UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

ESCUELA SUPERIOR DE

CIENCIAS MARINAS

OBTENCION DE PARAMETROS ESTADISTICOS PARA PRONOSTICO DE TEMPERATURA EN LA ZONA EULITORIAL DEL SAUZAL B.C.

TESIS:

PARA OBTENER EL TITULO DE

OCEANOLOGO

PRESENTA:

TERESA DE JESUS ROBLES MUÑOZ.

ENSENADA BAJA CALIFORNIA 1974

CON GRATITUD Y CARIÑO A MIS

PADRES

SR. ROSALIO ROBLES MANGER

Y

SRA. ANGELA MUÑOZ DE ROBLES.

AMOROSAMENTE

A MIS HIJOS

ALEJANDRO GABRIEL DE ALBA ROBLES

Y

CARLOS HANNS ROMMEL DE ALBA ROBLES

CARIÑOSAMENTE

A MIS HERMANOS

RAMON DE JESUS

AIDA MARGARITA

Y

LAURA CRISTINA

DEDICO EL PRESENTE TRABAJO AL PUEBLO DE MEXICO COMO MUESTRA DE MI AGRADECIMIENTO POR SU ESFUERZO E INQUEBRANTABLE VOLUNTAD DE BRINDAR LA EDUCACION SUPERIOR A TODOS LOS CIUDADANOS CUYA UNICA META SEA LA SUPERACION INTEGRAL DEL INDIVIDUO COMO UN MEDIO PARA DOGRAR LA SUPERACION DE NUESTRA PATRIA.

MEXICALI, BAJA CALIFORNIA MARZO 1974.

RESPETUOSAMENTE

AL LIC. MILTON CASTELLANOS EVERARDO

GOBERNADOR CONSTITUCIONAL DEL ESTADO

DE BAJA CALIFORNIA, POR SU ACCION DECI

DIDA Y TRASCEDENTAL EN EL DESARROLLO PO-

LITICO, SOCIO-ECONOMICO DE NUESTRA ENTIDAD.

EN RECONOCIMIENTO A LOS MAESTROS
FUNDADORES DE LA ESCUELA SUPERIOR
DE CIENCIAS MARINAS, POR SU INFATI
GABLE LABOR EN PRO DE LA EDUCACION
OCEANOGRAFICA.

CON ETERNA GRATITUD Y RESPETO

AL DR. SANTOS SILVA COTA

EX RECTOR DE LA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

CUYA INTERVENCION FUE TRAS-

CENDENTAL EN LA ELECCION

DE MI CARRERA.

A TODOS MIS COMPAÑEROS DE LA V GENERACION (1965-1969) DE LA ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS MARINAS.

IN MEMORIAM

A MIS COMPAÑEROS

DESAPARECIDOS

JOSE LUIS TERUI TRUJANO

FEDERICO SIELGH GELVIN

LUIS N.

CON PROFUNDO CARIÑO A MIS COLEGAS

FUNDADORES DEL GRUPO "G"

MIGUEL ANGEL HUERTA DIAZ

TALPA DOLORES

SOFIA ECHEGARAY

LORENZO LOPEZ.

CON SINCERO AGRADECIMIENTO A LA

SRA. YOLANDA HERNANDEZ DE MOLINA Y

A LA SRITA. TOÑITA JIMENEZ HERNANDEZ

POR HABERME REALIZADO TODO EL TRABAJO

MECANOGRAFICO CON EL CUAL NO HUBIERA SI

DO POSIBLE LLEVARLO A BUEN FIN.

C O N T E N I D O

R E S U M E N

Este trabajo comprende la obtención de ecuaciones de regresión para las temperaturas medias mensuales, para las temperaturas mínimas mensuales y para las temperaturas máximas - mensuales, empleando en dichas ecuaciones exponentes enteros, y para el caso de las temperaturas medias mensuales se obtu - vieron además ecuaciones de regreción con exponentes racionales. Esto último es una inovación que me permití introducirr- en el Análisis de Regresión.

Del trabajo del biologo FLORES VILLEGAS se observa que- las temperaturas medias durante los meses de enero a agosto - aumentan y después decrecen hasta el mes de diciembre, concluyendose que existe un máximo que ocurre precisamente en el - mes de agosto.(Comportamiento semejante para los casos de las temperaturas mínimas mensuales y de las temperaturas máximas mensuales). Lo anterior fué la base para emplear únicamente- ecuaciones de regresión de tipo parabólico de grado dos.

En la valuación de los parámetros de las ecuaciónes de - regresión no se utilizó el sistema de ecuaciones normales ya que se sabe exige el empleo de números grandes con lo cual - los cálculos númericos que se realizan son tediosos, prefi - riendose el método conocido como igualación de parámetros.

El método de igualación de parámetros está apoyado en - el muy conocido criterio de los mínimos cuadrados cuya efi - ciencia desde la fecha de su invención (1995) hasta nuestros días ha sido ampliamente verificados.

OBTENCION DE DATOS

Estos fueron realizados bajo la dirección del biologo FLORES VILLEGAS durante los años de 1964 y 1965, sobre las mediciones que de las temperaturas del agua del mar de la zona eulitoral de El Sauzal, Baja California; se hizo.

E En esta publicación los datos aparecen como cuadros de concentración o de registro propiamente; con los cuales se publicaron algunas gráficas alusivas al trabajo. Sin embargo, a mi juicio habia quedado por realizar lo medula de éste.

Por lo que la presente tésis es una complementación e interpretación desde el punto de vista de la Estadistica, es decir, hago el análisis matemático necesario y suficiente para satisfacer la disciplina elegida. Excluyendo todo lo relacionado con la técnica y manejo de aparatos empleados para este particular fin.

I N T R O D U C C I O N

La estadistica es una ciencia cuyas estructura descansa sólidamente en la Matemáticas y como disciplina rigurosa es un producto del siglo XX.

La concepción popular sobre la Estadistica es que envuelve --- grandes masas de datos y que está mas interesada en porcentajes, p promedios y presentaciones de tablas y gráficas. Esto es una parte mínima, puesto que la Estadistica moderna ha extendido su campo mucho mas alla del simple establecimiento de cuadros estadisticos , - por muy importantes que éstos sean. Ha desarrollado técnicas como - el diseño y análisis de experimentos, la inspección por muestreo -- el control de calidad, etc.

Las investigaciones planeadas para evaluar el efecto de un - nuevo medicamento , los métodos de alivio a la congestión del tránsito en una gran ciudad, la reacción del ususario ante la proposición de una nueva tarifa, etc; estarán basadas en observaciones. -- Generalmente estas observaciones son medidas físicas como longitud- velocidad, temperatura, resistencia de materiales, etc., y pueden - ser cualquier número de una escala continua,. Estas medidas, sin -- embargo, no son la única clase de observaciones que pueden tenerse, por ejemplo, en la inspección de carreteras o vías de circulación, Estas pueden clasificarse en buen estado o en mal estado, y la observación para cada carretera o arteria no es un número, sino simplemente la categoría a la que pertenece. Estas observaciones , -- ya sean de un tipo o de otro se usan para efectuar decisiones con ciertos riesgos y basándose en la información proporcionada por -- las muestras.

Entre las herramientas modernas y de las cuales hace uso la Estadistica, citaremos las siguientes: El Teorema Ergódico, (GEORGE D. BIRKHOFF: 1884,1944), demostrando por éste notable matemático en 1931, es de una importancia fundamental en la predicción del futuro de un sistema dinámico teniendo aplicaciones en campos de la ciencia sorprendentemente alejados entre sí. Se utiliza, tanto para predecir el futuro probable de un conjunto de peces de diferentes especies que habitan el mismo medio y luchan encarnizadamente por la vida; como para predecir el futuro probable de los valores de la bolsa o el estado del sistema solar dentro de millones de años.

El teorema ergódico equivale a una generalización de la ley fuerte de los grandes números en teoría de probabilidad. Por ejemplo; sea E un experimento del tipo causal o alatorio, como indistitamente se le puede llamar y sea A un evento que se puede verificar o no al hacer el experimento E. Si se repite E, bajo las mismas condiciones e independientemente, un número grande N de veces, y si N' es el número de veces en que al hcer el experimente se verifica A, entonces la ley fuerte de los grandes números nos permite asegurar que para "casi toda" sucesión de repeticiones de E, y para N suficientemente grande, N'/N nos da un valor aproximado de la probabilidad del evento A. En lenguaje probabilistico se dice que N'/N nos da, con probabilidad 1, un valor aproximado de la probabilidad del evento A. De esta manera, la ley fuerte de los grandes números nos permite aceptar como buenos los valores de las probabilidades de eventos que se obtienen en forma estadistica basandose en series grandes de observaciones, de lo que se desprende el papel tan importante que dicha ley desempeña en las aplicaciones de la teoría de la probabilidad.

El teorema ergódico de Birkhoff nos permite afirmar que el valor medio temporal de una característica a lo largo de una trayectoria correspondiente a la transformación del sistema durante un tiempo suficientemente grande, es el mismo para "casi todas" las condiciones iniciales de que pueda partir el sistema, es decir para casi toda trayectoria posible del sistema. Dado que una característica se mide experimentalmente en un lapso durante el cual se hace la medición y no en un instante dado, en realidad se tiene un valor medio temporal de la característica; el teorema de Birkhoff de validez a tales expresiones experimentales obtenidas para los sistemas dinámicos. Una trayectoria juega el papel de uns sucesión de repeticiones de un experimento y el valor medio temporal (en un lapso finito) de una característica, corresponde a la frecuencia relativa con que se verifica un evento.

El diseño de muestreo doble consiste esencialmente en escoger una muestra grande pero de poco costo, para observar una cierta característica y una submuestra pequeña para observar otra en la que se tiene especial interés, empleando para dar estimaciones a ésta última la correlación entre las dos variables.

El control estadístico de calidad aplicado a la industria, es un poderoso auxiliar y una herramienta insustituible en el desarrollo industrial y económico de un pais industrializado o semindustrializado. Cuando en una industria se trata de medir la calidad de los productos de manufactura, es muy probable, que de no haber utilizado el control estadístico de calidad, el industrial se encuentre ante una situación desagradable. Su producto no tiene la calidad deseada, ha gastado mucho dinero, ha tenido mucho desperdicio y ha empleado mucho tiempo en manufacturar un artículo que, al lanzarse al mercado nacional o internacional, tendrá poca aceptación por no tener las normas requeridas, por ner un precio más alto del debido y por aparecer fuera de tiempo.

El muestreo secuencial introducido por el Profesor A. WALD, de la Universidad de Columbia, en el año de 1943, es muy útil sobre todo en aquellos casos en que para ver si un elemento es de buena o mala calidad hay necesidad de destruirlo.

El modelo probabilístico de líneas de espera tiene de sorprendente que a pesar de que sus condiciones son puramente cualitativas se llega matemáticamente a conclusiones cuantitativas. La teoría de las lineas de espera se ha usado para la solución de problemas de estacionamiento para automóviles, determinación de horarios para atención de enfermos, organización de servicios para máquinas descompuestas, regulación de ventas de boletos, programación de descarga para embarcaciones, etc.

Una aportación netamente mexicana a la Estadística es la aplicación que de las cadenas obsorventes ha hecho el matemático RODOLFO MORALES MARTINEZ a sugerencias del ilustre Matemático y Profesor ENRIQUE VALLE FLORES (1915) a ciertos problemas de conservación de artículos industriales, agrícolas o de otras especies y en los que con el transcurso del tiempo hay un deterioro de la calidad del objeto guardado que si es por muchas etapas hay que retirarlo para su restablecimiento o total desecho. Igualmente se presentan algunos riesgos como incendio en el caso de algodón, etc., así como otros incidentes provocados por agentes naturales y que inutilizan el artículo almacenado.

La planeación de una red de carreteras o arterias citadinas exige un conocimiento detallado de su uso y funcionamiento. La elaboración de un plan de desarrollo carretero económico y útil, requiere de datos que señalen las necesidades relativas de transporte en las diversas áreas.

Al tratar de resolver algunos problemas probabilísticos se presentan ciertas expresiones matemáticas que se tienen que evaluar, o ciertas ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales, con diferencias finitas, etc., para cuya solución se necesitan los métodos del análisis matemático. El camino inverso es también posible, esto es, se pueden valuar ciertas expresiones matemáticas o se pueden resolver ciertas ecuaciones que se presentan en análisis matemático usando método probabilísticos. Para ello se busca un experimento aleatorio tal que la probabilidad de alguno de sus eventos esté relacionada con la solución del problema análitico correspondiente; repitiendo el experimento un número grande de veces se determina en forma aproximada la probabilidad aludida, a partir de la cual se obtiene la solución del problema de análisis correspondiente. Los métodos probabilísticos de cálculo con esta característica reciben el nombre de Métodos Montecarlo, debido a que se usan experimentos aleatorios que pueden considerarse como "juegos de azar".

El Método MONTECARLO es generalmente definido representando la solución de un problema como un parámetro de una población hipotética y usando una sucesión de números aleatorios (casuales) para elaborar una muestra de la población, para la cual estimadores estadísticos pueden obtenerse.

Por ejemplo, si el problema consiste en una evaluación real de la suma.

$$\theta = \sum_{s=1}^{N} f(s)$$

donde N es un número enormente grande (válida sea la expresión), de tal manera que el cálculo director de Q por adiciones sucesivas es laboriosamente prohibitivo y no disponiendo de medios analíticos para reducir el problema a proporciones manejables, podemos recurrir al método MONTECARLO.

