UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

Diseño, implementación y evaluación de una estrategia didáctica para abordar aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en ingeniería

Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

Presenta
Jesús Yosef Galaviz Medina

Director
Maximiliano de las Fuentes Lara

Codirectora
Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas

Mexicali, Baja California Diciembre 2024

Sinodales asignados

Presidente: Dr. Maximiliano de las Fuentes Lara

Secretario: Dra. Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas

Sinodal: Dra. Araceli Celina Justo López

Sinodal: Dra. Ana Dolores Martínez Molina

Sinodal: Dra. Noemí Lizárraga Osuna

Facultad de Ingeniería

Facultad de Ingeniería UABC, Mexicali, Baja California.

Director de Tesis

Dr. Maximiliano de las Fuentes Lara

Firma

Codirector de Tesis

Dra. Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas

Firma

Jesús Yosef Galaviz Medina

Firma

Agradecimientos

A mis directores de tesis: **Dr. Maximiliano de las Fuentes Lara** y **Dra. Wendolyn Elizabeth Aguilar Salinas**, por todo su apoyo y comprensión desde el inicio, su gran colaboración y consejos durante la realización de este trabajo.

A la **Universidad Autónoma de Baja California** por el honor de formar parte de su comunidad y el apoyo incondicional durante la elaboración de este proyecto.

Al **Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías** por el apoyo económico de inicio a fin de este proyecto.

A los **alumnos** de la Facultad de Ingeniería Campus Mexicali quienes fueron parte del estudio de esta investigación.

A mis **padres** y **hermanas** por el aliento y apoyo incondicional a lo largo de mi formación profesional.

Índice de contenido

Contenido	Página
Capítulo 1. Introducción	7
1.1 Planteamiento del problema	10
1.2 Hipótesis	13
1.3 Objetivos	15
1.4 Importancia del estudio	17
1.5 Limitaciones	18
Capítulo 2. Marco referencial	19
2.1 Análisis de la enseñanza tradicional de las matemáticas	19
2.2 Teoría de las representaciones semióticas	20
2.3 Aprendizaje basado en problemas	22
2.4 Recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas	23
2.5 Contenido matemático	24
Capítulo 3. Metodología	27
3.1 Método	27
3.2 Sujetos	28
3.3 Materiales de la investigación	28
3.3.1 Instrumento de medición preliminar	29
3.3.1.1 Validez de contenido del instrumento de medición preliminar	30
3.3.1.2 Confiabilidad del instrumento de medición preliminar	30
3.3.1.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición preliminar	31
3.3.2 Instrumento de medición diagnóstico	31
3.3.2.1 Validez de contenido del instrumento de medición diagnóstico	32
3.3.2.2 Confiabilidad del instrumento de medición diagnóstico	33
3.3.2.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición diagnóstico	33

Índice de contenido

3.3.3 Estrategias didácticas	33
3.3.3.1 Estrategia didáctica para abordar la dinámica poblacional	34
3.3.3.2 Estrategia didáctica para abordar un circuito RL	35
3.3.3.3 Estrategia didáctica para abordar diseminación de un fármaco	36
3.3.3.4 Estrategia didáctica para abordar la propagación de una enfermedad	38
3.3.4 Instrumento de medición posprueba	39
3.3.4.1 Validez de contenido del instrumento de medición posprueba	40
3.3.4.2 Confiabilidad del instrumento de medición posprueba	40
3.3.4.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición posprueba	40
Capítulo 4. Análisis de los resultados	41
4.1 Análisis de calidad de los instrumentos de medición	42
4.1.1 Análisis de calidad del instrumento de medición preliminar	42
4.1.2 Análisis de calidad del instrumento de medición diagnóstico	44
4.1.3 Análisis de calidad del instrumento de medición posprueba	45
4.2 Análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de medición preliminar	46
4.3 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición diagnóstico	50
4.4 Análisis de la implementación de las estrategias didácticas	54
4.5 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición posprueba	62
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones	72
5.1 Conclusiones	72
5.2 Recomendaciones	74
Referencias bibliográficas	76
Anexo A. Retícula	81
Anexo B. Justificación de contenidos	82

Índice de contenido

Anexo C. Tabla resumen especificaciones	85
Anexo D. Especificaciones de diseño	86
Anexo E. Instrumento de medición preliminar	134
Anexo F. Instrumento de medición diagnóstico	143
Anexo G. Instrumento de medición posprueba	150
Anexo H. Estrategia didáctica para abordar la dinámica poblacional y registro ante INDAUTOR	159
Anexo I. Estrategia didáctica para abordar un circuito RL y registro ante INDAUTOR	167
Anexo J. Estrategia didáctica para abordar diseminación de un fármaco y registro ante INDAUTOR	176
Anexo K. Estrategia didáctica para abordar la propagación de una enfermedad y registro ante INDAUTOR	185

Capítulo 1. Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) son ecuaciones matemáticas que relacionan una función con sus derivadas. Estas ecuaciones describen la tasa de cambio de una variable respecto a otra y son fundamentales en la modelización de fenómenos físicos, biológicos, económicos y de ingeniería.

Las EDO son esenciales para modelar sistemas dinámicos en ingeniería mecánica, eléctrica, civil y aeroespacial. Por ejemplo, en ingeniería mecánica, las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos se expresan a menudo como EDO (Kreyszig, 2011). En ingeniería química y biomédica, las EDO son cruciales para modelar reacciones químicas y dinámicas biológicas, respectivamente. Estos modelos ayudan a los ingenieros a predecir comportamientos y optimizar procesos (Logan, 2015).

En ingeniería de control, las EDO se utilizan para diseñar controladores que regulan el comportamiento de sistemas dinámicos, como robots o aviones, optimizando su funcionamiento y seguridad (Ogata, 2010). El conocimiento avanzado de EDO permite a los ingenieros contribuir a la innovación tecnológica, desarrollando métodos y tecnologías más eficientes y efectivos para resolver problemas complejos de la vida real (Zill y Cullen, 2012).

Las EDO de primer orden son una clase fundamental de ecuaciones matemáticas que aparecen en numerosos contextos académicos y profesionales. Estas ecuaciones son cruciales para modelar procesos que involucran tasas de cambio y son utilizadas en una amplia gama de aplicaciones en ciencias e ingeniería. Estas ecuaciones se utilizan para modelar fenómenos como el crecimiento poblacional, la desintegración radioactiva, la dinámica de fluidos y la transferencia de calor (Boyce y DiPrima, 2017). En medicina y biología, modelan la cinética de fármacos, la propagación de enfermedades y la dinámica de poblaciones biológicas (Edelstein-Keshet, 2005).

Las ecuaciones diferenciales que modelan estos sistemas se pueden resolver mediante el método de variables separables cuando una ecuación puede ser expresada como $f(y)dy = g(x)dx$ permitiendo la integración directa de ambos lados (Zill, 2013). Cuando las ecuaciones diferenciales no son fácilmente separables se utiliza el método de los factores integrantes, este método implica multiplicar la ecuación original por un factor integrante para hacerla integrable (Nagle, Saff y Snider, 2018).

El método de la transformada de Laplace es una técnica poderosa para resolver Ecuaciones Diferenciales (ED), particularmente útil en ecuaciones lineales y sistemas con condiciones iniciales. Esta técnica convierte ED, que son ecuaciones en el dominio del tiempo, en ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. Esta transformación facilita la solución de la ecuación, ya que trabajar con ecuaciones algebraicas suele ser más simple que trabajar directamente con ecuaciones diferenciales.

El uso de estrategias didácticas (Arellano y Solana, 2009) que integran conceptos de cálculo junto con herramientas como el software Geometre ha evidenciado que la tecnología constituye un recurso invaluable en la investigación educativa en matemáticas. Asimismo, la incorporación de recursos tecnológicos puede estimular la exploración de ideas matemáticas, promoviendo la resolución ágil de problemas complejos y fomentando la experimentación sistemática en el aula.

Una investigación de Zerrin y Sebnem (2010), en la que se diseñó e implementó una actividad de aprendizaje sobre el concepto de función utilizando GeoGebra, mostró que los estudiantes del grupo experimental lograron mejores resultados académicos. Esto se debió a que la visualización y la dinámica de las formas geométricas en la aplicación aumentaron significativamente la atención de los alumnos.

GeoGebra es un software que facilita la creación de aplicaciones interactivas, convirtiéndose en una herramienta eficaz para la enseñanza de las matemáticas (Caligaris, Schivo y Romiti, 2015). Además, permite trabajar con modelos significativos mediante el uso de diversas representaciones y herramientas de modelado (Hashemi et al., 2014), contribuyendo al desarrollo del razonamiento lógico y a la mejora de las habilidades de visualización en los estudiantes (Bhagat y Chang, 2015).

La integración de recursos tecnológicos en la enseñanza de las ED en ingeniería ha revolucionado la forma en que los estudiantes comprenden y aplican estos conceptos matemáticos. Los recursos tecnológicos, como el software de simulación, las plataformas de cálculo y los entornos interactivos, permiten a los estudiantes visualizar soluciones, experimentar con parámetros y comprender mejor la dinámica de los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales.

Las tecnologías educativas poseen el potencial de generar cambios profundos en el ámbito educativo, redefiniendo tanto los espacios como las dinámicas del proceso de enseñanza-aprendizaje. Asimismo, tienen la capacidad de modificar los roles convencionales de docentes y estudiantes, así como las actividades que conforman el proceso formativo (González y Granera, 2021).

Herramientas como MATLAB, Maple y Mathematica son ampliamente utilizadas para simular y resolver ecuaciones diferenciales, estos programas ofrecen a los estudiantes la capacidad de manipular directamente las ecuaciones y observar los efectos de los cambios en tiempo real (Borrelli y Coleman, 2012). También existen sitios como Wolfram Alpha que permiten a los estudiantes verificar sus soluciones y explorar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales sin necesidad de software especializado, haciendo la matemática más accesible (Hass, Heil y Weir, 2016).

El SG permite a los estudiantes crear representaciones gráficas de soluciones de EDO, lo que facilita la comprensión intuitiva de conceptos complejos y mejora la capacidad de análisis (Hughes-Hallett et al., 2013). Plataformas como Khan Academy y Coursera ofrecen cursos interactivos sobre ecuaciones diferenciales, donde los estudiantes pueden aprender a su propio ritmo y recibir retroalimentación instantánea sobre sus progresos (Strang, 2014). Sin embargo, aunque las herramientas tecnológicas pueden facilitar el aprendizaje, su integración efectiva en el currículo es a menudo un desafío ya que los instructores pueden no estar suficientemente capacitados para utilizar estas herramientas de manera efectiva, limitando su potencial para mejorar el aprendizaje (Borrelli y Coleman, 2012).

Estudios sobre el uso de GeoGebra confirman su eficacia como herramienta de aprendizaje basada en la visualización, favoreciendo la comprensión y el entendimiento de los estudiantes. Los investigadores resaltan que GeoGebra facilita la interacción con conceptos matemáticos a través de recursos visuales (Córdoba, Castrillón y Rojas, 2015; Chen y Wu, 2020). Su versatilidad lo posiciona como una opción ideal para fortalecer el conocimiento y las habilidades de los estudiantes en la formulación y resolución de problemas vinculados a ecuaciones diferenciales.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ED muchos estudiantes tienen dificultades para entender la naturaleza abstracta de dichas ecuaciones y cómo se relacionan con fenómenos reales, la abstracción de convertir problemas físicos en modelos matemáticos puede ser un gran obstáculo (Zill, 2013). Se suma la situación de que los estudiantes a menudo no ven la relevancia de las ED en la ingeniería práctica, esto se debe a que los ejemplos y problemas utilizados en la enseñanza no siempre reflejan sus aplicaciones en situaciones reales de ingeniería (Edwards y Penney, 2008).

El enfoque tradicional de enseñanza, que a menudo se centra en la memorización y en métodos analíticos sin suficiente énfasis en la simulación y el modelado, puede limitar la comprensión profunda de los estudiantes (Hughes-Hallett et al., 2013). Aunado a lo anterior, algunos métodos para resolver ED son matemáticamente complejos y pueden ser difíciles de dominar sin una base sólida en cálculo y álgebra (Nagle, Saff, y Snider, 2018), como es el caso del método de variación de parámetros o la resolución de sistemas de ED.

1.1 Planteamiento del problema

En la actualidad, la educación ha experimentado cambios significativos en varios niveles, desde la educación primaria hasta la licenciatura, debido principalmente a la pandemia de COVID-19. Estos ajustes han modificado fundamentalmente cómo los docentes abordan los distintos temas incluidos en los programas de estudio y han impulsado la adopción de nuevas modalidades de aprendizaje, como los cursos de formación virtual. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) indica que las escuelas en 188 países cerraron temporalmente, afectando la educación de más de 1.7 mil millones de niños y jóvenes, lo que llevó a la implementación de soluciones de aprendizaje a distancia para asegurar la continuidad educativa (OECD, 2020). Además, en la enseñanza de las matemáticas, se han integrado nuevas técnicas pedagógicas que aprovechan las tecnologías digitales para mejorar el aprendizaje (CEPAL, 2021; UNESCO, 2020).

En el aula, el docente se enfrenta al desafío de motivar y captar la atención del alumno hacia el aprendizaje de los contenidos de la unidad de aprendizaje. Según Revelo y Salvatierra (2020), los contenidos no constituyen el eje central en torno al cual debe girar el desarrollo de una asignatura; más bien, el foco debe estar en diseñar actividades que permitan al alumno, como sujeto cognitivo, ejercitar un pensamiento complejo, abstracto y lógico, que es fundamental para el razonamiento y la construcción del conocimiento científico. La motivación juega un papel fundamental, para Álvarez, Mieres y Rodríguez (2007) una mayor motivación y participación de los alumnos, conduce a un aprendizaje significativo. Mientras que la interacción con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) es esencial para que el profesor adquiera los conocimientos necesarios que hagan su práctica más innovadora y efectiva, la implementación de estas herramientas busca transformar los sistemas educativos y mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes (Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2022).

Un estudio reciente (Aguilar-Salinas, Fuentes-Lara, Justo-López y Martínez-Molina, 2021) reveló que los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes derivan de una fuerte dependencia en procedimientos centrados en manipulaciones algebraicas, dejando de lado los aspectos conceptuales y las conexiones interdisciplinarias. Asimismo, se detectó una comprensión insuficiente de las funciones, lo que limita su capacidad para modelar adecuadamente diversos problemas. Esta situación se ve agravada por una comprensión lectora deficiente, que dificulta tanto la resolución efectiva de problemas como la formulación de modelos matemáticos precisos.

Según la experiencia docente del equipo de trabajo (Lara y Salinas, 2020) en el área de ecuaciones diferenciales, se ha identificado que los estudiantes, en general, tienen una comprensión conceptual limitada de los objetos matemáticos. Este problema se debe, en parte, al enfoque predominante en la aplicación de procedimientos algorítmicos y a la falta de práctica en la conversión entre distintos registros de representación durante las clases. La conversión entre estos registros representa un desafío cognitivo significativo para los estudiantes, especialmente cuando es fundamental para la resolución efectiva de problemas.

Estudios en el ámbito de la Matemática Educativa (Sureda y Otero, 2013) han evidenciado que uno de los principales obstáculos en la comprensión del concepto de función exponencial radica en las estrategias didácticas empleadas para su enseñanza. Frecuentemente, se limita a los estudiantes a seguir una secuencia de pasos o procedimientos para resolver problemas estandarizados. Sin embargo, en cursos avanzados, los docentes exigen una comprensión más profunda de esta función, no solo como una herramienta para el cálculo numérico, sino como un concepto clave para abordar problemas más complejos. Los autores subrayan la importancia de enseñar la función exponencial utilizando múltiples sistemas de representación. Es relevante mencionar que las funciones exponenciales constituyen soluciones comunes en muchas ecuaciones diferenciales lineales, tanto de primer como de segundo orden. Por ejemplo, en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, la solución general se expresa habitualmente como una combinación de funciones exponenciales.

Desde hace más de tres décadas, investigadores en el área de la Matemática Educativa (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995) han señalado que la enseñanza universitaria tiende a centrarse en el desarrollo de destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar los avances en el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos. Además, los procesos de evaluación suelen enfocarse en medir la eficiencia en la aplicación de reglas y algoritmos matemáticos (Artigue, et al. 1995; Gerald, 2002). Sin embargo, en la actualidad es crucial fortalecer no solo las habilidades operacionales, sino también la comprensión conceptual de los objetos matemáticos. Esto es especialmente importante para que los egresados, particularmente en ingeniería, estén preparados para aplicar sus conocimientos en la resolución de problemas en contextos distintos a los originales de aprendizaje.

En vista de lo expuesto anteriormente y considerando que el programa de la unidad de aprendizaje de ED se enfoca considerablemente en el contenido procedimental, con énfasis en las técnicas y métodos para la resolución de ED de primero y segundo orden, así como en los sistemas de ED, se propone la incorporación de actividades que aborden la resolución de problemas reales en ciencia e ingeniería, como la dinámica poblacional, circuitos, la diseminación de medicamentos y la propagación de enfermedades. Estas actividades se diseñan para integrar recursos tecnológicos, con especial énfasis en aplicaciones desarrolladas con el SG y proveer en lo posible la visualización de los fenómenos tratados. Un aspecto clave de la implementación de esta estrategia didáctica con GeoGebra es su enfoque en fomentar la visualización y la conversión entre diferentes registros de representación. Además, busca contextualizar las propiedades y características de los conceptos matemáticos, promoviendo al mismo tiempo la exploración activa y la experimentación por parte de los estudiantes.

1.2 Hipótesis

La enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden (EDPO) en la educación en ingeniería es un componente crucial para desarrollar competencias matemáticas fundamentales en los estudiantes. Estas competencias no solo abarcan la capacidad de comprender y aplicar conceptos teóricos, sino también la habilidad para modelar, representar y resolver problemas complejos en contextos reales. Sin embargo, la forma en que se enseña y se facilita el aprendizaje de estas competencias puede variar significativamente, lo que lleva a la necesidad de evaluar y comparar diferentes enfoques pedagógicos.

En esta investigación, se comparan dos enfoques de enseñanza-aprendizaje en el contexto de las EDPO:

Enfoque Tradicional (Grupo de Control): Este enfoque se basa en un modelo de enseñanza tradicional centrado en la transmisión de conocimientos, donde los estudiantes reciben instrucción directa y realizan ejercicios con un énfasis en la repetición y la memorización.

Enfoque Experimental (Grupo Experimental): Este enfoque combina un modelo basado en competencias con estrategias didácticas innovadoras, que incluyen la teoría del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), el uso de representaciones semióticas, y la incorporación de tecnologías educativas como el SG. El objetivo es facilitar un aprendizaje más activo, donde los estudiantes no solo adquieren conocimientos, sino que también desarrollan competencias aplicables en situaciones reales.

Las variables dependientes de esta investigación son el rendimiento académico y el desarrollo de competencias matemáticas asociadas con las EDPO. Estas variables serán evaluadas tanto en términos de comprensión teórica como en la capacidad para aplicar conocimientos en la resolución de problemas prácticos. Esta variable se cuantificó en una escala de 0 a 100, representando el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes. También se utiliza el "índice de dificultad," definido como el cociente entre el número de alumnos que aciertan una pregunta y el número total de alumnos que la contestan, para analizar la efectividad de las estrategias de enseñanza.

La variable independiente es el enfoque de enseñanza-aprendizaje utilizado, con dos variantes: el enfoque tradicional y el enfoque que incorpora ABP, representaciones semióticas, y tecnologías educativas. Con base en estas variables y en los objetivos del estudio, se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1

Hipótesis Nula (H_0): No existe una diferencia significativa en el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las EDPO entre los estudiantes que participan en un enfoque tradicional de enseñanza y aquellos que participan en un enfoque basado en competencias que incorpora estrategias didácticas apoyadas por tecnologías educativas y aprendizaje basado en problemas.

Hipótesis Alternativa (H_1): Existe una diferencia significativa en el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las EDPO entre los estudiantes que participan en un enfoque tradicional de enseñanza y aquellos que participan en un enfoque basado en competencias que incorpora estrategias didácticas apoyadas por tecnologías educativas y aprendizaje basado en problemas.

Hipótesis 2

Hipótesis Nula (H_0): El uso de tecnologías educativas y la integración del aprendizaje basado en problemas no tienen un impacto significativo en el rendimiento académico de las EDPO en comparación con la enseñanza tradicional.

Hipótesis Alternativa (H_1): El uso de tecnologías educativas y la integración del aprendizaje basado en problemas tienen un impacto significativo en el rendimiento académico de las EDPO en comparación con la enseñanza tradicional.

Estas hipótesis están diseñadas para evaluar la efectividad del enfoque experimental en comparación con el enfoque tradicional, proporcionando una base para analizar cómo diferentes métodos pedagógicos afectan el desarrollo de competencias matemáticas y el rendimiento académico de los estudiantes. Al contrastar los resultados obtenidos entre los dos enfoques, la investigación busca aportar evidencia sobre cuál es la estrategia más efectiva para mejorar el aprendizaje en el ámbito de las EDPO en la educación en ingeniería.

1.3 Objetivos

En el contexto de la educación en ingeniería, la enseñanza de las matemáticas, y en particular de las ED, representa un desafío significativo tanto para los docentes como para los estudiantes. Las EDPO son fundamentales para la modelación de una amplia gama de fenómenos en diversas disciplinas de la ingeniería, desde la dinámica poblacional hasta la diseminación de fármacos. Sin embargo, la naturaleza abstracta y compleja de estos conceptos suele dificultar la comprensión y aplicación efectiva por parte de los estudiantes.

Ante este desafío, es imperativo explorar y evaluar métodos pedagógicos que no solo transmitan conocimientos teóricos, sino que también desarrollen competencias prácticas y aplicables en contextos reales. En este sentido, la integración de enfoques didácticos basados en competencias, apoyados por tecnologías educativas como el SG, y la incorporación de la teoría de aprendizaje basado en problemas, ofrecen un camino prometedor para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en este campo.

La presente propuesta de investigación se centra en comparar dos enfoques de enseñanza para las EDPO en estudiantes de ingeniería: uno tradicional y otro experimental. El enfoque experimental combina estrategias didácticas que integran representaciones semióticas, tecnología educativa y aprendizaje basado en problemas, abordando problemáticas concretas como la dinámica poblacional, circuitos, diseminación de fármacos y propagación de enfermedades. A través de esta investigación, se busca no solo mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, sino también equiparlos con competencias esenciales para su futura práctica profesional. En este tenor se propone el siguiente objetivo general y 4 objetivos específicos como directrices del estudio de investigación.

Objetivo General: Comparar la efectividad del proceso de enseñanza-aprendizaje en el desarrollo de competencias relacionadas con las EDPO en estudiantes de ingeniería, contrastando un enfoque tradicional de enseñanza con un enfoque basado en competencias que incorpora estrategias didácticas apoyadas por recursos tecnológicos, como el SG, y el aprendizaje basado en problemas. Los objetivos específicos son los siguientes:

- Diseñar e implementar una estrategia didáctica innovadora que integre el aprendizaje basado en problemas y utilice herramientas tecnológicas, como GeoGebra, para facilitar un aprendizaje más profundo y significativo de las EDPO. Esta estrategia incluirá la resolución de problemas aplicados como la dinámica poblacional, circuitos en serie RL, diseminación de fármacos y propagación de enfermedades.

- Evaluar el impacto de la implementación de la estrategia didáctica que combina el uso de tecnologías educativas y el aprendizaje basado en problemas en el rendimiento académico y en la adquisición de competencias matemáticas de los estudiantes, comparando los resultados entre un grupo de control (enseñanza tradicional) y un grupo experimental.

- Analizar la influencia de las tecnologías educativas y el aprendizaje basado en problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, explorando de manera detallada las capacidades y el alcance de estas herramientas y métodos como estrategias eficaces en la enseñanza de matemáticas en la ingeniería.

- Explorar las percepciones y actitudes de los estudiantes hacia el uso de tecnologías como GeoGebra y el enfoque de aprendizaje basado en problemas en su proceso de aprendizaje, identificando cómo estas estrategias pueden motivar y enriquecer su comprensión de las EDPO.

1.4 Importancia del estudio

Las EDPO son herramientas matemáticas clave para modelar fenómenos dinámicos en diversas disciplinas de la ingeniería, como la física, la biología y la química. Comprender y poder aplicar estos conceptos permite a los estudiantes abordar problemas como la datación, la dinámica poblacional, la ley de enfriamiento, la diseminación de fármacos y la propagación de enfermedades, todos ellos con un impacto directo en la sociedad.

Las competencias en modelación, formulación, representación y resolución de problemas son fundamentales para los ingenieros, ya que estas habilidades son esenciales para abordar y resolver los desafíos complejos que enfrentan en su práctica profesional. Desarrollar y fortalecer estas competencias asegura que los estudiantes estén mejor preparados para enfrentar situaciones reales en su práctica profesional.

Al dirigirse a estudiantes de tercer semestre, el estudio se sitúa en un momento crítico de su formación, donde es importante consolidar los conocimientos fundamentales que servirán como base para cursos y experiencias posteriores en la carrera. Fortalecer estas competencias desde temprano ayuda a cimentar una base sólida para su desarrollo académico y profesional.

Incorporar herramientas tecnológicas como GeoGebra en el proceso educativo no solo facilita la comprensión de conceptos abstractos, sino que también fomenta el uso de software especializado que los estudiantes probablemente utilizarán en su vida profesional. Esto mejora su capacidad para visualizar y manipular modelos matemáticos, lo que a su vez refuerza su comprensión y aplicación. Este tipo de investigación no solo beneficia a los estudiantes participantes, sino que también aporta información valiosa para mejorar las estrategias pedagógicas y curriculares en la educación de ingeniería. Al evaluar la efectividad de métodos como el uso de GeoGebra, se pueden hacer ajustes que optimicen el aprendizaje y el rendimiento académico en general.

1.5 Limitaciones del estudio

Este estudio tiene como objetivo desarrollar y fortalecer las competencias de los estudiantes de ingeniería en áreas clave como la modelación, formulación, representación y resolución de problemas. Además, se enfoca en el uso del lenguaje común y algebraico, así como en la realización de cálculos asociados a los conocimientos matemáticos relacionados con fenómenos que involucren EDPO. Entre los problemas abordados se incluyen la datación, la dinámica poblacional, la ley de enfriamiento, la diseminación de fármacos y la propagación de enfermedades. Para facilitar el aprendizaje y la aplicación de estos conceptos, se incorporó el uso del SG. El estudio está dirigido a los estudiantes de tercer semestre del Tronco Común Ciencias de la Ingeniería de la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC).

Capítulo 2. Marco referencial

Este apartado de la investigación se enfoca en explorar y analizar en profundidad varios aspectos clave de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, basándose en los antecedentes establecidos, el planteamiento del problema, la hipótesis y los objetivos específicos del estudio. En primer lugar, se revisa la enseñanza tradicional de las matemáticas, evaluando sus métodos y técnicas establecidas. Posteriormente, se abordan las teorías con influencia en este campo, destacando especialmente las contribuciones de Raymond Duval sobre las representaciones semióticas en la comprensión matemática. Adicionalmente, se examina la teoría del aprendizaje basado en problemas, que propone una metodología enfocada en la resolución de problemas reales para fomentar un aprendizaje significativo y aplicado. Finalmente, se analiza la integración de los recursos tecnológicos en la educación matemática, con un enfoque particular en el uso del SG. Este software se destaca por su capacidad para facilitar la visualización y manipulación de conceptos matemáticos, ofreciendo así una herramienta valiosa para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en este campo

2.1 Análisis de la enseñanza tradicional de las matemáticas

En el estudio realizado por Li y Schoenfeld (2019) se discute la percepción tradicional de las matemáticas como una disciplina de conocimientos fijos y preestablecidos que los estudiantes deben adquirir, y cómo esta visión puede desalentar a muchos estudiantes y disuadirlos de continuar en campos relacionados con la ingeniería. En este sentido los autores proponen una reformulación del enfoque educativo en matemáticas y ciencias para fomentar un mejor entendimiento y una mayor retención de los estudiantes. Enfatizan la necesidad de concebir las matemáticas no sólo como un conjunto de conocimientos para memorizar, sino como una actividad de creación de sentido y de exploración práctica. Además, abogan por un cambio en la enseñanza de las matemáticas hacia métodos que involucren a los estudiantes en la formulación de problemas y la resolución de estos mediante procesos que estimulen su razonamiento y comprensión.

La enseñanza tradicional de las ED en las escuelas de ingeniería se ha caracterizado por un enfoque centrado en métodos analíticos y algebraicos para obtener soluciones analíticas, que se expresan en formas explícitas o implícitas para la función desconocida. Esta metodología está principalmente orientada hacia la enseñanza de técnicas algorítmicas y procedimentales, enfocándose en la resolución de tipos específicos de ED mediante una secuencia de pasos bien definidos (Lozada, Guerrero-Ortiz, Coronel y Medina, 2021).

En el aula tradicional, el proceso de enseñanza de las EDPO, por ejemplo, se desarrolla en tres pasos principales realizados por el educador: introducción de las formas abstractas de las EDPO, clasificación de estas ecuaciones en categorías como separables, homogéneas, exactas, lineales, Bernoulli, entre otras, y enseñanza de la técnica de solución algorítmica propia de cada tipo de ecuación diferencial (Lozada, et al., 2021).

Sin embargo, esta metodología tradicional ha sido criticada por promover un aprendizaje pasivo de conceptos y no fomentar suficientemente la comprensión profunda o la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos. Por lo tanto, se ha recomendado que no se descarte completamente, sino que se combine con metodologías activas de aprendizaje que involucren a los estudiantes de manera más directa en su proceso educativo (Lozada, et al., 2021).

2.2 Teoría de las representaciones semióticas

Esta investigación se basa en la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (2004, 2006), la cual sostiene que el pensamiento matemático depende fundamentalmente del uso de sistemas de representación semiótica. Según esta teoría, los objetos matemáticos solo pueden ser comprendidos a través de dichas representaciones, cada una de las cuales ofrece una perspectiva parcial sobre el objeto que describe. Por ello, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no debería centrarse exclusivamente en un único registro, sino que debe fomentar la capacidad de los estudiantes para traducir información entre distintos registros de representación.

En la teoría de los registros de representación semiótica, la actividad asociada con la creación de una representación se denomina semiosis, mientras que la comprensión conceptual de los objetos matemáticos se conoce como noesis. Un registro de representación debe posibilitar tres actividades cognitivas fundamentales vinculadas a la semiosis: la generación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La primera de estas actividades se refiere a la expresión inicial de una representación mental, ya que, como señala Duval (1999), "las representaciones semióticas no solo son esenciales para la comunicación, sino también para el desarrollo de la actividad matemática en sí". Por su parte, el tratamiento y la conversión implican la transformación de una representación en otras, ya sea dentro del mismo registro o entre registros diferentes.

Duval define la semiosis como el proceso de aprehensión o producción de una representación semiótica. Para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas esenciales relacionadas con la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión de representaciones. La formación de una representación implica la creación inicial de una representación que capture un concepto matemático. El tratamiento, por otro lado, se refiere a la transformación de la representación dentro del mismo registro en el que fue creada, siendo una modificación interna. Finalmente, la conversión consiste en transformar una representación de un registro a otro, preservando todo o parte del contenido original.

Entender un concepto matemático requiere dominar sus múltiples representaciones y ser capaz de traducirlas o transformarlas entre distintos formatos. Duval (1999) subraya la importancia fundamental de esta habilidad en el aprendizaje de las matemáticas, destacando que la actividad matemática exige manejar diversos registros de representación semiótica (como figuras, gráficas, símbolos y lenguaje natural) durante una misma tarea, seleccionando el registro más adecuado según la necesidad. La utilización de varios registros es clave para evitar que los objetos matemáticos se confundan con sus representaciones y asegurar que puedan ser identificados correctamente en cada uno de ellos. Este proceso facilita la distinción entre el objeto matemático y sus representaciones, un paso crucial para la conceptualización. Duval (2004) advierte que no hacer esta diferenciación puede resultar en una comprensión superficial y en conocimientos que, fuera del contexto original de aprendizaje, se vuelven inútiles, transformando las representaciones en elementos estáticos sin valor productivo.

2.3 Aprendizaje basado en problemas

La teoría del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es un enfoque pedagógico centrado en el estudiante que se caracteriza por el uso de problemas del mundo real como medio para fomentar el aprendizaje. Este método es esencialmente constructivista, ya que implica que los estudiantes construyan su conocimiento y comprensión a través de la experiencia de resolver problemas abiertos, sin soluciones predeterminadas. En el ABP, los estudiantes trabajan de manera colaborativa y autodirigida, identificando lo que necesitan aprender para resolver problemas complejos y relevantes (Educational Technology, 2016; Learning Theories, 2021).

Según Rodríguez-Mesa, Kolmos y Guerra (2017) el ABP es una metodología pedagógica que transforma la enseñanza tradicional al centrarse en la resolución de problemas reales y pertinentes en un contexto colaborativo y práctico. Los autores destacan que el ABP no solo promueve una educación más interactiva y participativa, sino que también ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades esenciales como el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de trabajar efectivamente en equipo. En el contexto de la ingeniería, esta metodología es particularmente valiosa porque prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos complejos y multidisciplinarios, reflejando las condiciones reales que encontrarán en su vida profesional.

Los mismos autores describen el ABP como un proceso en el que los estudiantes aprenden trabajando en grupos para resolver problemas abiertos que no tienen una única solución correcta, lo que les obliga a investigar, aplicar conocimientos y reflexionar sobre su aprendizaje. Este enfoque también implica un cambio en el rol del educador, de ser un transmisor de conocimientos a un facilitador del aprendizaje, guiando y apoyando a los estudiantes en su proceso educativo.

Luy-Montejo y Carlos (2019) afirman que la implementación del Aprendizaje Basado en Problemas ha demostrado fortalecer de manera integral la inteligencia emocional de los estudiantes, yendo más allá de simplemente mejorar su empleabilidad. En la actualidad, la sociedad demanda una educación que forme personas capaces de construir relaciones positivas tanto en el ámbito personal como en el profesional, fomentando una convivencia armoniosa con quienes los rodean.

Castaño y Montante (2015) señalan que el núcleo del ABP radica en la identificación, descripción, análisis y resolución de problemas, un proceso en el que el docente actúa como guía, redefiniendo así los roles tradicionales tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Recientemente, esta metodología ha sido incorporada en las aulas de carreras de ingeniería a través de trabajos teóricos que los estudiantes analizan y discuten. En particular, se ha implementado en el curso de Ecuaciones Diferenciales, ya que esta asignatura requiere que los alumnos apliquen conocimientos adquiridos en materias previas como Cálculo Diferencial e Integral y Álgebra Lineal, los cuales también resultan fundamentales para otras asignaturas en ingeniería, como Circuitos Eléctricos, Electricidad y Magnetismo, entre otras.

2.4 Recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas

En respuesta a las críticas sobre el enfoque tradicional de la enseñanza de las matemáticas particularmente sobre las ED, los últimos años han visto un incremento en la incorporación de enfoques numéricos y cualitativos. Estos métodos no solo abordan las limitaciones de los métodos analíticos, que no pueden resolver una clase amplia de ED, sino que también introducen herramientas gráficas que facilitan la visualización inmediata de soluciones y ayudan a comprender las propiedades cualitativas de las ecuaciones, como la estabilidad y el comportamiento de las soluciones (Lozada, et al., 2021).

Además, el uso creciente de tecnologías de la información y comunicación ha modificado significativamente las prácticas tradicionales, haciendo que las metodologías basadas en proyectos y en tecnología sean más prevalentes en las aulas. Estos enfoques ayudan a los estudiantes a aplicar modelos matemáticos a situaciones reales, mejorando así su compromiso y su aprendizaje efectivo (Lozada, et al., 2021).

GeoGebra es un software de matemáticas dinámico y de código abierto que integra geometría, álgebra, estadísticas, y cálculo en una única plataforma fácil de usar. Este software es ampliamente utilizado en la enseñanza de matemáticas debido a su capacidad para visualizar y manipular objetos matemáticos, lo que facilita un aprendizaje más interactivo y profundo (Hohenwarter y Jarvis, 2007).

En términos de estructura, GeoGebra ofrece varias herramientas y recursos que permiten tanto a estudiantes como a educadores explorar conceptos matemáticos de manera visual. Esto incluye la creación de gráficos, la manipulación de sliders para observar cambios en tiempo real, y la implementación de comandos para solucionar problemas complejos (Hohenwarter y Jarvis, 2007).

Uno de los usos más efectivos de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas es en el área de las ED. GeoGebra permite a los estudiantes visualizar campos de dirección e integrar visualmente curvas, lo que es fundamental para entender las soluciones de ED y sus aplicaciones prácticas. Además, la capacidad del software para modelar situaciones reales ayuda a los estudiantes a comprender mejor cómo las ED se aplican en diversos contextos científicos y de ingeniería (Latifi, 2021).

Las ventajas de utilizar GeoGebra en la educación matemática incluyen la mejora en la comprensión conceptual de los estudiantes, un mayor “engagement” gracias a su interfaz interactiva, y la habilidad de adaptar las lecciones a un formato más dinámico y visual. Estos beneficios se traducen en una mejora del aprendizaje autónomo y una mejor retención del conocimiento matemático (Alkhateeb y Al-Duwairi, 2019).

2.5 Contenido matemático

El programa de la unidad de aprendizaje de ED tiene como propósito fundamental que los estudiantes de ingeniería adquieran y apliquen los conocimientos relacionados con la solución de ED, enfatizando su uso en la modelación de fenómenos físicos, químicos y biológicos relevantes en las distintas disciplinas de la ingeniería. Esta unidad se encuentra en la etapa básica del plan de estudios, siendo obligatoria y parte del tronco común para diversas especialidades dentro de las ciencias e ingenierías. Se recomienda que los estudiantes hayan cursado previamente Cálculo Integral, lo que subraya la necesidad de una base sólida en matemáticas para abordar el contenido de la asignatura.

