

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**INSTITUTO DE INGENIERÍA**

**MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA**



**MÉTODO NUMÉRICO PARA LA DETECCIÓN DE PAQUETES DE PULSOS, EN BASE AL ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DETERMINADAS E INDETERMINADAS**

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS**

**PRESENTA:**

**MARTÍN BECT PARRA**

**DIRECTOR:**

**DR. OLEG SERGIYENKO**

**CODIRECTORA:**

**DRA. VERA TYRSA**

Mexicali, Baja California

Agosto de 2022



**RESUMEN de la tesis de Martín Bect Parra, presentada como requisito parcial para obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS, EN EL ÁREA DE OPTOELECTRÓNICA Y MEDICIONES, Mexicali, Baja California, México.**

**MÉTODO NUMÉRICO PARA LA DETECCIÓN DE PAQUETES DE PULSOS, EN BASE AL ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DETERMINADAS E INDETERMINADAS**

**Resumen aprobado por:**

OLEG SERGIYENKO 


**Dr. Oleg Sergiyenko**

La medición de frecuencia, así como la medición de otros parámetros (tales como la longitud, el volumen, la temperatura, etc.); tienen de mucha utilidad desde la antigüedad hasta la actualidad y por eso es importante buscar siempre opciones viables para obtener el parámetro que se está midiendo. En esta tesis, se presentará un método numérico para la obtención de la frecuencia. Este método consiste en la comparación de dos trenes de pulsos de frecuencia desconocida y conocida; donde su propósito es obtener la frecuencia desconocida al compararla con una determinada frecuencia (conocida) y en donde ambas son señales cuadradas. También se mostrarán teóricamente distintos escenarios que se forman de la comparación ambas frecuencias; dicha comparación obtiene como resultado un tren de pulsos de coincidencias. Finalmente, fue importante realizar la experimentación práctica utilizando un prototipo electrónico; que obtuviera la medición de la frecuencia utilizando el método de la comparación de pulsos.

**ABSTRACT of the thesis of Martín Bect Parra, presented as partial requirement for obtaining the degree of MASTER IN SCIENCES, OPTOELECTRONICS AND MEASUREMENTS AREA, Mexicali, Baja California, Mexico.**

**NUMERICAL METHOD FOR THE DETECTION OF PACKETS OF PULSES, BASED ON THE ANALYSIS OF DETERMINED AND UNDETERMINED FREQUENCIES**

**Summary approved by:**

OLEG SERGIYENKO 

**Dr. Oleg Sergiyenko**

Frequency measurement, as well as the measurement of other parameters (such as length, volume, temperature, etc.); they have been very useful from the past to the present and this is why it is important to always look for viable options to obtain the parameter that is being measured. In this thesis, a numerical method to obtain the frequency will be presented. This method consists in the comparison of two trains of pulses from an unknown and known frequency; where its purpose is to obtain the unknown frequency by comparing it with a certain (known) frequency and where both signals are square. In addition, it will be shown theoretically different scenarios that are formed from the comparison of both frequencies; the result of the comparison is the train of coincidence pulses. Finally, it was important to carry out practical experimentation using an electronic prototype; that can obtain the frequency measurement using the pulse comparison method.

# Tabla de Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b> .....	11
1.1	Antecedentes de la Investigación.....	11
1.2	Propósito de la Investigación .....	14
1.2.1	Objetivo General.....	14
1.2.2	Objetivos Particulares.....	14
<b>2</b>	<b>Conceptos Básicos</b> .....	15
2.1	Terminología.....	15
2.2	Definición de la Frecuencia.....	16
2.3	Aplicaciones del Uso de la Frecuencia .....	18
<b>3</b>	<b>Método de Medición de Frecuencia por Coincidencia de Pulsos</b> .....	19
3.1	Método de Medición con Anchos de Pulsos Iguales.....	21
3.1.1	Sin Desfasamiento .....	21
3.1.2	Con Desfasamiento.....	22
3.2	Método de Medición con Anchos de Pulsos Diferentes.....	24
3.2.1	Sin Desfasamiento .....	24
3.2.2	Con Desfasamiento.....	26
3.3	Observaciones con respecto al Método de Medición de Frecuencia .....	27
3.3.1	Ejemplos con el Error Cero.....	28
<b>4</b>	<b>Análisis Teórico Numérico</b> .....	30
4.1	Definición Analítica de los Paquetes de Pulsos.....	31
4.2	Criterios Generales.....	32
4.3	Obtención de Pulsos de Anchos Constantes en el TPC.....	34
4.3.1	Modelo (1) – (Anchos de Pulso Iguales).....	35
4.3.2	Modelo (2) – (Anchos de Pulsos Diferentes).....	38
4.3.3	Observaciones de la Obtención de Pulsos de Anchos Constantes en el TPC.....	41
4.4	Obtención de Paquetes con Pulsos Completos y Parciales .....	42
4.4.1	Paquetes con Pulsos Completos y Parciales.....	46
4.4.1.1	Modelo (3) – (Anchos de Pulsos Iguales) .....	48
4.4.1.2	Modelo (4) – (Anchos de Pulsos Diferentes).....	51
4.4.1.3	Modelo (5) – (Anchos de Pulsos Iguales y Pulsos Diferentes).....	55
4.4.2	Especificaciones de los Paquetes Simétricos y Asimétricos .....	59
4.4.3	Observaciones de los Paquetes Completos y Parciales .....	66