La técnica más sencilla depende de la elección de una función p(s) de valores reales, definida en el conjunto de sumas: S = (1,2, ...,N), cuyas sumas parciales:

$$q(n) = \sum_{s=1}^{n} p(s)$$

son conocidas o calculables, y tales que se cumplen:

$$0 \leq p(s) \leq 1 \qquad s \in S$$

$$\sum_{s} p(s)$$

y p(s) mayor que cero para cualquier (s) en S tal que f(s) sea diferente de cero.

El Método MONTECARLO fué inicialmente inventado por JOHN VON NEWMANN (1903,1957) y desarrollado por un grupo de científicos del laboratorio nuclear de Los alamos, tales como: ENRICO FERMI (1901,1954), M.S. ULAM, N. METROPOLIS, H. KAHN y otros. A la fecha pocos libros sobre el método MONTECARLO están disponibles comercialmente y existen también contadas traducciones al inglés del ruso.

En recientes años el concepto de MARTINGALA, introducido por el distinguido matemático estadounidense J.L. DOOB, pastpresidente de la America Mathematical Society (1888) ha sido ampliamente utilizado en problemas de la teoría de la probabilidad y en la del potencial, y a la cual se le define en la forma siguiente: Supongamos una sucesión de variables casuales (u_1, u_2,...u_m,...) definidas en el espacio de eventos elementales (x) contenidos en (A^I). Dicha sucesión recibe el nombre de MARTINGALA si: para cualquier (m) mayor que 1, y para cualquier (a_i)

(1.1)

$$M a_i \ldots a_{m-1} (u_m) = a_{m-1}$$

Mencionaremos a continuación que se han aplicado los métodos probabilisticos más potentes, para el estudio de un gran número de aspectos en la Física; por ejemplo: PAUL LEVY, KAKUTANI y otros matemáticos han desarrollado la teoría del movimiento Browniano en un nivel matem'tico muy elevado; WILLIAM FELLER (1907,1970) y KOLMOGOROV han estudiado a fondo la teoría de los procedos de difusión.

Basten los anteriores ejemplos para demostrar la importancia que día con día está adquiriendo la Estadística, la cual prácticamente ha invadido todos los campos del actual conocimiento humano.

DESCRIPCION DEL TRABAJO.

Prácticamente todas las determinaciones sobre magnitudes están sujetas a imperfección y en general la determinación de una magnitud no puede lograrse por medio de un simple proceso de conteo.

Las imperfecciones tanto de nuestros sentidos como del instrumental con el cual se trabaja, necesariamente implican una duda o una incertidumbre en el resultado de la determinación; y si varias determinaciones de una magnitud se efectuan, éstas serían en general diferentes unas de otras.

Surge entonces una interrogante, si un número de mediciones se han hecho: $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ sobre el valor de una magnitud, Cuál debe ser considerado como buen resultado?, o bien, Cuál es el valor más conveniente de una magnitud que ha sido medida varias veces?.

Si en las medidas $(x's)$ se desconoce la forma en la cual éstas fueron obtenidas o determinadas, un resultado definitivo puede ser obtenido únicamente con más o menos consideraciones arbitrarias. Bajo tales condiciones, el valor actual escogido para la magnitud, es en general la <u>media aritmética</u> de los resultado obtenidos.

III.a) $\frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_N \right)$

Si (a) es el verdadero valor o el valor real de la magnitud, los errores implícitos en la información obtenida, se definirán como la diferencia entre el valor medido y el valor real, teniéndose:

III.b) $x_i - a, \quad (i = 1, 2, \ldots N)$

La suma de los errores será en consecuencia:

III.1) $$\sum_{i=1}^{N} (x_i - a)$$

y la suma de los cuadrados de dichos errores tiene por valor la expre sión:

III.2) $$\sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2$$

Si en esta última expresión se considera que (a) es una variable el menor valor estará dado por:

III.3) $$\sum_{i=1}^{N} (x_i - a) = 0$$

o sea que ($\bar{a}$) es la media aritmética.

Entonces podemos decir que la elección de la media aritmética -- de los valores ($x's$) como el valor verdadero de la magnitud en estu - dio, implica que la suma de los cuadros de los errores tenga el menor valor posible.

Estableceré entonces la siguiente definición de <u>media aritmética</u>: como: el cociente de la suma de los valores medidos entre el número - de ellos y simbolizándola por:

III.4) $$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Esta es la definición de media aritmética que figura en todos -

los libros de Estadística General.

Algunos autores llaman a la diferencia entre un valor cualquiera de un conjunto de valores y su media aritmética: Desviación. En el desarrollo de esta Tesis usaré indistintamente y como equivalente los términos: error y desviación. Aclaro, que en Estadística el término error no significa equivocación, se le define como la diferencia entre un valor de un conjunto de valores y el valor medio aritmético de dicho conjunto.

A continuación demostraré: (i) que la suma de los errores es igual a cero, y (ii) que la suma de los cuadrados de los errores es un mínimo. Para proceder a demostrar (i) escribo:

III.5) $$S = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i - N\bar{x}$$

pero de la definición de media aritmética, anotada anteriormente (III.4), deduzco sin dificultad:

III.5a) $$N\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

y sustituyendo este valor en (III.5) obtengo:

III.6) $$S = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i = 0$$

Para demostrar (ii), parto de la expresión:

III.7) $$S^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2$$

y derivándola sucesivamente en dos ocasiones, obtengo:

III.7a) $$\frac{d(S^2)}{dx} = 2\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = 2\sum_{i=1}^{N} x_i - 2N\bar{X} = 0$$

III.7b) $$\frac{d(S^2)}{dx^2} = 0$$

Como el valor obtenido para la segunda derivada es (0) y éste - será siempre positivo, entonces la función (S^2) tendrá un mínimo, -- cualquiera que sea el valor de la variable (X) que anule a la primera derivada.

Lo anterior conduce a las aseveraciones siguientes:

a) La media aritmética o simplemente media es una meddda de tendencia central completa porque incluye tanto el número de valores como- el tamaño de los mismos, y por lo tanto su uso es el más adecuado.

b) Es la medida de tendencia central más usada en Estadística.

c) Debido a que es calculada o medida matemáticamente puede fácilmente ser manipulada en ecuaciones.

Por todo lo anterior y que puede encontrarse en casi todos los libros de Estadística General o Estadística Descriptiva, tomo la decisión de usar a la media aritmética en el desarrollo de esta Tesis como la más adecuada medida de tendencia central.

El reemplazar una colección de datos por un sólo número o medida de tendencia central (en el caso presente la media), no nos proporciona una información muy completa; es necesario conocer el grado de uni formidad de los datos y para ello se impone la introducción de una medida de variabilidad o de dispersión de los mismos.

Al igual que en el caso de las medidas de tendencia central, las de variación son múltiples. En el desarrollo de esta Tesis la medida de variación o de dispersión que se utilizará será la denominada: <u>desviación estándar</u> y a la cual se le define como la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones o errores. Simbolizandola por:

$$\text{III.8)} \quad \sigma_{(x)} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

En la tabla que se ha elaborado con las temperaturas medias mensuales para los años en estudio (1964,1965) se observa que durante los meses de enero a agosto la temperatura media aumenta (para 1964 la primera temperatura media registrada es la de febrero) y después decrece hasta el mes de diciembre. Es decir existe un máximo para las temperaturas medias mensuales en el mes de agosto.

En consecuencia las fórmulas que emplearé para determinar las ecuaciones de regresión serán únicamente del <u>tipo parabólico</u> y su estructura matemática de la forma:

$$\text{III.9)} \quad T_{(x)} = a + bx + cx^2$$

en donde (x) representa el número de orden del mes y (T) la temperatura media mensual que ocurre en dicho mes, (a,b,c) parámetros a valuar de acuerdo con las condiciones naturales existentes.

Para obtener el sistema de ecuaciones normales, que me permitirán valuar los parámetros (a,b,c), se recurre al criterio de los mínimos cuadrados del matemático KARL F. GAUSS (1777,1855) en el cual se impone la condición de que la suma:

III.10) $$S = \sum_{i=1}^{N} \left[T(x_i) - a - bx_i - cx_i^2 \right]^2$$

sea mínima.

Sábese que para que una fuunción tenga máximo o mínimo la primera derivada (ordinaria o parcial) debe anularse. Esta es una condición necesaria pero no suficiente.

Primeramente derivaré la función (S) o sea la expresión (III.10) con respecto al parámetro (a) y obtengo:

III.10a) $$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N} \left(T(x_i) - a - bx_i - cx_i^2 \right)$$

Igualando a cero la anterior expresión y efectuando las operaciones algebraicas necesarias se obtiene la primera de las ecuaciones normales, misma que tiene la forma:

III.11a) $$\sum T(x) = aN + b\sum x + c\sum x^2$$

Al escribir las ecuaciones normales se suprimirán los índices (i) de la función y de las variables independientes.

A continuación derivo la función (S) con respecto al parámetro (b) y obtengo:

$$\text{III.10b)} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{N} \left(T(x_i) - a - bx_i - c\,x_i^2 \right) x_i$$

Igualando esta expresión a cero y efectuando las opperaciones algebraicas que se necesiten, obtengo la segunda de las ecuaciones normales, la cual en este segundo caso tiene la estructura matemática:

$$\text{III.11b)} \quad \sum x\,T(x) = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3$$

Finalmente, derívase la función (S) con respecto al parámetro (s) y se obtiene:

$$\text{III.10c)} \quad \frac{\partial S}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^{N} \left[T(x_i) - a - bx_i - c\,x_i^2 \right] x_i^2$$

Igualando a cero como en los dos casos anteriores, se obtiene — la tercera ecuación del sistema, cuya estructura es de la forma:

$$\text{III.11c)} \quad \sum x^2\,T(x) = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4$$

Es sabido que el utilizar el sistema de <u>ecuaciones normales</u> exige el empleo de números grandes lo cual hace tediosos y dificiles los cálculos que se realizan, por lo tanto para valuar los parámetros — (a,b,c) emplearé el método conocido como <u>igualación de parámetros</u> y — que ha sido utilizado con grandes ventajas en los Institutos de Ingeniería y Econímia dependientes de la U.A.B.C. La obtención de las fórmulas del método de igualación de parámetros se realiza de la manera siguiente: De la primera ecuación normal (III.11a) se despeja al pará metro (a) y se obtiene:

III.12a) $$a = \overline{T(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}$$

La anterior expresión se sustituye en la segunda ecuación normal (III.11b) y se tiene:

III.10d) $$\sum x\, T(x) = \left[\overline{T(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}\right]\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

efectuando las operaciones indicadas y despejando al parámetro (b), obtengo:

III.12b) $$b = \frac{\sum x T - \bar{T}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} - c\,\frac{\sum x^3 - \overline{x^2}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x}$$

A continuación la expresión (III.12a) se sustituye en la tercera de las ecuaciones normales (III.11c) y se tiene:

III.10e) $$\sum x^2 T(x) = \left[\overline{T(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}\right]\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

Procediendo a efectuar las operaciones algebraicas que se indican y despejando nuevamente al parámetro (b), obtengo la expresión:

III.12c) $$b = \frac{\sum x^2 T - \bar{T}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} - c\,\frac{\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2}$$

Se igualan a continación las expresiones (III.12b) y (III.12c) y- se obtiene el valor del parámetro (c), mismo que se sustituye en cualquiera de las expresiones que nos señalan a (b) o en las dos y dicho -

valor de (b) junto con el de (c) se sustituyen finalmente en (III, - 12a) y en esta forma se tienen valuados los parámetros (a,b,c).

A continuación presento un ejemplo númerico que verifica la afirmación asentada anteriormente en el sentido de las ventajas del método de <u>igualación de parámetros</u> sobre el <u>sistema de ecuaciones</u> normales.

Supondré que el universo en estudio consta de doce elementos (N = 12) y que la variable (x) sigue el orden de los números naturales, con lo cual se tienen los siguientes valores:

$$\sum x = 78 \qquad \bar{x} = 6.5$$

$$\sum x^2 = 650 \qquad \overline{x^2} = 54.2$$

$$\sum x^3 = 6084 \qquad \overline{x^3} = 507$$

$$\sum x^4 = 60710 \qquad \overline{x^4} = 5059$$

$$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 143$$

$$\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \sum x^3 - \bar{x}^2 \sum x = 1859$$

$$\sum x^4 - \bar{x}^2 \sum x^2 = 25502$$

$$\frac{\sum x^3 - \bar{x}^2 \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 13 \, ; \quad \frac{\sum x^4 - \bar{x}^2 \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 14$$

$$\sum T(x) = 195$$

$$\sum x\, T(x) = 1317$$

$$\sum x^2\, T(x) = 11061$$

$$\bar{T}(x) = 16.25$$

Sustituyendo los valores numéricos en el sistema de las ecuaciones normales, st obtiene:

III.13a) $195 = 12a + 78b + 650c$

III.13b) $1317 = 78a + 650b + 6084c$

III.13c) $11061 = 650a + 6084b + 60710c$

Sustituyendo los valores numéricos en las fórmulas del método de igualación de parámetros de obtiene:

III.14a) $$b = \frac{1317 - 16.25\,(78)}{143} - 13c$$

III.14b) $$b = \frac{11061 - 16.26\,(650)}{1859} - 14c$$

III.14c) $$a = 16.25 - 6.5(b) - 54.2\,(c)$$

Comparando el sistema de las ecuaciones normales con las fórmulas del método de igualación de parámetros en los que se han sustituido los valores numéricos se observa las ventajas de éste último y se verifica ampliamente la aseveración anteriormente escrita en tal sentido.