La unidad de aprendizaje de ED es esencial en la formación de los ingenieros, ya que proporciona herramientas matemáticas cruciales para modelar y resolver problemas dinámicos en diversas disciplinas. Según Borreli y Coleman (2012), las ED son "la base de los modelos matemáticos que describen fenómenos naturales y artificiales, permitiendo a los ingenieros prever el comportamiento de sistemas complejos" (p. 15). Este enfoque en la modelación matemática es vital para entender y optimizar sistemas en ingeniería, ya sea en mecánica, termodinámica o procesos de control.

La Unidad 1 del programa, titulada "Fundamentos de las ecuaciones diferenciales", introduce los conceptos básicos y establece el marco teórico fundamental para comprender la naturaleza y el propósito de las ED. Esta unidad es esencial para construir una base sólida que permita a los estudiantes abordar problemas matemáticos y su aplicación en diversas disciplinas de la ingeniería.

La Unidad 2, denominada "Técnicas de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y aplicaciones", es crucial para la comprensión y aplicación de métodos específicos para resolver ecuaciones de primer orden. En esta unidad, se exploran aplicaciones prácticas como la datación, que modela el decaimiento radiactivo y otros procesos de desintegración; la dinámica poblacional, que utiliza modelos para describir el crecimiento o decrecimiento de poblaciones; y la diseminación de un fármaco, que analiza cómo un medicamento se distribuye y metaboliza en el cuerpo. También se incluye la propagación de enfermedades, donde se desarrollan modelos que predicen la difusión de enfermedades infecciosas en una población, y la ley de enfriamiento de Newton, que permite analizar la tasa de cambio de temperatura de un objeto en relación con su entorno.

La aplicación de las EDPO en problemas reales, como la dinámica poblacional, la diseminación de un fármaco, o la ley de enfriamiento de Newton, demuestra cómo los conceptos teóricos pueden ser utilizados para solucionar problemas prácticos. Simmons (2009) señala que "estos modelos no solo ayudan a explicar fenómenos naturales, sino que también son esenciales para diseñar y mejorar sistemas en ingeniería". Esto subraya la importancia de enseñar estos métodos y sus aplicaciones específicas en un contexto académico.

La Unidad 3, titulada "Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones", expande los conceptos aprendidos a ecuaciones de orden superior, lo que facilita la resolución de problemas más complejos en ingeniería, como los sistemas masa-resorte y los circuitos eléctricos. Esta unidad es fundamental para los estudiantes que buscan entender y modelar fenómenos dinámicos en un contexto técnico más avanzado.

Finalmente, la Unidad 4, llamada "Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales", introduce la resolución de sistemas de ED, una habilidad esencial para modelar fenómenos en los que interactúan múltiples variables, como ocurre en los sistemas de control y en las redes eléctricas. Esta unidad permite a los estudiantes manejar situaciones complejas donde la interdependencia de variables es crítica para la solución efectiva de problemas en ingeniería.

En resumen, el programa de la unidad de aprendizaje de ED es fundamental para la formación integral de los estudiantes de ingeniería, dotándolos de herramientas matemáticas esenciales para su futura práctica profesional. Las aplicaciones abordadas en el curso, particularmente en el contexto de las ED de primer orden, son ejemplos claros y útiles de cómo estas matemáticas avanzadas se aplican para resolver problemas relevantes en ingeniería.

Capítulo 3. Metodología

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de esta investigación es comparar la efectividad del proceso de enseñanza-aprendizaje en el desarrollo de competencias relacionadas con las EDPO en estudiantes de ingeniería. Se contrasta un enfoque tradicional de enseñanza con uno basado en estrategias didácticas apoyadas por el SG, que enfatizan la conversión de registros de representación y el aprendizaje basado en problemas. En consecuencia, se ha optado por una metodología de investigación cuantitativa.

3.1 Método

Se llevó a cabo un estudio exploratorio y comparativo con dos grupos de estudiantes en la Facultad de Ingeniería Mexicali de la UABC. El diseño de investigación utilizado es un cuasiexperimento, de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), ya que se manipuló de manera intencional la variable independiente para observar su efecto sobre la variable dependiente, permitiendo así una comparación directa entre los dos grupos (control y experimental). Este enfoque experimental garantiza un mayor control sobre las variables y posibilita la medición precisa de los efectos del enfoque didáctico.

Para evaluar la hipótesis planteada en esta investigación, se empleó una prueba de hipótesis de medias, siguiendo el método propuesto por Walpole y Myers (1989). Además, se utilizó un análisis matricial para procesar la información obtenida a través de los instrumentos de medición, lo que permitió un análisis exhaustivo de los resultados y una interpretación más robusta de los datos generados.

Desde esta perspectiva en el siguiente capítulo se presenta un análisis exploratorio toda vez que dentro de la Facultad de Ingeniería Mexicali no se cuentan con estudios similares que permitan conocer las habilidades matemáticas de los estudiantes que se incorporan a los cursos de ED particularmente en la resolución de EDPO de problemas reales de ciencia e ingeniería, como la dinámica poblacional, problemas de circuitos RL, la diseminación de medicamentos y la propagación de enfermedades. También se presenta otro análisis de mayor profundidad con carácter comparativo, tomando como referentes los esquemas de enseñanza tradicional y el otro con inclusión del software GeoGebra, el cual permitirá establecer el nivel de eficiencia de los estudiantes de los grupos experimentales y probar las hipótesis estadísticas propuestas.

3.2 Sujetos

Para llevar a cabo la investigación se utilizaron dos grupos, los asignados al investigador en el periodo 2024-2, los dos grupos se encuentran debidamente registrados ante el Departamento de Servicios Estudiantiles y Gestión Escolar de la UABC como 686 y 735, originalmente se inició la experimentación con 80 estudiantes distribuidos equitativa y aleatoriamente en ambos grupos (Tabla 1).

Tabla 1. Distribución de los alumnos participantes por grupo

Número de grupo	Grupo	Cantidad de alumnos
686	Control	40
735	Experimental	40

Fuente: Elaboración propia

3.3 Materiales de la investigación

Para el desarrollo de la investigación, se consideró necesario diseñar varios instrumentos de medición. En primer lugar, se creó un instrumento preliminar destinado a detectar las deficiencias de los estudiantes en el área de EDPO, lo que permitió sustentar el diseño de las estrategias didácticas. La estrategia didáctica, apoyada por el SG, la cual se enfoca en la conversión de registros de representación y el aprendizaje basado en problemas. Además, se desarrolló un instrumento diagnóstico para verificar la igualdad académica entre los grupos de control y experimental para ser aplicado antes de la puesta en escena de la estrategia didáctica. Finalmente, se diseñó un instrumento de medición posprueba con el fin de evaluar el progreso educativo alcanzado por los estudiantes tras la implementación de la estrategia didáctica. Todos los instrumentos fueron sometidos al proceso de validación con la participación de jueces expertos de acuerdo a Alsina y Coronata (2014). A continuación, se describen en detalle estos materiales.

3.3.1 Instrumento de medición preliminar

Se diseñó un instrumento preliminar (Anexo E) con el objetivo de identificar las deficiencias conceptuales y procedimentales de los estudiantes en el tema de EDPO. Este instrumento no sólo permitió diagnosticar las áreas en las que los estudiantes presentan dificultades, sino que también sirvió como base para el desarrollo de estrategias didácticas más ajustadas a las necesidades detectadas.

Al identificar con precisión las carencias en su comprensión, fue posible diseñar intervenciones pedagógicas que abordarán esos vacíos de manera efectiva, optimizando el proceso de enseñanza-aprendizaje y asegurando que las actividades propuestas estén alineadas con los objetivos de aprendizaje esperados.

Para el diseño del instrumento se tomó en consideración los criterios de Contreras y Backhoff (2004) para la generación de reactivos en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum. En el proceso de construcción del instrumento se produjeron varios productos de apoyo como la retícula (Anexo A) para identificar las relaciones y la relevancia de los contenidos, la justificación de los contenidos (Anexo B) que implica describir puntualmente la importancia del contenido a partir de los tipos de contenido (fuente, rama, sintético y aislado). También se generó una tabla (Anexo C) que resume los contenidos que se incluyen en el instrumento, finalmente las especificaciones de diseño (Anexo D) que implica la identificación y sentido del contenido a evaluar, el indicador de logro, tipo de contenido, así como también la base del reactivo, un reactivo muestra con sus respectivos distractores, la validación de la respuesta correcta y el tipo de información involucrada en el reactivo (textual, gráfica o tabular).

Entre los contenidos generales que conforman este instrumento son: Solución general y solución particular de una ecuación diferencial de primer orden, transformada de Laplace inversa, resolución de EDPO mediante la técnica de variables separables y transformada de Laplace, resolución de ecuaciones diferenciales lineales, resolución de problemas de aplicación sobre datación, dinámica de poblaciones, temperatura y mezclas.

3.3.1.1 Validez de contenido del instrumento de medición preliminar

Se llevó a cabo un proceso de validación de contenido robusto para asegurar que los reactivos del instrumento fueran pertinentes y efectivos en la medición de los procesos matemáticos relacionados con las ecuaciones diferenciales de primer orden. Esta validación se basó en la selección de indicadores de logro adecuados y en la revisión de los reactivos por un panel de expertos, siguiendo la metodología de Alsina y Coronata (2014).

El panel, compuesto por 4 profesores universitarios especializados en ecuaciones diferenciales, evaluó los 24 reactivos del instrumento utilizando una escala de 0 (totalmente en desacuerdo) a 4 (totalmente de acuerdo). Los criterios de evaluación incluyeron la correspondencia con los temas, la demanda cognitiva, la claridad de redacción, la independencia de los reactivos, la adecuación del nivel de dificultad, la validez de las opciones de respuesta, el uso adecuado del vocabulario y la neutralidad de la información. El coeficiente de validez de contenido (CVC) se calculó utilizando las metodologías de Hernández-Nieto (2002) y Gempp (2006), y se mantuvieron únicamente los reactivos con un CVC igual o superior a 0.80. Este riguroso proceso garantizó que el instrumento fuera de alta calidad y adecuado para evaluar el dominio de los contenidos de ecuaciones diferenciales.

3.3.1.2 Confiabilidad del instrumento de medición preliminar

El análisis de confiabilidad es fundamental para evaluar la estabilidad de las mediciones cuando se repiten en diferentes momentos (Prieto y Delgado, 2010). En este proceso se determina si el instrumento mantiene resultados estables a lo largo del tiempo (García y Vilanova, 2008). En este estudio, se aplicó el método de mitades partidas, que consiste en dividir el instrumento en dos subpruebas, separando los reactivos en pares e impares, y luego tratándose como pruebas paralelas. La confiabilidad entre las dos mitades se calcula mediante el coeficiente de consistencia interna, ajustado con la fórmula de Spearman-Brown. Si el instrumento es confiable, se espera una fuerte correlación entre las puntuaciones de ambas mitades, lo que indicaría consistencia en los resultados a través de distintos reactivos (Reidl-Martínez, 2013).

3.3.1.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición preliminar

El instrumento de medición utilizado es una prueba criterial cuyo propósito es evaluar habilidades y conocimientos de EDPO, proporciona información sobre los tópicos en los cuales los estudiantes tuvieron más dificultad. El índice de dificultad (ID) de cada reactivo es una métrica que sirve para medir qué tan bien los estudiantes resuelven problemas específicos en este caso de ecuaciones diferenciales. Según Crocker y Algina (1986), este índice se calcula con base en la proporción de estudiantes que responden correctamente a cada reactivo.

El índice de discriminación (IDC) de un reactivo mide su capacidad para diferenciar entre estudiantes de alto y bajo rendimiento. Este índice indica qué tan probable es que los estudiantes con buen desempeño respondan correctamente al reactivo, mientras que aquellos con bajo rendimiento probablemente no lo harán. Mientras que el coeficiente de correlación biserial (rpbis), según Henrysson (1971), es un indicador de validez predictiva que relaciona la respuesta de un estudiante a un reactivo con su rendimiento general en la prueba.

3.3.2 Instrumento de medición diagnóstico

Se desarrolló un instrumento diagnóstico (Anexo F) para verificar la igualdad académica entre los grupos de control y experimental para ser aplicado antes de la puesta en escena de la estrategia didáctica. Este examen diagnóstico ha sido diseñado para evaluar el nivel de conocimientos matemáticos básicos de los estudiantes que se preparan para cursar la asignatura de Ecuaciones Diferenciales.

Este diagnóstico es esencial para identificar las fortalezas y áreas de oportunidad en el dominio de conceptos fundamentales que son prerrequisitos indispensables para el estudio avanzado de las ED. Las ecuaciones diferenciales son una herramienta matemática crucial en la modelación de fenómenos en diversas áreas de la ciencia y las ingenierías, su comprensión y manejo requieren una sólida base en varios temas de matemáticas.

Este instrumento diagnóstico busca asegurar que los estudiantes posean los conocimientos necesarios para afrontar con éxito los desafíos del curso, los reactivos incluyen temas clave como la resolución de ecuaciones algebraicas, cálculo de integrales definidas e indefinidas, razonamiento matemático para resolver problemas enunciados, derivadas de funciones algebraicas y racionales, desarrollo de binomios al cuadrado y al cubo, simplificación de expresiones algebraicas, factorización de polinomios, derivadas parciales de funciones multivariables y problemas sobre dinámica poblacional. Para el diseño del instrumento se tomó en consideración los criterios de Contreras y Backhoff (2004) para la generación de reactivos en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum.

3.3.2.1 Validez de contenido del instrumento de medición diagnóstico

El proceso de validación del examen diagnóstico se llevó a cabo evaluando cada reactivo del examen en tres dimensiones clave: claridad, coherencia y relevancia. Cada reactivo es revisado y calificado por un grupo de expertos utilizando la tabla de calificación proporcionada, la cual permite evaluar cada dimensión en una escala que va desde “Totalmente en desacuerdo" hasta "Totalmente de acuerdo".

Claridad: Se evalúa si la organización y composición del enunciado son adecuadas, si el lenguaje es correcto, y si se cumplen las reglas gramaticales, tales como evitar oraciones fragmentadas, doble negación y errores ortográficos. El objetivo es asegurar que cada pregunta se entienda claramente y no tenga ambigüedades.

Coherencia: Se verifica si existe una relación congruente y lógica entre el indicador de logro y los registros inicial y final declarados en cada reactivo. Esto asegura que los reactivos realmente evalúen las competencias que se pretenden medir.

Relevancia: Se determina si cada reactivo es esencial para el instrumento de evaluación, es decir, si su presencia aporta elementos importantes para la toma de decisiones y si no se puede prescindir de él. Este criterio asegura que todos los reactivos son pertinentes y contribuyen de manera significativa al propósito del diagnóstico.

Cada reactivo es calificado en estas tres dimensiones por cada experto, y los resultados serán compilados para identificar posibles áreas de mejora y asegurar que el examen diagnóstico sea una herramienta efectiva y precisa para evaluar los conocimientos matemáticos básicos necesarios para cursar la unidad de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales. Esta validación se basó en la evaluación de las dimensiones sobre claridad, coherencia y relevancia a partir de la revisión de cada uno de los 20 reactivos por un panel de expertos, siguiendo la metodología de Alsina y Coronata (2014).

3.3.2.2 Confiabilidad del instrumento de medición diagnóstico

En este proceso se determina si el instrumento mantiene resultados estables a lo largo del tiempo (García y Vilanova, 2008). Para este caso, se aplicó el método de mitades partidas, que consiste en dividir el instrumento en dos subpruebas, separando los reactivos en pares e impares, y luego tratándose como pruebas paralelas.

3.3.2.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición diagnóstico

Para el instrumento de medición diagnóstico se utilizan los mismos criterios que se consideraron para el instrumento preliminar.

3.3.3 Estrategias didácticas

A partir de los resultados obtenidos tras la aplicación de un instrumento de medición preliminar, se identificaron áreas clave que requieren mayor atención y refuerzo en el proceso de enseñanza de las EDPO. Estas áreas, relacionadas con la comprensión y aplicación de las ecuaciones diferenciales en contextos reales, revelan la necesidad de estrategias didácticas que integren conceptos matemáticos y su uso práctico en problemas del mundo real. Por ello, se han diseñado cuatro estrategias con un enfoque integrador, cada una centrada en la aplicación de las EDPO en situaciones prácticas como la propagación de enfermedades, la diseminación de medicamentos, el comportamiento de circuitos eléctricos y la dinámica poblacional.

Un elemento clave en estas estrategias es la incorporación de aplicaciones y simulaciones interactivas con GeoGebra, que permiten a los estudiantes visualizar de manera dinámica el comportamiento de las ecuaciones diferenciales en tiempo real. Esto facilita no solo la resolución de problemas abstractos, sino también la conexión de estos conceptos matemáticos con escenarios concretos y visuales, enriqueciendo el proceso de aprendizaje. Estas estrategias no solo buscan fortalecer el dominio técnico de los estudiantes, sino que también fomentan el pensamiento crítico y la capacidad de aplicar las matemáticas a problemas interdisciplinarios, esenciales para un curso de ecuaciones diferenciales.

3.3.3.1 Estrategia didáctica para abordar la dinámica poblacional

La presente estrategia didáctica está enfocada en el estudio de la dinámica poblacional, específicamente utilizando el caso del crecimiento de una población de bacterias. A través de un modelo matemático basado en la ecuación diferencial presentada por Malthus, los estudiantes de ingeniería y ciencias aplicadas pueden comprender cómo las tasas de crecimiento poblacional se relacionan directamente con la cantidad de individuos presentes en un sistema en un momento dado. Esta estrategia utiliza simulaciones interactivas y el apoyo de GeoGebra (Figura 1) para permitir a los estudiantes visualizar cómo se comporta una población en crecimiento bajo un modelo de crecimiento exponencial. El uso de la tecnología permite no solo la resolución matemática del problema, sino también la interpretación gráfica y visual del fenómeno, lo que facilita la comprensión de los conceptos teóricos de manera práctica.

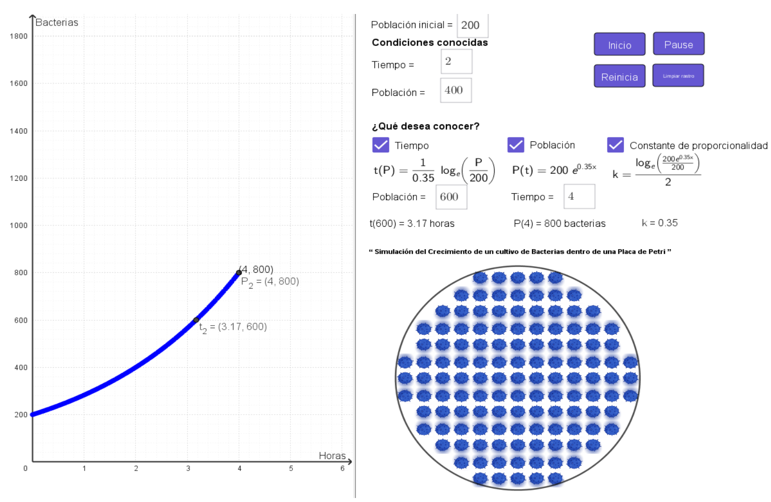


Figura 1. Aplicación en GeoGebra para simular el problema de dinámica poblacional

A lo largo de la hoja de trabajo (Anexo H), los estudiantes seguirán una serie de pasos que les guiarán para formular la ecuación diferencial del problema, resolverla utilizando métodos de variables separables, y calcular la constante de proporcionalidad a partir de datos específicos. Además, se espera que los estudiantes determinen la cantidad de bacterias en diferentes momentos del tiempo y cotejen sus resultados con las simulaciones en la plataforma tecnológica, promoviendo así el aprendizaje activo y la validación de los conceptos teóricos a través de la práctica. El propósito de esta estrategia es fortalecer las habilidades de los estudiantes en la formulación, resolución y análisis de modelos matemáticos aplicados a problemas reales, integrando el uso de herramientas tecnológicas para enriquecer su experiencia educativa.

3.3.3.2 Estrategia didáctica para abordar un circuito RL

Esta estrategia didáctica está orientada en el estudio del comportamiento de circuitos eléctricos RL en serie, los cuales están formados por una resistencia y una inductancia. Este tipo de circuitos son fundamentales en el estudio de sistemas eléctricos, y su análisis mediante ecuaciones diferenciales proporciona a los estudiantes una comprensión más profunda de las relaciones entre los componentes eléctricos y sus respuestas dinámicas.

El propósito de esta estrategia es que los estudiantes utilicen un modelo matemático basado en una ecuación diferencial de primer orden para describir cómo varía la corriente en el circuito con el tiempo cuando se le aplica un voltaje constante. Los estudiantes son guiados paso a paso para resolver la ecuación diferencial utilizando el método del factor integrante, lo que les permite no solo obtener la solución matemática del problema, sino también interpretar los fenómenos físicos subyacentes.

Además, la estrategia incluye el uso de simulaciones interactivas mediante la herramienta GeoGebra (Figura 2), donde los estudiantes pueden observar cómo varía la corriente a lo largo del tiempo y cómo se estabiliza después de cierto período. A través de la simulación, los estudiantes visualizan la parte transitoria y estable de la solución, lo que les ayuda a comprender el comportamiento real de un circuito RL en condiciones prácticas.

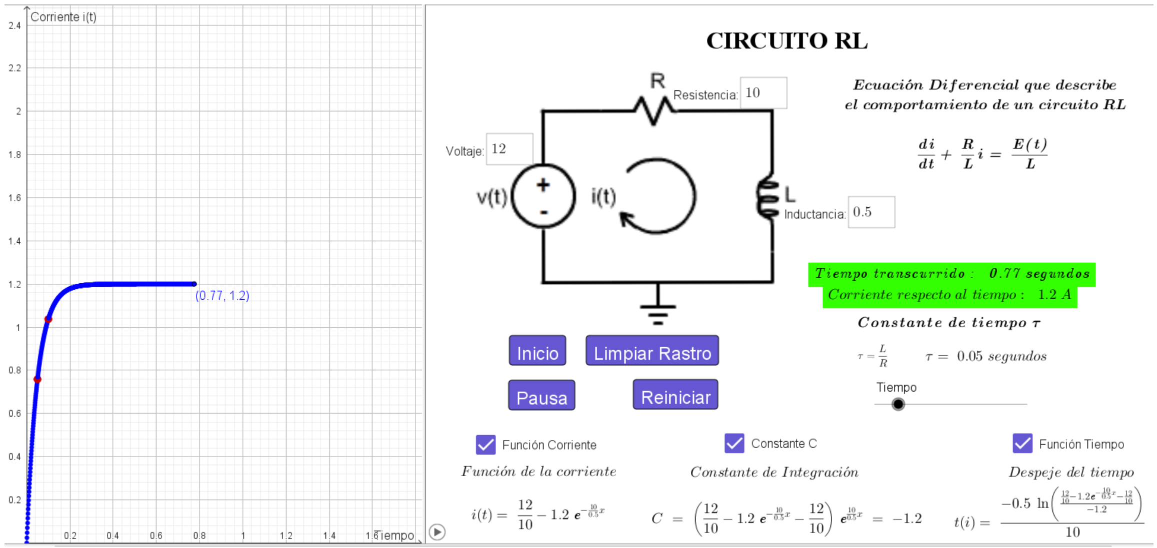


Figura 2. Aplicación en GeoGebra para simular el problema de un circuito RL

La hoja de trabajo (Anexo I) también fomenta el aprendizaje activo al permitir a los estudiantes manipular los valores de los parámetros del circuito, como la resistencia y la inductancia, y observar cómo estos cambios afectan la corriente y el tiempo de respuesta del sistema. Esta estrategia no solo proporciona una base teórica sólida en el análisis de circuitos, sino que también conecta los conceptos matemáticos y físicos con aplicaciones prácticas en ingeniería eléctrica.

3.3.3.3 Estrategia didáctica para abordar diseminación de un fármaco

La estrategia didáctica presentada se enfoca en el uso de ecuaciones diferenciales de primer orden para modelar la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo, un concepto clave en el campo de la farmacocinética. A través de este enfoque, los estudiantes pueden comprender cómo los fármacos interactúan con el organismo y cómo se distribuyen, metabolizan y eliminan. El uso de un modelo matemático permite a los estudiantes analizar la concentración del medicamento en función del tiempo y aplicar conceptos de las matemáticas a situaciones reales, como el diseño de regímenes de dosificación óptimos y la evaluación de la eficacia de tratamientos farmacológicos.

El problema central en esta estrategia involucra la administración intravenosa de un medicamento a una velocidad constante, junto con el metabolismo del mismo por parte del cuerpo. Los estudiantes deben resolver una ecuación diferencial que modela este proceso, utilizando métodos como el factor integrante y variables separables. La solución de esta ecuación describe cómo la concentración del medicamento varía hasta alcanzar un equilibrio.

La estrategia incorpora el uso de GeoGebra (Figura 3) para realizar simulaciones que permiten a los estudiantes visualizar el comportamiento del medicamento en el torrente sanguíneo en tiempo real. Esta herramienta interactiva refuerza el aprendizaje al conectar las soluciones matemáticas con su interpretación gráfica, facilitando así una comprensión más profunda del fenómeno.

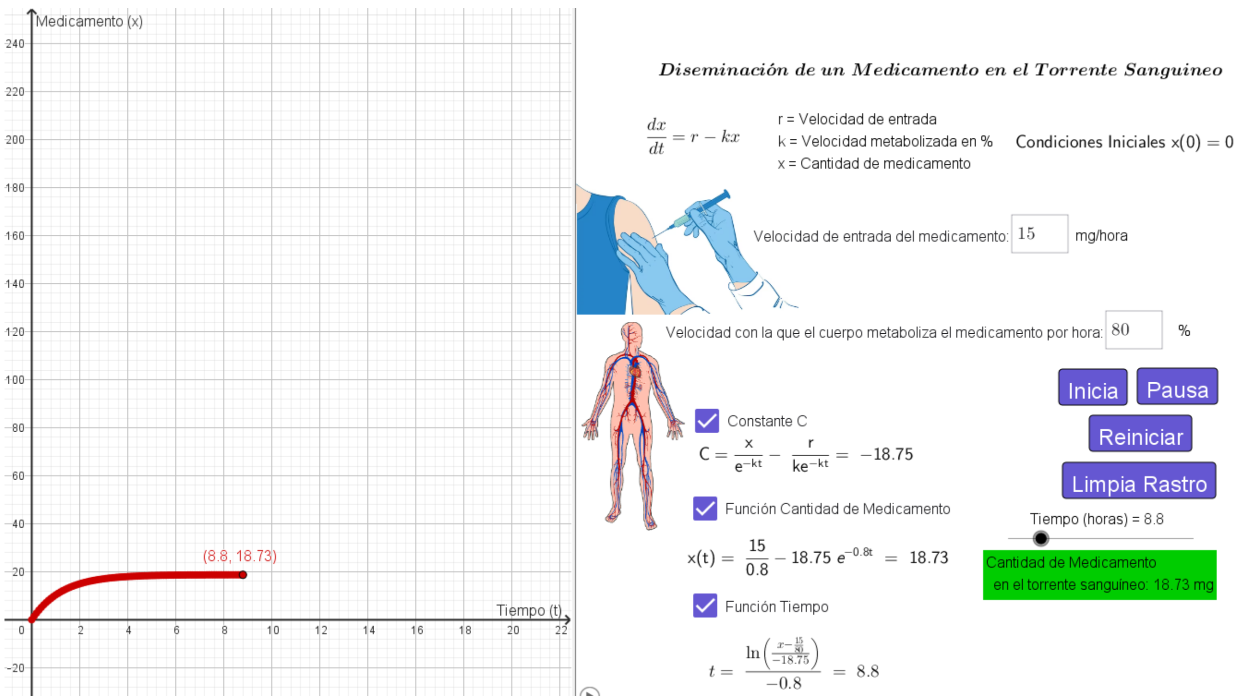


Figura 3. Aplicación en GeoGebra para simular el problema de la diseminación de un fármaco

Esta actividad no solo busca que los estudiantes adquieran habilidades técnicas para resolver ecuaciones diferenciales, sino también que comprendan la importancia de aplicar estos modelos matemáticos en contextos de la vida real, especialmente en el campo de la salud. Además, fomenta un ambiente de aprendizaje colaborativo y dinámico, donde los estudiantes pueden interactuar con el problema y observar el impacto de sus cálculos en un entorno visual. La hoja de trabajo correspondiente a esta estrategia didáctica se encuentra en el Anexo J.

3.3.3.4 Estrategia didáctica para abordar la propagación de una enfermedad

Esta estrategia didáctica tiene como objetivo principal facilitar la comprensión del uso de ecuaciones diferenciales de primer orden para modelar la propagación de una enfermedad en una población. A través del análisis de este modelo matemático, los estudiantes no solo desarrollarán habilidades matemáticas, sino que también comprenderán cómo las matemáticas pueden aplicarse a situaciones reales, como el comportamiento de enfermedades infecciosas en una población, un tema de gran relevancia en el ámbito de la salud pública. El modelo de propagación de una enfermedad que se presenta está basado en la interacción entre individuos contagiados y no contagiados, y se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n-x)$$

En donde x es la cantidad de contagiados, n es el tamaño total de la población y k es una constante de proporcionalidad. Este tipo de ecuaciones permite a los estudiantes explorar cómo las enfermedades se propagan de manera exponencial, facilitando la evaluación de intervenciones como la vacunación, el distanciamiento social o el tratamiento médico. La estrategia utiliza una herramienta interactiva en GeoGebra (Figura 4) que permite a los estudiantes observar la evolución de la propagación de la enfermedad a lo largo del tiempo, visualizar gráficos en tiempo real, y manipular variables como el tamaño de la población o el tiempo. Esto ofrece una experiencia de aprendizaje más dinámica y contextualizada, ya que los estudiantes pueden ver cómo sus cálculos y análisis impactan en la simulación de la propagación de la enfermedad.

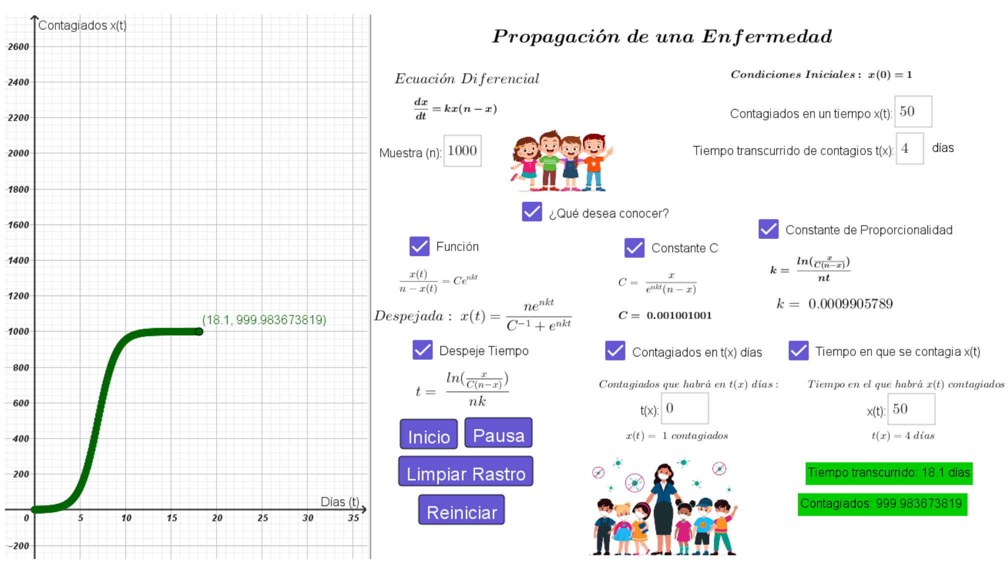


Figura 4. Aplicación en GeoGebra para simular el problema de la propagación de una enfermedad

Además, la actividad fomenta el pensamiento crítico al desafiar a los estudiantes a desarrollar la solución de la ecuación diferencial mediante el método de variables separables, analizar los resultados obtenidos y reflexionar sobre la aplicación de este conocimiento en problemas reales de salud. Esta estrategia (Apéndice K) no solo enriquece el aprendizaje matemático, sino que también sensibiliza a los estudiantes sobre la importancia del análisis matemático en la toma de decisiones en contextos de salud pública, como el control de epidemias.

3.3.4 Instrumento de medición posprueba

El presente instrumento consta de 25 reactivos y ha sido diseñado para evaluar el nivel de conocimientos sobre ecuaciones diferenciales de primer orden, que abarca las primeras dos unidades de la unidad de aprendizaje. Es de suma importancia para el curso, dado que establece una base sólida para el entendimiento de conceptos más avanzados en ecuaciones diferenciales. Con esta evaluación, se comparará el rendimiento de dos grupos distintos: uno que recibirá la enseñanza de manera tradicional y otro que, además de la metodología tradicional, utilizará estrategias didácticas basadas en la aplicación de GeoGebra y el método ABP.

Esta comparación tiene como objetivo analizar cómo la integración de herramientas tecnológicas y enfoques innovadores impacta en la comprensión y resolución de ecuaciones diferenciales. Este instrumento busca evidencia clara que los estudiantes posean los conocimientos necesarios para afrontar con éxito los retos del curso.

Los reactivos incluyen temas clave como: Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden por métodos de variable separable, factor integrante, resolución de ecuaciones diferenciales por transformadas de Laplace, transformadas inversas de Laplace, transformadas de derivadas, problemas de desintegración radiactiva, problemas de temperatura, problemas de mezclas, problemas de dinámica poblacional, problemas de circuitos en serie RL, problemas de diseminación de un fármaco y problemas de propagación de una enfermedad.

3.3.4.1 Validez de contenido del instrumento de medición posprueba

El proceso de validación del examen se llevó a cabo evaluando cada reactivo del examen en tres dimensiones clave: claridad, coherencia y relevancia. Cada reactivo es revisado y calificado por un grupo de expertos utilizando la tabla de calificación proporcionada, la cual permite evaluar cada dimensión en una escala que va desde “Totalmente en desacuerdo” (0), “En desacuerdo” (1), “Ni de acuerdo, ni en desacuerdo” (2), “De acuerdo” (3) y " Totalmente de acuerdo" (4).

Claridad: Se evalúa si la organización y composición del enunciado son adecuadas, si el lenguaje es correcto, y si se cumplen las reglas gramaticales, tales como evitar oraciones fragmentadas, doble negación y errores ortográficos. El objetivo es asegurar que cada pregunta se entienda claramente y no tenga ambigüedades.

Coherencia: Se verifica si existe una relación congruente y lógica entre el indicador de logro y los registros inicial y final (lenguaje natural, algebraico, gráfico y numérico) declarados en cada reactivo. Esto asegura que los reactivos realmente evalúen las competencias que se pretenden medir.

Relevancia: Se determina si cada reactivo es esencial para el instrumento de evaluación, es decir, si su presencia aporta elementos importantes para la toma de decisiones y si no se puede prescindir de él. Este criterio asegura que todos los reactivos son pertinentes y contribuyen de manera significativa al propósito del diagnóstico. Esta validación se basó en la evaluación de las dimensiones sobre claridad, coherencia y relevancia a partir de la revisión de cada uno de los 25 reactivos por un panel de expertos, siguiendo la metodología de Alsina y Coronata (2014).

3.3.4.2 Confiabilidad del instrumento de medición posprueba

En este proceso se determina si el instrumento mantiene resultados estables a lo largo del tiempo (García y Vilanova, 2008). Para este caso, también se aplicó el método de mitades partidas.

3.3.4.3 Índices de dificultad, discriminación y coeficiente de correlación biserial del instrumento de medición posprueba

Para el instrumento de medición posprueba se utilizan los mismos criterios que se consideraron para el instrumento de medición preliminar.

Capítulo 4. Análisis de los resultados

En este capítulo se presenta un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos en la implementación de los instrumentos de medición y las estrategias didácticas diseñadas para evaluar los conocimientos y habilidades de los estudiantes en el área de ecuaciones diferenciales. El objetivo de este análisis es ofrecer una visión integral de la calidad, confiabilidad y efectividad de los instrumentos y métodos utilizados a lo largo del estudio.

En la primera sección, 4.1 Análisis de calidad de los instrumentos de medición, se examinan los parámetros que determinan la solidez de los instrumentos preliminar, diagnóstico y posprueba. Este análisis incluye métricas de validez de contenido, confiabilidad, y los índices de dificultad y discriminación, que garantizan la precisión en la medición de los aprendizajes esperados.

La segunda y tercera secciones, 4.2 Análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de medición preliminar y 4.3 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición diagnóstico, abordan los hallazgos obtenidos al aplicar los instrumentos a distintos grupos de estudiantes. Se detallan los resultados de los reactivos que plantearon mayor o menor dificultad y las implicaciones de estos en el nivel de preparación de los estudiantes en el contexto de las ecuaciones diferenciales.

En la cuarta sección, 4.4 Análisis de la implementación de las estrategias didácticas, se evalúa el impacto de las estrategias pedagógicas aplicadas, diseñadas específicamente para mejorar la comprensión de los estudiantes en temas clave de ecuaciones diferenciales. Estas estrategias, que incluyen el uso de simulaciones y recursos interactivos, buscan fomentar un aprendizaje activo y significativo, promoviendo la aplicación de conceptos matemáticos en escenarios prácticos.

Finalmente, en 4.5 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición posprueba, se examinan los resultados finales de los estudiantes tras la implementación de las estrategias didácticas. Esta sección analiza el rendimiento académico y la evolución en las competencias matemáticas de los estudiantes, comparando los efectos del enfoque experimental con el enfoque tradicional de enseñanza.

A través de este análisis, se busca no solo validar la eficacia de los instrumentos y estrategias empleadas, sino también aportar información valiosa sobre los efectos de metodologías didácticas innovadoras en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales en la educación en ingeniería.

4.1 Análisis de calidad de los instrumentos de medición

En el presente apartado, se llevará a cabo un análisis exhaustivo de la calidad de los instrumentos de medición empleados en el estudio, cuya finalidad es evaluar los conocimientos y habilidades de los estudiantes en el área de ecuaciones diferenciales. La calidad de estos instrumentos ha sido determinada mediante un conjunto de métricas y procedimientos de validación que aseguran tanto la validez de contenido como la confiabilidad de las evaluaciones.

