el método de Galerkin) se reportan en figuras que representan valores de amplitud relativa (a/a_0) y valores de elevación del mar relativa a un tiempo inicial (cero).

Las figuras obtenidas con el puerto corresponden a tres casos de estudio:

1.- El primer caso es para un canal unidimensional y se pretende comparar la soluciones analítica (USACERC, 1977) y numérica. Las dimensiones del canal unidimensional son reproducidas de acuerdo a la recomendación de Rottmann-Sode (1985).

2.- Este caso consiste en reproducir un puerto idealizado con topografía constante y fronteras reflejantes, con el fin de comparar los resultados numéricos obtenidos por Behrendt (1985) con una funcional vs. los resultados numéricos obtenidos con el método de Galerkin implementado en

este trabajo.

3.- Con este caso se trabaja el mismo puerto que el caso 2 pero con fronteras absorbentes, con el fin de observar el comportamiento de las amplitudes y corroborar que las condiciones de frontera absorbentes funcionan.

El primer caso (figura 3) representa los resultados numéricos obtenidos (amplitudes relativas) a partir de un canal unidimensional con variación de fondo (1:20) vs. solución analítica (USACERC,1977); la línea continua representa la solución analítica y la función oscilante corresponde a la solución numérica, se observa un gran parecido cualitativo, con una incertidumbre del 20%. La cota mínima de la solución numérica se aproxima con precisión a la solución analítica.

Los resultados del segundo caso fueron obtenidos para un puerto con fronteras totalmente reflejantes (todas las figuras descritas a continuación son respectivas al segundo caso) y topografía constante:

La figura (4) muestra isolíneas de amplitud relativas (a/a_0). También se muestra la figura 5 correspondiente a una perspectiva de la figura 4. En las figuras 4 y 5 se ven en la parte exterior de la rada portuaria grandes amplitudes en relación a la rada, resaltando un poco antes de la boca (arriba de la figuras) en las partes laterales exteriores al puerto y en la zona expuesta de los rompeolas también se ven

grandes amplitudes. Se aprecia en la parte protegida de los rompeolas una zona de amplitudes mínimas. Las elevaciones superficiales del agua a un tiempo cero (figuras 6 y 7) correspondientes a las amplitudes obtenidas en las figuras 4 y 5, se muestran las mismas zonas de alta y baja energía, se aprecian rasgos distintivos de difracción en la boca del puerto (parte interna del puerto).

Para analizar con detalle los valores obtenidos, se hicieron tres cortes transversales (paralelos al eje x) y tres cortes longitudinales en el interior de la rada portuaria. De las amplitudes obtenidas de la figura 4 se realizó la figura 8a que presenta un análisis de tres cortes transversales mostrando las variaciones de las amplitudes relativas a cada corte. Un corte se hizo en la parte mas interna del puerto, otro en la parte media del puerto y el último en la parte protegida de los rompeolas.

La figura 8a presenta amplitudes pequeñas en el corte central igualmente el corte localizado en los rompeolas. El corte hecho en la frontera más interior presenta amplitudes sumamente grandes, también se ve en la figura 8b un comportamiento similar en elevaciones superficiales.

Los tres cortes longitudes hechos extraídos de la figura 4 se describen a continuación. Las amplitudes en el corte central longitudinal (figura 8c) son grandes y van decayendo si la ola se interna al puerto, en comparación, las

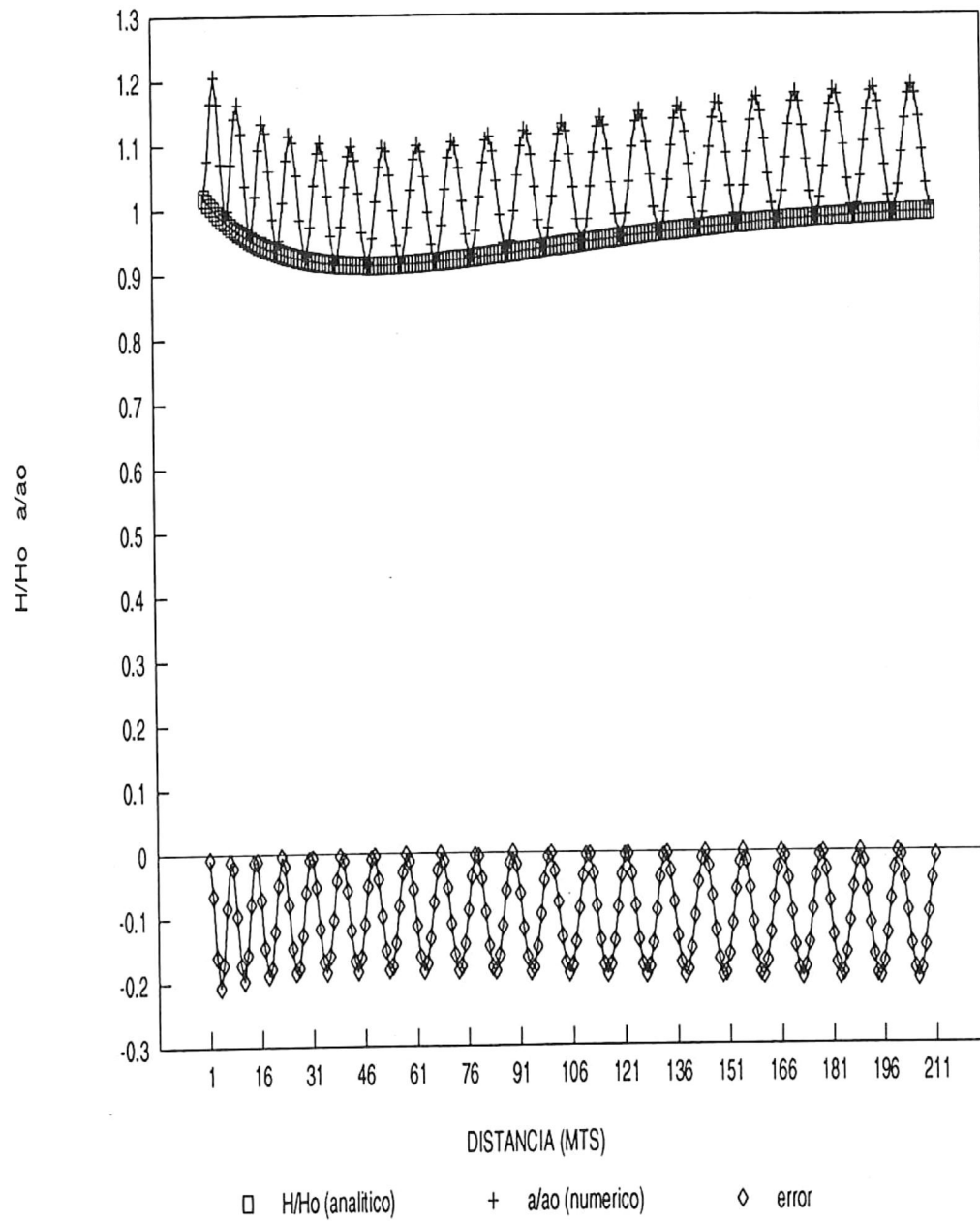


Fig 3.- Someramiento en un canal unidimensional de fondo variable, (1:20). El resultado numérico está sobrestimado en un 20 %.

