

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

**La Estructura Orbital de Galaxias Triaxiales
Formadas por Colapso sin Disipación**

Tesis profesional que como requisito
parcial para obtener el título de

Físico

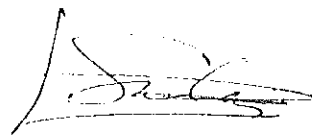
presenta:

Héctor Manuel Velázquez

Aprobado por:


Dr. Luis A. Aguilar Chiu
Presidente del Jurado


Dr. Donald H. Galván M.
Sinodal


Dr. Luis Salas Casales
Secretario

*A mi esposa Norma Olivia
por su comprensión y apoyo*

*A mi abuelo
por haberme educado*

*A todos mis amigos
por brindarme su amistad*

RESUMEN

Se analiza la configuración final de equilibrio para siete colapsos sin disipación, originalmente esféricos y sin rotación neta. Los contornos de isodensidad muestran la formación de una barra central para el caso de los colapsos más "fríos"; muestran además que, la forma de "caja" y de "disco" de las isofotas coexisten en un mismo sistema. La fotometría revela desviaciones del perfil de de Vaucouleurs cuando se hace a lo largo de los ejes menor e intermedio del sistema final, y sólo, se ajusta muy bien para el caso de observaciones a lo largo del eje mayor. Los colapsos sin disipación muestran un efecto de segregación dependiendo de la energía cinética inicial de que disponga la protogalaxia original.

También se analiza la estructura orbital de cada uno de los siete colapsos. Se encuentra que los colapsos más "fríos" están dominados por órbitas de caja, de tubos Z y de tubos X, en este orden. Sólomente los modelos del "elipsoide perfecto" de Statler que minimizan los tubos X y los tubos Z guardan un grado de similaridad con la estructura orbital encontrada. Se aprecia una tendencia hacia una configuración orbital única con una dispersión alrededor de ésta. Este resultado abre el camino para restringir la construcción de modelos teóricos para sistemas triaxiales.

INDICE

Introducción	1
I. ELEMENTOS DE ASTRONOMIA GALACTICA	
§I.1 La Estructura a Gran Escala del Universo	3
§I.2 La Secuencia de Hubble	6
§I.3 Las Galaxias	7
§I.4 Galaxias Elípticas	8
§I.5 Escalas de Tiempo en un Sistema Estelar	12
II. TEORIA POTENCIAL	
§II.1 Ley de Newton y el Potencial Gravitacional	16
§II.2 Condiciones a la Frontera y Funciones de Green	18
§II.3 La Ecuación de Laplace	23
§II.4 La Ecuación de Poisson	24
III. DINAMICA CLASICA	
§III.1 Dinámica de Lagrange	27
§III.2 Dinámica Hamiltoniana	30
§III.3 Dinámica de Hamilton-Jacobi	37
IV. MODELOS DINAMICOS PARA SISTEMAS TRIAXIALES	
§IV.1 Modelo Numérico: Método de Schwarzschild	41
§IV.2 Modelo Analítico: Potenciales de Stäckel	43
V. COLAPSOS SIN DISIPACION: EXPERIMENTOS NUMERICOS	
§V.1 Colapso con Disipación vs. Colapso sin Disipación	48
§V.2 Código de N-Cuerpos	51
§V.3 Sistema de Unidades	54
§V.4 Selección de las Condiciones Iniciales	55

§V.5 Límite de Validez de los Experimentos	56
§V.6 Descripción de los Experimentos	59
§V.7 Conclusiones	71

VI. ESTRUCTURA ORBITAL: EXPERIMENTOS NUMERICOS

§VI.1 Selección de las Condiciones Iniciales	72
§VI.2 Centrado del Centro de Expansión	72
§VI.3 Criterio para Clasificar Orbitas	74
§VI.4 Resultados Numéricos	74
§VI.5 Análisis de Resultados	76
§VI.6 Conclusiones	82

A. APENDICE A

§A.1 Coordenadas Curvilíneas	83
§A.2 Sistemas Particulares de Coordenadas	84

REFERENCIAS	95
-----------------------	----

INTRODUCCION

Hasta hace algunos años se consideraba que las galaxias elípticas eran sistemas estelares muy sencillos y se creía que su forma se debía a la rotación. Sin embargo, se ha encontrado que una importante fracción de galaxias elípticas presentan rotaciones muy bajas (Bertola & Capaccioli 1975, Illingworth 1977, Davies *et al.* 1983) y que la rotación no es la responsable de su forma. Binney (1978) propone que la forma de las galaxias elípticas está asociada a una dispersión anisotrópica de velocidades y, además, sugiere que se trata de sistemas triaxiales.

Por otra parte, hay evidencia observacional de que el ángulo de posición de las isofotas presenta una dependencia con el radio (Kormendy 1982, Jedrzejewski 1987). Este fenómeno se explica de una manera sencilla si se considera un modelo triaxial donde, las curvas de isodensidad presentan sus ejes principales alineados pero su razón de ejes cambia con el radio (Mihalas & Binney 1981).

Se han propuesto varios mecanismos para la formación de galaxias elípticas, dos de ellos son: (a) colapso disipativo (Larson 1969, 1974, Carlberg 1986, y más recientemente Katz 1991, 1992). En estos modelos se consideran procesos hidrodinámicos, debido a que involucran gas protogaláctico, y procesos de formación estelar. Sin embargo, sólo se trata de una descripción fenomenológica ya que no se conocen bien los procesos físicos que intervienen en la dinámica del gas ni en los procesos de formación estelar. (b) Colapso sin disipación. En este caso, se supone que en la protogalaxia se llevó a cabo un proceso de formación de estrellas bastante rápido el cual evita la formación de un disco (Sandage 1986). En simulaciones de N -cuerpos (van Albada 1982, McGlynn 1984, Aguilar & Merritt 1990) para colapsos fríos (caracterizados por un coeficiente virial $2T/W \ll 1$, donde T es la energía cinética del sistema y W su energía potencial) se encuentra que la galaxia formada por este mecanismo de colapso, reproduce el perfil de de Vaucouleurs y la configuración final resulta ser similar a la que presentan las galaxias elípticas.

Un análisis más a fondo pone de evidencia la complejidad de estos, aparentemente simples, sistemas estelares. Se ha encontrado la presencia de subestructuras internas que rotan diferencialmente, y a veces en sentido opuesto, con respecto al resto de la galaxia (Franx 1990), generalmente son asociados con procesos de canibalismo entre galaxias, una de baja luminosidad y otra de alta luminosidad, en los cuales el núcleo denso de la galaxia más pequeña sobrevive al campo de marea de la más grande y es arrastrado al núcleo de esta última a través de fricción dinámica (Balcells & Quinn 1984). Burkert (1990) encuentra estas subestructuras en sus simulaciones de colapso sin disipación. Asimismo, se observa en algunas galaxias elípticas la presencia de cascarones que también son asociados con procesos de fusiones (Quinn 1984). Sin embargo, Thomson (1991) obtienen el mismo

resultado a través de simulaciones de ondas de densidad inducidas en un disco delgado poblado por estrellas dinámicamente frías y por interacción con otra galaxia. Asimismo, se han encontrado desviaciones con respecto a elipses puras en las isofotas de las galaxias elípticas las cuales guardan información del camino evolutivo que han seguido (Nieto *et al.*, 1991). Otras observaciones parecen revelar la posibilidad de que exista un disco central pequeño (Capaccioli *et al.* 1989) y Rix & White (1990) hacen un estudio estadístico de la posibilidad de que tal disco sea observado y sus repercusiones en la dinámica de la galaxia.

Desde el punto de vista dinámico, se han desarrollado técnicas y modelos en equilibrio que asemejan algunas de las características observadas en las galaxias elípticas. En un trabajo pionero, Schwarzschild (1979) incorporó técnicas de programación lineal para construir el primer modelo triaxial en equilibrio. de Zeeuw (1985) introduce potenciales analíticos, llamados de Stäckel, para contruir modelos triaxiales. También, Merritt (1985) construye modelos esféricos, llamados modelos de Osikov-Merritt, con una distribución de velocidades anisotrópicas. Statler (1987) muestra que es posible construir cualquier modelo con la razón de ejes deseada. Aunque todos estos modelos están en equilibrio y son autoconsistentes dejan abierta la cuestión de si son estables o no.

En este trabajo se adopta un punto de vista diferente, partiremos de un posible proceso de formación (colapso sin disipación) de galaxias elípticas. Se hace una clasificación de las órbitas en la configuración en equilibrio resultante y se analizan las repercusiones que pueda tener la estructura orbital encontrada sobre los modelos que abundan en la literatura. Para hacer esto, este trabajo se a dividido en varios capítulos. El capítulo I proporciona algunos elementos de las propiedades de las galaxias y de la visión que se tiene actualmente del Universo. En II y III se incorporan, brevemente, algunos resultados de la teoría potencial y de la dinámica clásica. En el IV se presentan algunas propiedades del trabajo de Schwarzschild y de los potenciales de Stäckel. En el V se describen y analizan los colapsos sin disipación que se realizaron, se estudian las propiedades de las configuraciones resultantes y se presentan conclusiones sobre estos resultados. Finalmente, en el capítulo VI se presentan los resultados de la clasificación orbital de los colapsos y se discuten sus posibles repercusiones.

CAPITULO I

ELEMENTOS DE ASTRONOMIA GALACTICA

En este capítulo se proporcionan algunos elementos generales sobre la visión que se tiene actualmente del Universo. Se pone especial énfasis en las galaxias como elementos constitutivos y fundamentales en la estructura del Universo. Una buena parte del capítulo es utilizada para indicar algunas propiedades de las galaxias elípticas, sin pretender una recopilación completa y detallada sobre el tema. Al lector interesado en este parte se le recomienda el artículo de revisión de de Zeeuw & Franx (1992). Finalmente, se exponen las escalas de tiempo que indican manifiestan la importancia de las colisiones.

§I.1 La Estructura a Gran Escala del Universo

Desde la antigüedad el ser humano a sentido curiosidad por el Universo que lo rodea. A lo largo de la historia su concepción del Universo a sufrido algunos cambios que han resultado ser muy dramáticos. Por ejemplo, la visión geocéntrica del Universo que se tenía durante la Edad Media. Los trabajos de Copérnico, Galileo, Tycho Brahe y Kepler entre otros, condujeron a una concepción heliocéntrica en la que la Tierra dejaba de ser el centro del Universo y por lo tanto el hombre.

A mediados de este siglo, se hicieron importantes avances que cambiaron nuevamente, de manera radical, la visión del Universo. Se pasó de un Universo estático a uno dinámico y en expansión. Hubble (1929) descubrió que el Universo se expande de acuerdo a la ley

$$v_H = H_o R \quad (\text{I.1.1})$$

donde v_H es la velocidad de recesión aparente de una galaxia, R es su distancia, y H_o es la constante de Hubble. A esta ley, que relaciona la distancia con la velocidad de recesión de una galaxia, se le conoce como la **Ley de Hubble**. En la actualidad existe un gran debate en torno al valor de H_o que menudo se escribe como

$$H_o = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{I.1.2})$$

donde h se toma entre los valores 0.5 y 1 (1 Mpc = 3.26×10^6 años luz).

Otro importante resultado fue el descubrimiento de que las velocidades de recesión de las galaxias a lo largo de visual pueden obtenerse a partir del corrimiento al rojo (*i.e.* hacia longitudes de onda mayores) que sufren las líneas espectrales por efecto Doppler. Para corrimientos al rojo pequeños, que generalmente se denotan por z , se tiene que

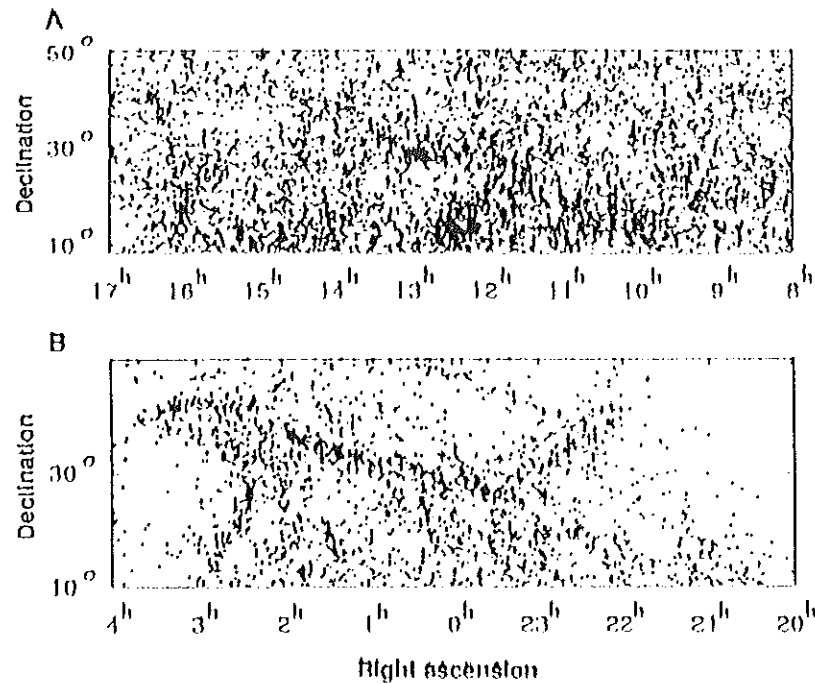


Fig. 1(a) Se muestra la distribución de galaxias para el hemisferio norte. Resaltan dos aglomeramientos de galaxias el cúmulo de Coma en 13^h y 28° y el cúmulo de Virgo en 12.5^h y 12.5° . **(b)** Distribución de galaxias para el hemisferio Sur. En la región entre 21^h y 3^h y entre 30° y 40° se distingue una banda llamada Perseo-Cisne (Zwicky *et al.* 1961-1968).

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_r}{\lambda_r} \simeq \frac{v}{c} \quad (\text{I.1.3})$$

donde λ_o es la longitud de onda medida en el laboratorio y λ_r es la longitud de onda observada.

Estos dos importantes resultados constituyen la base en la construcción de mapas de la distribución de galaxias en el Universo. La posición de una galaxia en estos mapas queda determinada por tres coordenadas: dos angulares, ascensión recta y declinación; y la otra esta dada por la velocidad aparente de recesión, cz , de la galaxia a lo largo de la visual. En la práctica, esta velocidad cz se ve "contaminada" por las velocidades peculiares de la galaxia. El origen de estas velocidades peculiares se debe a que la galaxia está sujeta a las fuerzas de gravedad de sus galaxias vecinas.

Un primer intento en la elaboración de catálogos fue realizado por Zwicky *et al.* (1961-1968). En la figura 1(a) y (b) se muestra la distribución de galaxias (magnitud aparente

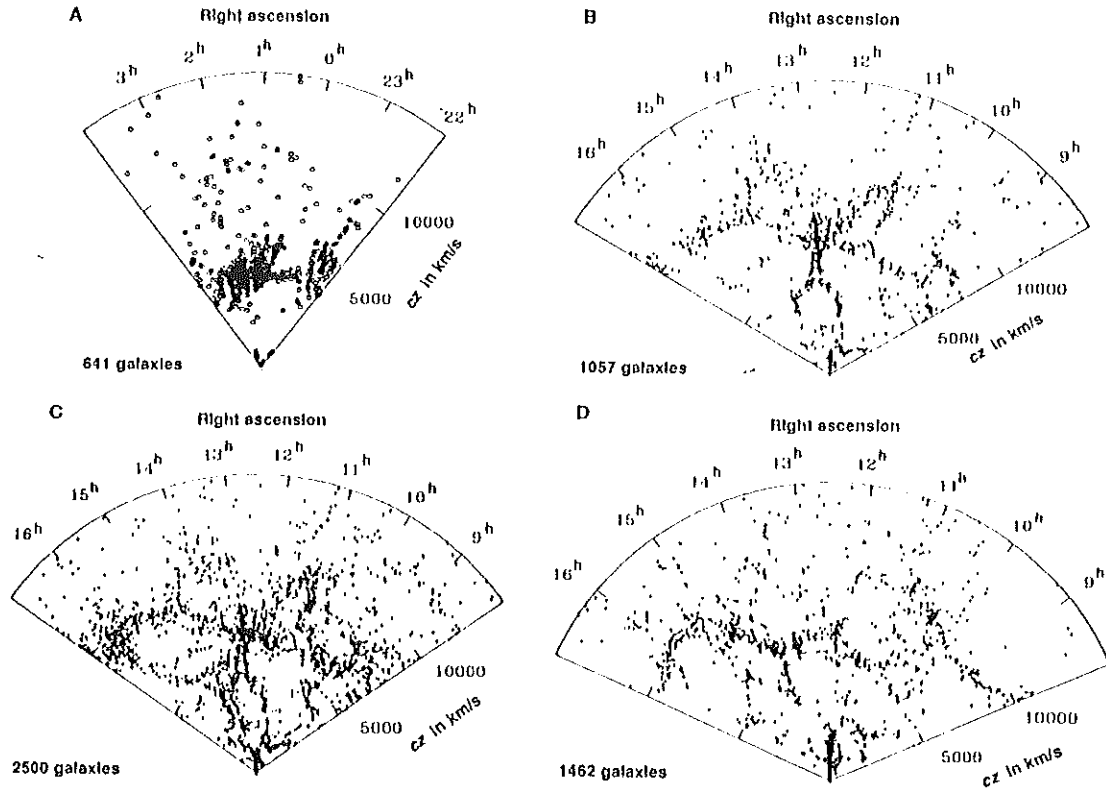


Fig. 2. (a) Distribución de galaxias en la región de Perseo-Cisne. Se observa un gran aglomeramiento en $cz = 5000 \text{ km s}^{-1}$. (b) Se presenta un mapa para 1057 galaxias con magnitud aparente ≤ 15.5 para declinaciones entre 26.5° y 32.5° . (c) Distribución de una muestra de 2500 galaxias en el intervalo 26.5° y 44.5° . Se distingue una gran estructura que cruza el mapa y es conocida como la "Gran Pared". (d) Distribución de galaxias para una muestra de 1462 galaxias. Se distingue en la parte inferior el cúmulo de Virgo. (Geller & Huchra 1989).

$\leq 15.7 \pm 0.2$) que se obtiene de estos Catálogos. Resaltan dos importantes estructuras: el cúmulo de Coma a 12^h y 28° y el cúmulo de Virgo a 12.5^h y 12.5° en la fig. 1(a).

En el presente, el Center for Astrophysics (CfA) está desarrollando un ambicioso plan para muestrear el cielo y obtener un mapa de la distribución de galaxias con magnitud aparente ≤ 15.5 (Geller, M. J. & Huchra, J. P. 1989 Science Vol. 246 pag. 897-903). De este muestreo se observa que el Universo está lejos de ser simple y homogéneo y que presenta una estructura mucho más compleja de lo que se creía hasta hace algunos años. La imagen actual se asemeja a la de una esponja donde el esqueleto representa la estructura filamentaria de los conglomerados de galaxias y los espacios vacíos los huecos que se presentan entre los filamentos (fig. 2). De esta distribución sobresale una estructura muy conspicua conocida como la *Gran Pared* que atraviesa el mapa de la fig. 2(c).

Se ha encontrado que el Universo se encuentra organizado de manera jerárquica mostrando varios niveles de complejidad: en un nivel superior se encuentran los cúmulos

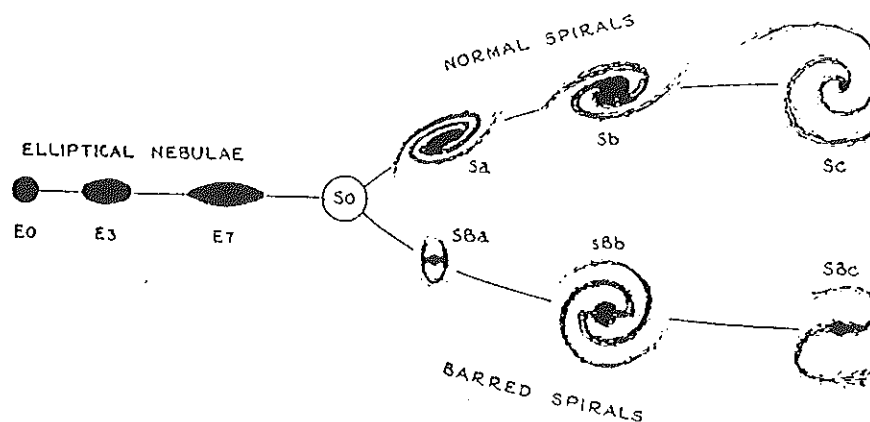


Fig. 3 Representación esquemática del diagrama de Hubble.

de galaxias que son aglomeraciones de entre 10^2 a 10^3 galaxias. Le siguen los grupos de galaxias que son del orden de 10 galaxias; las galaxias que en promedio presentan alrededor de 10^{11} estrellas; los cúmulos de estrellas que van de 10^3 a 10^5 estrellas; y finalmente, las estrellas binarias.

§1.2 La Secuencia de Hubble

Un primer intento por clasificar sistemáticamente las galaxias fue realizado por Hubble (1936). Su clasificación fue esencialmente taxonómica basándose en la apariencia morfológica de las galaxias. A pesar de la gran variedad de formas y tamaños, las galaxias fueron clasificadas en dos categorías principalmente: en galaxias elípticas con una apariencia elipsoidal y en galaxias espirales que se caracterizan por la presencia de brazos espirales (Fig. 3). La clasificación original de Hubble a sufrido subsecuentes refinamientos (Sandage 1961, de Vaucouleurs 1959) para incluir nuevas características que se observan, por ejemplo, la presencia de una barra central en algunas galaxias espirales, las dimensiones de los brazos espirales, el tamaño de los discos centrales, etc.

Este esquema de clasificación, aunque fenomenológico, ha resultado de gran utilidad ya que, galaxias que presentan características morfológicas similares, parecen presentar

procesos físicos similares, dando una idea de como ha ocurrido la evolución de los diferentes tipos de galaxias. Las tres principales diferencias en la secuencia de Hubble son:

- i. La presencia o ausencia de un bulbo central.
- ii. La presencia o ausencia de un disco.
- iii. La abundancia relativa de gas y estrellas jóvenes en el disco.

Actualmente, se está realizando investigación en la elaboración de un sistema de clasificación físico para superar algunas de las limitaciones que presenta el sistema morfológico de Hubble (Kormendy 1982).

§I.3 Las Galaxias

Se considera que el bloque fundamental en la comprensión de la estructura a gran escala del Universo es la *galaxia* ya que son objetos bien definidos que pueden ser observados a grandes distancias. A continuación se mencionan algunas propiedades de cada uno de los grupos de galaxias que aparecen en la secuencia de Hubble (Fig. 4).

Galaxias Lenticulares.

Se distinguen por la presencia de un disco muy conspicuo caracterizado por no contener gas, polvo, brazos espirales o estrellas jóvenes. El brillo superficial del disco sigue una ley exponencial dada por

$$I(R) = I_0 \exp\left(-\frac{R}{R_d}\right), \quad (\text{I.3.1})$$

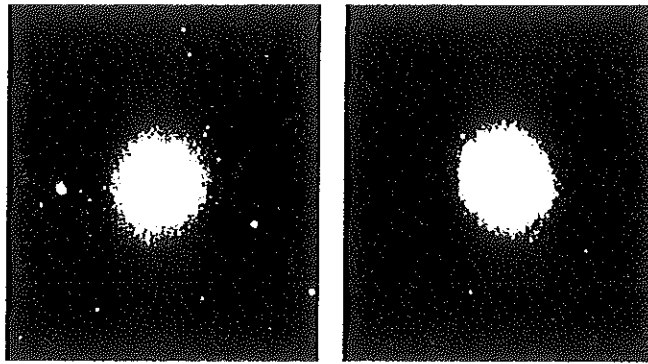
donde $R_d = 3.5 \pm 0.5$ kpc. Este tipo de galaxias son un tipo intermedio entre las galaxias elípticas y las galaxias espirales en la secuencia de Hubble.

Galaxias Espirales

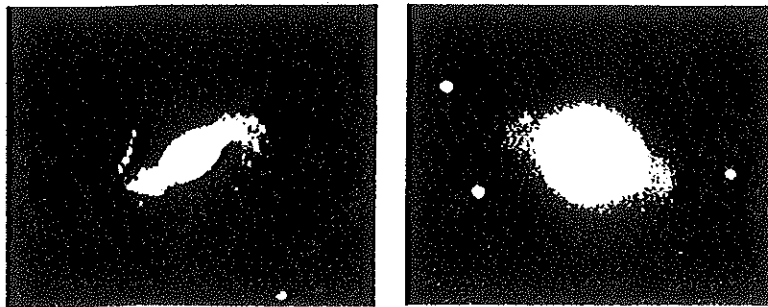
Al igual que las lenticulares presentan un disco pero se distinguen de estas por la presencia de una población de estrellas jóvenes (*i.e.* **Población I**), una gran cantidad de gas y polvo, y por la presencia de brazos espirales de diferentes formas y tamaños.

Este tipo de galaxias presentan dos importantes propiedades que tienen grandes repercusiones en astrofísica:

- i. Presentan una baja densidad ($\sim 10\%$) en cúmulos de galaxias de alta densidad y una alta densidad ($\sim 80\%$) en regiones de baja densidad. Toomre & Toomre (1972), Efstathiou & Silk (1983) y más recientemente, Vedell, H. *et. al.* (1990) han sugerido que una fracción de las galaxias elípticas tienen su origen en las fusiones de galaxias espirales en cúmulos con una alta densidad de galaxias.
- ii. La presencia de una curva de rotación plana independiente de la posición y mucho más allá de la parte visible de la galaxia sugiere la presencia de materia no visible conocida como **materia oscura**.



Ejemplos de galaxias elípticas



Ejemplos de galaxias barradas.

Fig. 4 Se muestran algunos ejemplos de los diferentes grupos de galaxias que aparecen en la secuencia de Hubble.

Galaxias Irregulares

Este grupo no presenta un patrón morfológico regular y bien definido. Se cree que algunas de estas galaxias han sufrido interacciones fuertes con galaxias vecinas más masivas. También se piensa que la irregularidad de su forma se debe a que presentan una dispersión de velocidades muy grande ~ 5 a 10 km s^{-1} (Aaronson & Olszewski 1987) comparada con la masa que tienen ($\sim 1 \times 10^5 < V^2 > M_{\odot}$) (i.e. con la velocidad de escape).

§1.4 Galaxias Elípticas

Estos sistemas estelares se caracterizan por ser compactos, lo que hizo creer, en un principio, que su dinámica y estructura interna son muy simples. Recientes observaciones han mostrado lo erróneo de esta idea. La presencia de una estructura muy compleja

(núcleos centrales, cascarones, rotación pequeña, etc.) han impulsado su estudio. A continuación se proporciona un breve resumen de las principales propiedades que se han observado.

La Forma de las Isofotas

Las galaxias elípticas se caracterizan por ser morfológicamente compactas y presentar isofotas bien definidas. La clasificación de este grupo se basa en la *elipticidad* que presentan las isofotas y se define como

$$\epsilon = 1 - \frac{a}{b}, \quad (1.4.1)$$

Generalmente, el tipo de galaxia elíptica se denota por En donde n está determinada por la razón de ejes $n = 10(1 - b/a)$ y corresponde a la isofota más brillante. Se observa que no hay galaxias elípticas más elongadas que la clase E7.

Recientes observaciones han demostrado que el ángulo de posición y la elipticidad de las isofotas dependen del radio (Jedrzejewski 1987, Mihalas & Binney 1981, Kormendy 1982) (*e.g.* NGC 1549 en la fig. 5).

Además, las isofotas presentan desviaciones de elipses perfectas (Franx 1990) que se analizan a través de expansiones en series de Fourier en el ángulo azimutal θ medido desde el eje mayor

$$I(\theta) = I_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(i\theta) + b_i \sin(i\theta)] \quad (1.4.2)$$

los dos primeros coeficientes se utilizan para ajustar el centro de la elipse, la elipticidad y el ángulo de posición, a_3 y b_3 indican si existe alguna tendencia hacia formas de "caja" ($a_4 > 0$) o de "disco" ($a_4 < 0$).

Esto a sugerido que la forma de las isofotas guarda memoria del proceso evolutivo que han seguido las galaxias elípticas y de las diferencias estructurales entre ellas. La forma de "disco" es asociada con procesos disipativos y las formas de "caja" están relacionados con procesos de fusiones o de acreción (Nieto 1988, Nieto, *et al.* 1991).

Propiedades Cinemáticas

Observaciones modernas utilizando CCD's han puesto de manifiesto la presencia de subestructuras centrales desacopladas cinemáticamente del resto de la galaxia. Estas regiones centrales resultan ser muy concentradas que giran mucho más rápido y, a veces, en sentido opuesto al resto de la galaxia (Kormendy 1984, 1987, Lauer 1985, Illingworth & Franx 1989). Los perfiles de rotación y dispersión a lo largo del eje mayor del núcleo de M31 se muestran en la fig. 6(a) y en la fig. 6(b) para el caso de IC 1459. Se han propuesto algunos modelos para explicar la formación de tal subestructura central: (a) La posible formación de un agujero negro debido a una gran concentración de masa. (b) La acreción o fusión de un compañero pequeño muy denso por una galaxia grande de baja densidad. En este modelo el núcleo de la galaxia pequeña podría sobrevivir al campo de marea y caer

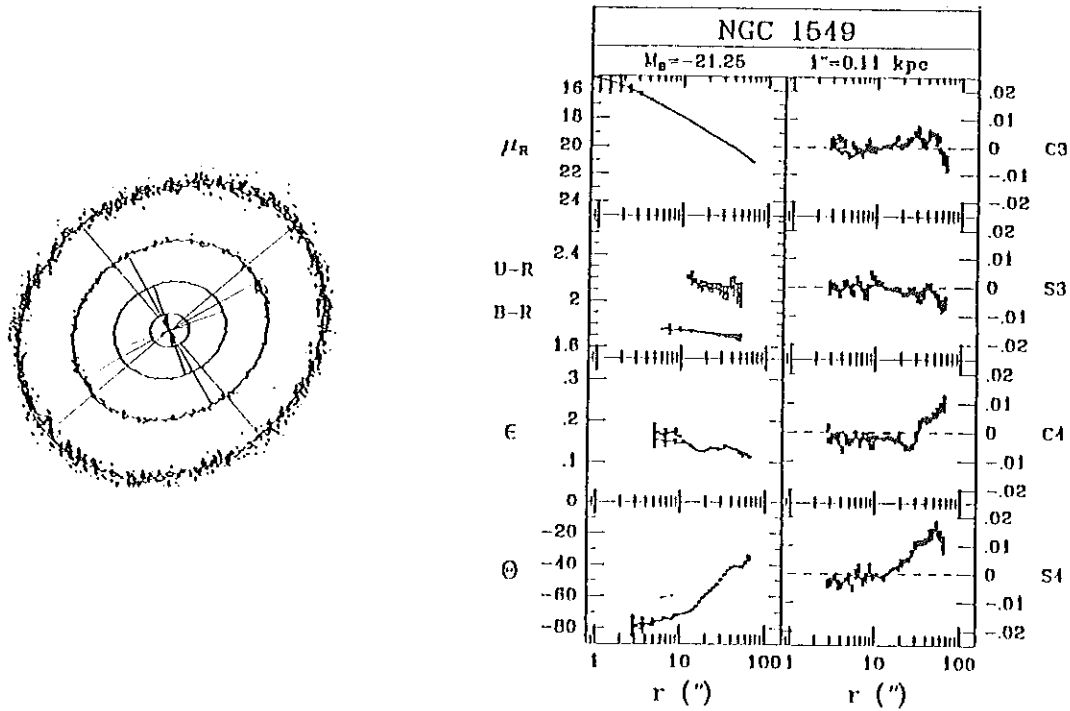


Fig. 5(a) Se muestran las isofotas para la galaxias elípticas NGC 1549. Las líneas que se observan corresponden a los ejes principales para cada una de las isofotas. (b) Se muestra el perfil de brillo, de color y, la dependencia de la elipticidad, del ángulo de posición de las isofotas y de los coeficientes de la expansión como función del radio para la galaxia NGC 1549 (tomado de Jedrzejewski 1987, Franx, *et al.* 1990).

al centro de la galaxia de baja densidad por fricción dinámica (Jedrzejewski & Schechter 1989). Simulaciones de N -cuerpos (Balcells & Quinn 1990) verifican este modelo. Sin embargo, en simulaciones de colapso sin disipación (Burkert 1990) obtiene la formación de un núcleo central denso con una distribución isotrópica de velocidades para gradientes de densidad pequeños.