Para cada uno de los instrumentos —preliminar, diagnóstico y posprueba— se han empleado criterios rigurosos en su diseño y evaluación. Los instrumentos fueron revisados en aspectos como la claridad de los reactivos, la congruencia con los temas evaluados, y la neutralidad en la formulación de las preguntas. Las métricas incluyeron el coeficiente de validez de contenido, la confiabilidad por el método de mitades partidas, y análisis de índices de dificultad y discriminación, todo con el objetivo de garantizar la robustez del proceso de evaluación y la precisión en la medición de los aprendizajes esperados.

El análisis que sigue en esta sección detalla los procedimientos y resultados de la validación de cada instrumento, proporcionando una base sólida que respalda la fiabilidad y validez de las mediciones obtenidas.

4.1.1 Análisis de calidad del instrumento de medición preliminar

Los criterios de evaluación para el caso del instrumento preliminar incluyeron la correspondencia con los temas, la demanda cognitiva, la claridad de redacción, la independencia de los reactivos, la adecuación del nivel de dificultad, la validez de las opciones de respuesta, el uso adecuado del vocabulario y la neutralidad de la información. El coeficiente de validez de contenido (CVC) se calculó utilizando las metodologías de Hernández-Nieto (2002) y Gempp (2006), y se mantuvieron todos los reactivos con un CVC igual o superior a 0.85. El panel, compuesto por 4 profesores universitarios especializados en ecuaciones diferenciales evaluó los 24 reactivos del instrumento preliminar utilizando una escala de 0 (totalmente en desacuerdo) a 4 (totalmente de acuerdo). El CVC promedio es 0.9813 ± 0.0119 (media $\pm$ desviación estándar), cumpliendo cabalmente con los estándares requeridos.

La administración del instrumento preliminar se realizó en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería de la UABC durante la sexta semana del ciclo 2023-2. Se aplicó a 4 de los 12 grupos, con un total de 35 estudiantes cada uno, quienes cursaban la unidad de aprendizaje de ED en dicho periodo. La decisión de aplicar el instrumento en la sexta semana se tomó con el fin de garantizar que los estudiantes hubieran revisado, junto con sus profesores, el contenido que conformaba el instrumento preliminar.

La confiabilidad del instrumento, calculada mediante el método de mitades partidas, fue $r = 0.91$, un valor considerado adecuado cuando es igual o superior a 0.85, especialmente en el caso de instrumentos estandarizados y de gran escala (Muñoz y Mato, 2008; Contreras y Backhoff, 2004). Además, la distribución de los puntajes totales se evaluó utilizando la prueba delta de Ferguson, obteniéndose un valor de 0.97, lo cual cumple sobradamente con el criterio establecido (Engelhardt, 2009; Ding et al., 2006).

El promedio del índice de dificultad resultó ser de 0.67 ± 0.15 (media $\pm$ desviación estándar), el valor mínimo respecto a la dificultad resultó 0.39, mientras que el valor máximo es 0.88, aceptables de acuerdo con la TCT. El índice promedio de discriminación es 0.43 ± 0.1 (media $\pm$ desviación estándar), el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (mayor que 0.40). Este índice indica qué tan probable es que los estudiantes con buen desempeño respondan correctamente al reactivo, mientras que aquellos con bajo rendimiento probablemente no lo harán. El promedio de los coeficientes de correlación biserial de la prueba es 0.54 ± 0.12 (media $\pm$ desviación estándar), considerado como excelente cuando es igual o mayor a 0.35 (Backhoff et al. 2000).

4.1.2 Análisis de calidad del instrumento de medición diagnóstico

El proceso de validación del instrumento de medición diagnóstico se llevó a cabo evaluando cada reactivo del examen en tres dimensiones clave: claridad, coherencia y relevancia. Cada reactivo es revisado y calificado por un grupo de 4 expertos en el área de las ED utilizando la tabla de calificación proporcionada, la cual permite evaluar cada dimensión en una escala que va desde “Totalmente en desacuerdo" hasta "Totalmente de acuerdo". El instrumento consta de 20 reactivos y se incluyen temas clave como la resolución de ecuaciones algebraicas, cálculo de integrales definidas e indefinidas, razonamiento matemático para resolver problemas enunciados, derivadas de funciones algebraicas y racionales, desarrollo de binomios al cuadrado y al cubo, simplificación de expresiones algebraicas, factorización de polinomios, derivadas parciales de funciones multivariables y problemas sobre dinámica poblacional.

El CVC se calculó utilizando también las metodologías de Hernández-Nieto (2002) y Gempp (2006), y se mantuvieron todos los reactivos con un CVC igual o superior a 0.80. El CVC promedio es 0.96 ± 0.051 (media $\pm$ desviación estándar), valores que garantizan la validez de contenido del instrumento de medición diagnóstico.

La administración del instrumento diagnóstico se llevó a cabo en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería de la UABC durante la segunda semana del ciclo 2024-2. Se aplicó a 2 grupos, conformados por 40 estudiantes cada uno, quienes cursaban la unidad de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales en dicho periodo. La aplicación en la segunda semana se decidió estratégicamente para asegurar que los estudiantes aún no hubieran revisado, junto con sus profesores, los contenidos que formarían parte del instrumento posprueba. El propósito de este instrumento diagnóstico es evaluar la homogeneidad de los grupos en cuanto a los conocimientos previos necesarios para abordar de manera efectiva los contenidos de ED.

La confiabilidad del instrumento, calculada mediante el método de mitades partidas, fue r = 0.85, un valor considerado adecuado cuando es igual o superior a 0.85, especialmente en el caso de instrumentos estandarizados y de gran escala (Muñoz y Mato, 2008; Contreras y Backhoff, 2004). Además, la distribución de los puntajes totales se evaluó utilizando la prueba delta de Ferguson, obteniéndose un valor de 0.94, lo cual cumple con el criterio establecido (Engelhardt, 2009; Ding et al., 2006).

El promedio del índice de dificultad resultó ser de 0.33 ± 0.20 (media $\pm$ desviación estándar), el valor mínimo respecto a la dificultad resultó 0.10, mientras que el valor máximo es 0.90, aceptables de acuerdo con la TCT. El índice promedio de discriminación es 0.41 ± 0.19 (media ± desviación estándar), el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (mayor que 0.40). Este índice indica qué tan probable es que los estudiantes con buen desempeño respondan correctamente al reactivo, mientras que aquellos con bajo rendimiento probablemente no lo harán. El promedio de los coeficientes de correlación biserial de la prueba es 0.35 ± 0.14 (media ± desviación estándar), considerado como excelente cuando es igual o mayor a 0.35 (Backhoff et al. 2000).

4.1.3 Análisis de calidad del instrumento de medición posprueba

El proceso de validación del instrumento de medición diagnóstico se llevó a cabo evaluando cada reactivo del examen en tres dimensiones clave: claridad, coherencia y relevancia. Cada uno de los 25 reactivos que conforman el instrumento es revisado y calificado por un grupo de 4 expertos en el área de las ED utilizando la tabla de calificación proporcionada, la cual permite evaluar cada dimensión en una escala que va desde “Totalmente en desacuerdo" hasta "Totalmente de acuerdo". El CVC promedio es 0.90 ± 0.0223 (media $\pm$ desviación estándar), cumpliendo completamente con los estándares requeridos.

La administración del instrumento posprueba se llevó a cabo en las instalaciones de la Facultad de Ingeniería de la UABC durante la séptima semana del ciclo 2024-2. Se aplicó a 2 grupos, conformados por 40 estudiantes cada uno (Grupo de control y experimental), quienes cursaban la unidad de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales en dicho periodo. La aplicación en la séptima semana se decidió estratégicamente para asegurar que los estudiantes hubieran revisado, junto con sus profesores, los contenidos que formarían parte del instrumento posprueba.

La confiabilidad del instrumento, calculada mediante el método de mitades partidas, fue r = 0.94, un valor considerado adecuado cuando es igual o superior a 0.85, especialmente en el caso de instrumentos estandarizados y de gran escala (Muñoz y Mato, 2008; Contreras y Backhoff, 2004). Además, la distribución de los puntajes totales se evaluó utilizando la prueba delta de Ferguson, obteniéndose un valor de 0.9, lo cual cumple con el criterio establecido (Engelhardt, 2009; Ding et al., 2006).

El promedio del índice de dificultad resultó ser de 0.68 ± 0.15 (media $\pm$ desviación estándar), el valor mínimo respecto a la dificultad resultó 0.32, mientras que el valor máximo es 0.95, aceptables de acuerdo con la TCT. El índice promedio de discriminación es 0.65 ± 0.22 (media ± desviación estándar), el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (mayor que 0.40). Este índice indica qué tan probable es que los estudiantes con buen desempeño respondan correctamente al reactivo, mientras que aquellos con bajo rendimiento probablemente no lo harán. El promedio de los coeficientes de correlación biserial de la prueba es 0.58 ± 0.15 (media ± desviación estándar), considerado como excelente cuando es igual o mayor a 0.35 (Backhoff et al. 2000).

4.2 Análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de medición preliminar

En este apartado se describen los indicadores de logro y reactivos (Tabla 2) en los que los estudiantes presentan la mayor dificultad para resolverlos correctamente.

Tabla 2. Indicador de logro e índice de dificultad del instrumento preliminar

Reactivo	ID	Indicador de logro
1	0.88	Determinar la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden
2	0.79	Determinar la solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden
3	0.77	Obtener la transformada de Laplace de una función f(t)
4	0.84	Obtener la transformada de Laplace inversa de una función F(s).
5	0.84	Resolver ecuaciones diferenciales separables.
6	0.63	Determinar el factor integrante de la función P(x) de una ecuación diferencial lineal del primer orden
7	0.86	Resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
8	0.63	Obtener la transformada de una ecuación diferencial lineal de primer orden.
9	0.42	Resolver ecuaciones diferenciales mediante transformada de Laplace.
10	0.88	Identificar la ecuación diferencial que modela matemáticamente la dinámica poblacional.
11	0.81	Calcular la constante k de proporcionalidad de un enunciado de problema de dinámica poblacional.
12	0.67	Resolver problemas de dinámica poblacional.
13	0.65	Resolver problemas de dinámica poblacional

14	0.49	Modelar situaciones físicas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el caso de mezclas.
15	0.70	Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas
16	0.63	Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas
17	0.58	Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas
18	0.79	Identificar la ecuación diferencial que modela matemáticamente la Ley de enfriamiento de Newton.
19	0.67	Modelar situaciones físicas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el caso de la Ley de enfriamiento de Newton.
20	0.53	Calcular la constante k de proporcionalidad de un enunciado de problema asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.
21	0.60	Resolver problemas asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.
22	0.40	Resolver problemas asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.
23	0.58	Resolver problemas sobre datación.
24	0.42	Resolver problemas sobre datación.

Fuente: Elaboración propia

Los reactivos con mayor dificultad son tanto la resolución de ecuaciones diferenciales mediante transformada de Laplace como los problemas aplicados que requieren la comprensión de conceptos abstractos o que involucran la modelización física, como la Ley de enfriamiento de Newton y los problemas de mezclas y datación. Esto sugiere que los estudiantes podrían haber tenido dificultades para conectar las ecuaciones diferenciales con situaciones de la vida real y modelar correctamente estos problemas.

Este tipo de problemas de aplicación y modelado se consideran integradores porque requieren que los estudiantes combinen y apliquen múltiples conceptos, habilidades y técnicas aprendidas en diferentes áreas de las matemáticas o de otras disciplinas (como física, biología o ingeniería). Estos problemas no solo evalúan el dominio de los conocimientos aislados, sino que también ponen a prueba la capacidad del estudiante para integrar ese conocimiento en situaciones complejas y reales.

El análisis indica que los reactivos más difíciles son aquellos que requieren un nivel más alto de aplicación y modelización, mientras que los reactivos que evalúan habilidades técnicas básicas, como la resolución de ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones diferenciales que son separables, son más accesibles para los estudiantes. Esta diferencia puede estar relacionada con la forma en que se enseña el contenido, destacando la importancia de integrar más oportunidades para que los estudiantes practiquen la aplicación de las ecuaciones diferenciales en contextos del mundo real.

En la Tabla 3 se exhiben los coeficientes de correlación biserial asociados a cada uno de los reactivos, según Henrysson (1971), este coeficiente es un indicador de validez predictiva que asocia la respuesta de un estudiante a un reactivo con su rendimiento general en la prueba.

Tabla 3. Reactivos y coeficientes de correlación biserial

Reactivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
rpbis	0.497	0.374	0.678	0.718	0.455	0.654	0.694	0.696	0.367	0.573	0.62	0.579
Reactivo	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
rpbis	0.536	0.296	0.669	0.596	0.445	0.583	0.674	0.385	0.589	0.537	0.396	0.474

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta un análisis de los indicadores de logro que obtuvieron los coeficientes de correlación biserial más altos (mayor que 0.65) en el instrumento preliminar:

- Obtener la transformada de Laplace de una función f(t)
- Obtener la transformada de Laplace inversa de una función F(s)
- Determinar el factor integrante de la función P(x) de una ecuación diferencial lineal del primer orden
- Resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
- Obtener la transformada de una ecuación diferencial lineal de primer orden
- Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas
- Modelar situaciones físicas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el caso de la Ley de enfriamiento de Newton

La mayoría de los indicadores de logro que obtuvieron altos coeficientes de correlación biserial están relacionados con habilidades procedimentales y técnicas estandarizadas, como la aplicación de la transformada de Laplace y la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Los estudiantes parecen haber desarrollado una buena capacidad para ejecutar pasos secuenciales y mecánicos que siguen reglas claras, lo cual facilita el éxito en este tipo de problemas. Estos procesos son frecuentemente practicados en clases y tienden a tener una estructura bien definida.

Varios de estos indicadores están directamente relacionados con las ecuaciones diferenciales lineales, tanto en su resolución como en el uso de transformadas de Laplace para abordarlas. Esto sugiere que los estudiantes han logrado un dominio sólido en este tipo de ecuaciones, que son generalmente uno de los primeros temas que se enseñan y practican en profundidad en los cursos de ED. Además, los métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales son accesibles, ya que implican procesos rutinarios (como la integración y el uso de factores integrantes).

Tanto la transformada de Laplace directa como la inversa aparecen en este grupo de indicadores exitosos. Esto indica que los estudiantes han dominado esta herramienta matemática, que es frecuentemente utilizada en problemas de física e ingeniería para transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas más manejables. La transformada de Laplace tiene procedimientos bien definidos, lo que facilita su aplicación exitosa cuando los estudiantes tienen la oportunidad de practicar lo suficiente.

Aunque los problemas de aplicación y modelado suelen ser más desafiantes, los estudiantes parecen haber tenido éxito en el caso de problemas de mezclas y la Ley de enfriamiento de Newton. Esto podría deberse a que estos problemas han sido abordados en múltiples escenarios, permitiendo a los estudiantes ver patrones comunes y aplicar las ecuaciones diferenciales de manera más intuitiva. Los problemas asociados con la Ley de enfriamiento de Newton, en particular, suelen tener una formulación clara que facilita su modelado matemático una vez que los estudiantes han practicado lo suficiente.

Los reactivos con alta correlación biserial están estrechamente relacionados con los temas más comunes en los cursos de ecuaciones diferenciales, lo que sugiere que estos temas recibieron mayor atención en la enseñanza y fueron reforzados mediante ejercicios prácticos. Los estudiantes tienden a tener mejores resultados en aquellos problemas que se han abordado frecuentemente en clase y en tareas, aumentando así la probabilidad de éxito.

Los indicadores de logro con coeficientes de correlación biserial más altos reflejan un dominio de habilidades técnicas y procedimentales específicas, como el uso de la transformada de Laplace y la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Los estudiantes han mostrado competencia en la aplicación de procedimientos bien definidos y, cuando estos se integran con situaciones del mundo real que son familiares (como la Ley de enfriamiento de Newton o problemas de mezclas), han podido resolver los problemas con éxito. La repetición de estos temas en el curso, junto con su estructura clara y directa, ha contribuido significativamente al buen desempeño en estos reactivos.

4.3 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición diagnóstico

Al realizar una comparación entre dos grupos de estudiantes, es importante evaluar si existen diferencias significativas en sus desempeños académicos, particularmente cuando se han sometido a un diagnóstico inicial. Esta evaluación es esencial para determinar si ambos grupos cuentan con las mismas competencias previas al inicio del curso o si es necesario implementar estrategias diferenciadas de enseñanza.

Para ello, se aplicó un diagnóstico cuyo contenido abarca conceptos fundamentales que los estudiantes deben manejar para enfrentar adecuadamente el curso de ecuaciones diferenciales. Con base en los resultados de dicho diagnóstico, se planteó la necesidad de realizar una prueba de hipótesis para comparar las medias de ambos grupos, con el fin de evaluar si existen diferencias significativas en sus calificaciones iniciales. A continuación, se presenta el planteamiento formal de las hipótesis y el análisis estadístico correspondiente.

Hipótesis Nula: No hay diferencia significativa entre las medias de las calificaciones de los grupos 686 y 735 en términos de la aplicación del instrumento de medición diagnóstico.

Hipótesis Alternativa: Existe una diferencia significativa entre las medias de las calificaciones de los grupos 686 y 735 en términos de la aplicación del instrumento de medición diagnóstico.

La Tabla 4 muestra una Prueba T para la igualdad de medias con un nivel de significancia de 0.063. El valor de p=0.063 es mayor que el nivel de significancia estándar (α=0.05). Esto sugiere que no se puede rechazar la hipótesis nula, lo que implica que no hay evidencia estadísticamente significativa para afirmar que las medias de los grupos 686 y 735 son diferentes en términos del instrumento diagnóstico aplicado. Por lo tanto, se concluye que no hay una diferencia significativa entre los grupos 686 y 735 en las calificaciones del diagnóstico, bajo el nivel de confianza del 95%.

Tabla 4. Estadísticos de grupo y prueba T de muestras independientes

Estadísticos de grupo

	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Calificación_Diagnóstico	A	33	31.3636	12.94657	2.25371
	B	35	37.5714	14.05721	2.37610

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
Calificación_Diagnóstico	Se han asumido varianzas iguales	.001	.977	-1.891	66	.063	-6.20779	3.28295	-12.76242	.34683
	No se han asumido varianzas iguales			-1.896	65.966	.062	-6.20779	3.27491	-12.74643	.33085

Fuente: Elaboración propia

Los resultados del diagnóstico evidencian dificultades importantes en algunos de los reactivos, en la Tabla 5 se exhibe una breve descripción de cada uno de ellos.

Tabla 5. Descripción de los reactivos del diagnóstico con mayor dificultad

Reactivo	**Registro inicial**	**Registro final**	**Indicador de logro**	**Observación**
4	Lenguaje natural	Numérico	Resolver enunciados de problema mediante razonamiento matemático	Los estudiantes deben interpretar el problema en lenguaje natural y convertirlo en una ecuación matemática, lo que implica un cambio de representación del lenguaje cotidiano a una expresión numérica
12	Algebraico	Algebraico	Determinar la derivada de una función racional mediante la regla del cociente	Se les pide a los estudiantes que manejen una derivada que involucra una función racional, lo que podría ser complicado por la regla del cociente y la correcta manipulación de los términos.
1	Algebraico	Numérico	Resolver ecuaciones	Este reactivo también implica un

			algebraicas	cambio de representación de una ecuación algebraica a una solución numérica, lo que requiere habilidad en la manipulación de ecuaciones y en el cambio de forma
19	Algebraico	Algebraico	Resolver derivada parcial respecto a y de una función multivariable	Este reactivo presenta un desafío en la diferenciación parcial, lo que puede confundir a los estudiantes por la manipulación de términos múltiples y la comprensión de las reglas para derivadas parciales.
13	Algebraico	Algebraico	Simplificar expresiones algebraicas mediante la aplicación de propiedades de los logaritmos	Este reactivo implica el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar, un área donde los estudiantes pueden tener dificultades si no dominan bien las reglas logarítmicas.
15	Lenguaje natural	Numérico	Identificar una fracción impropia	Se requiere interpretar una fracción impropia en lenguaje numérico y reconocerla desde una perspectiva conceptual, un cambio de representación de lenguaje natural a numérico.

Fuente: Elaboración propia

En términos generales, varios de los reactivos implican manipulaciones algebraicas complejas, como la simplificación de logaritmos, las derivadas parciales y la aplicación de la regla del cociente. Esto sugiere que los estudiantes pueden estar enfrentando dificultades con las reglas operativas propias de estas técnicas.

Además, se identificaron reactivos que requieren que los estudiantes cambien entre distintos registros de representación, como del lenguaje natural al numérico o del algebraico al numérico. Esta observación indica que las dificultades podrían estar relacionadas con la falta de fluidez en la gestión y conversión entre diversas formas de representación matemática, lo que refuerza el diseño e implementación de las estrategias didácticas diseñadas.

En la Tabla 6 se describen los 4 reactivos con coeficientes de correlación biserial mayor, según Henrysson (1971), este coeficiente es un indicador de validez predictiva que asocia la respuesta de un estudiante a un reactivo con su rendimiento general en la prueba.

Tabla 6. Descripción de los reactivos con mayor coeficiente de correlación biserial

Reactivo	Registro inicial	Registro final	Indicador de logro	Observación
8	Algebraico	Algebraico	Resolver integrales indefinidas mediante la técnica de fracciones parciales	Implica la resolución de integrales utilizando fracciones parciales, un proceso que requiere un alto nivel de manipulación algebraica y la correcta aplicación de las reglas de integración.
11	Algebraico	Algebraico	Desarrollar binomios al cuadrado	Implica el desarrollo de expresiones algebraicas, en este caso binomios al cuadrado. Esto requiere el conocimiento de las propiedades de los binomios y su expansión algebraica correcta.
14	Algebraico	Algebraico	Despejar la variable independiente de una función logarítmica natural	Requiere la capacidad de manipular logaritmos y despejar la variable, aplicando las propiedades de los logaritmos y las operaciones inversas para aislar la variable.
20	Lenguaje natural	Algebraico	Resolver enunciados de problemas sobre dinámica poblacional.	Este reactivo implica la conversión de un problema en lenguaje natural a una expresión algebraica, en este caso sobre dinámica poblacional, lo que requiere interpretar correctamente el enunciado y aplicar las ecuaciones adecuadas

Fuente: Elaboración propia

Todos los reactivos mencionados requieren una fuerte competencia en la manipulación algebraica, los estudiantes deben no solo realizar operaciones algebraicas básicas, sino también aplicar técnicas más avanzadas como fracciones parciales, expansión de binomios y el manejo de logaritmos. Aunque la mayoría de los reactivos se mueven entre representaciones algebraicas, en el caso del reactivo 20, se requiere convertir un problema en lenguaje natural a una expresión algebraica.

Estos reactivos no solo evalúan el conocimiento de técnicas matemáticas, sino también la capacidad de los estudiantes para estructurar y resolver problemas paso a paso, lo cual puede ser una razón de su alto coeficiente de correlación biserial. En resumen, los reactivos comparten la necesidad de una sólida comprensión y manejo de técnicas algebraicas y, en algunos casos, la habilidad para cambiar entre representaciones de lenguaje natural y algebraico. Esto sugiere que las habilidades algebraicas y de conversión de representaciones son esenciales para el éxito en estos tipos de reactivos.

4.4 Análisis de la implementación de las estrategias didácticas

En el presente estudio, se diseñaron y desarrollaron cuatro estrategias didácticas enfocadas en las ecuaciones diferenciales de primer orden, con un énfasis particular en la aplicación de modelos matemáticos relevantes. Estos modelos son: dinámica poblacional, circuito RL en serie, diseminación de un fármaco en el torrente sanguíneo y propagación de una enfermedad.

La elaboración de estas estrategias se llevó a cabo con una atención minuciosa, buscando no solo la comprensión teórica, sino también la conexión práctica de los conceptos a través del uso de herramientas tecnológicas. Para ello, se desarrollaron las estrategias específicas en GeoGebra, que permiten simular el comportamiento de las ecuaciones diferenciales asociadas a cada modelo. Estos programas no solo presentan las ecuaciones y sus soluciones, sino que también incluyen una sección interactiva que permite a los estudiantes manipular parámetros, observar cambios en tiempo real y explorar diferentes escenarios. Esta interactividad está diseñada para facilitar un entendimiento más profundo y dinámico de la materia, promoviendo la curiosidad y el pensamiento crítico.

Adicionalmente, se crearon hojas de trabajo basadas en los programas mencionados, las cuales sirven como guía para los estudiantes. Estas hojas incluyen instrucciones claras y preguntas reflexivas que fomentan el análisis y la discusión. A medida que los alumnos interactúan con el software y las hojas de trabajo, se les anima a formular hipótesis, explorar resultados y comparar sus hallazgos con los modelos teóricos discutidos en clase.

Antes de la implementación de las estrategias didácticas, se impartieron sesiones teóricas centradas en el modelado de ecuaciones diferenciales de primer orden. La dinámica de aplicación se llevó a cabo en un periodo de 50 minutos, distribuidos en cuatro sesiones en el laboratorio de cómputo del edificio de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería en el Campus Mexicali.

El grupo de experimental estuvo conformado por 40 estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales, quienes participaron activamente en la implementación de estas estrategias. Al iniciar la primera estrategia didáctica, relacionada con la dinámica poblacional (Figura 5), los estudiantes se mostraron sorprendidos al observar el comportamiento de un problema de dinámica poblacional, en este caso, el crecimiento de bacterias, a través de una simulación interactiva. Esta experiencia visual no solo facilitó la comprensión, sino que también permitió a los alumnos ver cómo los conceptos abstractos se traducen en fenómenos observables, haciendo que la materia pareciera menos complicada y más accesible.

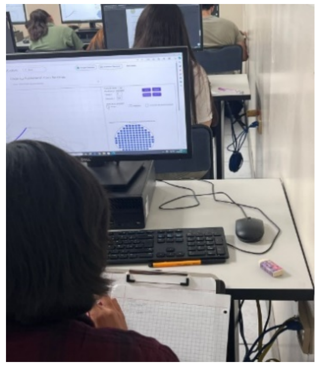


Figura 5. Estrategia Dinámica Poblacional

A medida que los estudiantes respondían las preguntas en las hojas de trabajo, comenzaron a compartir ideas y retroalimentarse sobre las cuestiones planteadas. Este proceso colaborativo fue enriquecedor, ya que promovió un ambiente de aprendizaje activo y constructivo. Muchos alumnos mencionaron que el uso del programa les otorgó una mayor seguridad y confianza al momento de comparar sus respuestas con los resultados de la simulación (Figura 6), lo que contribuyó a fortalecer su autoestima académica.

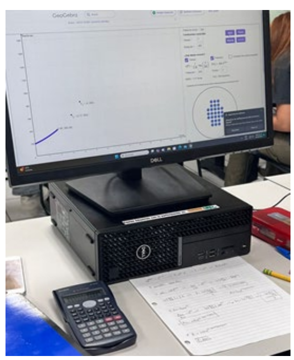


Figura 6. Confirmación de los resultados en el problema de dinámica poblacional

La mayoría de los estudiantes consideró que este modelo era sencillo y fácil de entender, resaltando que la resolución de las ecuaciones no presentaba un alto grado de complejidad. Indicaron que podían identificar con facilidad qué método aplicar y que las integrales involucradas en la resolución no representaban un desafío significativo.

Sin embargo, se observó que algunos estudiantes mostraron dudas al despejar ecuaciones y utilizar logaritmos, ya que, en ciertos casos, no lograron hacerlo correctamente, lo que señala la necesidad de reforzar esta habilidad en futuras sesiones.

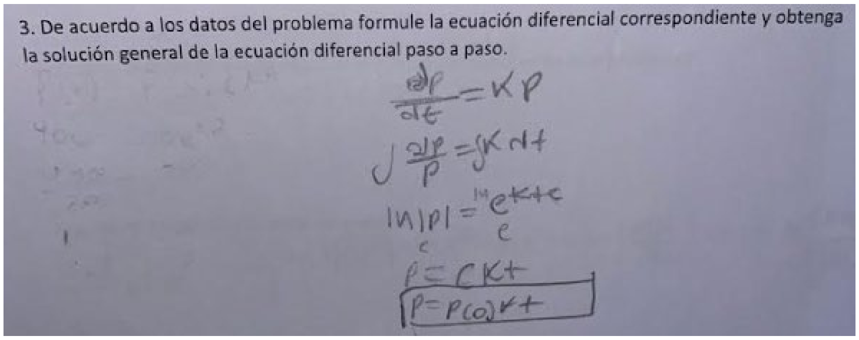


Figura 7. Evidencia documental de errores en el proceso de resolución del problema de dinámica poblacional.

Además, los estudiantes pudieron comprender visualmente el significado de la constante de proporcionalidad "k", tanto en casos donde era positiva como negativa. Esta comprensión se vio facilitada por la visualización del fenómeno de crecimiento o decaimiento de las bacterias a lo largo del tiempo, lo que les permitió relacionar las teorías matemáticas con situaciones del mundo real.

La segunda estrategia implementada en relación al modelo matemático del circuito RL (Figura 8) presentó un desafío considerable, dado su enfoque en el ámbito de los circuitos eléctricos. En esta etapa, se introdujeron conceptos clave como la constante de tiempo τ y las respuestas transitoria y estable de la función resultante que describe la ecuación diferencial de un circuito RL en serie.

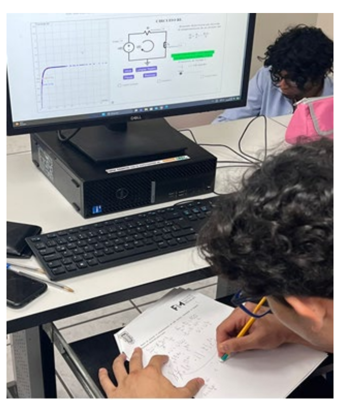
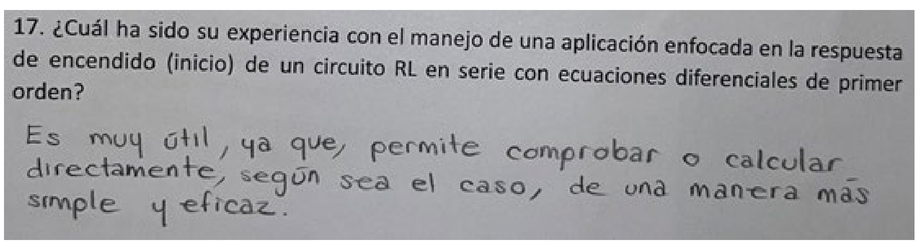


Figura 8. Estrategia Circuito RL

Como resultado, los estudiantes necesitaron fortalecer sus conocimientos en esta área. En cuanto a la resolución de la ecuación diferencial, se observó que la mayoría de los estudiantes lograron identificar correctamente su forma y aplicar el método del factor integrante. No obstante, algunos estudiantes mostraron dificultades para distinguir adecuadamente P(x) dentro de la ecuación, lo que llevó a errores en la ejecución de la solución.

Además, aquellos que lograron despejar la variable no aplicaron correctamente las propiedades de los logaritmos. Es importante señalar que varios alumnos carecían de una comprensión lectora suficiente, manifestando dudas sobre la estrategia que ya estaba claramente delineada. A pesar de la exigencia que representó esta estrategia, al final de la sesión, los estudiantes pudieron resolver satisfactoriamente una ecuación diferencial utilizando el método del factor integrante. Además, encontraron más fácil interpretar las diferentes partes de la función resultante mediante la simulación gráfica en GeoGebra (Figura 9), en comparación con la resolución manual de la ecuación diferencial.


17. ¿Cuál ha sido su experiencia con el manejo de una aplicación enfocada en la respuesta de encendido (inicio) de un circuito RL en serie con ecuaciones diferenciales de primer orden?

Es muy útil, ya que, permite comprobar o calcular directamente, según sea el caso, de una manera más simple y eficaz.

Figura 9. Evidencia documental en el caso del circuito RL.

Los alumnos mencionaron que este tipo de visualización tecnológica tuvo un impacto más significativo en su aprendizaje que la dinámica poblacional, considerando que el tema del circuito RL representa un mayor reto conceptual. Esto resalta la importancia de las herramientas visuales en la comprensión de conceptos complejos en matemáticas y física.

La tercera estrategia didáctica relacionada con el modelo matemático de la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo (Figura 10) se aplica en el contexto de la farmacocinética mediante el uso de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esta aproximación permite a los estudiantes comprender que las matemáticas trascienden la simple resolución de operaciones algebraicas, ya que tienen aplicaciones concretas en el ámbito de la salud.

Figura 10. Diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo

Un desafío adicional consiste en familiarizarse con conceptos de la salud, como la interpretación del suministro de un medicamento por vía intravenosa y su efecto temporal en el organismo. A través de la interacción con GeoGebra, los alumnos pueden visualizar gráficamente el impacto de la administración del medicamento, lo que capta su atención y les motiva a abordar el problema planteado.

Al resolver la ecuación diferencial, se observó que algunos estudiantes optaron por el método de variables separables (Figura 11), mientras que otros prefirieron el método de factor integrante; ambas elecciones son válidas y enriquecen el aprendizaje.

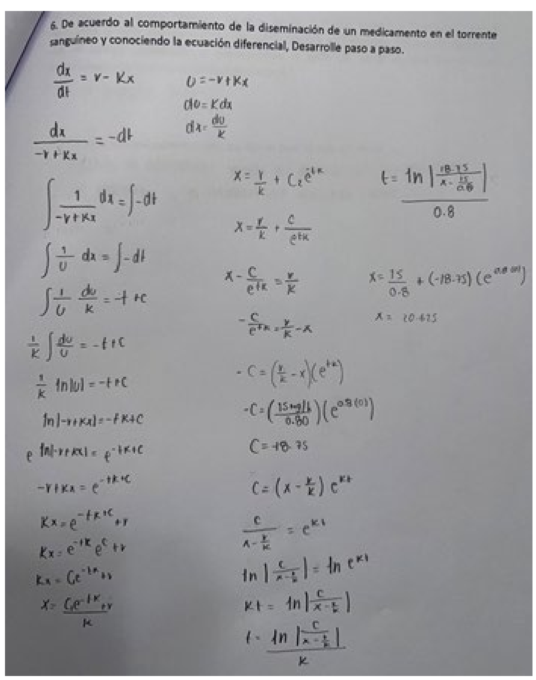


Figura 11. Resolución mediante el método de variables separables

Esta diversidad en los enfoques llevó a los estudiantes a explorar ambos métodos, confirmando que ambos conducen a la misma solución, lo que resalta el poder y la versatilidad de las matemáticas. Los alumnos indicaron que, en este caso específico, encontraron más sencillo aplicar el método de factor integrante en comparación con el de variables separables, debido a que este último no permite una visualización clara de la factorización de los términos involucrados. Sin embargo, aún se presentaron casos (Figura 12) con deficiencias en el proceso de resolución mediante el método de factor integrante.

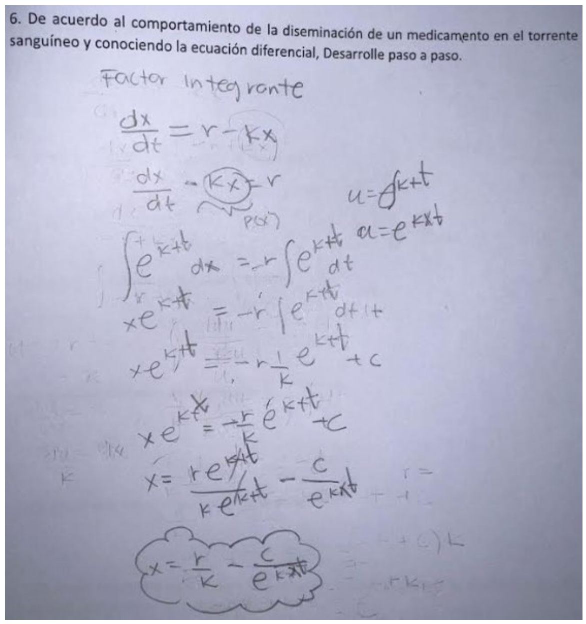


Figura 12. Evidencia documental de errores en el proceso de resolución del problema de diseminación de un medicamento.

Además, se notó que, gracias a las estrategias didácticas previas, la confusión en la aplicación de las propiedades de los logaritmos se redujo considerablemente. En general, los estudiantes expresaron que la visualización de los resultados obtenidos a través del software facilitó una comprensión más rápida y efectiva del tema en cuestión.

La cuarta y última estrategia didáctica (Figura 13) implementada se centra en el análisis del modelo matemático de propagación de enfermedades. Esta estrategia presenta un nivel de complejidad considerable en la resolución de la ecuación diferencial, ya que para obtener su solución es indispensable aplicar técnicas avanzadas de integración, específicamente integraciones extensas y el método de fracciones parciales.

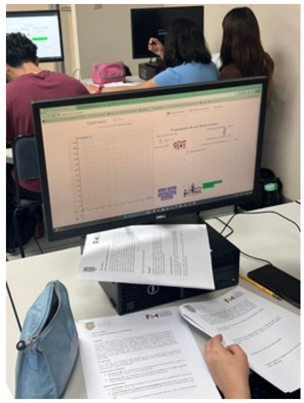
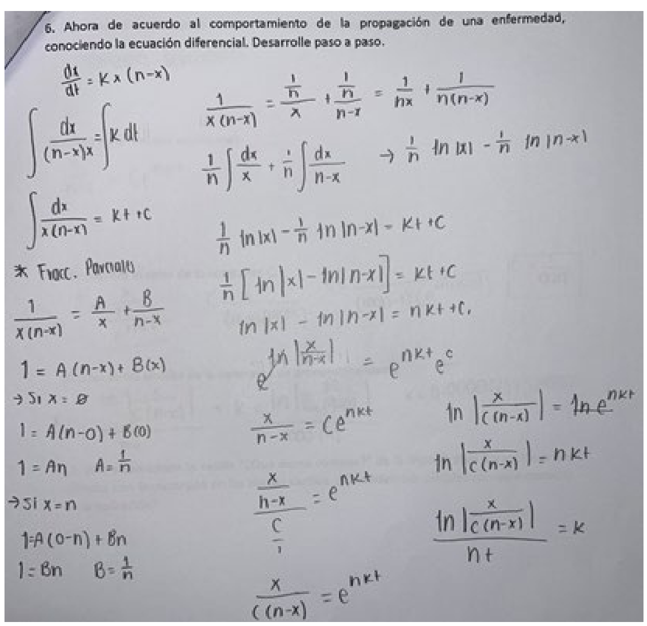


Figura 13. Estrategia Propagación de una enfermedad.