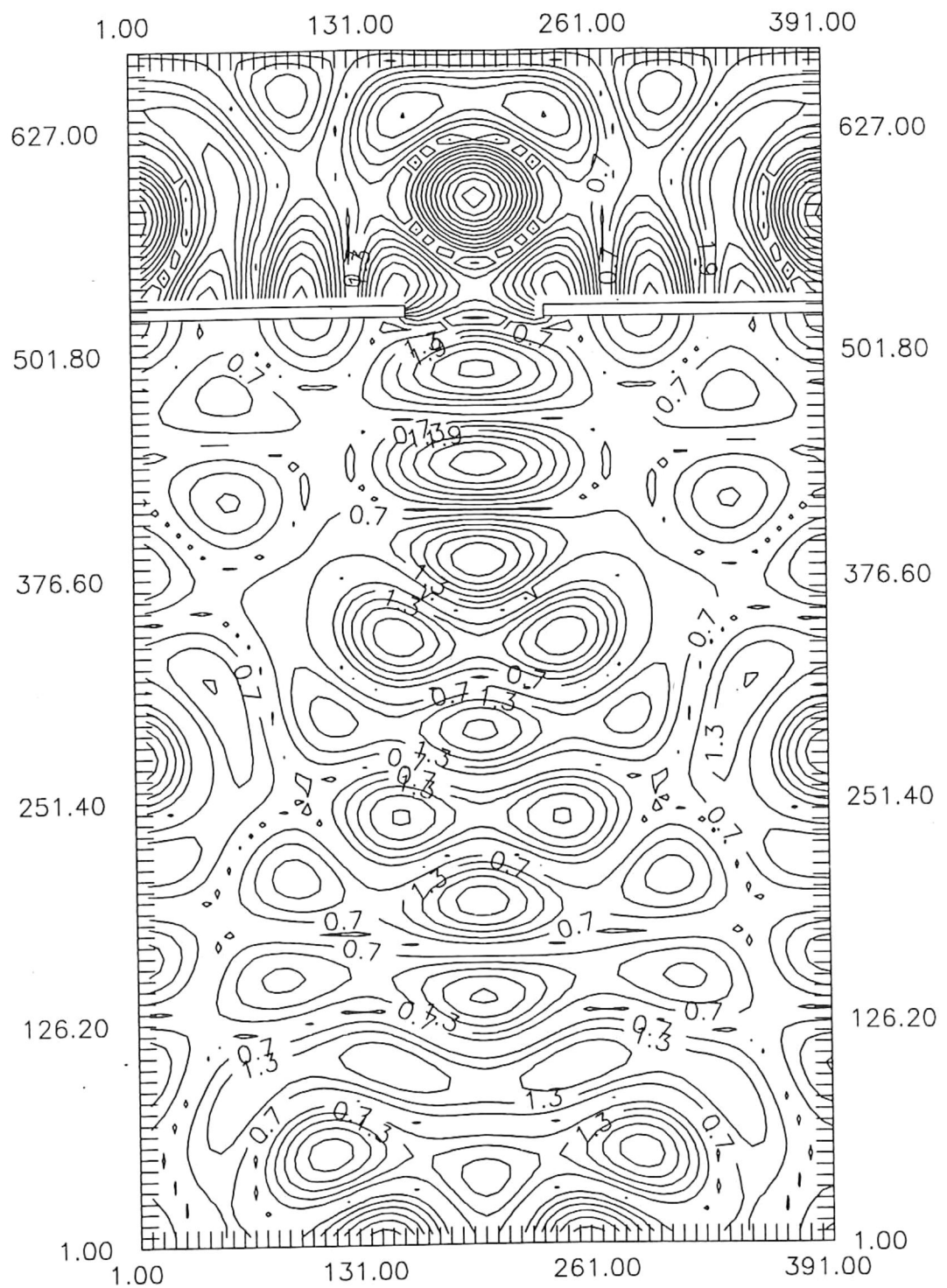


Fig 4.- Isolíneas de amplitud en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente reflejantes. El oleaje incide normal a los rompeolas.

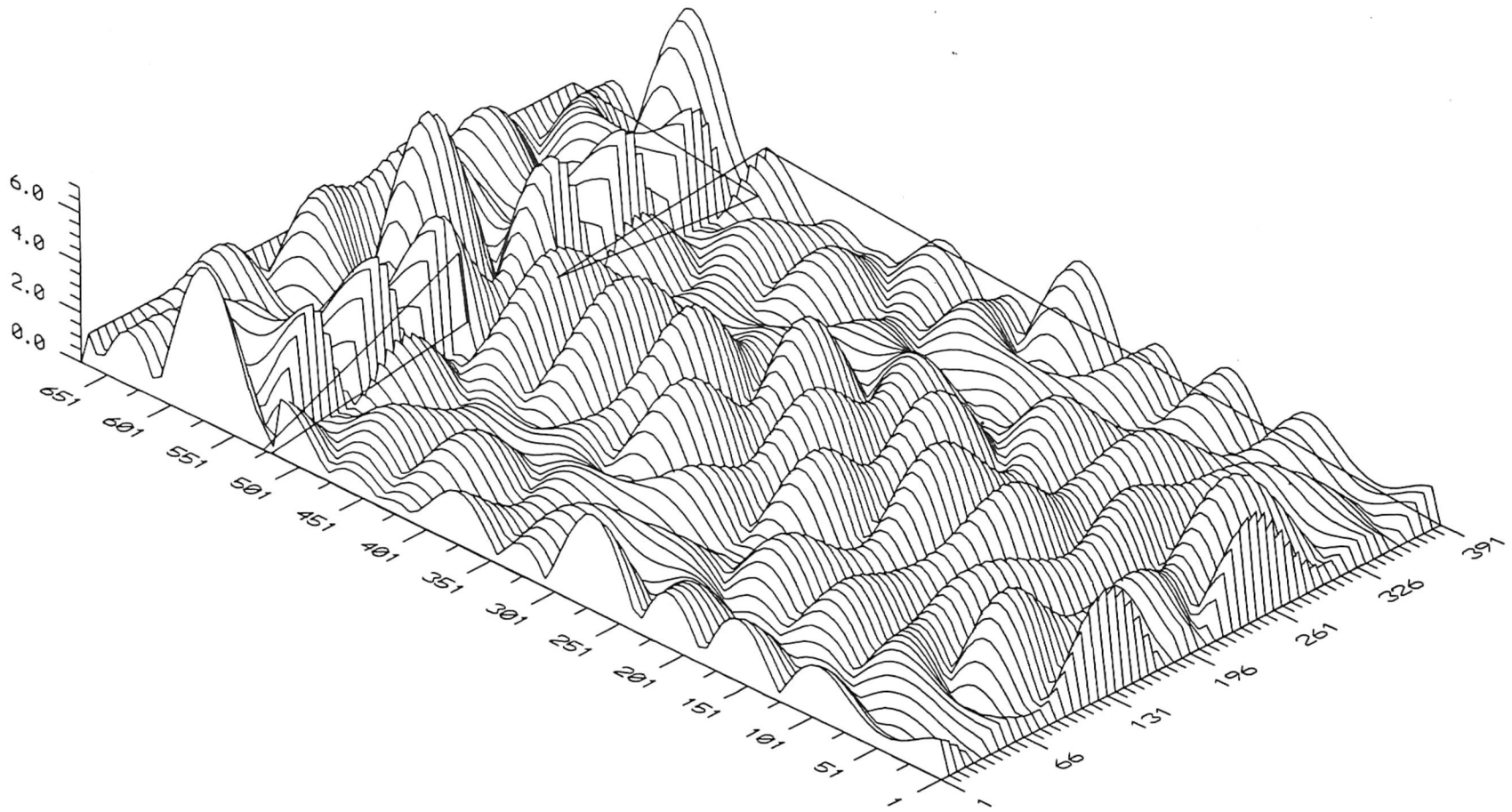


Fig 5.- Perspectiva de amplitudes relativas en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente reflejantes. El oleaje incide normal a los rompeolas (líneas transversales).