A finales de la década pasada se creía que la forma de las galaxias elípticas se debía a la rotación. Bertola & Capaccioli (1975) y Illingworth (1977) encontraron que en realidad las galaxias elípticas rotan lentamente; demostrando que, es la anisotropía en la dispersión de velocidades, y no la rotación, la responsable del aplanamiento (véase fig. 6). Binney (1978) propone que las galaxias elípticas son en realidad elipsoides triaxiales. Davies *et al.* (1983) demostró que las galaxias elípticas con magnitudes $M_B > -20.5$ coinciden con la imagen de un modelo oblato isotrópico, mientras que, las galaxias elípticas más luminosas

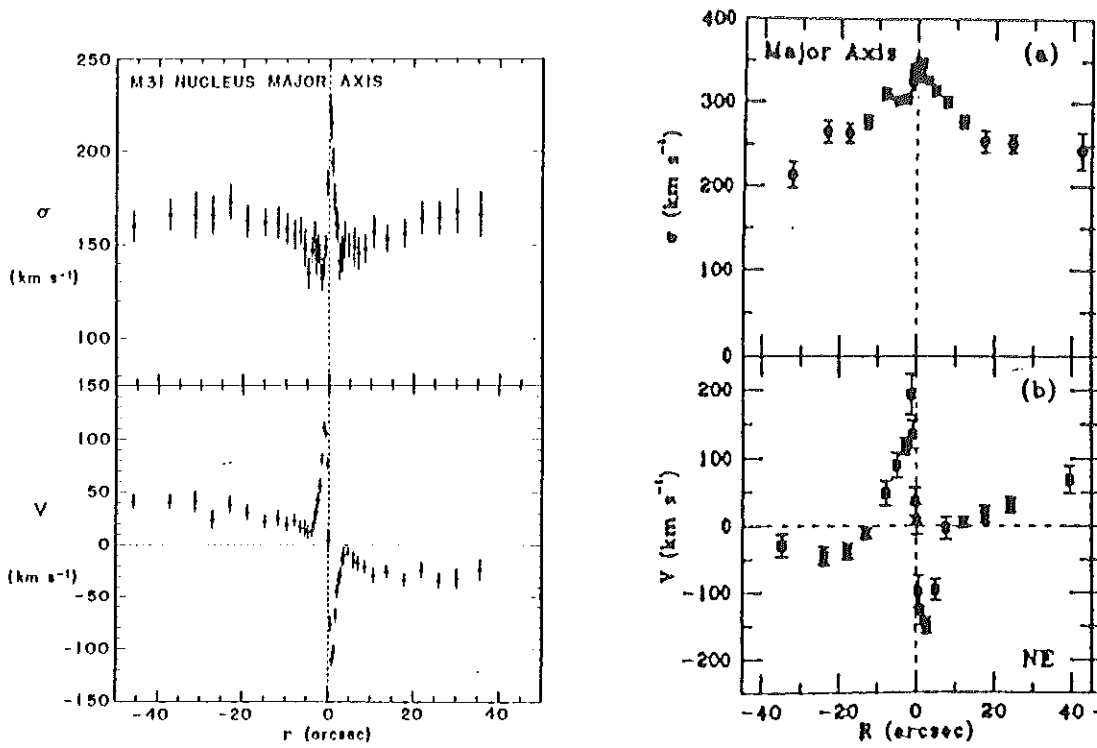


Fig. 6(a) En los perfiles de rotación y de brillo para M31 se aprecia que una región central muy conspicua entre $-4''$ y $4''$ que rota más rápidamente que el resto de la galaxia y que presenta velocidades de dispersión σ muy altas (Kormendy 1987). (b) Para el caso de IC 1459 se observa que el núcleo rota en dirección opuesta al resto del cuerpo de la galaxia alrededor del eje mayor (Franx & Illinworth 1990).

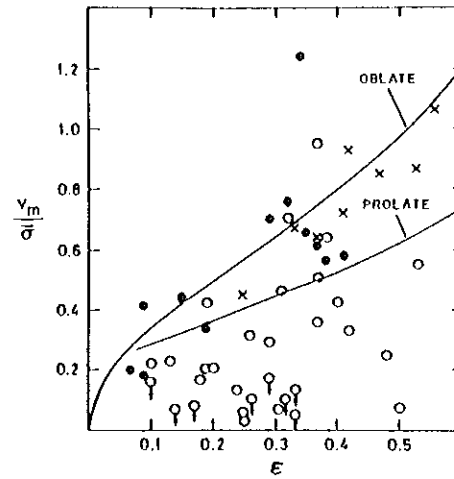


Fig. 7 En el diagrama $v_m/\sigma - \epsilon$ introducido por Binney (1978) se observa una clara relación entre la rotación, la dispersión de velocidades y la forma de una galaxia elíptica. Los círculos vacíos representan galaxias elípticas para $M_B < -20.5$, los círculos rellenos representan galaxias elípticas menos luminosas y las cruces bulbos de galaxias espirales (Devies *et al.*, 1983).

se alejan de este modelo (fig. 7).

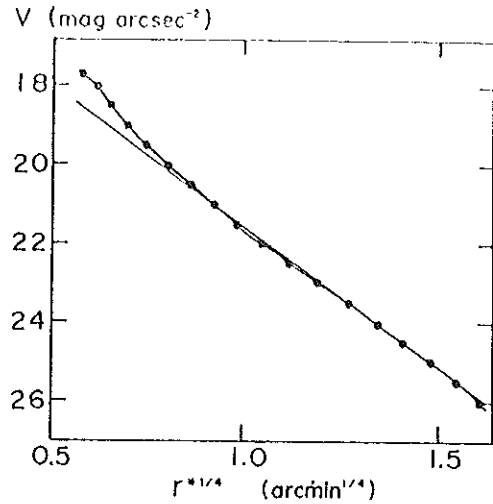
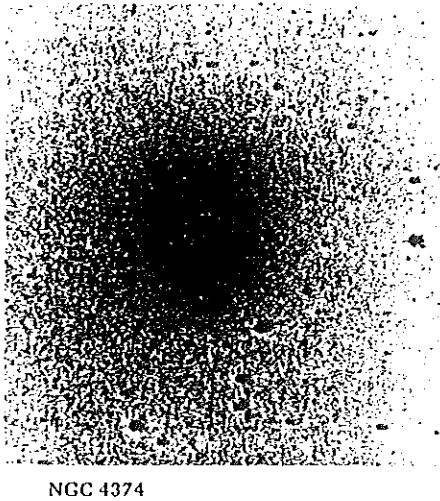


Fig. 8 El perfil de brillo de la galaxia elíptica NGC 4374 se ajusta muy bien a la ley $R^{1/4}$. (An Atlas of Selected Galaxies, Ed. Takase *et al.* (1984) pag. 37)

Ley de de Vaucouleurs o $R^{1/4}$

Empíricamente se ha encontrado (de Vaucouleurs, 1948) que el perfil de brillo superficial de una importante fracción de galaxias elípticas (Mihalas & Binney 1981) se ajusta muy bien a la ley

$$I(R) = I(R_e) \exp \left[-7.67 \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right], \quad (\text{I.3.2})$$

donde R_e , llamado *radio efectivo*, corresponde al radio de la isofota que contiene la mitad de la luminosidad total y $I(R_e)$ es el brillo superficial correspondiente a R_e . A este perfil se le conoce como **Ley de de Vaucouleurs** o como **Ley $R^{1/4}$** . En la fig. 8 se muestra el caso de la galaxia elíptica NGC 4374 y su perfil de brillo. Poveda *et al.* (1960), Young (1976) obtiene, para el intervalo $10^{-6} \leq R/R_e \leq 260$, la distribución de densidad para el caso de un sistema esférico que obedezca la ley $R^{1/4}$.

§1.5 Escalas de Tiempo en un Sistema Estelar

El estado dinámico de un sistema estelar puede caracterizarse por dos escalas de tiempo que permiten determinar la importancia de las colisiones. Estas escalas de tiempo dividen a los sistemas estelares en dos grandes categorías: *sistemas no colisionales* donde los efectos colisionales no son importantes y *sistemas colisionales* en donde las colisiones son importantes. Supóngase que se tiene un sistema de N partículas que interactúan gravitacionalmente. La dinámica de una partícula prueba en esta nube de partículas está determinada por (a) el potencial global del sistema que provoca que la partícula describa

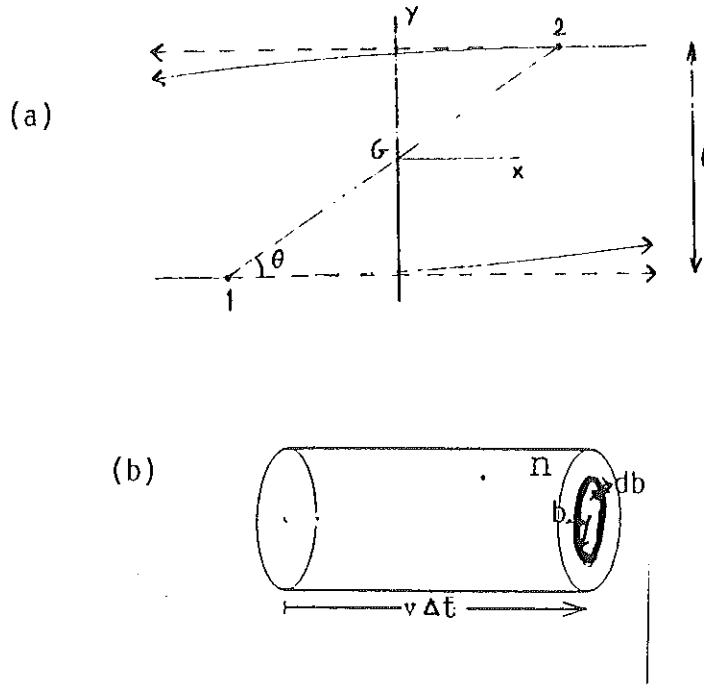


Fig. 9(a) Interacción binaria entre una partícula de prueba y una partícula del sistema de N partículas. (b) La probabilidad de que una partícula se encuentre entre b y $b + db$ en el intervalo de tiempo Δt corresponde a la sección del cilindro sombreada.

un movimiento suave y por; (b) las interacciones locales entre esta partícula prueba y sus vecinas, dando lugar a desviaciones del movimiento suave descrito por la partícula prueba. La derivación de las escalas de tiempo, que a continuación se presenta, está basada en la realizada por Hénon (1973).

Tiempo de relajamiento o tiempo colisional.

Esta escala de tiempo proporciona una medida de la importancia que tienen los encuentros entre vecinos cercanos en un sistema estelar. Para estimar cuantitativamente su valor consideremos primero la interacción de dos partículas (fig. 9.a). Supongamos que las partículas tienen la misma masa, y tomemos como origen el centro de masas, como b el parámetro de impacto (i.e. separación entre las partículas) y como V la velocidad relativa entre las partículas. El cambio en la velocidad de la partícula prueba está dado por la Segunda Ley de Newton

$$\Delta \mathbf{v}^{(1)} = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta [\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y] dt \quad (1.5.1)$$

Para determinar el impulso resultante sobre la partícula prueba debido a la presencia de la partícula 2 hacemos las siguientes simplificaciones: aproximamos la trayectoria real de la partícula prueba por una línea recta (línea punteada) y, además, seleccionamos el tiempo $t = 0$ como el tiempo al cual se tiene máximo acercamiento entre las partículas 1 y 2, suponiendo que siguen trayectorias rectilíneas. Bajo estas dos hipótesis se tiene que la

Tabla 1			
Sistema Estelar	N	$t_c \times 10^6$ años	$t_r \times 10^6$ años
Grupo estelar	≤ 10	≤ 1	≤ 1
Cúmulo abierto	10^3	1	10
Cúmulo globular	10^5	10	10^3
Nuestra galaxia	10^{11}	10^2	10^7
Grupos de galaxias	10	10^3	10^3
Cúmulos de galaxias	$10^2 - 10^3$	10^3	$\geq 10^4$

Tabla 1. Se muestran varios sistemas estelares con sus respectivos tiempos de relajamiento y de cruce. Se puede ver que para sistemas con un número de partículas grande (e.g. en galaxias), el efecto acumulativo de encuentros binarios no es determinante en la dinámica del sistema (Aguilar 1992).

*

posición de la partícula prueba está dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} V t, \\ x &= -b \cot \theta \end{aligned} \quad (I.5.2)$$

de donde se obtiene la relación

$$dt = \frac{b}{V \sin^2 \theta} d\theta, \quad (I.5.3)$$

Utilizando esta última expresión en la ecuación (I.5.1) se obtiene que

$$\Delta \mathbf{v}^{(1)} = \frac{2Gm}{bV} \hat{\mathbf{e}}_y \quad (I.5.4)$$

que implica que el cambio en la velocidad de la partícula prueba sólo está determinado por la componente de la fuerza perpendicular a la trayectoria de la partícula.

Para cuantificar el efecto neto de todas las partículas sobre las partículas prueba hacemos otra simplificación más: (a) la densidad de partículas por unidad de volumen, n , es constante. Consideremos un ensemble de sistemas "macroscópicamente" equivalentes (i.e. sujetos a la misma función de distribución). Estos ensembles son "microscópicamente" diferentes pues una partícula puede tener diferentes posiciones y velocidades en cada uno de los sistemas del ensemble.

Así, el segundo momento para el cambio en la velocidad que sufre la partícula prueba está dado por

$$\langle (\Delta \mathbf{v}^{(1)})^2 \rangle = \int (\Delta \mathbf{v}^{(1)})^2 f(b) db, \quad (1.5.5)$$

donde $f(b)db$ define la probabilidad de que ocurra un encuentro con una partícula del sistema con un parámetro de impacto entre b y $b + db$ durante el intervalo de tiempo Δt . De la fig. 9(b) se tiene que $f(b)db = 2\pi nbV\Delta t db$, luego

$$\langle (\Delta \mathbf{v}^{(1)})^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 nm^2 \Delta t}{V} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} \quad (1.5.6)$$

donde se ha asumido que V es el valor medio para los diferentes sistemas del ensemble. Físicamente se tiene que el valor máximo del parámetro de impacto corresponde al tamaño físico del sistema y su valor mínimo ocurre cuando la partícula prueba es deflectada de su trayectoria en 180° (i.e. $|\Delta \mathbf{v}^{(1)}| = V$) que corresponde a $b_{min} = 2Gm/V^2$; del Teorema Virial se tiene que $V^2 = GNm/2R$; luego

$$\langle (\Delta \mathbf{v}^{(1)})^2 \rangle = \frac{8\pi G^2 nm^2 \Delta t \ln(N/4)}{V} \quad (1.5.7)$$

El **tiempo de relajamiento**, t_r , se define como el tiempo necesario para que el cambio *rms* en velocidad, $\langle (\Delta \mathbf{v}^{(1)})^2 \rangle^{1/2}$, sea del orden de V (i.e. el tamaño de la nube en el espacio de velocidades de los cambios finales en la velocidad de la partícula prueba para los sistemas del ensemble sea del orden de V). Así, llegamos al importante resultado

$$t_r = \frac{V^3}{8\pi G^2 nm^2 \ln(N/4)} \quad (1.5.8)$$

Tiempo de Cruce o Tiempo Dinámico

Esta escala de tiempo proporciona información sobre los cambios globales que sufre la partícula prueba debido al potencial suavizado. El **tiempo de cruce**, t_c , se define como el tiempo que tarda la partícula prueba en atravesar el sistema a velocidad $V_{rms} = V$, es decir

$$t_c = \frac{R}{V}. \quad (1.5.9)$$

Nuevamente, del Teorema Virial se tiene que $t_c = GNm/2V^3$ y tomando $n \sim N/R^3$ se sigue

$$\frac{t_r}{t_c} \sim \frac{N}{32\pi \ln(N/4)}. \quad (1.5.10)$$

Esta relación indica que para sistemas con un número de partículas muy grande ($t_r \gg t_c$) luego, los efectos de encuentros locales no son significativos en la dinámica del sistema y que la parte que domina es la debida al potencial de todo el sistema (véase Tabla 1).

CAPITULO II

TEORIA POTENCIAL

§II.1 LEY DE NEWTON Y EL POTENCIAL GRAVITACIONAL

La ecuación de Laplace aparece en una gran variedad de problemas físicos a menudo en combinación con condiciones a la frontera. En general, una función que satisface esta ecuación se le llama *función armónica* y al estudio de estas funciones se le denomina *teoría potencial*.

Comenzemos considerando el campo de una fuente puntual, unitaria, localizada en el punto $\mathbf{x}'$. A esta fuente se encuentra asociado un potencial que se expresa de la siguiente manera (Jawson & Symm 1977)

$$g(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \quad (\text{II.1.1})$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de posición de un punto en el espacio donde se quiere determinar el potencial. Este potencial es una función continua de $\mathbf{x}$, diferenciable en todos los órdenes y además satisface la ecuación de Laplace†

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 g(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

en todas partes, excepto en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Así, g es una función armónica de $\mathbf{x}$ excluyendo el punto $\mathbf{x}'$. Es fácil ver que la función g es solución a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 g(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{II.1.3})$$

donde δ es la función delta de Dirac‡.

Para el caso de una distribución discreta de N fuentes puntuales, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ con vectores de posición $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N$ respectivamente, el potencial en $\mathbf{x}$ está dado por

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N g(\mathbf{x} | \mathbf{x}'_{\alpha}) \sigma_{\alpha}. \quad (\text{II.1.4})$$

† $\nabla_{\mathbf{x}}^2$ denota al operador $\sum_{i=1}^3 \partial^2 / \partial x_i^2$.

‡ $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ denota $\prod_{i=1}^3 \delta(x_i - x'_i)$. Para el caso de una dimensión la función δ de Dirac se define por las siguientes propiedades

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

donde $f(x)$ es una función arbitraria continua en $x=0$.

Nuevamente, $\phi(\mathbf{x})$ es una función armónica en todos los puntos excepto en $\mathbf{x} = \mathbf{x}'_\alpha$, con $\alpha = 1, \dots, N$ y además, satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -4\pi \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_\alpha. \quad (\text{II.1.5})$$

Si las fuentes puntuales están limitadas a una región finita del espacio, se tiene entonces que al hacer una expansión en series de Taylor,

$$g(\mathbf{x} | \mathbf{x}'_\alpha) = |\mathbf{x}|^{-1} + |\mathbf{x}|^{-3}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'_\alpha) + O(|\mathbf{x}|^{-3}) \quad \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\text{II.1.6})$$

el potencial adquiere la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha + |\mathbf{x}|^{-3} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'_\alpha) \sigma_\alpha + O(|\mathbf{x}|^{-3}) \quad \text{para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (\text{II.1.7})$$

Integrando la ecuación (II.1.5) sobre una superficie cerrada S que define un volumen V y que contiene las fuentes puntuales se obtiene

$$\int_V \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = -4\pi \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x} = -4\pi \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \quad (\text{I.1.8})$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia a la integral de la izquierda resulta

$$\int_V \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \int_S (\nabla \phi) \cdot d^2 \mathbf{S} \quad (\text{II.1.9})$$

por lo tanto,

$$\int_S (\nabla \phi) \cdot d^2 \mathbf{S} = -4\pi \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \quad (\text{II.1.10})$$

Este resultado es muy importante y se conoce como el **Teorema de Gauss**.

Si la superficie no encierra ninguna de las fuentes que generan el potencial, es decir, si ϕ es una función armónica en todo el volumen V , se sigue que

$$\int_S (\nabla \phi) \cdot d^2 \mathbf{S} = 0 \quad (\text{II.1.11})$$

En el caso de una distribución continua de fuentes los resultados que se obtuvieron son los mismos. Para este tipo de distribución el potencial está dado por

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V g(\mathbf{x} | \mathbf{x}') \sigma(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (\text{II.1.12})$$

y satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -4\pi \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = -4\pi \sigma(\mathbf{x}) \quad (\text{II.1.13})$$

En el caso de Dinámica Estelar el potencial ϕ que se ha utilizado recibe el nombre de *potencial gravitacional* y la fuerza correspondiente a este potencial recibe el nombre de *fuerza gravitacional*, la cual se expresa como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{II.1.14})$$

En este caso, el Teorema de Gauss expresa que (Binney & Tremaine 1987) *la integral de la componente normal de $-(\nabla\phi)$ (i. e. la fuerza) sobre cualquier superficie cerrada es igual a 4π veces la masa contenida dentro de esta superficie.*

Consecuencias directas de las ecuaciones (II.1.10) y (II.1.11) son los siguientes teoremas conocidos como **teoremas de Newton**:

Primer Teorema de Newton. Establece que un cuerpo situado dentro de un cascarón esférico de materia no experimentará fuerza gravitacional alguna debido a esta masa.

Segundo Teorema de Newton. Un objeto situado fuera de un cascarón esférico de materia experimenta una fuerza gravitacional equivalente a la que experimentaría si toda la masa del cascarón estuviera concentrada en su centro.

§II.2 CONDICIONES A LA FRONTERA Y FUNCIONES DE GREEN

El propósito de esta sección es describir un método ideado por George Green alrededor de 1828 para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Se pondrá especial énfasis en la *ecuación de Laplace* y en la *ecuación de Poisson*, por su importancia en el estudio de la dinámica de sistemas estelares.

La ventaja de este método es que permite pasar un problema de una representación diferencial, a una representación integral, la cual, por su naturaleza, es más tratable numéricamente.

Limitaremos el estudio de las *funciones de Green* al caso de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con dos variables independientes. Estas ecuaciones son de la forma (Birkhoff & Lynch 1984)†

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (\text{II.2.1})$$

donde $A = A(x, y), \dots, G = G(x, y)$ son funciones de x y y . Tales ecuaciones se clasifican de acuerdo a la naturaleza de sus coeficientes. Así, para aquellas regiones donde

$$B^2 - AC < 0$$

† u_{xx} denota al operador $\partial^2/\partial x^2$, u_{xy} al operador $\partial^2/\partial x \partial y$, etc.

se dice que la ecuación es de *tipo elíptico*, y si

$$B^2 - AC > 0$$

se dice que es *hiperbólica*. Finalmente, si

$$B^2 - AC = 0$$

la ecuación es *parabólica*. De acuerdo con esta clasificación la ecuación de Laplace, la ecuación de Poisson y la ecuación de Helmholtz son elípticas, la ecuación de onda es hiperbólica y la ecuación de difusión es parabólica. Cada una de estas ecuaciones presentan características propias muy distintas y en consecuencia describen procesos físicos diferentes. El estudio de las funciones de Green a mostrado que estas resultan ser muy apropiadas para resolver problemas elípticos. Sin embargo, este mismo método puede ser adaptado para solucionar problemas hiperbólicos y parabólicos.

Asociadas a las ecuaciones diferenciales encontramos condiciones a la frontera que la función solución debe satisfacer. Estas se identifican esencialmente con tres tipos de problemas que se pueden presentar:

El Problema de Dirichlet

Este ha sido uno de los problemas más estudiados, sobre todo en relación con la solución de problemas elípticos. Formalmente se establece como sigue: se desea encontrar una función que satisfaga la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{II.2.2})$$

en una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y asuma valores específicos $g(\mathbf{x})$ para toda $\mathbf{x}$ sobre la frontera, Γ , de Ω y además sea continua en $\Omega \cup \Gamma$. A las condiciones

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Gamma \quad (\text{II.2.3})$$

se les denomina *condiciones a la frontera de Dirichlet*. Un ejemplo de este tipo de problemas lo encontramos en electrostática donde la superficie de un conductor es una equipotencial.

El Problema de Neumann

Este tipo de problemas se presentan más frecuentemente en hidrodinámica y requieren otro tipo de condiciones a la frontera. Las condiciones que debe cumplir la solución de la ecuación diferencial son de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(\mathbf{x}) \quad (\text{II.2.4})$$

sobre la frontera Γ . Al problema de encontrar una función armónica que satisfaga esta condición recibe el nombre de *problema de Neumann* y a las condiciones asociadas se les denomina *condiciones a la frontera de Neumann*.

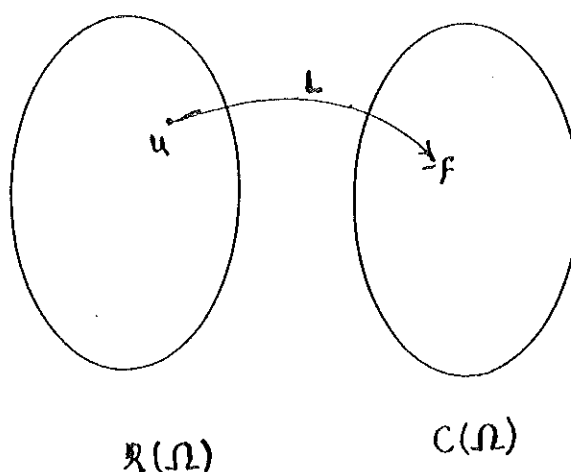


Fig. 1 Representación esquemática del mapeo que define el operador $\mathcal{L}$ entre el espacio $\mathfrak{R}(\Omega)$ y el espacio $C(\Omega)$.

El Problema Combinado

Más generalmente, encontramos problemas que son una mezcla de los dos anteriores donde la función armónica debe cumplir condiciones a la frontera del tipo

$$\alpha(\mathbf{x})u + \beta(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \quad \alpha^2(\mathbf{x}) + \beta^2(\mathbf{x}) \geq 0, \quad (\text{II.2.5})$$

las cuales son llamadas *condiciones a la frontera mezcladas*. Un ejemplo lo encontramos en la teoría de la conducción del calor. Con frecuencia se supone que un sólido emite calor a sus alrededores a una razón proporcional al exceso de temperatura superficial u . Esto conduce a resolver la ecuación de Laplace para la función u sujeta a las condiciones subsidiarias

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = g(\mathbf{x}) \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \text{para } k > 0 \quad (\text{II.2.6})$$

siendo $g(\mathbf{x})$ la tasa de absorción de la energía radiada.

Funciones de Green

El tipo de ecuaciones diferenciales que se han estado expresando pueden ser escritas de manera más compacta si se hace uso del concepto del *operador diferencial*:

$$\mathbf{L}u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) \quad (\text{II.2.7})$$

donde $\mathbf{L}$ representa el operador correspondiente a la ecuación diferencial considerada. Si $\mathfrak{R}(\Omega)$ representa el espacio de funciones u que son continuas y derivables hasta el orden requerido por el operador $\mathbf{L}$ en la región Ω y f es una función continua en esta misma región, y si además, $C(\Omega)$ denota el espacio de las funciones continuas en esta región, entonces podemos considerar al operador $\mathbf{L}$ como un *mapeo* del espacio $\mathfrak{R}(\Omega)$ al espacio $C(\Omega)$ (fig. 1). Con esta terminología el problema puede establecerse como sigue:

Dada $f \in C(\Omega)$ se desea encontrar $u \in \mathfrak{R}(\Omega)$ tal que satisfaga la ecuación diferencial y las condiciones a la frontera impuestas. Para esto se requiere encontrar un operador inverso L^{-1} tal que

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I$$

donde I es el operador identidad. Si esto es posible entonces, la solución estará dada por

$$u = -L^{-1}f$$

Este operador inverso resulta ser un operador integral de tal forma que la solución puede ser reescrita como sigue

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')G(\mathbf{x} | \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' = -L^{-1}f \quad (\text{II.2.8})$$

donde la *función de Green* $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}')$ es solución de la ecuación

$$LG(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{II.2.9})$$

Esto permite definir el operador integral G sobre Ω por (Roach 1989)

$$Gf = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')G(\mathbf{x} | \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (\text{II.2.10})$$

de tal manera que $-G$ proporciona una interpretación del operador inverso L^{-1} . A la *función de Green* asociada al operador diferencial L , y que satisface las condiciones a la frontera, se le denomina el *kernel* del operador G . El significado físico de todo este formalismo, en el caso de la Teoría Gravitacional de Newton, es que la función de Green $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}')$ representa el campo gravitacional para un observador situado en la posición $\mathbf{x}$ causado por una fuente puntual unitaria situada en la posición $\mathbf{x}'$. Así, el campo total debido a una distribución de fuentes $f(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}')$ es la integral de $G(\mathbf{x} | \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')$ sobre toda la región ocupada por las fuentes.

Una vez establecido el formalismo anterior, surge de manera natural la pregunta sobre la existencia de tal operador integral. Para hacer plausible su existencia es necesario aclarar algunos conceptos. Decimos que la ecuación que describe un campo en presencia de fuentes es una ecuación diferencial parcial *no homogénea*. El término no homogéneo esta dado por la densidad de distribución de las fuentes (e.g. la ecuación de Poisson). Una ecuación diferencial parcial *homogénea* es aquella en la que no aparece el término correspondiente a las fuentes (e.g. la ecuación de Laplace). De manera similar, decimos que las condiciones a la frontera (Dirichlet, Neumann ó combinadas) son *homogéneas*, si requieren que el campo se anule en la frontera; en caso contrario, se dice que son *no homogéneas*.

Considérese el problema no homogéneo

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}), \quad (\text{II.2.11})$$

con condiciones a la frontera no homogéneas. Utilizando el **Teorema Generalizado de Green** (Morse & Feshbach I 1953) que establece

$$u\mathcal{L}v - v\tilde{\mathcal{L}}u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v)$$

donde $\tilde{\mathcal{L}}$ es el operador *adjunto*† del operador $\mathcal{L}$, ∇ es el operador correspondiente al gradiente generalizado sobre todas las variables independientes y $\mathbf{P}$ es un vector generalizado que depende de u y v , y posiblemente sus derivadas. La función de Green asociada a la ecuación (II.2.11) satisface la ecuación

$$\mathcal{L}G(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{II.2.12})$$

con condiciones a la frontera homogéneas (*i.e.* $G = 0$ en la frontera Γ). La presencia del operador adjunto en el Teorema de Green, indica que debemos recurrir a la *ecuación adjunta* de la ecuación (II.2.12) la cual está dada por

$$\tilde{\mathcal{L}}\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{II.2.13})$$

Multiplicando la primera por $\tilde{G}$ y la segunda por $-u$ y al sumar las expresiones resultantes, se obtiene

$$\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}')\mathcal{L}u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\tilde{\mathcal{L}}\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = 4\pi u(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - 4\pi\rho(\mathbf{x})\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}'). \quad (\text{II.2.14})$$

Integrando sobre un elemento de volumen dv en la región Ω en el espacio definido por las variables independientes, y aplicando el Teorema de la Divergencia, se obtiene

$$u(\mathbf{x}') = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}') dv + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{P}[\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}'), u(\mathbf{x}^s)] \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{II.2.15})$$

donde Γ es la frontera de la región Ω y $\mathbf{x}^s$ es el vector de posición de un punto sobre Γ .

La solución encontrada no es única, por lo que debemos considerar ahora las condiciones a la frontera que debe satisfacer. Para el caso en que las condiciones a la frontera sean homogéneas (*i.e.* no existen fuentes sobre la frontera Γ), se debe tener que las condiciones a la frontera de la función de Green $\tilde{G}$ y la función u , estén correlacionadas, para que la segunda integral del término derecho se anule, *i.e.*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{P}[\tilde{G}(\mathbf{x}^s | \mathbf{x}'), u(\mathbf{x}^s)] \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{II.2.16})$$

resultando

$$u(\mathbf{x}') = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\tilde{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}') dv. \quad (\text{II.2.17})$$

†Esta relación define al operador *adjunto*. Si $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ se dice que operador $\mathcal{L}$ es *autoadjunto*. Véase Arfken (1970) para ver propiedades de los operadores adjuntos.

Puesto que u está expresada en términos de $\tilde{G}$, esto hace necesario buscar una relación entre la función de Green y su adjunta. Para hacer esto apliquemos el Teorema de Green a las ecuaciones (II.2.12) y (II.2.13), de donde se obtiene

$$4\pi[G(\mathbf{x}'' | \mathbf{x}') - \tilde{G}(\mathbf{x}' | \mathbf{x}'')] = \int_{\Gamma} P[\tilde{G}(\mathbf{x}^* | \mathbf{x}'), G(\mathbf{x}^* | \mathbf{x}'')] \cdot dS. \quad (\text{II.2.19})$$

Como G es la función de Green asociada a u entonces debe satisfacer las mismas condiciones a la frontera en Γ , de tal forma que el término de la derecha se debe anular, de donde resulta

$$G(\mathbf{x}'' | \mathbf{x}') = \tilde{G}(\mathbf{x}' | \mathbf{x}''), \quad (\text{II.2.18})$$

a esta relación se le conoce como *relación de reciprocidad*. El que las funciones G y $\tilde{G}$ sean autoadjuntas tiene una repercusión física muy importante. La primera función describe el campo en la posición $\mathbf{x}$ debido a la presencia de una fuente puntual situada en $\mathbf{x}'$ y su evolución está determinada por el operador $\mathcal{L}$ y las condiciones a la frontera. Para la segunda función la fuente puntual está situada en la posición $\mathbf{x}$ y el campo es medido en $\mathbf{x}'$ y su subsecuente evolución la determinan $\tilde{\mathcal{L}}$ y las correspondientes condiciones a la frontera. Esto significa que existe una simetría en el espacio determinado por las variables independientes. Si resultara que estas dos funciones no son las mismas, esto indicaría que existe una dirección preferencial en la evolución del proceso físico. Esta irreversibilidad se manifestaría, ya sea en el operador diferencial, o bien, en las condiciones a la frontera. Así por ejemplo, en la ecuación de difusión la irreversibilidad en el tiempo proviene del operador diferencial, mientras que, la ecuación de onda es simétrica en el tiempo pero no en las condiciones a la frontera impuestas.

La importancia de este resultado es que nos permite resolver ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones a la frontera no homogéneas, transformando el problema en el de una ecuación diferencial parcial no homogénea con condiciones a la frontera homogéneas (Courant & Hilbert I 1962). Para ejemplificar esto considérese una ecuación diferencial homogénea $\mathcal{L}u = 0$ con condiciones a la frontera no homogéneas $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Al aplicar el operador diferencial se obtiene $\mathcal{L}u = \mathcal{L}g \equiv f$. Si definimos una nueva función por $v \equiv u - g$ se obtiene que $\mathcal{L}v = -\mathcal{L}g = -f$. Así, el problema se ha reducido a un problema no homogéneo con condiciones a la frontera homogéneas ($v = 0$).