Los estudiantes han expresado que la interpretación de la ecuación diferencial resulta accesible, facilitada en gran medida por el uso de un software especializado. Además, reconocen que el contexto de estudio es relevante y pertinente, dado que refleja una situación de la vida real, como lo fue la pandemia de COVID-19. Sin embargo, han señalado que la resolución de la ecuación en sí misma presenta un desafío mayor en comparación con la simple interpretación. Durante la aplicación, se observó que los alumnos enfrentaron dificultades para resolver la ecuación diferencial, aunque no encontraron obstáculos significativos al identificar los métodos adecuados para abordarla (Figura 14).



6. Ahora de acuerdo al comportamiento de la propagación de una enfermedad, conociendo la ecuación diferencial. Desarrolle paso a paso.

$\frac{dx}{dt} = kx(n-x)$

$\int \frac{dx}{(n-x)x} = \int k\,dt$

$\int \frac{dx}{x(n-x)} = kt + C$

* Fracc. Parciales

$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{n-x}$

$1 = A(n-x) + B(x)$

$\rightarrow$ Si $x = 0$

$1 = A(n-0) + B(0)$

$1 = An \quad A = \frac{1}{n}$

$\rightarrow$ Si $x = n$

$1 = A(0-n) + Bn$

$1 = Bn \quad B = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{\frac{1}{n}}{x} + \frac{\frac{1}{n}}{n-x} = \frac{1}{nx} + \frac{1}{n(n-x)}$

$\frac{1}{n}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{n}\int \frac{dx}{n-x} \rightarrow \frac{1}{n}\ln|x| - \frac{1}{n}\ln|n-x|$

$\frac{1}{n}\ln|x| - \frac{1}{n}\ln|n-x| = kt + C$

$\frac{1}{n}\left[\ln|x| - \ln|n-x|\right] = kt + C$

$\ln|x| - \ln|n-x| = nkt + C,$

$e^{\ln\left|\frac{x}{n-x}\right|} = e^{nkt}e^{c}$

$\frac{x}{n-x} = Ce^{nkt}$

$\frac{\frac{x}{n-x}}{\frac{C}{1}} = e^{nkt}$

$\frac{x}{C(n-x)} = e^{nkt}$

$\ln\left|\frac{x}{C(n-x)}\right| = \ln e^{nkt}$

$\ln\left|\frac{x}{C(n-x)}\right| = nkt$

$\frac{\ln\left|\frac{x}{C(n-x)}\right|}{nt} = k$

Figura 14. Desarrollo de la ecuación diferencial de la propagación de una enfermedad.

En consecuencia, se hizo evidente la necesidad de reforzar su comprensión de las técnicas de integración, específicamente a través del método de fracciones parciales y la resolución de sistemas de ecuaciones. Este refuerzo es fundamental para mejorar su capacidad de enfrentar problemas matemáticos complejos en el futuro.

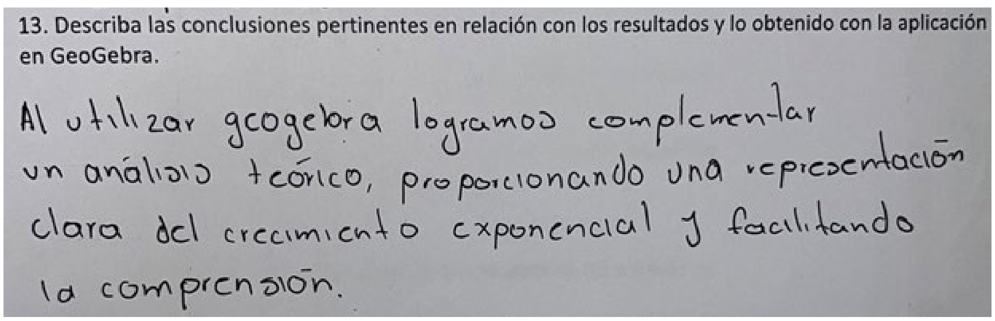
La implementación de las estrategias didácticas para el aprendizaje de EDPO ha demostrado ser altamente efectiva en la mejora de la comprensión de conceptos matemáticos. Estas estrategias promueven un enfoque en el que la matemática se desarrolla en un entorno de creación de significado y exploración práctica, alineado con la perspectiva de Li y Schoenfeld (2019). A través de estas actividades, los estudiantes lograron establecer conexiones sólidas entre la teoría matemática y aplicaciones prácticas en contextos del mundo real.

Las herramientas tecnológicas, como GeoGebra, desempeñaron un papel fundamental al proporcionar simulaciones interactivas que facilitaron la visualización y manipulación de variables. Estas experiencias enriquecieron significativamente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes experimentar con diferentes escenarios y comprender mejor los conceptos abstractos.

El diseño de las estrategias didácticas también promovió el uso de diversos registros de representación, una práctica que, como señala Duval (1999), es esencial para evitar que los estudiantes confundan los objetos matemáticos con sus representaciones. Esta integración de múltiples registros fomentó una comprensión más profunda y flexible de los conceptos matemáticos, al permitir a los estudiantes transitar de manera efectiva entre diferentes formas de representación, fortaleciendo así su pensamiento matemático.

Los resultados indican que, aunque la mayoría de los alumnos mostraron una comprensión satisfactoria de los métodos de resolución de ecuaciones, hubo áreas específicas que requieren refuerzo, como el despeje de ecuaciones, la aplicación de propiedades de los logaritmos y técnicas de integración por fracciones parciales.

Además, se constató que ciertos conceptos, a pesar de su complejidad, se volvieron más accesibles gracias al uso de visualizaciones gráficas (Figura 15), la interacción y colaboración entre los estudiantes propiciaron un entorno de aprendizaje activo y dinámico. Según expertos en pedagogía (Educational Technology, 2016; Learning Theories, 2021), este enfoque permite que los estudiantes trabajen de manera colaborativa y autodirigida, identificando sus propias necesidades de aprendizaje para abordar problemas complejos y significativos. En este contexto, el intercambio de ideas y la retroalimentación desempeñaron un papel crucial en su desarrollo académico, impulsados por la implementación del Aprendizaje Basado en Problemas, que fomenta no solo la adquisición de conocimientos, sino también habilidades críticas como la comunicación y el pensamiento estratégico.


13. Describa las conclusiones pertinentes en relación con los resultados y lo obtenido con la aplicación en GeoGebra.

Al utilizar geogebra logramos complementar un análisis teórico, proporcionando una representación clara del crecimiento exponencial y facilitando la comprensión.

Figura 15. Evidencia testimonial del uso de GeoGebra

4.5 Análisis descriptivo de los resultados de la aplicación del instrumento de medición posprueba

En el capítulo 1 de este proyecto se plantearon dos pares de hipótesis para evaluar la efectividad del enfoque experimental en comparación con el enfoque tradicional, proporcionando una base para analizar cómo diferentes métodos pedagógicos afectan el rendimiento académico y el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes.

Al contrastar los resultados obtenidos entre los dos enfoques, la investigación busca aportar evidencia sobre cuál es la estrategia más efectiva para mejorar el aprendizaje en el ámbito de las EDPO en la educación en ingeniería.

A continuación, se presenta el planteamiento formal de un par de hipótesis nula y alternativa sobre el rendimiento académico y el análisis estadístico correspondiente.

Hipótesis Nula (H_0): El uso de tecnologías educativas y la integración del aprendizaje basado en problemas no tienen un impacto significativo en el rendimiento académico de las EDPO en comparación con la enseñanza tradicional.

Hipótesis Alternativa (H_1): El uso de tecnologías educativas y la integración del aprendizaje basado en problemas tienen un impacto significativo en el rendimiento académico de las EDPO en comparación con la enseñanza tradicional.

La Tabla 7 muestra una Prueba T para la igualdad de medias con un nivel de significancia de 0.000. El valor de p=0.000 es menor que el nivel de significancia estándar (α=0.05). Esto sugiere que se puede rechazar la hipótesis nula, lo que implica que hay evidencia estadísticamente significativa para afirmar que las medias de los grupos 686 (Grupo B de control) y 735 (Grupo A experimental) son diferentes en términos del instrumento posprueba aplicado. Por lo tanto, se concluye que hay una diferencia significativa entre los grupos 686 y 735 en las calificaciones de la posprueba, bajo el nivel de confianza del 95%. En este caso el rendimiento académico es mayor en el promedio de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo (A) experimental.

Tabla 7. Estadísticos de grupo y prueba T de muestras independientes para el rendimiento académico.

Estadísticos de grupo

	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Calificación_Posprueba	A	38	78.4211	23.42629	3.80025
	B	36	56.2222	24.67516	4.11253

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
Calificación_Posprueba	Se han asumido varianzas iguales	.730	.396	3.970	72	.000	22.19883	5.59157	11.05223	33.34543
	No se han asumido varianzas iguales			3.964	71.191	.000	22.19883	5.59953	11.03420	33.36346

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta el planteamiento formal de un par de hipótesis nula y alternativa sobre competencias matemáticas particularmente cuando se trata de formular y resolver problemas asociados a las EDPO y el análisis estadístico correspondiente.

Hipótesis Nula (H_0): No existe una diferencia significativa en el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las EDPO entre los estudiantes que participan en un enfoque tradicional de enseñanza y aquellos que participan en un enfoque basado en competencias que incorpora estrategias didácticas apoyadas por tecnologías educativas y aprendizaje basado en problemas.

Hipótesis Alternativa (H_1): Existe una diferencia significativa en el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las EDPO entre los estudiantes que participan en un enfoque tradicional de enseñanza y aquellos que participan en un enfoque basado en competencias que incorpora estrategias didácticas apoyadas por tecnologías educativas y aprendizaje basado en problemas.

La Tabla 8 muestra una Prueba T para la igualdad de medias con un nivel de significancia de 0.004. El valor de p=0.004 es menor que el nivel de significancia estándar (α=0.05). Esto sugiere que se puede rechazar la hipótesis nula, lo que implica que hay evidencia estadísticamente significativa para afirmar que las medias de los grupos 686 (Grupo B de control) y 735 (Grupo A experimental) son diferentes en términos del instrumento posprueba aplicado. Por lo tanto, se concluye que hay una diferencia significativa entre los grupos 686 y 735 en las calificaciones de la posprueba, bajo el nivel de confianza del 95%. En este caso el rendimiento sobre las competencias matemáticas de formulación y resolución de problemas (reactivos 9 al 25 del instrumento de medición posprueba) asociados a las EDPO es mayor en el promedio de las calificaciones obtenidas por los estudiantes del grupo (A) experimental.

Tabla 8. Estadísticos de grupo y prueba T de muestras independientes para el rendimiento académico

Estadísticos de grupo

	Grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Calificación_ Competencias	A	38	74.2895	29.24908	4.74483
	B	36	54.4722	28.33018	4.72170

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
Calificación_ Competencias	Se han asumido varianzas iguales	.028	.867	2.958	72	.004	19.81725	6.69972	6.46161	33.17290
	No se han asumido varianzas iguales			2.961	71.962	.004	19.81725	6.69386	6.47316	33.16134

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la posprueba en general evidencian dificultades importantes en algunos de los reactivos, en la Tabla 9 se exhibe una breve descripción de cada uno de ellos.

Tabla 9. Descripción de los reactivos de la posprueba con mayor dificultad

Reactivo	Registro inicial	Registro final	Indicador de logro	Observación
6	Algebraico	Algebraico	Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de factor integrante.	Este reactivo implica el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar el factor integrante, un área donde los estudiantes pueden tener dificultades si no dominan bien las reglas logarítmicas.
21	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de datación mediante ecuaciones diferenciales de primer orden	Se requiere formular y resolver un problema de datación, implica el planteamiento de la ecuación diferencial, la determinación de la constante de proporcionalidad y el cálculo dependiendo de la pregunta que se haga al estudiante, se parte del lenguaje natural y concluye con un registro final numérico. Este tópico solo fue tratado de manera tradicional sin incorporar una estrategia didáctica que incluyera los recursos tecnológicos.
24	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas sobre la propagación de una enfermedad mediante ecuaciones diferenciales de primer orden	Se requiere formular y resolver un problema sobre la propagación de una enfermedad. se parte del lenguaje natural y concluye con un registro final numérico. Este tópico solo fue tratado de manera tradicional sin incorporar una estrategia didáctica que incluyera los recursos tecnológicos. Este tópico fue tratado en el grupo experimental con la inclusión de una estrategia didáctica con inclusión de los recursos tecnológicos.
23	Lenguaje	Numérico	Resolver problemas de	Se requiere formular y resolver un

	natural		diseminación de un fármaco mediante ecuaciones diferenciales de primer orden	problema sobre la diseminación de un fármaco mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. se parte del lenguaje natural y concluye con un registro final numérico. Este tópico fue tratado en el grupo experimental con la inclusión de una estrategia didáctica con inclusión de los recursos tecnológicos.

Fuente: Elaboración propia

Aunque el grupo experimental obtuvo, de manera significativa, un promedio superior en las calificaciones relacionadas con la resolución de problemas en comparación con el grupo de control, se identificaron ciertos reactivos que generaron grandes dificultades para los estudiantes al momento de plantearlos y resolverlos correctamente. Estos reactivos comparten varios desafíos, como la correcta formulación e identificación de las condiciones iniciales, el cálculo de las constantes de proporcionalidad y un manejo riguroso de funciones exponenciales y logarítmicas, junto con las propiedades de los logaritmos. Este último aspecto es particularmente relevante cuando se requiere simplificar el factor integrante en el proceso de resolución de una ecuación diferencial lineal de primer orden.

En la Tabla 10 se describen los 5 reactivos con coeficientes de correlación biserial mayor, según Henrysson (1971), este coeficiente es un indicador de validez predictiva que asocia la respuesta de un estudiante a un reactivo con su rendimiento general en la prueba.

Tabla 10. Descripción de los reactivos con mayor coeficiente de correlación biserial

Reactivo	Registro inicial	Registro final	Indicador de logro	Observación
20	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden	Se requiere formular y resolver un problema sobre temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el cálculo de la constante de proporcionalidad y la constante generada por la resolución de la ecuación diferencial de primer orden es fundamental. En este problema se solicita de manera adicional la predicción de la temperatura después de un tiempo transcurrido. El manejo adecuado de funciones exponenciales y logarítmicas, así como de las propiedades de los logaritmos también es esencial.
19	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones	Se requiere formular y resolver un problema sobre temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el cálculo de

			diferenciales de primer orden	la constante de proporcionalidad y la constante generada por la resolución de la ecuación diferencial de primer orden es fundamental en este reactivo.
17	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden	Se requiere formular y resolver un problema sobre mezclas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el cálculo de la constante de proporcionalidad y la constante generada por la resolución de la ecuación diferencial de primer orden es fundamental. En este problema se solicita de manera adicional la predicción del tiempo en el cual el tanque contiene una cantidad específica de sal, lo cual implica trabajar con funciones inversas. El manejo adecuado de funciones exponenciales y logarítmicas, así como de las propiedades de los logaritmos también es esencial.
11	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden.	Se requiere formular y resolver un problema sobre dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el cálculo de la constante de proporcionalidad y la constante generada por la resolución de la ecuación diferencial de primer orden es fundamental. El manejo adecuado de funciones exponenciales y logarítmicas, así como de las propiedades de los logaritmos también es esencial.
13	Lenguaje natural	Numérico	Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden.	Se requiere formular y resolver un problema sobre dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el cálculo de la constante de proporcionalidad y la constante generada por la resolución de la ecuación diferencial de primer orden es fundamental. En este problema se solicita de manera adicional la predicción del tiempo en el cual se contará con una cantidad específica de especímenes, lo cual implica trabajar con funciones inversas. El manejo adecuado de funciones exponenciales y logarítmicas, así como de las propiedades de los logaritmos también es esencial.

Fuente: Elaboración propia

Un análisis más exhaustivo se presenta mediante la determinación de los índices de dificultad de manera separada para el grupo experimental (735) y para el grupo de control (686), en la Tabla 11 se presentan dichos valores. Se utiliza la siguiente codificación para los reactivos y sus respectivos registros de representación inicial, final y agrupación. Lenguaje natural (1), registro algebraico (2), registro numérico (3). Para la agrupación: Registro inicial algebraico y registro final algebraico (1), registro inicial lenguaje natural y registro final algebraico (2), registro inicial lenguaje natural y registro final numérico (3).

Tabla 11. Valores de los índices de dificultad para los grupos experimental y de control

Reactivo	Registro inicial	Registro final	Agrupación	ID Grupo experimental	ID Grupo de control
1	2	2	1	1.00	0.89
2	2	2	1	0.87	0.72
3	2	2	1	0.97	0.78
4	2	2	1	0.89	0.69
5	2	2	1	0.97	0.75
6	2	2	1	0.66	0.28
7	2	2	1	0.74	0.39
8	2	2	1	0.76	0.47
9	2	2	1	0.87	0.39
10	1	2	2	0.95	0.97
11	1	3	3	0.89	0.67
12	1	3	3	0.79	0.53
13	1	3	3	0.76	0.58
14	1	2	2	0.82	0.69
15	1	2	2	0.84	0.72
16	1	3	3	0.66	0.58
17	1	3	3	0.76	0.47
18	1	2	2	0.89	0.83
19	1	3	3	0.68	0.44
20	1	3	3	0.66	0.39
21	1	3	3	0.50	0.14
22	1	3	3	0.74	0.50
23	1	3	3	0.76	0.22
24	1	3	3	0.61	0.36
25	1	3	3	0.55	0.58

Fuente: Elaboración propia

Se presenta un análisis ANOVA para los grupos experimental y de control, el cual proporciona una visión más detallada de como los registros de representación inicial, final y la inclusión de una estrategia didáctica en el grupo experimental influyen en los índices de dificultad de los reactivos de una posprueba.

En la Tabla 12 se presentan los descriptivos del análisis ANOVA para el grupo de control.

Tabla 12. Descriptivos del análisis ANOVA para el grupo de control.

	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite superior		
1.00	9	.5956	.21472	.07157	.4305	.7606	.28	.89
2.00	4	.8025	.12685	.06343	.6006	1.0044	.69	.97
3.00	12	.4550	.15635	.04513	.3557	.5543	.14	.67
Total	25	.5612	.21064	.04213	.4743	.6481	.14	.97

Fuente: Elaboración propia

En el análisis de varianza mostró diferencias estadísticamente significativas ($p = 0.008$), lo que indica que hay diferencias estadísticamente significativas en los índices de dificultad entre al menos dos de las agrupaciones o categorías de reactivos. Esto sugiere que la combinación de los tipos de registro inicial y final afecta la dificultad percibida de los reactivos, por lo que se procedió a realizar una prueba post-hoc de Tukey (Tabla 13).

Los reactivos con mayor dificultad para los estudiantes del grupo de control fueron precisamente los problemas de aplicación, particularmente aquellos en los que se requiere el cálculo numérico para emitir la respuesta correspondiente, incluye el manejo adecuado de las funciones inversas y la manipulación correcta de las propiedades de los logaritmos. En contraste los reactivos con menor dificultad se agrupan en aquellos con registro inicial en lenguaje natural y registro final algebraico, estos reactivos se caracterizan por respuestas en las que el estudiante solo identifica el modelo matemático que representa la situación enunciada en el problema. Los reactivos de la agrupación 1 no muestran diferencia significativa con los de la agrupación 3.

Tabla 13. Prueba post-hoc de Tukey para el grupo de control

Tukey B[a,b]

Grupo	N	Subconjunto para alfa = .05	
		1	2
3.00	12	.4550	
1.00	9	.5956	.5956
2.00	4		.8025

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 14 se presentan los descriptivos del análisis ANOVA para el grupo experimental.

Tabla 14. Descriptivos del análisis ANOVA para el grupo experimental

	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite superior		
1.00	9	.8589	.11688	.03896	.7690	.9487	.66	1.00
2.00	4	.8750	.05802	.02901	.7827	.9673	.82	.95
3.00	12	.6967	.10899	.03146	.6274	.7659	.50	.89
Total	25	.7836	.13310	.02662	.7287	.8385	.50	1.00

Fuente: Elaboración propia

El análisis de varianza mostró diferencias estadísticamente significativas ($p = 0.003$), lo que indica que hay diferencias estadísticamente significativas en los índices de dificultad entre al menos dos de las agrupaciones de reactivos. Esto sugiere que la combinación de los tipos de registro inicial y final afecta la dificultad percibida de los reactivos, por lo que se procedió a realizar una prueba post-hoc de Tukey (Tabla 15).

Tabla 15. Prueba post-hoc de Tukey para el grupo experimental

Tukey B[a,b]

Grupo	N	Subconjunto para alfa = .05	
		1	2
3.00	12	.6967	
1.00	9		.8589
2.00	4		.8750

Fuente: Elaboración propia

Aunque hay diferencia significativa en los índices de dificultad entre la agrupación 3 que se refiere a la formulación resolución de problemas y las agrupaciones 1 y 2, la estrategia didáctica ha impactado de forma general y favorable a los estudiantes del grupo experimental como se ha resaltado en las pruebas T de hipótesis de muestras independientes, inclusive se nota un impacto muy importante en los estudiantes del grupo experimental (índice promedio de dificultad de 0.8589) en contraste con los estudiantes del grupo de control (índice promedio de dificultad de 0.5956) en el tema de resolución de ecuaciones diferenciales mediante transformada de Laplace, que no se incluyó en la estrategia didáctica en el grupo experimental, sin embargo, el tratamiento adicional a través de la estrategia didáctica con inclusión de problemas y simuladores promueve en el estudiante un significado e interés mayor de las ecuaciones diferenciales.

Los resultados obtenidos en este análisis estadístico comparativo entre los grupos experimental y de control muestran que la implementación de estrategias didácticas apoyadas por tecnologías educativas y el aprendizaje basado en problemas tiene un impacto significativo en el rendimiento académico y el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Las pruebas T y el análisis ANOVA confirman que el grupo experimental, que fue expuesto a estas estrategias, obtuvo calificaciones significativamente superiores en comparación con el grupo de control, particularmente en la resolución de problemas complejos que involucraban el manejo de funciones logarítmicas y exponenciales, así como la formulación de modelos matemáticos para situaciones reales.

Además, los reactivos de mayor dificultad, especialmente aquellos relacionados con la resolución de problemas de datación, propagación de enfermedades y diseminación de fármacos, evidencian la relevancia de incorporar recursos tecnológicos para facilitar el aprendizaje. La diferencia en los índices de dificultad entre los grupos refuerza la conclusión de que el enfoque experimental no solo mejora el rendimiento académico, sino que también fomenta una mayor comprensión y aplicación de conceptos matemáticos avanzados en situaciones prácticas

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

El presente capítulo sintetiza los hallazgos obtenidos a lo largo del estudio, destacando las principales contribuciones y las implicaciones pedagógicas del diseño, implementación y evaluación de estrategias didácticas innovadoras para el aprendizaje de EDPO en la educación en ingeniería. Asimismo, se plantean recomendaciones orientadas a la mejora continua en la enseñanza de las matemáticas aplicadas y se sugieren líneas de investigación futuras.

5.1 Conclusiones

Los instrumentos de medición diseñados para esta investigación—preliminar, diagnóstico y posprueba—mostraron altos índices de validez de contenido y confiabilidad, con coeficientes que excedieron los estándares recomendados en la literatura. Esto asegura que los resultados obtenidos reflejan con precisión el nivel de comprensión y habilidad de los estudiantes en EDPO. La aplicación de metodologías rigurosas para la validación de los instrumentos permitió obtener datos sólidos que sustentan las conclusiones del estudio.

El uso de estrategias didácticas basadas en el Aprendizaje Basado en Problemas, apoyadas por herramientas tecnológicas como GeoGebra, demostró ser altamente efectivo para fomentar un aprendizaje más significativo de las EDPO. Los estudiantes del grupo experimental lograron una comprensión más profunda y habilidades superiores en la resolución de problemas aplicados en comparación con el grupo control. Este hallazgo confirma la hipótesis de que la combinación de enfoques activos con tecnología mejora notablemente el rendimiento académico en matemáticas aplicadas.

Uno de los aspectos más destacables del estudio es la capacidad de los estudiantes para transferir conocimientos teóricos a contextos prácticos. Problemas como la dinámica poblacional y la propagación de enfermedades facilitaron la conexión entre la teoría matemática y las aplicaciones del mundo real, reforzando su relevancia y utilidad en la resolución de problemas complejos en ingeniería. Este enfoque ayudó a los estudiantes a visualizar cómo los conceptos abstractos se traducen en herramientas prácticas para modelar y analizar fenómenos reales.

Las estrategias utilizadas no solo promovieron la adquisición de conocimientos, sino que también fomentaron el desarrollo de habilidades esenciales como el pensamiento crítico, la capacidad de análisis y la resolución autónoma de problemas. A través de actividades colaborativas y del uso interactivo de GeoGebra, los estudiantes aprendieron a identificar, analizar y resolver problemas de manera independiente, un aspecto crucial para su desarrollo profesional en ingeniería.

La teoría de registros de representación semiótica de Duval fue un pilar fundamental en el diseño de las estrategias didácticas. El estudio evidenció que la traducción entre diferentes registros (simbólico, gráfico y numérico) es clave para evitar confusiones entre los conceptos matemáticos y sus representaciones. Esto resultó en una mejora significativa en la comprensión conceptual, permitiendo a los estudiantes abordar problemas desde múltiples perspectivas y fortalecer su pensamiento matemático.

La implementación de estas estrategias también tuvo un impacto positivo en la motivación de los estudiantes. Las actividades dinámicas y la posibilidad de trabajar en problemas prácticos mejoraron su actitud hacia la asignatura. Además, la percepción de la utilidad de las matemáticas en su campo profesional se incrementó, lo que puede traducirse en una mayor disposición a profundizar en el aprendizaje de temas más avanzados.

A pesar de los resultados positivos, se identificaron algunos retos durante la implementación. Entre ellos, la necesidad de un tiempo adicional para familiarizar a los estudiantes con las herramientas tecnológicas y para ajustar las estrategias didácticas según las necesidades específicas de cada grupo. Asimismo, se observó que algunos estudiantes requerían un apoyo más personalizado para superar barreras iniciales en la transición a un enfoque de aprendizaje más autónomo y colaborativo.

Este estudio ha evidenciado que la integración de estrategias didácticas innovadoras y tecnología educativa puede transformar significativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales de primer orden en la educación en ingeniería. Al ofrecer un enfoque más práctico, interactivo y centrado en el estudiante, estas estrategias no solo mejoran el rendimiento académico, sino que también desarrollan competencias clave para la práctica profesional.

5.2 Recomendaciones

Dado el impacto positivo del uso de herramientas como GeoGebra en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, se recomienda su adopción sistemática en los planes de estudio de matemáticas en la educación en ingeniería. Sin embargo, para maximizar su potencial, es esencial capacitar a los docentes en el uso efectivo de estas tecnologías. La implementación de talleres y cursos especializados en tecnologías educativas permitirá a los docentes diseñar e implementar estrategias didácticas innovadoras que fomenten un aprendizaje más interactivo y significativo.

Es muy importante diseñar estrategias didácticas que integren problemas reales y contextualizados dentro del campo de la ingeniería. Problemas como la dinámica poblacional, la propagación de enfermedades y la diseminación de fármacos demostraron ser efectivos en este estudio. Por tanto, se recomienda expandir estas estrategias a otros temas y disciplinas de la ingeniería, asegurando que los estudiantes puedan aplicar sus conocimientos matemáticos en diversos contextos profesionales.

Las actividades colaborativas han demostrado ser fundamentales para el desarrollo de competencias sociales y cognitivas. Se recomienda fomentar entornos de aprendizaje que promuevan la interacción entre estudiantes, donde puedan discutir ideas, compartir perspectivas y resolver problemas en equipo. Estas dinámicas no solo refuerzan el aprendizaje, sino que también preparan a los estudiantes para trabajar en contextos laborales donde la colaboración es clave.

Para garantizar la efectividad de las estrategias didácticas, es esencial implementar procesos de evaluación continua. Estos deben incluir tanto evaluaciones formativas como sumativas que permitan a los estudiantes recibir retroalimentación constante sobre su progreso. Además, la recolección de datos de estas evaluaciones puede servir para ajustar y mejorar las estrategias pedagógicas, asegurando que se adapten a las necesidades cambiantes de los estudiantes.

Dado el éxito de estas estrategias en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, se sugiere investigar su aplicación en otras áreas de la ingeniería, como mecánica, termodinámica o control de procesos. Esto permitiría validar la generalización de los hallazgos y explorar cómo estas estrategias pueden beneficiar a estudiantes de diferentes especialidades.

Si bien GeoGebra ha demostrado ser una herramienta eficaz, es importante investigar el potencial de otras tecnologías emergentes, como simulaciones en realidad aumentada o entornos virtuales inmersivos, que podrían enriquecer aún más el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. Estas tecnologías tienen el potencial de ofrecer experiencias de aprendizaje más atractivas y contextualizadas, mejorando la comprensión y retención de los estudiantes.

Se recomienda realizar estudios longitudinales para evaluar el impacto a largo plazo de estas estrategias en el desempeño académico y profesional de los estudiantes. Esto permitiría determinar si las competencias adquiridas durante el curso tienen un efecto duradero en su capacidad para abordar problemas complejos en su vida profesional.

Profundizar en cómo los estudiantes perciben estas estrategias y tecnologías puede proporcionar información valiosa para su mejoramiento. Entender las barreras y facilitadores desde la perspectiva del estudiante ayudará a diseñar experiencias de aprendizaje más inclusivas y efectivas.

Finalmente, se sugiere investigar cómo estas estrategias influyen en el desarrollo de habilidades transversales, como el pensamiento crítico, la creatividad y la resolución de problemas complejos. Estas competencias son esenciales no solo en el ámbito académico, sino también en el profesional, y su fortalecimiento podría mejorar significativamente la preparación de los estudiantes para enfrentar los desafíos del mundo laboral.

Referencias bibliográficas

Álvarez, B. Á., Mieres, C. G., & Rodríguez, N. G. (2007). La motivación y los métodos de evaluación como variables fundamentales para estimular el aprendizaje autónomo. *Revista de docencia universitaria*, *5*(2).

Aguilar-Salinas, W. E., Fuentes-Lara, M. D. L., Justo-López, A. C., y Martínez-Molina, A. D. (2021). Propuesta para el tratamiento de problemas de tasas de variación relacionadas mediante el uso de GeoGebra: Un estudio de casos. *Formación universitaria*, *14*(5), 95-106.

Alkhateeb, M. A., y Al-Duwairi, A. M. (2019). The Effect of Using Mobile Applications (GeoGebra and Sketchpad) on the Students' Achievement. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 523-533.

Alsina, Á., y Coronata, F. (2014). Técnicas de validación de contenido en la investigación educativa: el juicio de expertos. *Estudios Pedagógicos*, 40(2), 197-212.

Arellano, R. y Solana, S. (2009). El proceso enseñanza – aprendizaje del cálculo con el uso de tecnología. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 22, 1631-1640.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática.

Backhoff, E., Larrazolo, N. y Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del examen de habilidades y conocimientos básicos (EXHCOBA). Revista Electrónica de Investigación Educativa, 2 (1), 1-19. https://redie.uabc.mx/redie/article/view/15/26

Bhagat, K. K. y Chang, C. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry Learning-A lesson from India. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11(1), 77-86. doi: https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1307a

Borrelli, R. L., y Coleman, C. S. (2012). *Differential Equations: A Modeling Perspective* (2nd ed.). John Wiley y Sons.

Boyce, W. E., y DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). John Wiley y Sons.

Caligaris, M., Schivo, M. & Romiti, M. (2015). Calculus & GeoGebra, an interesting partnership. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 174, 1183-1188. doi:https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.735

Castaño, V., y Montante, M. (2015). El método del aprendizaje basado en problemas como una herramienta para la enseñanza de las matemáticas/The method of problem-based learning as a tool for teaching mathematics. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *6*(11), 381-392.

CEPAL. (2021). Educación en tiempos de pandemia: una oportunidad para transformar los sistemas educativos en América Latina y el Caribe. Recuperado de https://www.cepal.org

Chen, C. L. y Wu, C. C. (2020). Students' behavioral intention to use and achievements in ICTIntegrated mathematics remedial instruction: Case study of a calculus course. Computers & Education, 145. doi:https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103740

Contreras, L. A. y Backhoff, E. (2004). Metodología para elaborar exámenes criteriales alineados al currículo, en Castañeda, S. (ed.), Educación aprendizaje y cognición, teoría en la práctica. México: Manual Moderno

Córdoba, F., Castrillón, E. y Rojas, C. (2015). Geogebra como herramienta de apoyo visual en la solución de problemas de modelación en matemática escolar. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28, 1725-1730. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11053/1/Cordoba2015Geogebra.pdf

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. Revista Ciencias de la Educación, 19 (33), 228-247. Recuperado de http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n33/art12.pdf

Crocker, L. y Algina, J. (1986). Introduction to classical and modern test theory [Introducción a la teoría de la prueba clásica y moderna]. Holt, Rinehart and Winston.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Coprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill.

Educational Technology. (2016). *Problem-Based Learning (PBL)*. Obtenido de https://educationaltechnology.net

Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2008). *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling* (4th ed.). Pearson.

García, J. A., y Vilanova, R. (2008). Confiabilidad y coeficiente alfa de Cronbach. *El Manual Moderno*.

Gerald, A. G. (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.

González, J. I., & Granera, J. (2021). Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Revista científica de FAREM-Esteli*, 49-62.

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H. y Rahimi, K. (2014). Undergraduate Students’ Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 143, 358–366. doi: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.07.495

Hass, J., Heil, C., y Weir, M. D. (2016). *Thomas' Calculus* (14th ed.). Pearson.

Henrysson, S. (1971). Gathering, analysing, and using data on teste items [Recogida, análisis y utilización de datos sobre las pruebas]. En R.L.

Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la investigación* (cuarta edición). México: Mc. Graw Hill.

Hernández-Nieto, R. A. (2002). Contribuciones al análisis estadístico. Mérida: Universidad de Los Andes.

Hohenwarter, M., y Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications. *MAA, ID*, *1448*.

Hughes-Hallett, D., McCallum, W. G., y Gleason, A. M. (2013). *Calculus: Single and Multivariable* (6th ed.). John Wiley & Sons.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.

Lara, M. D. L. F., y Salinas, W. E. A. (2020). Propuesta para el tratamiento de ecuaciones diferenciales de segundo orden aplicadas al sistema masa resorte. Una experiencia de aprendizaje mediada por GeoGebra durante la contingencia sanitaria en 2020. *Propósitos y representaciones*, *8*(3), 21.

Latifi, M., Hattaf, K., & Achtaich, N. (2021). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student’achievement: The case of differential equations’. *Journal of Educational and Social Research*, *11*(6), 211-221.

Learning Theories. (2021). *Problem-Based Learning (PBL)*. Obtenido de https://learning-theories.com

Li, Y., & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International journal of STEM education*, *6*(1), 1-13.

Logan, J. D. (2015). *A First Course in Differential Equations* (3rd ed.). Springer.

Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A., & Medina, R. (2021). Classroom methodologies for teaching and learning ordinary differential equations: A systemic literature review and bibliometric analysis. *Mathematics*, *9*(7), 745.

Luy-Montejo, C. (2019). El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en el desarrollo de la inteligencia emocional de estudiantes universitarios. *Propósitos y representaciones*, *7*(2), 353-383.

Muñoz, J. y Mato, M. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. Revista de Investigación Educativa, 26 (1), 209-226. http://revistas.um.es/rie/article/view/94181

Nagle, R. K., Saff, E. B., y Snider, A. D. (2018). *Fundamentals of Differential Equations* (9th ed.). Pearson.

OECD. (2020). Educación y COVID-19: Enfoque en el impacto a largo plazo del cierre de escuelas. Recuperado de https://www.oecd.org

Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering* (5th ed.). Prentice Hall.

Padilla-Escorcia, I. A., & Acevedo-Rincón, J. P. (2022). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en la Enseñanza de la Modelación de la Elipse a Través de Recursos Tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, *19*(1), 67-83.

Prieto, G., y Delgado, A. R. (2010). Fiabilidad y validez. *Papeles del Psicólogo, 31*(1), 67-74.

Reidl-Martínez, L. M. (2013). *Fundamentos de la Medición y la Evaluación Psicológica*. Editorial Trillas.

Revelo, E. R., y Salvatierra, P. A. A. (2020). Estrategias didácticas para efectivizar procesos de enseñanza en la educación superior. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*.

Rodríguez-Mesa, F., Kolmos, A., & Guerra, A. (Eds.). (2017). *Aprendizaje basado en problemas en ingeniería: Teoría y práctica*. Aalborg Universitetsforlag.

Simmons, G. F. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw Hill.

Strang, G. (2014). *Differential Equations and Linear Algebra* (4th ed.). Wellesley-Cambridge Press

Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación matemática*, *25*(2), 89-118.