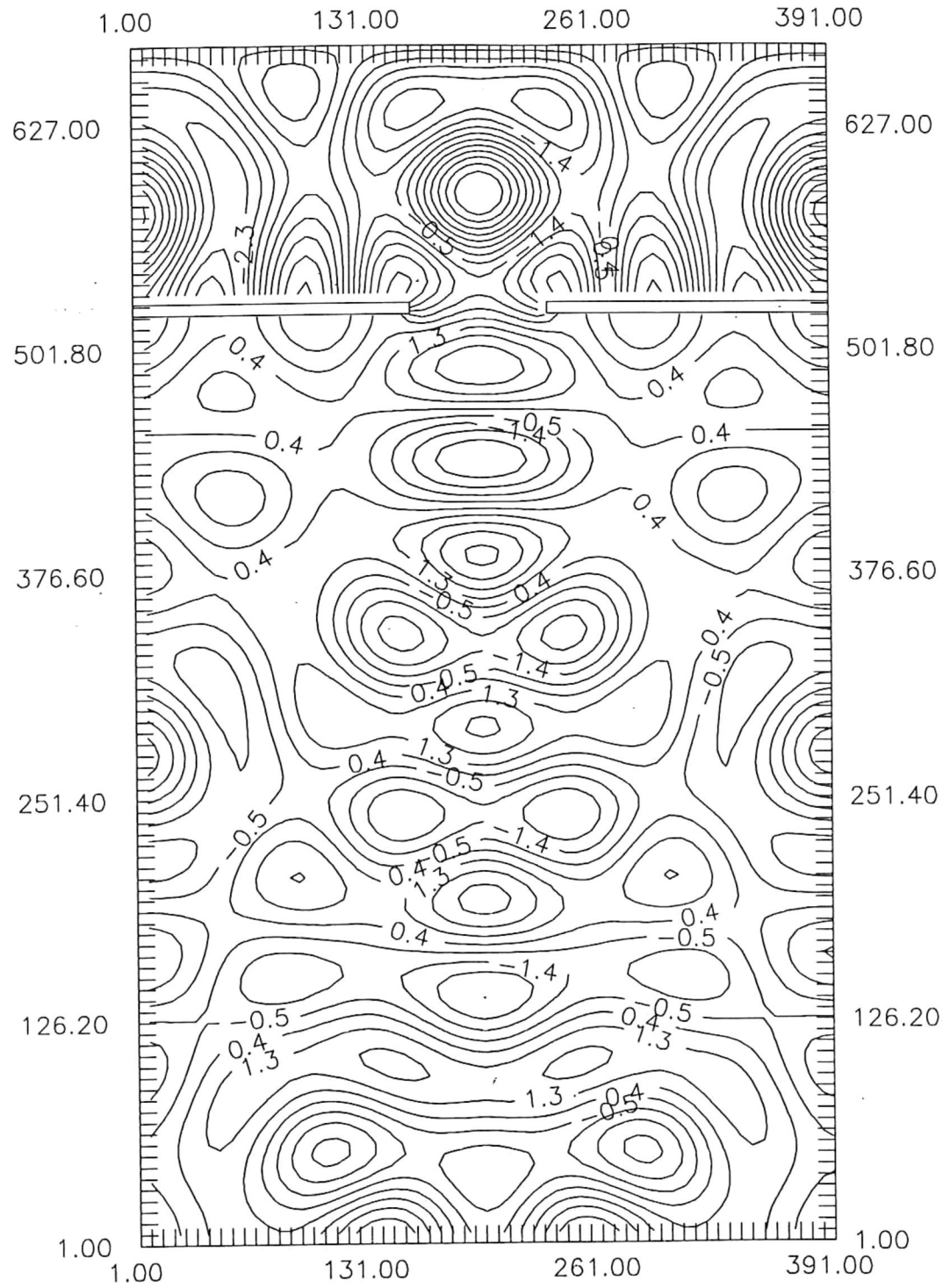


Fig 6.- Isolíneas de elevación del nivel de agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes. El oleaje incide normal a los rompeolas (barras transversales).

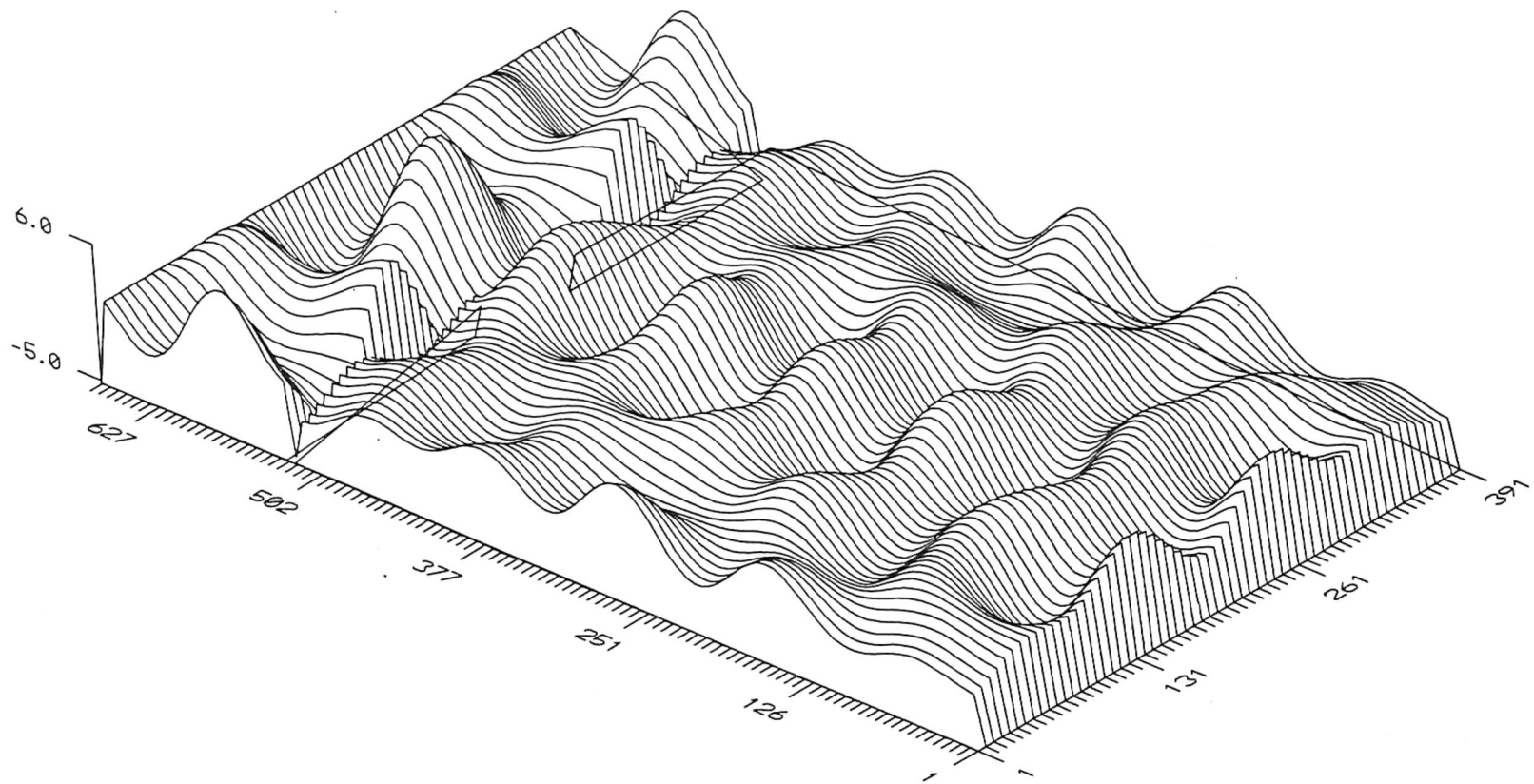
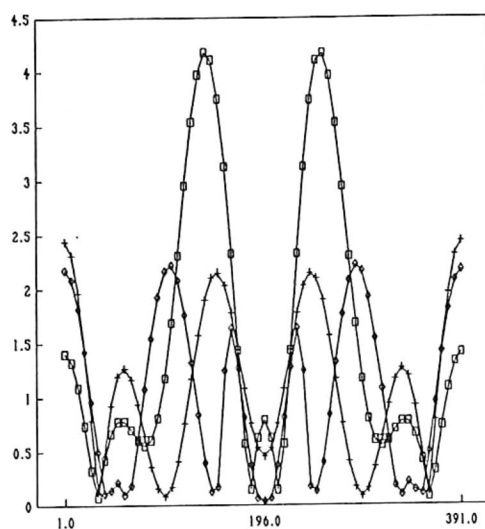
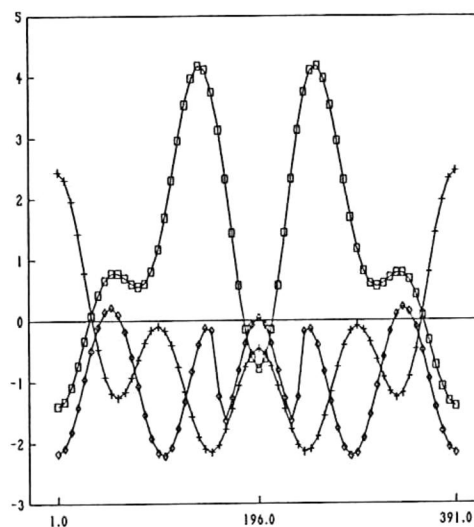


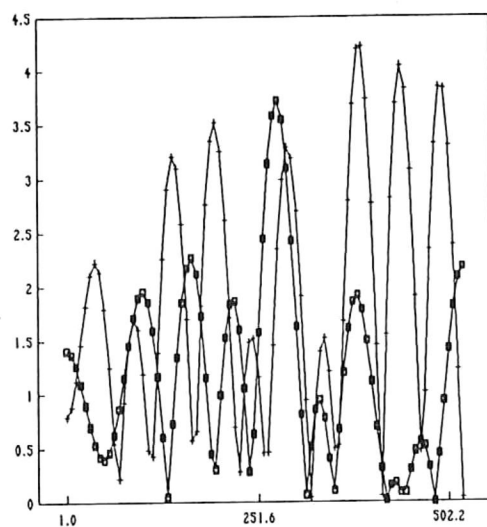
Fig 7.- Perspectiva de elevación de la superficie del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes.