§II.3 La Ecuación de Laplace

En algunos problemas físicos resulta más conveniente traducir el problema de resolver la Ecuación de Poisson con condiciones homogéneas, a resolver la **Ecuación de Laplace**, $\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 0$, con condiciones a la frontera no homogéneas. Este puede ser el caso, por ejemplo, de calcular el potencial para un cascarón esférico con una distribución superficial de densidad.

Para el caso en que el potencial presente dependencia en la posición resulta más conveniente expresar la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. De la ecuación

(A.15) se tiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{II.3.1})$$

Puesto que las coordenadas esféricas son un sistema de coordenadas ortogonal, se puede aplicar la técnica de separación de variables (Jackson 1975). Si se toma $\Psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ resulta

$$\begin{aligned} (d^2 \Psi / d\phi^2) + m^2 \Psi &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R &= 0 \end{aligned}$$

donde m y l son enteros y $|m| \leq l$. La primera ecuación es la de un oscilador armónico cuyas soluciones son de la forma $\cos(m\phi)$ y $\sin(m\phi)$. Para la segunda ecuación las soluciones están dadas por los polinomios de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ y para la última se tienen soluciones del tipo r^l y $r^{-(l+1)}$. Generalmente, se definen funciones que guardan la información angular como

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = Y_{l,m}^o(\theta, \phi) + iY_{l,m}^e(\theta, \phi)$$

con $Y_{l,m}^o(\theta, \phi) = \cos(m\phi)P_l^m(\cos\theta)$ y $Y_{l,m}^e(\theta, \phi) = \sin(m\phi)P_l^m(\cos\theta)$. A estas funciones se les llama *armónicos esféricos* y se clasifican según el valor de m y l en: (a) *armónicos zonales* si $m = 0$ y sólo presentan dependencia en θ ; (b) *armónicos sectoriales* si $m = l$ pues presentan solamente dependencia en ϕ ; (c) al resto (con $m \geq 0$) se les llama *armónicos tesseractes*. Una propiedad que las hace importantes es que son ortogonales, es decir

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{(l,m)}^*(\theta, \phi) Y_{(l',m')}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

donde $\delta_{ll'}$ es la delta de Kronecker. Así, la solución a la ecuación de Laplace resulta ser

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right]$$

donde los coeficientes A_{lm} y B_{lm} continen la información angular y se expresan en función de los armónicos esféricos. Por último, es necesario señalar que la solución particular que se desee va a depender de las condiciones a la frontera que se le impongan.

§II.4 La Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}) \quad (\text{II.4.1})$$

juega un papel central en Dinámica Estelar ya que relaciona directamente el potencial con las fuentes que lo producen. Los resultados de la sección anterior se pueden aplicar fácilmente a este caso. Para hacer esto, notemos primero que si u y v son dos funciones, entonces $u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$ se puede escribir como

$$u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = \nabla \cdot \mathbf{P}(u, v)$$

con $\mathbf{P}(u, v) \equiv u\nabla v - v\nabla u$. Entonces ∇^2 es un operador autoadjunto. Así,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} | \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [\Psi \nabla' G - G \nabla' \Psi] \cdot d\mathbf{S}',$$

tomando $d\mathbf{S}' \equiv n dS'$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie y apuntando hacia afuera de la región Ω ; se tiene

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} | \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [\Psi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \Psi}{\partial n'}] dS' \quad (\text{II.4.2})$$

donde $\partial/\partial n' \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla'$ representa la derivada direccional o normal a la superficie. Esta solución no es única y va a depender de las condiciones a la frontera específicas del problema que se trata de resolver. Así, por ejemplo, si $\mathbf{x} \notin \Omega$, entonces el segundo término del lado derecho se anula.

Consideremos ahora un sistema de N -cuerpos. Para calcular el potencial de tal sistema primero determinemos el potencial en un punto $\mathbf{x}$ debido a una partícula puntual con vector de posición $\mathbf{x}'$. En este caso se tiene

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma]^{1/2}}$$

siendo γ el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$. Si $r_{<} \equiv \min(r, r')$ y $r_{>} \equiv \max(r, r')$ entonces,

$$\Psi(\mathbf{x}) = r_{>}^{-1} \left[1 + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \cos \gamma \right]^{-1/2}$$

Utilizando la función generadora de los Polinomios de Legendre (Lebedev 1972)

$$w(x, t) = (1 + t^2 - 2xt) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \quad \text{para } |t| < 1 \text{ y } |x| \leq 1$$

se tiene

$$\Psi(\mathbf{x}) = r_{>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \gamma) \quad (\text{II.4.3})$$

y del Teorema de adición para armónicos esféricos (Jackson 1975)

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=+l} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

resulta

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (\text{II.4.4})$$

Este es el potencial para una partícula puntual, para una constante gravitacional igual a la unidad. Para el caso del sistema de N -cuerpos con vectores de posición $\mathbf{x}'_n$ para cada una de las partículas, se tiene que el potencial es

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \frac{4\pi Y_{l,m}(\theta, \phi)}{2l+1} \\ & \times \left[r^{-(l+1)} \sum_{r' < r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^l + r^l \sum_{r' > r} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^{-(l+1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.4.5})$$

El código de N -cuerpos que se utilizará para este trabajo está basado en este resultado.

CAPITULO III

DINAMICA CLASICA

El objetivo de este capítulo es servir como un breve recordatorio de los resultados más importantes que surgen en la dinámica clásica. Algunos de ellos serán utilizados cuando se estudien los potenciales de Stäckel. Otro resultado muy importante es mostrar como las órbitas periódicas estables dan lugar a familias de órbitas que cubren todo el conjunto de órbitas regulares de un sistema mecánico separable.

§III.1 DINAMICA DE LAGRANGE

La descripción de Lagrange de la Dinámica clásica se obtiene a partir de un principio variacional fundamental con consecuencias teóricas muy profundas. Esta descripción no agrega una física nueva a la Newtoniana pero sus fundamentos permiten generalizarla a otras áreas de la física teórica.

Considérese un sistema mecánico con N -grados de libertad. Las posiciones de las partículas están dadas por las *coordenadas generalizadas* q_i , ($i = 1, \dots, N$) y sus velocidades por las *velocidades generalizadas* $\dot{q}_i$, ($i = 1, \dots, N$). Por simplicidad, adoptaremos una notación vectorial de las coordenadas y velocidades. La evolución del sistema se realiza en un espacio de N dimensiones llamado el *espacio de configuración*. Para esto, se define una función $\mathcal{L}$, llamada la *función Lagrangiana*, que depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y posiblemente del tiempo. Se requiere que esta función satisfaga el *principio de mínima acción*:

“La integral de la función $\mathcal{L}$ tomada entre los tiempos t_1 y t_2

$$\text{ACCION} \equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt, \quad (\text{III.1.1})$$

sea un mínimo, estando sujeta a las siguientes condiciones $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$ ”.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen de la siguiente manera: considérese la variación de la acción S a primer orden, δS con extremos fijos. Así,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt, \quad (\text{III.1.2})$$

tal que

$$\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = 0. \quad (\text{III.1.3})$$

desarrollando en series de Taylor la primera integral del lado derecho de la expresión (III.1.2) y aplicando las condiciones (III.1.3) se obtiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \cdot \delta \mathbf{q} dt = 0. \quad (\text{III.1.4})$$

En general, $\delta \mathbf{q} \neq 0$ excepto en la frontera donde $\delta \mathbf{q}_{t_1} = \delta \mathbf{q}_{t_2} = 0$. Como además, cada coordenada generalizada es independiente, se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0. \quad (\text{III.1.5})$$

siendo estas las *ecuaciones de Lagrange*. Generalmente, cuando la fuerza es derivable de una función potencial (i.e. $-\nabla U = \mathbf{F}$) entonces, la función Lagrangiana se describe en función de la energía cinética y potencial total del sistema mecánico:

$$\mathcal{L} \equiv T - U. \quad (\text{III.1.6})$$

Por otra parte, si se tienen restricciones del tipo

$$f_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (M < N) \quad (\text{III.1.7})$$

que son conocidas como *restricciones holonómicas*, la función Lagrangiana a minimizar es

$$\mathcal{L}^* \equiv \mathcal{L} + \sum_j^M \lambda_j(t) f_j, \quad (\text{III.1.8})$$

donde los $\lambda_i(t)$ son los multiplicadores de Lagrange. Aplicando nuevamente el principio de mínima acción, se obtiene que las ecuaciones correspondientes a esta nueva función Lagrangiana son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (\text{III.1.9})$$

estando $\mathbf{F}$ definida por

$$\mathbf{F} \equiv \sum_j^M \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{q}} - \sum_j^M \frac{d}{dt} \left(\lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right). \quad (\text{III.1.10})$$

En resumen, la historia de un sistema mecánico queda determinada por las condiciones iniciales y un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Transformaciones de Norma de la Función Lagrangiana

La no unicidad del potencial se manifiesta a su vez como una falta de unicidad de la función Lagrangiana de un sistema mecánico. Si consideramos una función Lagrangiana definida por

$$\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\chi(\mathbf{q}, t), \quad (\text{III.1.11})$$

y le aplicamos el principio de mínima acción, se obtiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \chi(\mathbf{q}_{t_2}, t_2) - \chi(\mathbf{q}_{t_1}, t_1) \quad (\text{III.1.12})$$

luego,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt. \quad (\text{III.1.13})$$

Esto implica directamente que las ecuaciones de Lagrange para un sistema mecánico, bajo este tipo de transformaciones, son *invariantes*. A las transformaciones definidas por la expresión (III.1.11) se les denomina *Transformaciones de Norma de la Función Lagrangiana*.

Además, si el conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_i\}_i^N$ es una solución a las ecuaciones de Lagrange, entonces un nuevo sistema de coordenadas generalizadas $\{Q_i\}_i^N$ definido por los difeomorfismos $\{G_i\}_i^N$ tal que $G_i: M \rightarrow M$, $Q_i \mapsto G_i(\mathbf{q})$ ($\mathbf{q} \in M$)¹ también es solución, y viceversa.

Propiedades de la Función Lagrangiana

La función Lagrangiana presenta algunas propiedades muy interesantes íntimamente relacionadas con leyes de conservación. Para ver esto, dérivese la función Lagrangiana con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (\text{III.1.14})$$

aplicando las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\dot{\mathbf{q}} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.15})$$

agrupando se tiene

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L}], \quad (\text{III.1.16})$$

¹ Un *difeomorfismo* es un mapeo $f: A \rightarrow B$ uno a uno tal que f y $f^{-1}: B \rightarrow A$ son mapeos diferenciables al menos de clase C^2 .

donde

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (\text{III.1.17})$$

recibe el nombre de *momento generalizado*. Nótese que si la función Lagrangiana no presenta una dependencia explícita en el tiempo (homogeneidad temporal), el término izquierdo de la ecuación (III.1.16) se anula. Luego,

$$E \equiv \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L} \quad (\text{III.1.18})$$

es una cantidad que se conserva. Además, si alguna de las coordenadas generalizadas no aparece en esta función (homogeneidad espacial) entonces el momento generalizado correspondiente es una cantidad que se conserva. A las coordenadas generalizadas que no aparecen explícitamente en la función Lagrangiana reciben el nombre de *coordenadas cíclicas*. Estos son solo casos particulares de un teorema más general conocido como el *Teorema de Noether* que establece lo siguiente:

“Sea $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ la función Lagrangiana de un sistema mecánico. Supóngase que $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación, parametrizada por el escalar s , $\mathbf{q} \mapsto h^s(\mathbf{q})$, donde $s \in \mathbb{R}$ y continuo y donde además, $h^{s=0}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ es la identidad. Entonces existe una cantidad que se conserva dada por

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{dh^s(\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0}. \quad (\text{III.1.19})$$

Debe tenerse en cuenta que el mapeo actúa sobre las coordenadas generalizadas y trata sólo con “traslaciones espaciales”. Sin embargo, este mismo teorema puede extender de manera natural al caso de “traslaciones temporales”. Para esto, considérese un espacio de configuración “extendido”, en el que el tiempo pasa a ser otra coordenada “generalizada” más. Reescribamos el principio de mínima acción en función de un nuevo parámetro τ como sigue:

$$S = \int \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \int \mathcal{L}(\mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, t) \frac{dt}{d\tau} d\tau \quad (\text{III.1.20})$$

esto permite definir una nueva función Lagrangiana $\mathcal{L}^*$

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{q}^*, \mathbf{q}'^*) \equiv \mathcal{L}'(\mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, t, \frac{dt}{d\tau}) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, t) \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{III.1.21})$$

donde $\mathbf{q}^* \equiv (\mathbf{q}, t)$ y $\mathbf{q}'^* \equiv (d\mathbf{q}^*/d\tau, dt/d\tau)$. De igual manera, si $\mathcal{L}^*$ es invariante bajo una transformación $\mathbf{q}^* \mapsto h^s(\mathbf{q}^*)$ entonces, existe una cantidad que se conserva definida por

$$I(\mathbf{q}^*, \mathbf{q}'^*) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{q}'^*} \frac{dh^s(\mathbf{q}^*)}{ds} \right|_{s=0}. \quad (\text{III.1.22})$$

§III.2 DINAMICA HAMILTONIANA

Al igual que la descripción Lagrangiana, esta nueva descripción de la dinámica no agrega una física nueva. Sin embargo, esta descripción se efectúa vía las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados. La evolución del sistema mecánico se desarrolla en un nuevo espacio llamado el *espacio fase* cuya estructura geométrica es diferente a la del espacio de configuración del sistema mecánico. En este espacio fase la descripción dinámica se presenta de una manera muy elegante y en base a conceptos similares a los usados en fluidos.

La ventaja de esta representación es que permite reducir el problema de un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden (dinámica de Lagrange) a un sistema de $2N$ ecuaciones diferenciales de *primer orden*.

Descripción Dinámica en el Espacio Fase

Un sistema mecánico con N -grados de libertad puede ser descrito en el espacio fase de $2N$ dimensiones. Un punto en este espacio está representado por las coordenadas generalizadas q y los correspondientes momentos generalizados p . Este punto será denotado por $z(t) = (q(t), p(t))$. Así, un punto en este espacio representa el estado dinámico del sistema a un tiempo dado. En este espacio la descripción del sistema físico puede hacerse en términos geométricos (Arnold 1989).

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento dan lugar a una curva en el espacio fase donde cada punto representa el estado del sistema a un tiempo dado. La curva recibe el nombre de *curva fase* y a la evolución del sistema se le llama *flujo fase*. Si $\mathcal{T}$ representa el operador de evolución del sistema (i.e. $\mathcal{T}(z(t_1)) = z(t_2)$) entonces $\mathcal{T}$ representa el flujo fase, mientras que, el conjunto de puntos $\{z(t)\}_{t_1}^{t_2}$ representa la curva fase. Una propiedad muy importante de las curvas fase es que éstas nunca se intersectan (Arnold 1989).

Transformadas de Legendre

En este tipo de transformadas lo que se desea es pasar de un sistema de coordenadas y a un sistema y' . Supóngase que se tiene una función $F(x, y)$ de clase C^2 en las coordenadas y y que la transformación de las coordenadas $y \mapsto y'$ está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$y' = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \equiv g(x, y), \quad (\text{III.2.1})$$

si el determinante del Jacobiano de la transformación es distinto de cero, es decir

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_i}\right) \neq 0. \quad (\text{III.2.2})$$

entonces la función inversa g^{-1} existe. La existencia de la función inversa permite escribir las coordenadas y en función de las coordenadas y'

$$y = h(x, y'). \quad (\text{III.2.3})$$

La Transformada de Legendre $\Lambda: F \rightarrow G$ se define como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \equiv \Lambda F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}' \cdot \mathbf{h} - F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\text{III.2.4})$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}'} = \mathbf{h} \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{y} \quad \det\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y'_k \partial y'_l}\right) \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\right) = 1. \quad (\text{III.2.5})$$

Ecuaciones de Hamilton

La función Hamiltoniana $\mathcal{H}$ se define como la transformada de Legendre de la función Lagrangiana de las coordenadas $\dot{\mathbf{q}}$ en las nuevas coordenadas $\mathbf{p}$. Esto es,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \Lambda \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (\text{III.2.6})$$

donde

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (\text{III.2.7})$$

El diferencial de $\mathcal{H}$ resulta ser

$$d\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} + d\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot d\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \quad (\text{III.2.8})$$

utilizando la definición de $\mathbf{p}$ y las ecuaciones de Lagrange se obtiene que

$$d\mathcal{H} = \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (\text{III.2.9})$$

Esta última expresión debe ser igual a la siguiente

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt, \quad (\text{III.2.10})$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{y}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

Las dos primeras ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones canónicas* o *ecuaciones de Hamilton* de movimiento. Estas ecuaciones permiten definir un sistema canónico como aquel que admite una función Hamiltoniana y que además, su evolución está gobernada por las ecuaciones canónicas. Es fácil ver que si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo $d\mathcal{H}/dt = \partial \mathcal{H}/\partial t$, entonces la función Hamiltoniana es una cantidad que se conserva.

Es posible escribir las ecuaciones canónicas en una forma más elegante (conocida como notación *simpléctica*, Goldstein 1980). Para esto, se definen los siguientes vectores columna

$$\mathbf{z} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.12})$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}} \equiv \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{q} \\ \partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.13})$$

Finalmente, defínase una matrix $\mathbf{J}_{2N \times 2N}$ como

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{N \times N} & \mathbf{I}_{N \times N} \\ -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{O}_{N \times N} \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.14})$$

donde $\mathbf{O}$ es una matrix $N \times N$ cuyos elementos son todos cero y, $\mathbf{I}$ es la matriz identidad $N \times N$. Con estas definiciones las ecuaciones canónicas adquieren la forma más compacta

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}}. \quad (\text{III.2.15})$$

Transformaciones Canónicas

Una *transformación canónica* (siguiendo la notación anterior) $\{\mathbf{z}\} \rightarrow \{\mathbf{Z}\}$ se define como aquella que deja invariante la estructura de las ecuaciones canónicas. En forma simbólica esto lo podemos escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{z}\} &\rightarrow \{\mathbf{Z}\}, \\ \mathcal{H}(\mathbf{z}, t) &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Z}, t), \quad \text{tal que} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}} &\rightarrow \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{Z}}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.16})$$

La tasa de cambio temporal de $\mathbf{z}$ está relacionada con la correspondiente tasa de cambio de $\mathbf{Z}$ vía el Jacobiano de la transformación, el cual denotaremos por $\mathbf{M}$, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} \quad \text{donde} \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} & \frac{\partial Z_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial Z_1}{\partial z_{2N}} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial z_1} & \frac{\partial Z_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial Z_2}{\partial z_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Z_{2N}}{\partial z_1} & \frac{\partial Z_{2N}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial Z_{2N}}{\partial z_{2N}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.2.17})$$

Si las transformaciones son difeomorfismos, entonces el Jacobiano de la transformación es diferente de cero. Así, la matriz inversa $\mathbf{M}^{-1}$ existe y es tal que $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$. Puesto que

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{z}}$$

se sigue que

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\mathbf{J}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{z}} \quad (\text{III.2.18})$$

Si consideramos la transformación inversa $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{Z})$ se sigue que

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{z}} = \mathbf{M}^T\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\mathbf{Z}}, \quad (\text{III.2.19})$$

donde $\mathbf{M}^T$ es la transpuesta de la matriz $\mathbf{M}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{Z}, t) \equiv \mathcal{H}(\mathbf{z}(\mathbf{Z}), t)$. Luego,

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\mathbf{Z}}. \quad (\text{III.2.20})$$

Si imponemos la condición de que las ecuaciones canónicas sean invariantes bajo esta transformación, es decir

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\mathbf{Z}}, \quad (\text{III.2.21})$$

comparando (III.2.20) y (III.2.21) se obtiene

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T = \mathbf{J} \quad (\text{III.2.22})$$

Este último resultado es una condición necesaria y suficiente que debe cumplir una transformación para que sea canónica. Este mismo resultado es conocido como la *condición simpléctica* y a la matriz $\mathbf{M}$ se le conoce como la *matriz simpléctica*.

Las transformaciones canónicas son muy importantes ya que nos permiten reescribir las ecuaciones de movimiento en otro espacio fase. Si la función Hamiltoniana tiene una expresión más sencilla en este nuevo espacio entonces las las ecuaciones de movimiento correspondientes serán más fáciles de resolver.

Integrales de Movimiento

Una *integral de movimiento* se define (Binney & Tremaine 1987) como cualquier función $I(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ independiente del tiempo y que es constante a lo largo de la curva fase que describe el sistema en el espacio fase. Esto es, si $(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o)$ denotan las condiciones iniciales, entonces una integral de movimiento es aquella tal que $I(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = I(\mathbf{q}_o, \mathbf{p}_o)$ a lo largo de la curva fase.

Uno de los problemas fundamentales en dinámica está relacionado con la necesidad de determinar o aproximar las integrales de movimiento de un sistema físico. La importancia de esto radica en el hecho de que las integrales de movimiento permiten reducir la región en el espacio fase al que un sistema tiene acceso. Así por ejemplo, la dinámica de un sistema con N -grados de libertad (*i.e.* N coordenadas generalizadas) se desarrolla en un espacio fase $2N$ -dimensional. Supóngase que $\{I_i\}_{i=1}^M$ (con M ($M \leq 2N$)) son M integrales de movimiento para este sistema. Entonces la dinámica del sistema queda restringida a una superficie $(2N-M)$ -dimensional determinada por las integrales de movimiento I_i .

Espacio Fase Extendido

Es posible tratar problemas descritos por una función Hamiltoniana dependiente del tiempo (Lichtenberg & Liberman). En este caso, la variable temporal pasa a ser una pseudo-coordenada generalizada más. El principio de mínima acción se expresa en función de un nuevo parámetro τ tal que $t = t(\tau)$. Luego

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \equiv \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}'(\mathbf{q}, t, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}) d\tau = 0. \quad (\text{III.2.23})$$

Podemos definir una nueva función Lagrangiana para el sistema como:

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{Q}, \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau}) \equiv \mathcal{L}'(\mathbf{q}, t, \frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}). \quad (\text{III.2.24})$$

donde $\mathbf{Q} \equiv (\mathbf{q}, t)$, $d\mathbf{Q}/d\tau \equiv (d\mathbf{q}/d\tau, dt/d\tau)$. La transformada de Legendre $\Lambda: \mathcal{L}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$ de las coordenadas $d\mathbf{Q}/d\tau$ a las nuevas coordenadas $\mathbf{P}$ se expresa como:

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \tau) \equiv \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau} - \mathcal{L}^*(\mathbf{Q}, \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau}, \tau) \quad (\text{III.2.25})$$

Las ecuaciones canónicas para esta función Hamiltoniana $\mathcal{H}^*$ resultan ser

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{P}} \\ \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \mathbf{Q}} \quad \text{y} \\ \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \tau} &= -\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{III.2.26})$$

donde nuevamente, si $\mathcal{H}^*$ no depende explícitamente del parámetro τ entonces es una "integral de movimiento". Es necesario señalar que la dinámica del sistema no se lleva a cabo en el espacio fase ordinario de $2N$ dimensiones sino que se desarrolla en un *espacio fase extendido* de $(2N + 2)$ dimensiones. Este es un resultado muy importante, ya que permite establecer la equivalencia entre un sistema con N grados de libertad y una función Hamiltoniana dependiente del tiempo y un sistema con $(N+1)$ grados de libertad y una nueva función Hamiltoniana independiente del "tiempo".

Corchetes de Poisson

Los *corchetes de Poisson* de dos funciones $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ y $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ que se definen como

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}}. \quad (\text{III.2.27})$$

Estos corchetes presentan las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (i) \quad & \{f, g\} = -\{g, f\} \\ (ii) \quad & \{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \\ (iii) \quad & \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \\ (iv) \quad & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.2.28})$$

La propiedad (iv) se le conoce con el nombre de *identidad de Jacobi* y las propiedades (i) – (iv) definen una estructura algebraica conocida como un *álgebra de Lie*².

Los corchetes de Poisson pueden ser escritos en una forma más elegante y compacta, recurriendo al formalismo que se desarrolla en la sección de transformaciones canónicas. Para esto, hagamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\{f, g\}_{q,p} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial p}\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial q}\right) \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial p}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{N \times N} & \mathbf{I}_{N \times N} \\ -\mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{O}_{N \times N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial g / \partial q \\ \partial g / \partial p \end{pmatrix} \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{J} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}}.\end{aligned}\tag{III.2.29}$$

Más aun, considérese una transformación $\{\mathbf{z}\} \rightarrow \{\mathbf{Z}\}$. Se tiene entonces de (III.2.19) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} &= \mathbf{M}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}} \quad \text{y,} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)^T &= \left(\mathbf{M}^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}}\right)^T \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}}\right)^T \mathbf{M},\end{aligned}\tag{III.2.30}$$

combinando los resultados (III.2.29) y (III.2.30) se obtiene que

$$\{f, g\}_{\mathbf{z}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{z}}\right)\tag{III.2.31}$$

Si la transformación dada es canónica entonces resulta $\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}$, luego

$$\{f, g\}_{\mathbf{z}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}}\right)^T \mathbf{J} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{Z}} = \{f, g\}_{\mathbf{Z}}.\tag{III.2.32}$$

Esto es, si la transformación es canónica entonces los corchetes de Poisson son *invariantes canónicos*; el recíproco también es cierto. Esto significa que la condición simpléctica es equivalente a la invarianza de los corchetes de Poisson bajo una transformación.

² Un *álgebra de Lie* es cualquier espacio vectorial equipado con una operación binaria $\{, \}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \lambda \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{c}] \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{linealidad})$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = 0 \quad (\text{antisimetría})$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0 \quad (\text{identidad de Jacobi})$$

Otro resultado importante puede obtenerse a partir de la siguiente observación:

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial g}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial t} \\
 &= \{\mathcal{H}, g\} + \frac{\partial g}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{III.2.33}$$

Estos resultados nos permiten establecer el **Teorema de Poisson** que nos dice:

“El corchete de Poisson de dos integrales de movimiento es también una integral de movimiento.”

Sean f y g dos integrales de movimiento y sea $h \equiv \{f, g\}$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt}\{f, g\} \\
 &= \{\mathcal{H}, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\},
 \end{aligned}$$

usando las propiedades (i) – (iv)

$$\begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} &= -\{f, \{g, \mathcal{H}\}\} - \{g, \{\mathcal{H}, f\}\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\
 &= \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{\mathcal{H}, g\}\right\} - \left\{g, \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\}\right\} \\
 &= \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} + \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{III.2.34}$$

Por lo tanto, w es una integral de movimiento.

§III.3 DINAMICA DE HAMILTON-JACOBI

La invarianza del formalismo de Hamilton, bajo transformaciones canónicas, nos da libertad adicional de resolver un problema en un nuevo espacio fase en el que la forma de la función Hamiltoniana, y por lo tanto las ecuaciones de movimiento, sean más sencillas. Surge entonces la pregunta ¿es posible encontrar una transformación tal que la función Hamiltoniana sea lo más sencilla posible? La respuesta es afirmativa y la función generadora de esta transformación canónica privilegiada es la función de Jacobi, que es la solución a la Ecuación de Hamilton-Jacobi.

Ecuación de Hamilton-Jacobi

Para obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi, supóngase que la transformación $\{q, Q\} \rightarrow \{q, P\}$ es canónica, entonces $\mathcal{L}(q, p, t) \equiv \dot{q} \cdot p - \mathcal{H}(q, p, t)$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) \equiv \dot{Q} \cdot P - \tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t)$ satisfacen el principio de mínima acción y difieren a lo más por una derivada total temporal de una función Φ , es decir

$$\dot{q} \cdot p - \mathcal{H} = \dot{Q} \cdot P - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{III.3.1})$$

Si $\Phi(q, Q, t)$ se obtiene

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \cdot \dot{Q} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Sustituyendo esta expresión en (III.3.1) y agrupando, se tiene que las variables q y Q son independientes si y sólo si

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{III.3.2})$$

siendo Φ la *Función Generadora* de la transformación canónica. Si ahora, aplicamos la Transformada de Legendre de $\{q, Q\} \rightarrow \{q, P\}$ a la función generadora se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda \Phi(q, Q, t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \cdot Q - \Phi(q, Q, t) \\ &\quad - [P \cdot Q] + \Phi(q, Q, t). \end{aligned}$$

Si $S(q, P, t) \equiv P \cdot Q + \Phi(q, Q, t)$ y se toma su derivada total en el tiempo y se combina con los resultados (III.3.1) se encuentra

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} \\ \tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) &= \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

Generalmente, se toma S tal que $\tilde{\mathcal{H}} = 0$ para simplificar las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{Q} = 0 \quad \dot{P} = 0$$

lo cual implica que Q y P son constantes de movimiento. Pero para que esto ocurra la función S debe satisfacer la ecuación

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (\text{III.3.4})$$

que resulta de (III.3.3). A esta se le conoce como la **Ecuación de Hamilton-Jacobi**. Esto permite definir un *sistema integrable* como aquel donde la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable en N ecuaciones independientes, una para cada grado de libertad.

Ambas representaciones, Hamiltoniana y Hamilton-Jacobi, son igualmente difíciles de resolver, sin embargo, esta última permite obtener soluciones aproximadas de sistemas *cuasi-integrables* (i.e. sistemas que pueden ser aproximados por perturbaciones pequeñas de sistemas integrables.)

Matemáticamente, una posible solución para la ecuación de Hamilton-Jacobi puede representarse como $S = S(\mathbf{q}, \alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}, t)$ donde $\alpha_i = \text{constante}$ para $i = 1, \dots, N + 1$. Nótese que en el Hamiltoniano aparecen sólo derivadas parciales de S así que, una de estas constantes es irrelevante para describir la dinámica del sistema.

Variables de Acción y Angulares

Describamos ahora brevemente el formalismo de las variables de acción y angulares. Este formalismo es aplicable a sistemas cuyo Hamiltoniano es separable e independiente del tiempo de la siguiente manera:

En el caso de que el Hamiltoniano sea independiente del tiempo $\mathcal{H} \equiv E$ es una integral de movimiento, entonces la solución puede escribirse como

$$S(\mathbf{q}, \alpha, t) = W(\mathbf{q}, \alpha) + \alpha_1 t$$

de tal manera que la ecuación de Hamilton-Jacobi original se reduce a

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = \alpha_1 = E$$

donde la función W se le denomina *función característica de Hamilton*. En el caso de que sea separable i.e.

$$W(\mathbf{q}, \alpha) = \sum_i W(q_i, \alpha)$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi se traduce a un sistema de N ecuaciones desacopladas (Goldstein 1980).

En algunos casos, es conveniente identificar las α_i con los momentos P_i pero en otros casos, resulta más útil introducir otras cantidades que sean funciones independientes de las α_i . En sistemas periódicos, es decir, (a) $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ son funciones periódicas del tiempo con el mismo período (libración); (b) p_i es una función periódica de q_i (rotación) se definen las **variables de acción J** como

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$$

con

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (\text{III.3.5})$$

Luego, $J_i = J_i(\alpha)$ lo cual implica que $\alpha_1 = \alpha_1(\mathbf{J}) = \mathcal{H}(\mathbf{J}) = E$. Sus correspondientes variables conjugadas se definen como

$$\theta_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \quad (\text{III.3.6})$$

que se les denomina comunmente como **variables angulares**. Las ecuaciones de Hamilton en estas nuevas variables tienen su más simple forma

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (\text{III.3.7})$$

A las cantidades ω_i se les llama las **frecuencias** de movimiento para cada una de las coordenadas. Si la razón entre frecuencias es irracional entonces, la órbita cubrirá toda la hipersuperficie que le es permisible por las integrales de movimiento.

La implicación del formalismo de las variables de acción y angulares está en que nos demuestra que toda órbita periódica acotada, de un sistema Hamiltoniano de N grados de libertad que cumple la condición de separabilidad, se mueve sobre la superficie de un toro de N dimensiones, donde las acciones están relacionadas con las áreas de las secciones rectas de este toro en los planos (p_i, q_i) correspondientes, y las variables angulares describen la rotación correspondiente a esos planos. A estos toros se les denomina toros orbitales invariantes.

CAPITULO IV

MODELOS DINAMICOS PARA SISTEMAS TRIAXIALES

El descubrimiento de Bertola & Capaccioli (1975) y Illingworth (1977) de que una importante fracción de las galaxias elípticas rotan lentamente puso en evidencia que no existe una correlación directa entre la rotación y el aplanamiento observado en estos sistemas estelares. La suposición de que son sistemas oblatos no puede ser sostenida bajo este hecho. Binney (1978) propone que las galaxias elípticas son sistemas triaxiales.

Bajo esta última hipótesis, se han venido desarrollando importantes trabajos en dinámica de galaxias elípticas con el objeto de tratar de entender su estructura interna. Dos de los modelos más importantes que incorporan esta suposición son: el trabajo pionero de Schwarzschild (1979) y los potenciales de Stäckel introducidos por de Zeeuw (1984). El primero se caracteriza por ser de carácter numérico y está basado en técnicas de programación lineal. El segundo es analítico y tiene la gran ventaja de que el potencial es separable. En lo que sigue se dará una breve descripción de estos dos modelos.