UNESCO. (2020). La educación en tiempos de la pandemia de COVID-19. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org

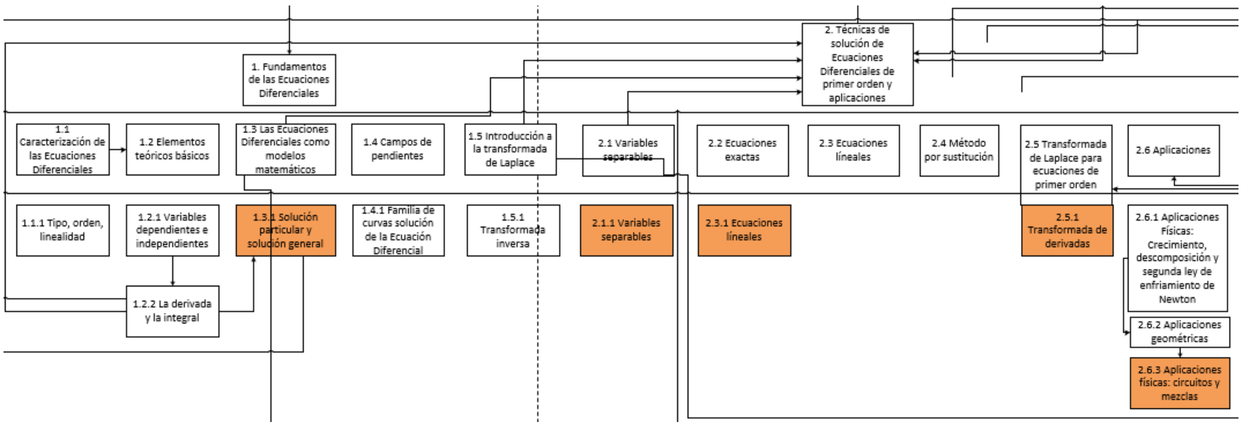
Walpole, R. E., y Myers, R. H., (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (segunda edición). México: Interamericana.

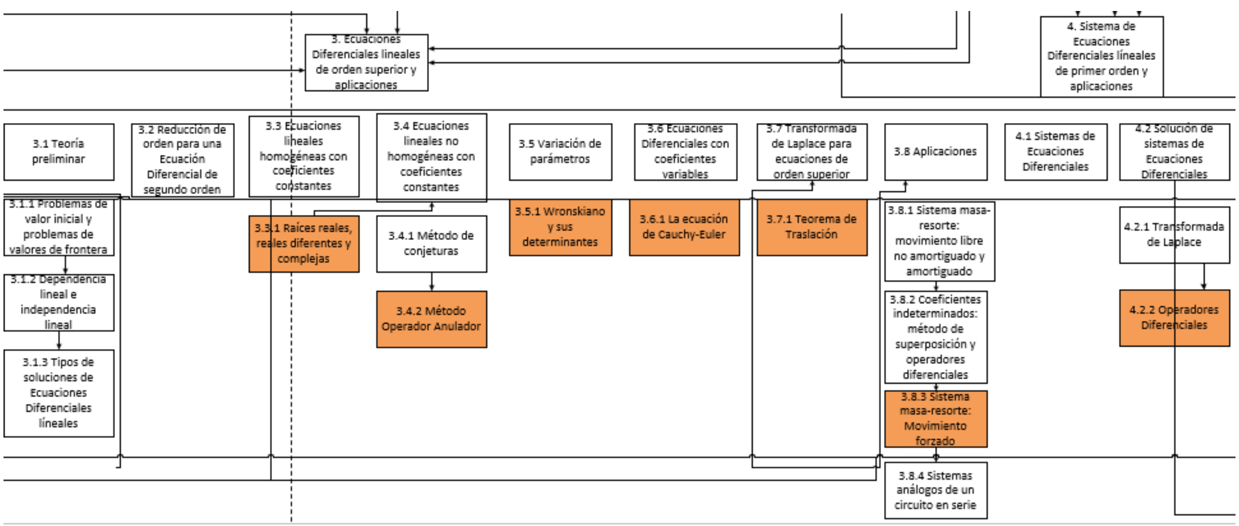
Zerrin, R. y Sebnem, O. (2010). Using GeoGebra as an information technology tool: parabola teaching. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 9, 565-572. doi:https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.198.

Zill, D. G., y Cullen, M. R. (2012). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (8th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.

Zill, D. G. (2013). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (10th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.

Anexo A. Retícula





Anexo B. Justificación de contenidos

Contenido a evaluar	Razones que justifican la decisión
Unidad 1. Fundamentos de las ecuaciones diferenciales	
1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos 1.3.1 Solución particular y solución general	El contenido 1.3.1 Solución particular y solución general recibe servicio a nivel micro de 1.2.2 La derivada y la integral y brinda múltiples servicios a nivel macro a 2 Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones, unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones y unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones, de manera externa este contenido brinda servicios a los cursos de métodos numéricos, por su relevancia se hará una especificación y un reactivo.
1.5 Introducción a la transformada de Laplace 1.5.1 Transformada inversa 1.5.2 Problemas de valor inicial	Se trata de un contenido rama que recibe servicio de 1.5.1 Transformada Inversa, a su vez brinda servicios a nivel macro a 2 Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones, unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones y unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones. Siendo temas de suma importancia para la resolución de problemas se hará una especificación y dos reactivos.
Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones	
2.1 Variables separables 2.1.1 Factor Integrante	Se trata de un contenido rama que da servicios a nivel macro a 2 Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones, unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones y unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones que da servicios a nivel meso 2.1.1 Factor Integrante y que este da múltiples servicios a nivel meso a 2.2.1 Ecuaciones Homogéneas y no homogéneas y macro a 2.3 Ecuaciones lineales. Se generará una especificación y un reactivo por tratarse de técnicas esenciales para la resolución de ecuaciones diferenciales.

2.2 Ecuaciones exactas 2.2.1 Ecuaciones homogéneas y no homogéneas	Se trata de un contenido rama que da servicios a nivel macro a unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones y unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones que da servicios a nivel meso y que a su vez recibe servicios a nivel meso de 2.1.1 Factor Integrante. Estos contenidos son trascendentes en la solución de ecuaciones diferenciales por lo que se generará una especificación y un reactivo.
2.4 Método por sustitución 2.4.1 Sustitución de variables	Se trata de un contenido rama que da servicios a nivel macro a unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones y unidad 4 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones que da servicios a nivel meso 2.4.1 Sustitución de variables. Por ser tema de trascendencia se generará una especificación y un reactivo.
2.5 Transformada de Laplace para ecuaciones de primer orden 2.5.1 Transformada de derivadas	Se trata de un contenido rama que recibe servicio meso de 1.5 Introducción a la transformada de Laplace. Por ser temas de carácter fundamental se generará una especificación y un reactivo.
2.6 Aplicaciones 2.6.1 Aplicaciones Físicas: Crecimiento, descomposición y segunda ley de enfriamiento de Newton 2.6.3 Aplicaciones físicas: circuitos y mezclas	Se trata de un contenido rama que recibe servicio meso de 1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos y que brinda servicio micro 2.6.3 Aplicaciones físicas: circuitos y mezclas, esto es fundamental para la interpretación de algunos fenómenos físicos y que el alumno comprenda una de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Por ello se generará una especificación y dos reactivos.
Unidad 3. Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior y aplicaciones	
3.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes 3.3.1 Raíces reales, reales diferentes y complejas	Se trata de un contenido 3.3.1 Raíces reales, reales diferentes y complejas a nivel micro que da servicio nivel rama a 3.4 Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes que son contenidos esenciales para la solución a problemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden por lo que se generará una especificación y un reactivo.
3.4 Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes 3.4.1 Método de conjeturas 3.4.2 Método Operador Anulador	Se trata de un contenido rama que recibe servicio a nivel micro de 3.3.1 Raíces reales, reales diferentes y complejas donde da servicios a nivel micro a 3.4.2 Método Operador Anulador que son contenidos esenciales para la solución a problemas de ecuaciones

	diferenciales de segundo orden por lo que se generará una especificación y dos reactivos.
3.5 Variación de parámetros 3.5.1 Wronskiano y sus determinantes	Se trata de un contenido rama que da servicio meso de 3.5.1 Wronskiano y sus determinantes. Por ser temas de carácter fundamental se generará una especificación y un reactivo.
3.6 Ecuaciones Diferenciales con coeficientes variables 3.6.1 La ecuación de Cauchy-Euler	Se trata de un contenido rama que da servicio meso de 3.6.1 La ecuación de Cauchy-Euler. Por ser temas de carácter fundamental se generará una especificación y un reactivo.
3.7 Transformada de Laplace para ecuaciones de orden superior 3.7.1 Teorema de Traslación	Se trata de un contenido rama que da servicio meso de 3.7.1 Teorema de Traslación. Por ser temas de carácter fundamental se generará una especificación y un reactivo.
3.8 Aplicaciones 3.8.1 Sistema masa-resorte: movimiento libre no amortiguado y amortiguado	Se trata de un contenido rama que recibe servicio meso 1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos y que a su vez recibe servicios múltiples a nivel macro de 2 Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones y 1 Fundamentos de las Ecuaciones Diferenciales. Por tratarse de un tema de gran importancia se generará una especificación y dos reactivos.
Unidad 4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales lineales de primer orden y aplicaciones	
4.2 Solución de sistemas de Ecuaciones Diferenciales 4.2.1 Transformada de Laplace 4.2.2 Operadores Diferenciales	Se trata de un contenido rama que recibe servicio a nivel meso de 1.5 Introducción a la transformada de Laplace y que recibe servicios de nivel macro de 1 Fundamentos de las Ecuaciones Diferenciales, 2 Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones, unidad 3 Ecuaciones Diferenciales lineales de orden superior. Por tratarse de un contenido relacionado a todo el curso se generará una especificación y dos reactivos.

Anexo C. Tabla resumen de especificaciones

Eje curricular	Contenidos	Cantidad de especificaciones	Cantidad de reactivos	Número del reactivo
Unidad 1. Fundamentos de las ecuaciones diferenciales				
1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos	1.3.1 Solución general y solución particular	1	2	2
1.5 Introducción a la transformada de Laplace	1.5.1 Problemas de valor inicial	1	1	3
1.5 Introducción a la transformada de Laplace	1.5.2 Transformada inversa	1	1	4
Subtotal				4
Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones				
2.1 Variables separables	2.1.1 Variables separables	1	1	5
2.3 Ecuaciones lineales	2.3.1 Ecuaciones lineales	1	2	6, 7
2.5 Transformada de Laplace para ecuaciones de primer orden	2.5.1 Transformada de derivadas	1	1	8
2.5 Transformada de Laplace para ecuaciones de primer orden	2.5.2 Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden por la transformada de Laplace	1	1	9
2.6 Aplicaciones	2.6.1 Aplicaciones Físicas: Dinámica poblacional	1	4	10, 11, 12, 13
2.6 Aplicaciones	2.6.3 Aplicaciones físicas: mezclas	1	4	14, 15, 16, 17
2.6 Aplicaciones	2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.	1	5	18, 19, 20, 21, 22
2.6 Aplicaciones	2.6.3 Aplicaciones físicas: Datación	1	2	23, 24
Subtotal				20
Total				24

Anexo D. Especificaciones de reactivos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td align="center">1</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:

Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:

Unidad 1. Fundamentos de las ecuaciones diferenciales</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:

1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos</td><td colspan="2">1.5 Subtema:

1.3.1 Solución general y solución particular</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Una Ecuación Diferencial Ordinaria de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ es una ecuación líneal de la variable dependiente y, cuando $g(x) = 0$ se dice que es una ecuación lineal homogénea; de lo contrario, es no homogénea, si se divide a ambos lados de la ecuación entre $a_1(x)$ se obtiene una función estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ donde $P(x)$ y $f(x)$ estén sobre un intervalo común continuo. La función estándar tiene la propiedad de que su solución es la suma de las soluciones

$$y = y_c + y_p$$
En donde y_c es una solución a la ecuación homogénea asociada y y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea y a esto se le conoce como la solución general. Para encontrar la solución particular es necesario que el problema sea de valor inicial. En general podemos decir que la solución de una de ecuación diferencial es llamada solución general si los valores de las constantes no se obtienen en la solución final. La misma solución puede convertirse en una solución particular cuando se calcula el valor de la constante determinada.</td></tr>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2" align="center">Determinar la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td align="center">Concepto ( )</td><td>Procedimiento (x)</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Seleccionar el resultado que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo

Se propone una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para que el estudiante obtenga su solución general, en la base del reactivo se contemplan las siguientes consideraciones:

Que contenga la variable dependiente como ‘y’ y la independiente como ‘x”.</td></tr>
</table>

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden para que el estudiante obtenga la solución general respectiva.

3.4 Distractores.

Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la aplicación deficiente de leyes de exponentes, reglas de signos, jerarquía de las operaciones.

3.5 Respuesta correcta.

La solución general de la ecuación diferencial que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -8y$?

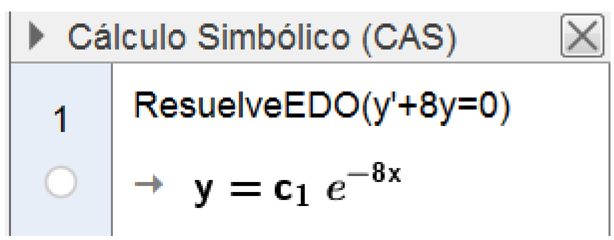
A) $ln\ ln\ |x| \ = -8y + C$

B) $ln\ ln\ |y| \ = 8 + C$

C) $ln|y| = -8x + C$

D) $ln\ ln\ |y| \ = 8x + C$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar

	1.1 Reactivo:	**2**

1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** Unidad 1. **Fundamentos de las ecuaciones diferenciales**
1.4 Tema: 1.3 Las Ecuaciones Diferenciales como modelos matemáticos	**1.5 Subtema:** 1.3.1 Solución general y solución particular
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ es una ecuación líneal de la variable dependiente y, cuando $g(x) = 0$ se dice que es una ecuación lineal homogénea; de lo contrario, es no homogénea, si se divide a ambos lados de la ecuación entre $a_1(x)$ se obtiene una función estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ donde $P(x)$ y $f(x)$ estén sobre un intervalo común continuo. La función estándar tiene la propiedad de que su solución es la suma de las soluciones

$$y = y_c + y_p$$

En donde y_c es una solución a la ecuación homogénea asociada y y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea y a esto se le conoce como la solución general. Para encontrar la solución particular es necesario que el problema sea de valor inicial. En general podemos decir que la solución de una de ecuación diferencial es llamada solución general si los valores de las constantes no se obtienen en la solución final. La misma solución puede convertirse en una solución particular cuando se calcula el valor de la constante determinada.

2.2 Indicador de logro	Determinar la solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden	
2.3 Tipo de contenido	Concepto ( )	Procedimiento (x)

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Seleccionar el resultado que corresponde a la solución particular de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

3.2 Base del reactivo

Se propone una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para que el estudiante obtenga su solución particular, en la base del reactivo se contemplan las siguientes consideraciones:

Que contenga la variable dependiente como ‘y’, la variable independiente como ‘x” y que incluya la condición inicial.

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden para que el estudiante obtenga la solución particular respectiva.

3.4 Distractores.

Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la aplicación deficiente de leyes de exponentes, reglas de signos, jerarquía de las operaciones.

3.5 Respuesta correcta.

La solución particular de la ecuación diferencial que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -2y$ sujeta a la condición $y(0) = 2$?

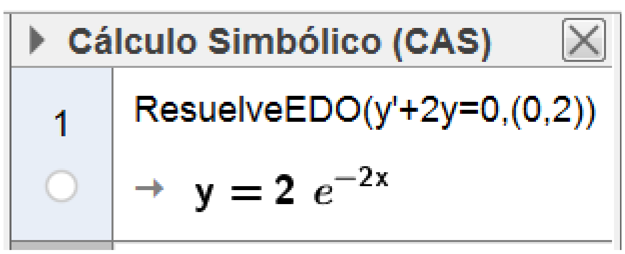
A) $ln\, ln\,(y) = ln(2) + 2x$

B) $ln\, ln\,(y) = ln(2) - 2x$

C) $ln\, ln\,(y) = -ln(2) - 2x$

D) $ln\, ln\,(y) = -ln(2) + 2x$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.1 Reactivo:</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:
Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:
Unidad 1. Fundamentos de las ecuaciones diferenciales</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:
1.5 Introducción a la transformada de Laplace</td><td colspan="2">1.5 Subtema:
1.5.1 Problemas de valor inicial</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
En el modelo matemático lineal de un sistema físico, como el de una masa y resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

El lado derecho de la ecuación diferencial es una función forzada, y puede representar a una fuerza externa $f(t)$, en estos casos la transformada de Laplace es una valiosa herramienta para obtener la solución del modelo lineal anterior. Sea f una función definida para $t\geq 0$. Entonces la integral:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

La transformada de Laplace es una transformada integral que convierte una función de variable real "t" a una función de variable compleja "s". Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y se escribe:

$$\mathscr{L}^{-1}\ f(t)=F(s)$$

Se sabe que $\mathscr{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$ o bien $\mathscr{L}\{y'\}=sy(s)-y(0)$.

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples que posteriormente son factibles de transformar.</td></tr>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Obtener la transformada de Laplace de una función $f(t)$</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td>Concepto ( )</td><td>Procedimiento (x)</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Seleccionar el resultado que corresponde a la transformada de Laplace de la función $f(t)$</td></tr>
</table>

3.2 Base del reactivo

Se propone una función $f(t)$ para que el estudiante obtenga la transformada de Laplace, a partir de las siguientes consideraciones:

A) Que contenga constantes

B) Una combinación de funciones polinomiales, exponenciales y trigonométricas.

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es textual e incluye una función $f(t)$ de la cual el estudiante obtendrá su transformada de Laplace mediante el uso de tablas de las fórmulas de Laplace.

3.4 Distractores.

Los distractores serán funciones $F(s)$ que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la interpretación deficiente de la tabla de transformadas, leyes de exponentes y reglas de signos.

3.5 Respuesta correcta.

La transformada de Laplace de la función $f(t)$.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 - e^{2t} + cos(t)$?

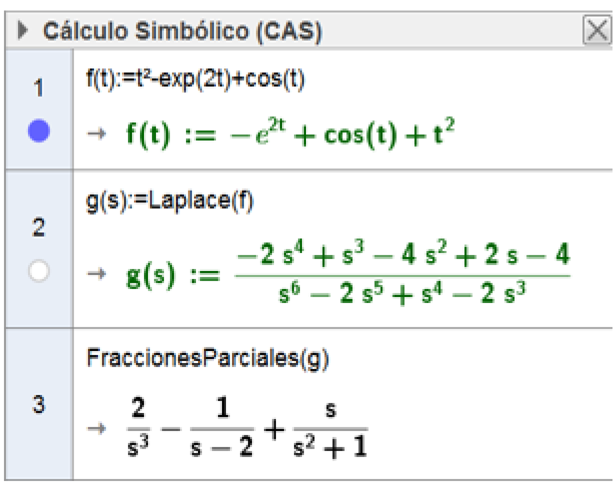
A) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

B) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$

C) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$

D) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución

3 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td align="center">4</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:

Ecuaciones diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:

Unidad 1. Fundamentos de las ecuaciones diferenciales</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:

1.5 Introducción a la transformada de Laplace</td><td colspan="2">1.5 Subtema:

1.5.2 Transformada inversa</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

En el modelo matemático lineal de un sistema físico, como el de una masa y resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

El lado derecho de la ecuación diferencial es una función forzada, y puede representar a una fuerza externa $f(t)$, en estos casos la transformada de Laplace es una valiosa herramienta para obtener la solución del modelo lineal anterior. Sea *f* una función definida para $t\geq 0$. Entonces la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

La transformada de Laplace es una transformada integral que convierte una función de variable real "t" a una función de variable compleja "s". Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y se escribe:

$$\mathcal{L}^{-1}\ f(t)=F(s)$$

Se sabe que $\mathcal{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$ o bien $\mathcal{L}\{y'\}=sy(s)-y(0)$.

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples que posteriormente son factibles de transformar.

<table>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Obtener la transformada de Laplace inversa de una función F(s).</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td>Concepto ( )</td><td>Procedimiento (x)</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Seleccionar el resultado que corresponde a la transformada de Laplace inversa de la función $F(s)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo
Se propone una función $F(s)$ para obtener su transformada inversa de Laplace. Se adjuntan las siguientes consideraciones:
A) Que contenga constantes
B)Que contenga una fracción compleja que pueda descomponerse en dos fracciones simples</td></tr>
</table>

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es textual e incluye una función $F(s)$ de la cual el estudiante obtendrá su transformada de Laplace inversa mediante el uso de la tabla de fórmulas de Laplace.

3.4 Distractores.
Los distractores serán funciones $f(t)$ que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la interpretación deficiente de la tabla de transformadas, leyes de exponentes, reglas de signos y deficiencia en el manejo de las fracciones parciales

3.5 Respuesta correcta.
La transformada de Laplace inversa de la función que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la transformada de Laplace inversa de la función $F(s) = \frac{1}{s^2-s-6}$?

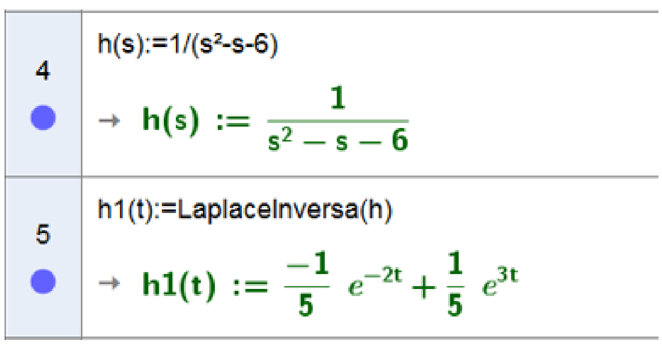
A) $f(t) = \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$

B) $f(t) = -\frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$

C) $f(t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

D) $f(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

3 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**5**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.1 Variables separables	**1.5 Subtema:** 2.1.1 Variables Separables	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
El método de variables separables consiste en separar en dos términos la ecuación diferencial para poder encontrar la solución que satisfaga dicha ecuación. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Es separable, o de variables separables.

Note que al dividir la ecuación por $h(y)$ la ecuación puede escribirse

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Ciertamente

$$p(y) = \frac{1}{h(y)}$$

Al integrar ambos lados se puede representar la expresión como

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

De la cual se obtiene una familia monoparamétrica de soluciones.

2.2 Indicador de logro	Resolver ecuaciones diferenciales separables.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto ( )	Procedimiento (x)

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Seleccionar el resultado que corresponde a la solución de la ecuación diferencial

3.2 Base del reactivo
Se propone una ecuación diferencial separable para que el estudiante obtenga la solución general. La base del reactivo puede contemplar las siguientes consideraciones:
A) Que la ecuación diferencial sea separable
B) Que la ecuación se tenga que separar
C) Que se obtengan como resultado logaritmos y/o exponenciales

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es textual e incluye una ecuación diferencial separable para que el estudiante la resuelva mediante integración.

3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la aplicación deficiente de leyes de exponentes, reglas de signos, jerarquía de las operaciones y deficiencia en el proceso de integración.

3.5 Respuesta correcta.

La solución de la ecuación diferencial dada.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(x-1)$?

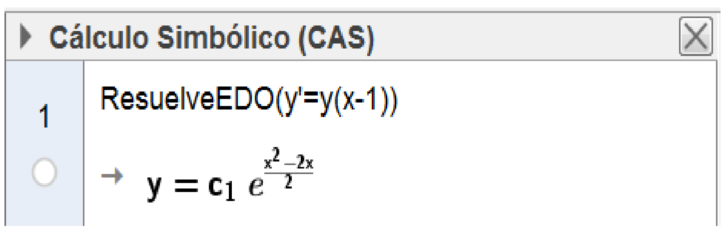
A) $ln|y| = \frac{x^2}{2} - x + c$

B) $ln|y| = x^2 - x + c$

C) $y = \frac{x^2}{2} - x + c$

D) $ln|y| = \frac{x^2}{2} + x + c$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

3 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**6**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.3 Ecuaciones lineales	**1.5 Subtema:** 2.3.1 Ecuaciones lineales	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Una ecuación diferencial es lineal cuando es de primer grado en la variable dependiente y en todas sus derivadas. Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx}a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$$

Es una ecuación lineal. Cuando $g(x) = 0$, se afirma que la ecuación lineal es homogénea; en cualquier caso, es no homogénea**.** Al dividir ambos lados de la ecuación $a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$ entre el primer coeficiente $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la forma estándar de una ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Se debe hallar una solución de $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ en un intervalo *I*, sobre el cual las funciones P y f sean continuas. El algoritmo para resolver una ecuación lineal de primer orden es el siguiente

1. Convertir una ecuación lineal de la forma lineal

$$\frac{dy}{dx}a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$$

A la forma estándar de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

2. A partir de la forma estándar, identificar $P(x)$, determinar el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx}$$

3. Multiplicar la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente y, luego

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\, y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x)$$

4. Finalmente se integran ambos lados de esta ecuación.

2.2 Indicador de logro	Determinar el factor integrante de la función $P(x)$ de una ecuación diferencial lineal del primer orden	
2.3 Tipo de contenido	Concepto ( )	Procedimiento (x)

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Identificar la función $P(x)$ de la ecuación diferencial lineal de primer orden y calcular el factor integrante.

3.2 Base del reactivo
Se propone una ecuación diferencial lineal para que se determine el factor integrante, tomar en cuenta las siguientes consideraciones:
A) Que la ecuación diferencial sea lineal de primer orden
B) La ecuación sea homogénea o no homogénea
C) Que la ecuación diferencia esté estandarizada

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial lineal de primer orden de tipo algebraico y se espera que el estudiante determine el factor integrante.

3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la aplicación deficiente de del cálculo del factor integrante, reglas de signos, jerarquía de las operaciones y deficiencia en el proceso de integración.

3.5 Respuesta correcta.

El factor integrante de la ecuación diferencial dada.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + \frac{1}{x}y = x^2$¿Cuál es el factor integrante?

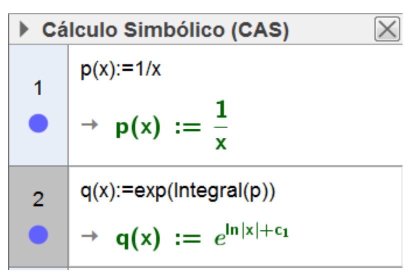
A) x

B) $\frac{1}{x}$

C) $ln\, ln\, x$

D) e^x

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar	
1.1 Reactivo:	**7**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.3 Ecuaciones lineales	**1.5 Subtema:** 2.3.1 Ecuaciones lineales
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Una ecuación diferencial es lineal cuando es de primer grado en la variable dependiente y en todas sus derivadas. Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx}a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$$

Es una ecuación lineal. Cuando $g(x) = 0$, se afirma que la ecuación lineal es homogénea; en cualquier caso, es no homogénea**.** Al dividir ambos lados de la ecuación $a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$ entre el primer coeficiente $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la forma estándar de una ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Se debe hallar una solución de $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ en un intervalo I, sobre el cual las funciones P y f sean continuas. El algoritmo para resolver una ecuación lineal de primer orden es el siguiente

1. Convertir una ecuación lineal de la forma lineal

$$\frac{dy}{dx}a_1(x) + a_0(x)y = g(x)$$

A la forma estándar de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

2. A partir de la forma estándar, identificar $P(x)$, determinar el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx}$$

3. Multiplicar la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente y, luego

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\, y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x)$$

4. Finalmente se integran ambos lados de esta ecuación.

2.2 Indicador de logro	Resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	
2.3 Tipo de contenido	Concepto ( )	Procedimiento (x)

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden.

3.2 Base del reactivo
Se propone una ecuación diferencial lineal para que el estudiante obtenga su solución
A) Que la ecuación diferencial sea lineal de primer orden
B) La ecuación lineal sea homogénea
C) Que la ecuación diferencia esté estandarizada

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial lineal de primer orden de tipo algebraico de la cual se espera que el estudiante obtenga su solución general.

3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la aplicación deficiente de del cálculo del factor integrante, reglas de signos, jerarquía de las operaciones y deficiencia en el proceso de integración.

3.5 Respuesta correcta.
La solución de la ecuación diferencial dada.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' - y = e^{-2x}$?

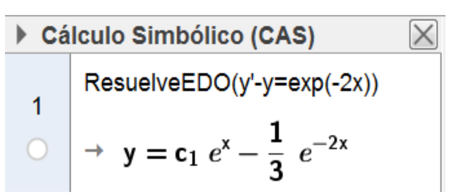
A) $y = c_1 e^{x} - \frac{1}{3}e^{-3x}$

B) $y = c_1 e^{-x} - e^{-2x}$

C) $y = c_1 e^{-x} - e^{32x}$

D) $y = c_1 e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td align="center">8</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:

Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:

Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:

2.5 Transformada de Laplace para ecuaciones de primer orden</td><td colspan="2">1.5 Subtema:

2.5.1 Transformada de derivadas</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

La meta es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Para ello necesitamos calcular expresiones como:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} \text{ y } \mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

Si $f(t), f'(t), \dots, f^{n-1}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y si $f^n(t)$ es continua parte por parte para $t \geq 0$. Entonces:

$\mathscr{L}\left(f^n(t)\right) = s^n F(t) - s^{n-1}F(0) -. \dots - f^{n-1}(0)$. En donde $F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\}$

De manera particular se tiene que:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

O bien:

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = sy(s) - y(0)$$</td></tr>
<tr><td align="center">2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Obtener la transformada de una ecuación diferencial lineal de primer orden.</td></tr>
<tr><td align="center">2.3 Tipo de contenido</td><td align="center">Concepto ( )</td><td align="center">Procedimiento (x)</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Obtener la transformada de Laplace de una ecuación diferencial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo
Se propone una ecuación diferencial para obtener su transformada aplicando la transformada de derivadas y la transformada de funciones, en la que se proponen las siguientes consideraciones:
A) Que la ecuación contenga al menos una derivada
B) Que contenga condiciones iniciales</td></tr>
</table>

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial lineal de primer orden de la cual se espera que el estudiante obtenga la transformada de Laplace.

3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones algebraicas que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por la determinación deficiente de las transformadas de los elementos que componen la ecuación diferencial, reglas de signos, jerarquía de las operaciones y deficiencia en el proceso de integración.

3.5 Respuesta correcta.
La transformada de Laplace de la ecuación diferencial dada.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la transformada de Laplace de la ecuación diferencial $y' - y = 1$ sujeta a la condición $y(0) = -1$?

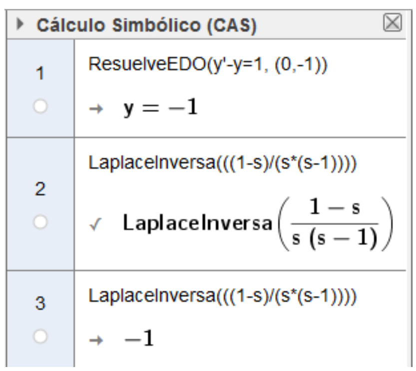
A) $y(s) = \frac{1-s}{s(s-1)}$

B) $y(s) = \frac{1+s}{s(s-1)}$

C) $y(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}$

D) $y(s) = \frac{1+s}{s(s+1)}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**9**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.5 Transformada de Laplace para ecuaciones de primer orden	**1.5 Subtema:** 2.5.2 Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden por la transformada de Laplace.	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

La meta es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Para ello necesitamos calcular expresiones como:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} \text{ y } \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

Si $f(t), f'(t), \dots, f^{n-1}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y si $f^n(t)$ es continua parte por parte para $t \geq 0$. Entonces:

$\mathcal{L}\left(f^n(t)\right) = s^nF(t) - s^{n-1}F(0) - .\dots - f^{n-1}(0)$. En donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

De manera particular se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

O bien:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sy(s) - y(0)$$

2.2 Indicador de logro	Resolver ecuaciones diferenciales mediante transformada de Laplace.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto ( )	Procedimiento (x)

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Resolver una ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace.

3.2 Base del reactivo

Se propone una ecuación diferencial para obtener su solución parcial mediante transformada de Laplace, en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) Que la ecuación contenga al menos una derivada

B) Que contenga condiciones iniciales

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es textual y se incluye una ecuación diferencial lineal de primer orden de la cual se espera que el estudiante obtenga su solución parcial mediante transformada de Laplace.

3.4 Distractores.

Los distractores serán fracciones simples que se obtienen a partir de errores comunes de parte de los estudiantes, particularmente por el deficiente tratamiento de los casos de fracciones parciales, reglas de signos y jerarquía de las operaciones.

3.5 Respuesta correcta.

Las fracciones simples que se obtienen en el proceso de resolución de la ecuación diferencial mediante transformada de Laplace.

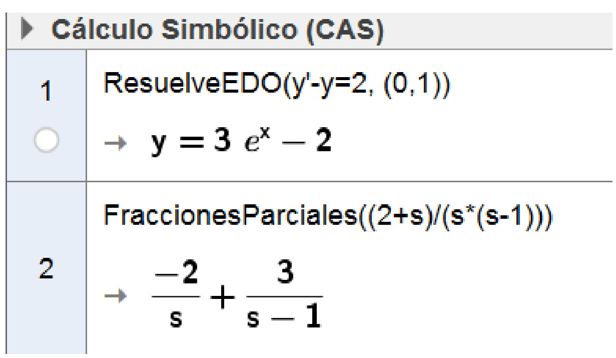
4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuáles son las fracciones simples que se obtienen en el proceso de resolución de la ecuación diferencial $y' - y = 2, \mathit{sujeta\ a\ la\ condición}\ y(0) = 1$ mediante transformada de Laplace?

A) $\frac{2}{s} + \frac{3}{s-1}$ **B)** $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1}$ C) $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s+1}$ D) $\frac{2}{s} + \frac{3}{-s-1}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar	
1.1 Reactivo:	**10**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.1 Aplicaciones Físicas: Dinámica poblacional
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo el economista inglés Thomas Malthus en 1798. En esencia la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total $P(t)$, de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras mas personas haya en el momento t, mas habrá en el futuro. En términos matemáticos esta hipótesis se puede expresar:

$$\frac{dP}{dt} \alpha\ P$$

Es decir

$$\frac{dP}{dt} = k\ P$$

Donde k es una constante de proporcionalidad. En esta expresión el cociente

$$\frac{dP}{dt}$$

Representa la razón o tasa de cambio, es decir cómo cambia la población con respecto al tiempo.

2.2 Indicador de logro	Identificar la ecuación diferencial que modela matemáticamente la dinámica poblacional.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga al menos dos preguntas para resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán expresiones con los siguientes rasgos: Ecuaciones desordenadas, expresadas en su forma no tan simple. 3 respuestas erróneas pero parecidas a la respuesta correcta.

3.5 Respuesta correcta.

Generar la solución a la ecuación obtenida a partir del lenguaje natural.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la dinámica poblacional?

A) $\frac{dP}{dt} = k\,P^2$	B) $\frac{dP}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$	C) $\frac{dP}{dt} = k\,(P - P_m)$	**D)** $\frac{dP}{dt} = k\,P$

Validación de la respuesta correcta

Se encuentra en el comentario aclaratorio de esta especificación

4.2 Tiempo estimado de ejecución.

1 minuto

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
1.1 Reactivo:		**11**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.1 Aplicaciones Físicas: Dinámica poblacional	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo el economista inglés Thomas Malthus en 1798. En esencia la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total $P(t)$, de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras mas personas haya en el momento t, mas habrá en el futuro. En términos matemáticos esta hipótesis se puede expresar: $\frac{dP}{dt} \alpha\ P$

Es decir

$$\frac{dP}{dt} = k\,P$$

Donde *k* es una constante de proporcionalidad. En esta expresión el cociente

$$\frac{dP}{dt}$$

Representa la razón o tasa de cambio, es decir cómo cambia la población con respecto al tiempo.

2.2 Indicador de logro	Calcular la constante k de proporcionalidad de un enunciado de problema de dinámica poblacional.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso

B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial

C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la tercera posición.

3.5 Respuesta correcta.

La constante de proporcionalidad calculada correctamente a partir del modelo de dinámica poblacional.

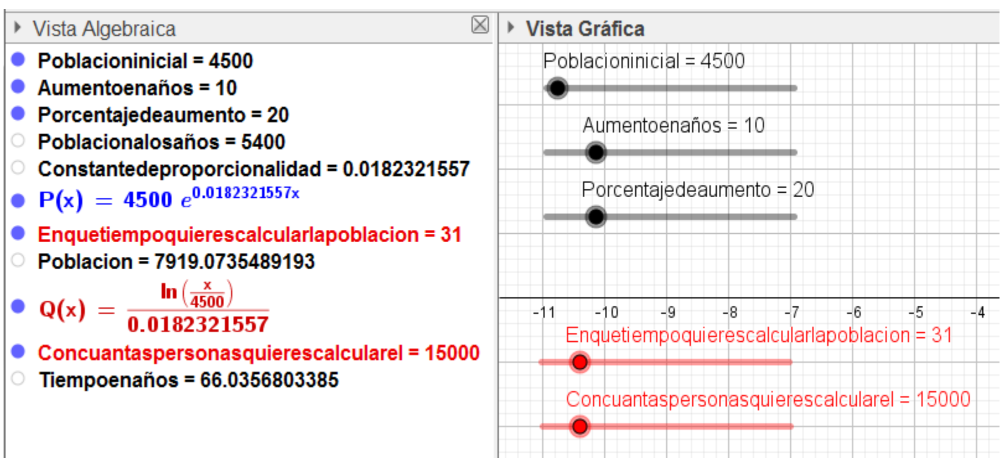
4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

La población estudiantil de la Facultad de Ingeniería, Mexicali de la UABC crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial (en 2023) es de 4500 alumnos y aumenta el 20% en 10 años. Para predecir la población estudiantil del año 2030 es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k?

A) $k = -0.01823215568$
B) $k = 0.01823215568$
C) $k = 0.018246678$
D) $k = -0.018246678$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

4 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td>12</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:
Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:
Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:
2.6 Aplicaciones</td><td colspan="2">1.5 Subtema:
2.6.1 Aplicaciones Físicas: Dinámica poblacional</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo el economista inglés Thomas Malthus en 1798. En esencia la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total $P(t)$, de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras mas personas haya en el momento t, mas habrá en el futuro. En términos matemáticos esta hipótesis se puede expresar: $\frac{dP}{dt} \alpha P$
Es decir
$$\frac{dP}{dt} = k P$$
Donde k es una constante de proporcionalidad. En esta expresión el cociente
$$\frac{dP}{dt}$$
Representa la razón o tasa de cambio, es decir cómo cambia la población con respecto al tiempo.</td></tr>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Resolver problemas de dinámica poblacional.</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td>Concepto (x)</td><td>Procedimiento (   )</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo
Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:
A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver</td></tr>
</table>

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.
Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la deficiencia en el cálculo de la constante de proporcionalidad.