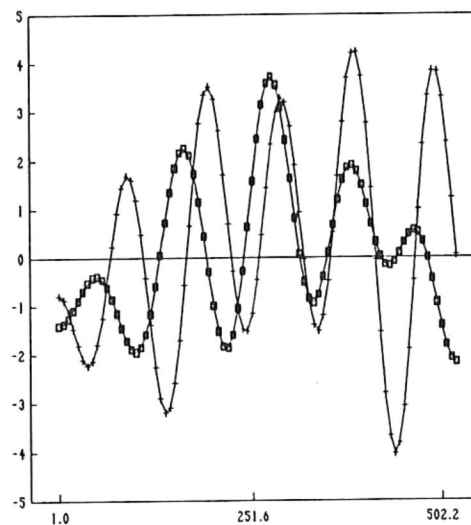
a)



b)



c)



d)

Fig 8.- Cortes transversales y longitudinales en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras reflejantes.

a) Transversales (el eje vertical corresponde a amplitudes relativas): □ frontera más interna de la dársena, + parte media de la dársena, ◇ parte interna de los rompeolas.

b) Transversales (el eje vertical corresponde a elevaciones del nivel del agua): □ frontera izquierda del rompeolas, + parte media de la dársena, ◇ parte derecha de la dársena.

c) Longitudinales (el eje vertical corresponde a amplitudes relativas): □ parte izquierda de la dársena, + parte media de la dársena, ◇ parte lateral derecha.

d) Longitudinales (el eje vertical corresponde a elevaciones del nivel del agua): misma nomenclatura que c).

amplitudes en los cortes longitudinales laterales son menores en relación al central, se nota la simetría de los dos cortes laterales. El mismo comportamiento se observa en las elevaciones de la superficie del agua (figura 8d).

En todas las figuras se observa una simetría de amplitudes relativas.

El tercer caso consistió en adicionar absorción total en las fronteras de la rada (excluyendo las fronteras protegidas de los rompeolas) también se presentan figuras similares al caso anterior (caso dos):

En las figuras 9 y 10 se observan en el interior de la rada amplitudes relativas muy bajas tendiendo a disminuir monótonamente conforme se avanza hacia la rada, mientras en las afueras de la rada se siguen observando amplitudes relativas mayores. En las figuras 11 y 12 se observa un efecto físico de difracción. Las ondas son debilitadas en las fronteras interiores de la rada ya que la absorción es total, se aprecian tenues zonas de calma tras la parte protegida de los rompeolas.

Para los cortes transversales se encontró lo siguiente:

Un corte transversal en la parte más interna de la rada (figura 13a), otro en la parte media de la rada y uno más por fuera de la rada (el caso anterior fue en la parte protegida de los rompeolas), de los tres sobresale el corte por fuera

de la rada ya que muestra amplitudes relativas tres veces más grandes, comparado con los cortes medio e interno a la rada se ven amplitudes muy pequeñas. La figura 13b muestra los mismos cortes transversales pero con elevaciones del nivel del agua y también sobresale el corte externo a la rada, correspondiente a un valle. Los cortes medio e interno presentan elevaciones mínimas.

De los cortes longitudinales a los lados del puerto y a la mitad de la rada (figura 13c), sobresale el corte medio que presenta un decaimiento considerable hacia la parte más interna del puerto con una amplitud relativa de 1.4 hasta una amplitud de 0.4. Los cortes a los lados son simétricos y tienen amplitudes relativas de 0.2, el valor mínimo de amplitud corresponde a la parte protegida de los rompeolas. La elevación del nivel del agua (figura 13d) presenta un decaimiento de 1. a 0.4 correspondiente al corte central.

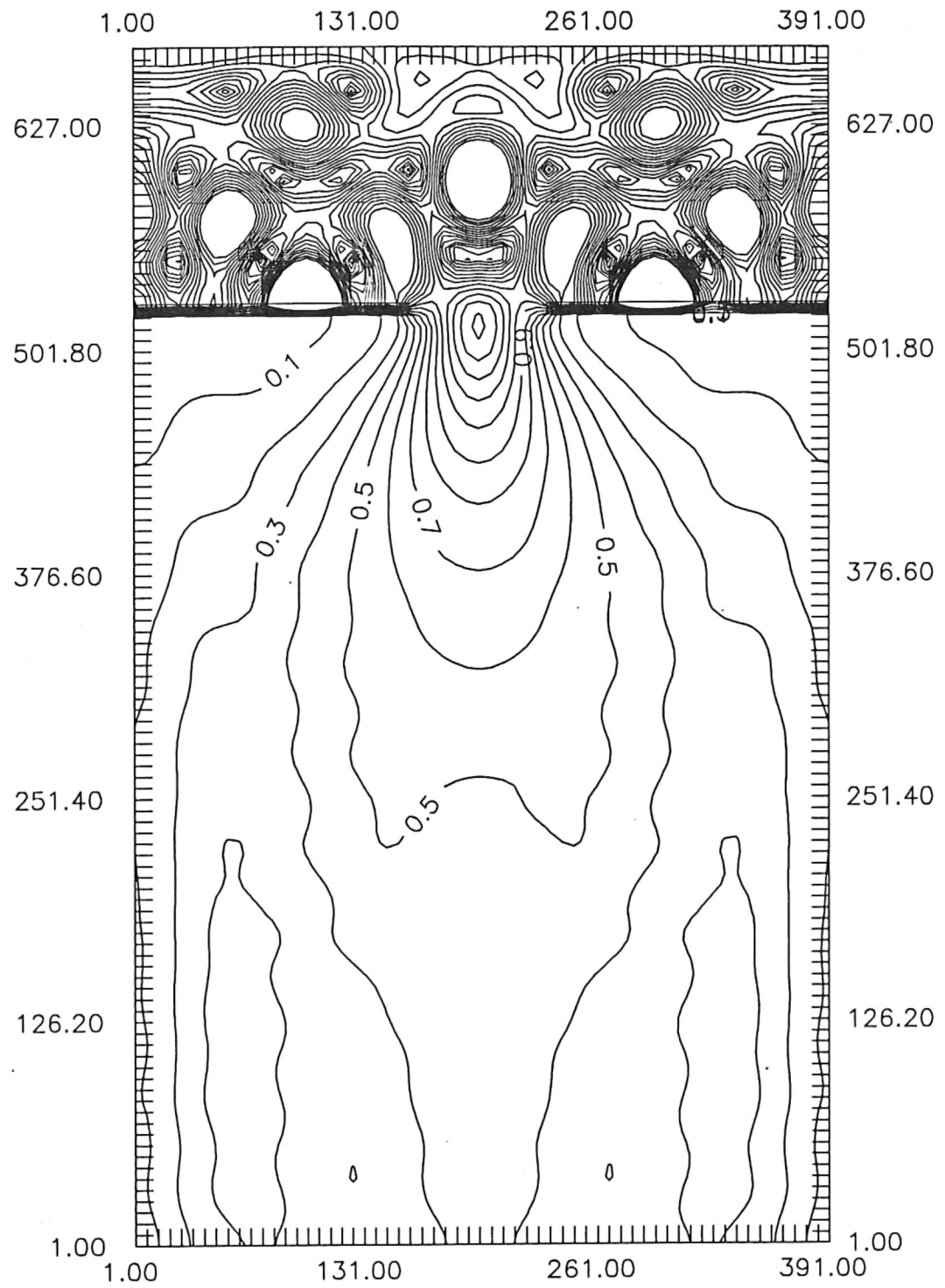


Fig 9.- Isolíneas de amplitud relativa en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes. El oleaje incide normal a los rompeolas.