§IV.1 Modelo Numérico: Método de Schwarzschild

En un importante trabajo, Schwarzschild (1979) construyó un modelo en equilibrio para un sistema triaxial utilizando técnicas de programación lineal. Este método se basa esencialmente en lo siguiente:

- (i) Se selecciona una distribución de densidad $\rho(\mathbf{x})$ para el modelo y, se divide en una malla de N celdas. A la β -ésima celda se le asigna una masa D_β de acuerdo al modelo.
- (ii) Se obtiene el potencial producido por la distribución de densidad resolviendo la ecuación de Poisson.
- (iii) Conocido el potencial, se evalúan algunas órbitas y se almacena la fracción de tiempo, $P_{\alpha\beta}$, que la α -ésima órbita permanece en la β -ésima celda.
- (iv) Finalmente, se reproduce la distribución de densidad a partir de las órbitas calculadas en (iii). Para esto, supóngase que se evaluaron $M \geq N$ órbitas y que a la α -ésima órbita se le asigna una masa C_α , entonces la contribución de esta órbita a la β -ésima celda es $C_\alpha P_{\alpha\beta}$ (esto es equivalente a colocar C_α estrellas en la α -ésima órbita). Así, el problema de recuperar la distribución de densidad original se traduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales en las C_α , i.e.

$$\sum_{\alpha=1}^M C_\alpha P_{\alpha\beta} = D_\beta, \quad (\beta = 1, N)$$

con

$$C_\alpha \geq 0 \quad (\alpha = 1, M). \quad (\text{IV.1.1})$$

Planteado de esta manera no resulta clara su conexión con el problema autoconsistente de un modelo. Vandervoort (1984) presentó una derivación de la relación (IV.1.1) para el caso en que la función de distribución satisfaga la ecuación de Boltzmann (*i.e.* el sistema estelar está en estado estacionario) y se tengan tres integrales de movimiento. Esta derivación es útil porque permite interpretar los coeficientes en base a la función de distribución del sistema. Para ver esto, supóngase que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ es la función de distribución definida en el espacio fase accesible al sistema, entonces la densidad del modelo está dada por

$$\rho(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}.$$

Determinada la distribución de densidad, se utiliza la ecuación de Poisson para obtener el potencial $\Psi(\mathbf{x})$. La conexión de la función de distribución con el espacio fase se realiza a través de las integrales de movimiento (Teorema de Jeans). Si $\mathbf{I} \equiv (I_1, I_2, I_3)$ representa a las integrales de movimiento, se tiene

$$\int f(\mathbf{I}) J(\mathbf{I}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{I} = \rho(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.1.2})$$

donde $J(\mathbf{I}, \mathbf{x})$ es el Jacobiano de la transformación y $d^3\mathbf{I} \equiv dI_1 dI_2 dI_3$. Resulta conveniente definir una nueva función $C(\mathbf{I})$ que actúa en el (I_1, I_2, I_3) -espacio, de tal manera que $C(\mathbf{I})d^3\mathbf{I}$ proporciona la masa de las estrellas cuyas integrales de movimiento se encuentran en el elemento de volumen $d^3\mathbf{I}$. Su relación con la función de distribución está dada por

$$C(\mathbf{I}) = f(\mathbf{I}) \int_V J(\mathbf{I}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

donde V representa el volumen del espacio de configuración accesible a la estrella con integrales de movimiento $\mathbf{I}$. Combinando esta expresión con la ecuación (IV.1.2) se obtiene

$$\rho(\mathbf{x}) = \int C(\mathbf{I}) d^3\mathbf{I} \left[\frac{J(\mathbf{I}, \mathbf{x})}{\int_V J(\mathbf{I}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}} \right] \quad (\text{IV.1.3})$$

La transición al método de Schwarzschild requiere que pasemos a una descripción discreta. Para esto, se divide la densidad $\rho(\mathbf{x})$ en N celdas en el espacio de configuración. Si Δ_α denota el volumen de la β -ésima celda, entonces la masa correspondiente a esta celda estará dada por

$$D_\beta = \int_{\Delta_\beta} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (\text{IV.1.4})$$

Para el caso discreto,

$$C(\mathbf{I}) = \sum_{\alpha=1}^M C_\alpha \delta(\mathbf{I} - \mathbf{I}'_\alpha)$$

donde C_α es la masa total de las estrellas pertenecientes a la α -ésima población y $\mathbf{I}'_\alpha \equiv (I'_{1\alpha}, I'_{2\alpha}, I'_{3\alpha})$. Sustituyendo esta expresión y la expresión (IV.1.4) en (IV.1.3) se tiene

$$D_\beta = \sum_{\alpha=1}^M C_\alpha B_{\alpha\beta}$$

donde

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\int_{\Delta_\beta} J(\mathbf{I}'_\alpha, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}}{\int_V J(\mathbf{I}'_\alpha, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}}$$

representa la fracción de estrellas pertenecientes a la población α -ésima que ocupa la β -ésima celda. La equivalencia entre $P_{\alpha\beta}$ (ecuación (IV.1.1)) y $B_{\alpha\beta}$ se puede establecer si se tiene en cuenta que el movimiento de una estrella perteneciente a la α -ésima población está limitado por las tres integrales de movimiento a una hipersuperficie en el espacio fase. Cada punto en esta hipersuperficie es igualmente probable de ser visitado por la estrella. Esto es equivalente a tener un ensemble de estrellas (con las mismas integrales de movimiento) distribuido uniformemente sobre la hipersuperficie. Luego, la fracción temporal que permanece una estrella en la α -ésima órbita dentro de la β -ésima órbita es igual a la fracción de estrellas de la α -ésima población en la β -ésima celda.

Este tipo de problemas se atacan con técnicas de programación lineal y se pueden presentar dos situaciones: (a) que no tenga solución o bien, (b) se obtiene una infinita familia "básica" de soluciones. Aunque resulta relativamente simple el método para construir modelos de galaxias elípticas tiene la gran desventaja de no proporcionar una solución única o, al menos, que limite el intervalo de posibles soluciones (Statler, 1987). En principio, uno puede obtener cualquier modelo simplemente seleccionando adecuadamente el tipo y número de órbitas.

§IV.2 Modelo Analítico: Potenciales de Stäckel

Estos potenciales fueron introducidos por de Zeeuw (1985a,b) para el estudio de las galaxias elípticas. La virtud de estos potenciales radica en que son separables, lo cual permite obtener analíticamente las integrales de movimiento. Esto facilita la elaboración de librerías de órbitas para crear modelos triaxiales con la estructura interna deseada.

En este tipo de modelos la distribución de densidad para el "elipsoide perfecto" se expresa como

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0}{(1 + \tilde{m}^2)^2}$$

con

$$\tilde{m}^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (\text{IV.2.1})$$

y el potencial asociado a esta distribución (Binney & Tremaine 1987, sección 2.3)

$$\Psi(\mathbf{x}) = -\pi G \rho_o abc \int_0^\infty \frac{1}{[1 + \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}]} du \times \frac{1}{[(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)]^{1/2}}. \quad (\text{IV.2.2})$$

Definiendo $\alpha = -a^2$, $\beta = -b^2$ y $\gamma = -c^2$ y utilizando coordenadas elipsoidales confocales (Apéndice A), en particular la expresión (A.40), se obtiene

$$\Psi(\lambda, \mu, \nu) = -\pi G \rho_o abc \int_0^\infty \frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)}}{(u+\lambda)(u+\mu)(u+\nu)} du,$$

y que presenta la propiedad de ser separable (de Zeeuw 1985a, 1984 y referencias ahí):

$$\Psi(\lambda, \mu, \nu) = -\frac{\Psi_\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} - \frac{\Psi_\mu}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)} - \frac{\Psi_\nu}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}$$

donde

$$\Psi_\tau \equiv \pi G \rho_o abc \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)}}{(u+\tau)} + A(u)\tau + B(u) \right] du$$

con $\tau = \lambda, \mu, \nu$ y $A(u)$, $B(u)$ funciones arbitrarias. A estos potenciales se les llama generalmente **Potenciales de Stäckel**.

Empleando la ecuación (A.5) se tiene que, la función Lagrangiana para este sistema elipsoidal es

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu, \nu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}) = \frac{1}{2}[(h_\lambda \dot{\lambda})^2 + (h_\mu \dot{\mu})^2 + (h_\nu \dot{\nu})^2] - \Psi(\lambda, \mu, \nu)$$

y como $p_\tau \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\tau}$ se sigue que el Hamiltoniano puede expresarse como

$$\mathcal{H}(\lambda, \mu, \nu, p_\lambda, p_\mu, p_\nu) = \frac{p_\lambda^2}{2h_\lambda^2} + \frac{p_\mu^2}{2h_\mu^2} + \frac{p_\nu^2}{2h_\nu^2} + \Psi(\lambda, \mu, \nu).$$

Nótese que el Hamiltoniano es *independiente* del tiempo así, la energía, E , es una cantidad que se conserva. La ecuación de Hamilton-Jacobi asociada resulta ser

$$\frac{1}{2h_\lambda^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{2h_\mu^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{1}{2h_\nu^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \nu} \right)^2 + \Psi(\lambda, \mu, \nu) = E \quad (\text{IV.2.3})$$

siendo $W(\lambda, \mu, \nu, c_1, c_2, c_3)$ la función característica de Hamilton. Puesto que los potenciales de Stäckel son separables se sigue que el Hamiltoniano y la ecuación de Hamilton-Jacobi también lo son. Así,

$$W = W_\lambda(\lambda) + W_\mu(\mu) + W_\nu(\nu).$$

La separabilidad del Hamiltoniano permite emplear las variables de acción (J_λ, J_μ, J_ν) y las variables angulares ($\theta_\lambda, \theta_\mu, \theta_\nu$) como un sistema natural para la descripción dinámica del sistema triaxial (véase sección §III.5). Así,

$$J_\tau = \frac{1}{2\pi} \oint p_\tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p_\tau d\tau \quad \text{con } \tau = \lambda, \mu, \nu.$$

Nótese que la ecuación (III.3.5) y la condición de separabilidad permiten expresar $p_\tau = p_\tau(\tau, E, i_2, i_3)$ donde E es la energía, i_2 y i_3 son integrales de movimiento, lo cual implica que $J_\tau = J_\tau(E, i_2, i_3)$ también son integrales de movimiento. Este hecho, permite introducir un diagrama, llamado *diagrama de acción*, cuyos ejes son las variables de acción J_τ . En este diagrama existe una relación directa entre cada órbita y un punto en este espacio. *A cada punto en el diagrama le corresponde una órbita.* Esto permite ver directamente el tipo y número de órbitas que se presentan en un modelo triaxial.

Las principales familias que pueblan estos modelos son:

- (a) **Las Cajas.** Se caracterizan por no tener un sentido de rotación fijo.
- (b) **Los Tubos-X (internos y externos).** Se caracterizan por tener un sentido de rotación fijo a lo largo del eje X (eje mayor). La diferencia entre los dos tipos es más sutil y por lo tanto, es más difícil elaborar un algoritmo que distinga entre estas dos familias. Se dice que es un tubo-X interno si en el plano Y-Z está contenido dentro de la elipse focal (ver Coordenadas Elipsoidales Confocales, apéndice A) en caso contrario, se dice que es un tubo-X externo.
- (c) **Tubos-Z.** Presentan un sentido de rotación fijo a lo largo del eje Z (eje menor).

En la fig. 1 se muestra el diagrama para una energía dada y las diferentes familias de órbitas a que dan lugar los potenciales de Stäckel. La fig. 2 muestra una corte de este diagrama y se muestran además las órbitas de transición entre una familia y otra.

En la fig. 3 se muestra de manera esquemática algunos ejemplos típicos de cada una de estas familias y en la fig. 4 se muestran sus secciones transversales sobre los principales planos del sistema de coordenadas X-Y-Z.

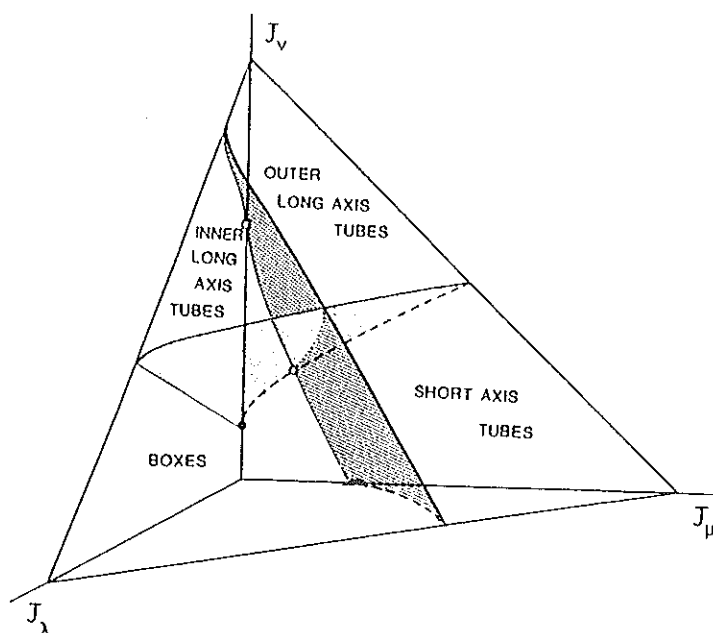


Fig. 1 Se muestran las regiones en que es dividido el diagrama de acción por las diferentes familias de órbitas presentes en el modelo del elipsoide perfecto. El plano inclinado corresponde a una energía fija. Las superficies sombreadas indican las regiones de transición entre una familia y otra (de Zeeuw 1985a).

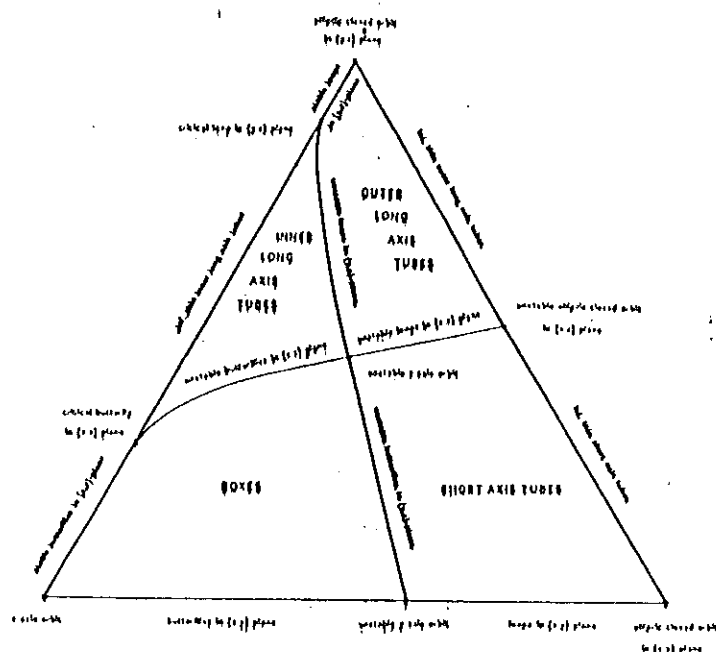


Fig. 2 Se presenta un corte del diagrama de la fig. 1. Se señalan las regiones que ocupan las principales familias de órbitas y además las órbitas de transición que ocurren entre una familia y otra.

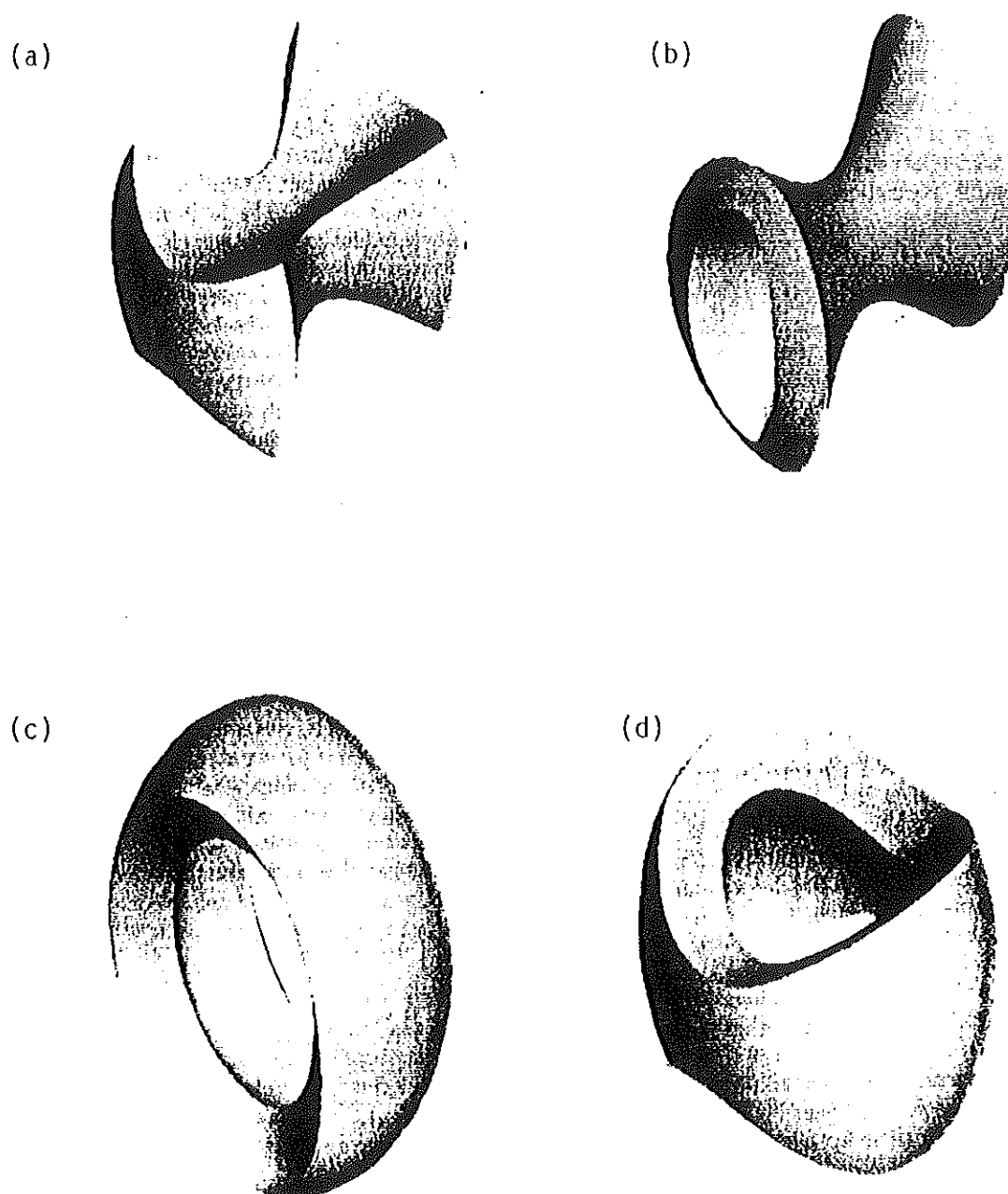


Fig. 3 Orbitas típicas que aparecen en un potencial de Stäckel: (a) órbita de caja; (b)órbita de tubo interna a lo largo del eje mayor; (c) órbita de tubo externa a lo largo del eje mayor y; (d) órbita de tubo a lo largo del eje menor (Statler 1987).

CAPITULO V

COLAPSOS SIN DISIPACION: EXPERIMENTOS NUMERICOS

En este capítulo se describe el código de N -cuerpos empleado para realizar los experimentos numéricos de formación galáctica bajo la hipótesis de un colapso sin disipación, *i.e.* la protogalaxia consta de estrellas únicamente por lo que una descripción de elementos discretos (N -cuerpos) resulta conveniente.

En este capítulo se hace también una descripción de los modelos iniciales que hemos tomado como condiciones iniciales y se describen los experimentos.

§V.1 Colapso sin Disipación vs. Colapso con Disipación

La diferencia fundamental entre la hipótesis de formación galáctica por colapso sin disipación y por colapso con disipación es que en el primer caso se supone que la protogalaxia está compuesta de puntos masa (*e.g.* estrellas) que sólo interactúan elásticamente mientras que en el segundo caso, la protogalaxia está formada principalmente por gas que choca inelásticamente disipando energía.

Un primer intento por incluir en los modelos de formación galáctica procesos disipativos fue el realizado por Larson (1969, 1974). Larson incluyó procesos viscosos debido al gas y procesos de formación de estrellas. Sin embargo, aunque son prometedores y presentan un enfoque más realista de la situación, tienen el gran inconveniente de que se pueden obtener sistemas en equilibrio que concuerden con las observaciones de galaxias reales (*i.e.* perfiles de de Vaucouleurs para galaxias elípticas), simplemente "ajustando" los parámetros que caracterizan estos modelos. Estos modelos son fundamentalmente fenomenológicos pues no se conoce con certeza las propiedades y la física del gas ni la física involucrada en los procesos de formación estelar. Similares propuestas han sido adoptadas por Carlberg *et al.* (1986).

La hipótesis de colapso sin disipación supone que la etapa de formación estelar ha sido completada en su mayor parte antes del colapso dinámico, razón por la cual el sistema no disipa su energía inicial sino que simplemente intercambia energías potencial y cinética hasta alcanzar un equilibrio virial. En la fig. 1 se muestra esquemáticamente el cambio de la tasa de formación estelar con el tiempo para algunos tipos de galaxias. La línea vertical puntada, en el tiempo de colapso t_c , separa este diagrama en dos regiones: la parte izquierda corresponde a una región de baja disipación y la parte de la derecha a una región de alta disipación. La integral bajo la curva proporciona el número total de estrellas formadas por unidad de masa típica de una galaxia.

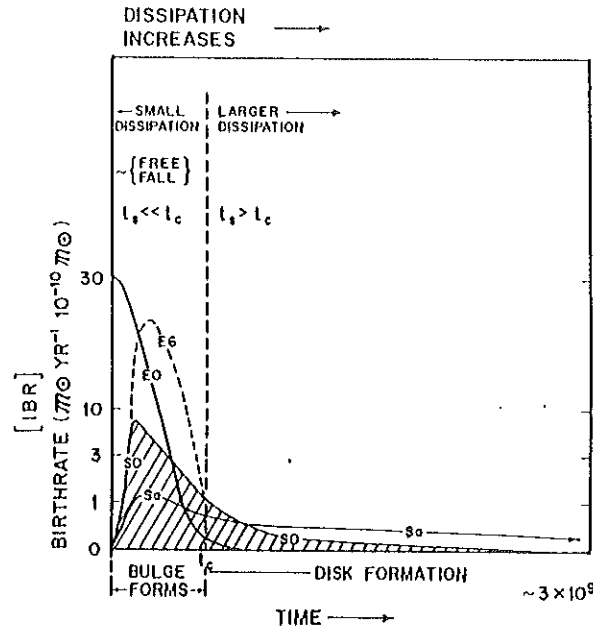


Fig. 1. En esta gráfica se muestra que el proceso de formación estelar tuvo que haber ocurrido a una tasa más rápida que el tiempo de colapso, $t_c \propto (G\rho)^{-1/2}$, antes de que se formara un disco. $t_s \equiv$ el tiempo requerido para completar la formación de estrellas y $t_c \equiv$ el tiempo de colapso. $IBR > M^i$ (The Present Integrated Birth Rate) se define como el número total de estrellas nacidas por año que son más masivas que M^i ya sea por unidad de volumen, o por unidad de masa solar, o por una región tal como una galaxia (Sandage 1986).

Simulaciones de N -cuerpos realizados por van Albada (1982), estudian este mecanismo de formación de galaxias elípticas. Se encuentra que la configuración final, en equilibrio, depende del cociente $\eta_v \equiv 2T/W$ donde T es la energía cinética del sistema y W su energía potencial total. Para valores de $\eta_v \leq 0.1$ se encuentra que la figura final es prolata-triaxial y es similar a la que presentan las galaxias elípticas (Merritt 1987, Aguilar & Merritt 1990 (AM), Burkert 1991).

Los mecanismos de relajamiento dinámico que intervienen durante el colapso son el *mezclado de fase* y el *relajamiento violento*. El primero se debe a la variación de las escalas de tiempo dinámico dentro de un sistema, efecto que hace que cualquier perturbación inicial pierda coherencia (*i.e.* no existen soluciones con propiedades coherentes). Este mecanismo se puede entender más fácilmente si consideramos el ejemplo de un ensemble de péndulos que oscilan bajo la acción de la gravedad (fig. 2).

Supongamos que las condiciones iniciales del ensemble de péndulos aparece como una distribución de forma circular y densidad de puntos constante en el espacio fase. Los péndulos de menor energía tienen períodos más cortos que los de mayor energía. Conforme el ensemble evoluciona, la distribución inicial se va formando una espiral más y más delgada. Un observador "microscópico" (*i.e.* con resolución infinita) vería que la densidad de puntos sigue manteniéndose constante al medirla dentro de la espiral. Sin embargo, un observador

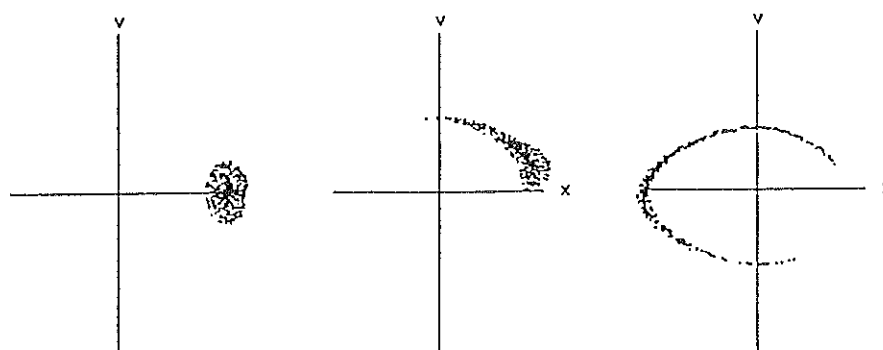


Fig. 2. La distribución estadística de un grupo de péndulos está determinada por el mezclado de fase. La dispersión de la función de distribución que mide un observador "macroscópico" aumenta conforme las fases de los osciladores se mezclan más, mientras que la amplitud disminuye.

"macroscópico" (.i.e con una resolución finita) encontraría que la densidad de puntos que él observa es menor que la densidad de puntos original debido a que en sus mediciones incluye regiones sin partículas. En realidad, lo que él está midiendo es la función de distribución original promediada sobre una región del espacio fase. A esta función de distribución que él mide se le llama *función de distribución granular*. Al proceso que provoca que la función de distribución granular disminuya, conforme los osciladores quedan fuera de fase, se le conoce como **mezclado de fase**. Resumiendo, el mezclado de fase cambia la función de distribución granular manteniendo la energía de cada partícula del sistema *constante*.

Un sistema no colisional fuera del equilibrio experimenta fluctuaciones debido a la dependencia temporal del potencial. Lynden-Bell (1967) propuso un proceso físico, llamado **relajamiento violento**, como un medio para relajar este tipo de sistemas. Este proceso actúa distribuyendo la energía y momento angular de las partículas del sistema; conduciéndolo a una configuración estadística final *única*, en equilibrio e *independiente* de las condiciones iniciales. Sin embargo, como a sido apuntado por Tremaine, Hénon & Lynden-Bell (1986), este estado de equilibrio conduce a una masa infinita para el sistema. Este estado final divergente nunca es alcanzado ya que este mecanismo de relajamiento es impulsado por las mismas fluctuaciones del sistema las cuales al decaer, conducen a un proceso incompleto de relajamiento.

Además de estos dos procesos interviene lo que se ha dado en llamar la *inestabilidad radial*. Esta inestabilidad fue primeramente estudiada por Antonov (1972) para el caso de sistemas esféricos poblados por órbitas radiales. Antonov encontró que tales sistemas

son inestables bajo perturbaciones radiales. Simulaciones numéricas han confirmado su presencia en sistemas con órbitas casi radiales (órbitas muy elongadas) (Merritt & Aguilar 1985, Merritt, 1987, Barnes *et al.* 1986). La forma de las galaxias elípticas es atribuida a esta inestabilidad puesto que el colapso gravitacional, en ausencia de movimientos "turbulentos", genera esencialmente movimientos radiales (Polyachenko, 1981).

§V.2 Código de N -Cuerpos

Para efectuar las simulaciones se utilizó un código de N -cuerpos basado en una expansión en armónicos esféricos del potencial hasta orden octupolar ($l = 3$) (AM). Si $\Psi(r, \theta, \phi)$ representa el potencial de un sistema de N -cuerpos la expansión está dada por (véase sección §II.4)

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{l=3} \sum_{m=-l}^{m=+l} \frac{4\pi Y_{l,m}(\theta, \phi)}{2l+1} \times \left[r^{-(l+1)} \sum_{r < r'} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^l + r^l \sum_{r > r'} Y_{l,m}^*(\theta', \phi') r'^{-(l+1)} \right],$$

donde la primera sumatoria corre sobre las partículas internas a la posición donde se quiere determinar el potencial (r, θ, ϕ) y la segunda sumatoria corre sobre las partículas externas a esta posición (r', θ', ϕ') .

Lo que la expansión en armónicos esféricos hace es aproximar una función delta de Dirac en las coordenadas angulares (θ, ϕ) por medio de una superposición de armónicos. El término monopolar corresponde a un cascarón esférico de densidad superficial de masa constante y masa total igual a la de la partícula que se está aproximando. Los armónicos de orden mayor redistribuyen esta densidad sobre el cascarón aproximando la función delta de Dirac. En la fig. 3 se muestra como distribuyen la masa algunos de estos términos de la expansión en armónicos esféricos.

Es de notar que esta expansión converge para cualquier punto excepto sobre la esfera $r = r'$. En la vecindad de esta esfera, en dirección radial, se presenta una discontinuidad que aumenta considerablemente conforme uno se va términos más grandes en la expansión (McGlynn, 1984). Para evitar estas discontinuidades se reemplaza r y r' por $r + \epsilon$ y $r' + \epsilon$, respectivamente (Villumsen, 1982, White, 1983). Esto equivale a sustituir el cascarón infinitesimalmente delgado por uno de grosor ϵ . La resolución espacial del código, en la dirección radial, está determinada por el suavizamiento ϵ empleado; mientras que, la resolución angular está dada por el orden del armónico en el que se trunca la expansión. Físicamente, introducir el suavizamiento equivale a sustituir las partículas puntuales por esferas de radio ϵ con una distribución de densidad determinada por la expansión del potencial. Así, el suavizamiento disminuye la granularidad del potencial.

Las ventajas de este tipo de códigos es que permiten una resolución espacial mayor (sólo limitada por el parámetro de suavizamiento) a los códigos basados en transformadas

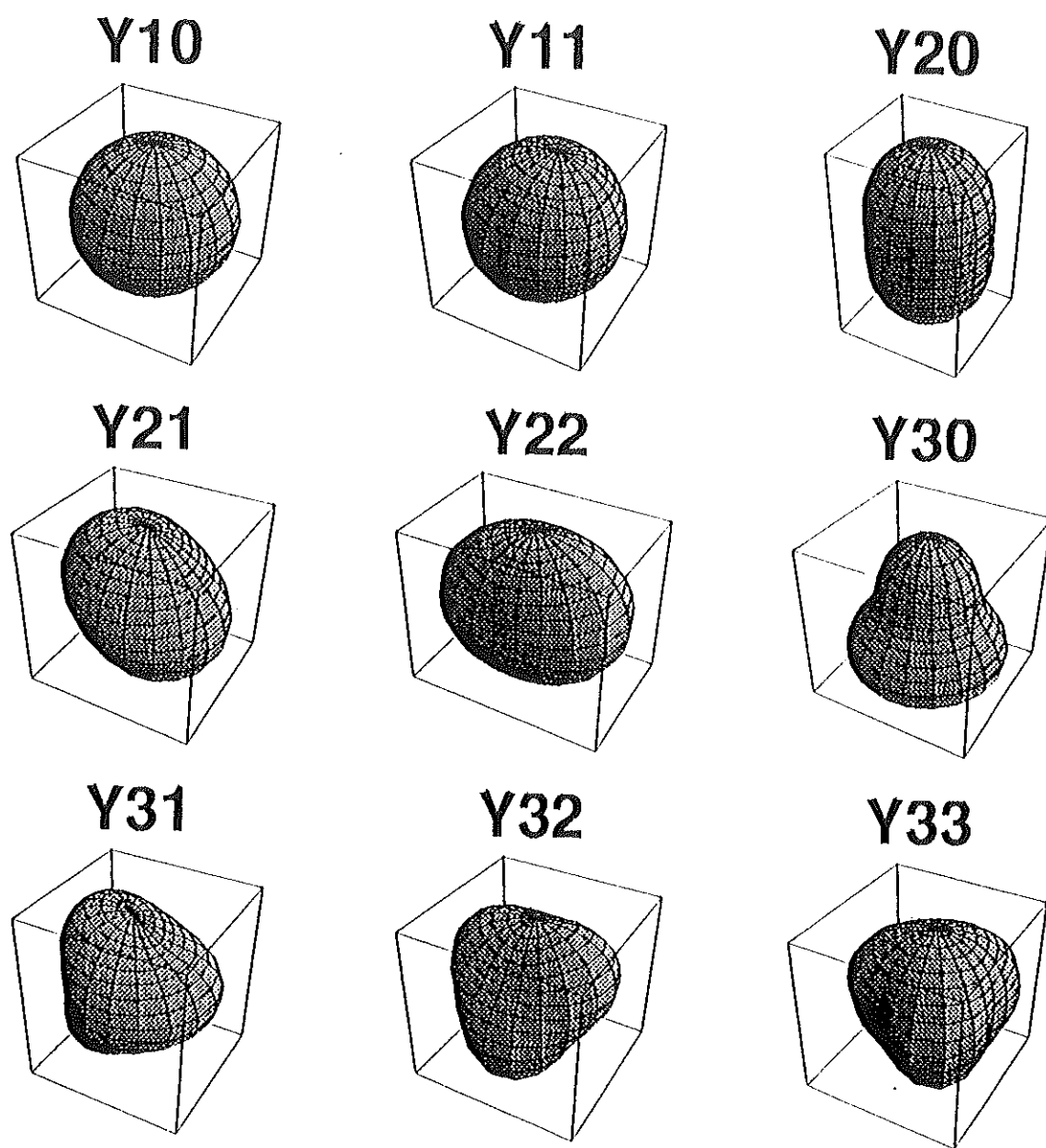


Fig. 3 En esta figura se puede apreciar el efecto de algunos de los términos que intervienen en la expansión del potencial en armónicos esféricos. Para analizar la inestabilidad de barra se ve que la expansión no puede ser truncada en el término cuadrupolar ya que lo que se desea es una configuración que no favorezca la formación de una barra. Es esta la razón por la que la expansión es truncada en el término octupolar ($l = 3$).

de Fourier y permiten calcular las fuerzas en un tiempo menor que los códigos directos (Sellwood, 1987, (AM)). Una propiedad muy importante de estos códigos es que son invariantes bajo una rotación pero no bajo una traslación, que se refleja en la conservación del momento angular pero no del momento lineal y que es característico de estos códigos. Para efectuar la expansión del potencial en esféricos armónicos se requiere de un centro de expansión. La selección del suavizamiento y el efecto del centro de expansión se discutirán más adelante.