Para obtener la fórmula que me permita calcular el <u>error estándar de estimación</u>, partiré de la definición del mismo, la cual simbolizada matemáticamente es la siguiente:

III.15) $$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\,(T - T_c)^2}{N}}$$

en la cual (T) significa la temperatura medida y (Tc) la temperatura calculada mediante la ecuación de regresión respectiva. Sustituyendo a (Tc) por su valor en:

III.15a) $$\sum (T - T_c)^2 = \sum \left[T - (a + bx + cx^2)\right]^2$$

que se puede escribir:

III.15b) $$\sum \left[T^2 - 2(a + bx + cx^2)T + (a + bx + cx^2)^2\right]$$

y efectuando las operaciones que se indican y además teniendo presente las igualdades siguientes:

III.15c) $$a \sum T = a(aN + b\sum x + c\sum x^2)$$

III.15d) $$b \sum xT = b(a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3)$$

III.15e) $$c \sum x^2 T = c(a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4)$$

se tendrá finalmente la fórmula que permite calcular el error estándar de estimulación:

III.16) $$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum T^2 - (a\sum T + b\sum xT + c\sum x^2 T)}{N}}$$

A continuación paso a explicar dos términos ampliamente usados en Estadística y que se denominan: desviación explicada y desviación no explicada. A la primera se le define como la diferencia entre un valor calculado (mediante la ecuación de regresión) y el valor medio (obtenido de los valores reales) y a la segunda se le define como la diferencia entre un valor medido y el valor calculado correspondiente para el mismo valor de la variable independiente. Recordando la definición de desviación total, paso a continuación a representar con simbolos matemáticos las tres definiciones a las caales se ha hecho referencia en este párrafo:

III.17a) Desviación total: $T(x_i) - \overline{T(x)}$

III.17b) Desviación explicada: $T_c(x_i) - \overline{T(x)}$

III.17c) Desviación noexplicada: $T(x_i) - T_c(x_i)$

De la anterior tabla se puede deducir fácilmente que la desviación total es igual a la suma de la desviación explicada más la desviación noexplicada.

A la suma de los cuadrados de las desviaciones totales, se le denomina en Estadística: variación total y se simboliza por:

III.18a) $$V_{(t)} = \sum_{i=1}^{N} \left[T(x_i) - \overline{T(x)} \right]^2$$

A la suma de los cuadrados de las desviaciones explicadas se le designa vomo variación explicada, simbolizándola por:

III.19) $$V_{(ex)} = \sum_{i=1}^{N} \left[T_c(x_i) - \overline{T(x)} \right]^2$$

A la suma de los cuadrados de las desviaciones noexplicadas, se le denomina por: variación noexplicada, representándola matemáticamente por:

III.20) $$V_{(nx)} = \sum_{i=1}^{N} \left[T(x_i) - T_c(x_i) \right]^2$$

Al cociente de la variación explicada entre la variación total - se le denomina coeficiente de determinación y a su raíz cuadrada coeficiente de correlación.

Las expresiones (III.18) y (III.19) pueden excribirse en la forma:

III.18a) $$V_{(t)} = \sum T^2 - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

III.19a) $$V_{(e)} = a \sum T + b \sum x T + c \sum x^2 T - \frac{(\sum T)^2}{N}$$

y en consecuencia el coeficiente de determinación (r^2) puede ser escrito en la forma:

$$r^2 = \frac{a \sum T + b \sum x T + c \sum x^2 T - \frac{(\sum T)^2}{N}}{\sum T^2 - \frac{(\sum T)^2}{N}}$$

La frase siguiente nos demuestra la importancia del coeficiente de correlación: Cuando la correlación es perfecta los valores medidos y los valores calculados son idénticos. En consecuencia el coeficiente de correlación (r) nos designan el grado de aproximación de la ecuación de regresión obtenida con los datos obtenidos directamente. El coeficiente de correlación se calcula extrayendo la raíz cuadrada a la expresión (III.20) y considerando solamente la positiva.

Con objeto de obtener una fórmula que facilite el cálculo del coeficiente de correlación (r), de la expresión (III.16) se obtiene:

III.16a) $-N\epsilon^2 = a\sum T + b\sum xT + c\sum x^2 T - \sum T^2$

En la anterior expresión se observa que el término a la derecha del signo igual es precisamente igual al de la expresión (III.19a) y por lo tanto concluyo que:

III.21) $V_{(e)} = -N\epsilon^2$

De la expresión (III.8) obtengo la igualdad siguiente:

III.8a) $\sigma^2_{(x)} = \sum T^2 - \frac{(\sum T)^2}{N}$

Observando ésta que el término de la derecha del signo igual es idéntico al término correspondiente de la expresión (III.18a), por lo cual concluyo que:

III.22) $V_{(t)} = \sigma^2_{(x)}$

Sustituyendo (III.21) y (III.22) en (III.20), efectuando las operaciones algebraicas necesarias y extrayendo raíz cuadrada al resul tado, finalmente obtengo:

III.23) $$r = + \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{\sigma(x)}\right)^2}$$

Que es la expresión de la cual haré uso en esta Tesis para obtener el coeficiente de correlación.

Al controlar la calidad de los resultados que se obtienen por medio de un procedimiento que se repite en varias ocasiones, debe tenerse en cuenta que la variabilidad de la calidad puede ser de dos tipos; la provocada por causas asignables y la aleatoria.

A la primera se le define o se le conoce como aquella que puede asignarse o atribuirse a ciertos factores específicos y en general, las variaciones producidas por ellos son relativamente grandes.

La variación aleatoria es la suma de los efectos de todo un conjunto de causas ignoradas. El efecto de cada una de ellas es pequeño y no puede atribuirse una parte considerable de la variación total producida, a una sola causa particular.

Si al estudiar una colección de datos, correspondientes a un procedimiento del tipo mencionado, se encuentra que su variación conforma un modelo estadístico que puede ser producido por el azar, es decir, por causas aleatorias, es razonable suponer que no están actuando otro tipo de causas, que llamaré asignables, Se dice entonces que las condiciones que producen la variación estan <u>bajo control</u>, en el sentido de que si las causas aleatorias son las únicas que están influyendo, la cantidad y el carácter de la variación puede predecir en términos generales.

En el caso contrario, si la variación de los datos no se ajusta al modelo que podía esperarse si solamente intervinieran causas alea torias, se concluye que otro tipo de causas están en acción y se dice que las condiciones que producen la variación están fuera de control.

Una carta de control ha sido definida por la matemática mexicana MARIA GUADALUPE LOMELI CEREZO como un instrumento estadístico que se-emplea con tres finalidades:

1a) Conocer cual es el estado de control.

2a) Alcanzar control a un nivel apropiado.

3a) Juzgar si se ha alcanzado el nivel de control deseado.

En esencia para establecer una carta de control de una característica (X),(media, modo, variancia, etc.,) se estudia la distribución de su estimador, suponiendo que solamente hay causas aleatorias operando, y se señalan regiones de aceptación y regiones de rechazo. Si-los valores calculados a partir de las muestras, caen en la región de rechazo, se dice que los puntos están fuera de control y por el contrario si caen en la región de aceptación entonces se dice que están-bajo control. La región de rechazo se fija en términos de la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es cierta, es decir, de buscar-causas asignables de variación cuando en realidad la variación puede-deberse al azar.

Sin embargo, si no existen puntos fuera de control, esto no significa que se tenga la plena seguridad de que no están actuando causas asignables, simplemente significa que la hipótesis de que las causas aleatorias están actuando es una hipótesis muy plausible y que -- tal vez no sea provechoso buscar otras causas especiales.

Carta de control de la media: Supongase que se seleccionan muestras de un determinado proceso y se calcula la media ($\bar{X}$), de cada -- muestra. Si no están presentes causas asignables, ésta será una varia ble aleatoria cuya distribución será normal. Entonces la probabilidad (Pr) de que dicha media ocurra en el intervalo siguiente será:

III.24) $$P_r\left(\mu - 3\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\sigma_{\bar{x}}\right) = 0.997$$

En un sistema de coordenadas cartesianas, se divide el eje vertical en unidades de (X) y en el horizontal se hacen divisiones con respecto al tiempo o a cualquier otra base para ordenar a $\bar{X}$.

Se trazan lineas horizontales en μ y en $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: el resultado en una carta de control, tal y como se muestra en la figura #

Se sabe que $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ en donde n es el tamaño de la muestra. Sinembargo en general, no se conoce el valor de μ ni el de σ y deben por tanto estimarse. Existen dos procedimientos para hacerlo, Uno en el cual se seleccionan de acuerdo con ciertas normas o estándares que se desean, o se estiman a partir de ciertas muestras que se han colectado. En este segundo caso es muy aconsejable seleccionar por lo menos 25 muestras de 4 elementos cada una. El promedio de las medias obtenidas de las muestras se le designa por $(\bar{\bar{X}})$ y será la línea central. La raíz cuadrada del promedio de las variancias de las muestras $\sqrt{\bar{s}^2}$ será el estimador de σ. Los extremos de control serán entonces:

III.24a) $$\bar{\bar{X}} \pm 3\sqrt{\bar{s}^2}/\sqrt{n}$$

El cálculo de las variancias de cada muestra es laborioso, por lo cual se prefiere emplear la amplitud o rango (R) en su lugar.

La desviación estándar y la amplitud, fluctuan en forma muy semejante para valores pequeños de n. Existen tablas de la distribución R/σ para poblaciones normales y por medio de ellas, se puede emplear R para estimar σ.

Esto se hace en la forma siguiente. Se calcula el promedio de las amplitudes obtenidas en las muestras ($\bar{R}$) y se divide entre el valor que se obtiene de las tablas elaboradas y el cual en la generalidad es designado como (d_2). Así los estremos o fronteras de control son:

$$\text{III.24b} \quad \bar{\bar{X}} \pm \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$$

Donde (d_2) depende del tamaño de la muestra, por lo que: $3/d_2\sqrt{n}$ depende exclusivamente de n y se han calculado tablas para esta expresión a la cual se le designa por A_2. En consecuencia los extremos de control se reducen a:

$$\text{III.24c)} \quad \bar{\bar{X}} \pm A_2\bar{R}$$

Si se han fijado ciertas normas para μ_1 y para σ_1 las fronteras de control (llamados tmabién límites) serán:

$$\text{III.24d)} \quad \mu_1 = \pm \frac{3\sigma_1}{\sqrt{n}}$$

Al igual que en el caso anterior $3/\sqrt{n}$ depende exclusivamente de n, se designa por A, y ha sido tabulado, por lo que los límites de control serán:

$$\text{III.24e)} \quad \mu_1 \pm A\sigma_1$$

Una vez establecido los límites, se grafican los puntos $\bar{X}$, correspondientes a cada muestra. Los puntos que estén fuera de las fronteras, no están indicando que no se ajustan al modelo que se espera y por lo tanto deben revisarse los factores que intervinieron para producirlos.

Carta de control de la amplitud:- No sólo es importante controlar la media de los resultados de un proceso, sino también la dispersión de ellos. Esto puede hacerse controlando la variancia, la desviación estándar o la amplitud. Sin embargo, debido a la sencillez de los cálculos se prefiere trabajar con la amplitud o rango.(R).

Se acostumbra tomar como línea central de la carta de control a $\bar{R}$ y los límites de control a una distancia de $3\sigma_{\bar{R}}$ aún cuando la distribución de la amplitud no es normal. La carta de control para la amplitud se muestra en la figura #

Al igual que en el caso de la media pueden fijarse de antemano ciertas normas o pueden estimarse R y $\sigma_{\bar{R}}$ por medio de muestras. En este último caso se procede en la forma siguiente: Se calcula la amplitud para cada una de las muestras de que se dispone y se obtiene su promedio $\bar{R}$. Esta cantidad es la que sirve para fijar la línea central de la carta de control. $\sigma_{\bar{R}}$ se obtiene con ayuda de las tablas de R/σ' que se mencionaron anteriormente. Se multiplica el valor de la columna σ_w en dichas tablas, por σ'. Sin embargo, σ' a su vez es estimada por medio de R/d_2 por lo que tenemos:

III.25a) $$\sigma_{\bar{R}} = \frac{\sigma_w \bar{R}}{d_2}$$

Los límites de control serían:

III.25b) $$R \pm \frac{3\sigma_w \bar{R}}{d_2} = \bar{R}\left(1 \pm 3\sigma_w/d_2\right)$$

La expresión dentro del paréntesis depende exclusivamente de n por lo que existen tablas de dichos valores a los que respectivamente se les denomina: D_3 y D_4. Así el límite superior será: $\bar{R}\,D_4$ y el límite inferior: $\bar{R}\,D_3$.

Si se hubiera fijado normas generalmente se referirían a la des viación estándar. Llamaré σ_1 a esa cantidad, entonces los extremos de la carta de control serían:

III.25c) $$d_2 \sigma_1 \pm 3 \sigma_1 \sigma_w = \sigma_1 (d_1 \pm 3 \sigma_w$$

Otra vez la expresión dentro del paréntesis depende de n, por lo que se han tabulado esos valores, designándolos fespectivamente D_2 y D_1. El límite superior es $\sigma_1 D_2$ y el límite inferior: $\sigma_1 D_1$.

Carta de control de porcentaje:- Resulta interesante en muchas ocasiones controlar el porcentaje o la fracción de elementos defectuosos (P) de un proceso. Teniendo presente que dicha función es una variable aleatoria que sigue la distribución binomial y suponiendo que se toman muestras suficientemente grandes, se pueden fijar los límites o extremos por medio de la distribución normal. La línea central es entonces (P) y los extremos:

III.26a) $$P \pm 3 \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

Siendo n el tamaño de la muestra. Como en los casos anteriores se puede fijar una norma P' y con ella calcular los límites, o bien tomar muestras y calcular el promedio $\bar{P}$ empleando ese valor para establecer las fronteras. También pueden obtenerse los valores:

III.26b) $$3 \bar{P} \sqrt{(1-P)/n}$$

por medio de tablas.