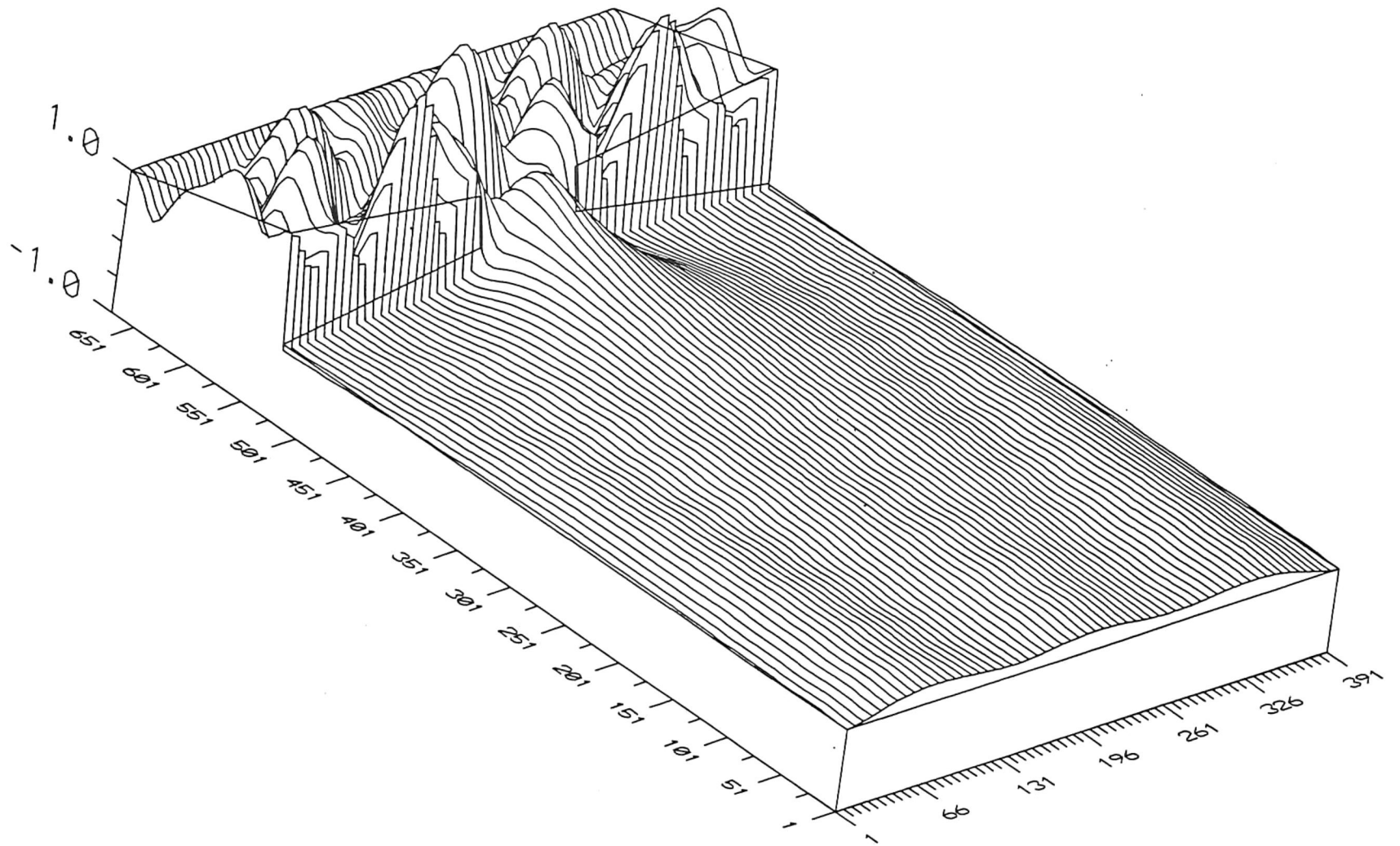


Fig 10.- Perspectiva de amplitudes relativas en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes. El oleaje incide normal a los rompeolas.

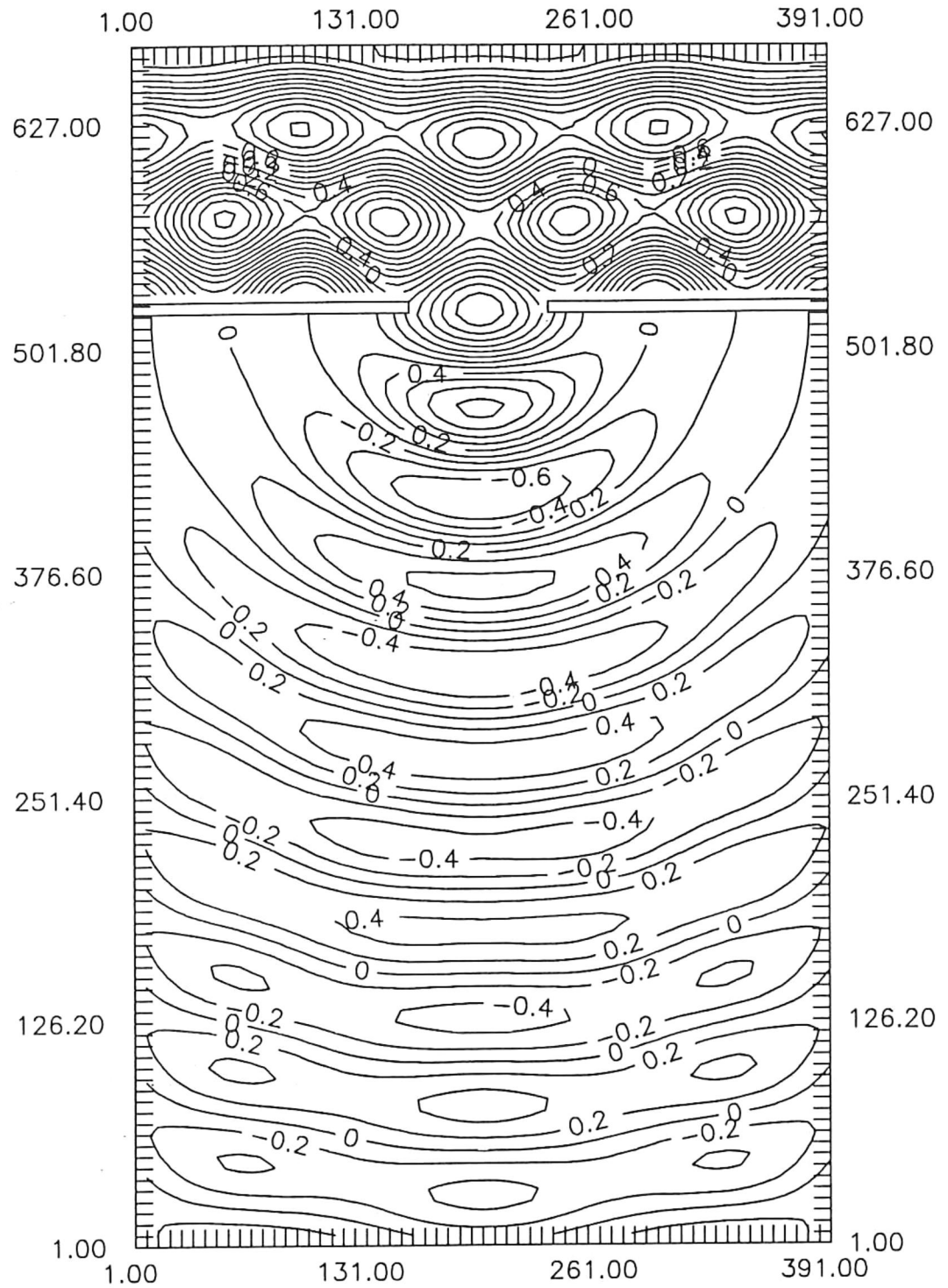


Fig 11.- Isolíneas de elevación del nivel del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes. El oleaje incide normal a los rompeolas.