3.5 Respuesta correcta.
Generar la solución a la ecuación obtenida del lenguaje hablado.

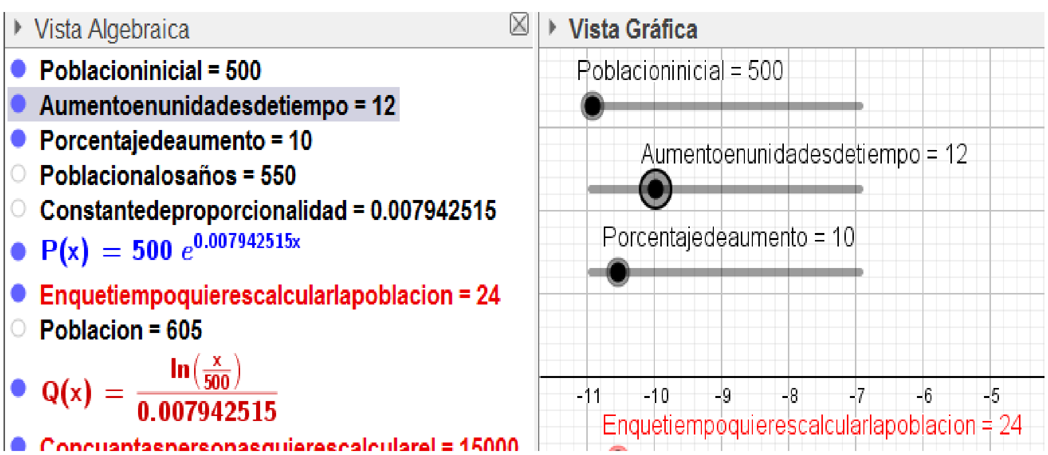
4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra
En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 500 individuos. Pasadas 12 horas, hay 550 especímenes. ¿Cuál será la cantidad de bacterias Sars-Covid19 transcurridas 24 horas?

A) $P(t = 24) = 605\ bacterias$ B) $P(t = 24) = 550\ bacterias$

C) $P(t = 24) = 575\ bacterias$ D) $P(t = 24) = 600\ bacterias$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

5 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar	
1.1 Reactivo:	**13**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.1 Aplicaciones Físicas: Dinámica poblacional
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo el economista inglés Thomas Malthus en 1798. En esencia la idea del modelo maltusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total $P(t)$, de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras mas personas haya en el momento t, mas habrá en el futuro. En términos matemáticos esta hipótesis se puede expresar:

$$\frac{dP}{dt} \alpha \ P$$

Es decir

$$\frac{dP}{dt} = k \ P$$

Donde k es una constante de proporcionalidad. En esta expresión el cociente

$$\frac{dP}{dt}$$

Representa la razón o tasa de cambio, es decir cómo cambia la población con respecto al tiempo.

2.2 Indicador de logro	Resolver problemas de dinámica poblacional.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo
Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:
A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga al menos dos preguntas para resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.
Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la deficiencia en el cálculo de la constante de proporcionalidad.

3.5 Respuesta correcta.
Generar la solución a la ecuación obtenida del lenguaje hablado.

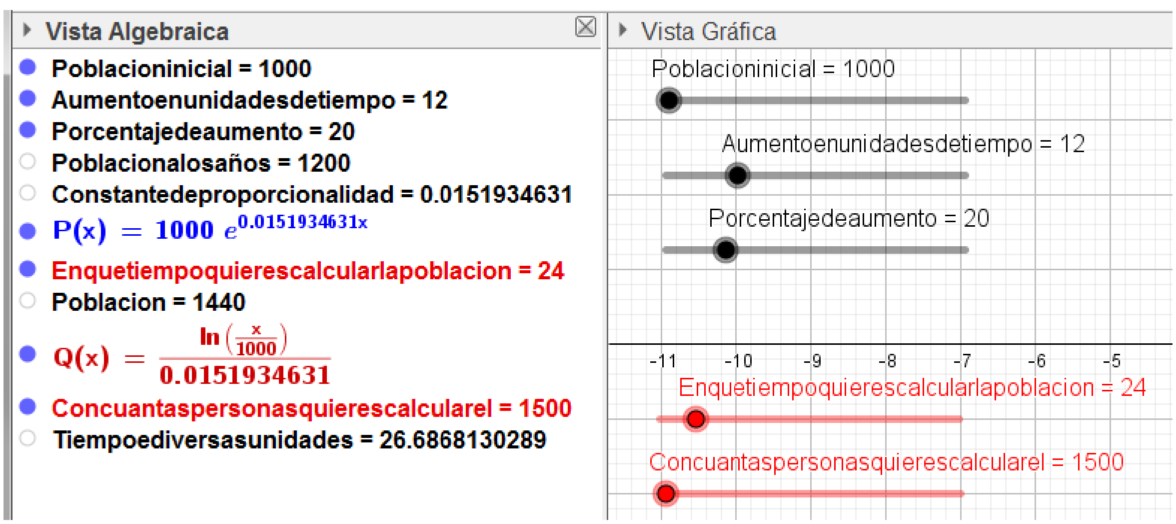
4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 1000 individuos. Pasadas 12 horas, hay 1200 especímenes. ¿En qué momento habrá 1500 especímenes?

A) En $t = 18.54\ horas$ B) En $t = 21.80\ horas$ C) En $t = 51.05\ horas$ **D) En** $t = 26.69\ horas$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

6 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar	
1.1 Reactivo:	**14**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: mezclas
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. Un modelo representativo de este sistema es:

$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada) - (razón\ de\ salida) = R_1 - R_2$$

En donde la razón de entrada y salida se calcula como flujo por concentración.

2.2 Indicador de logro	Modelar situaciones físicas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el caso de mezclas.
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x) Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con los datos necesarios para modelar la situación que se presenta mediante una ecuación diferencial, para este caso se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga al menos dos preguntas para resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es mediante el lenguaje natural y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán expresiones con los siguientes rasgos: Ecuaciones desordenadas, expresadas en su forma no tan simple. 3 respuestas erróneas pero parecidas a la respuesta correcta.

3.5 Respuesta correcta.

La ecuación diferencial que modela la situación física que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Un tanque contiene 800 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la situación física?

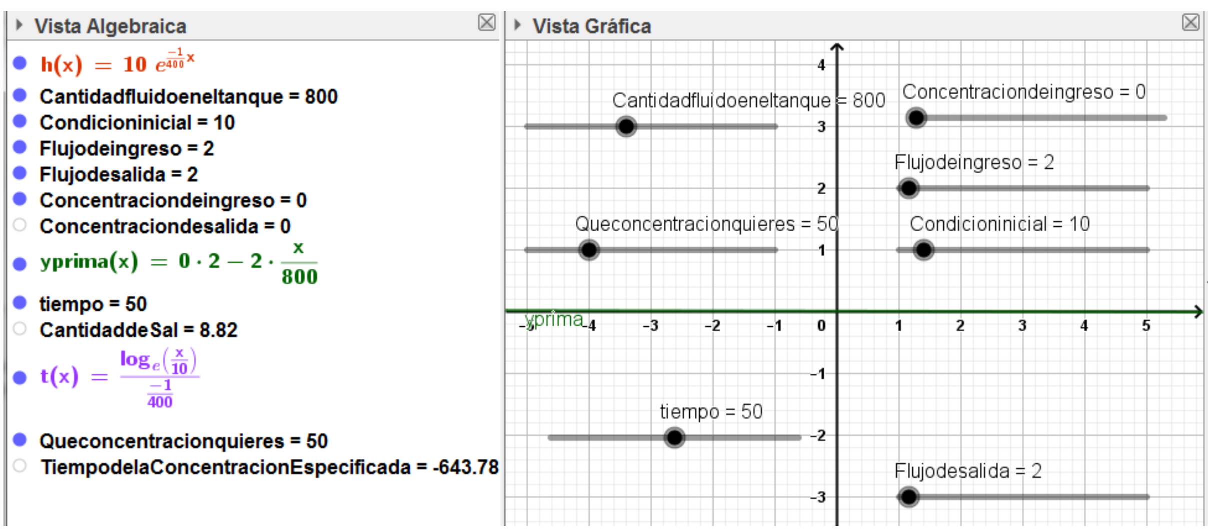
A) $A'(t) = 2 - \frac{A}{400}$

B) $A'(t) = 2 + \frac{A}{400}$

C) $A'(t) = -\frac{A}{400}$

D) $A'(t) = \frac{A}{400}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td align="center">15</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:

Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:

Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:

2.6 Aplicaciones</td><td colspan="2">1.5 Subtema:

2.6.3 Aplicaciones físicas: mezclas</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. Un modelo representativo de este sistema es:

$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada) - (razón\ de\ salida) = R_1 - R_2$$
En donde la razón de entrada y salida se calcula como flujo por concentración</td></tr>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td>Concepto (x)</td><td>Procedimiento ( )</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo
Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones con los siguientes rasgos: Ecuaciones desordenadas, expresadas en su forma no tan simple. 3 respuestas erróneas pero parecidas a la respuesta correcta.</td></tr>
</table>

3.5 Respuesta correcta.

La solución particular que representa la función de la cantidad de sal en un instante determinado.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

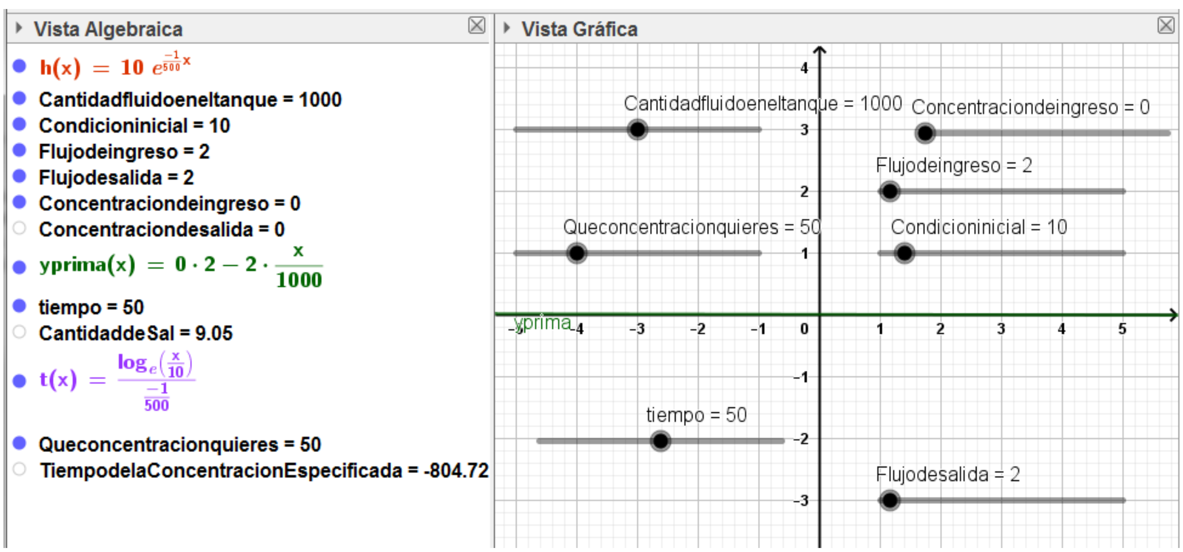
4.1 Reactivo muestra

Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en un instante de tiempo t determinado?

A) $A(t) = 10e^{\frac{t}{500}}$ **B)** $A(t) = 10e^{\frac{-t}{500}}$

C) $A(t) = e^{\frac{t}{500}}$ E) $A(t) = e^{\frac{-t}{500}}$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

4 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td>16</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:
Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:
Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:
2.6 Aplicaciones</td><td colspan="2">1.5 Subtema:
2.6.3 Aplicaciones físicas: mezclas</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. Un modelo representativo de este sistema es
$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada) - (razón\ de\ salida) = R_1 - R_2$$
En donde la razón de entrada y salida se calcula como flujo por concentración.</td></tr>
<tr><td>2.2 Indicador de logro</td><td colspan="2">Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas</td></tr>
<tr><td>2.3 Tipo de contenido</td><td>Concepto (x)</td><td>Procedimiento (   )</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.1 Instrucciones para responder el reactivo
Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.2 Base del reactivo
Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.</td></tr>
<tr><td colspan="3">3.4 Distractores.
Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la deficiencia en el cálculo de la constante de proporcionalidad.</td></tr>
</table>

3.5 Respuesta correcta.

La predicción correcta de la cantidad de sal en el tanque en un instante determinado

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 20 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad de sal que habrá en el tanque en $t = 60$ minutos?

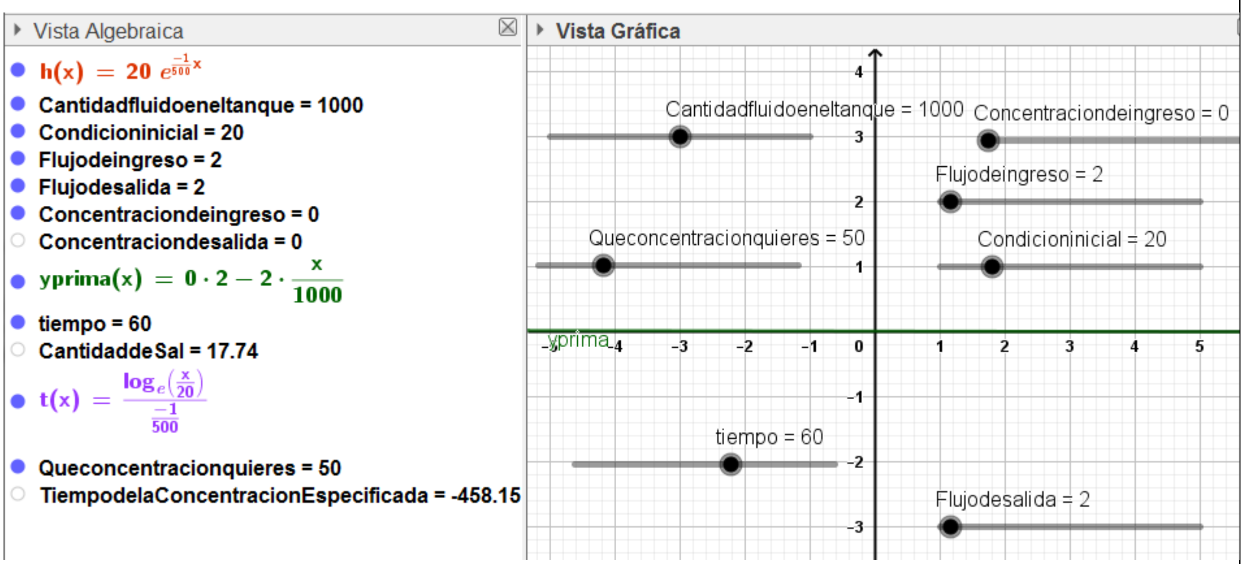
A) $A(t) = 8.87$ libras de sal

B) $A(t) = 13.30$ libras de sal

C) $A(t) = 22.17$ libras de sal

D) $A(t) = 17.74$ **libras de sal**

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

5 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**17**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: mezclas	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido

La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. Un modelo representativo de este sistema es

$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada) - (razón\ de\ salida) = R_1 - R_2$$

En donde la razón de entrada y salida se calcula como flujo por concentración.

2.2 Indicador de logro	Resolver enunciados de problemas asociados a mezclas	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la deficiencia en el cálculo de la constante de proporcionalidad.

3.5 Respuesta correcta.

La predicción correcta de la cantidad de sal en el tanque en un instante determinado

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 30 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿En qué momento se alcanza una concentración de 25 libras de sal?

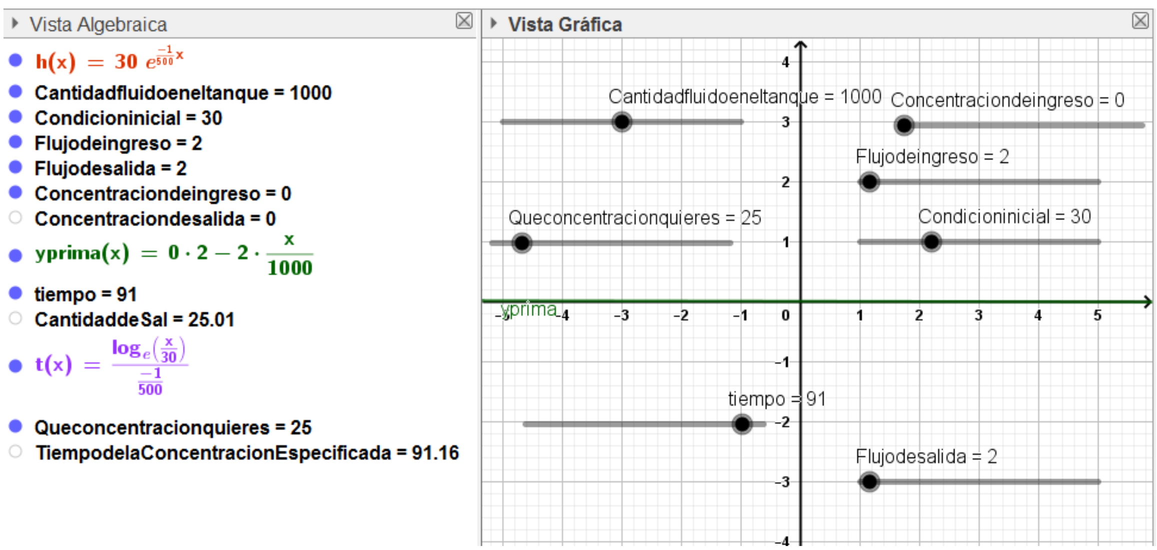
A) En $t = 111.57$ minutos

B) En $t = 91.16$ minutos

C) En $t = 178.34$ minutos

D) En $t = 202.73$ minutos

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

5 minutos

<table>
<tr><td colspan="3">1. Datos de identificación del contenido a evaluar</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">1.1 Reactivo:</td><td>18</td></tr>
<tr><td>1.2 Asignatura:
Ecuaciones Diferenciales</td><td colspan="2">1.3 Contenido Macro:
Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones</td></tr>
<tr><td>1.4 Tema:
2.6 Aplicaciones</td><td colspan="2">1.5 Subtema:
2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.</td></tr>
<tr><td>2. Atributos del reactivo.</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt}\ \alpha\ (T - T_m)$$

O bien

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, si T_m es constante se debe suponer que $k < 0$.

2.2 Indicador de logro	Identificar la ecuación diferencial que modela matemáticamente la Ley de enfriamiento de Newton.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.
Los distractores serán expresiones con los siguientes rasgos: Ecuaciones desordenadas, expresadas en su forma no tan simple, con signos cambiados, 3 respuestas erróneas pero parecidas a la respuesta correcta.

3.5 Respuesta correcta.

La ecuación diferencial que modela la situación física que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la ley de enfriamiento de Newton?

A) $\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$ **Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio**

B) $\frac{dT}{dt} = k\ (T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

C) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\ (T - T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

D) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\ (T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

Validación de la respuesta correcta

Se encuentra en el comentario aclaratorio de esta especificación

4.2 Tiempo estimado de ejecución.

1 minuto

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**19**

1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.
Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt}\ \alpha\ (T - T_m)$$

O bien

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, si T_m es constante se debe suponer que $k < 0$.

2.2 Indicador de logro	Modelar situaciones físicas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, el caso de la Ley de enfriamiento de Newton.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo
Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán expresiones con los siguientes rasgos: Ecuaciones desordenadas, expresadas en su forma no tan simple. 3 respuestas erróneas pero parecidas a la respuesta correcta.

3.5 Respuesta correcta.

La ecuación diferencial que modela la situación física que se presenta.

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 3 minutos, 200 grados. $T'(t)$ es la variación de la temperatura del pastel con respecto al tiempo y $T(t)$ la temperatura del pastel en un momento de tiempo t determinado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la situación física? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 70 grados Fahrenheit.

A) $\frac{dT}{dt} = k(T + 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 200$

B) $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 200$

C) $\frac{dT}{dt} = k(T + 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 300$

D) $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 300$

Validación de la respuesta correcta

Se encuentra en el comentario aclaratorio de esta especificación

4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**20**

1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.
2. Atributos del reactivo.	

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt}\ \alpha\ (T - T_m)$$

O bien

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, si T_m es constante se debe suponer que $k < 0$.

2.2 Indicador de logro	Calcular la constante k de proporcionalidad de un enunciado de problema asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.
Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la tercera posición.

3.5 Respuesta correcta.
La constante de proporcionalidad calculada correctamente a partir del modelo de enfriamiento

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

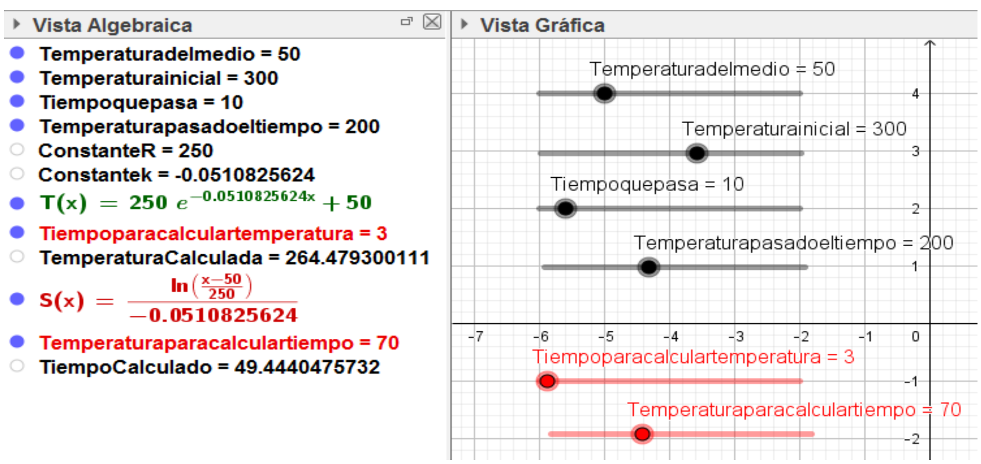
4.1 Reactivo muestra

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 10 minutos, 200 grados. $T'(t)$ es la variación de la temperatura del pastel con respecto al tiempo y $T(t)$ la temperatura del pastel en un momento de tiempo t determinado. Para predecir la temperatura en un momento dado es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) $k = -0.05108256$ B) $k = 0.05108256$

C) $k = -0.02554128$ D) $k = 0.02554128$

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

2 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**21**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt}\ \alpha\ (T - T_m)$$

O bien

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, si T_m es constante se debe suponer que $k < 0$.

2.2 Indicador de logro	Resolver problemas asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.

Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la tercera posición.

3.5 Respuesta correcta.

La predicción correcta respecto de la temperatura del objeto en un instante determinado

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 320 grados Fahrenheit. Después de 15 minutos, 250 grados. ¿Cuál es el valor de la temperatura en el tiempo $t = 30$ minutos? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

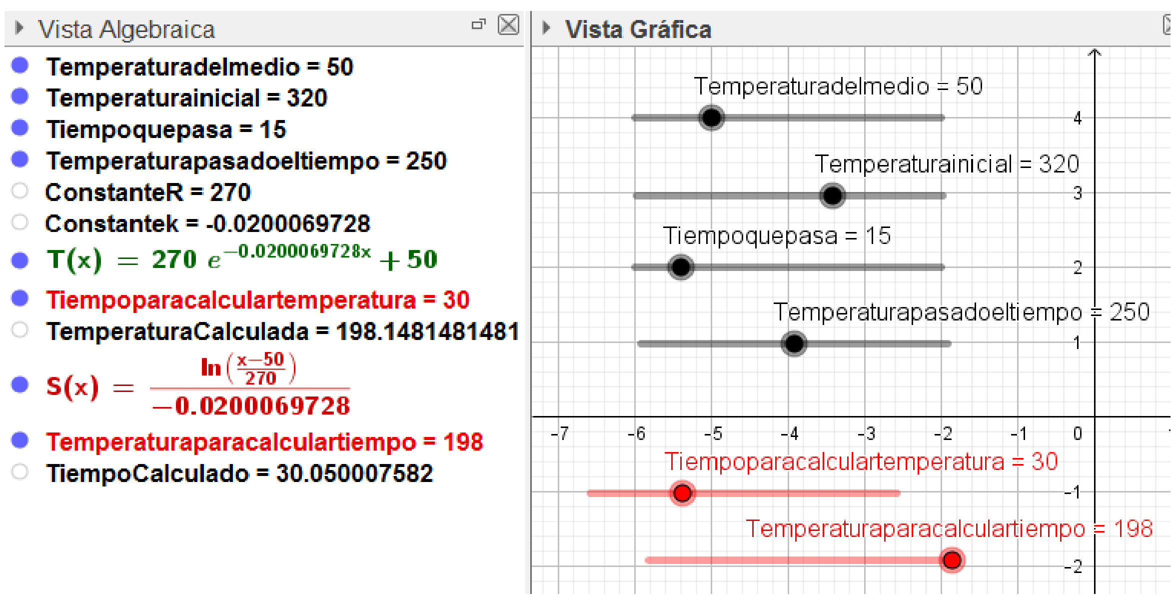
A) $T(t = 30) = 159.7393$ grados Fahrenheit

B) $T(t = 30) = 198.1481$ **grados Fahrenheit**

C) $T(t = 30) = 177.5056$ grados Fahrenheit

D) $T(t = 30) = 222.1326$ grados Fahrenheit

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

5 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**22**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Ley de enfriamiento de Newton.	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la del medio ambiente. Esto es:

$$\frac{dT}{dt}\ \alpha\ (T - T_m)$$

O bien

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad. En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, si T_m es constante se debe suponer que $k < 0$.

2.2 Indicador de logro	Resolver problemas asociados a la Ley de enfriamiento de Newton.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:
La información que se emite en este reactivo es de tipo lenguaje hablado y se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se pide.

3.4 Distractores.
Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos a partir de la tercera posición.

3.5 Respuesta correcta.
La predicción correcta respecto de la temperatura del objeto en un instante determinado

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 20 minutos, 250 grados. ¿En qué momento el pastel alcanza una temperatura de 100 grados Fahrenheit? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

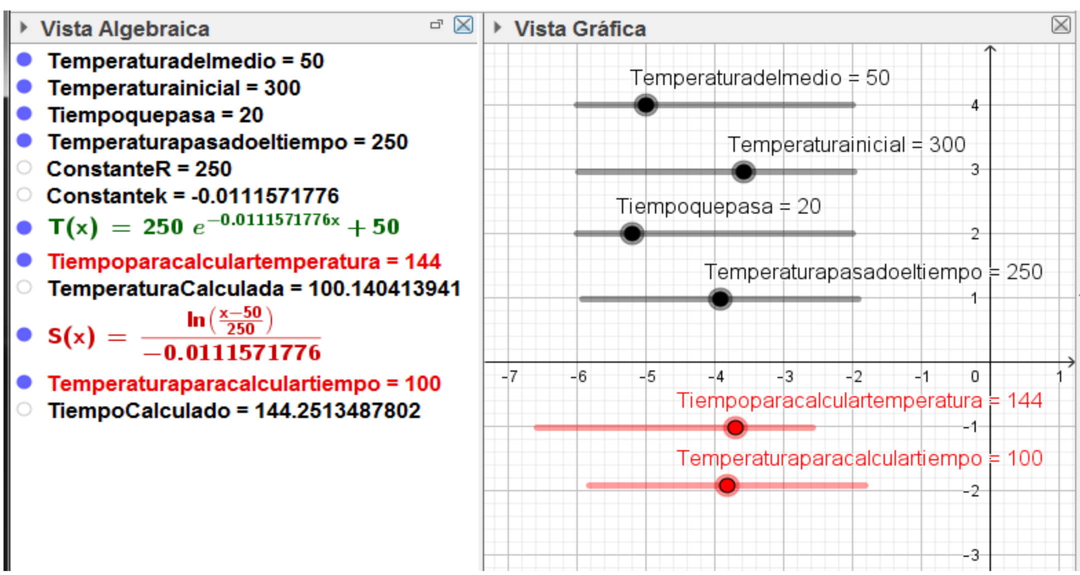
A) En $t = 153.45$ minutos

B) En $t = 127.91$ minutos

C) En $t = 144.25$ minutos

D) En $t = 135.70$ minutos

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

5 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**23**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Datación	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que emplea al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles. La teoría de la datación (fechamiento o fechado) con radiocarbono, se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo de la absorción del C-14 sea por respiración o alimentación cesa. Así, si se compara la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo, en un fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad. El método se basa en que se sabe que el periodo medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente, 5600 años. Por este trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. Su método se usó para fechar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto.

Vida Media. En física, la vida media es una medida de estabilidad de una sustancia radiactiva. Es simplemente, el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial, A_0 y se conviertan en átomos de otro elemento. Mientras mayor sea su vida media, más estable es una sustancia: por ejemplo, la vida media del radio Ra-226, muy radiactivo, es de unos 1,700 años. En este lapso, la mitad de Ra-226 se transmuta y forma radón, Rn-222. El isótopo más común de uranio, el U-238 tiene una vida media de 4,500 millones de años, que es el tiempo en que tarda en transmutarse la mitad de la cantidad de U-238 en plomo 206. El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables; esto es los átomos se desintegran, o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos; por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en gas radón, Rn 222, también radiactivo. Para modelar el fenómeno de la desintegración radiactiva, se supone que la tasa con que los núcleos de una sustancia se desintegran (decaen) es proporcional a la cantidad (número de núcleos) $A(t)$ de sustancia que queda al tiempo t; esto puede escribirse como $\frac{dA}{dt} \alpha A$

Luego se escribe que

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

En el caso del crecimiento, cabe esperar que $k > 0$ y en el caso de la desintegración $k < 0$. Cabe mencionar entonces que una sola ecuación diferencial puede ser un modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

2.2 Indicador de logro	Resolver problemas sobre datación.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso

B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial

C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es mediante el lenguaje natural, se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se solicita.

3.4 Distractores.

Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos, errores originados por el cálculo deficiente de la constante de proporcionalidad.

3.5 Respuesta correcta.

La antigüedad del fósil

4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía el 30% de la cantidad original de C-14. ¿Cuál es la edad del fósil? Considere que el periodo medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente de 5600 años.

A) 11200.57 años   B) 13003.46 años   **C) 9727.50 años**   D) 15327.79 años

Validación de la respuesta correcta

4.2 Tiempo estimado de ejecución.

3 minutos

1. Datos de identificación del contenido a evaluar		
	1.1 Reactivo:	**24**
1.2 Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**1.3 Contenido Macro:** **Unidad 2. Técnicas de solución de Ecuaciones Diferenciales de primer orden y aplicaciones**	
1.4 Tema: 2.6 Aplicaciones	**1.5 Subtema:** 2.6.3 Aplicaciones físicas: Datación	
2. Atributos del reactivo.		

2.1 Comentario aclaratorio acerca del sentido del contenido.

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que emplea al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles. La teoría de la datación (fechamiento o fechado) con radiocarbono, se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo de la absorción del C-14 sea por respiración o alimentación cesa. Así, si se compara la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo, en un fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad. El método se basa en que se sabe que el periodo medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente, 5600 años. Por este trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. Su método se usó para fechar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto.

Vida Media. En física, la vida media es una medida de estabilidad de una sustancia radiactiva. Es simplemente, el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial, A_0 y se conviertan en átomos de otro elemento. Mientras mayor sea su vida media, más estable es una sustancia: por ejemplo, la vida media del radio Ra-226, muy radiactivo, es de unos 1,700 años. En este lapso, la mitad de Ra-226 se transmuta y forma radón, Rn-222. El isótopo más común de uranio, el U-238 tiene una vida media de 4,500 millones de años, que es el tiempo en que tarda en transmutarse la mitad de la cantidad de U-238 en plomo 206. El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables; esto es los átomos se desintegran, o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos; por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma en gas radón, Rn 222, también radiactivo. Para modelar el fenómeno de la desintegración radiactiva, se supone que la tasa con que los núcleos de una sustancia se desintegran (decaen) es proporcional a la cantidad (número de núcleos) $A(t)$ de sustancia que queda al tiempo t; esto puede escribirse como $\frac{dA}{dt} \alpha A$

Luego se escribe que $\frac{dA}{dt} = kA$. En el caso del crecimiento, cabe esperar que $k > 0$ y en el caso de la desintegración $k < 0$. Cabe mencionar entonces que una sola ecuación diferencial puede ser un modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

2.2 Indicador de logro	Resolver problemas sobre datación.	
2.3 Tipo de contenido	Concepto (x)	Procedimiento ( )

3. Atributos relevantes de los estímulos que se presentarán a los alumnos.

3.1 Instrucciones para responder el reactivo

Identificar el tipo de problema para modelar el fenómeno físico y así poder resolver lo que se indique.

3.2 Base del reactivo

Se propone un enunciado con datos precisos para poder modelar la ecuación diferencial y aplicar herramientas de solución a la ecuación dada para así dar respuesta a lo que se pide en la que se proponen las siguientes consideraciones:

A) El enunciado debe ser corto y preciso
B) Que contenga datos esenciales para modelar la ecuación diferencial
C) Que contenga una sola pregunta a resolver

3.3 Vocabulario e información textual, gráfica o tabular a emplear:

La información que se emite en este reactivo es mediante el lenguaje natural, se espera que el estudiante traduzca al lenguaje algebraico para dar solución a lo que se solicita.

3.4 Distractores.

Los distractores serán valores numéricos con errores provocados por signo o variaciones en los dígitos, errores originados por el cálculo deficiente de la constante de proporcionalidad.

3.5 Respuesta correcta.

La antigüedad del fósil

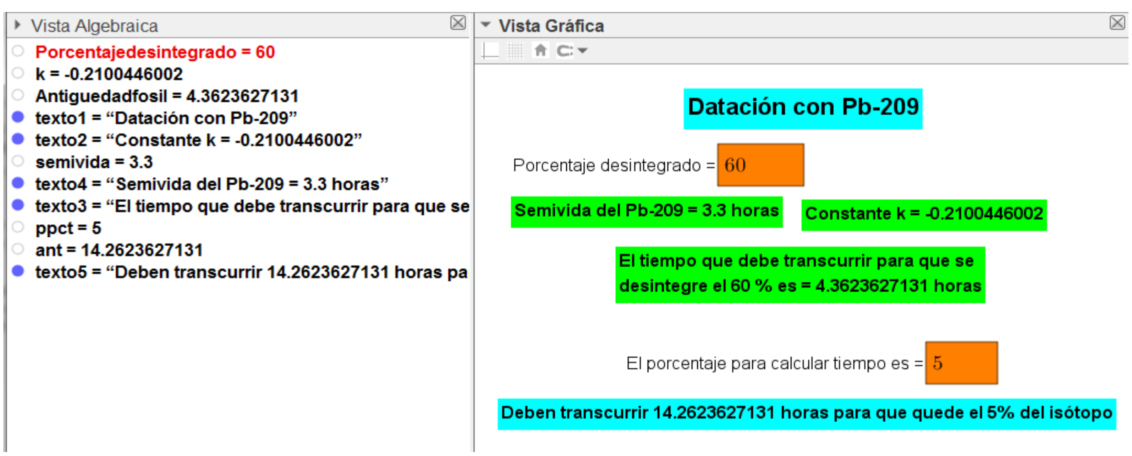
4. Reactivo muestra y duración de la resolución.

4.1 Reactivo muestra

El Pb-209, isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3.3 horas. Se analizó una porción de material y se encontró que contenía el 40% de la cantidad original. ¿En qué momento quedará el 5% del isótopo Pb-209?

A) 14.26 horas B) 13.39 horas C) 12.66 horas D) 12.02 horas

Validación de la respuesta correcta



4.2 Tiempo estimado de ejecución.

3 minutos

Anexo E. Instrumento de medición preliminar

1. ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -8y$?

A) $ln\ ln\ |x| = -8y + C$

B) $ln\ ln\ |y| = 8 + C$

C) $ln|y| = -8x + C$

D) $ln\ ln\ |y| = 8x + C$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

2. ¿Cuál es la solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -2y$ sujeta a la condición $y(0) = 2$?

A) $ln\ ln\ (y) = ln(2) + 2x$

B) $ln\ ln\ (y) = ln(2) - 2x$

C) $ln\ ln\ (y) = -ln(2) - 2x$

D) $ln\ ln\ (y) = -ln(2) + 2x$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables con condición inicial
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

3. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 - e^{2t} + cos(t)$?

A) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

B) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$

C) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$

D) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

Indicador de logro: Determinar la transformada de Laplace de una función
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

4. ¿Cuál es la transformada de Laplace inversa de la función $F(s) = \frac{1}{s^2-s-6}$?

A) $f(t) = \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$

B) $f(t) = -\frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$

C) $f(t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

D) $f(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

Indicador de logro: Determinar la transformada inversa de Laplace de una función
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

5. ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(x-1)$?

A) $ln|y| = \frac{x^2}{2} - x + c$

B) $ln|y| = x^2 - x + c$

C) $y = \frac{x^2}{2} - x + c$

D) $ln|y| = \frac{x^2}{2} + x + c$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

6. Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + \frac{1}{x}y = x^2$ ¿Cuál es el factor integrante?

A) x

B) $\frac{1}{x}$

C) $ln\, ln\, x$

D) e^X

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de factor integrante
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

7. ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' - y = e^{-2x}$?

A) $y = c_1e^{x} - \frac{1}{3}e^{-3x}$

B) $y = c_1e^{-x} - e^{-2x}$

C) $y = c_1e^{-x} - e^{32x}$

D) $y = c_1e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de factor integrante
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

8. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la ecuación diferencial $y' - y = 1$ sujeta a la condición $y(0) = -1$?

A) $y(s) = \frac{1-s}{s(s-1)}$

B) $y(s) = \frac{1+s}{s(s-1)}$

C) $y(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}$

D) $y(s) = \frac{1+s}{s(s+1)}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales por medio de transformada de derivadas
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

9. ¿Cuáles son las fracciones simples que se obtienen en el proceso de resolución de la ecuación diferencial $y' - y = 2, sujeta\ a\ la\ condición\ y(0) = 1$ mediante transformada de Laplace?