ECUACIONES DE REGRESION CON EXPONENTES RACIONALES: En la numerosa literatura que me fué posible tener a la vista y la cual se cita al final de este capítulo ya que con los restantes de esta Tesis guarda muy poca relación; no encontré indicio alguno de que en el análisis de regresión, ya sea este lineal o nolineal, de una variable independiente o de más de una; se utilizarán en las ecuaciones correspondientes <u>exponentes racicnales</u>, todos los empleados hasta la fecha son enteros.

Sin embargo los exponentes racionales han sido utilizados en diversas ramas del conocimiento humano y por diversas personas. Permítome citar a continuación algunos ejemplos en donde han sido usados los exponentes racionales.

HIDRAULICA:- Bazin, Boussinesq, Chézy, Darcy, Dupuit, Flamant, Forcheimer, Kárman, Kröber, Kutter, Lang, Manning, Prandtl, Reynolds Thiem, Weber y otros más.

TEORIA DEL CLEAJE:- Airy, Andreinanoff, Antoine, Bretschneider, Darbyshire, Ferrer, Gaillard, Hawskley, Helmholtz, Iribarren, James, Koiznetzov, Lagrange, Mendoza-Franco, Michell, Molitor, Neumann, Pierson, Scott-Rusell, Stevenson, Stokes, Wien, y otros más.

ECUACIONES DIFERENCIALES:- Boole, Chandrasekar, Euler, Fermi, Ferrer, Kidder, Ljubarkii, Weierstrass, Zadiraka, y otros más.

INGENIERIA PORTUARIA:- Castro-Briones, Johnson, Lira, Mason, Molitor, Saint-Venant, Wiegel, y otros muchos más.

SEDIMENTACION:-Bangold, Einstein, Ekman, Emery, Inmann, Johnson Kalinsky, Petersen, Rouse, Shepard, Trask, Vanoni y otros más.

En esta Tesis introduzco la inovación de emplear en un análisis de regresión, los exponentes racionales, en tres ecuaciones de regreción.

Las cuales son:

III.27) $T_{(x)} = a + b x + c x^{3/2}$

III.28) $T_{(x)} = a + b x^{3/2} + c x^{5/2}$

III.29) $T_{(x)} = a + bx + cx^{5/2}$

El método para deducir el sistema de ecuaciones normales de las - tres anteriores ecuaciones de regresión, es exactamente el mismo que - se empleo en las ecuaciones de regresión con exponentes enteros, o - sea el método de los mínimos cuadrados del matemtico K.F. GAUSS. Los- sistemas de ecuaciones normales para cada una de las tres ecuaciones de regresión anteriores, son respectivamente:

III.27a) $\Sigma T = aN + b\Sigma + c\Sigma x^{3/2}$

III.27b) $\Sigma xT = a\Sigma x + b\Sigma x^{2} + c\Sigma x^{5/2}$

III.27c) $\Sigma x^{3/2}T = a\Sigma x^{3/2} + b\Sigma x^{5/2} + c\Sigma x^{3}$

III.28a) $\Sigma T = aN + b\Sigma x^{3/2} + c\Sigma x^{5/2}$

III.28b) $\Sigma x^{3/2}T = a\Sigma x^{3/2} + b\Sigma x^{3} + c\Sigma x^{4}$

III.28c) $\Sigma x^{5/2}T = a\Sigma x^{5/2} + b\Sigma x^{4} + c\Sigma x^{5}$

III.29a) $\Sigma T = aN + b\Sigma x + c\Sigma x^{5/2}$

III.29b) $\Sigma xT = a\Sigma x + b\Sigma x^{2} + c\Sigma x^{7/2}$

III.29c) $\Sigma x^{5/2}T = a\Sigma x^{5/2} + b\Sigma x^{7/2} + c\Sigma x^{5}$

Las fórmulas que me permitirán calcular el error estándar de - estimación para cada una de las tres ecuaciones pre-anotadas, son respectivamente:

III.27d) $\epsilon = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma T^{2} - (a\Sigma T + b\Sigma xT + c\Sigma x^{3/2}T)}{N}}$

III.28d) $\epsilon = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma T^{2} - (a\Sigma T + b\Sigma x^{3/2}T + c\Sigma x^{5/2}T)}{N}}$

III.29d) $\epsilon = \sqrt{\dfrac{\Sigma T^{2} - (a\Sigma T + b\Sigma xT + c\Sigma x^{5/2}T)}{N}}$

Como anteriormente quedó expresando el sistema de ecuaciones -

normales requiere el uso de números grandes, por lo tanto para el caso de los exponentes racionales al igual que en los casos de exponentes enteros usaré para la valuación de los parámetros (a,b,c) el método de igualación de parámetros, y las ecuaciones que me permitirán calcular o valorar a dichos parámetros, son respectivamente para cada una de las tres ecuaciones de regresión, escritas con anterioridad, las siguientes:

III.27e) $a = \overline{T(x)} - b\bar{x} - c\,\overline{x^{3/2}}$

III.27f) $b = \dfrac{\Sigma xT - \bar{T}\Sigma x}{\Sigma x^2 - \bar{x}\Sigma x} - c\,\dfrac{\Sigma x^{5/2} - \overline{x^{3/2}}\,\Sigma x}{\Sigma x^2 - \bar{x}\Sigma x}$

III.27g) $b\ \dfrac{\Sigma x^{3/2}T - \bar{T}\Sigma x^{3/2}}{\Sigma x^{5/2} - \bar{x}\Sigma x^{3/2}} - c\,\dfrac{\Sigma x^{3} - \overline{x^{3/2}}\,\Sigma x^{3/2}}{\Sigma x^{2} - \bar{x}\Sigma x^{3/2}}$

III.28e) $a = \overline{T(x)} - b\,\overline{x^{3/2}} - c\,\overline{x^{5/2}}$

III.28f) $b = \dfrac{\Sigma x^{3/2}T - \bar{T}\Sigma x^{3/2}}{\Sigma x^{3} - \overline{x^{3/2}}\,\Sigma x^{3/2}} - c\,\dfrac{\Sigma x^{4} - \overline{x^{5/2}}\,\Sigma x^{3/2}}{\Sigma x^{3} - \overline{x^{3/2}}\,\Sigma x^{3/2}}$

III.28g) $b = \dfrac{\Sigma x^{5/2}T - \bar{T}\Sigma x^{5/2}}{\Sigma x^{4} - \overline{x^{5/2}}\,\Sigma x^{5/2}}\ c\ \dfrac{\Sigma x^{5} - \overline{x^{5/2}}\,\Sigma x^{5/2}}{\Sigma x^{4} - \overline{x^{3/2}}\,\Sigma x^{5/2}}$

III.29e) $a = \overline{T(x)} - b\bar{x} - c\,\overline{x^{5/2}}$

III.29f) $b\ \dfrac{\Sigma xT - \bar{T}\Sigma x}{\Sigma x^2 - \bar{x}\Sigma x} - c\,\dfrac{\Sigma x^{9/2} - \overline{x^{5/2}}\,\Sigma x}{\Sigma x^2 - \bar{x}\Sigma x}$

III.29g) $- \dfrac{\Sigma x^{5/2}T - \bar{T}\Sigma x^{5/2}}{\Sigma x^{7/2} - \bar{x}\Sigma x^{5/2}} - c\,\dfrac{\Sigma x^{5} - \overline{x^{5/2}}\,\Sigma x^{5/2}}{\Sigma x^{7/2} - \bar{x}\Sigma x^{5/2}}$

BIBLIOGRAFIA consultada en relación con el uso de los exponentes racionales en el análisis de regresión.

Se consultaron todas las publicaciones de las sociedades científicas que se citan desde el año de 1961 hasta el mes de septiembre de 1973.

1:- De la AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY:

a) Bulletin AMS.

b) Proceedings AMS.

c) Transactions AMS.

2.- De la MATHEMATICAL ASSOCIATTION OF AMERICA:

a) The American Mathematical Monthly.

b) Mathematics Magazine.

3:- De la SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APLIED MATHEMATICS.

a) SIAM Review.

b) SIAM Journal on Control.

c) SIAM Journal on Applied Mathematics.

d) SIAM JOURNAL on Mathematical Analysis.

e) SIAM Journal on Numerical Analysis.

f) Theory of Probability and Applicattions.

4:- De la AMERICAN STATISTICAL SOCIETY:

a) Annals of ASS.

Estas publicaciones se editan en un número promedio de 10 (Diez) ejemplares por año.

F O R M U L A   E N S A Y A D A.

IV/64-1) $\quad T(x) = a + bx + cx^2$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S.

1a) $\quad a = \overline{T}(x) - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

1b) $$b = \frac{\sum xT - \overline{T}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c\,\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$$

1c) $$b = \frac{\sum x^2 T - \overline{T}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} - c\,\frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2}$$

1d) $$E = \pm \sqrt{\frac{\sum T^2 - (a \sum T + b \sum x T + c \sum x^2 T)}{N}}$$

1e) $$\sigma(x) = \pm \sqrt{\frac{\sum T^2}{N} - \left(\frac{\sum T}{N}\right)^2}$$

1f) $$\gamma = + \sqrt{1 - \left(\frac{E}{\sigma(x)}\right)^2}$$

1g) $$V(x) = \frac{\sigma(x)}{\overline{T}(x)}$$

DATOS: Temperaturas medias $(\overline{T})$ mensuales de 1964.

$N = 11$ $\quad \overline{T}(x) = 16.163$ $\quad \sum T(x) = 177.80$

$\sum x = 66$ $\quad \bar{x} = 6$ $\quad \sum x T = 1077$

$\sum x^2 = 506$ $\quad \bar{x}^2 = 46$ $\quad \sum x^2 T = 8165$

$\sum x^2 - \bar{x} \quad x = 110$ $\quad \sum T^2 = 2914$

$\sum x^3 - \bar{x} \quad x^2 = x^3 - \bar{x}^2 \quad x = 1320$

$\sum x^4 - \overline{x^2} \quad x^2 = 16698$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 12, \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = \text{[illegible]}$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-1.6 $\quad T(x) = 12.277 + 1.629\ (x) - 0.128\ (x^2)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $\pm$ 1.4°C

VALORES EN $\underline{T(x) \pm E}$, EL 90.90%

Resultados de la ecuación (IV/64-1.6):

Temperatura media: $\overline{T} = 16.1^{\circ}C$

Desviación estándar: $\sigma(x) = \pm 1.53^{\circ}C$

Coeficiente de variación: $V(x) = 9.5\%$

Coeficiente de correlación: $r = 0.349$

Probabilidad de ocurrencia de los valores proporcionados

por (IV/64-1.6) = 74.6%

F O R M U L A E N S A Y A D A:

IV/65-2) $T(x) = a + bx + cx^2$

F O R M U L A S E M P L E A D A S:

2a) $a = \overline{T}(x) - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

2b) $b = \dfrac{\sum xT - \overline{T}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} - c\,\dfrac{\sum x^3 - \overline{x^2}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x}$

2c) $b = \dfrac{\sum x^2 T - \overline{T}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} - c\,\dfrac{\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2}$

2d) $E = \pm\sqrt{\dfrac{\sum T^2 - (a\sum T + b\sum xT + c\sum x^2 T)}{N}}$

2e) $\sigma(x) = \pm\sqrt{\dfrac{\sum T^2}{N} - \left(\dfrac{\sum T}{N}\right)^2}$

2f) $V(x) = \dfrac{\sigma(x)}{\overline{T}(x)}$

2g) $r = +\sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{T(x)}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas medias ($\overline{T}$) mensuales de 1965.