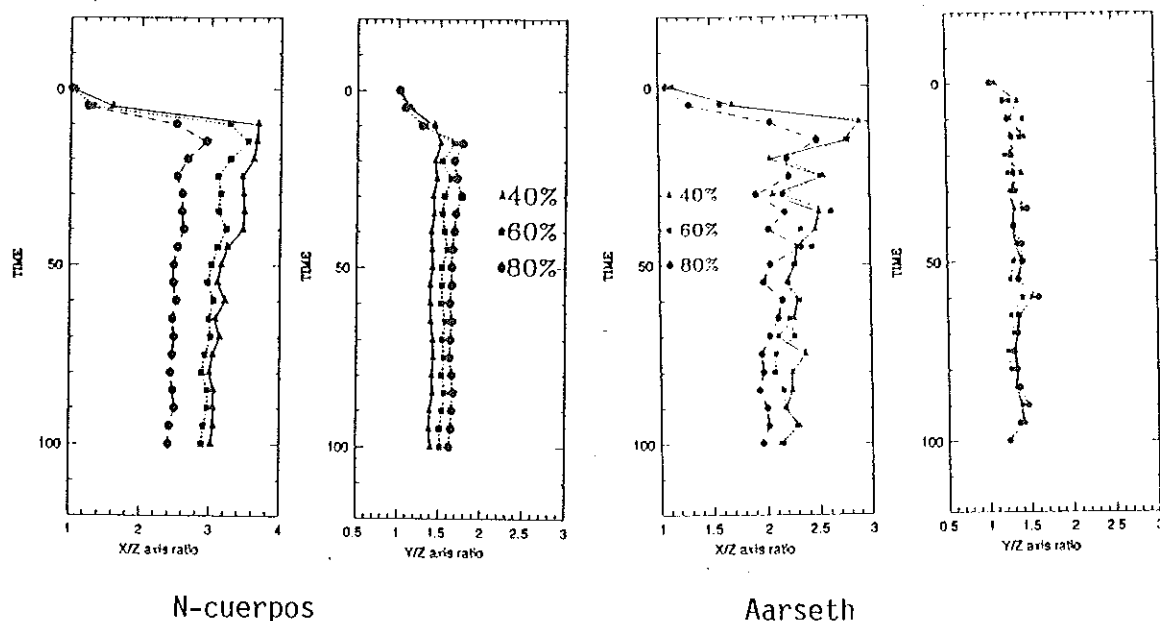


Fig. 4. Se observa que el comportamiento cualitativo de la razón de ejes para el caso en que se utiliza el código de N -cuerpos con separación en dos regiones es similar al obtenido con el código de N -cuerpos de Aarseth (1985). Este último presenta fluctuaciones que son resultado de las colisiones debido al bajo número de partículas utilizado.

Es importante señalar que el código de N -cuerpos divide al sistema en dos regiones concéntricas, una interna y otra externa, con un número de partículas fijo cada una. El incremento temporal en la región interna es $1/4$ del incremento de la externa. Esto hace que la resolución temporal de la región interna sea mayor lo cual resulta útil para seguir colapsos a partir de condiciones iniciales frías (menor energía cinética), los cuales sufren un colapso mayor que resulta en fluctuaciones mayores en el potencial. Se estudió si esta separación artificial del sistema no conducía a efectos espurios. Para esto se utilizó, de manera independiente, un código directo de N -cuerpos (Aarseth, 1985) para el caso de 1000 partículas. Se observa que el comportamiento, al menos cualitativamente, es similar en ambos casos (fig. 4).

Existe otro aspecto importante que debe ser tomado en cuenta, a saber si el centro de expansión debe ser libre o fijo. Puesto que los armónicos esféricos no conservan el momento lineal; al seleccionar un centro de expansión fijo se introducen efectos espurios

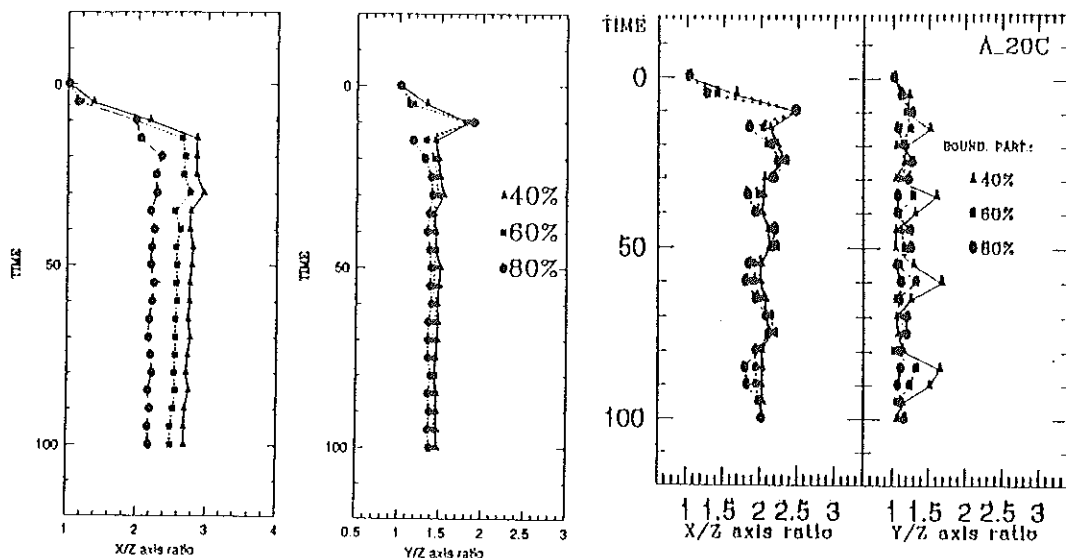


Fig. 5. La figura de la izquierda corresponde a un centro de expansión libre y la figura de la derecha muestra el efecto de seleccionar un centro fijo.

Tabla 1	
	Tiempo de CPU/($N \times Nsteps$)
SUN-Station IPC	1.29×10^{-3} s
SUN-Station Sparc-2	7.50×10^{-4} s
CRAY YMP/4 - 32	6.98×10^{-5} s

que se manifiestan en las oscilaciones que presenta la razón de ejes de las simulaciones (fig. 5).

Las simulaciones se realizaron en una CRAY-YMP/4-32 y tomaron ~ 1 hr y 40 min de CPU. En la tabla 1 se ilustran los tiempos requeridos para efectuar estos colapsos en diferentes sistemas de cómputo donde N representa el número de partículas y $Nsteps$ el número de pasos requeridos para seguir la evolución del sistema.

§V.3 Sistema de Unidades

El sistema de unidades seleccionado es tal que la constante gravitacional, G , es igual a la unidad, la masa total de la protogalaxia, M es igual a la unidad y, la energía inicial total, E , es igual a $-1/4$. Así, la unidad de masa, de longitud y de tiempo para el modelo

resultan ser (Hénon, 1972, Heggie & Mathieu, 1986)

$$\begin{aligned} U_m &= M \\ U_l &= \frac{GM^2}{-4E} \\ U_t &= \frac{GM^{5/2}}{(-4E)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Este sistema se puede escalar a sistemas físicos reales a través de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} U_m &= 10^{10} \mu M_\odot \\ U_l &= \nu \text{ kpc} \\ U_t &= 4.727 \times 10^6 \left(\frac{\nu^3}{\mu}\right)^{1/2} \text{ años} \\ U_v &= 207.4 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{1/2} \text{ km s}^{-1} \end{aligned}$$

donde U_v es la unidad de velocidad, μ y ν constantes.

§V.4 Selección de las Condiciones Iniciales

El perfil de densidad que hemos seleccionado para nuestras condiciones iniciales es de la forma

$$\rho(r) = \rho_o \left(\frac{r_o}{r}\right).$$

La selección de esta forma es arbitraria. Trabajos anteriores han elegido protogalaxias de densidad constante, sin embargo, una esfera homogénea tiene la propiedad de que el tiempo de caída libre es independiente de la posición radial dentro de ella., razón por la cual, esta se colapsa a una singularidad al coincidir todas las partículas de la protogalaxia en el centro al mismo instante. Esta es una situación poco raelista que, además, es imposible de simular numéricamente. De acuerdo a los trabajos de Gott (1973, 1975) sobre formación galáctica, una nube que se desprende del flujo de expansión del Universo y que se colapsa bajo la acción de su propia gravedad lo hace de tal manera que capas radiales más externas caen sobre las interiores a tiempos posteriores. El perfil de densidad que hemos elegido tiene esta propiedad por lo que es más "realista" que la condición de esfera homogénea. Sin embargo, esta elección no deja de ser arbitraria y en un trabajo subsecuente debía de ser sustituida por una protogalaxia cuyo perfil de densidad haya sido obtenido de una simulación cosmológica de la estructura a gran escala del Universo. Algo que podemos agragar en justificación de nuestra elección es que estamos estudiando la estructura de galaxias formadas por una inestabilidad dinámica, misma como veremos en los resultados, borra en gran medida cualquier memoria de las condiciones particulares, esto hace suponer que la forma del perfil de densidad inicial no es determinante, dentro de un intervalo amplio de formas, para los resultados reportados en este trabajo.

El tamaño inicial de la protogalaxia, para esta distribución de densidad, resulta ser

$$r_{tot} = \frac{GM(2 - \eta_v)}{3 |E|},$$

donde $\eta_v \equiv |2T/W|$ es el *coeficiente virial*, T es la energía cinética del sistema, W la energía potencial y M la masa total del sistema. En unidades del modelo $r_{tot} = 1.333(2 - \eta_v)$. De esta manera resulta muy sencillo generar posiciones radiales de las partículas consistentes con la distribución de densidad adoptada. Basta generar un número al azar entre 0 y 1 y multiplicarlo por r_{tot} .

Para el caso de las velocidades la tarea resulta un poco más complicada. Adoptaremos una distribución Maxwelliana de velocidades para generar el módulo del vector velocidad.

$$f(v) = N \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{con } v_{rms} = \sqrt{3}\sigma.$$

La integral de esta distribución (normalizada) entre 0 y v proporciona la probabilidad, $P(v) \propto \int_0^v f(v)v^2 dv$, de que la partícula tenga una velocidad entre 0 y v . Puesto que la probabilidad sólo puede tomar valores entre 0 y 1, y obtenemos el valor de la velocidad correspondiente como el valor de la función inversa de $P(v)$ evaluando en este número al azar (Press *et al.* 1986).

Para obtener la orientación del vector velocidad se procede de la siguiente manera: notemos que el ángulo polar varía entre 0 y 2π . Para generar este ángulo se toma un número al azar entre 0 y 1 y se multiplica por 2π . Para el caso del ángulo azimutal interviene un coseno que varía entre -1 y $+1$. Al número generado al azar entre 0 y 1 se le asocia el coseno del ángulo azimutal. De aquí se obtiene fácilmente este ángulo. Así, conocidos la magnitud del vector velocidad y su orientación en el espacio de velocidades, queda completamente determinado el vector velocidad para cada una de las partículas que forman la protogalaxia y la dispersión de velocidades en este caso resulta ser $\sigma \propto \eta_v/(2 - \eta_v)$.

§V.5 Límites de Validez de los Experimentos

En principio, el centro de expansión del potencial en armónicos esféricos corresponde al mínimo del potencial; sin embargo, en la práctica utilizamos una partícula que colocamos inicialmente en reposo en el centro de la protogalaxia. La masa de esta partícula, así como el suavizamiento para el potencial, son cruciales en la conservación de la energía. Podría creerse que una mejor elección sería situar el centro de expansión en el centro de masa de la protogalaxia (que tiene un significado físico directo) pero éste tiene el inconveniente de darle mayor peso a las partículas más alejadas las cuales no definen el centro del potencial. Para determinar los valores más adecuados para las simulaciones se estudiaron varios valores para el radio de suavizamiento ϵ y para la masa de la partícula central. Estos experimentos se realizaron para $N = 5000$ partículas y para 100 unidades de tiempo de evolución del modelo (Tabla 2).

$N = 5000$		
ϵ	M_1/M_i	$\Delta E/E_0$
0.025	1	0.208
0.025	10	0.242
0.025	20	0.774
0.080	1	0.048
0.080	10	0.222
0.080	20	0.505

Tabla 2. Se muestran los resultados de los experimentos realizados para determinar los parámetros más adecuados. Se observa que existe una significativa dependencia de la energía de estos parámetros. La notación usada es: $\epsilon \equiv$ parámetro de suavizamiento, $M_1 \equiv$ masa de la partícula central, $M_i \equiv$ masa de cada una de las demás partículas y $\Delta E/E_0 \equiv$ la fracción de pérdida de energía de todo el sistema.

En la fig. 6 se muestra el efecto que tiene la selección de los parámetros (masa y radio de suavizamiento) sobre el movimiento de la partícula que sirve como centro de expansión del potencial. Se observa que:

- i). La partícula central experimenta un movimiento browniano (cambios aleatorios y bruscos en la velocidad y en la posición) si su masa es comparable a la de las demás partículas. En este caso, se tiene una mejor conservación de la energía. Esto aparentemente va contra la intuición, ya que se esperaría que entre más masiva sea la partícula central menor sea la deflexión que experimentaría al interactuar con las demás partículas. Este hecho aparentemente paradójico puede entenderse si se tiene en cuenta que entre más masiva es esta partícula mayor inercia presenta y por lo tanto, es más difícil que regrese a la posición central por interacciones con las otras partículas. Se observa además que la incursión de esta partícula en el espacio de configuración y en el espacio de velocidades es mayor (fig. 6(a) y (b)). Otro aspecto interesante es que describe una trayectoria más suave. Esto es consecuencia de que experimenta una densidad de masa debida a las partículas que caen en el centro del potencial. Los experimentos indican que lo más adecuado es asignarle a todas las partículas la misma masa.
- ii). A mayor suavizamiento la conservación de la energía mejora significativamente. Esto es comprensible pues el suavizamiento está directamente relacionado con la granularidad del potencial. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el suavizamiento también determina la resolución espacial, en la dirección radial, del código. Para las simulaciones se ha adoptado un suavizamiento de $\epsilon = 0.08$ (véase tabla 2).

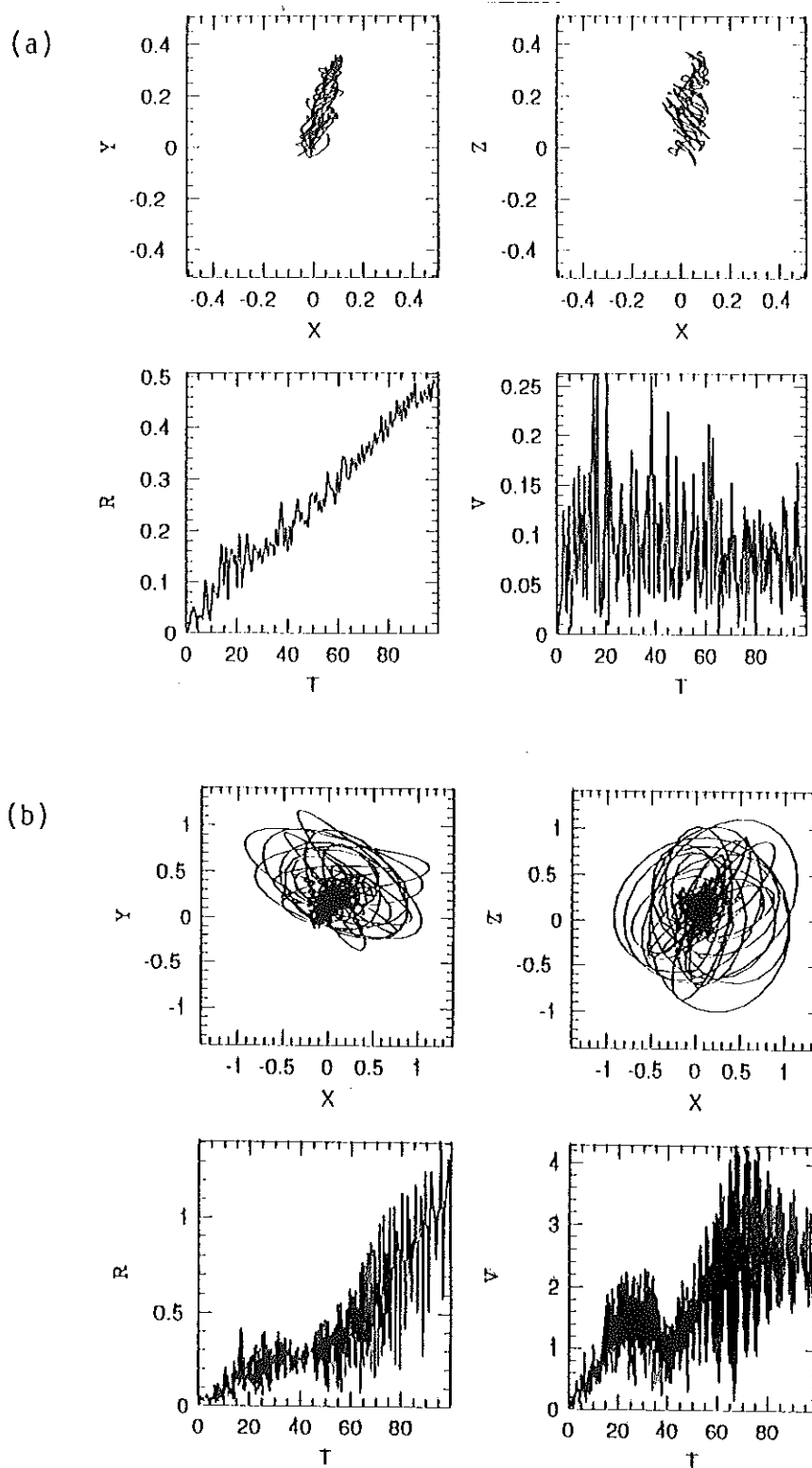


Fig. 6(a) Se observa que la partícula central sigue un movimiento browniano para $M_1/M_i=1$ y $\epsilon=0.08$. **(b)** En este caso $M_1/M_i=20$ y $\epsilon=0.08$. La partícula central sigue una trayectoria más suave y su incursión en el espacio de configuración y de velocidades es mayor.

Colapsos para Condiciones Iniciales Esféricas sin Rotación							
$N = 20\,000$				partículas			
Condiciones	Iniciales		Condiciones		Finales		
Corrida	$(c/a)_o$	$\log(\eta_v)$	$(a:b:c)_{0.8}$	τ	$(c/a)_{0.8}$	$(\frac{\Delta M}{M_o})$	$(\frac{\Delta E}{E_o})$
A10A	1.0	-2.00	2.403:1.620:1	0.442	0.42	0.13	0.049
A20A	1.0	-1.75	2.173:1.377:1	0.321	0.46	0.15	0.014
A30A	1.0	-1.50	2.113:1.413:1	0.371	0.47	0.15	0.025
A40A	1.0	-1.25	1.792:1.181:1	0.228	0.56	0.13	0.011
A50A	1.0	-1.00	1.431:1.010:1	0.023	0.70	0.09	0.009
A60A	1.0	-0.75	1.082:1.007:1	0.085	0.92	0.00	0.002
A70A	1.0	-0.50	1.025:1.010:1	0.400	0.98	0.00	0.002

Tabla 3. Esta tabla contiene los parámetros iniciales y finales para cada una de las simulaciones. El subíndice 0.8 indica que estos parámetros se han determinado considerando el 80% de la masa ligada del sistema resultante.

Para finalizar, mencionaremos que el efecto de aumentar el número de partículas se refleja esencialmente en la suavidad del potencial, en la conservación de la energía y en las concentraciones de masa que se pueden obtener.

§V.6 Descripción de los Experimentos

Los experimentos de colapso sin disipación que se efectuaron son similares a los de (AM) con tres importantes diferencias: (a) se utilizaron 20 000 partículas, (b) un parámetro de suavizamiento $\epsilon = 0.08$ y, (c) un tiempo de evolución de 100 unidades en unidades del modelo. Esto se hizo con el objeto de

- (i) Eliminar algún efecto espurio de evolución debido al pequeño número de partículas.
- (ii) Obtener una mejor conservación de la energía que la reportada por (AM). Esto nos permite seguir por más tiempo la evolución del experimento numérico.
- (iii) Garantizar que el sistema alcance una configuración de equilibrio.

Los experimentos numéricos, denotados por A10A ... A70A, corresponden a condiciones iniciales esféricas sin rotación neta inicial. Estos se distinguen *únicamente* por el valor del coeficiente virial η_v que se les ha asignado. El valor de estos coeficientes cubre un intervalo desde $\log(\eta_v) = -2.00$ hasta $\log(\eta_v) = -0.50$ con incrementos de 0.25. A los colapsos que tienen un valor más pequeño en este parámetro se les denomina "fríos" y a los que alcanzan valores mayores se les denomina "tibios". En la tabla 3 se resumen las condiciones iniciales de cada uno de los experimentos numéricos. La razón $(c/a)_o$

corresponde a la razón del eje menor al eje mayor del sistema. Puesto que partimos de una configuración inicial esférica, esta razón de ejes toma el valor de la unidad.

En las figuras 7(a) y 7(b) se muestran "fotografías instantáneas" para diferentes tiempos de evolución de la protogalaxia. Estas fotografías corresponden a proyecciones del sistema en el plano XZ. La fig. 7(a) corresponde a un colapso con el menor coeficiente virial mientras que la fig. 7(b) corresponde al coeficiente virial mayor. Para el A10A el producto final del colapso muestra la formación de una barra la cual tiene su origen probablemente en la presencia de la inestabilidad radial (Barnes 1985, Merritt & Aguilar 1985, AM) mientras que el A70A no sufre tal inestabilidad. Esto sugiere que el mecanismo responsable de la formación de la barra esta correlacionado con el valor del coeficiente virial particularmente, con la cantidad de energía cinética aleatoria inicial presente en la protogalaxia. Asimismo, en los colapsos fríos, la inestabilidad borra las condiciones iniciales de la que partió el sistema. Esto no ocurre en el caso del colapso A70A ya que su evolución mantiene una estructura esférica.

Para determinar la configuración final del sistema se calculan los ejes principales del tensor de inercia. Primeramente, se eliminan todas las partículas que no permanecen ligadas al sistema para evitar que introduzcan fluctuaciones. Luego, las razones de ejes se calculan a través de las siguientes relaciones:

$$\frac{b}{a} \equiv \sqrt{\frac{\sum y^2}{\sum x^2}} \quad y \quad \frac{c}{a} \equiv \sqrt{\frac{\sum z^2}{\sum x^2}}$$

donde x , y y z son las coordenadas de las partículas tomadas con respecto a los ejes principales del tensor de inercia. En la tabla 3 se resumen los valores de estas razones de ejes para el 80% de las partículas que permanecen ligadas al sistema. En la fig. 8 se muestra un ejemplo de estas razones de ejes como función del tiempo para el 40%, el 60% y el 80% de las partículas ligadas.

Los contornos de isodensidad, mostrados en las figuras 9(a) y 9(b), permiten apreciar más claramente la forma en que ocurren los colapsos y en el caso del A10A resaltan la estructura de la barra. Es evidente que los contornos de isodensidad en el caso del A10A tienen la apariencia de "cajas puras" similar a la que es observada en algunas galaxias elípticas. Este resultado contradice la hipótesis de que la forma de caja se debe a procesos de fusión galáctica (Binney 1986, Nieto 1989). Stiavelli *et al.* (1992) encuentran que figuras de caja y de disco coexisten en un sistema formado por colapso sin disipación dependiendo del ángulo de visión. El experimento que estudian en ese trabajo corresponde en nuestro caso a un colapso intermedio entre un A40A y un A50A. En la fig. 10 se muestran los contornos de isodensidad para el colapso A40A proyectados en los tres planos formados por los ejes principales del sistema. Este resultado está en completo acuerdo con lo reportado por Stiavelli *et al.*

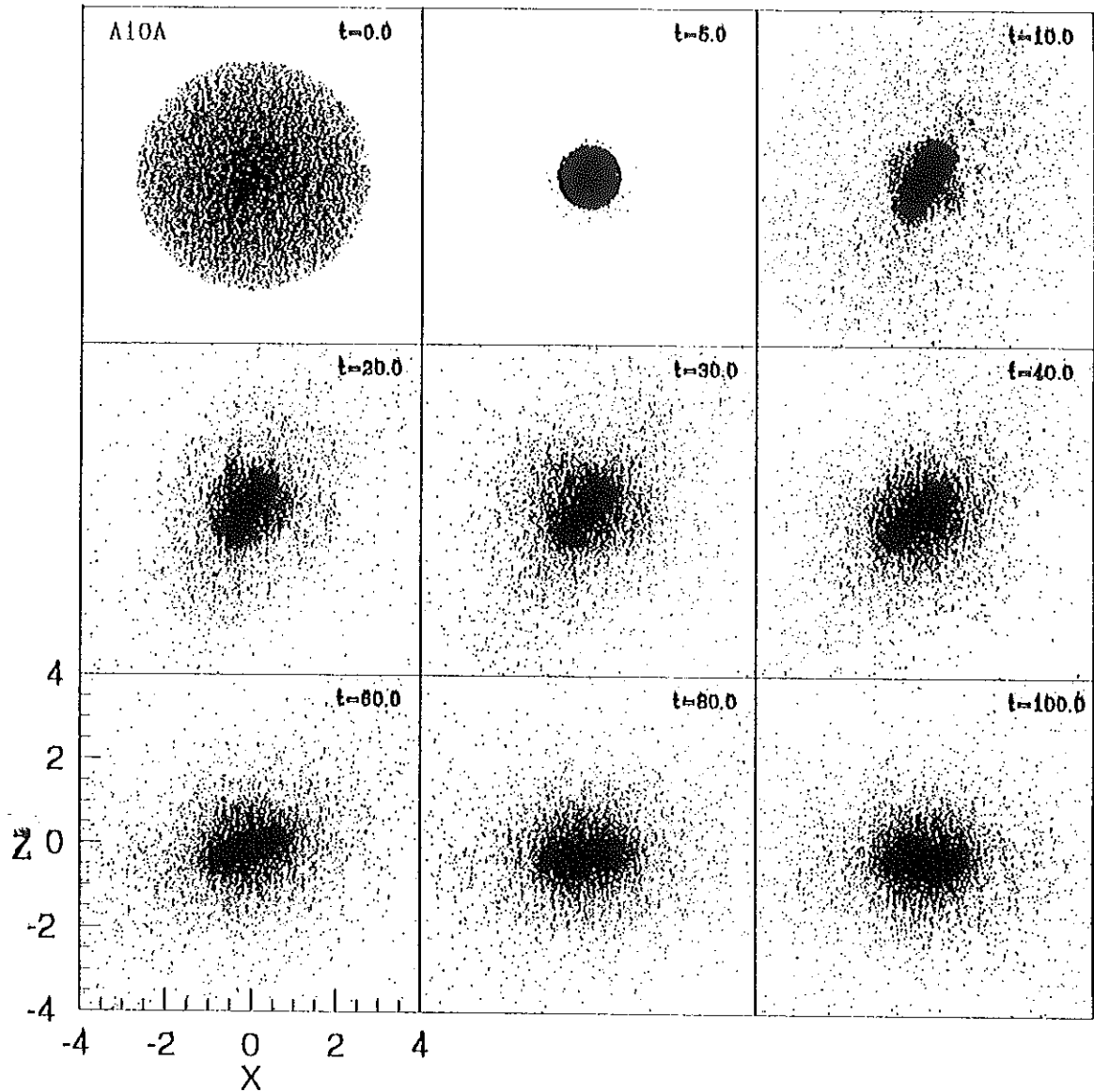


Fig. 7(a). Corresponde a un colapso esférico sin rotación con $\log(\eta_*) = -2.00$. El eje X corresponde al eje mayor de la configuración final del sistema mientras que, Z corresponde al eje menor de esta misma configuración. Note que el colapso ocurre ~ 5 unidades de tiempo.

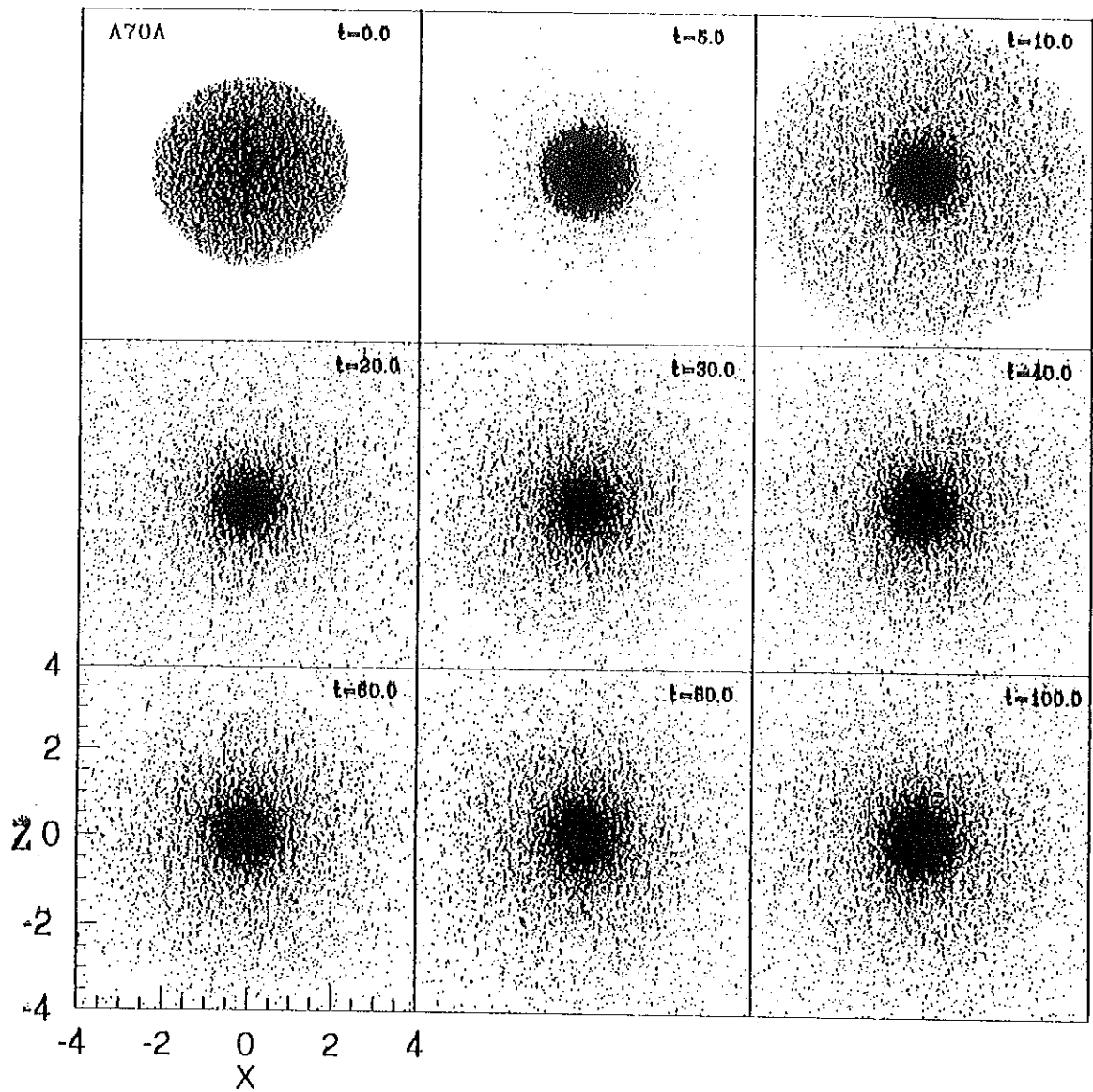


Fig. 7(b). Lo mismo que en la figura anterior sólo que para un coeficiente virial $\log(\eta_v) = -0.50$.