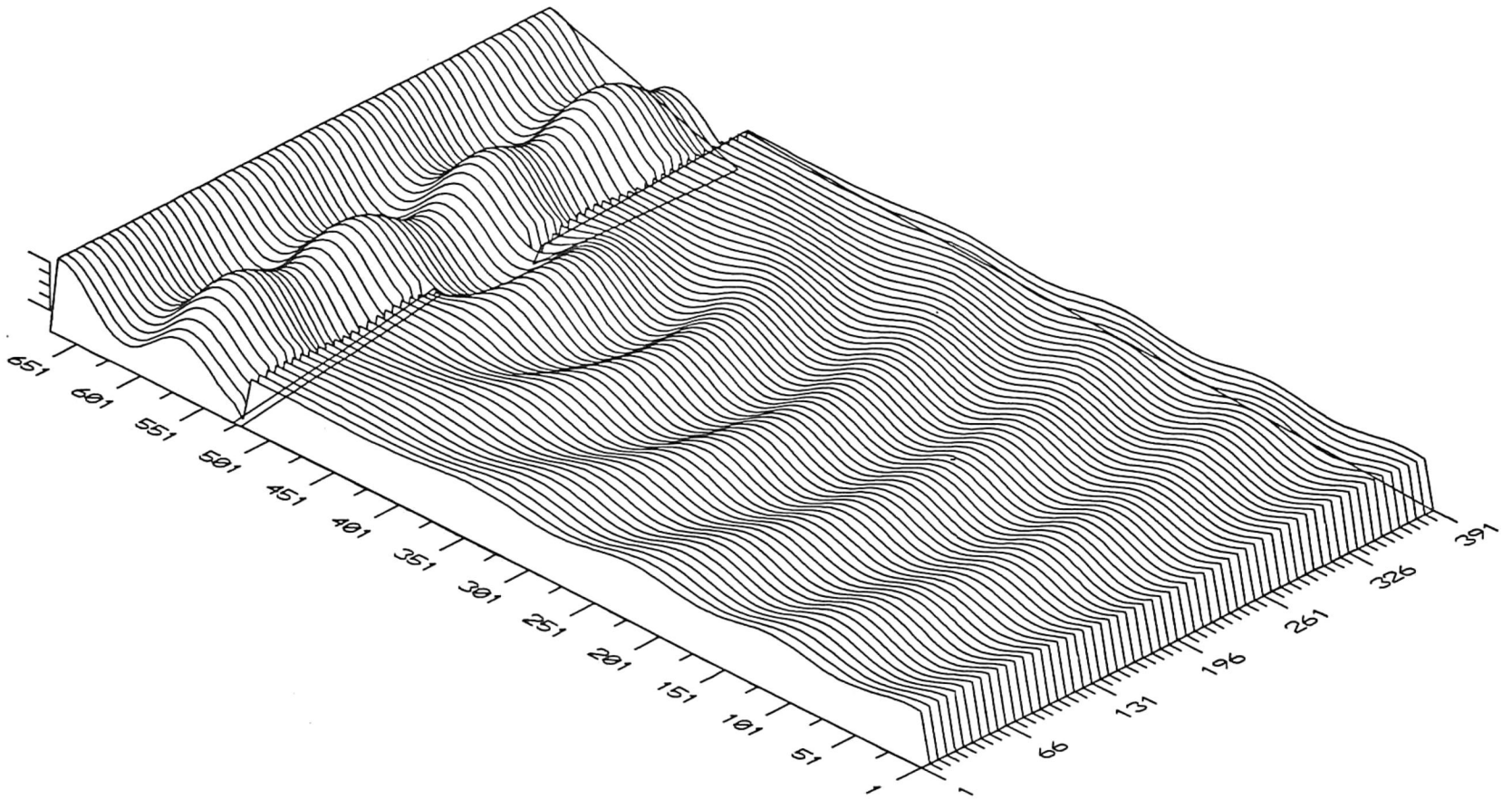
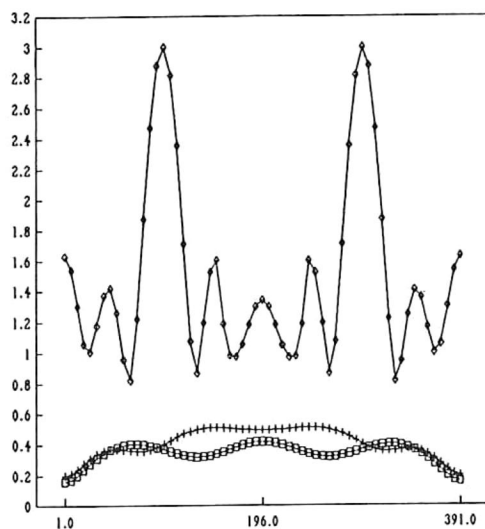
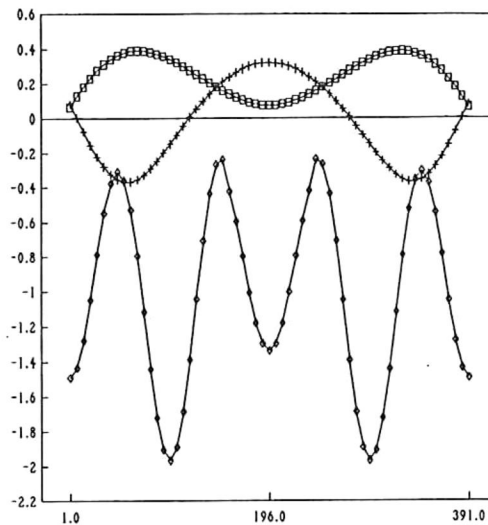


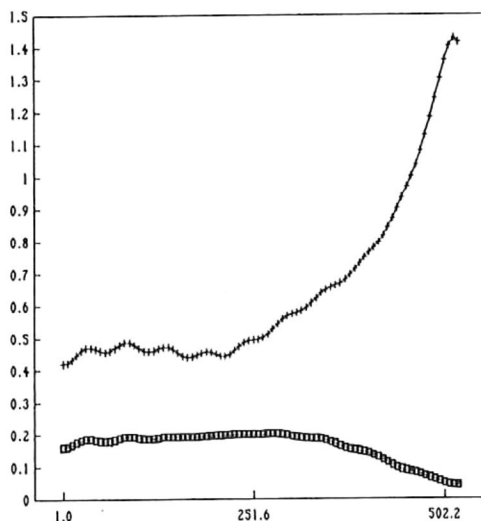
Fig 12.- Perspectiva de la elevación de la superficie del agua en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes. La incidencia del oleaje es normal al rompeolas.



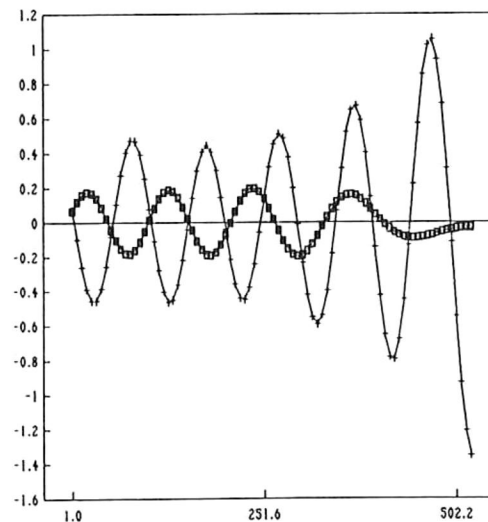
a)



b)



c)



d)

Fig 13.- Cortes transversales y longitudinales en un puerto idealizado con fondo plano y fronteras totalmente absorbentes.

a) Transversales (el eje vertical corresponde a amplitudes relativas): □ frontera más interna de la dársena, + parte media de la dársena, ◇ parte externa de los rompeolas.

b) Transversales (el eje vertical corresponde a elevaciones del nivel del agua): □ frontera izquierda del rompeolas, + parte media de la dársena, ◇ parte derecha de la dársena. c) Longitudinales (el eje vertical corresponde a amplitudes relativas): □ parte izquierda de la dársena, + parte media de la dársena, ◇ parte lateral derecha.

d) Longitudinales (el eje vertical corresponde a elevaciones del nivel del agua): misma nomenclatura que c).

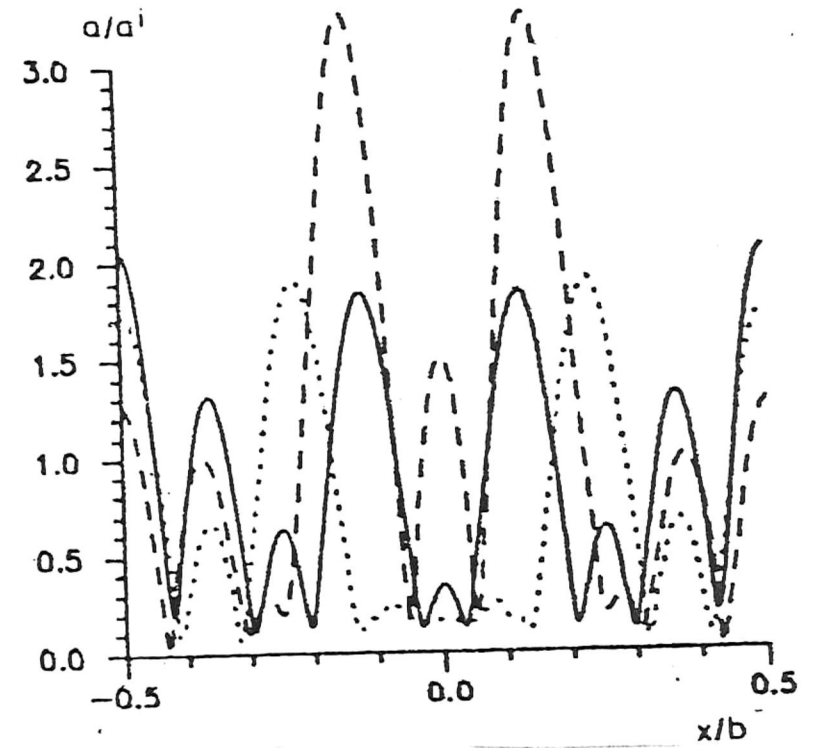
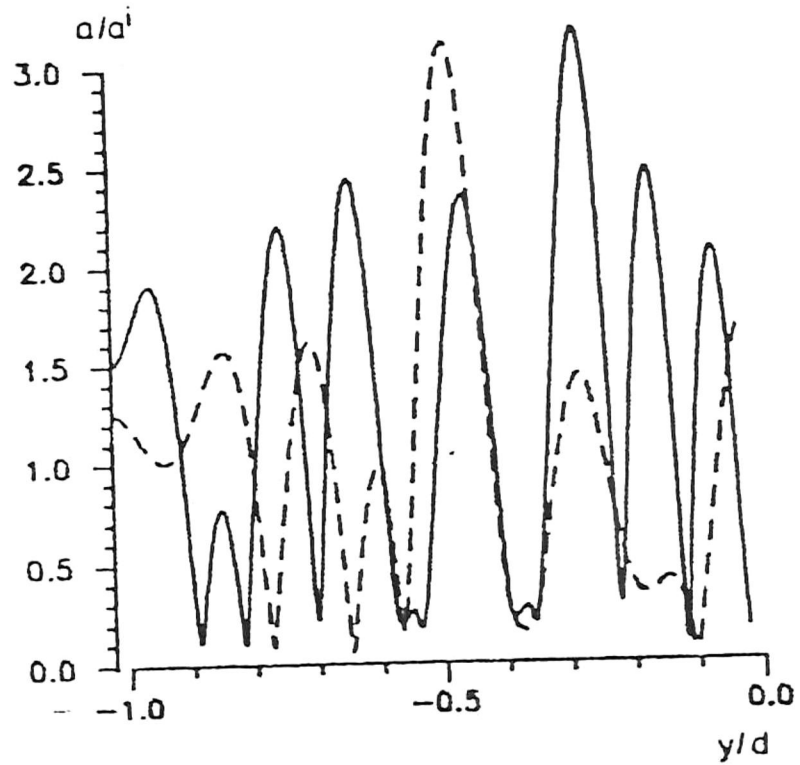