A) $\frac{2}{s} + \frac{3}{s-1}$

B) $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1}$

C) $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s+1}$

D) $\frac{2}{s} + \frac{3}{-s-1}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales por medio de transformadas de Laplace
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

10. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la dinámica poblacional?

A) $\frac{dP}{dt} = k\,P^2$

B) $\frac{dP}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$

C) $\frac{dP}{dt} = k\,(P - P_m)$

D) $\frac{dP}{dt} = k\,P$

Indicador de logro: Identificar el modelo que define la dinámica poblacional
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

11. La población estudiantil de la Facultad de Ingeniería, Mexicali de la UABC crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial (en 2023) es de 4500 alumnos y aumenta el 20% en 10 años. Para predecir la población estudiantil del año 2030 es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k?

A) $k = -0.01823215568$

B) $k = 0.01823215568$

C) $k = 0.018246678$

D) $k = -0.018246678$

Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

12. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 500 individuos. Pasadas 12 horas, hay 550 especímenes. ¿Cuál será la cantidad de bacterias Sars-Covid19 transcurridas 24 horas?

A) $P(t = 24) = 605\ bacterias$

B) $P(t = 24) = 550\ bacterias$

C) $P(t = 24) = 575\ bacterias$

D) $P(t = 24) = 600\ bacterias$

Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

13. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 1000 individuos. Pasadas 12 horas, hay 1200 especímenes. ¿En qué momento habrá 1500 especímenes?

A) En $t = 18.54\ horas$

B) En $t = 21.80\ horas$

C) En $t = 51.05\ horas$

D) En $t = 26.69\ horas$

Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

14. Un tanque contiene 800 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la situación física?

A) $A'(t) = 2 - \frac{A}{400}$

B) $A'(t) = 2 + \frac{A}{400}$

C) $A'(t) = -\frac{A}{400}$

D) $A'(t) = \frac{A}{400}$

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraica

15. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en un instante de tiempo t determinado?

A) $A(t) = 10e^{\frac{t}{500}}$

B) $A(t) = 10e^{\frac{-t}{500}}$

C) $A(t) = e^{\frac{t}{500}}$

D) $A(t) = e^{\frac{-t}{500}}$

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

16. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 20 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A´(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad de sal que habrá en el tanque en $t = 60$ minutos?

A) $A(t) = 8.87$ libras de sal

B) $A(t) = 13.30$ libras de sal

C) $A(t) = 22.17$ libras de sal

D) $A(t) = 17.74$ libras de sal

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

17. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 30 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A´(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿En qué momento se alcanza una concentración de 25 libras de sal?

A) En $t = 111.57$ minutos

B) En $t = 91.16$ minutos

C) En $t = 178.34$ minutos

D) En $t = 202.73$ minutos

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

18. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la ley de enfriamiento de Newton?

A) $\frac{dT}{dt} = k\ (T - T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio
B) $\frac{dT}{dt} = k\ (T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

C) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\ (T - T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

D) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\ (T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

Indicador de logro: Identificar el modelo que define la ley de enfriamiento de Newton
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

19. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 3 minutos, 200 grados. $T'(t)$ es la variación de la temperatura del pastel con respecto al tiempo y $T(t)$ la temperatura del pastel en un momento de tiempo t determinado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la situación física? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 70 grados Fahrenheit.

A) $\frac{dT}{dt} = k(T + 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 200$

B) $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 200$

C) $\frac{dT}{dt} = k(T + 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 300$

D) $\frac{dT}{dt} = k(T - 70)\ sujeto\ a\ T(t = 0) = 300$

Indicador de logro: Identificar el modelo que define la ley de enfriamiento de Newton
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

20. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 10 minutos, 200 grados. $T'(t)$ es la variación de la temperatura del pastel con respecto al tiempo y $T(t)$ la temperatura del pastel en un momento de tiempo t determinado. Para predecir la temperatura en un momento dado es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) $k = -0.05108256$

B) $k = 0.05108256$

C) $k = -0.02554128$

D) $k = 0.02554128$

Indicador de logro: Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

21. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 320 grados Fahrenheit. Después de 15 minutos, 250 grados. ¿Cuál es el valor de la temperatura en el tiempo $t = 30$ minutos? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) $T(t = 30) = 159.7393$ grados Fahrenheit

B) $T(t = 30) = 198.1481$ grados Fahrenheit

C) $T(t = 30) = 177.5056$ grados Fahrenheit

D) $T(t = 30) = 222.1326$ grados Fahrenheit

Indicador de logro: Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

22. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 20 minutos, 250 grados. ¿En qué momento el pastel alcanza una temperatura de 100 grados Fahrenheit? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) En $t = 153.45$ minutos

B) En $t = 127.91$ minutos

C) En $t = 144.25$ minutos

D) En $t = 135.70$ minutos

Indicador de logro: Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

23. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía el 30% de la cantidad original de C-14. ¿Cuál es la edad del fósil? Considere que el periodo medio del C-14 radiactivo es aproximadamente de 5600 años.

A) 11200.57 años

B) 13003.46 años

C) 9727.50 años

D) 15327.79 años

Indicador de logro: Resolver problemas de datación mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

24. El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3.3 horas. Se analizó una porción de material y se encontró que contenía el 40% de la cantidad original. ¿En qué momento quedará el 5% del isótopo Pb-209?

A) 14.26 horas

B) 13.39 horas

C) 12.66 horas

D) 12.02 horas

Indicador de logro: Resolver problemas de datación mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

Anexo F. Instrumento de medición diagnóstico

1. Si $x + \frac{1}{x} = 5$. ¿Cuál es el valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

A) 25

B) 23

C) 24

D) 26

Indicador de logro: Resolver ecuaciones algebraicas
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Numérico

2. Si la cantidad de una sustancia radiactiva decae según la ley $N(t) = N_0 e^{-kt}$, donde N_0 es la cantidad inicial y k es una constante positiva, ¿cómo se podría expresar el tiempo t cuando la sustancia ha decaído a la mitad de su cantidad inicial?

A) $t = \frac{ln\,2}{k}$

B) $t = \frac{ln\,2}{2k}$

C) $t = \frac{k}{ln\,2}$

D) $t = 2k\;ln\,2$

Indicador de logro: Resolver enunciados de problemas sobre desintegración radiactiva.
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

3. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_0^1 xe^{2x}dx$?

A) $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$

B) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$

C) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

D) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

Indicador de logro: Resolver integrales definidas mediante la técnica de integración por partes.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Numérico

4. A la edad que tiene Rosita se le multiplica por 5, y a este resultado se le agrega 3. Si al dividir esta última suma entre 2 se obtiene 19. ¿Cuál es la edad de Rosita?

A) 7

B) 19

C) 6

D) 35

Indicador de logro: Resolver enunciados de problema mediante razonamiento matemático
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

5. Si la función f de x es la raíz cuadrada de la diferencia de x y 3 se le añade 5. ¿Cuál es su derivada?

A) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

B) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

C) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

D) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

Indicador de logro: Determinar la derivada de una función.
Registro inicial: Lenguaje común
Registro final: Algebraico

6. ¿Cuál es el valor de la integral $\int \frac{4}{x^2+9} dx$?

A) $\frac{4}{3} arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$

B) $4arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$

C) $4arctan(x) + C$

D) $\frac{4}{3} arctan(x) + C$

Indicador de logro: Resolver integrales indefinidas mediante la técnica de sustitución trigonométrica.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

7. ¿Cuál es el valor de la integral $\int x^2 senxdx$?

A) $x^2cosx + xsenx + 2cosx + C$

B) $-x^2cosx - 2xsenx + cosx + C$

C) $x^2cosx + 2xsenx - cosx + C$

D) $-x^2cosx + 2xsenx + 2cosx + C$

Indicador de logro: Resolver integrales indefinidas mediante la técnica de integración por partes.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

8. ¿Cuál es el valor de la integral $\int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$?

A) $ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + C$

B) $ln\, ln\, (x-2)$ $+ ln\, ln\, (x-3)$

C) $ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$

D) $(x-2)$ $-ln\, ln\, (x-3)$

Indicador de logro: Resolver integrales indefinidas mediante la técnica de fracciones parciales
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

9. ¿Cuál es el resultado de desarrollar la expresión $(2x-3)^3$?

A) $8x^3 - 24x^2 - 27x - 27$

B) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

C) $8x^3 + 36x^2 - 54x - 27$

D) $8x^3 + 24x^2 + 27x - 27$

Indicador de logro: Desarrollar binomios al cubo
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

10. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = x^2(e^{-2x} + 3x)$?

A) $y' = xe^{-2x}(2 - x) + 6x^2$

B) $y' = -2xe^{-2x}(1 - x) + 9x^2$

C) $y' = -xe^{-2x}(1 - 2x) + 6x^2$

D) $y' = 2xe^{-2x}(1 - x) + 9x^2$

Indicador de logro: Determinar la derivada de una función mediante la regla del producto.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

11. ¿Cuál es el resultado de desarrollar la expresión $(2x + 3)^2$?

A) $4x^2 + 12x + 9$

B) $4x^2 - 12x + 9$

C) $4x^2 + 6x + 6$

D) $4x^2 - 6x + 6$

Indicador de logro: Desarrollar binomios al cuadrado
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

12. ¿Cuál es el resultado de derivar la expresión $y = \frac{2x-3}{x^2}$?

A) $4x^2 + 12x + 9$

B) $4x^2 - 12x + 9$

C) $4x^2 + 6x + 6$

D) $4x^2 - 6x + 6$

Indicador de logro: Determinar la derivada de una función racional mediante la regla del cociente.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

13. ¿Cuál de las expresiones que se presentan es equivalente a □ = −□□|5□| + □□ |2|?

A) $y = ln|5x| + ln\,|2|$

B) $y = ln\,|2| - ln|5x|$

C) $y = ln\left|\frac{5x}{2}\right|$

D) $y = ln\left|\frac{2}{5x}\right|$

Indicador de logro: Simplificar expresiones algebraicas mediante la aplicación de propiedades de los logaritmos
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

14. Dada la expresión □ = □□ |5□|. ¿Cuál es el valor de □?

A) $No\ aplica$

B) $x\ ln\,|y| = 5$

C) $x = \frac{y}{ln\,|5|}$

D) $x = ln\left|\frac{5}{y}\right|$

Indicador de logro: Despejar la variable independiente de una función logarítmica natural.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

15. ¿Cuál de las fracciones es impropia?

A) $\frac{2}{15}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $7\frac{1}{2}$

D) $\frac{15}{2}$

Indicador de logro: Identificar una fracción impropia
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

16. ¿Cuál es el resultado de simplificar la expresión $x^2 \cdot x^5 + \frac{y^1}{y^2}$?

A) $x^{-3} + y^3$

B) $x^{10} + y$

C) $x^7 + y$

D) $x^7 + \frac{1}{y}$

Indicador de logro: Simplificar expresiones algebraicas
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

17. ¿Cuáles son los factores que conforman la expresión $x^3 - 4x + x + 6$?

A) $(x+3)(x-2)(x+1)$

B) $(x-3)(x-2)(x+1)$

C) $(x-3)(x+2)(x+1)$

D) $(x-3)(x-2)(x-1)$

Indicador de logro: Resolver polinomios mediante división sintética
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

18. ¿Cuál es la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ de la función $f(x, y) = 3\,x^3y - 2\,x^2y^2 + 3y$?

A) $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y - 4xy^2$

B) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 4xy^2$

C) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x^2y + 3$

D) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy^2 + 3y$

Indicador de logro: Determinar la derivada parcial respecto a x de una función multivariable.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

19. ¿Cuál es la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la función $f(x, y) = 3\,x^3y - 2\,x^2y^2 + 3y$?

A) $\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y - 4xy^2$

B) $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y - 4xy^2$

C) $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4x^2y + 3$

D) $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4xy^2 + 3y$

Indicador de logro: Resolver derivada parcial respecto a y de una función multivariable.
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

20. Si la población de una ciudad está dada por $P(t) = P_0e^{kt}$, donde P_0 es la cantidad poblacional inicial y k es una constante positiva, ¿Cuál es el valor del tiempo t cuando la población inicial es de 100 personas?

A) $t = \frac{ln|\frac{P(t)}{P_0}|}{k}$

B) $t = \frac{ln|\frac{100}{P(t)}|}{k}$

C) $t = ln|\frac{P(t)}{P_0}|$

D) $t = \frac{ln|\frac{P(t)}{100}|}{k}$

Indicador de logro: Resolver enunciados de problemas sobre dinámica poblacional.
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

Anexo G. Instrumento de medición posprueba

1. ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -8y$?

A) $ln\, ln\, |x| = -8y + C$
B) $ln\, ln\, |y| = 8 + C$
C) $ln|y| = -8x + C$
D) $ln\, ln\, |y| = 8x + C$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

2. ¿Cuál es la solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -2y$ sujeta a la condición $y(0) = 2$?

A) $ln\, ln\, (y) = ln(2) + 2x$
B) $ln\, ln\, (y) = ln(2) - 2x$
C) $ln\, ln\, (y) = -ln(2) - 2x$
D) $ln\, ln\, (y) = -ln(2) + 2x$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables con condición inicial
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

3. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 - e^{2t} + cos(t)$?

A) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$
B) $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$
C) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$
D) $F(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+1}$

Indicador de logro: Determinar la transformada de Laplace de una función
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

4. ¿Cuál es la transformada de Laplace inversa de la función $F(s) = \frac{1}{s^2-s-6}$?

A) $f(t) = \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$
B) $f(t) = -\frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{1}{7}e^{6t}$
C) $f(t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{3t}$
D) $f(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$

Indicador de logro: Determinar la transformada inversa de Laplace de una función
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

5. ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(x-1)$?
A) $ln|y| = \frac{x^2}{2} - x + c$
B) $ln|y| = x^2 - x + c$
C) $y = \frac{x^2}{2} - x + c$
D) $ln|y| = \frac{x^2}{2} + x + c$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de variables separables
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

6. Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + \frac{1}{x}y = x^2$¿Cuál es el factor integrante?
A) x
B) $\frac{1}{x}$
C) $ln\, ln\, x$
D) e^X

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de factor integrante
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

7. ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' - y = e^{-2x}$?

A) $y = c_1 e^{x} - \frac{1}{3} e^{-3x}$

B) $y = c_1 e^{-x} - e^{-2x}$

C) $y = c_1 e^{-x} - e^{32x}$

D) $y = c_1 e^{x} - \frac{1}{3} e^{-2x}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de factor integrante
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

8. ¿Cuál es la transformada de Laplace de la ecuación diferencial $y' - y = 1$ sujeta a la condición $y(0) = -1$?

A) $y(s) = \frac{1-s}{s(s-1)}$

B) $y(s) = \frac{1+s}{s(s-1)}$

C) $y(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}$

D) $y(s) = \frac{1+s}{s(s+1)}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales por medio de transformada de derivadas
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

9. ¿Cuáles son las fracciones simples que se obtienen en el proceso de resolución de la ecuación diferencial $y' - y = 2, \mathit{sujeta\ a\ la\ condición}\ y(0) = 1$ mediante transformada de Laplace?

A) $\frac{2}{s} + \frac{3}{s-1}$

B) $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1}$

C) $\frac{-2}{s} + \frac{3}{s+1}$

D) $\frac{2}{s} + \frac{3}{-s-1}$

Indicador de logro: Resolver ecuaciones diferenciales por medio de transformadas de Laplace
Registro inicial: Algebraico
Registro final: Algebraico

10. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la dinámica poblacional?

A) $\frac{dP}{dt} = k\,P^2$
B) $\frac{dP}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$
C) $\frac{dP}{dt} = k\,(P - P_m)$
D) $\frac{dP}{dt} = k\,P$

Indicador de logro: Identificar el modelo que define la dinámica poblacional
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

11. La población estudiantil de la Facultad de Ingeniería, Mexicali de la UABC crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial (en 2023) es de 4500 alumnos y aumenta el 20% en 10 años. Para predecir la población estudiantil del año 2030 es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k?

A) $k = -0.01823215568$
B) $k = 0.01823215568$
C) $k = 0.018246678$
D) $k = -0.018246678$

Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

12. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 500 individuos. Pasadas 12 horas, hay 550 especímenes. ¿Cuál será la cantidad de bacterias Sars-Covid19 transcurridas 24 horas?

A) $P(t = 24) = 605\ bacterias$
B) $P(t = 24) = 550\ bacterias$
C) $P(t = 24) = 575\ bacterias$
D) $P(t = 24) = 600\ bacterias$

Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

13. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias Sars-Covid19 en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Inicialmente se observa que hay 1000 individuos. Pasadas 12 horas, hay 1200 especímenes. ¿En qué momento habrá 1500 especímenes?

A) En $t = 18.54\ horas$
B) En $t = 21.80\ horas$
C) En $t = 51.05\ horas$
D) En $t = 26.69\ horas$
Indicador de logro: Resolver problemas de dinámica poblacional mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

14. Un tanque contiene 800 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela la situación física?

A) $A'(t) = 2 - \frac{A}{400}$
B) $A'(t) = 2 + \frac{A}{400}$
C) $A'(t) = -\frac{A}{400}$
D) $A'(t) = \frac{A}{400}$

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraica

15. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 10 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en un instante de tiempo t determinado?

A) $A(t) = 10e^{\frac{t}{500}}$
B) $A(t) = 10e^{\frac{-t}{500}}$
C) $A(t) = e^{\frac{t}{500}}$
D) $A(t) = e^{\frac{-t}{500}}$

Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

16. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 20 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿Cuál es la cantidad de sal que habrá en el tanque en $t = 60$ minutos?

A) $A(t) = 8.87$ libras de sal
B) $A(t) = 13.30$ libras de sal
C) $A(t) = 22.17$ libras de sal
D) $A(t) = 17.74$ libras de sal
Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

17. Un tanque contiene 1000 litros de agua en que se han disuelto 30 libras de sal y le entran 2 litros por minuto de agua pura, y de él sale líquido con el mismo flujo (2 litros por minuto). $A'(t)$ es la variación de la cantidad de sal respecto al tiempo y $A(t)$ es la cantidad de sal en un momento determinado. ¿En qué momento se alcanza una concentración de 25 libras de sal?

A) En $t = 111.57$ minutos
B) En $t = 91.16$ minutos
C) En $t = 178.34$ minutos
D) En $t = 202.73$ minutos
Indicador de logro: Resolver problemas de mezclas de tanques mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

18. ¿Cuál es la ecuación diferencial que modela matemáticamente la ley de enfriamiento de Newton?

A) $\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

B) $\frac{dT}{dt} = k\,(T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

C) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\,(T - T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

D) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}k\,(T + T_m)$ Donde k es la constante de proporcionalidad y T_m es la temperatura del medio

Indicador de logro: Identificar el modelo que define la ley de enfriamiento de Newton
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Algebraico

19. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados Fahrenheit. Después de 10 minutos, 200 grados. $T'(t)$ es la variación de la temperatura del pastel con respecto al tiempo y $T(t)$ la temperatura del pastel en un momento de tiempo t determinado. Para predecir la temperatura en un momento dado es necesario calcular previamente la constante de proporcionalidad k. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) $k = -0.05108256$
B) $k = 0.05108256$
C) $k = -0.02554128$
D) $k = 0.02554128$

Indicador de logro: Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

20. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 320 grados Fahrenheit. Después de 15 minutos, 250 grados. ¿Cuál es el valor de la temperatura en el tiempo $t = 30$ minutos? Considere que la temperatura del medio ambiente es de 50 grados Fahrenheit.

A) $T(t = 30) = 159.7393$ grados Fahrenheit
B) $T(t = 30) = 198.1481$ grados Fahrenheit
C) $T(t = 30) = 177.5056$ grados Fahrenheit
D) $T(t = 30) = 222.1326$ grados Fahrenheit

Indicador de logro: Resolver problemas de temperatura mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

21. Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía el 30% de la cantidad original de C-14. ¿Cuál es la edad del fósil? Considere que el periodo medio del C-14 radiactivo es aproximadamente de 5600 años.

A) 11200.57 años
B) 13003.46 años
C) 9727.50 años
D) 15327.79 años

Indicador de logro: Resolver problemas de datación mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

22. Una batería de 24 Volts se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es de 0.5 Henrios y la resistencia, de 10 Ohms. Determinar la corriente si el tiempo inicial es cero.

A) $i(0) = 2.4A$
B) $i(0) = 1A$
C) $i(0) = 0A$
D) $i(0) = -2.4A$

Indicador de logro: Resolver problemas de circuitos RL en serie mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

23. Un medicamento se administra por vía intravenosa a una velocidad de 15 mg/hora. Al mismo tiempo, el cuerpo metaboliza el medicamento a una velocidad de 80% de la cantidad presente en el cuerpo por hora. Si el medicamento se administra de forma indefinida y suponiendo que al principio no había nada de medicamento en el cuerpo, ¿cuál será la máxima cantidad de medicamento que habrá en el cuerpo?

A) $\boldsymbol{x}(\infty) = \infty\, mg$
B) $\boldsymbol{x}(\infty) = 18\, mg$
C) $\boldsymbol{x}(\infty) = 18.75\, mg$
D) $\boldsymbol{x}(\infty) = 0\, mg$

Indicador de logro: Resolver problemas de diseminación de un fármaco mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

24. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Al cabo de 4 días hay 50 estudiantes contagiados. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de alumnos no contagiados, determinemos el número de estudiantes contagiados que habrá después de 6 días.

A) $x(6) = 276.22172771388\, contagiados$
B) $x(6) = 381.63861306229\, contagiados$
C) $x(6) = 267.22172771388\, contagiados$
D) $x(6) = 75\, contagiados$

Indicador de logro: Resolver problemas de propagación de una enfermedad mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

25. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Al cabo de 4 días hay 50 estudiantes contagiados. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de alumnos no contagiados, determinemos la constante de proporcionalidad k.

A) $k = 0.00099057895$
B) $k = \ 0.00990578950$
C) $k = \ -0.00246279844$
D) $k = \ 0.002462798440$

Indicador de logro: Resolver problemas de propagación de una enfermedad mediante ecuaciones diferenciales de primer orden
Registro inicial: Lenguaje natural
Registro final: Numérico

Anexo H. Estrategia didáctica para abordar la dinámica poblacional

Título: Modelo Matemático Dinámica Poblacional, el caso de bacterias.

A través del tiempo ha sido necesario conocer el comportamiento del crecimiento de la población humana, con fines médicos y biológicos, estadísticos, gobernanza, entre otros. Uno de los primeros autores que buscó modelar a través de las matemáticas, fue el economista inglés Thomas Malthus en 1798. El modelo de Malthus mencionaba básicamente la suposición de que la razón con la que la población de un país en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo (Zill, 2013). Este modelo es general y consecuentemente aplicable también a virus, bacterias y otras poblaciones que no son estrictamente poblaciones de personas. Considerando entonces que, si existe cierta población presente en el tiempo, habrá más población tiempo después. En términos matemáticos, si $P(t)$ denota la población al tiempo t, entonces esta suposición se puede expresar como:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Donde k es una constante de proporcionalidad

Propósitos

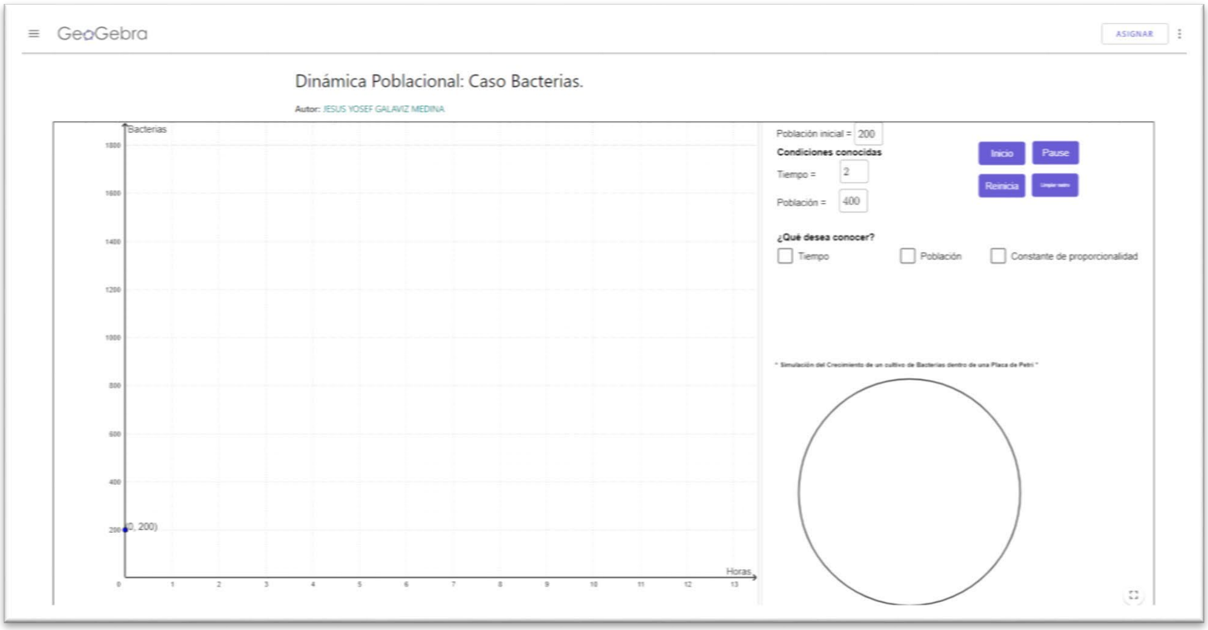
Identificar el comportamiento poblacional a través del crecimiento de la dinámica poblacional misma que es de suma importancia en lo que refiere a la dinámica compleja de crecimiento de algunas especies de bacterias, teniendo en cuenta parámetros de control. Mediante la simulación del sistema de apoyo tecnológico GeoGebra se podrá analizar gráficamente la función que representa este fenómeno.

Considere el siguiente problema:
En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de 2 horas se observa que hay 400 individuos y originalmente había 200 especímenes.

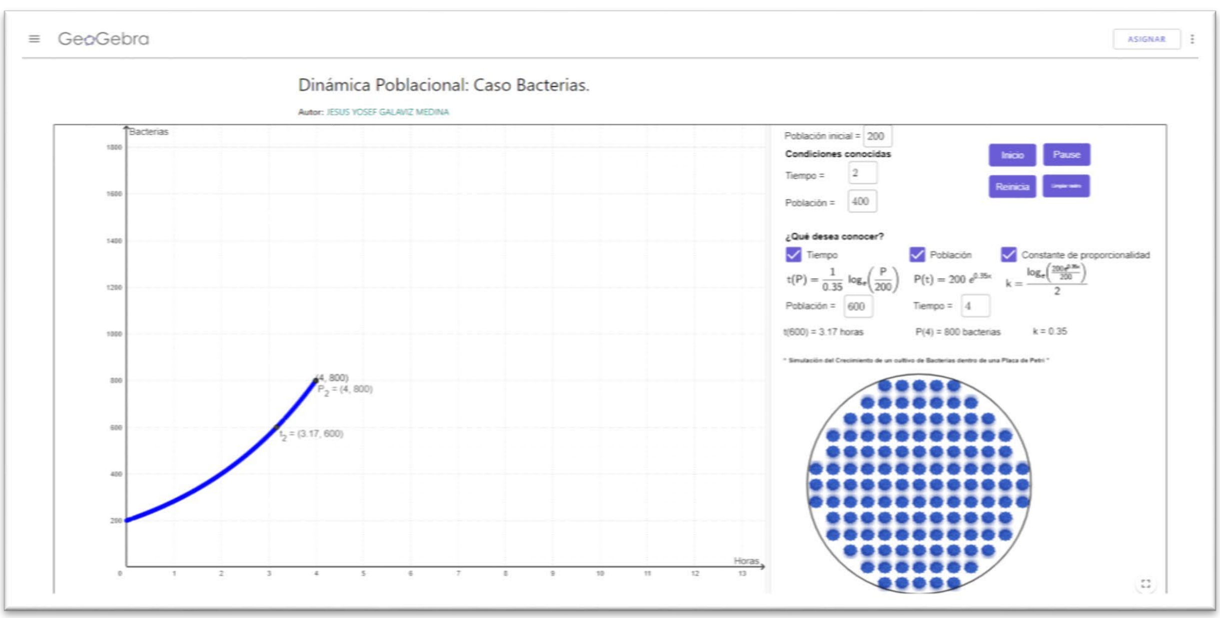
Instrucciones: Ejecute cada una de las acciones que se indican y responda a los cuestionamientos que se presentan.

1. Abra el siguiente enlace web de GeoGebra **https://www.geogebra.org/m/hhdhjp5z**.

Observe que se cuentan con dos vistas, a la cual llamaremos Vista Gráfica 1 y Vista Gráfica 2, en la segunda vista gráfica introduzca los datos que indica el problema. Esta misma vista cuenta con cuatro botones, (Inicio, Pausa, Reinicia y Limpiar rastro), el botón de "Inicio" hace que comience la simulación a la interpretación de los datos ingresados, el botón "Pause" hace que detenga la simulación en un momento dado, el botón "Reinicia" hace que regrese la simulación al punto de partida y finalmente el botón "Limpiar rastro" quita la trayectoria de la función en azul de la Vista Gráfica 1.



2. Seleccione las tres casillas horizontales.



Observe que también se cuenta con un menú de 3 botones a seleccionar indicando lo que desea conocer del problema en cuestión, ya sea el tiempo, la población y la constante de proporcionalidad, en estos despliega la función que lo caracteriza y el resultado de su solución. Finalmente, en esta vista se cuenta con la simulación de una Placa de Petri que contiene bacterias, interpretando el fenómeno de la dinámica poblacional en el caso de bacterias únicamente en su reproducción. En la primera vista gráfica podemos observar la interpretación de la función que describe a este problema en particular mostrando sus puntos y coordenadas respectivos.

3. De acuerdo a los datos del problema formule la ecuación diferencial correspondiente y obtenga la solución general de la ecuación diferencial paso a paso.

Respuesta:	La ecuación diferencial que modela la dinámica de población es: $$\frac{dP}{dt} = kP$$ Al separar la constante k de proporcionalidad queda: $$\frac{dP}{P} = kdt$$ A continuación, se muestra la operación de integración: $$\int \frac{dP}{P} = k \int dt$$ Al integrar ambas partes se obtiene: $$ln\|P\| = kt + C$$ Se aplica la función a ambas partes de la ecuación: $$e^{ln\|P\|} = e^{kt+C}$$ Se anula en el miembro izquierdo el logaritmo natural a partir de la aplicación de la función exponencial, también se aplican las propiedades de los exponentes y queda: $$P = e^{kt}e^{C}$$ Finalmente, la función de población bacteriana es: $$P(t) = Ce^{kt}$$

4. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación diferencial?

Respuesta:	Variables Separables.

5. Determine la constante de proporcionalidad k paso a paso:

Respuesta:	A partir de la solución particular de dinámica poblacional se despeja k $$P(t) = Ce^{kt}$$ Primero se pasa dividiendo C a P. $$\frac{P}{C} = e^{kt}$$ Se aplican logaritmos naturales a ambas partes $$ln\left|\frac{P}{C}\right| = lne^{kt}$$ Por la propiedad de los logaritmos se cancela el logaritmo natural y la exponencial $$ln\left|\frac{P}{C}\right| = kt$$ Luego pasamos dividiendo t al logaritmo natural y así tenemos despejada la función. $$k = \frac{ln\left|\frac{P}{C}\right|}{t}$$ Finalmente sustituimos el valor de las variables P, C y t obteniendo el valor de k. $$k = \frac{\ln\left|\frac{400}{200}\right|}{2}$$ El valor de la constante de proporcionalidad es: $$k = 0.34657359028$$

6. ¿Cuál es la fórmula que da solución al tiempo por conocer de este problema?

Respuesta:	De la función despejada de k, ahora se intercambia por t, ya que si t está dividiendo pasa multiplicando a k y k si está multiplicando pasa dividiendo al logaritmo natural. $$t = \frac{ln\left\|\frac{P}{C}\right\|}{k}$$

7. ¿Cuál es la solución particular del problema?

Respuesta:	$$P(t) = 200e^{0.34657359028t}$$

8. Continuando con el problema inicial ¿Cuál será la cantidad de bacterias en t = 4 horas?

Respuesta:	Se sustituye t = 4 horas en la solución particular $$P(t) = 200e^{0.34657359028(4)}$$ Resulta que: $$P(t) = 800\ bacterias$$

9. De acuerdo a la función y la simulación de las bacterias en la Placa de Petri, ¿Qué se puede concluir respecto a la población?

Respuesta:	Se trata de un incremento que se puede corroborar con el signo positivo de la constante de proporcionalidad.

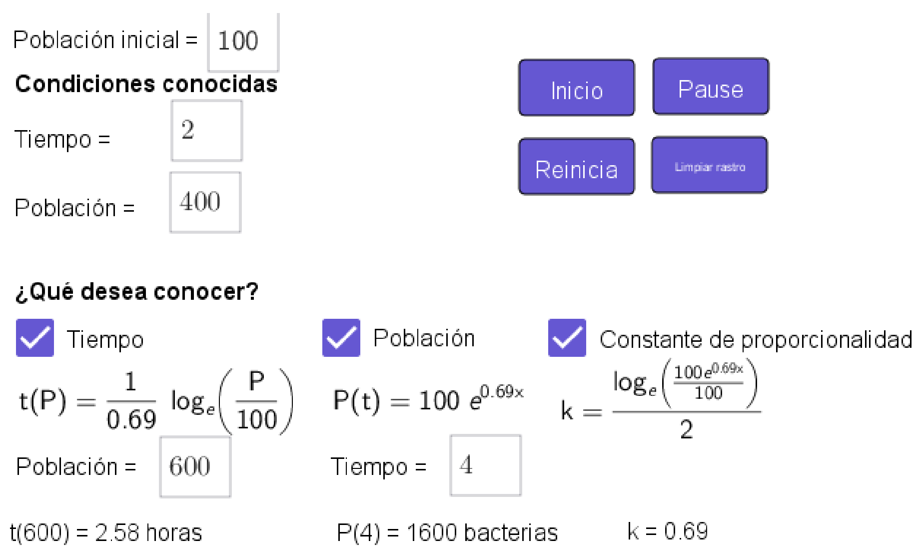
10. Si la población inicial de bacterias fuera de 100, ¿Cuál sería su constante de proporcionalidad?

Respuesta:	El cálculo es el siguiente: $$k = \frac{\ln\left\|\frac{400}{100}\right\|}{2}$$ $$k = 0.69314718056$$

11. ¿Cuál sería la cantidad de bacterias transcurridas las 4 horas?

Respuesta:	$P(t) = 100e^{0.69314718056(4)}$ Finalmente, el resultado es: $P(t) = 1600\ bacterias$

12. Coteje sus resultados con apoyo de la aplicación en GeoGebra. Utilice un recorte de la aplicación en GeoGebra

Respuesta:	

13. Describa las conclusiones pertinentes en relación con los resultados y lo obtenido con la aplicación en GeoGebra.

Respuesta:	Se puede concluir que la constante de proporcionalidad al ser positiva, se tendrá un incremento en este caso de bacterias, lo cual ocurrió en la aplicación y en los cálculos, si fuese negativo tendríamos un decaimiento. Así mismo se puede observar que la gráfica de la función obtenida al resolver la ecuación diferencial es una exponencial como lo muestra la propia función.

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES: AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH
DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO
GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF

TÍTULO: ESTRATEGIA DIDACTICA: APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN - EL CASO DE LAS BACTERIAS

RAMA: LITERARIA

TITULAR: UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A)

Con fundamento en el artículo 3° de la Ley Federal del Derecho de Autor el presente certificado ampara única y exclusivamente la obra original Literaria.

Con fundamento en lo establecido por el artículo 14 fracciones I y III de la Ley Federal del Derecho de Autor, no es objeto de protección como derecho de autor: las ideas en sí mismas, las fórmulas, soluciones, conceptos, métodos, sistemas, principios, descubrimientos, procesos e invenciones de cualquier tipo; los esquemas, planes o reglas para realizar actos mentales, juegos o negocios.

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312412800-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES: AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH
DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO
GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF

TÍTULO: APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN: EL CASO DE LAS BACTERIAS

RAMA: PROGRAMAS DE COMPUTACION

TITULAR: UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312394200-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

Anexo I. Estrategia didáctica para abordar un circuito RL

Título: Modelo matemático de un Circuito RL.

Propósito

La ecuación diferencial de un circuito RL en serie se utiliza didácticamente para conectar conceptos matemáticos y físicos, desarrollar habilidades de resolución de problemas, y comprender el comportamiento de resistores e inductores. Los estudiantes aprenden a aplicar ecuaciones diferenciales de primer orden a sistemas reales, interpretan soluciones, y usan herramientas de modelado y simulación. Además, la ecuación de un circuito en serie RL introduce fundamentos de sistemas de control y se integra con otras disciplinas, preparando a los estudiantes para aplicaciones prácticas en sus futuras carreras. Estrategias como clases interactivas, proyectos y el uso de tecnología fortalecen este aprendizaje.

Introducción:

Un circuito RL, que consiste en una resistencia (R) y una inductancia (L) conectadas en serie, se utiliza en diversas aplicaciones debido a las propiedades únicas de los componentes resistivos e inductivos.

Componentes Principales:

- **Resistencia (R)**: Un componente que disipa energía en forma de calor y reduce la corriente en el circuito. Se mide en ohmios (Ω).
- **Inductancia (L)**: Un componente que almacena energía en un campo magnético cuando pasa corriente a través de él. Se mide en henrios (H).

Leyes Fundamentales:

- **Ley de Ohm**: Relaciona el voltaje (E), la corriente (I) y la resistencia (R) a través de la ecuación $E = i \cdot R$
- **Ley de Faraday de la Inducción Electromagnética**: Describe cómo un cambio en el flujo magnético a través de un circuito induce una fuerza electromotriz (emf), dada por $E_L = L\,\frac{di}{dt}$, donde E_L es el voltaje a través del inductor y $\frac{di}{dt}$ es la tasa de cambio de corriente.