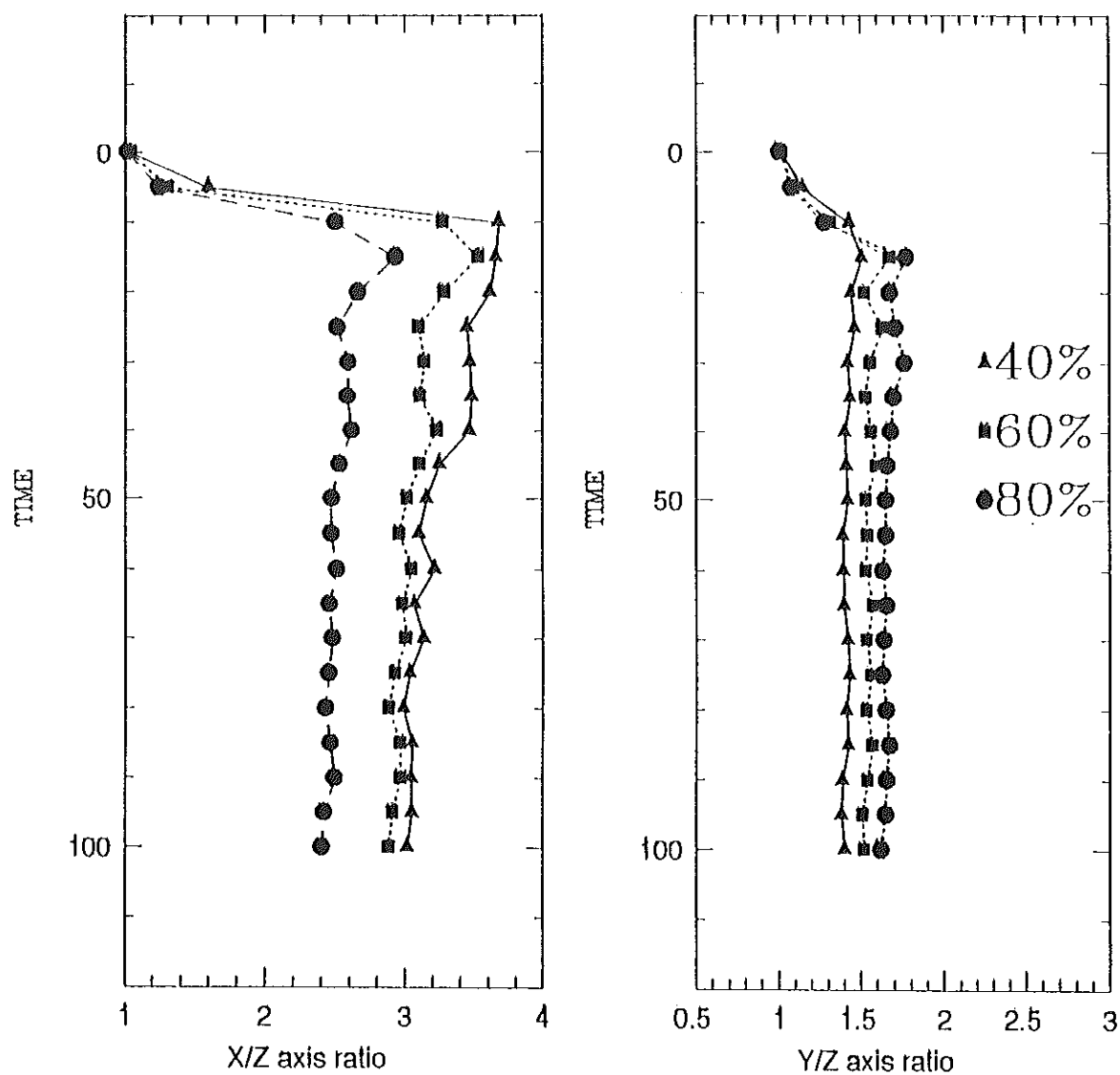


Fig. 8 Razones de ejes como función del tiempo para el experimento numérico A10A. Se puede apreciar que la configuración final que alcanza el sistema ocurre $\sim$ a 50 unidades de tiempo en unidades del modelo.

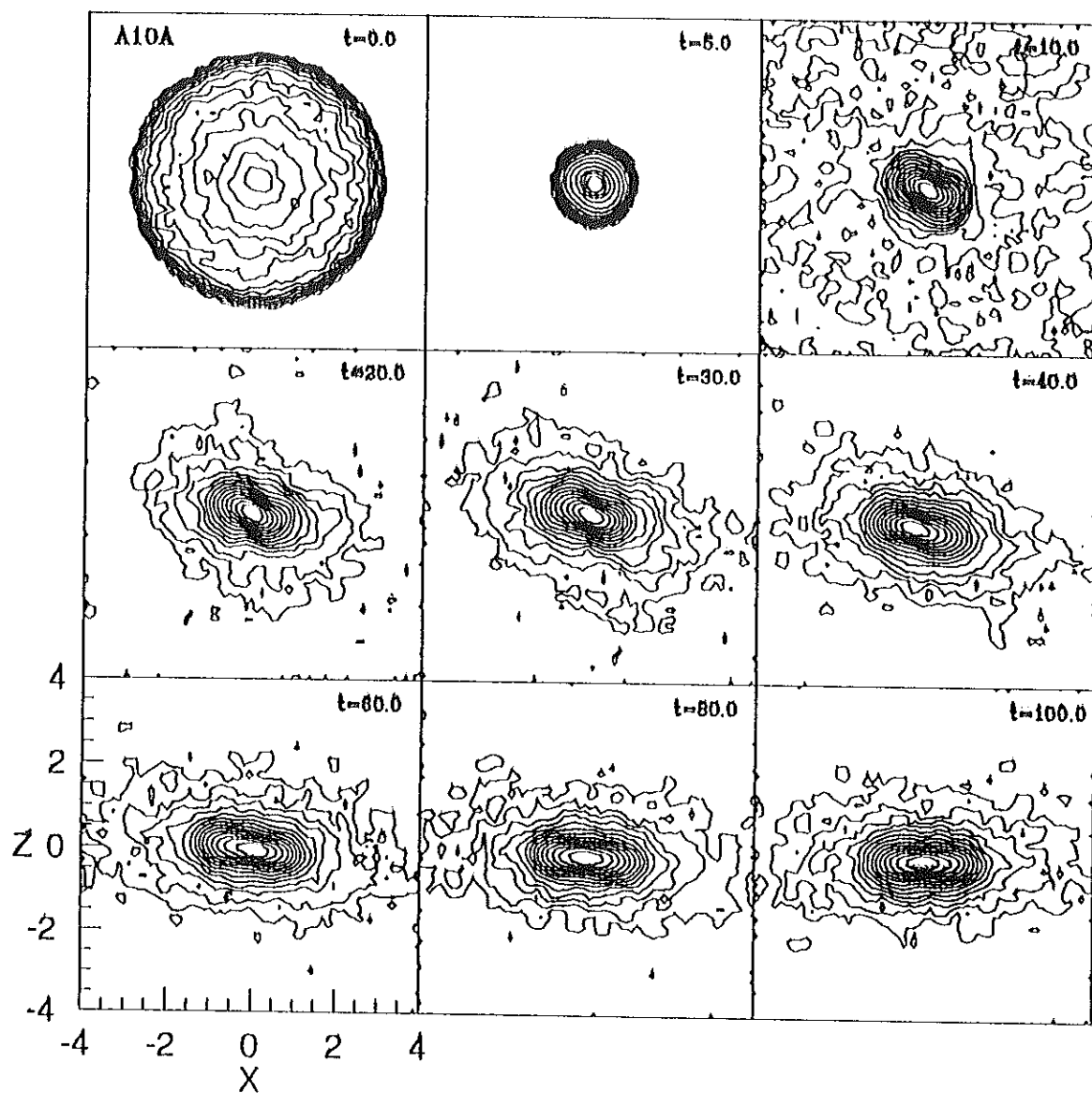


Fig. 9(a). Contornos de isodensidad para el experimento numérico A10A vistos a lo largo del eje intermedio Y. Se encuentran figuras similares a esta cuando esta simulación es vista a lo largo del eje mayor X y del eje menor Z.

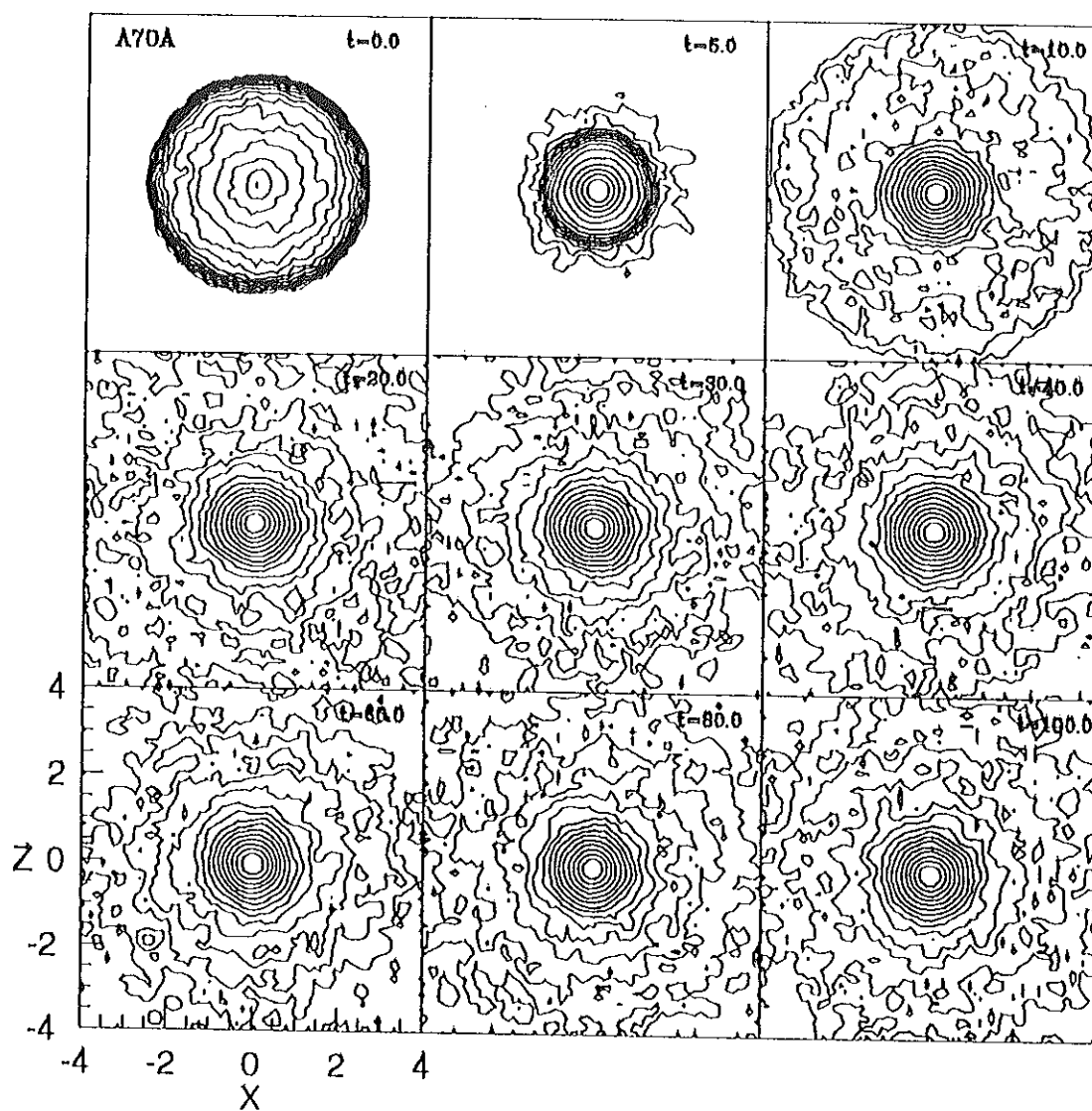


Fig. 9(b). Contornos de isodensidad para el un colapso tibio A70A visto a lo largo del eje intermedio Y. Note que conserva su estructura esférica inicial.

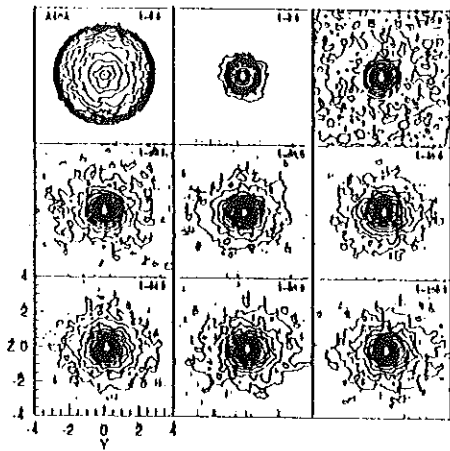
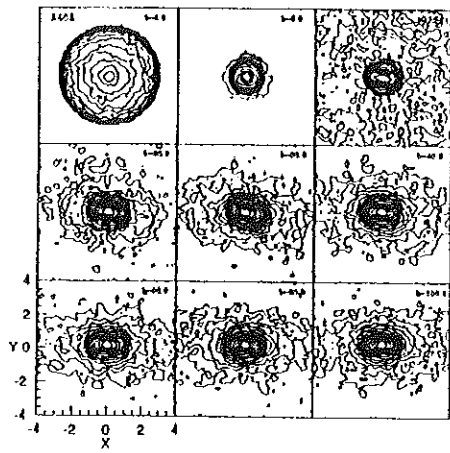
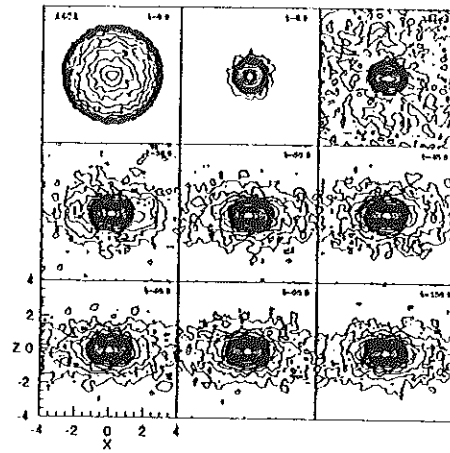


Fig. 10. Contornos de isodensidad para el modelo A40A. Este modelo presenta condiciones similares a las del modelo que reportan Stiavelli *et al.* .

El *parámetro de triaxialidad*, definido por $\tau \equiv (b - c)/(a - c)$ con $a \geq b \geq c$ (AM), permite inferir crudamente el grado de triaxialidad que muestra una galaxia elíptica. Para $\tau = 0$ la figura es prolata, para $\tau = 1$ la figura es prolata y para $\tau = 1/2$ la figura es triaxial. Este parámetro por sí sólo no da información completa de la forma intrínseca de una galaxia elíptica sino que requiere combinarse con otro parámetro que proporcione información adicional sobre la estructura interna del sistema.

Siguiendo a (AM) adoptamos la razón entre el eje menor al eje mayor, c/a . Los valores de estos dos parámetros para los experimentos numéricos se encuentran en la tabla 3. La fig. 11 muestra la posición de cada uno de los colapsos en un diagrama triangular que tiene por abcisa al parámetro de triaxialidad τ y por ordenada la razón de ejes (c/a). Se han incluido los colapsos por (AM). Es clara la tendencia de agrupamiento de los colapsos dependiendo del valor η_v . Los colapsos más fríos, $\log(\eta_v) \leq -1.50$, tienden a agruparse en la región central ubicada en la parte de abajo en el diagrama triangular; mientras que, los colapsos tibio $\log(\eta_v) \sim -1.00$ presentan figuras más prolatas y los colapsos que no sufren la inestabilidad de barra permanecen cerca de la parte superior del diagrama que corresponde a un modelo esférico. Este comportamiento sugiere que el relajamiento violento tiende a llevar a los colapsos más fríos a una configuración final *única* con una pequeña dispersión tal como lo señaló Lynden-Bell (1967). La dispersión que presentan los modelos de (AM) se debe al reducido número de partículas, $N = 5\,000$, empleado en las simulaciones.

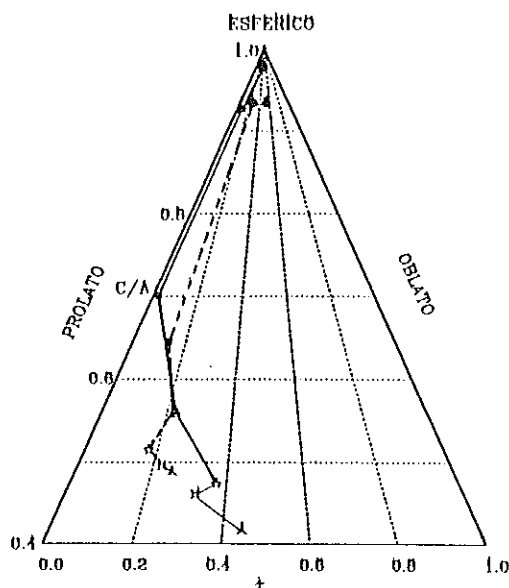


Fig. 11. En el Diagrama triangular se han graficado las configuraciones finales de nuestros modelos y las obtenidas por (AM). Nuestras simulaciones han sido unidas por una línea continua y las de (AM) por una línea a trazos.

En la fig. 12 se presentan los modelos del "elipsoide perfecto", tomados de Statler (1987), que guardan similitud con las razones de ejes obtenidas en nuestros experimentos.

Estos modelos fueron usados por Statler para estudiar la estructura orbital de sistemas triaxiales y van a servir como punto de comparación en el análisis de la estructura orbital de los colapsos sin disipación. El resto de los modelos que aparecen en el trabajo de Statler o son oblatos y/o tienen una razón de ejes $(c/a) < 0.4$.

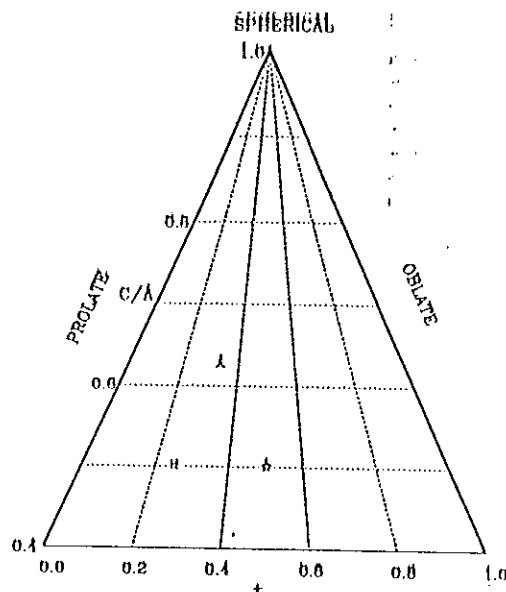
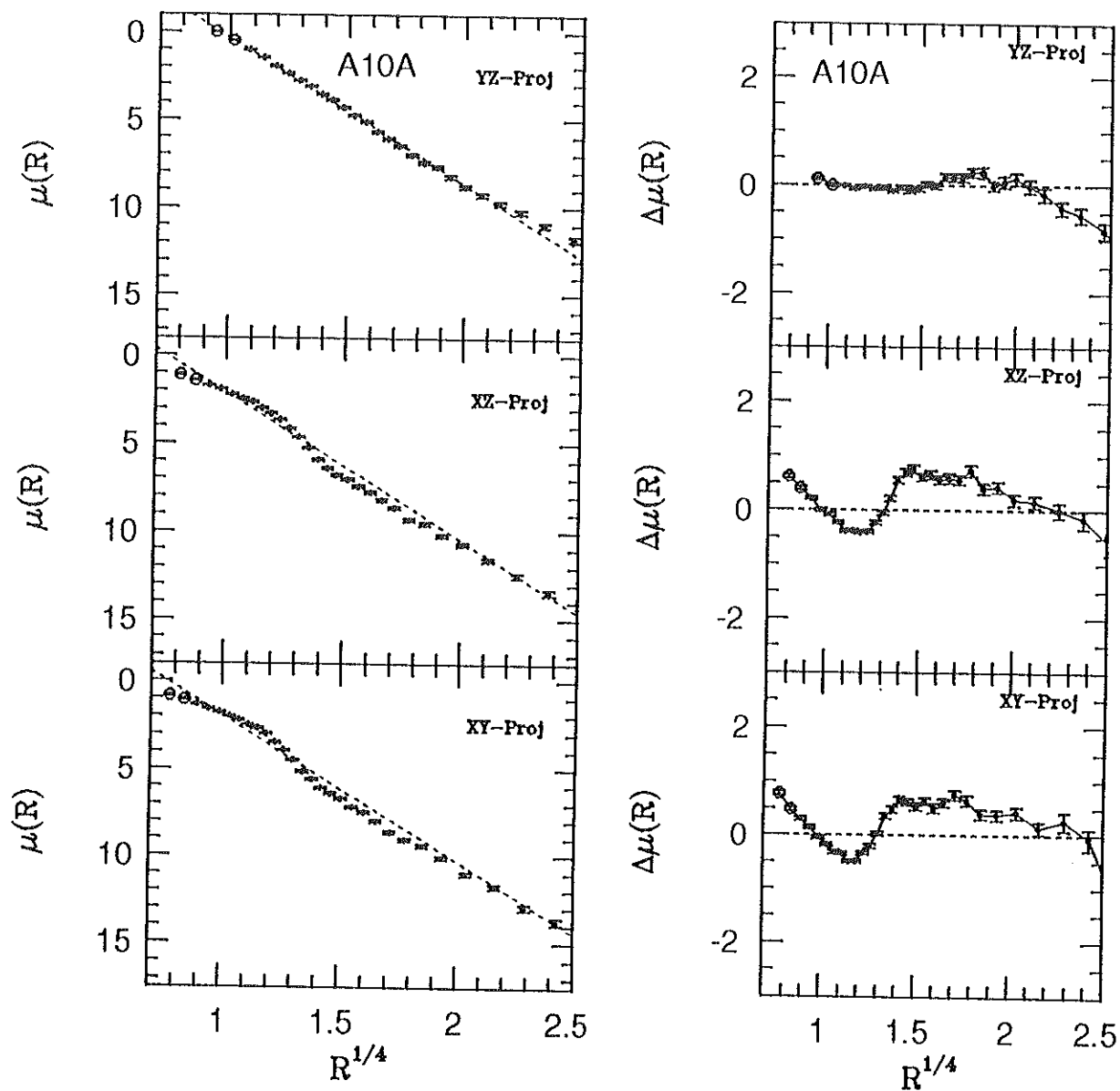


Fig. 12. Diagrama triangular para los modelos 2, 4 y 5 de Statler (1987); las razones de ejes para estos modelos son (1.6:1.2:1), (2:1.25:1) y (2:1.75:1), respectivamente.

Se hizo fotometría sobre la configuración final en equilibrio de las simulaciones de colapso y se encontró que el perfil $r^{1/4}$ se presenta de manera natural si uno observa a lo largo del eje mayor de la configuración. Esto concuerda con lo reportado por (van Albada 1982). Hjorth & Madsen (1991) indican que la existencia de un perfil $r^{1/4}$ no refleja las condiciones iniciales ni la distribución interna de velocidades, sino más bien la profundidad del pozo de potencial. Se presentan desviaciones del perfil $r^{1/4}$ cuando la configuración final en equilibrio es observada a lo largo del eje intermedio y del eje menor (fig. 13). Este mismo comportamiento se observa de manera sistemática en galaxias elípticas reales (Michard 1985). Hjorth & Madsen sugieren que estas "ondas" que se observan en los residuales posiblemente permitan inferir la profundidad del pozo de potencial en galaxias elípticas reales. Especulando podemos pensar que estos mismos residuales pueden dar información acerca de la estructura interna de las galaxias elípticas y de su grado de triaxialidad.

Finalmente, en las figuras 14 se muestra el "diagrama de Lindblad". En este diagrama se aprecia claramente como actúa el relajamiento violento distribuyendo la energía y momento angular de cada una de las partículas. Conforme la protogalaxia se colapsa cada vez más, el centro del potencial se hace cada vez más profundo y la partícula situada originalmente



13. Las figuras de la izquierda corresponden a los resultados de la fotometría efectuado en las simulaciones. En la parte derecha tenemos que los residuales se presentan como "ondas" que caracterizan las desviaciones de un perfil $r^{1/4}$. Se presentan las tres proyecciones en los planos definidos por los ejes principales del sistema.

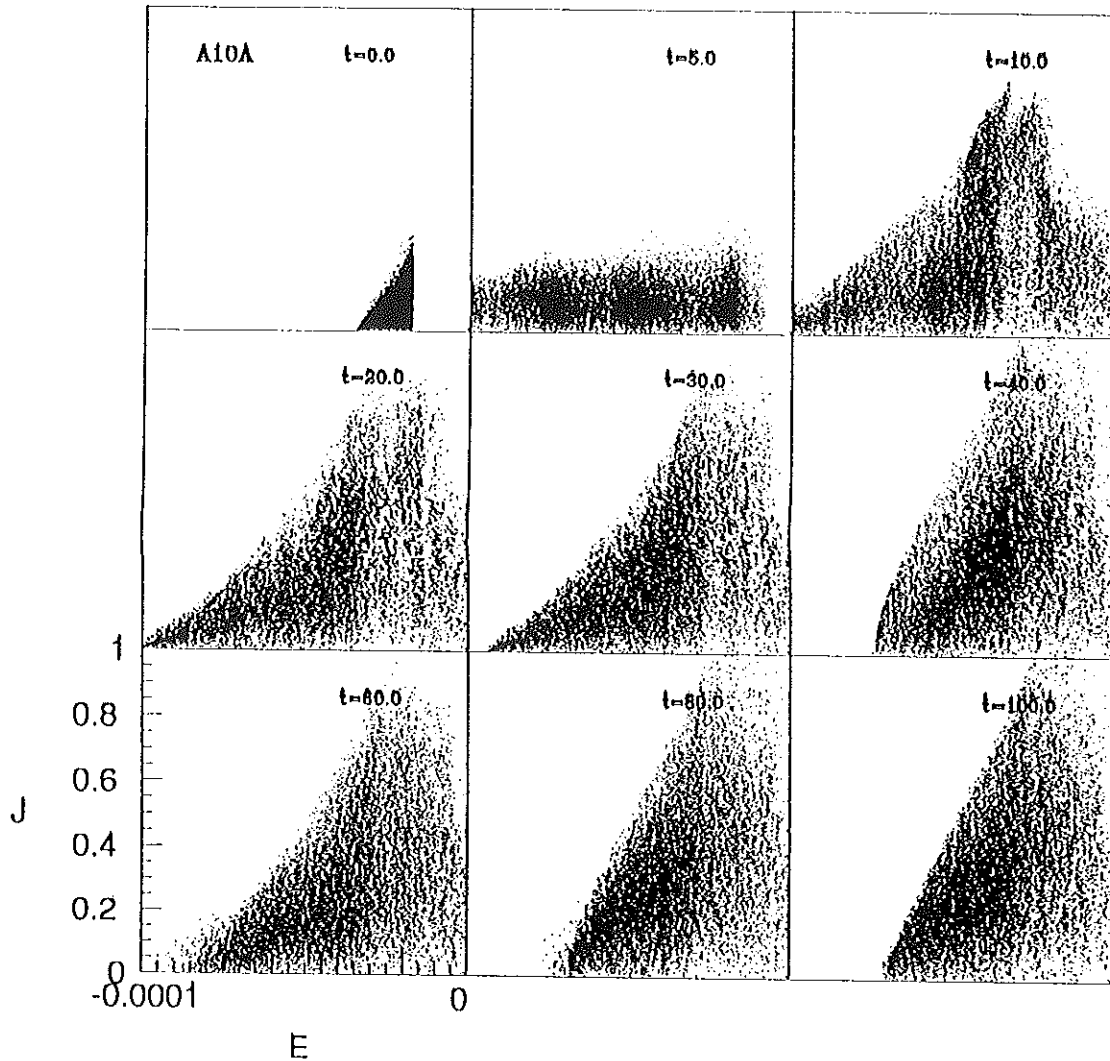


Fig. 14. Diagrama de Lindblad para el colapso A10A. Se puede ver como el mecanismo dinámico de relajamiento violento distribuye la energía de cada una de las partículas.

en reposo en el centro de la protogalaxia permanece, en principio, en reposo. En este proceso de colapso la energía de la partícula central decrece mientras que la energía de otras partículas aumenta. El cambio en energía que experimenta cada una de las partículas depende de la posición y velocidad iniciales. Después de que alcanza el colapso $t \sim 5$ unidades de tiempo la protogalaxia comienza un proceso de expansión y adquiere su configuración final a $t \sim 50$ unidades de tiempo. La profundidad del pozo después del colapso resulta ser mayor que la que tenía originalmente.

§V.7 CONCLUSIONES

Nuestra principales conclusiones son:

- (i) El colapso sin disipación de una nube protogaláctica da lugar a configuraciones en equilibrio que asemejan algunas de las propiedades que se observan en galaxias elípticas reales. A pesar de que no incorpora procesos que involucren gas permite estudiar mecanismos dinámicos que ocurren en la formación de galaxias elípticas .
- (ii) La relación entre procesos de fusiones galácticos y la forma de caja de las isofotas no es definitiva. La posibilidad de obtener contornos de isodensidad con estas características ha quedado establecida, al igual que la coexistencia de isofotas con forma de caja y disco en un mismo modelo producto de un colapso sin disipación.
- (iii) Los sistemas protogalácticos que evolucionan a través de colapso sin disipación tienden a agruparse dependiendo del valor del coeficiente virial η_v . Los colapsos que sufren una inestabilidad de barra mayor tienden a una configuración final *única* con una dispersión muy pequeña alrededor de esta configuración, mientras que los modelos que no sufren esta inestabilidad guardan su estructura esférica.
- (iv) Las desviaciones que se observan en los residuales en galaxias elípticas son también observados en simulaciones de colapso sin disipación si se determinan los perfiles $r^{1/4}$ a lo largo de direcciones que no coincidan con la dirección del eje mayor del sistema. Un estudio más sistemático de este resultado posiblemente arroje información sobre la estructura intrínseca de las galaxias elípticas y sobre las características del potencial.

Se requieren hacer más realizaciones azarosas de estos modelos para reforzar algunas de estas conclusiones. Sobre todo, estudiar más en detalle la fotometría de los productos de los colapsos sin disipación ya que parecen prometedores.

CAPITULO VI

ESTRUCTURA ORBITAL: EXPERIMENTOS NUMERICOS

En la actualidad, el estudio de la estructura orbital a adquirido gran relevancia en la dinámica estelar. Esto se debe a que una comprensión del tipo y cantidad de órbitas que pueblan un sistema estelar puede arrojar información indirecta sobre su estructura interna. En esta parte de la tesis, utilizaremos las simulaciones del colapso sin disipación para estudiar la estructura orbital a que da lugar este posible mecanismo de formación de galaxias elípticas. Describiremos en detalle como es que se seleccionan las condiciones iniciales para estudiar las órbitas; los criterios utilizados para clasificarlas y se discutirán sus repercusiones con respecto a algunos de los modelos teóricos.

§VI.1 Selección de las Condiciones Iniciales

Las configuración final de cada uno de las simulaciones A10A a A70A es rotada, en posiciones y velocidades, con respecto a los ejes principales del tensor de inercia para el 80% de las partículas ligadas. Las posiciones y velocidades resultantes de este proceso (ya corregida la inestabilidad del código, véase sección §V.2) son utilizados como las condiciones iniciales para cada una de las estrellas que intervienen en la simulación. Las estrellas que no están ligadas al sistema son "eliminadas". El movimiento de estas estrellas se efectúa en el potencial extraído de la configuración final en equilibrio. La integración de las órbitas se realiza empleando un integrador Runge-Kutta de 4° orden con paso autoajutable (Press & Teukolsky, 1992). Las fuerzas sobre la estrella se determina a través de la expansión del potencial en armónicos esféricos descrita en el capítulo anterior. El movimiento se sigue por ~ 25 períodos de tiempo para cada una de las estrellas y se obtienen conservaciones de la energía de $\sim 5\%$. Por último, es importante señalar que el integrador empleado requiere refinamientos ya que consume mucho tiempo de CPU para realizar las integraciones principalmente en colapsos tibios.

§VI.2 Centrado del Centro de Expansión

Los contornos de isopotencial y de "isofuerza" de la configuración extraída directamente de la simulación muestran asimetrías muy marcadas. Esto es resultado de que la partícula central no coincide con el mínimo del potencial. Esta inestabilidad del código ya había sido estudiada por White (1982). El propone que esto se puede corregir, al menos hasta el término cuadrupolar, si se toma el doble del suavizamiento para los términos mayores que el término monopolar. En el código que empleamos se a adoptado este criterio, sin embargo, esta inestabilidad sigue aún presente.