$N = 12$ $\qquad \overline{T}(x) = 16.225$ $\qquad \sum T(x) = 194.70$

$\sum x = 78$ $\qquad \bar{x} = 6.5$ $\qquad \sum xT = 1317$

$\sum x^2 = 650$ $\qquad \overline{x^2} = 54.2$ $\qquad \sum x^2 T = 11061$

$\sum T^2 = 3205$

$$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 143$$

$$\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2} \sum x = 1859$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2 = 25502$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 13, \qquad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 13.718$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-2.6) $\quad T(x) = 10.370 + 1.868 (x) - 0.116 (x^2).$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 0.9^\circ C$

VALORES EN; $\underline{T(x) \pm E}$, EL 75%

Resultados de la ecuación: (IV/65-2.6)

Temperatura media: $\overline{T} = 16.1^\circ C$

Desviación estándar: $\sigma(x) = \pm 2.3^\circ C$

Coeficiente de variación: $V(x) = 0.144 = 14.4\%$

Coeficiente de correlación: $r = 0.930$

Probabilidad de ocurrencia de los valores proporcionados

por: (IV/65-2.6) = 73.6%

F O R M U L A   E N S A Y A D A:

IV/65-3) $\quad T(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

F O R M U L A   E M P L E A D AS:

3a) $\quad a = \overline{T}(x) - b\bar{x} - c\overline{x^2} - d\overline{x^3}$

3b) $\quad b = \frac{\sum xT - \overline{T}\sum x}{x^2 - \bar{x} \quad x} = c\frac{\sum x^3 - \overline{x^2}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} - d\frac{\sum x^4 - x^3\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x}$

3c) $\quad b = \frac{\sum x^2 T - \overline{T}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} - c\frac{\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} - d\frac{\sum x^5 - \overline{x^3}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2}$

3d) $\quad b = \frac{\sum x^3 T - \overline{T}\sum x^3}{\sum x^4 - \bar{x}\sum x^3} - c\frac{\sum x^5 - \overline{x^2}\sum x^3}{\sum x^4 - \bar{x}\sum x^3} - d\frac{\sum x^6 - \overline{x^3}\sum x^3}{\sum x^4 - \bar{x}\sum x^3}$

3e) $\quad E = \pm\sqrt{\frac{\sum T^2 - (a\sum T + b\sum xT + c\sum x^2 T + d\sum x^3)}{N}}$

3f) $\quad \sigma(x) = \pm\sqrt{\frac{\sum T^2}{N} - \left(\frac{\sum T}{N}\right)^2}$

3g) $\quad V(x) = \frac{\sigma(x)}{T(x)}$

3h) $\quad r = +\sqrt{1 - \left(\frac{E}{\sigma(x)}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas medias ($\overline{T}$) mensuales de 1965:

$N=12$	$\overline{T}(x) = 16.225$	$\sum T(x) = 194.70$
$\sum x = 78$	$\bar{x} = 6.5$	$\sum xT = 1317$
$\sum x^2 = 650$	$\overline{x^2} = 54.2$	$\sum x^2 T = 11061$
$\sum x^3 = 6084$	$\overline{x^3} = 507$	$\sum x^3 T = 105600$
		$\sum T^2 = 3205$

$$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 143$$

$$\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2} \sum x = 1859$$

$$\sum x^4 - \bar{x} \sum x^3 = \sum x^4 - \overline{x^3} \sum x = 21164$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2 = 25502$$

$$\sum x^5 - \overline{x^2} \sum x^3 = \sum x^5 - \overline{x^3} \sum x^2 = 301158$$

$$\sum x^6 - \overline{x^3} \sum x^3 = 3'651362$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 13, \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^3} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 148$$

$$\frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 13.718, \quad \frac{\sum x^5 - \overline{x^3} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 162$$

$$\frac{\sum x^5 - \overline{x^2} \sum x^3}{\sum x^4 - \bar{x} \sum x^3} = 14.230, \quad \frac{\sum x^6 - \overline{x^3} \sum x^3}{\sum x^4 - \bar{x} \sum x^3} = 173$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-3.13) $\quad T(x) = -0.618 + 10.407\ (x) - 1.695\ (x^2) + 0.081\ (x^3)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 3.4^{\circ}C$

La ecuación (IV/65-3.13) pronostica que la temperatura máxima ocurrirá en el mes de diciembre $(=20.1^{\circ}C)$, por esta razón se descarta.

F O R M U L A   E N S A Y A D A:

IV/64.65-4) $\quad T(x) = a + bx + cx^2$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S:

4a) $\quad a = \overline{T(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

4b) $\quad b = \dfrac{\Sigma\, xT - \bar{T}\,\Sigma\, x}{\Sigma\, x^2 - \bar{x}\,\Sigma\, x} - c\,\dfrac{\Sigma\, x^3 - \overline{x^2}\,\Sigma\, x}{\Sigma\, x^2 - \bar{x}\,\Sigma\, x}$

4c) $\quad b = \dfrac{\Sigma\, x^2 T - \bar{T}\,\Sigma\, x^2}{\Sigma\, x^3 - \bar{x}\,\Sigma\, x^2} - c\,\dfrac{\Sigma\, x^4 - \overline{x^2}\,\Sigma\, x^2}{\Sigma\, x^3 - \bar{x}\,\Sigma\, x^2}$

4d) $\quad E = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma\, T^2 - (a\,\Sigma\, T + b\,\Sigma\, xT + c\,\Sigma\, x^2 T)}{N}}$

4e) $\quad \sigma(x) = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma\, T^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma\, T}{N}\right)^2}$

4f) $\quad V(x) = \dfrac{\sigma(x)}{\overline{T(x)}}$

4g) $\quad r = +\sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma(x)}\right)^2}$

DATOS: Promedio de las temperaturas medias mensuales de los años de 1964 y 1965:

$N = 12$	$\overline{T(x)} = 16.054$	$\Sigma\, T = 192.65$
$\Sigma\, x = 78$	$\bar{x} = 6.5$	$\Sigma\, xT = 1292$
$\Sigma\, x^2 = 650$	$\overline{x^2} = 54.2$	$\Sigma\, x^2 T = 10782$
		$\Sigma\, T^2 = 3164$

$\Sigma\, x^2 - \bar{x}\,\Sigma\, x = 143$

$\Sigma\, x^3 - \bar{x}\,\Sigma\, x^2 = \Sigma\, x^3 - \overline{x^2}\,\Sigma\, x = 1859$

$$\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2 = 25502$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 13, \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 13.718$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64.65-4.6) $\qquad T(x) = 10.399 + 1.929\,(x) - 0.127\,(x^2)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm\ 2^{o}C$

VALORES EN: $\underline{T(x) \pm E}$, EL 100%

Resultados de la ecuación: (IV/64.65-4.6):

Temperatura media: $\overline{T}(x) = 16.058$

Desviación estándar: $\sigma(x) = \pm\ 1.7^{o}C$

Coeficiente de variación: $V(x) = 0.102 = 10.20\%$

Coeficiente de correlación: $r = 0.9997$

Probabilidad de ocurrencia de los valores proporcionados por (IV/64.65-4.6) = 64.2%

FORMULA ENSAYADA.

IV/64-5) $$T(x) = a + bx^{3/2} + cx^{5/2}$$

FORMULAS EMPLEADAS.

5a) $$a = \overline{T}(x) - b\,\overline{x^{3/2}} - c\,\overline{x^{5/2}}$$

5b) $$b = \frac{\sum x^{3/2} T - \overline{T}\sum x^{3/2}}{\sum x^{3} - \overline{x^{3/2}}\sum x^{3/2}} - c\,\frac{\sum x^{4} - \overline{x^{5/2}}\sum x^{3/2}}{\sum x^{3} - \overline{x^{3/2}}\sum x^{3/2}}$$

5c) $$b = \frac{\sum x^{5/2} T - \overline{T}\sum x^{5/2}}{\sum x^{4} - \overline{x^{3/2}}\sum x^{5/2}} - c\,\frac{\sum x^{5} - \overline{x^{5/2}}\sum x^{5/2}}{\sum x^{4} - \overline{x^{3/2}}\sum x^{5/2}}$$

5d) $$E = \pm\sqrt{\frac{\sum T^{2} - (a\sum T + b\sum x^{3/2}T + c\sum x^{5/2}T)}{N}}$$

5e) $$\sigma(x) = \pm\sqrt{\frac{\sum T^{2}}{N} - \left(\frac{\sum T}{N}\right)^{2}}$$

5f) $$V(x) = \frac{\sigma(x)}{\overline{T}(x)}$$

5g) $$Y = +\sqrt{1 - \left(\frac{E}{\sigma(x)}\right)^{2}}$$

DATOS: Temperaturas medias ($\overline{T}$) mensuales de 1964.

$N = 11$ $\qquad \overline{T}(x) = 16.163$ $\qquad \sum T(x) = 177.80$

$\sum x^{3/2} = 179$ $\qquad \overline{x^{3/2}} = 16.286$ $\qquad \sum x^{3/2} T = 2902$

$\sum x^{5/2} = 1470$ $\qquad \overline{x^{5/2}} = 133.7$ $\qquad \sum x^{5/2} T = 23503$

$\sum x^{3} = 4356$ $\qquad \overline{x^{3}} = 396$ $\qquad \sum T^{2}(x) = 2914$

$\sum x^{4} = 39974$ $\qquad \overline{x^{4}} = 3634$

$\sum x^{5} = 381876$ $\qquad \overline{x^{5}} = 34716$

$$\sum x^3 - \overline{x^{3/2}} \sum x^{3/2} = 1441.$$

$$\sum x^4 - \overline{x^{3/2}} \sum x^{5/2} = \sum x^4 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{3/2} = 16053$$

$$\sum x^5 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{5/2} = 185\ 431$$

$$\frac{\sum x^4 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{3/2}}{\sum x^3 - \overline{x^{3/2}} \sum x^{3/2}} = 11.142, \quad \frac{\sum x^5 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{5/2}}{\sum x^4 - \overline{x^{3/2}} \sum x^{5/2}} = 11.551$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-5.6) $\mathcal{T}(x) = 13.477 + 0.601 (x^{3/2}) - 0.054 (x^{5/2})$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1.5^{\circ}$ C

VALORES EN: $\mathcal{T}(x) \pm \epsilon$, EL 81.8%

Resultados de la ecuación: (IV/64-5.6).

Temperatura media: $\mathcal{T}(x) = 16.21$

Desviación estándar: $\sigma(x) = \pm 1.36$

Coeficiente de variación: $V(x) = 0.084$

Coeficiente de correlación: $r = 1.000$

Probabilidad de ocurrencia de los valores proporcionados por (IV/64-5.6)= 82.7%

F O R M U L A   E N S A Y A D A :

IV/65-6) $$T(x) = a + bx + c\, x^{3/2}$$

F O R M U L A   E M P L E A D AS:

6a) $$a = \overline{T(x)} - b\,\bar{x} - c\,\overline{x^{3/2}}$$

6b) $$b = \frac{\sum xT - \overline{T} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c\,\frac{\sum x^{5/2} - \overline{x^{3/2}} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$$

6c) $$b = \frac{\sum x^{3/2} T - \overline{T} \sum x^{3/2}}{\sum x^{5/2} - \bar{x} \sum x^{3/2}} - c\,\frac{\sum x^3 - \overline{x^{3/2}} \sum x^{3/2}}{\sum x^{5/2} - \bar{x} \sum x^{3/2}}$$

6d) $$E = \pm \sqrt{\frac{\sum T^2 - (a \sum T + b \sum xT + c \sum x^{3/2} T)}{N}}$$

6e) $$\sigma(x) = \pm \sqrt{\frac{\sum T^2}{N} - \left(\frac{\sum T}{N}\right)^2}$$

6f) $$V(x) = \frac{\sigma(x)}{\overline{T(x)}}$$

6g) $$r = + \sqrt{1 - \left(\frac{E}{\sigma(x)}\right)^2}$$

DATOS: Temperaturas medias (T) mensuales de 1965.

$N = 12$	$\overline{T(x)} = 16.225$	$\sum T(x) = 194.7$
$\sum x = 78$	$\bar{x} = 6.5$	$\sum xT = 1317$
$\sum x' = 221$	$\overline{x^{3/2}} = 18.394$	$\sum x^{3/2} = 3771$
$\sum x^2 = 650$	$\overline{x^2} = 54.2$	$\sum T^2(x) = 3205$

$$\sum x^{5/2} = 1968 \qquad \overline{x^{5/2}} = 164$$

$$\sum x^{3} = 6084 \qquad \overline{x^{3}} = 507$$

$$\sum x^{2} - \bar{x}\sum x = 143$$

$$\sum x^{5/2} - \overline{x^{3/2}}\sum x = \sum x^{5/2} - \bar{x} \sum x^{3/2} = 534$$

$$\sum x^{3} - \overline{x^{3/2}} \sum x^{3/2} = 2025$$

$$\frac{\sum x^{5/2} - \overline{x^{3/2}}\sum x}{\sum x^{2} - \bar{x} \sum x} = 3.731, \quad \frac{\sum x^{3} - \overline{x^{3/2}} \sum x^{3/2}}{\sum x^{5/2} - \bar{x} \sum x^{3/2}} = 3.795$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-6.6 $\quad T(x) = 13.428 + 0.651\ (x) - 0.078\ (x^{3/2})$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm\ 1.6^{o}C$

Esta ecuación pronostica la temperatura máxima para (x=31). Para que una ecuación de regresión satisfaga el problema -- que en esta Tesis se estudia, es condición necesaria y suficiente que el valor de la variable (x) sea mayor o igual - que 1, y menor o igual que 12: ($1 \leq x \leq 12$), por lo -- tanto la ecuación de regresión obtenida: (IV/65-6.6) se descarta por no cumplir la condición preanotada.

F O R M U L A   E N S A Y A D A:

IV/65-7) $\mathcal{T}(x) = a + bx + c\,x^{5/2}$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S.

7a) $a = \overline{\mathcal{T}(x)} - b\,\bar{x} - c\,\overline{x^{5/2}}$

7b) $b = \dfrac{\sum x\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} - c\,\dfrac{\sum x^{7/2} - \overline{x^{5/2}}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x}$

7c) $b = \dfrac{\sum x^{5/2}\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}}\sum x^{5/2}}{\sum x^{7/2} - \bar{x}\sum x^{5/2}} - c\,\dfrac{\sum x^5 - \overline{x^{5/2}}\sum x^{5/2}}{\sum x^{7/2} - \bar{x}\sum x^{5/2}}$

7d) $E = \pm\sqrt{\dfrac{\sum\mathcal{T} - (a\sum\mathcal{T} + b\sum x\mathcal{T} + c\sum x^{5/2}\mathcal{T})}{N}}$

7e) $\sigma(x) = \pm\sqrt{\dfrac{\sum\mathcal{T}^2}{N} - \left(\dfrac{\sum\mathcal{T}}{N}\right)^2}$

7f) $V(x) = \dfrac{\sigma(x)}{\overline{\mathcal{T}(x)}}$

7g) $r = +\sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma(x)}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas medias ($\mathcal{T}$) mensuales del año de 1965.