Ecuación del Circuito RL en Serie:

Aplicando la ley de Kirchhoff de voltajes a un circuito RL en serie, obtenemos:

$$E(t) = L\,\frac{di}{dt} + Ri$$

Esta ecuación diferencial describe cómo varía la corriente en el circuito en respuesta a un voltaje aplicado $E(t)$.

Análisis de la Respuesta del Circuito:

- **Respuesta Transitoria**: Describe cómo el circuito responde a cambios iniciales antes de alcanzar un estado estable. Esto involucra la solución de la ecuación diferencial para determinar cómo la corriente cambia con el tiempo.
- **Estado Estable**: Después de que el circuito ha alcanzado un equilibrio, la corriente se estabiliza, y la relación entre el voltaje y la corriente se describe de manera más simple por la ley de Ohm para corrientes constantes.

Constante de tiempo τ (Tau):

- τ es un indicador de la velocidad de reacción del circuito ante una perturbación. Cuanto mayor sea este valor, el valor final del estado de equilibrio se alcanzará más rápidamente.
- Para circuitos en serie RL su cálculo será de $\tau = \frac{L}{R}$
- La constante de tiempo es un dato muy importante en el análisis temporal (en el tiempo) de circuitos RL (resistencia y bobina).
- Es el tiempo necesario para que: Un inductor (bobina) esté siendo atravesado por el 63.2 % de la corriente total (máxima corriente), después de que una fuente de voltaje de corriente directa se haya conectado a un circuito RL.

Aplicaciones Prácticas:

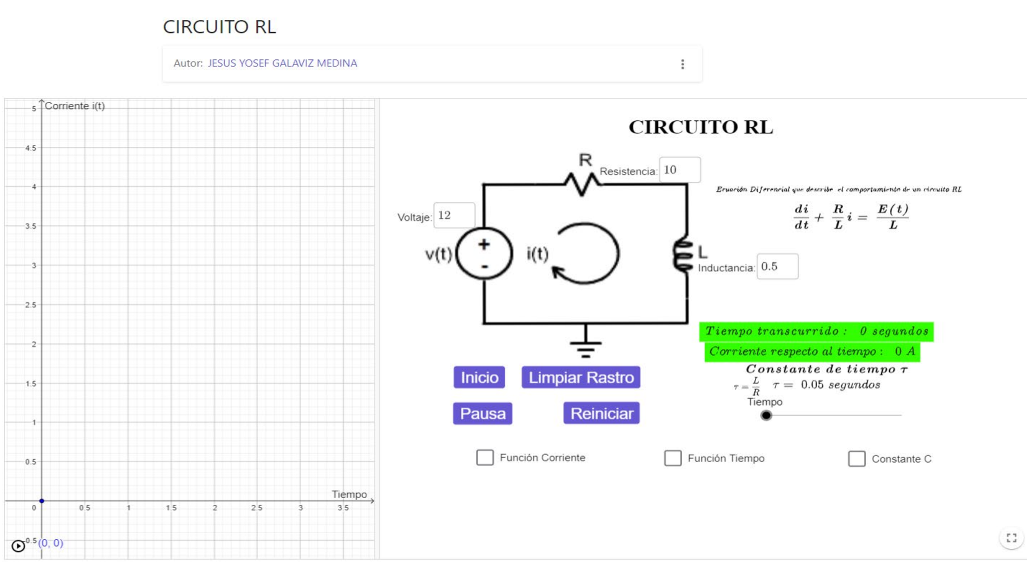
Los circuitos RL en serie se encuentran en muchas aplicaciones prácticas, como:

- **Filtros Electrónicos**: Utilizados para filtrar señales de alta frecuencia en sistemas de comunicación.
- **Control de Motores**: Ayudan a limitar la corriente de arranque en motores eléctricos.
- **Fuentes de Alimentación**: Empleados en el diseño de fuentes de alimentación conmutadas para regular la salida de corriente.

Considere el siguiente problema:

Una batería de 12 V se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es de 0.5 H y la resistencia, de 10 ohms. Determinar la corriente si el tiempo inicial es cero.

1. Abra el siguiente enlace web de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/hzvmadag



La Vista Gráfica 1 contiene un plano con un eje horizontal de Tiempo y un eje vertical de Corriente en donde se grafica la respuesta de un circuito RL en serie. En la Vista Gráfica 2 contiene un circuito RL en serie en donde posee casillas de entrada para el Voltaje, Resistencia e Inductancia mismas que pueden ser modificadas por el usuario. También se describe la ecuación diferencial del circuito. Así mismo en esta vista gráfica encontramos 4 botones en color morado, "Inicio" sirve para iniciar la simulación de la respuesta del circuito la cual se grafica en la Vista Gráfica 1, el botón de “Pausa” detiene la simulación en el momento que lo desee, el botón de “Limpiar Rastro” permite borrar la gráfica en la Vista Gráfica 1 y finalmente el botón de “Reiniciar” regresa la simulación del circuito a un tiempo cero. Además, en tiempo real se puede observar el tiempo y corriente transcurrida marcado en color verde y el cálculo de la constante de tiempo τ (Tau) que puede manipularse por medio de un deslizador que posiciona los puntos de τ en la respuesta del circuito. En una última instancia se cuenta con tres casillas a seleccionar en donde se muestra la función del circuito respecto a la corriente, la función respecto al tiempo y la constante C que se obtiene de la ecuación diferencial de primer orden.

2. Presione el botón “Inicio”, para encender el circuito. ¿Qué sucede?

Respuesta:	Comienza a dibujarse una gráfica exponencial que con el paso del tiempo se estabiliza.

3. Presione el botón “Pausa”, después el botón “Reiniciar” y finalmente el botón “Limpiar Rastro”. Vuelva a presionar el botón “Inicio” y observe. ¿En qué momento la corriente es estable?

Respuesta:	La corriente es estable en el momento 0.28 segundos marcando 1.2 A.

4. Ahora presione el deslizador Tiempo y con las teclas de las flechas hacia arriba y a la derecha, teclee de uno en uno ¿Cuántos puntos rojos se marcaron y en qué momento se marcó el primero?

Respuesta:	5 puntos rojos y el primero se marca a los 0.05 segundos.

5. ¿Los puntos rojos en la gráfica que representan?

Respuesta:	La velocidad de reacción del circuito ante una perturbación.

6. Ahora de acuerdo al comportamiento de este circuito, conociendo la ecuación diferencial. Desarrolle paso a paso.

Respuesta:	A partir de la ecuación diferencial que modela un circuito RL se le aplica el método de Factor Integrante pero primeramente se deja en la forma estándar dividiendo a todos los términos por L: $$E(t) = L\,\frac{di}{dt} + Ri$$ Luego:

	$$\frac{E}{L} = \frac{L}{L}\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i$$ Al dividir todo con L la ecuación diferencial queda de la siguiente manera: $$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i \ = \ \frac{E}{L}$$ Ahora ya se puede aplicar el factor integrante encontrando la función P(t) $$P(t) = \frac{R}{L}$$ y resolviendo el Factor Integrante "u" $$u = e^{\int \frac{R}{L}dt}$$ En consecuencia, se tiene que: $$u = e^{\frac{R}{L}t}$$ Se aplica la fórmula del Factor Integrante donde este se multiplica el valor de i del lado izquierdo y a $\frac{E}{L}$ del lado derecho: $$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{R}{L}t}\ i\right] = \frac{E}{L}\ e^{\frac{R}{L}t}$$ Ahora se integra a ambas partes de la ecuación, de donde se obtiene que: $$e^{\frac{R}{L}t}\ i = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C$$ Al despejar la función i se obtiene que: $$i = \frac{\frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t}}{e^{\frac{R}{L}t}} + \frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$ Al simplificar y escribir en notación funcional se tiene: $$i(t) = \frac{E}{R} + \frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

7. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación diferencial?

Respuesta:	El método del factor integrante

8. ¿Cuál es el factor integrante?

Respuesta:	El factor integrante es: $$e^{\frac{R}{L}t}$$

9. ¿Cuál es la función resultante?

Respuesta:	$$i(t) = \frac{E}{R} + \frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

10. Despeje el tiempo de la función anterior.

Respuesta:	$$t = -\frac{ln\left\|\frac{i-\frac{E}{R}}{C}\right\|}{R}$$

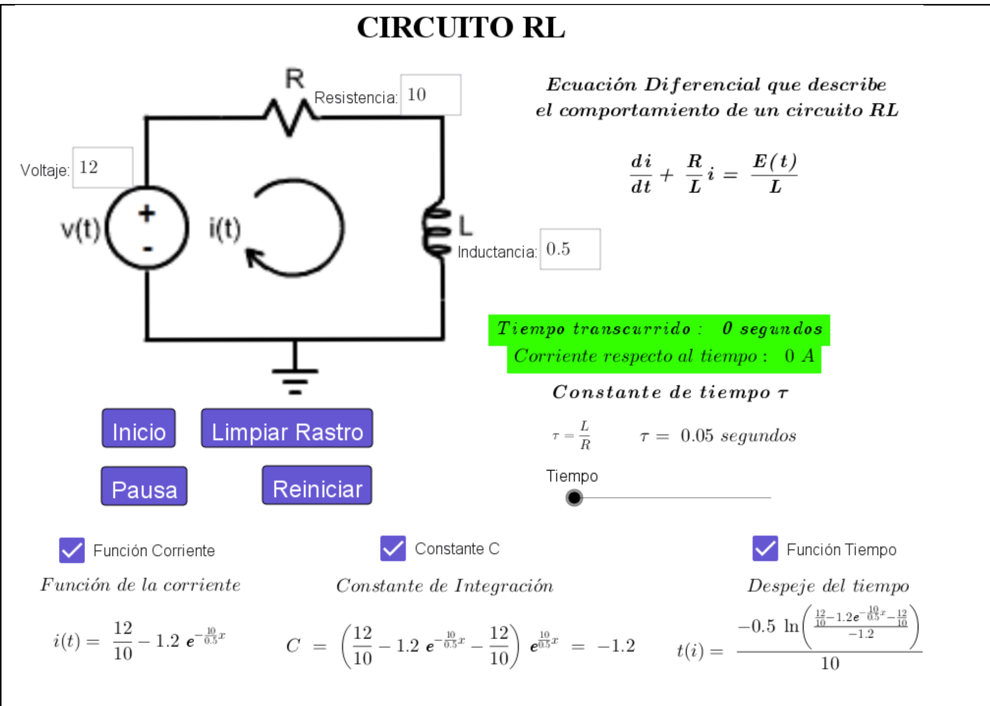
11. ¿Cuál es el valor de la constante C?

Respuesta:	Primero se despeja la constante de la ecuación $$i(t) = \frac{E}{R} + \frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$ Lo cual resulta en: $$C = \left(i - \frac{E}{R}\right)e^{\frac{R}{L}t}$$ Al sustituir los valores conocidos se obtiene que: $$C = \left((0) - \frac{(12)}{10}\right)e^{\frac{10}{0.5}(0)}$$ Por lo tanto: $$C = -1.2$$

12. ¿Cuál es la solución particular resultante?

Respuesta:	$$i(t) = 1.2 - 1.2e^{-20t}$$

13. Ahora seleccione las 3 casillas en blanco de la Vista Gráfica 2. ¿Coinciden sus cálculos con los mostrados en la aplicación? Utiliza un recorte de la aplicación como evidencia.

Respuesta:	

14. ¿Cuál es la parte transitoria y estable de la función de la corriente?

Respuesta:	La parte transitoria es: $$\frac{C}{e^{\frac{R}{L}t}}$$ La parte estable es: $$\frac{E}{R}$$

15. ¿Qué tienen en común la función del factor integrante y la función de la parte transitoria?

Respuesta:	Son funciones exponenciales

16. ¿Qué sucede si el voltaje aumenta al doble considerando los valores iniciales en la aplicación?

Respuesta:	La corriente aumenta el doble.

17. ¿Cuál ha sido su experiencia con el manejo de una aplicación enfocada en la respuesta de encendido (inicio) de un circuito RL en serie con ecuaciones diferenciales de primer orden?

Respuesta:	Se logra entender de mejor manera los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden por medio de un caso particular, aplicado en la vida real. Pues no solo es resolver la ecuación diferencial, sino que ahora se sabe el significado de las soluciones, que en este caso fue la respuesta de un circuito en RL en serie en el cual la solución brinda una parte estable y una transitoria del circuito en cuestión, además, se puede observar el comportamiento por medio de la simulación en GeoGebra.

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES: AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH
DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO
GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF

TÍTULO: ESTRATEGIA DIDACTICA: APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN-EL CASO DEL CIRCUITO RL

RAMA: LITERARIA

TITULAR: UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (DON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en el artículo 3° de la Ley Federal del Derecho de Autor el presente certificado ampara única y exclusivamente la obra original Literaria.

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092711021300-01

Ciudad de México, a 03 de octubre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES:	AGUILAR SALINAS WENDOILYN ELIZABETH DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF
TÍTULO:	APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN: EL CASO DEL CIRCUITO RL
RAMA:	PROGRAMAS DE COMPUTACION
TITULAR:	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312400500-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

Anexo J. Estrategia didáctica para abordar diseminación de un fármaco

Título: Modelo matemático de la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo.

Propósito

El propósito de esta estrategia didáctica es facilitar la comprensión de conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales de primer orden, específicamente el proceso de diseminación de medicamentos en el torrente sanguíneo, utilizando la farmacocinética. Se busca que los estudiantes comprendan cómo estas ecuaciones modelan la absorción, distribución y eliminación de medicamentos en el cuerpo humano, y cómo esto tiene aplicación en la vida real como lo es en tratamientos farmacológicos. Además, se pretende fomentar la participación activa y el aprendizaje colaborativo, creando un ambiente dinámico y enriquecedor para todos los alumnos.

Introducción:

En el campo de la farmacocinética, el estudio de la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo es fundamental para comprender cómo los fármacos interactúan con el organismo y cómo se distribuyen a través del cuerpo para ejercer sus efectos. El modelo matemático utilizado para describir este proceso es mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas ecuaciones permiten analizar cómo la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo varía en función del tiempo, así permite saber la tasa de administración del fármaco, la velocidad de eliminación del mismo por parte del organismo, y la capacidad de distribución en el cuerpo.

La formulación y solución de ecuaciones diferenciales de primer orden para modelar la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo, aquí se considera la administración y velocidad con la que se administra el medicamento por vía intravenosa y la velocidad con la que el cuerpo la metaboliza. En la práctica de la vida real pueden proporcionar información crucial para el diseño de regímenes de dosificación óptimos, la predicción de concentraciones plasmáticas y la evaluación de la eficacia y seguridad de los tratamientos farmacológicos.

La ecuación que lo modela es:

$$\frac{dx}{dt} = r - kx$$

Donde:

r es la velocidad de entrada del medicamento.

k es la velocidad en porcentaje con la que el cuerpo metaboliza el medicamento.

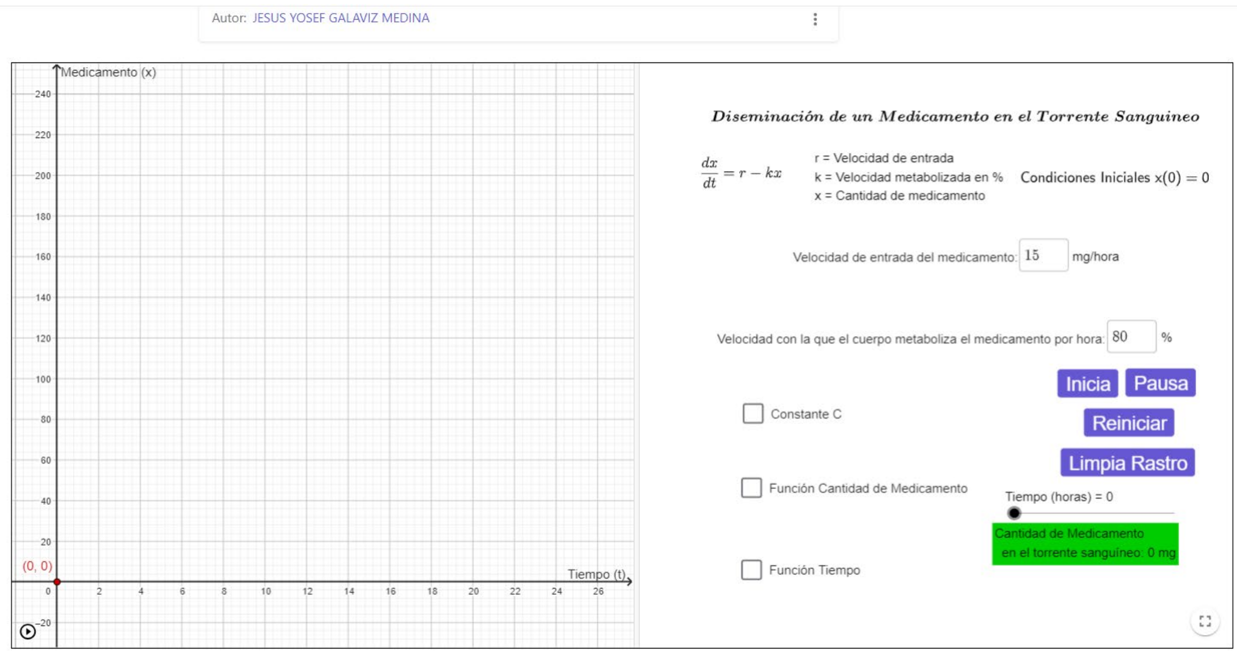
x es la cantidad de medicamento suministrado.

Considere el siguiente problema:

Un medicamento se administra por vía intravenosa a una velocidad de 15 mg/hora. Al mismo tiempo, el cuerpo metaboliza el medicamento a una velocidad de 80% de la cantidad presente en el cuerpo por hora.

Si el medicamento se administra de forma indefinida y suponiendo que al principio no había nada de medicamento en el cuerpo, ¿cuál será la máxima cantidad de medicamento que habrá en el cuerpo?

1.- Abra el siguiente enlace web de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/qzm8f7md



En la Vista Gráfica 1 está un plano cartesiano en donde puede dibujarse la función de la diseminación de un fármaco en el torrente sanguíneo. En la Vista Gráfica 2 está la ecuación diferencial que modela este problema, el significado de cada término y la condición inicial.

También están dos casillas de entrada, una sobre el valor de la velocidad de entrada del medicamento dado en mg/hora y otra de la velocidad con la que el cuerpo metaboliza el medicamento dado en horas. Abajo se encontrarán 4 botones, el de inicio para empezar la simulación, el de pausa para detener la simulación, el botón de reiniciar para comenzar la función desde el origen y limpiar rastro para borrar el gráfico. Además, se cuenta con un deslizador para poder manipular el tiempo manualmente. En el recuadro en verde se puede observar los valores en tiempo real de la simulación y finalmente hay 3 casillas para conocer la constante C, la función dada al desarrollar la ecuación diferencial y la variable tiempo despejada de esa función.

2. Presione el botón “Inicio”, ¿Qué sucede?

Respuesta:	Comienza a generarse una gráfica.

3. Presione el botón “Pausa”, después el botón “Reiniciar” y finalmente el botón “Limpiar Rastro”. Vuelva a presionar el botón “Inicio” y observe. ¿En qué momento la gráfica es estable?

Respuesta:	En 10.3 horas

4. Ahora manipule el deslizador Tiempo y con las teclas de las flechas hacia arriba y a la derecha, teclee de uno en uno, ¿Qué observa en la gráfica?

Respuesta:	Se manipula la gráfica en el punto que desee.

5. ¿Por qué tiene ese valor la condición inicial?

Respuesta:	No hay medicamento suministrado en el torrente sanguíneo.

6. De acuerdo al comportamiento de la diseminación de un medicamento en el torrente sanguíneo y conociendo la ecuación diferencial, Desarrolle paso a paso.

Respuesta:	Para desarrollar la ecuación diferencial existen dos formas de hacerlo, por el método de Factor Integrante y el método de Variables Separables. Primero se desarrolla la ecuación diferencial de diseminación de un fármaco por el método de Factor Integrante. $$\frac{dx}{dt} = r - kx$$ Se obtiene P(t) de la ecuación para encontrar el Factor Integrante: $$u = e^{\int k\, dt} = e^{kt}$$ Una vez encontrado el Factor Integrante se reordena la ecuación diferencial y se multiplica el factor integrante por “x” en el lado izquierdo y del lado derecho por “r”. $$\frac{d}{dt}[e^{kt}x] = re^{kt}$$

	Ahora se integra en ambas partes de la ecuación $$\int d[e^{kt}x] = r \int e^{kt}\,dt$$ Con lo cual se obtiene: $$e^{kt}x = \frac{r}{k}\,e^{kt} + C$$ Finalmente, se procede a despejar la variable x $$x = \frac{r}{k} + Ce^{-kt}$$ También se puede resolver por el método de variables separables $$\frac{dx}{dt} = r - kx$$ Primero se adecua la ecuación diferencial factorizando el signo del lado derecho de la misma. $$\frac{dx}{dt} = -(-r + kx)$$ Segundo, se separan variables iguales de un lado e iguales distintas del otro. $$\frac{dx}{(-r + kx)} = -dt$$ Tercero, se integra a ambos lados de la ecuación para resolver la ecuación. $$\int \frac{dx}{kx - r} = -\int dt$$ La parte derecha de la ecuación se resuelve fácilmente ya que es directa, pero la parte izquierda se hace cambio de variable para resolver. $$\int \frac{du}{ku} = -t + C$$ La parte izquierda de la ecuación es un logaritmo natural, pero para poder encontrar la función es necesario hacer algunos tratamientos algebraicos. $$\frac{1}{k} ln\|kx - r\| = -t + C$$

	Se pasa k que está dividiendo al logaritmo del otro lado para multiplicar a los dos términos del extremo derecho. $ln\|kx - r\| = -kt + Ck$ Aquí como "k" es una constante y "C" también, estas dos podemos interpretarlas como una sola constante llamada "C". $ln\|kx - r\| = -kt + C$ Ahora se aplican propiedades de los logaritmos para así poder cancelar el logaritmo natural. $e^{ln\|kx-r\|} = e^{-kt+C}$ Al aplicar propiedades de los exponentes queda: $kx - r = e^{-kt}\, e^{C}$ Lo cual puede escribirse: $kx - r = Ce^{-kt}$ Se pasa la constante r al lado derecho $kx = r + Ce^{-kt}$ Al dividir por la constante k y simplificar se obtiene: $x = \frac{r}{k} + C\, e^{-kt}$

7. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación diferencial?

Respuesta:	Factor Integrante o Variables Separables

8. ¿Cuál es la solución general de la ecuación?

Respuesta:	$x(t) = \frac{r}{k} + Ce^{-kt}$

9. Despeje el tiempo de la función anterior

Respuesta:	$$t = \frac{\ln\left\lvert\frac{x - \frac{r}{k}}{C}\right\rvert}{-k}$$

10. ¿Cuál es el valor de la constante C?

Respuesta:	$$C = \frac{x}{e^{-kt}} - \frac{r}{ke^{-kt}}$$ Al sustituir los valores de las constantes se obtiene que: $$C = \frac{(0)}{e^{-(0.8)(0)}} - \frac{15}{(0.8)e^{-(0.8)(0)}} = -18.75$$

11. ¿Cuál es la solución particular de la ecuación?

Respuesta:	$$x(t) = 18.75 - 18.75e^{-0.8t}$$

12. Ahora seleccione las 3 casillas en blanco de la Vista Gráfica 2. ¿Coinciden sus cálculos con los mostrados en la aplicación?

Respuesta:	Si

13. ¿Después de que se estabiliza la gráfica que sucede con el medicamento en el torrente sanguíneo?

Respuesta:	Se metaboliza todo el medicamento suministrado.

14. Presione el botón “Pause”, luego el botón “Limpiar Rastro” y “Reiniciar”. Ahora reemplace la velocidad de entrada del medicamento a 20mg/hora y el porcentaje con la que el cuerpo metaboliza el medicamento a 100% ¿A partir de qué momento el medicamento ya se metaboliza completamente?

Respuesta:	A partir de las 8.3 horas.

15. Con sus propias palabras, describa qué le pareció esta actividad.

Respuesta:	Es una actividad que nos permite ver más allá de solo resolver la ecuación diferencial de primer orden, ya que en este caso se podía resolver por dos métodos diferentes. Además, está siendo aplicado a un caso de la vida real como lo es en el área de la salud y el manejo de fármacos, ver la ecuación con su comportamiento por medio de una simulación en GeoGebra es más enriquecedor, lo que nos permite comprender el verdadero uso de las ecuaciones diferenciales.

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES:	AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF
TÍTULO:	APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN: EL CASO DE LA DISEMINACION DE UN MEDICAMENTO EN EL TORRENTE SANGUINEO
RAMA:	PROGRAMAS DE COMPUTACION
TITULAR:	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312403100-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

Anexo K. Estrategia didáctica para abordar la propagación de una enfermedad

Título: Modelo matemático de propagación de una enfermedad.

Propósito

El propósito de esta estrategia didáctica es facilitar la comprensión de conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales de primer orden, específicamente el proceso de la propagación de una enfermedad a través del modelo matemático que lo representa. Además, tiene como objetivo principal enseñar a los estudiantes cómo las matemáticas pueden ser utilizadas para entender cómo es que las enfermedades se propagan en una población de una forma exponencial. Al aprender sobre este modelo, los estudiantes no sólo desarrollan habilidades matemáticas, sino que también adquieren conocimientos aplicados en la vida diaria en otras áreas del conocimiento como lo es la salud pública. También, esta estrategia fomenta el pensamiento crítico al desafiar a los estudiantes a analizar y resolver problemas complejos relacionados con la salud y la sociedad.

Introducción:

El modelo matemático de la propagación de una enfermedad es una herramienta muy útil en la comprensión y predicción del comportamiento de enfermedades infecciosas en una población. Desde epidemias históricas hasta pandemias contemporáneas, entender cómo se propaga una enfermedad es crucial para diseñar estrategias efectivas de prevención y control, como lo fue la pandemia por COVID-19. Este modelo utiliza principios matemáticos, especialmente ecuaciones diferenciales, para describir la dinámica de la enfermedad en términos de la interacción entre individuos. A través de este enfoque, se pueden explorar diferentes escenarios y evaluar el impacto de intervenciones como la vacunación, el distanciamiento social y el tratamiento médico.

La ecuación que modela este fenómeno para muestras mayores a 30 está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n - x)$$

Donde:

k es la constante de proporcionalidad.

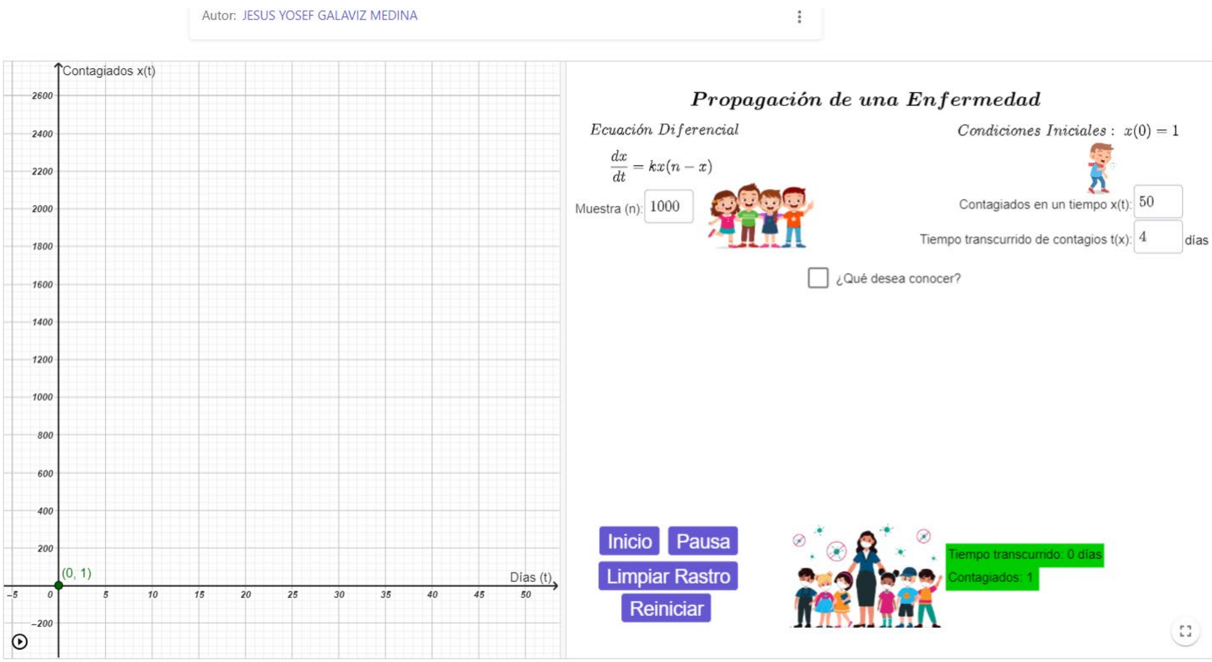
x es la cantidad de contagiados.

n es la muestra de una población.

Considere el siguiente problema:

Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Al cabo de 4 días hay 50 estudiantes contagiados. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de alumnos no contagiados, determinemos el número de estudiantes contagiados que habrá después de 6 días.

1.- Abra el siguiente enlace web de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/wsqq8fcg



La Vista Gráfica 1 es un plano cartesiano en donde se puede observar la gráfica de la función de la propagación de una enfermedad, al graficarse tendrá una coordenada indicando los valores. En la vista Gráfica 2 está la ecuación diferencial que modela la propagación de una enfermedad y sus valores iniciales. Además, se puede ver una casilla de entrada llamada Muestra (n) la cual es la población que aún no está contagiada, luego se encuentran dos casillas de entrada con los valores que nos da el problema a considerar. Debajo hay una casilla de selección llamada "¿Qué desea conocer?", al presionar esta casilla se despliegan seis opciones más en donde se puede seleccionar y conocer las funciones y fórmulas resultantes del desarrollo de la ecuación diferencial, así como los valores arrojados.

En las opciones contagiados en t(x) días y tiempo en que se contagia x(t) habrá una casilla para que se pueda evaluar con otros valores y cotejar resultados. También cuenta con cuatro botones, uno de inicio que da comienzo a la simulación, un botón de pausa que detiene la simulación, otro botón para limpiar rastro que borra el gráfico en la vista gráfica 1 y finalmente el botón de reiniciar que regresa al origen a la función. A un lado se encuentra un recuadro en verde para observar los valores en tiempo real de la simulación.

2. Presione el botón "Inicio" y observe la Vista Gráfica 1 y de la Vista Gráfica 2 el recuadro verde, ¿Qué sucede?

Respuesta:	Comienza a generarse una gráfica.

3. Presione el botón “Pausa”, después el botón “Reiniciar” y finalmente el botón “Limpiar Rastro”. Vuelva a presionar el botón “Inicio” y observe. ¿En qué momento la gráfica es estable?

Respuesta:	A los 38 días.

4. ¿Por qué cree que en cierto punto la gráfica es estable?

Respuesta:	Porque ya no hay más estudiantes que se infecten.

5. Observe la aplicación en GeoGebra, encuentre la ecuación diferencial y las condiciones iniciales y escríbalas aquí.

Respuesta:	$\frac{dx}{dt} = kx(n-x)$, $x(0) = 1$, $x(t) = 50$, $t(x) = 4$

6. Ahora de acuerdo al comportamiento de la propagación de una enfermedad, conociendo la ecuación diferencial. Desarrolle paso a paso.

Respuesta:	A partir de la ecuación diferencial de la propagación de una enfermedad $$\frac{dx}{dt} = kx(n-x)$$ Por medio del método de variables separables se ajusta la ecuación diferencial. $$\frac{dx}{x(n-x)} = kdt$$ Para poderla resolver, se aplica la integración a ambas partes de la ecuación. $$\int \frac{dx}{x(n-x)} = k \int dt$$ Se resuelve primeramente el extremo derecho de la ecuación ya que es más sencillo $$\int \frac{dx}{x(n-x)} = kt + C$$ Ahora el extremo izquierdo se resolverá la integración por fracciones parciales $$\int \frac{dx}{x(n-x)}$$ La integral al no poder resolverse directamente se recurre a las fracciones parciales en donde se observa que el denominador tiene factores lineales distintos

	por lo que la estrategia es la siguiente: $$\frac{1}{x(n-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(n-x)}$$ Al desarrollar y simplificar se tiene: $$1=A(n-x)+Bx$$ Se recurre a valores estratégicos como $x=n\ \ y\ \ x=0$ En consecuencia, resulta que: $A=\frac{1}{n}\ \ y\ \ B=\frac{1}{n}$ Ahora puede escribirse que: $$\int\frac{dx}{x(n-x)}=\frac{1}{n}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{n}\int\frac{1}{(n-x)}dx$$ Con lo cual resulta: $$\frac{1}{n}ln\lvert x\rvert-\frac{1}{n}ln\lvert x-n\rvert=kt+C$$ Ahora sí por medio de la propiedad de los logaritmos se adecua la expresión de tal manera que podemos reducir la expresión. $$\frac{1}{n}\left[ln\left\lvert\frac{x}{n-x}\right\rvert\right]=kt+C$$ Ahora la expresión puede escribirse: $$\left[ln\left\lvert\frac{x}{n-x}\right\rvert\right]=nkt+nC$$ Como n y C son números se puede escribir: $$\left[ln\left\lvert\frac{x}{n-x}\right\rvert\right]=nkt+C$$ Al aplicar e a ambos lados de la expresión se tiene que: $$\frac{x}{n-x}=e^{nkt+C}$$ Al aplicar las propiedades de los exponentes resulta: $$\frac{x}{n-x}=Ce^{nkt}$$

7. ¿Qué método utilizó para resolver la ecuación diferencial?

Respuesta:	Variables Separables

8. ¿Cuál es la función resultante?

Respuesta:	$$\frac{x}{n-x} = Ce^{nkt}$$

9. Encuentre el valor de la constante C.

Respuesta:	Se parte de la expresión: $$\frac{x}{n-x} = Ce^{nkt}$$ Se despeja la constante C $$C = \frac{x}{e^{nkt}(n-x)}$$ Se sustituyen los valores de las constantes conocidas $$C = \frac{1}{e^{1000k(0)}(1000-1)}$$ Finalmente, el valor de la constante es: $$C = \frac{1}{999} = 0.001001001$$

10. ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad k?

Respuesta:	Se utiliza la expresión $$k = \frac{ln\left\|\frac{x}{C(n-x)}\right\|}{nt}$$ Se sustituyen los valores conocidos y resulta $$k = \frac{ln\left\|\frac{50}{\frac{1}{999}(1000-50)}\right\|}{(1000)(4)} = 0.0009905789$$

11. Ahora seleccione la casilla "¿Qué desea conocer?" de la Vista Gráfica 2 y verifique sus cálculos con lo mostrado en las demás casillas. ¿Coinciden sus cálculos con los mostrados en la aplicación?

Respuesta:	Si.

12. Dejando seleccionadas todas las casillas en la Vista Gráfica 2. ¿Qué sucede si la muestra "n" ahora la reemplaza por el doble de la inicial?

Respuesta:	La constante C y la constante de proporcionalidad k cambian su valor por C=0.0005002501 y k= 0.0004921051

13. Ahora en la opción contagiados en t(x) días, reemplace el valor de la casilla y coloque 6, ¿Qué resultado le arrojó?

Respuesta:	276 contagiados

14. Ahora en la opción Tiempo en que se contagia x(t), reemplace el valor de la casilla y coloque 1000. ¿Qué valor le arroja y por qué?

Respuesta:	Infinito, debido a que ya no hay más estudiantes por contagiar.

15. Con sus propias palabras, describa qué le pareció esta actividad.

Respuesta:	Es una actividad con un contexto que nos permite ver más allá de solo resolver la ecuación diferencial de primer orden ya que está siendo aplicado a un caso de la vida real como lo es en el área de la salud y la propagación de una enfermedad, lo que nos recuerda a la epidemia por el SARS-COVID19, ver la ecuación con su comportamiento por medio de una simulación en GeoGebra es más enriquecedor, pues permite ver su respuesta en el tiempo y hacer predicciones, lo que nos da una ventaja en el verdadero uso de las ecuaciones diferenciales.

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES: AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH
DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO
GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF

TÍTULO: ESTRATEGIA DIDACTICA: APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN - EL CASO DE LA PROPAGACION DE UNA ENFERMEDAD

RAMA: LITERARIA

TITULAR: UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en el artículo 3° de la Ley Federal del Derecho de Autor el presente certificado ampara única y exclusivamente la obra original Literaria.

Con fundamento en lo establecido por el artículo 14 fracciones I y III de la Ley Federal del Derecho de Autor, no es objeto de protección como derecho de autor: las ideas en sí mismas, las fórmulas, soluciones, conceptos, métodos, sistemas, principios, descubrimientos, procesos e invenciones de cualquier tipo; los esquemas, planes o reglas para realizar actos mentales, juegos o negocios.

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312410000-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES:	AGUILAR SALINAS WENDOLYN ELIZABETH DE LAS FUENTES LARA MAXIMILIANO GALAVIZ MEDINA JESUS YOSEF
TÍTULO:	APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN: EL CASO DE LA PROPAGACION DE UNA ENFERMEDAD
RAMA:	PROGRAMAS DE COMPUTACION
TITULAR:	UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA (CON FUNDAMENTO EN EL ARTICULO 83 DE LA L.F.D.A.)

Con fundamento en lo establecido por el artículo 168 de la Ley Federal del Derecho de Autor, las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Con fundamento en los artículos 2, 208, 209 fracción III y 211 de la Ley Federal del Derecho de Autor; artículos 64, 103 fracción IV y 104 del Reglamento de la Ley Federal del Derecho de Autor; y artículos 1, 3 fracción I, 4, 8 fracción I y 9 del Reglamento Interior de Instituto Nacional del Derecho de Autor, se expide el presente certificado.

Número de Registro: 03-2024-092312391900-01

Ciudad de México, a 26 de septiembre de 2024

EL DIRECTOR DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

JESÚS PARETS GÓMEZ

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE CULTURA
INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
DIRECCIÓN DEL REGISTRO PÚBLICO DEL DERECHO DE AUTOR