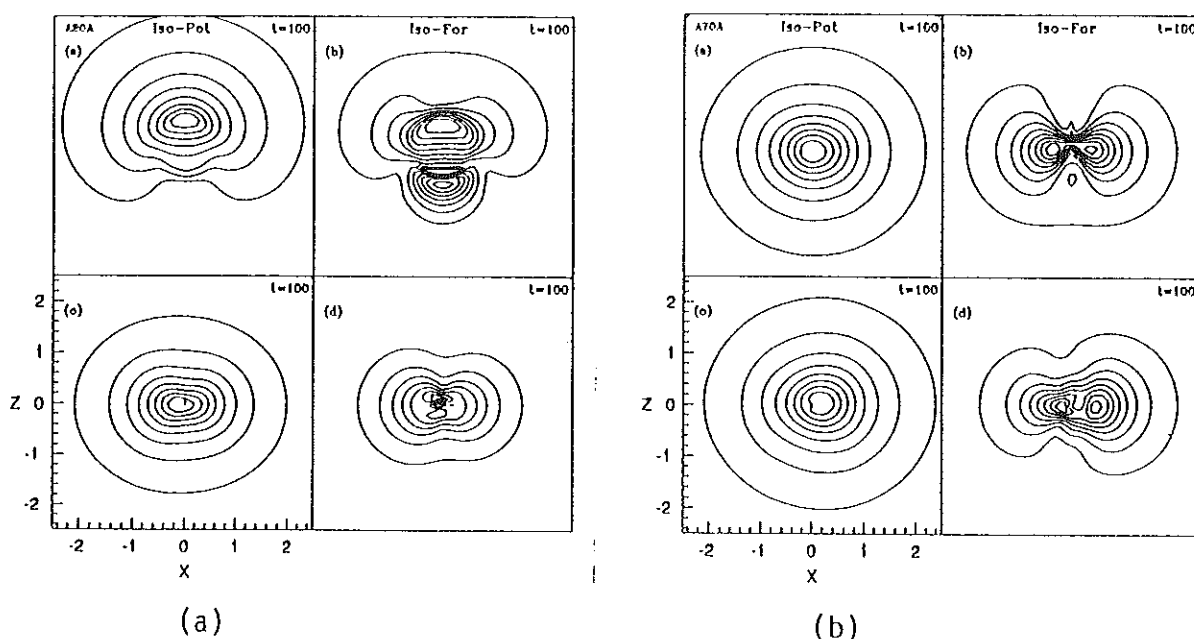


Fig. 1(a). Se aprecia claramente la gran asimetría que presenta el potencial debido a la inestabilidad del centrado. El centrado la partícula que sirve como centro de expansión corrige esta asimetría. **(b)** Este mismo sistema de centrado en algunos casos resulta ser ineficiente sobre todo para colapsos tibios.

Para evitar esta inestabilidad McGlynn (1984) propone como criterio ir recentrando la partícula que sirve de centro de expansión *durante* la simulación. Puesto que vamos a utilizar un criterio para hacer la clasificación basado en las componentes del momento angular que describiremos más en detalle en la sección (§V.3) resulta *fundamental* corregir esta desviación para la configuración final. En nuestro caso se siguió un método muy simple. Se determina el máximo de la densidad proyectada sobre cada uno de los planos definidos por los ejes principales. Este proceso se hace de manera iterativa hasta que las coordenadas del máximo coincidien para cada una de las proyecciones. La partícula central es trasladada a estas nuevas coordenadas. Es evidente que este método presenta limitaciones en su resolución del máximo. En general, proporciona mejores resultados para colapsos fríos que para colapsos tibios. Esto se puede entender fácilmente, ya que en un

Tabla 1						
	Fracción	de	Orbitas	Presentes		
Corrida	N	Tubos X	Tubos Z	Cajas	Tubos Y	Desconocidas
A10A	16274	0.127	0.237	0.630	0.002	0.008
A20A	15925	0.012	0.147	0.835	0.003	0.002
A30A	15950	0.160	0.239	0.574	0.003	0.009
A40A	15832	0.231	0.124	0.629	0.008	0.008
A50A	19169	0.660	0.093	0.192	0.025	0.030
A60A	19933	0.465	0.101	0.310	0.102	0.023
A70A	19939	0.302	0.087	0.348	0.190	0.073

colapso frío la inestabilidad radial da lugar a la formación de una barra muy concentrada alrededor del centro del sistema dando lugar a una mayor profundidad del potencial el cual resalta el máximo de densidad. Esto no ocurre en el caso de colapsos tibios. En la fig. 1(a) se muestran los contornos de isopotencial y de isofuerza generados directamente de las simulaciones y su contraparte, donde la inestabilidad del centrado ya a sido corregida. En la fig. 1(b) se pone de manifiesto su baja resolución para el caso de colapsos tibios.

§VI.3 Criterio para Clasificar Orbitas

El criterio empleado para hacer la clasificación orbital se basa esencialmente en el comportamiento de las componentes del momento angular a lo largo de los ejes principales del sistema. Una órbita que no cambia de signo *únicamente* en una de las componentes del momento angular es catalogada como una órbita de tubo a lo largo del eje correspondiente a la componente del momento angular. Una órbita que cambia de signo en *todas* sus componentes es catalogada como una órbita de caja. Cualquier otro combinación es clasificada como "desconocida". Aunque es un criterio muy crudo, permite separar, de manera global, las principales familias de órbitas: (cajas y tubos a lo largo del eje mayor o menor) principalmente para los colapsos donde el grado de triaxialidad es mayor. Sin embargo, es importante apuntar que no tiene la capacidad de distinguir entre órbitas de tubo internos y externos a lo largo del eje mayor del sistema.

§VI.4 Resultados Numéricos

Los resultados de la clasificación orbital se resumen en la tabla 1. N representa el número total de órbitas que fueron integradas para cada una de las corridas y las demás cantidades que aparecen en las otras columnas corresponden a la fracción de órbitas clasificadas. Nótese que las fracciones de pérdida de masa reportadas en la Tabla 3 del

capítulo anterior no corresponden con el número de partículas clasificadas para cada una de las corridas. Esto se debe a que en el proceso de centrado de la partícula central, partículas que estaban débilmente ligadas al sistema resultan quedar desligadas debido a este proceso de centrado.

En la fig. 2 se muestran ejemplos típicos tridimensionales, de las principales familias de órbitas, extraídos de las simulaciones de colapso sin disipación. En esta misma gráfica aparecen las proyecciones en dos de los planos para resaltar su caracter tridimensional.

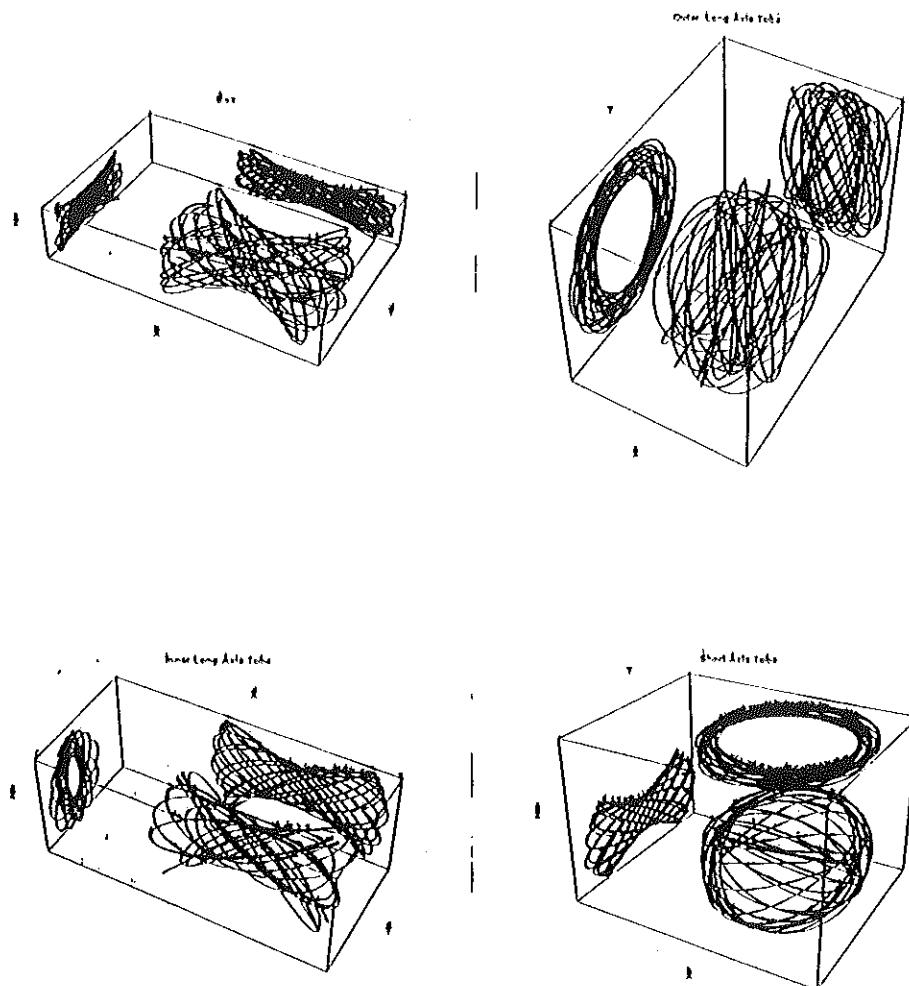


Fig. 2. Ejemplos típicos de las principales familias de órbitas que aparecen en las simulaciones de colapso gravitacional. Los ejes X,Y y Z corresponden a los ejes principales del sistema.

Las figuras 3(a)-(d) muestran estas mismas órbitas proyectadas en los planos definidos por los ejes principales del sistema. Se incluye, en este caso el comportamiento de las

componentes cartesianas del momento angular a lo largo de estos ejes. Estas gráficas muestran con claridad el porque se utilizó el momento angular como criterio para hacer la clasificación de órbitas y el porque era necesario seguir la órbita por una gran cantidad de períodos. La fig. 3(a) corresponde a un tubo Z como lo muestra su componente del momento angular, 3(b) corresponde a un tubo X externo, 3(c) a un tubo X interno y, 3(d) a una caja.

En la fig. 4 se muestran los histogramas que resultan de la clasificación orbital. La abscisa corresponde a los "bins" de energía para las partículas y la ordenada a la fracción de órbitas para cada "bin" de energía. En estos histogramas se muestran las barras de error poissónico.

Finalmente, en la fig.5 aparecen graficados las fracciones de órbitas para los modelos de Statler que guardan similaridad, en el diagrama triangular, con las simulaciones que se realizaron. Los símbolos requieren explicación: *Zmax* corresponde a modelos en los cuales se a maximizado el número de tubos a lo largo del eje menor, *MIN* corresponde a modelos en los cuales se a minimizado el número de tubos a lo largo del eje menor y mayor, *Xmax* equivale a modelos donde se a maximizado el número de tubos X y, finalmente el método de Lucy corresponde a una solución intermedia en el espacio de soluciones. Las líneas punteadas corresponden a contornos con la misma fracción de órbitas de tubo Z. Los números contiguos a cada símbolo vacío indican el modelo de Statler al que se hace referencia. En esta misma gráfica se han agregado las simulaciones que corresponden a colapsos fríos, que presentan el mayor grado de triaxialidad, para poder comparar las fracciones de órbitas obtenidas con las reportadas por Statler. El significado de los símbolos es el mismo que el de la fig. 12 del capítulo anterior.

§VI.5 Análisis de Resultados

Es necesario insistir en la importancia del recentrado. Es un hecho que el movimiento de una partícula está determinado por el pozo de potencial del sistema y no por la posición de de la partícula que sirve como centro de expansión. Sin embargo, el momento angular de una partícula, que es utilizado como criterio de clasificación, *depende* de su vector de posición que en las simulaciones está referido a la partícula central. Si no se corrige este problema se corre el riesgo, casi seguro de que ocurra, de clasificar órbitas de tubo como órbitas de caja.

Los ejemplos de órbitas mostrados en las figuras 2 y 3 son ejemplos "reales" productos de un proceso de formación que concuerdan con las familias reportadas por de Zeeuw (1985). Es importante señalar que obtener visualmente un ejemplo de las órbitas de tubo X externas fue bastante difícil. Esto nos hace sospechar que su contribución a la estructura orbital de un sistema triaxial, formado únicamente por colapso gravitacional, es muy reducida. Esto tiene sentido físico ya que una órbita de este tipo tiende a destruir la barra a que da lugar la inestabilidad radial.

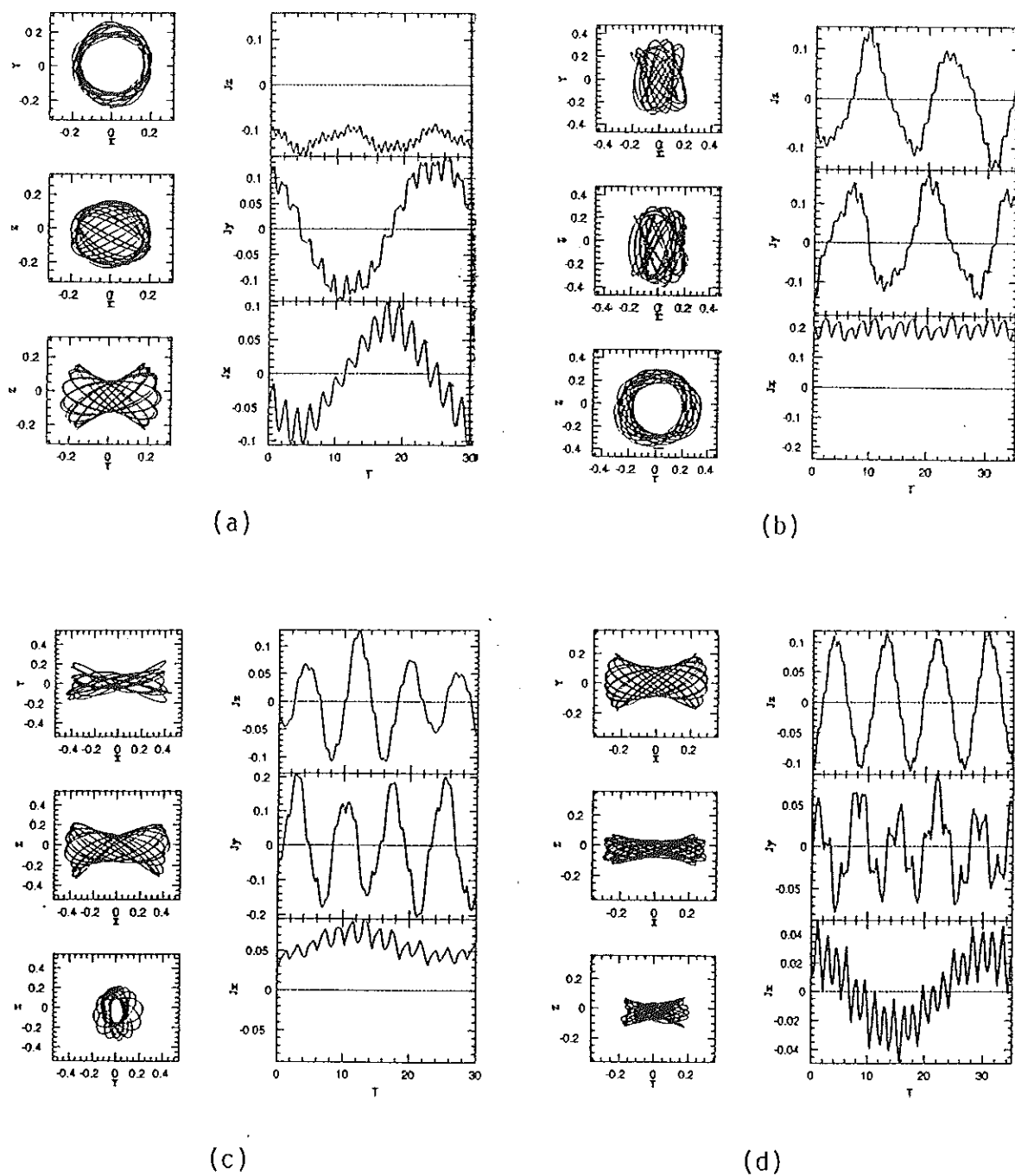


Fig. 3 Proyecciones en los planos XY , XZ y YZ para las órbitas mostradas en la fig. 2. J_x , J_y y J_z representan las tres componentes del momento angular a lo largo de los ejes principales, X , Y y Z , del sistema como función del tiempo T . (a) Tubo Z, (b) Tubo X (externo), (c) Tubo X (interno) y, (d) corresponde a una caja.

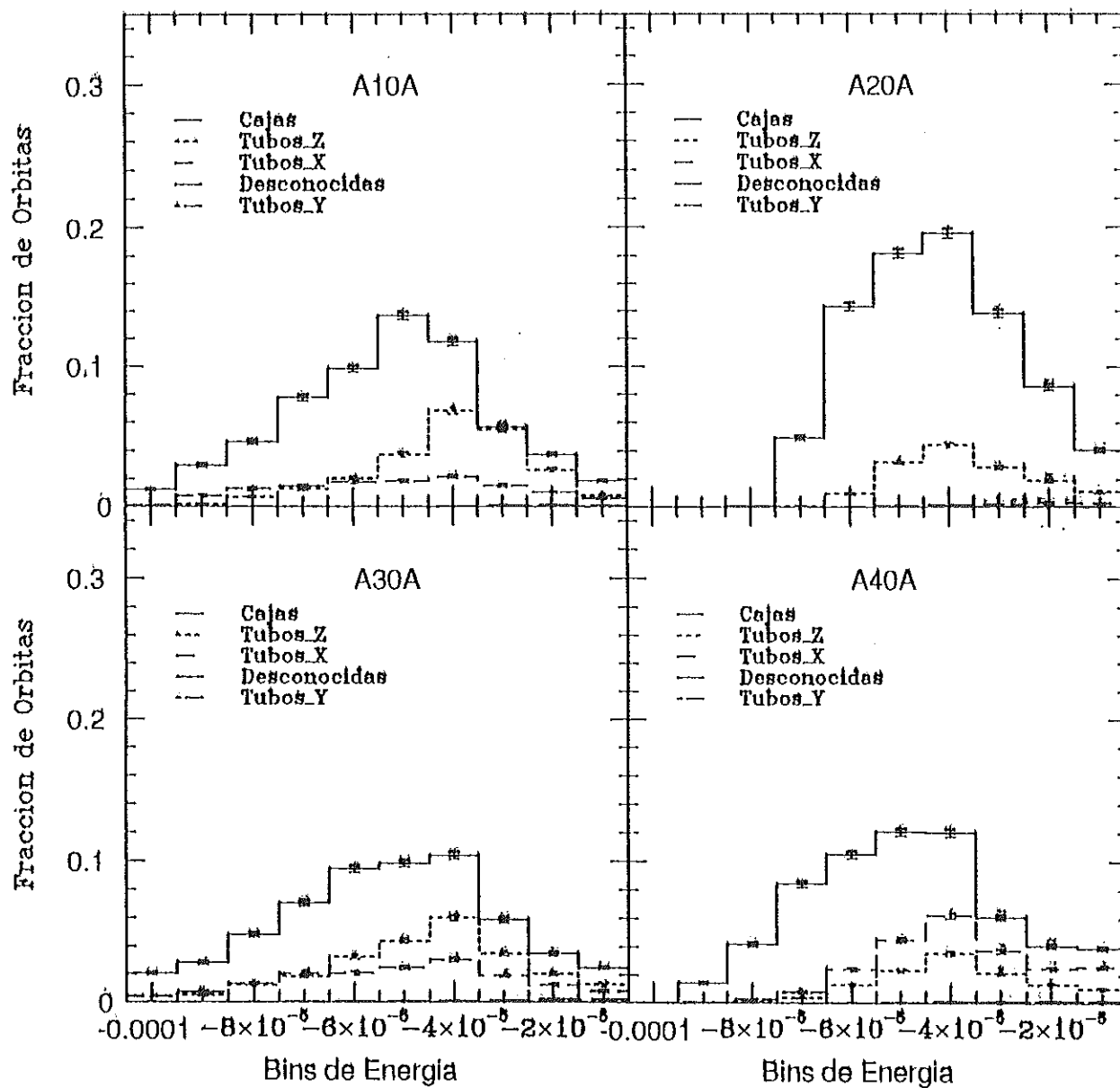


Fig. 4 Véase texto en la siguiente página.

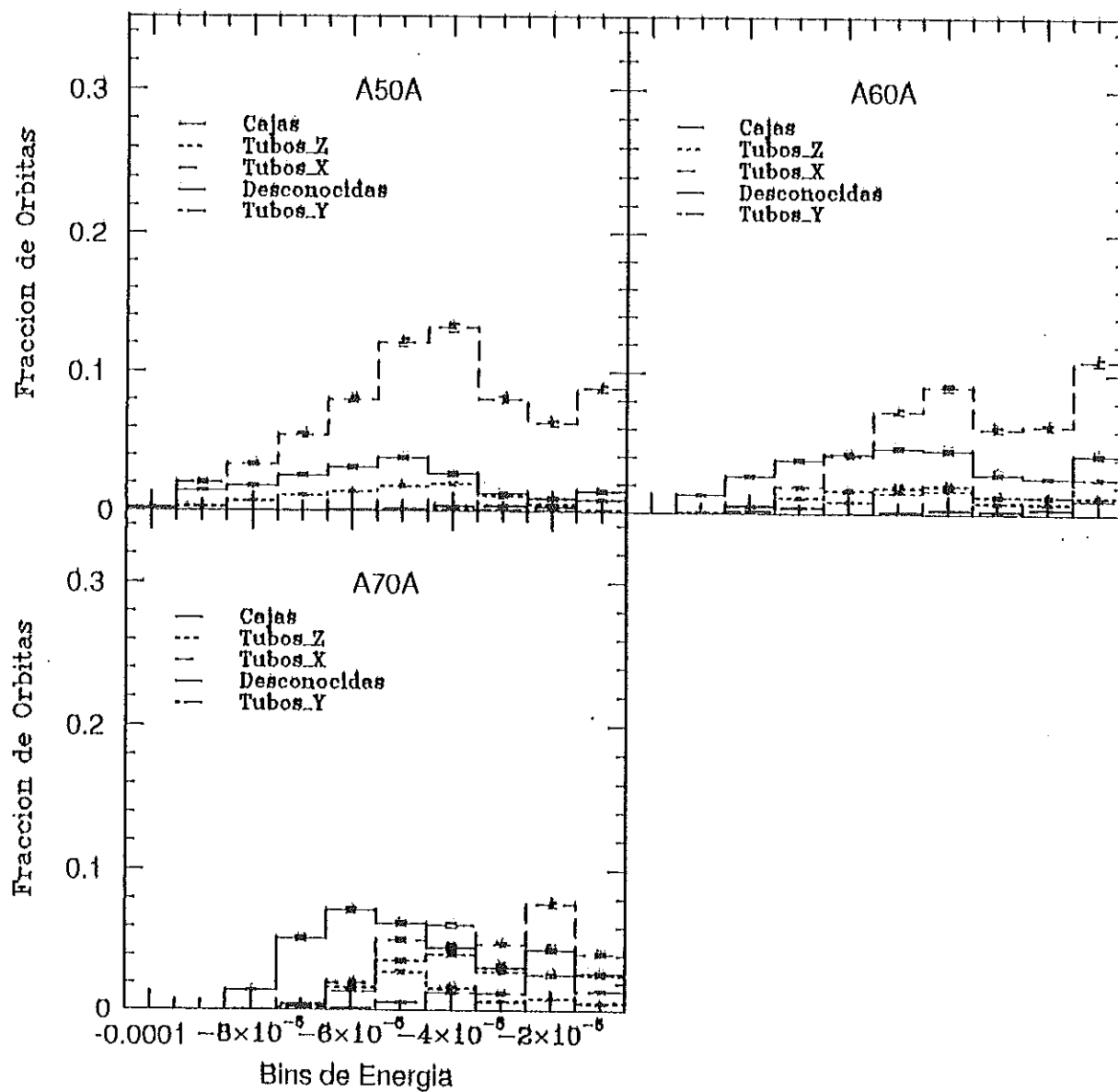


Fig. 4 En la gráfica de la página anterior se muestran las fracciones de órbitas presentes como función de la energía para los colapsos más fríos. En esta página se muestra lo mismo pero para los colapsos más tibios. Se ve claramente la diferencia entre los modelos que sufren la inestabilidad de barra y los que no la sufren.

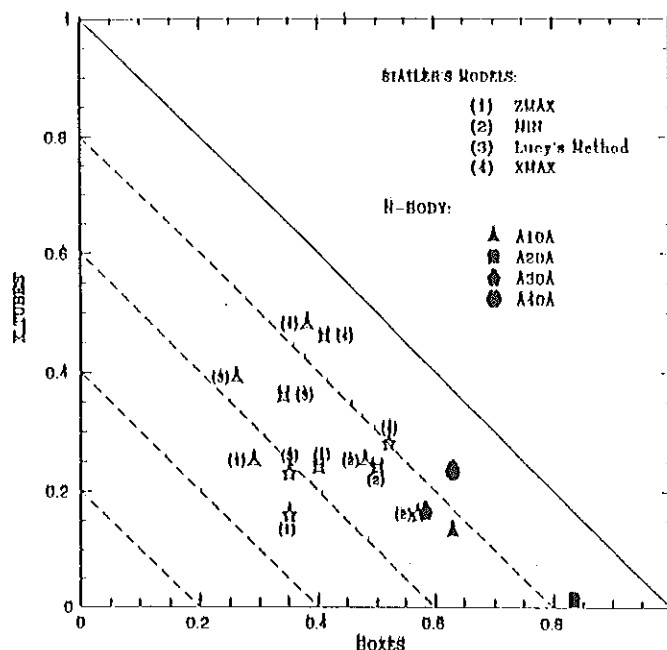


Fig. 5. Los símbolos rellenos corresponden a las simulaciones de colapso gravitacional y los símbolos vacíos a los modelos de Statler. La abscisa corresponde a la fracción de cajas y en la ordenada se tiene la fracción de tubos X presentes en el modelo.

Los histogramas (fig. 4) muestran que un colapso frío está dominado por cajas, le siguen los tubos Z y finalmente los tubos X, en este orden (Tabla 1). Es evidente la ausencia de tubos en Y (eje intermedio de las simulaciones) lo cual concuerda con los resultados reportados por Helligman & Schwarzschild (1979) que denotaremos simplemente como (HS). HS encuentran que estas órbitas son sustituidas por una nueva familia a la que llaman "órbitas de cascara" y que se caracterizan por no presentar un sentido de rotación único (similar a las cajas) y por dejar vacío una región alrededor del centro del sistema (similar a los tubos). Puesto que el criterio de clasificación empleado no es sensible a este tipo de órbitas, no tenemos la certeza de que existan o no en un colapso sin disipación. De cualquier manera si es que existiesen estas quedarían clasificadas como cajas.

Las órbitas de tubo Z (o X) son estables ya que la órbita cerrada en el plano XY (o YZ) es estable a perturbaciones en la dirección perpendicular a este plano. En cambio, la órbita cerrada en el plano XZ sufre una inestabilidad exponencial bajo perturbaciones en la dirección del eje intermedio Y (HS).

Las cajas disminuyen significativamente cuando el sistema es cada vez más tibio que era de esperarse ya que un sistema esférico no puede estar soportado por cajas. Se observa además, que conforme uno va a sistemas más tibios los tubos en X comienzan a dominar sobre los tubos Z. Nótese también el aumento de los tubos Y y de las órbitas desconocidas. Esto se puede explicar ya que dentro de una configuración esférica no existe una dirección que sea privilegiada. En la fig. 6 se da un ejemplo de una órbita que a sido clasificada como desconocida. Se ve claramente que su vector momento angular "precesa" muy poco

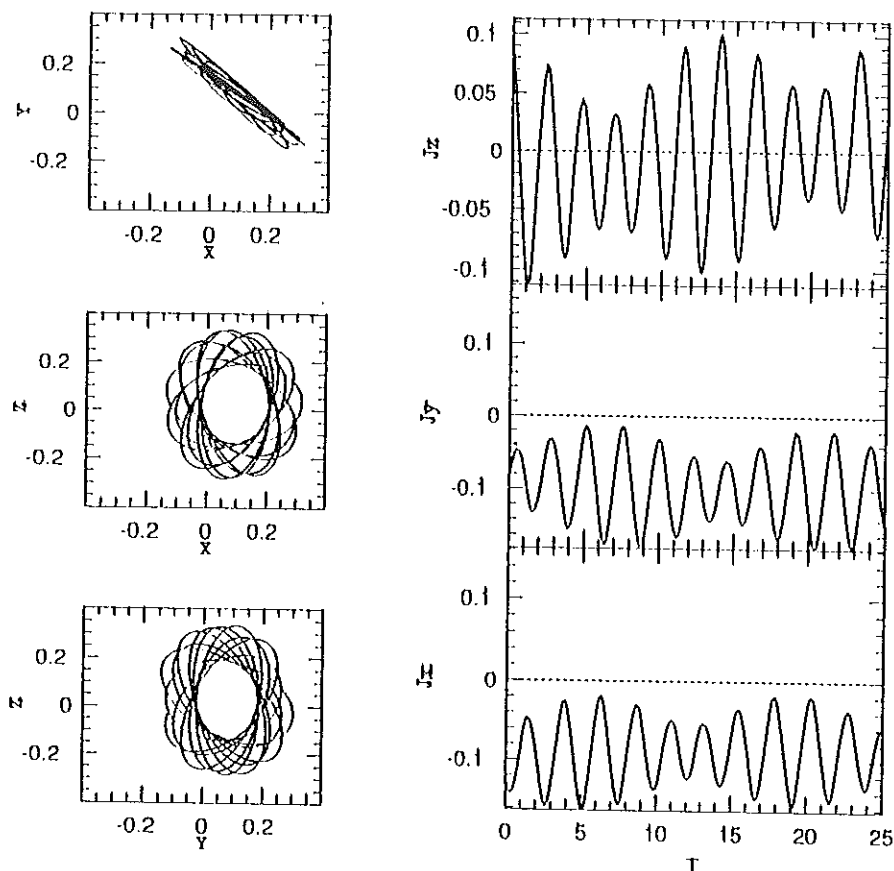


Fig. 6. Este es ejemplo de una órbita que a sido catalogada como desconocida por el criterio que se emplea para hacer la clasificación orbital.

alrededor de un eje situado en el plano XY. Sus proyecciones sobre el eje Y y el eje X no cambian de signo durante el tiempo que se a seguido su evolución.

Es evidente que el esquema de clasificación no funciona para el caso en que la configuración final tiende a ser cada vez más esférica aunque si pone de manifiesto la importante reducción importante de cajas en el sistema, que es de esperarse. El que el criterio no trabaje adecuadamente en estos casos no debe preocuparnos ya que el interés de este trabajo se centra en la clasificación de órbitas en sistemas que presentan un alto grado de triaxialidad y para los cuales el criterio, como primera aproximación, trabaja muy bien.

Se encuentra que para un mismo tipo de órbitas, en una simulación, el número de órbitas que giran en una dirección es casi igual al número de órbitas que giran en la dirección opuesta dando lugar a una rotación nula del sistema salvo algunas fluctuaciones. Esto concuerda con lo anotado en el capítulo anterior acerca de que el período de rotación de la barra, observado en algunas simulaciones, es mucho mayor que la edad del Universo.

Los modelos de "elipsoide perfecto" estudiados por Statler muestran una gran dispersión (fig. 5) en la fracción de órbitas presentes. En nuestro caso estas tienden a una región más específica definida en la región inferior y a la derecha del diagrama. Hay

similitudes solamente para el caso denotado por *MIN*, esto se entiende ya que nuestros modelos están dominados por cajas y la solución de Statle corresponde a una solución en la cual se han minimizado los tubos X y los tubos Z.

§VI.6 CONCLUSIONES

Esta parte del trabajo conduce a las siguientes conclusiones:

- (i) En un colapso sin disipación se observan las principales familias de órbitas que aparecen en los modelos de Stäckel para el "elipsoide perfecto". Sin embargo, presentan significativas diferencias en cuanto al número de órbitas que pueblan estos sistemas triaxiales. Este resultado nos lleva a concluir que no todos los modelos construidos a través de los potenciales de Stäckel o a través de técnicas de programación lineal (que da lugar a una infinidad de soluciones) corresponden a situaciones realistas para la estructura interna de una galaxia elíptica. Esto abre la posibilidad de que este tipo de clasificación orbital, basado en un posible mecanismo de formación galáctica, sirva como un "embudo" para todos los modelos triaxiales en equilibrio. Resulta evidente que una configuración de equilibrio es necesaria más no suficiente.
- (ii) Puesto que todos los colapsos fríos tienden a una configuración de equilibrio única, esperamos que la estructura orbital tienda, asimismo, a una distribución única con una dispersión muy pequeña alrededor de esta configuración única.
- (iii) La apariencia de las isofotas puede entenderse en función de la estructura orbital y viceversa. La forma de cajas de las isofotas en las galaxias elípticas puede atribuirse, bajo este esquema de colapso sin disipación, a la proliferación de estrellas que siguen órbitas de caja. Estos resultados muestran que la forma de caja que presentan las isofotas no es resultado de un proceso de fusión galáctica sino más bien el producto de la energía cinética disponible por la protogalaxia en el momento de colapsarse gravitacionalmente.