$N = ,12$ $\overline{\mathcal{T}(x)} = 16.225$ $\sum\mathcal{T}(x) = 194.7$

$\sum x = 78$ $\bar{x} = 6.5$ $\sum x\mathcal{T} = 1317$

$\sum x^2 = 650$ $\overline{x^2} = 54.2$

$\sum x^{5/2}=1968$ $\overline{x^{5/2}}= 164$ $\sum x^{5/2} \mathcal{T}= 33\ 455$

$\sum x^{7/2} = 19101$ $\overline{x^{7/2}} = 1592$ $\sum \mathcal{T}^2(x)=3285$

$\sum x^5=630\ 706$ $\overline{x^5} = 52559$

$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 143$

$\sum x^{7/2} - \overline{x^{5/2}} \sum x = \sum x^{7/2} - \bar{x} \sum x^{5/2} = 6309$

$\sum x^5 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{5/2} = 307\ 895$

$$\frac{\sum x^{7/2} - \overline{x^{5/2}} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 44,119, \quad \frac{\sum x^5 - \overline{x^{5/2}} \sum x^{5/2}}{\sum x^{7/2} - \bar{x} \sum x^{5/2}} = 48.803$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-7.6) $\mathcal{T}(x)= 10.816 + 1.463\ (x) - 0.025\ (x^{5/2})$

ERROR ESTANDAR DE ESTIMACION: $E = \pm\ 3.0^{o}C$

VALORES EN $\mathcal{T}(x) \pm E$, EL 100%

Resultados de la ecuación: (IV/65-7.6)

Temperaturas media: $\mathcal{T} = 16.224$

Desviación estándar: $\sigma(x) = 1.8^{o}C$

Coeficiente variación: $V(x)= 0.110$

Coeficiente correlación: $r = 0.9999$

Probabilidad de ocurrencia de los valores proporcionados

por: (IV/65-7.6) = 82.3%

F O R M U L A E N S A Y A D A

IV/64-9) $$\tau(s,t) = a + b\,(s) + c\,(t)$$

s= Salinidad agua del mar.

t= Temperatura ambiente.

$\tau(s,t)$ = Temperatura agua mar.

F O R M U L A S E M P L E A D A S:

9a) $$a = \overline{\tau(s,t)} - b\,\bar{s} - c\,\bar{t}$$

9b) $$b = \frac{\sum s.\tau - \bar{\tau}\sum s}{\sum s^2 - \bar{s}\sum s} - c\,\frac{\sum st - \bar{t}\sum s}{\sum s^2 - \bar{s}\sum s}$$

9c) $$b = \frac{\sum t.\tau - \bar{\tau}\sum t}{\sum st - \bar{s}\sum t} - c\,\frac{\sum t^2 - \bar{t}\sum t}{\sum st - \bar{s}\sum t}$$

9d) $$E = \pm\sqrt{\frac{\sum \tau^2 - (a\sum\tau + b\sum s.\tau + c\sum t.\tau)}{N}}$$

DATOS: Una muestra de 10 temperaturas del mes de febrero 1964.

$N = 10$	$\bar{\tau} = 14.44$	$\sum \tau(s,t) = 144.4$
$\sum s = 345.5$	$\bar{s} = 34.55$	$\sum s.\tau = 4989.4$
$\sum t = 140.4$	$\bar{t} = 14.04$	$\sum t\tau = 2036.2$
$\sum s.t = 4849.4$		$\sum \tau^2 = 2089$

$\Sigma s^2 = 11937.5$

$\Sigma t^2 = 2020.3$

$$\Sigma s^2 - \bar{s}\,\Sigma s = 0.425$$

$$\Sigma t^2 - \bar{t}\,\Sigma t = 49.124$$

$$\Sigma st - \bar{t}\,\Sigma s = \Sigma st - \bar{s}\,\Sigma t = -1.46$$

$$\frac{\Sigma st - \bar{t}\,\Sigma s}{\Sigma s^2 - \bar{s}\,\Sigma s} = -3.435, \quad \frac{\Sigma t^2 - \bar{t}\,\Sigma t}{\Sigma st - \bar{s}\,\Sigma t} = -33.647$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-9.6) $\tau_{cs}(s,t) = 1.638\ (s) + 0.229\ (t) - 45.368$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1^{\circ}C$

FORMULA ENSAYADA.

IV/64-9.6) $\tau(s,t) = a + b\,(s) + c\,(t)$

FORMULAS EMPLEADAS:

9a) $a = \bar{\tau} - b\bar{s} - c\bar{t}$

9b) $b = \dfrac{\Sigma s\tau - \bar{\tau}\,\Sigma s}{\Sigma s^2 - \bar{s}\,\Sigma s} - c\,\dfrac{\Sigma st - \bar{t}\,\Sigma s}{\Sigma s^2 - \bar{s}\,\Sigma s}$

9c) $b = \dfrac{\Sigma t\tau - \bar{\tau}\,\Sigma t}{\Sigma st - \bar{s}\,\Sigma t} - c\,\dfrac{\Sigma t^2 - \bar{t}\,\Sigma t}{\Sigma st - \bar{s}\,\Sigma t}$

9d) $e = \pm\sqrt{\dfrac{\Sigma\tau^2 - [a\,\Sigma\tau + b\,\Sigma s\tau + c\,\Sigma t\tau]}{N}}$

DATOS: Una muestra de 10 temperaturas del mes de febrero

de 1964:

$N = 10$ $\bar{\tau} = 14.44$ $\Sigma\tau = 144.40$

$\Sigma s = 345.50$ $\bar{s} = 34.55$ $\Sigma s\tau = 4989.38$

$\Sigma t = 140.40$ $\bar{t} = 14.04$ $\Sigma t\tau = 2036.23$

$\Sigma\tau^2 = 2088.98$

$\Sigma st = 4849.36$

$\Sigma s^2 = 11937.45$

$\Sigma t^2 = 2020.34$

$\Sigma s^2 - \bar{s}\,\Sigma s = 0.425$, $\Sigma t^2 - \bar{t}\,\Sigma t = 49.124$

$\Sigma st - \bar{t}\,\Sigma s = -1.460.$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-9.6) $$\tau(s,t) = 1.638\,(s) + 0.229\,(t) - 45.368$$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1$

VALORES EN $\tau(s,t) \pm E$, EL 100%

FORMULA ENSAYADA.

IV/64.10) $$\tau(s,t) = a + b\,(s) + c\,(t)$$

FORMULA EMPLEADAS:

a) $$a = \bar{\tau} - b\,\bar{s} - c\,\bar{t}$$

b) $$b = \frac{\sum s\tau - \bar{\tau}\sum s}{s^2 - \bar{s}\sum s} - c\,\frac{\sum st - \bar{t}\sum s}{\sum s^2 - \bar{s}\sum s}$$

c) $$b = \frac{\sum t\tau - \bar{\tau}\sum t}{\sum st - \bar{s}\sum t} - c\,\frac{\sum t^2 - \bar{t}\sum}{\sum st - \bar{s}\sum t}$$

d) $$e = \pm\sqrt{\frac{\sum \tau^2 - (a\sum \tau + b\sum s\tau + c\sum t\tau)}{N}}$$

DATOS: Una muestra de veinte promedios semanales de 1964.

$N = 20$	$\bar{\tau} = 16.505$	$\sum \tau = 330.10$
$\sum s = 688.40$	$\bar{s} = 34.420$	$\sum s\tau = 11367.05$
$\sum t = 325.40$	$\bar{t} = 16.270$	$\sum t\tau = 5459.53$
		$\sum \tau^2 = 5521.89$

$\sum st = 11207.25$

$\sum s^2 = 23695.69$

$\sum t^2 = 5452.20$

$\sum s^2 - \bar{s} \sum s = 0.962, \quad \sum t^2 - \bar{t} \sum t = 157.942$

$\sum st - \bar{t} \sum s = \sum st - \bar{s} \sum t = 6.982$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-10.6) $\tau(s,t) = 1.658\ (s) + 0.489\ (t) - 48.519$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION:

$e = \pm 1.1$ valores en $\tau(s,t) \pm e$, el 75%

Tomando una muestra aleatoria de 80 temperaturas del año de 1965, se obtuvieron los resultados siguientes:

a) valores en: $\tau(s,e) \pm 1.1$, el 71.3%

b) valores en: $\tau(s,e) \pm 2.0$, el 91.3%

F O R M U L A   E N S A Y A D A:

IV/64-10) $\tau(s,t) = a + b\,(s) + c\,(t)$

s= Salinidad agua del mar.

t= Temperatura ambiente.

$\tau(s,t)$ = Temperatura agua mar.

F O R M U L A S   E M P L E A D A S:

10a) $$a = \overline{\tau(s,t)} - b\bar{s} - c\bar{t}$$

10b) $$b = \frac{\Sigma s.\tau - \bar{\tau}\Sigma s}{s^2 - \bar{s}\quad s} - c\,\frac{\Sigma st - \bar{t}\,\Sigma s}{s^2 - \bar{s}\quad s}$$

10c) $$b = \frac{\Sigma t.\tau - \bar{\tau}\Sigma t}{st - \bar{s}\quad t} - c\,\frac{\Sigma t^2 - \bar{t}\,\Sigma t}{\Sigma st - \bar{s}\,\Sigma t}$$

10d) $$E = \pm\sqrt{\frac{\Sigma \tau^2 - (a\,\Sigma\tau + b\,\Sigma s.\tau + c\,\Sigma t.\tau)}{N}}$$

DATOS: Una muestra de 20 tomas de los promedios semanales del año 1964:

N= 20	$\overline{\tau(s,t)}$= 16.505	$\Sigma\tau$= 330.10
Σs= 688.40	$\bar{s}$ = 34.42	$\Sigma s\tau$= 11367
Σt= 325.40	$\bar{t}$ = 16.270	$\Sigma t.\tau$= 5459.5
Σst= 11207.3		$\Sigma\tau^2$ = 5521.9
Σs^2= 23695.7		
Σt^2= 5452.5		

$$\sum s^2 - \bar{s} \sum s = 0.962$$

$$\sum t^2 - \bar{t} \sum t = 157.942$$

$$\sum st - \bar{t} \sum s = \sum st - \bar{s} \sum t = 6.982$$

$$\frac{\sum st - \bar{t} \sum s}{\sum s^2 - \bar{s} \sum s} = 7.258, \quad \frac{\sum t^2 - \bar{t} \sum t}{\sum st - \bar{s} \sum t} = 22.621$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-10.6) $\tau(s,t) = 1.658\ (s) + 0.489\ (t) - 48.519$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1\,^{o}C$

F O R M U L A   E N S A Y A D A :

IV/65-11) $\overline{T}_M(x) \quad a + bx + cx^2$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S :

11a) $a = \overline{T}_M(x) - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

11b) $b = \dfrac{\sum x T_M - \overline{T}_M \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c\,\dfrac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$

11c) $b = \dfrac{\sum x^2 T_M - \overline{T}_M \sum x}{\sum x^3 - \bar{x}\; x^2} - c\,\dfrac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2}$

11d) $E = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2 (a \sum T_M + b \sum x T_M + c \sum x^2 T_M)}{N}}$

11e) $\sigma_T(x) = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2}{N} - \left(\dfrac{\sum T_M}{N}\right)^2}$

11f) $V_T(x) = \dfrac{\sigma_T(x)}{\overline{T}_M(x)}$

11g) $r = + \sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas mínimas (T_M) mensuales en el año

1965.

$N=12$	$\overline{T}_M(x) = 14.36$	$\sum T_M(x) = 172{,}4$
$\sum x = 78$	$\bar{x} = 6.5$	$\sum x T_M = 1174$
$\sum x^2 = 650$	$\overline{x^2} = 54.2$	$\sum x^2 T_M = 9905$
		$\sum T_M^2 = 2531$

$$\sum x^2 - \bar{x}\sum x = 143$$

$$\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2}\sum x = 1859$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2 = 25502$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} = 13; \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} = 13.718$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-11.6) $\overline{T}_M(x) = 8.648 + 1.171\,(x) - 0.107\,(x^2)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1.4^{\circ}C$

VALORES EN: $\underline{\overline{T}_M(x) \pm E}$, EL 91.6%

PRONOSTICOS:

Valor minimo = $10.3^{\circ}C$

Valor maximo = $16.0^{\circ}C$

Valor medio = $14.4^{\circ}C$

Desviación estándar = 1.79

Coeficiente de variación: $V_T = 0.124$

Coeficiente de correlación: $r = 0.626$

Probabilidad de ocurrencia de los pronosticos: 80.5%

F O R M U L A   E N S A Y A D A :

$$\text{IV/64-12)} \quad T_M(x) = a + bx + cx^2$$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S :

12a) $a = \overline{T_M(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

12b) $b = \dfrac{\sum x\, T_M - \overline{T_M} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c\, \dfrac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$

12c) $b = \dfrac{\sum x^2 T_M - \overline{T_M} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} - c\, \dfrac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2}$

12d) $E = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2 - (a \sum T_M + b \sum x\, T_M + c \sum x^2 T_M)}{N}}$

12e) $\sigma_T(x) = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2}{N} - \left(\dfrac{\sum T_M}{N}\right)^2}$

12f) $V_T(x) = \dfrac{\sigma_T(x)}{T_M(\bar{x})}$

12g) $r = + \sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas máximas (T_M) mensuales en el año 1964.