Fig 14.- Amplitudes relativas de cortes transversales y longitudinales

a) Transversales: las líneas continua, discontinua y punteada indican cortes en el centro, el interior y la parte protegida del rompeolas, respectivamente.

b) Longitudinales: las líneas continua, discontinua y punteada indican cortes en el centro, la frontera izquierda y la frontera derecha, respectivamente. (Tomada de Behrendt, 1985)

V DISCUSIONES

V.1 Discusiones de los resultados

Para verificar los resultados obtenidos es necesario tener información que sirva como referencia y sean comparados los resultados con las referencias.

La figura (3) representa el efecto de asomeramiento. Se compara la solución de los resultados obtenidos con una solución analítica (figura 3). La variación encontrada entre la solución analítica y la numérica tiene una incertidumbre aproximada de un 20%. Se puede observar que la cota mínima de la solución numérica prácticamente es la solución analítica.

La incertidumbre es debida a una mayor contribución del término real de la velocidad potencial compleja, por tanto el término imaginario de la velocidad potencial tiene valores mínimos. El orden de grandeza del término real y el término imaginario debiése ser muy parecido, lo cual significa que el algoritmo numérico necesita perfeccionarse. Aun así la aproximación a la solución analítica es útil y representa buenos resultados cualitativos.

El caso dos es otra forma de verificar los resultados obtenidos:

En el exterior del rompeolas (figura 4, 5) se forman zonas de amplitudes relativas máximas (agitación), probablemente producida por la reflexión en los rompeolas y las partes laterales contiguas a los rompeolas (que son reflejantes), sumándose las amplitudes de las olas reflejadas y formando la amplificación. Las figuras (6,7) solo son de utilidad visual y se ve un comportamiento parecido a ondas estacionarias. En el interior del puerto las amplitudes son menores (figuras 4,5) pero se observa que en las fronteras las amplitudes son grandes (fig 8a), lo cual se explica por el hecho de ser fronteras totalmente reflejantes.

Los cortes transversales y longitudinales son comparados con los resultados obtenidos por Behrendt (1985), los resultados numéricos obtenidos en este trabajo están sobreestimados (aproximadamente una incertidumbre del 20%). Comparando cualitativamente los resultados obtenidos (figura 8a) con los resultados de Behrendt (1985) (figura 14), se observan los mismos máximos y mínimos, siendo diferentes en el corte central ya que Behrendt reporta un máximo (en el centro de dicho corte) y en este trabajo se encontró el máximo pero con una contribución menor. La diferencia de resultados entre Behrendt y este caso puede ser debida al método de solución empleado para integrar la ecuación,

Behrendt usa desarrollos variacionales. Las diferencias de valores también pueden ser debidas a los siguientes detalles; la forma de incidir la onda, Behrendt usa un semicírculo con centro en la boca del puerto, la onda se origina en la periferia del semicírculo. Mientras que en este trabajo se incide la onda paralelamente al largo de los rompeolas desde el origen; Behrendt usa dos subdominios triangulares por rectángulo del presente trabajo. La distancia que hay entre el origen de la ola incidente y el rompeolas también contribuye a una diferencia en valores de amplitud relativa en el interior del puerto.

El caso tres consiste en probar las condiciones de frontera absorbentes (ecuación 22). Se usa un coeficiente de absorción de valor 1, es decir una condición de frontera totalmente absorbente.

La figura 9 muestra el interior de la rada con un campo de amplitudes relativas que decae al recorrer el interior de la rada, se ven magnitudes cercanas al cero, pues la absorción es total, lo que implica que las condiciones de frontera representan bien la absorción y no existe agitación en el interior de la rada portuaria. La figura 10 muestra el mismo campo de amplitudes relativas.

La elevación de nivel del agua (figura 11) es muy débil, sin embargo aún se puede observar un oleaje definido en la

rada, y es visible el fenómeno difractivo, claro está que no hay reflexiones de las ondas y es por eso que es bien representada la difracción. La perspectiva (figura 12) de elevaciones de la superficie del agua muestra más clara la difracción del oleaje provocada por los rompeolas.

Los cortes transversales y longitudinales hechos en el caso de absorción total son analizados en la figura 13:

La figura 13a muestra amplitudes relativas muy grandes en la parte expuesta de los rompeolas, este aumento de amplitudes relativas (agitación) en la parte externa del puerto es causado por la reflexión total del oleaje en todas las fronteras externas a la rada.

Los cortes transversales hechos en el centro y en la parte más interna del puerto muestran amplitudes relativas cercanas al valor cero, este efecto es causado por la absorción total, pero debiese esperarse una línea de amplitud relativa cero en la parte mas interna de la rada (frontera), la causa de que no suceda esto, es debida al hecho de que la absorción es a primera aproximación (ecuación 22), solo absorbe una fracción próxima al 100% de la energía que incide normal a la frontera (Behrendt, 1985), pero el oleaje que esta llegando a la frontera más interna llega oblicuo. No obstante la condición de frontera absorbente es útil y simula la absorción con confiabilidad.

La figura 13c muestra los cortes longitudinales en la

frontera izquierda del puerto, frontera derecha del puerto y la parte media de la rada. Se observan solo dos líneas, la línea que resalta (decaiendo) son las amplitudes relativas en el centro de la rada, el decaimiento es debido a la absorción en la parte mas interna de la rada, no obstante el valor 0.4 de amplitud relativa es aceptable.

Los cortes laterales figura 13c corresponden a amplitudes relativas muy pequeñas. Estas amplitudes mínimas van creciendo hacia la dirección de la parte más interna de la rada y fueron amortiguadas por el rompeolas, lo cual se ve en las zonas de calma (sin agitación) formadas en la zona protegida del rompeolas. Las zonas de calma se ven más claramente en la figura 13d correspondiente a elevaciones de la superficie del agua. Para un puerto real las condiciones de frontera a una primera aproximación quizá no sean suficientemente adecuadas, por tanto es necesario incluir aproximaciones a segundo y tercer grado (Behrendt, 1985).

V.2 Observaciones del método de FEM y otros detalles

Se intentó discretizar el puerto con elementos triangulares pero la capacidad de memoria de la computadora (HP9000) se saturó y no fue posible obtener resultados con triángulos.

Durante el desarrollo de la obtención de resultados se presentó el problema de mantener la amplitud constante en todos los puntos en un canal con un oleaje de incidencia normal, fondo plano y sin absorción en sus fronteras.

Este problema se soluciona incidiendo el oleaje en un largo de canal múltiplo de la longitud de la onda incidente. Si consideramos que una frontera reflejante matemáticamente se representa como lo establece la condición de frontera reflejante (ecuación 23) con derivadas normales a la frontera de valor cero, las olas que incidan tienen que respetar esta condición, una onda que no sea un múltiplo del largo del canal se comportará como una onda que entra forzosamente, provocando un efecto de aumento de amplitudes relativas (las cuales no son deseadas). Si este problema se observa en la aproximación a un puerto real es recomendable dar una distancia entre la frontera mas interior del puerto y el origen de la ola incidente que sea un múltiplo de la longitud de onda incidente. Este efecto también explica amplitudes relativas grandes en la zona externa de la rada del puerto rectangular (las distancias entre un rompeolas y el origen de la ola incidente no son múltiplos de la longitud de la onda incidente).

Debe mencionarse que no todas las disposiciones de las mallas producen soluciones, algunas mallas dan soluciones indeterminadas al parecer a causa de la generación de

ecuaciones simultáneas linealmente dependientes, un caso particular está en ciertas disposiciones de los triángulos.