Seguimos trabajando en esta dirección analizando la estructura orbital de más realizaciones azarosas de colapsos sin disipación con el objeto de llegar a conclusiones más definitivas.

APENDICE A

A.I COORDENADAS CURVILINEAS

En coordenadas cartesianas el vector de posición de un punto en el espacio está determinado por una terna de valores que denotaremos por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ que corresponden a las proyecciones a cada uno de los ejes coordenados. Para hacer una descripción desde otro sistema de coordenadas se requiere de una transformación de coordenadas dada por (Morse & Feshbach I 1953, Arfken 1970)

$$x_i = x_i(\mathbf{q}); \quad i = 1, 2, 3 \quad (A.1)$$

donde al conjunto de coordenadas $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ se les denomina coordenadas curvilíneas.

En estas coordenadas el elemento de longitud se expresa como

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_{ij} h_{ij}^2 dq_i dq_j \quad (A.2)$$

donde los h_{ij} definidos como

$$h_{ij}^2 = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (A.3)$$

son conocidos como los *factores de escala* de la transformación.

Para el caso particular en que el sistema de coordenadas sea ortogonal (i.e. el conjunto de vectores unitarios asociado define una base para el sistema de coordenadas), los h_{ij} toman los siguientes valores

$$h_{ij} = h_{ij} \delta_{ij} = h_{ii} \equiv h_i \quad (A.4)$$

donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker,† de tal manera que

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 (dq_i)^2. \quad (A.5)$$

Sea $\phi(\mathbf{q})$ una función escalar de $\mathbf{q}$ y $\Psi(\mathbf{q})$ una función vectorial de $\mathbf{q}$. El gradiente, la divergencia, el rotacional y el Laplaciano en coordenadas curvilíneas están dados por las siguientes expresiones:

† Este símbolo se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} \phi(\mathbf{q}) = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{h_i \partial q_i}, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \Psi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_i (-1)^{\epsilon_{ijk}+1} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \frac{\partial (h_j h_k \Psi_i)}{\partial q_i}, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla_{\mathbf{q}} \times \Psi(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i h_i \frac{\partial (h_j \Psi_j)}{\partial q_k}, \quad (\text{A.8})$$

y

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 \phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right], \quad (\text{A.9})$$

donde el símbolo $\epsilon_{ijk}^\dagger$ denota el tensor de Levi-Civita.

A.II SISTEMAS PARTICULARES DE COORDENADAS

Coordenadas Esféricas

Sea (x_1, x_2, x_3) un sistema de coordenadas cartesiano. Las coordenadas esféricas corresponden a la terna (r, θ, ϕ) con $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ y la transformación está definida por (Véase figura A.1)

$$\begin{aligned} x_1 &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ x_2 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

la cual es válida en los intervalos $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Los factores de escala correspondientes a esta transformación resultan ser

$$h_1 = h_r = 1; \quad h_2 = h_\theta = r, \quad y \quad h_3 = h_\phi = r \operatorname{sen} \theta. \quad (\text{A.11})$$

[†]Este símbolo se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si dos índices se repiten} \\ +1, & \text{si los índices forman una permutación par} \\ -1, & \text{si los índices forman una permutación impar} \end{cases}$$

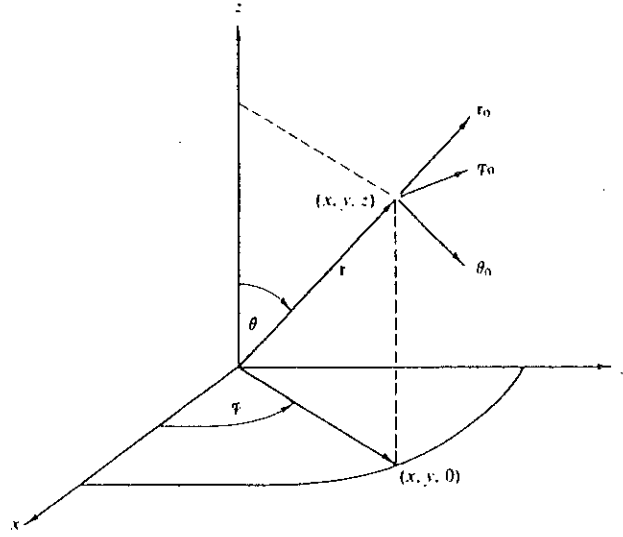


Figura A.1 En esta figura se muestra el sistema de coordenadas esférico. El conjunto de vectores unitarios $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$ forman una base para este sistema.

Aplicando las relaciones (A.6) a (A.9) se obtiene

$$\nabla U(r, \theta, \phi) = e_r \frac{\partial}{\partial r} U + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U + e_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} U, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi \right], \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & r \sin \theta e_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & r V_\theta & r \sin \theta V_\phi \end{vmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla^2 U(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} U \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} U \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} U \right], \quad (\text{A.15})$$

donde $U(r, \theta, \phi)$ y $V(r, \theta, \phi)$ son funciones escalar y vectorial, respectivamente, de las coordenadas esféricas.

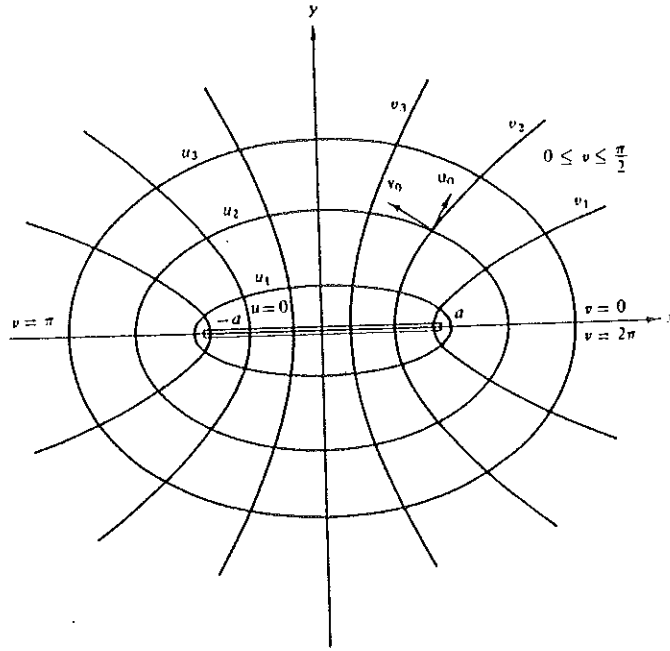


Figura A.2 Se muestra el sistema de coordenadas elíptico y algunas de las superficies coordenadas para $u=\text{constante}$ y $v=\text{constante}$. El conjunto de vectores unitarios $\{e_u, e_v\}$ constituye una base para el sistema coordenado.

Coordenadas Elípticas

Este caso es muy importante pues permite generalizarlo a sistemas más complejos de gran utilidad en Dinámica Estelar. Este sistema está definido por el siguiente conjunto de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cosh u \cos v \\ x_2 &= a \sinh u \sin v \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{A.16}$$

donde la terna (x_1, x_2, x_3) denota un sistema de coordenadas cartesiano.

Las superficies para este sistema de coordenadas son (Véase **figura A.2**):

1. Las equisuperficies para $u = \text{constante}$ y $0 \leq u < \infty$ resultan ser cilindros elípticos,
2. Para $v = \text{constante}$ y $0 \leq v \leq 2\pi$ se obtienen cilindros hiperbólicos, y finalmente,
3. Para $x_3 = \text{constante}$ y $-\infty < x_3 < \infty$ las superficies son planos paralelos al plano x_1x_2 .

Los factores de escala para esta transformación están dados por

$$\begin{aligned} h_1 &= h_u = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_2 &= h_v = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_3 &= h_{x_3} = 1. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Las expresiones para los operadores diferenciales son

$$\nabla U = \frac{1}{a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}} \left[\mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u} U + \mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial v} U + \mathbf{e}_{x_3} a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_3} U \right], \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V = & \frac{1}{a^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} V_u \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} V_v \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a^2[\sinh^2 u + \sin^2 v] V_{x_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \times V = \frac{1}{a^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_u a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} & \mathbf{e}_v a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} & \mathbf{e}_{x_3} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} V_u & a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2} V_v & V_{x_3} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{a^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} U \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial v} U \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(a^2[\sinh^2 u + \sin^2 v] \frac{\partial}{\partial x_3} U \right) \right]. \quad (\text{A.21})$$

Coordenadas Prolatas Esferoidales

Rotando el sistema anterior alrededor de su eje mayor e introduciendo un ángulo azimutal se obtiene un sistema en tres dimensiones (Véase figura A.3).

Las ecuaciones de transformación entre el sistema cartesiano (x_1, x_2, x_3) y este nuevo sistema de coordenadas (u, v, ϕ) resultan ser

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sinh u \sin v \cos \phi \\ x_2 &= a \sinh u \sin v \sin \phi \\ x_3 &= a \cosh u \cos v. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Además, presentan las siguientes propiedades:

1. Para $u = \text{constante}$ con $0 \leq u < \infty$ se obtienen esferoides prolatos.
2. Para $v = \text{constante}$ con $0 \leq v < \pi$ se obtienen hiperboloides de dos hojas.
3. Para el caso en que $\phi = \text{constante}$ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ resultan planos a través del eje x_3 .

Los factores de escala para este sistema son

$$\begin{aligned} h_1 &= h_u = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_2 &= h_v = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_3 &= h_\phi = a \sinh u \sin v. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

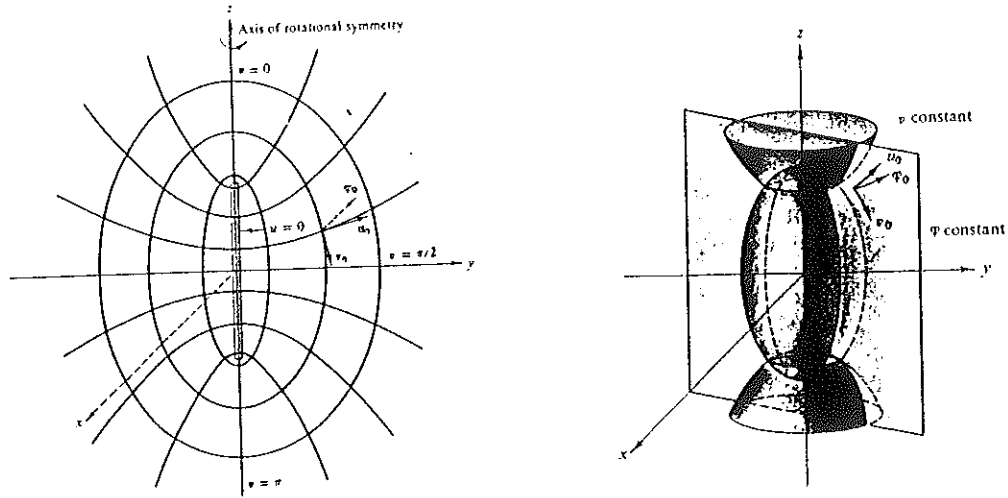


Figura A.3 Sistema de coordenadas prolatas esferoidales. Se muestra una sección transversal, la base del sistema $\{e_u, e_v, e_\phi\}$ y algunas equisuperficies.

Sin embargo, resulta más conveniente introducir un nuevo conjunto de coordenadas para aplicar el método de separación de variables y se define como sigue (Arfken 1970)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \cosh u, & 1 \leq \xi_1 < \infty \\ \xi_2 &= \cos v, & -1 \leq \xi_2 \leq 1 \\ \xi_3 &= \phi, & 0 \leq \xi_3 \leq 2\pi\end{aligned}\tag{A.24}$$

donde los nuevos factores de escala son

$$\begin{aligned}h_{\xi_1} &= a \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_2} &= a \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_3} &= a (\xi_1^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{A.25}$$

Las expresiones para los operadores diferenciales en este sistema están dados por

$$\nabla U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{e}_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} U + \mathbf{e}_{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} U + \mathbf{e}_{\xi_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} U, \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \frac{1}{a(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[(\xi_1^2 - \xi_2^2)^{1/2} (\xi_1^2 - 1)^{1/2} V_{\xi_1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1^2 - \xi_2^2)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2} V_{\xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2}} V_{\xi_3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \times V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{a(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \begin{vmatrix} \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\xi_1} & \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\xi_2} & (\xi_1^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2} \mathbf{e}_{\xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1} \right)^{1/2} V_{\xi_1} & \left(\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2} \right)^{1/2} V_{\xi_2} & (\xi_1^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2} V_{\xi_3} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[(\xi_1^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} U \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(1 - \xi_2^2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} U \right] + \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} U \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Coordenadas Oblatas Esferoidales

Este sistema de coordenadas se obtiene como una extensión al sistema de coordenadas elípticas rotándolo alrededor de eje menor e introduciendo nuevamente un ángulo azimutal (Véase figura A.4). Las superficies coordenadas son las siguientes:

1. Para $u = \text{constante}$ con $0 \leq u < \infty$ se obtienen esferoides oblatos,
2. Para $v = \text{constante}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ se obtienen hiperboloides de una sola hoja, y
3. Para $\phi = \text{constante}$ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ resultan planos a través del eje x_3 .

Las ecuaciones de transformación de coordenadas se escriben como

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cosh u \cos v \cos \phi, \\ x_2 &= a \cosh u \cos v \sin \phi, \\ x_3 &= a \sinh u \sin v, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde nuevamente, (x_1, x_2, x_3) denota un sistema cartesiano de coordenadas. Los factores de escala para esta transformación son

$$\begin{aligned} h_1 &= h_u = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_2 &= h_v = a[\sinh^2 u + \sin^2 v]^{1/2}, \\ h_3 &= h_\phi = a \cosh u \cos v. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

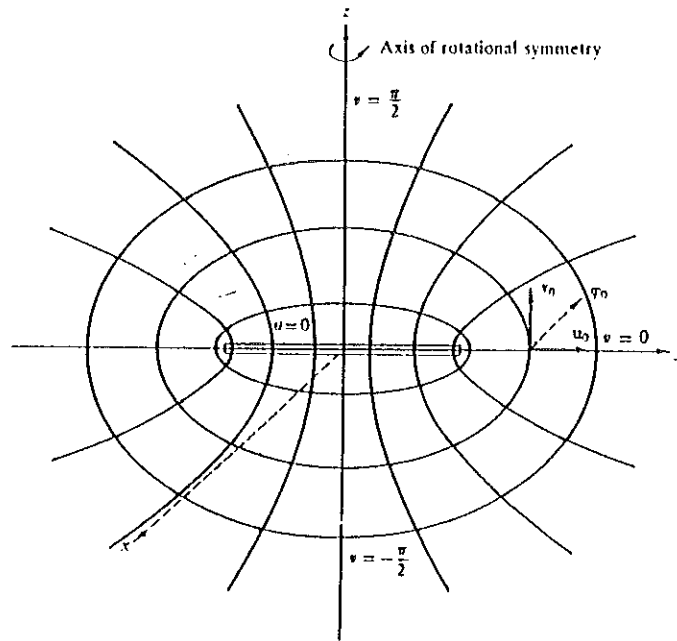


Figura A.4 En esta figura se muestra una sección transversal del sistema de coordenadas oblató esferoidal y el conjunto de vectores unitarios $\{e_v, e_u, e_\phi\}$ para este sistema.

Debe hacerse notar que si se insiste en considerar que ϕ aumente de x_1 a x_2 y en el orden (u, v, ϕ) se obtiene un sistema izquierdo. Por lo que sería necesario introducir un -1 en el rotacional, o bien, alterar el orden del sistema coordenado usando (v, u, ϕ) . En algunos casos, resulta más conveniente introducir un nuevo sistema de coordenadas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) definido por

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \cos v, & -1 \leq \xi_1 \leq 1 \\ \xi_2 &= \sinh u, & 0 \leq \xi_2 < \infty \\ \xi_3 &= \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi\end{aligned}\tag{A.32}$$

con factores de escala dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}h_{\xi_1} &= a \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \xi_1^2} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_2} &= a \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_3} &= a [(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)]^{1/2}.\end{aligned}\tag{A.33}$$

En este nuevo sistema de coordenadas los operadores diferenciales adquieren la forma

siguiente

$$\nabla U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{e}_{\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} U + \mathbf{e}_{\xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} U + \mathbf{e}_{\xi_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} U, \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \frac{1}{a(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} (1 - \xi_1^2)^{1/2} V_{\xi_1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} (1 + \xi_2^2)^{1/2} V_{\xi_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[\frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(1 - \xi_1^2)^{1/2} (1 + \xi_2^2)^{1/2}} V_{\xi_3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\nabla \times V(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{a(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{\xi_1} \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \xi_1^2} \right)^{1/2} & \mathbf{e}_{\xi_2} \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \right)^{1/2} & \mathbf{e}_{\xi_3} (1 - \xi_1^2)^{1/2} (1 + \xi_2^2)^{1/2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ V_{\xi_1} \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \xi_1^2} \right)^{1/2} & V_{\xi_2} \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \right)^{1/2} & V_{\xi_3} (1 - \xi_1^2)^{1/2} (1 + \xi_2^2)^{1/2} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[(1 - \xi_1^2) \frac{\partial}{\partial \xi_1} U \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[(1 + \xi_2^2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} U \right] + \frac{1}{(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} U \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Sistema de Coordenadas Elipsoidales Confocales

Sea (x_1, x_2, x_3) un conjunto de coordenadas cartesianas. Las coordenadas confocales elipsoidales (λ, μ, ν) se definen como las tres raíces para ξ (de Zeeuw 1984) en la ecuación

$$\frac{x_1^2}{\xi + \alpha} + \frac{x_2^2}{\xi + \beta} + \frac{x_3^2}{\xi + \gamma} = 1, \quad (\text{A.38})$$

siendo α, β y γ constantes con $\alpha < \beta < \gamma$. Además, las raíces satisfacen la desigualdad

$$-\gamma \leq \nu \leq -\beta \leq \mu \leq -\alpha \leq \lambda. \quad (\text{A.39})$$

Las ecuaciones de transformación estan dadas por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(\lambda + \alpha)(\mu + \alpha)(\nu + \alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \\ x_2^2 &= \frac{(\lambda + \beta)(\mu + \beta)(\nu + \beta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \\ x_3^2 &= \frac{(\lambda + \gamma)(\mu + \gamma)(\nu + \gamma)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

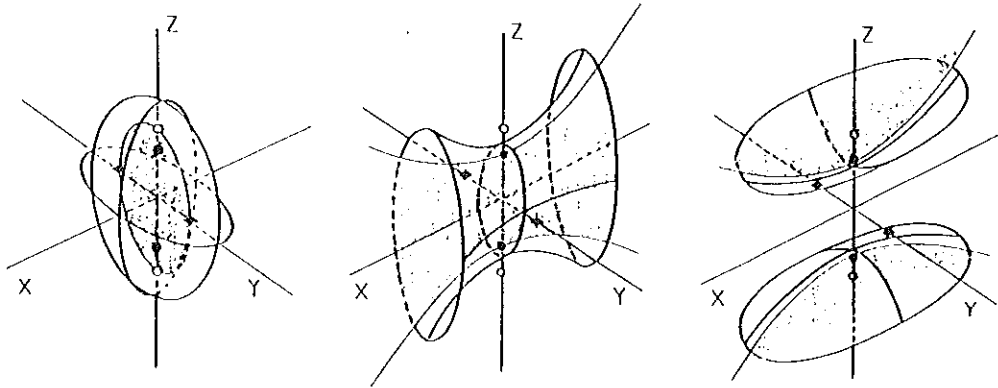


Figura A.5 Sistema de coordenadas elipsoidal confocal. Se muestran las superficies coordenadas:

1. Elipsoides esferoidales para $\lambda = \text{constante}$,
2. Hiperboloides de una sola hoja para $\mu = \text{constante}$ y,
3. Hiperboloides de dos hojas para $\nu = \text{constante}$.

con

$$\begin{aligned}\lambda + \mu + \nu &= -\alpha - \beta - \gamma + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - (\beta + \gamma)x_1^2 - (\gamma + \alpha)x_2^2 - (\alpha + \beta)x_3^2, \\ \lambda\mu\nu &= -\alpha\beta\gamma + \beta\gamma x_1^2 + \gamma\alpha x_2^2 + \alpha\beta x_3^2.\end{aligned}\quad (A.41)$$

Este sistema de coordenadas presenta las siguientes superficies (Véase figura A.5):

1. Para $\lambda = \text{constante}$ se obtienen elipsoides dados por la ecuación

$$\frac{x_1^2}{\lambda + \alpha} + \frac{x_2^2}{\lambda + \beta} + \frac{x_3^2}{\lambda + \gamma} = 1.$$

Si λ es muy grande el elipsoide degenera en una esfera de radio $\sqrt{\lambda}$, y si λ se hace muy pequeño degenera en un elipsoide muy alargado con su eje mayor en x_3 y eje menor en x_1 . En el caso límite en que $\lambda = -\alpha$ degenera en la elipse $x_2^2/(\beta - \alpha) + x_3^2/(\gamma - \alpha) = 1$ cuyos focos están dados por $x_3 = \pm\sqrt{\gamma - \beta}$.

2. Las superficies generadas por $\mu = \text{constante}$ representan hiperboloides de una sola hoja los cuales están descritos por la ecuación

$$-\frac{x_1^2}{-(\alpha + \mu)} + \frac{x_2^2}{\mu + \beta} + \frac{x_3^2}{\mu + \gamma} = 1.$$

3. Finalmente, las superficies generadas por $\nu = \text{constante}$ representan hiperboloides de dos hojas descritos por la ecuación

$$-\frac{x_1^2}{-(\alpha + \nu)} - \frac{x_2^2}{-(\beta + \nu)} + \frac{x_3^2}{\nu + \gamma} = 1.$$

Así, a cada punto (x_1, x_2, x_3) se encuentran asociadas tres superficies (un elipsoide, un hiperboloide de una sola hoja y un hiperboloide de dos hojas) que son ortogonales entre sí. Además, la transformación de (x_1, x_2, x_3) a (λ, μ, ν) es única pero la transformación inversa no lo es. A cada punto (λ, μ, ν) se encuentran asociados ocho puntos diferentes $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$.

Los factores de escala para esta transformación están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} h_\lambda &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(\lambda + \alpha)(\lambda + \beta)(\lambda + \gamma)} \right]^{1/2}, \\ h_\mu &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}{(\mu + \alpha)(\mu + \beta)(\mu + \gamma)} \right]^{1/2}, \\ h_\nu &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{(\nu + \alpha)(\nu + \beta)(\nu + \gamma)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (A.42)$$

Los operadores diferenciales para coordenadas esferoidales confocales se escriben a continuación

$$\nabla U(\lambda, \mu, \nu) = \mathbf{e}_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} U + \mathbf{e}_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} U + \mathbf{e}_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} U, \quad (A.43)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V(\lambda, \mu, \nu) &= \frac{1}{h_\lambda(\lambda - \mu)^{1/2}(\lambda - \nu)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[(\lambda - \mu)^{1/2}(\lambda - \nu)^{1/2} V_\lambda \right] \\ &+ \frac{1}{h_\mu(\lambda - \mu)^{1/2}(\mu - \nu)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(\lambda - \mu)^{1/2}(\mu - \nu)^{1/2} V_\mu \right] \\ &+ \frac{1}{h_\nu(\lambda - \nu)^{1/2}(\mu - \nu)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(\lambda - \nu)^{1/2}(\mu - \nu)^{1/2} V_\nu \right], \end{aligned} \quad (A.44)$$

$$\nabla \times V(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{h_\lambda h_\mu h_\nu} \begin{vmatrix} h_\lambda \mathbf{e}_\lambda & h_\mu \mathbf{e}_\mu & h_\nu \mathbf{e}_\nu \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \nu} \\ h_\lambda V_\lambda & h_\mu V_\mu & h_\nu V_\nu \end{vmatrix}, \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(\lambda, \mu, \nu) = & \frac{2}{h_\lambda [(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ [(\lambda + \alpha)(\lambda + \beta)(\lambda + \gamma)]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \lambda} U \right\} \\ & + \frac{2}{h_\mu [(\lambda - \mu)(\mu - \nu)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ [-(\mu + \alpha)(\mu + \beta)(\mu + \gamma)]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} U \right\} \\ & + \frac{2}{h_\nu [(\lambda - \nu)(\mu - \nu)]^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ [(\nu + \alpha)(\nu + \beta)(\nu + \gamma)]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \nu} U \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

REFERENCIAS

- Aaronson, M. & Olszewski, E. 1986, en *Dark Matter in the Universe*, IAU Symp. No. 117. ed. por Knapp, G.R. & Kormendy, J.F. Dordrecht: Reidel
- Aarseth, S. J. 1985. In *Multiple Time Scales*, ed. J. V. Brackbill & B. I. Cohen, p. 377. Orlando: Academic Press.
- Aguilar, L. A. 1992. *Revista Mexicana de Física*. Preprint.
- Aguilar, L. A. & Merritt, D. R. 1990. *Ap. J.*, **354**, 33.
- Antonov, V. A. 1972. 1987, en *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, IAU Symp. No. 127. ed. por de Zeeuw, P.T. Dordrecht: Reidel
- Arfken, G. 1970. *Mathematical Methods for Physicists*. 2nd. edition: Academic Press. International Edition.
- Arnold, V. I. 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. 2nd. edition: Springer-Verlag.
- Barnes, J. 1985. 1985, en *Dynamics of Star Clusters* IAU Symp. No. 113. ed. por Goodman, J. and Hut, P. Dordrecht: Reidel
- Barnes, J., Goodman, J. & Hut, P. 1986. *Ap. J.*, **300**, 112.
- Belcells, M. & Quinn, P. J. 1990. *Ap. J.*, **361**, 381.
- Bertola, F. and Capaccioli, M. 1975. *Ap. J.*, **200**, 439.
- Binney, J. J. 1978. *M.N.R.A.S.*, **183**, 501.
- Binney, J. J. & Tremaine, S. 1987. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press.
- Birkhoff, G. & Lynch, R. 1984. *Numerical Solutions of Elliptic Problems*. SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Burkert, A. 1990. *M.N.R.A.S.*, **247**, 152.
- Carlberg, R. G. 1984. *Ap. J.*, **286**, 403.
- Courant, R. & Hilbert, D. 1962. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. Interscience Publishers.
- Davies, R. L. and Illingworth, G. D. 1983. *Ap. J.*, **266**, 41.
- de Vaucouleurs, G. 1948. *Ann. d'Astrophys.*, **11**, 247.
- de Vaucouleurs, G. 1959. In *Handbuch der Physik*, **53**, ed. S. Flügge, p. 275. Berlin:Springer-Verlag
- de Zeeuw, P. T. 1984. *Dynamics of Triaxial Stellar Systems*. Ph.D. Thesis.

- de Zeeuw, P. T. 1985. *M.N.R.A.S.*, **216**, 599.
- de Zeeuw, T. P. 1985. *M.N.R.A.S.*, **216**, 273.
- Efstathiou, G. & Silk, J. 1983. *Fund. Cosmic Phys.*, **9**, 1
- Franx, M. 1990. In *Galactic Models*, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* Vol. **586**, 67
- Geller, M. J. & Huchra, J. P. 1989. *Science* Vol. **246**, 897
- Goldstein, H. 1981. *Classical Mechanics*, 2nd. edition: Addison-Wesley.
- Gott, J. R. III. 1973. *Ap. J.*, **186**, 481.
- Gott, J. R. III. 1975. *Ap. J.*, **201**, 296.
- Heggie, D. C. & Mathieu, R. D. 1986. *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics. Lecture Notes in Physics.* Springer-Verlag.
- Heiligman, G. & Schwarzschild, M. 1979. *Ap. J.*, **233**, 872.
- Hénon, M. 1972. In *Gravitational N-Body Problem*. IAU Colloquium No. 10, 44. Ed. M. Lecar. Dordrecht:Reidel.
- Hénon, M. 1973. In *Dynamics, Structure and Evolution of Stellar Systems*. Third Advanced Course of the Swiss Society of Astronomy and Astrophysics, ed. L. Martinet and M. York: McGraw-Hill.
- Hjorth, J. & Madsen, J. 1991. *M.N.R.A.S.*, **253**, 4.
- Hubble, E. R. 1929. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **15**, 168
- Illingworth, G. D. 1977. *Ap. J.*, **218**, L43.
- Illingworth, G. D. & Franx, M. 1988. In *Dynamics of Dense Stellar Systems* ed. D. Merritt. Cambridge University Press.
- Jawson, M. A. & Symm, G. T. 1977 *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press.
- Jedrzejewski, R. I. & Schechter, P. L. 1988. In *Dynamics of Dense Stellar Systems* ed. D. Merritt. Cambridge University Press.
- Katz, N. & Gunn, J. 1991. *Ap. J.*, **377**, 365.
- Katz, N. 1992. *Ap. J.*, **391**, 502.
- Kormendy, J. 1982. In *Morphology and Dynamics of Galaxies*, ed. L. Martinet and M. Mayor. pp. 115-288. Sauverny: Geneva Observatory.
- Jedrzejewski, R. I. 1987, en *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, *IAU Symp. No. 127*. ed. por de Zeeuw, P.T. Dordrecht: Reidel
- Kormendy, J. 1984. *Ap. J.*, **287**, 577.

- Kormendy, J. 1987. 1987, en *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, IAU Symp. No. 127. ed. por de Zeeuw, P.T. Dordrecht: Reidel
- Larson, R. B. 1969. *M.N.R.A.S.*, **145**, 405.
- Larson, R. B. 1974. *M.N.R.A.S.*, **166**, 585.
- Lauer, T. R. 1985. *Ap. J.*, **292**, 104.
- Levedeb, N. N. 1972. *Special Functions & Their Applications*. Traducido y editado por R. R. Silvermann. Dover.
- Lynden-Bell, D. 1967. *M.N.R.A.S.*, **136**, 101.
- MacGlynn, T. 1984. *Ap. J.*, **281**, 13.
- Merritt, D. R. 1985. *Ap. J.*, **90**, 1023.
- Merritt, D. & Aguilar, L. A. 1985. *M.N.R.A.S.*, **217**, 787.
- Merritt, D. 1987. En *Origin, Structure and Evolution of Galaxies*. Guo Shoujing Summer School of Astrophysics. Ed. F. L. Zhi. World Scientific.
- Michard, R. 1985. *Ast. Astrophys. Suppl.*, **59**, 205.
- Mihalas, D. and Binney, J. J. 1981. *Galactic Astronomy*, 2nd. edition (San Francisco:Freeman).
- Morse, P. M. & Feshbach, H. 1953. *Methods of Theoretical Physics*. Vols. I & II:McGraw-Hill.
- Nieto, J. L. 1988. *The World of Galaxies*, ed. H. G. Corwin, Jr. and L. Bottinelli. Springer-Verlag.
- Nieto, J. L., Bender, R. & Surman, P. 1991. *Astr. and Ap.*, **244**, L37-L40.
- Polyachenko, V. L. 1981. *Pis'ma Astron. Zh.*, **7**, 142 (Traducido en *Soviet Astron. Lett.*, **7**, 79)
- Poveda, A., Iturriaga, R. & Orozco, I. 1960 *Bol. Observ. Tonantzintla*, **20**, 3.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. 1986. *Numerical Recipes*. Cambridge, Eng.: Cambridge University Press.
- Quinn, P. J. 1984. *Ap. J.*, **279**, 596.
- Rix, H. & White S.M.D. 1990. *Ap. J.*, **362**, 52.
- Roach, G. F. 1989. *Green's Functions*. Cambridge University Press.
- Sandage, A. 1961. *The Hubble Atlas of Galaxies*. Washington, D. C.: Carnegie Institution.
- Sandage, A. 1986. *Astr. and Ap.*, **161**, 89.

- Sellwood, J. A. 1987. *Ann. Rev. Astr. and Ap.*, **25**, 151.
- Shwarzschild, M. 1979. *Ap. J.*, **232**, 236.
- Statler, T. S. 1987. *Ap. J.*, **321**, 113.
- Thomson, R. C. 1991. *M.N.R.A.S.*, **253**, 256.
- Toomre, A. & Toomre, J. 1972. *Ap. J.*, **178**, 623.
- Tremaine, S. D., Hénon, M. & Lynden-Bell, D. 1986. *M.N.R.A.S.*, **219**, 285.
- van Albada, T. J. 1982. *M.N.R.A.S.*, **201**, 939.
- Vandervoort, P. O. 1984. *Ap. J.*, **287**, 475.
- Vedell, H. & Sommer-Larsen, J. 1990. *M.N.R.A.S.*, **245**, 4.
- Villumsen, J. V. 1982. *M.N.R.A.S.*, **199**, 493.
- White, S. M. D. 1983. *Ap. J.*, **274**, 53.
- Young, P. 1976. *Ap. J.*, **81**, 807.
- Zwicky, F., Herzog, E., Wild, P., Karpowicz, M. & Kowal, C. T. 1961-1968. *Catalog of Galaxies and Clusters of Galaxies*. Pasadena: California Institute of Technology.