$N = 11$	$\overline{T_M}(x) = 18.3$	$\sum T_M(x) = 200.8$
$\sum x = 66$	$\bar{x} = 6$	$\sum x\, T_M = 1208$
$\sum x^2 = 506$	$\overline{x^2} = 46$	$\sum x^2 T_M = 9104$
		$\sum T_M^2 = 3709$

$$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 110$$

$$\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2} \sum x = 1320$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2 = 16698$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 12, \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 12.650$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-12.6) $$T_M(x) = 13.516 + 2.208\,(x) - 0.184\,(x^2)$$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1^\circ C$

VALORES EN $T_M(x) \pm E$, EL 86.3%

PRONOSTICOS:

Valor minimo: $15.5^\circ C$

Valor máximo: $20.1^\circ C$

Valor medio: $18.3^\circ C$

Desviación estándar: $\sigma_T = \pm 1.65$

Coeficiente de variación: $V_T = 0.09$

Coeficiente de correlación: $r = 0.796$

Probabilidad de ocurrencia de los pronosticos: 81.8%

F O R M U L A   E N S A Y A D A :

IV/65-13) $\overline{T_M}(x) = a + bx + cx^2$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S :

13a) $a = \overline{T_M}(x) - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

13b) $b = \dfrac{\sum x T_M - \overline{T_M} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c\,\dfrac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$

13c) $b = \dfrac{\sum x^2 \overline{T_M} - \overline{T_M} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} - c\,\dfrac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^5 - \bar{x} \sum x^2}$

13d) $E = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2 - (a \sum T_M + b \sum x T_M + c \sum x^2 T_M)}{N}}$

13e) $\sigma_T(x) = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2}{N} - \left(\dfrac{\sum T_M}{N}\right)^2}$

13f) $V_T(x) = \dfrac{\sigma_T(x)}{\overline{T_M}(x)}$

13g) $= + \sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas maximas (T_M) mensuales en el año 1965.

$N=12$ | $\overline{T_M}(x) = 17.9$ | $\sum T_M(x) = 215.2$

$\sum x = 78$ | $\bar{x} = 6.5$ | $\sum x T_M = 1450$

$\sum x^2 = 650$ | $\overline{x^2} = 54.2$ | $\sum x^2 T_M = 12176$

$\sum T_M^2 = 3901$

$$\sum x^2 - \bar{x}\sum x = 143$$

$$\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2}\sum x = 1859$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2 = 25502$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2}\sum x}{\sum x^2 - \bar{x}\sum x} = 13, \qquad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2}\sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x}\sum x^2} = 13.718$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/65-13.6) $\overline{T_M}(x) = 11.881 + 1.910\,(x) - 0.118\,(x^2)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACION: $E = \pm 1.0^{C}$

VALORES EN $\overline{T_M}(x) \pm E$, EL 87.5%

PRONOSTICOS:

Valores mínimo: 13.7°C

Valor máximo: 19.6°C

Valor medio: 17.8°C

Desviación estándar: ± 1.8

Coeficiente de variación: $V/\bar{T} = 0.102$

Coeficiente de correlación: $r = 0.830$

Probabilidad de ocurrencia de los pronosticos: 83.0%

F O R M U L A   E N S A Y A D A :

IV/64-14) $\quad T_M(x) = a + bx + cx^2$

F O R M U L A S   E M P L E A D A S :

14a) $\quad a = \overline{T_M(x)} - b\bar{x} - c\overline{x^2}$

14b) $\quad b = \dfrac{\sum x T_M - \overline{T_M} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} - c \dfrac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x}$

14c) $\quad b = \dfrac{\sum x^2 T_M - \overline{T_M} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} - c \dfrac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2}$

14d) $\quad E = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2 - (a \sum T_M + b \sum x T_M + c \sum x^2 T_M)}{N}}$

14e) $\quad \sigma_T(x) = \pm \sqrt{\dfrac{\sum T_M^2}{N} - \left(\dfrac{\sum T_M}{N}\right)^2}$

14f) $\quad V_T(x) = \dfrac{\sigma_T(x)}{T_M(x)}$

14g) $\quad r = + \sqrt{1 - \left(\dfrac{E}{\sigma}\right)^2}$

DATOS: Temperaturas mínimas (T_M) mensuales en el año 1964.

$N = 11$ $\quad \overline{T_M}(x) = 14.42$ $\quad \sum T_M(x) = 158.7$

$\sum x = 66$ $\quad \bar{x} = 6$ $\quad \sum x T_M = 960$

$\sum x^2 = 506$ $\quad \overline{x^2} = 46$ $\quad \sum x^2 T_M = 7275$

$\sum T_M^2 = 2326$

$\sum x^2 - \bar{x} \sum x = 110$

$$\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2 = \sum x^3 - \overline{x^2} \sum x = 1320$$

$$\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2 = 16698$$

$$\frac{\sum x^3 - \overline{x^2} \sum x}{\sum x^2 - \bar{x} \sum x} = 12, \quad \frac{\sum x^4 - \overline{x^2} \sum x^2}{\sum x^3 - \bar{x} \sum x^2} = 12.650$$

ECUACION DE REGRESION OBTENIDA:

IV/64-14.6) $\overline{T_M}(x) = 10.288 + 1.762\,(x) - 0.140\,(x^2)$

ERROR ESTANDAR ESTIMACIÓN: $E = \pm 1.4^{\circ}C$

VALORES EN $\underline{\overline{T_M}(x) \pm E}$, EL 77.27%

PRONOSTICOS:

Valor mínimo: 11.9°C

Valor máximo: 15.8°C

Valor medio: 14.4°C

Desviación estándar: $\sigma_T = \pm 1.36$

Coeficiente de variación: $V_T = 0.094$

Coeficiente de correlación: $r = 0.9996$

Probabilidad de ocurrencia de los pronósticos: 81.6%

FB	1	14.6	14.6	14.6	212.3
MR	2	14.9	29.8	59.5	220.8
AB	3	15.7	47.1	141.5	247.1
MY	4	15.0	60.0	240.0	225.0
JN	5	15.5	77.5	388.5	241.5
JL	6	18.5	111.0	664.9	341.1
AG	7	19.7	138.0	966.3	388.9
SP	8	17.8	142.8	1142.4	328.6
OC	9	18.0	162.1	1458.8	324.4
NV	10	14.6	146.1	1461.0	213.5
DC	11	13.5	148.0	1627.5	180.9
Σ Σ	66	177.8	1077.0	8165.0	2914.0

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:
(IV/65-2.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X.\bar{T}$	$X^2 . \bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	167.7
FB	2	13.1	26.2	52.4	171.6
MR	3	14.8	44.3	132.8	217.6
AB	4	16.3	65.0	260.2	264.4
MY	5	16.6	83.0	415.0	275.6
JN	6	15.6	93.4	560.5	242.4
JL	7	17.5	122.2	855.5	304.9
AG	8	19.5	155.6	1244.8	378.3
SP	9	18.3	164.3	1478.3	333.1
OC	10	18.4	183.6	1836.0	337.1
NV	11	16.8	185.6	2091.3	284.6
DC	12	15.1	181.0	2171.5	227.4
Σ Σ	78	194.7	1317.0	11061.2	3204.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/65-3.13)

MES	X	$\bar{T}$	$X.\bar{T}$	$X^2.\bar{T}$	$X^3.\bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	13.0	167.7
FB	2	13.1	26.2	52.4	104.8	171.6
MR	3	14.8	44.3	132.8	398.3	217.6
AB	4	16.3	65.0	260.2	1040.6	264.4
MY	5	16.6	83.0	415.0	1975.0	275.6
JN	6	15.6	93.4	560.5	3363.1	242.4
JL	7	17.5	122.2	855.5	5988.8	304.9
AG	8	19.5	155.6	1244.8	9958.4	378.3
SP	9	18.3	164.3	1478.3	13304.3	333.1
OC	10	18.4	183.6	1836.0	18360.0	337.1
NV	11	16.9	185.6	2091.3	24495.2	284.6
DC	12	15.1	181.0	2171.5	26058.2	227.4
Σ	78	194.7	1317.1	11061.2	105059.7	3204.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64.65-4.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X.\bar{T}$	$X^2.\bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	167.7
FB	2	13.8	27.6	55.3	191.3
MR	3	14.8	44.4	133.2	219.0
AB	4	16.0	64.0	255.8	255.7
MY	5	15.8	79.0	395.0	249.6
JN	6	15.6	93.3	559.8	241.8
JL	7	18.0	125.7	880.0	322.6
AG	8	19.5	156.2	1249.9	381.4
SP	9	18.1	162.5	1462.1	325.8
OC	10	18.2	181.8	1818.0	330.5
NV	11	15.7	173.1	1904.5	247.8
DC	12	14.3	171.2	2054.9	203.6
Σ Σ	78	192.7	1291.9	10781.5	3163.8

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64.-5.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X^{3/2} . \bar{T}$	$X^{5/2} . \bar{T}$	$\bar{T}^2$
FB	1	14.6	14.6	14.6	212.3
MR	2	14.9	42.0	84.1	220.8
AB	3	15.7	81.7	245.1	247.1
MY	4	15.0	120.0	480.0	225.0
JN	5	15.5	173.7	868.7	241.5
JL	6	18.5	171.5	1628.7	341.1
AG	7	19.7	365.2	2556.5	388.9
SP	8	17.9	404.0	3231.6	318.6
OC	9	18.0	486.3	4376.4	324.4
NV	10	14.6	462.0	4619.7	213.6
DC	11	13.5	480.7	5397.2	180.9
Σ Σ	66	177.8	2901.6	23502.5	2914.1

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/65-6.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X.\bar{T}$	$X^{3/2}.\bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	167.8
FB	2	13,1	26.2	37.1	171.6
MR	3	14.8	44.3	76.6	217.6
AB	4	16.3	65.0	130.1	264.4
MY	5	16.6	83.0	186.3	275.6
JN	6	15.6	93.4	228.9	242.4
JL	7	17.5	122.2	323.6	304.9
AG	8	19.5	155.6	440.2	378.3
SP	9	18.3	164.3	492.8	333.1
OC	10	18.4	183.6	590.5	337.1
NV	11	16.9	185.6	625.4	284.6
DC	12	15.1	181.0	626.9	227.4
$\Sigma\Sigma$	78	194.7	1317.1	3771.0	3204.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/65-7.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X.\bar{T}$	$X^{5/2}.\bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	167.8
FB	2	13.1	26.2	74.1	171.6
MR	3	14.8	44.3	230.0	217.6
AB	4	16.3	65.0	520.3	264.4
MY	5	16.6	83.0	927.9	275.6
JN	6	15.6	93.4	1373.0	242.4
JL	7	17.5	122.2	2263.5	304.9
AG	8	19.5	155.6	3591.2	378.3
SP	9	18.3	164.3	4439.8	333.1
OC	10	18.4	183.6	5805.4	337.1
NV	11	16.9	185.6	6769.6	284.6
DC	12	15.1	181.0	7522.5	227.4
$\Sigma\ \Sigma$	78	194.7	1317.1	33455.3	3204.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/65-8.6)

MES	X	$\bar{T}$	$X^{3/2} \cdot \bar{T}$	$X^{5/2} \cdot \bar{T}$	$\bar{T}^2$
EN	1	13.0	13.0	13.0	167.7
FB	2	13.1	37.1	74.1	171.6
MR	3	14.8	76.6	230.0	217.6
AB	4	16.3	130.1	520.3	264.4
MY	5	16.6	186.3	929.9	275.6
JN	6	15.6	228.9	1373.0	242.4
JL	7	17.5	323.4	2263.5	304.9
AG	8	19.5	440.2	3521.2	378.3
SP	9	18.3	492.8	4434.8	333.1
OC	10	18.4	590.5	5805.4	337.1
NV	11	16.9	625.4	6769.6	284.6
DC	12	15.1	626.9	7522.5	227.4
Σ	78	194.7	3771.0	33455.3	3204.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64-9.6)

S	T	τ	ST	T^2	S^2	$S\tau$	τ^2
34.2	18.5	14.9	632.7	342.3	1169.4	509.6	222.0
34.4	14.0	13.8	481.6	196.0	1183.4	474.7	190.4
34.4	14.2	13.9	488.5	201.6	1183.4	478.2	193.2
34.5	12.5	14.8	431.3	156.3	1190.3	510.6	219.1
34.5	13.8	14.5	476.1	190.4	1190.3	500.3	210.3
34.5	15.5	15.0	534.8	240.3	1190.3	517.5	225.0
34.6	9.5	13.3	328.7	90.3	1197.2	460.2	176.9
34.7	12.5	14.2	433.8	156.3	1204.1	492.7	201.6
34.7	14.9	14.5	517.0	222.0	1209.1	503.2	210.3
35.0	15.0	15.5	525.0	225.0	1225.0	542.5	240.3
345.5	140.4	144.4	4849.4	2020.3	11937.5	4989.4	2089.0

$T \cdot \tau$
275.7
193.2
197.4
185.0
200.1
232.5
126.4
177.5
216.1
232.5
2036.2

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64-10.6)

S	T	τ_o	ST	T^2	S^2	S τ_o	T. τ_o
34.1	14.5	15.7	494.5	210.3	1162.8	535.4	227.7
34.2	11.0	13.0		121.0			143.0
	13.1	15.2		171.6			199.1
	14.1	15.7	1306.4	198.8	3508.9	1501.4	221.4
34.3	14.6	15.2		213.2			221.9
	14.9	14.5		222.0			216.1
	15.6	14.8		243.4			230.9
	16.4	14.6	2109.5	268.9	4705.9	2027.1	239.4
34.4	12.2	16.2		148.8			197.6
	13.9	15.9		193.2			221.0
	14.8	15.3		219.0			226.4
	19.3	19.5		372.5			376.4
	19.5	18.3		380.3			356.9
	21.5	18.6	3481.3	462.3	7100.2	3570.7	399.9
34.5	16.5	14.8		272.3			244.2
	18.7	19.8	1214.4	349.7	2380.5	1193.7	370.3
34.6	17.5	17.2	605.5	306.3	1197.2	595.1	301.0
34.7	20.7	18.9	718.3	428.5	1204.1	655.8	391.2
34.8	17.8	18.5	619.4	316.8	1211.0	643.8	329.3
35.0	18.8	18.4	658.0	353.4	1225.0	644.0	345.9
688.4	325.4	330.1	11207.3	5452.2	23695.7	11367.1	5459.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/65-11.6)