La malla empleada en el puerto fue correspondiente a una figura regular y presentó una relativa facilidad para subdividirla en elementos (con un algoritmo numérico), la división del dominio en elementos elaborada a mano es tediosa y genera muchos errores. Para trabajar un caso real se requiere de un algoritmo numérico que defina los nodos y divida el dominio en elementos a la vez que los etiqueta. También es necesario tener diferentes mallas para encontrar soluciones aceptables. La existencia de un generador de mallas disminuye el tiempo de trabajo en un 70%-80%.

Para converger a la solución es necesario aumentar la cantidad de elementos, consecuentemente también se debe aumentar la precisión decimal en todas las variables reales que participen en el modelo numérico, el inconveniente es el gasto en memoria de la computadora y la generación de errores de tipo numérico, los cuales pueden ser detectados fácilmente por medio de un dominio simétrico (puerto rectangular) y los resultados esperados deben ser también simétricos. Una máquina grande (memoria) facilita la búsqueda de la cantidad óptima de elementos.

Otros tipos de elementos pueden ser usados, la mayoría de los autores recomiendan elementos triangulares y rectangulares por su sencillez de visualizar. Estos elementos

pueden ser representados por funciones polinómicas de grado mayor al grado usado en este trabajo. Un elemento isoparamétrico representa mejor las fronteras curvas, podrían incluirse algún tipo de ellos.

Para encontrar soluciones a la ecuación de pendiente suave empleando la técnica de Galerkin y con las limitantes existentes (incertidumbre del 20%, fondo de pendiente suave entre otras) y aproximar un puerto real se hacen las siguientes observaciones: El dominio debe ser discretizado preferentemente con elementos rectangulares (lo más parecido a un cuadrado) y las fronteras deben aproximarse con elementos triangulares (lo más parecido a triángulos equiláteros). La preferencia por los rectángulos es motivada por el ahorro en memoria de computadora. Behrendt (1985), estima que se deben usar once largos de diagonal de elemento rectangular para representar una longitud de onda. Si el polinomio que representa al elemento contiene términos de orden mayor a los elementos lineales el número de elementos necesarios para representar un largo de onda disminuye (Zienkiewics, 1977).

Para implementar la absorción provocada por playas (donde generalmente se da por rompimiento de las olas) sólo se consideran profundidades mayores a 2 metros debido a que la teoría de Airy no funciona para profundidades menores a 2 metros (Rottmann-Sode, 1985). Para fines prácticos solo se

toman profundidades mayores a 2 metros en la frontera y la playa se considera totalmente absorbente (un coeficiente de absorción igual a 1).

Para incidir la ola de arribo se recomienda hacerlo con un semicírculo que circunde la boca del puerto (Behrendt, 1985), ya que es mas facil representar oleajes incidentes de distintos ángulos de aproximación.

Si el puerto que se pretende estudiar tiene una forma más o menos regular se recomienda emplear una malla hecha para la forma de un puerto regular: Las coordenadas de los nodos pueden ser modificadas pero las etiquetas de los nodos no se modifican, esto es fácil comprenderlo si se dibuja un elemento rectangular y se numeran los nodos en un orden (p.e. en sentido contrario al reloj empezando en el nodo inferior izquierdo), después a cada nodo se le asignan coordenadas (x,y) , al mismo elemento se le pueden cambiar las coordenadas cuantas veces se quiera, pero las etiquetas de los nodos no cambian (las etiquetas de los nodos no dependen de las coordenadas).

VI SUGERENCIAS Y RECOMENDACIONES

Se sugiere se aplique la ecuación de pendiente suave a un caso real (integrada con el método de Galerkin) por ejemplo el puerto de Ensenada, Baja California.

Para aplicar el método a un caso real es necesario tener a la mano un algoritmo numérico (comercial) o elaborar un algoritmo que subdivida el dominio en elementos.

Es necesario contar con un algoritmo numérico que presente visualmente la disposición de los elementos para localizar errores de numeración y disposición de elementos.

VII CONCLUSIONES

El método de Galerkin mostró ser útil a la aproximación de la ecuación de pendiente suave.

El método de Galerkin simula con precisión la anulación del oleaje de agitación con el uso de fronteras absorbentes en el interior de la dársena portuaria y reproduce el fenómeno de difracción del oleaje.

Existen ciertas disposiciones en la orientación de los elementos triangulares que indeterminan la solución de las ecuaciones simultáneas generadas por el método de Galerkin.

Para aproximar un puerto real con una malla de elementos es necesario el empleo de un generador de mallas.

BIBLIOGRAFIA

- Abbott, M. B., 1992. The fourth generation of modelling in hydraulics. *Journal of Hydraulic Research*, 29 (5), 581-600.
- Abbott, M. B., and Price, W. A., 1994., *Coastal, Estuarial and Harbour Engineer's Reference Book.*, Chapman & Hall, London, England.
- Austin, D. I., and Bettles, P. 1982, Longshore boundary conditions for numerical wave models. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 2, pp. 263-276
- Behrendt, L. A. 1985, A Finite Element model for water wave diffraction including boundary absorption and bottom friction. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark.
- Berkhoff, J. C. W., 1972: Computation of Combined Refraction-Diffraction, *Proc. 13th Coastal Eng. Conf.*, ASCE, PP. 471-490.
- Berkhoff, J. C. W., 1975: Linear wave propagation problems and the finite element method. In: *Finite Elements in Fluids*, eds. Callagher, R.H., Oden, J.T., Taylor; C., and Zienkiewics, C., Wiley, vol. 1, pp. 251-264.
- Berkhoff, J. C. W., 1976: Mathematical models for simple harmonic linear water waves-wave diffraction and refraction, *Delft Hydraulics Laboratory Pub. Num. 163*, 103 pp.
- Berkhoff, J. C. W., Booy, N., and Radder, A. C., 1982. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, vol. 6, no. 3, pp. 255-279
- Bruun, P., 1989., *Port Engineering. Gulf, USA*, Fourth edition, Vol 1.
- Dalrymple, R. A. 1994. A model for the refraction of water waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 114, (4), 423-35.
- Ebersole, B. A., 1985. *Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves.*
- Houston, J. R., 1981., Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method., *Applied Ocean Research*, Vol 3, No. 4, pp. 163-170
- Howard, N. S. 1985 A harbor ray model of wave refraction-diffraction, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, vol 111, No. 1, pp. 29-44
- Huebner, K. H., 1982, *The Finite Element Method for Engineers.* John Wiley & Sons, USA.
- Jonsson, I. G. and O. Skovgaard, 1979. A Mild-Slope Wave Equation and Its Application to Tsunami Calculations. *Marine Geodesy*, Vol 2 (1), pp. 41-58
- Lamb, H., 1945. *Hydrodynamics.* Dover, sixth edition. USA.
- Liu, P. L. F., and Boissevain P. L., 1988. Wave propagation between two breakwater. *Journal of Waterway, Port, Coastal,*

and Ocean Engineering, vol 114, No. 2, pp. 237-247

- Lo Jen-Men., 1991, A numerical model for combined refraction-diffraction of short waves on an island. Ocean Engng, Vol 18, No 5, pp. 419-434.
- McCormick, M. E., 1973. Ocean Engineering wave mechanics. John Wiley & Sons, USA.
- Medina Enriquez, P. 1993., Anteproyecto de un modelo hidraulico del puerto de El Sauzal. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Marinas, Ensenada, B.C.
- Olmstead, John M. H., 1961. Advanced Calculus, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Radder, A. C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation. J. Fluid Mech., vol. 95, part 1, pp. 159-176.
- Ramming, H. G., 1980. Numerical Modelling of Marine Hydrodynamics, Elsevier Scientific Publishing Company. Printed in the Netherlands
- Rottmann-Sode W., Schaper H. and Zielke W., 1985. International Conference on Numerical and Hydraulic Modelling of Ports and Harbours. Birmingham, England. pp. 285-293.
- Schwarz, H. R., 1988. Finite Elements Methods. Academic Press, Ireland.
- Segerlind L. J., 1984. Applied finite element analysis., John Wiley and Sons, USA.
- Sharp, J. J., and Khader, M. H. A., 1984. A Review of Scale Effects in Harbor Wave Models, The Dock and Harbour Authority, Vol 64, No. 757.
- U.S. Army, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, 1977. Shore Protection Manual, 3d ed., Vols. I, II, III. No. 008-022-00113-1, U.S. Government Printing Office, Wash., D.C. 1262 pp.
- Unluata, U., and Mei, C. C., 1973, Long wave exctation in harbours - an analytical study. Rep. no. 171, Parsons Lab., MIT.
- Uribe Rojo, M. C., 1989. Apuntes de planeación portuaria, UABC. Cuadernos docentes 8.
- Zienkiewicz O. C., 1977. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London..