MES	X	Tm	X.Tm	X^2.Tm	T^2m
EN	1	11.0	11.0	11.0	121.0
FB	2	10.0	20.0	40.0	100.0
MR	3	13.5	40.5	121.5	182.3
AB	4	15.0	60.0	240.0	225.0
MY	5	14.8	70.0	350.0	219.0
JN	6	13.2	79.2	475.2	174.2
JL	7	16.0	112.0	784.0	256.0
AG	8	17.0	136.0	1088.0	289.0
SP	9	16.2	145.8	1312.2	262.4
OC	10	17.0	170.0	1700.0	289.0
NV	11	15.2	167.2	1839.2	231.0
DC	12	13.5	162.0	1944.0	182.3
$\Sigma\Sigma$	78	172.4	1173.7	9905.1	2531.3

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64-12.6)

MES	X	$Tm^{(x)}$	X.Tm	X^2.Tm	Tm^2
FB	1	15.5	15.5	15.5	240.3
MR	2	18.0	36.0	72.0	324.0
AB	3	17.9	53.7	161.1	320.4
MY	4	17.0	68.0	272.0	289.0
JN	5	20.0	100.0	500.0	400.0
JL	6	21.0	126.0	756.0	441.0
AG	7	20.5	143.5	1004.5	420.3
SP	8	19.5	156.0	1248.0	380.3
OC	9	19.8	178.2	1603.8	392.0
NV	10	16.8	168.0	1680.0	282.2
DC	11	14.8	162.8	1790.8	219.0
Σ	66	200.8	1207.7	9103.7	3708.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION: (IV/65-13.6)

MES	X	Tm(x)	X.Tm	X^2.Tm	Tm^2
EN	1	15.0	15.0	15.0	225.0
FB	2	14.8	29.6	57.2	219.0
MR	3	16.0	48.0	144.0	256.0
AB	4	18.0	72.0	296.0	324.0
MY	5	18.5	92.5	462.5	342.3
JN	6	17.8	106.8	640.8	316.8
JL	7	18.8	131.6	921.2	353.4
AG	8	20.8	166.4	1331.2	432.6
SP	9	20.0	180.0	1620.0	400.0
OC	10	20.0	200.0	2000.0	400.0
NV	11	18.5	203.5	2238.5	342.3
DC	12	17.0	204.0	2448.0	289.0
Σ	78	215.2	1449.4	12176.4	3900.5

TABLA AUXILIAR PARA OBTENER LA ECUACION DE REGRESION:

(IV/64-14.6)

MES	X	Tm	X.Tm	X^2.Tm	Tm^2
FB	1	13.3	13.3	13.3	176.9
MR	2	13.0	26.0	52.0	169.0
AB	3	14.5	43.5	130.5	210.3
MY	4	13.5	54.0	216.0	182.3
JN	5	13.0	65.0	325.0	169.0
JL	6	16.5	99.0	594.0	272.3
AG	7	18.0	126.0	882.0	324.0
SP	8	16.0	128.0	1024.0	256.0
OC	9	16.0	144.0	1296.0	256.0
NV	10	12.9	129.0	1290.0	166.4
DC	11	12.0	132.0	1452.0	144.0
Σ	66	158.7	959.8	7274.8	2326.1

$$(S,T) = 1.638\ (S) + 0.229\ (T) - 45.368$$

τ	S	T	S.T	T^2	S^2	S.τ	τ^2
13.3	34.6	9.5	328.70	90.25	1197.16	460.18	176.89
13.8	34.4	14.0	481.60	196.00	1183.36	474.72	190.44
13.9	34.4	14.2	488.48	201.64	1183.36	478.16	193.21
14.2	34.7	12.5	433.75	156.25	1204.09	492.74	201.64
14.5	34.7	14.9	517.03	222.01	1204.09	503.15	210.25
14.5	34.5	13.8	476.10	190.44	1190.25	500.25	210.25
14.8	34.5	12.5	431.25	156.25	1190.25	510.60	219.04
14.9	34.2	18.5	632.70	342.25	1169.64	509.58	222.01
15.0	34.5	15.5	534.75	240.25	1190.25	517.50	225.00
15.5	35.0	15.0	525.00	225.00	1225.00	542.50	240.25
Σ 144.4	5.5	140.4	4849.36	2020.34	11937.45	4989.38	2088.98

τ = Temperatura del agua del mar.

S = Salinidad.

T = Temperatura ambiente.

S.T = Producto salinidad temperatura ambiente.

T^2 = Cuadrado de la temperatura ambiente.

S^2 = Cuadrado de la salinidad.

S.τ = Producto salinidad temperatura agua mar.

τ^2 = Temperatura agua mar al cuadrado.

CONCLUSIONES.

1:- Las temperaturas medias mensuales (TMEM) ascienden del mes de enero al mes de agosto y de aquí hasta el de diciembre decrecen: en otras palabras: Existe un máximo para las TMEM que ocurre en el mes de agosto.

2:- La ecuación de regresión: (IV/65-8.6) es la que describe con mayor aproximación el fenómeno de la variabilidad de las TMEM del agua de mar de la zona eulitorial de El Sauzal, Baja California.

3:- Conjeturo que las TMEM se encuentran en una faja de $\pm 2^{o}$ C con respecto a la ecuación de regresión: (IV/65-8.6).

4.- Es incorrecto construir cartas de control para la media de las TMEM, debido a la forma de su comportamiento (parabólico) en el curso de un año.

5:- El comportamiento de las temperaturas mínimas mensuales (TMIM) es muy diferente al de las TMEM. En el año de 1964 la mínima minimorum ocurrió en el mes de diciembre y en el año de 1965 ocurrió en el mes de febrero.

6:- El mínimo de las TMEM ocurrió en el año de 1964 en el mes de diciembre y en el año de 1965 en el mes de enero.

7:- El máximo de las TMIM ocurrió en el mes de agosto para los años de 1964 y 1965, al igual que el máximo de las TMEM.

8:- La elaboración de cartas de control para la amplitud o rango (R) de temperaturas es recomendable.

9:- Solamente un punto (R=7) está fuera de control, tratándose de la amplitud o rango (R).

10:- El hecho de que el comportamiento de las TMIM sea diferente-y más irregular que el de las TMEM, confirma la afirmación asentada en el curso de este trabajo en el sentido de que la media es la medida más adecuada y conveniente de utilizar.

Las publicaciones que se revisaron en el periodo comprendido de 1961 a septiembre de 1973, son los siguientes:

1) De la American Mathematical Society:

   a) Bulletin of the AMS

   b) Proccedings of the AMS.

   c) Transactions of the AMS.

   d) Mathematics of computation.

2) De The Society for Industrial and Applied Mathematics:

   a) SIAM Journal on Control.

   b) SIAM Journal on Applied, Mathematics.

   c) SIAM Journal on Numerical Analopis.

   d) SIAM Journal on Mathematical Analysis.

   e) Theory of Probability and its Applications.

3) De the Mathematical Associattion of America.

   a) The Amercian Mathematical Monthly.

   b) Mathematics Magazine.

4) De la American Statistics Associattion:

   a) Journal of ASA.

   b) Annals of Mathematics Statisties.

Averill E.W.
Elements of Statisties.
John Wiley & Sons Inc.
1972.

Anderson T.W.
The statistical analysis of the Time Series.
Wiley- Interscience.
1971.

Blair Morris M.

Elementary Statistres.

Henry Holf and Company.

1944.

Burnisside William (1952,1927)

Theory of Probability.

Dover Publications Inc.

1959.

Blum Julius R. & Rosenblatt Judahi.

Pro ability and Statisties.

W.B. Saunders Co.

1970.

Berman Simeon M.

Mathenatical Statisties.

Intext Educational Publishers.

1971.

Croxton Frederick E.

Elementary Statistics.

Dover Publications Inc.

1960.

Cramer H.

Mathematical Methodos of Statisties.

Princeton University Press.

1946

Carlson Roger.

Introduction to Probability and Statistics.

Holden- Bay, Inc.

1970.

DRAPER N.H & SMITHH.

Applied Regression Analgsis

John Wiley

1966.

DOOB J.L.

What is a Martingale?

American Mathematical Monthly.

1971.

FELLER WILLIAM (1907, 1970)

An Introduction to Probability Theory and its Applications.-

Vol J.

John Wiley & Sons Inc.

1950.

FREUND JOHN E.

Modern Elementary Statisties.

Poentice- Hall Inc.

1970.

GNEDENKO B.V. & KHINCHIN A.YA.

An Elementary Introduction to the Theory of Probability.

W.H. Freeman and company.

1961.

GRENANDER ULF

Computational Probability and Statisties.

SIAM Review, Vol 15, No. 1,

1973.

GRAYBILL F.A.

An Introduction to Linear Statistical Models.

Mc Grano-Hill.

1961.

GNEDENKO B.U.

The Theory of Probability.

Chehea Co.

1962.

HALTON JOHN. N.

A Retrospective and Propective Survey of the Monte Carlo Method.

SIAM Review. Vol 12, No.1

1970.

HANNAN E.J.

Time Series Analgsis.

John Wiley & Sons.

1960.

HOGG ROBERT V.& GRAIG ALLEN T.

Introduction to Mathematical Statistics.

Mac. Millan Co.

1970.

HOEL PAUL G.

Elementary Statistics.

John Wiley & Sons.

1971.

JOYCE D.C.

Survey of Extrapolation Processes is Numerical Analgsis.

SIAM Review, Vol 13, No.4

1971.

JOHN PETER W.M.

Statistical Design and Analgsis of Experiments.

Mac Millan Co.

1970.

KHINCHIN A.I.

Mathematical Foundations of Information Theory Dover

Publications Inc.

1957.

KAC MARK

Statistical Independence in Probability the Carus Mathematical Monographs (12)

1959.

Lomeli Cerezo Maria Guadalupe.

Nociones sobre las Cartas de Control.

Revista Matematica.

1961.

LINDSAY ROBERT B.

Introduction to Physical Statistics.

Dover Publications Inc.

1941.

LINNIK [illegible]

Method of Least Squares and Principles of the Theory of Observations.

Pergamon Press.

1961.

LINDGREN B.W. & Mc ELRAIH G.W.

Introduction to Proba[illegible]ity and Statistic[illegible].

Mac Millan Co.

1969.

LARSON HAROLD J.

Introduction to the Theory of Statisties.

John Wiley & Sons. Inc.

1972.

MILLER I[illegible]IN & FREUND JOHN E.

Probability and Statistics.

Prentice- Hall Inc.

1965.

MANN H.B.

Analgsis and Design of Experiments.

Dover Publications Inc.

1949.

MOOD ALEXANDER M.

Introduction to the Theory of Statistics.

Mc Graw -Hill Co.

1970.

PLACRETT R.L.

Principles of Segression Analgsis.

Clarenden Press.

1960.

RIETE HENRY L.

Mathematical Statistics.

The Carus Mathematical Monographs (3)

1927.

SCHERFE H.

The Analgsis of Variance.

John Wiley

1959.

SEBER G.A.F.

The Linear Hypothesis: A General Theory.

Charles Griffin.

1966.

SHREIDER Yu A.

Method of Statistical Testing.

Elsevier Inc.

1964.

USPENSKY J.V.

Introduction to Mathematical Probability.

Mc. Graw-Hill.

1937.

Valdez Gámez Remigio.

Algunos Aspectos de la Teoria de la Probabilidad en el desarrollo de la Técnica y la Ciencia.

Revista Matemática.

1960.

VALDES GAMEZ REMIGIO.

Camino Casuales en la Teoría de la Probabilidad.

Revista Matemática.

1964.

VILLEGAS C.

On the least squars estimation of a linear relation.

Bol. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo.

1962.

VARGA R.S.

Matrix Iterative Analgsis.

Prentice-Hall.

1962.

WILKINSON J.H.

Modern Error Analgsis.

SIAM Roview, Vol 13, No.4

1971.

WIENER NORBERT (1894,1964)

a) The Fourier Integral and certain of its Applications.
Dover Pub. Inc.
1959.

b) The Ergodic Theorem.
Duke Mathematics Journal
1939.

c) La Teoría de la Extrapolación Estadistica.
Boletin Sociedad Matematica Mexicana.
1945.

d) Extrapolación, interpolatión and smoothing of stationary
time-series.
M.I.I. Press.
1949.

e) The Theory of Production.
Mc Graw-Hill Co.
1956.

WHITTLE P.
Prediction and segulation by Linear
Least-Square Methods.
The English Universities Press.
1963.

WILKS S.S.

Mathematical Statistics.

John Wiley

1962.

WOLD H.

Nonlinear estimation by interating least squares procedures.

John Wiley.

1966.

WALD A.

Sequential Analgsis.

John Wiley.

1950.

WALPOLE RONALD E.

Introduction to Statistics.

Mac Millan Co.

1968.

ZUBIETA RUSSI FRANCISCO.

Sobre el método de los Mínimos Cuadrados.

Revista Matemática.

1964.