4.5	Conceptos de la Teoría de Números .....	67
4.5.1	Algoritmo de Euclides .....	67
4.5.2	Identidad de Bézout .....	68
4.5.3	Ecuaciones Diofánticas Lineales.....	69
4.5.4	Congruencias .....	70
4.5.5	Congruencias Lineales .....	71
4.6	Análisis Numérico en la Comparación de Trenes de Pulsos .....	73
4.6.1	Importancia de la Cuestión Geométrica.....	73
4.6.2	Uso con las Ecuaciones Diofánticas .....	75
4.6.3	Uso con las Congruencias Lineales.....	80
4.7	Definición de las Coincidencias de Proporción .....	90
4.7.1	Obtención de Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento.....	93
4.7.2	Obtención de Coincidencias de Proporción con Desfasamiento.....	96
4.8	Obtención del Número de Pulsos de una Proporción sin Desfasamiento.....	100
4.9	Obtención del Número de Pulsos de una Proporción con Desfasamiento.....	104
<b>5</b>	<b>Análisis Práctico Experimental</b> .....	<b>108</b>
5.1	Materiales para el Prototipo Electrónico.....	108
5.2	Prototipo Electrónico .....	110
5.3	Prototipo Físico Implementado.....	114
5.4	Diseño de Programa en Matlab .....	115
5.5	Experimentación de Análisis Prácticos.....	117
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b> .....	<b>133</b>
<b>7</b>	<b>Referencias</b> .....	<b>135</b>

# Índice de Figuras

<b>Figura 1.</b> Ilustración gráfica de una onda senoidal.....	16
<b>Figura 2.</b> Ilustración gráfica de una onda cuadrada real.....	17
<b>Figura 3.</b> Ilustración gráfica del método de medición frecuencia por coincidencia de pulsos.....	19
<b>Figura 4.</b> Ilustración gráfica de una onda senoidal a una onda cuadrada.....	19
<b>Figura 5.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.....	22
<b>Figura 6.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.....	23
<b>Figura 7.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cinco ejemplos.....	25
<b>Figura 8.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.....	26
<b>Figura 9.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de siete ejemplos.....	27
<b>Figura 10.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de tres ejemplos.....	29
<b>Figura 11.</b> Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.....	30
<b>Figura 12.</b> Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).....	31
<b>Figura 13.</b> Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).....	32
<b>Figura 14.</b> Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).....	32
<b>Figura 15.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Primer Ejemplo de Modelo(1)).....	36
<b>Figura 16.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo de Modelo(1)).....	37
<b>Figura 17.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Primer Ejemplo de Modelo(2)).....	38
<b>Figura 18.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo de Modelo(2)).....	39
<b>Figura 19.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Tercer Ejemplo de Modelo(2)).....	40
<b>Figura 20.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de la Influencia del MCD)..	43
<b>Figura 21.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de la Influencia del MCD)..	44
<b>Figura 22.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de la anchura de Paquete)..	45
<b>Figura 23.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de la anchura de Paquete)..	45
<b>Figura 24.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(3)).....	48
<b>Figura 25.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(3)).....	49
<b>Figura 26.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo con lejanías entre pulsos).....	50
<b>Figura 27.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(4)).....	51
<b>Figura 28.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(4)).....	52
<b>Figura 29.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo del Modelo(4)).....	53

<b>Figura 30.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Quinto Ejemplo del Modelo(4)).	55
<b>Figura 31.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(5)).	56
<b>Figura 32.</b> Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(5)).	57
<b>Figura 33.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo del Modelo(5)).	58
<b>Figura 34.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de Paquete Simétrico).	59
<b>Figura 35.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de Paquete Simétrico).	60
<b>Figura 36.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de Paquete Asimétrico).	61
<b>Figura 37.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de Paquete Asimétrico).	62
<b>Figura 38.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo con Orden Simétrico).	63
<b>Figura 39.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo con Orden Simétrico).	64
<b>Figura 40.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Orden Simétrico y Lejanías).	65
<b>Figura 41.</b> Ecuaciones $(DI + (NxTx)) = ((NoTo) + DS)$ y $(DI + (NoTo)) = ((NxTx) + DS)$ en la Comparación de los Trenes de Pulsos de las Fx y las Fo.	74
<b>Figura 42.</b> Ecuaciones $(DS + (NxTx) + DI) = (NoTo)$ y $(NxTx) = (DI + (NoTo) + DS)$ en la Comparación de los Trenes de Pulsos de las Fx y las Fo.	74
<b>Figura 43.</b> Representación de la Fx y la Fo en comparación, que obtienen un TPC con pulsos completos y parciales (Ejemplo para el uso de Ecuaciones Diofánticas).	75
<b>Figura 44.</b> Comparación de los Trenes de Pulsos de las Fx y las Fo, con las ecuaciones $(NxTx) = (NoTo) + DR$ y $(NxTx) + DR = (NoTo)$ .	76
<b>Figura 45.</b> Comparación de los Trenes de Pulsos de las Fx y las Fo, con las ecuaciones $(NxTx) = (NoTo) + DR$ y $(NxTx) + DR = (NoTo)$ .	78
<b>Figura 46.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplos de distancias de la anchura de paquete y de la adyacencia entre otro paquete).	80
<b>Figura 47.</b> Representación Gráfica de la Fx y la Fo, con la ecuación $(m)x = r + (n)k$ .	81
<b>Figura 48.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo del uso de Congruencias).	82
<b>Figura 49.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos en el TPC (Extracto de la Fig. 48).	82
<b>Figura 50.</b> Ilustración Gráfica con pulsos parciales en el TPC (Extracto de la Fig. 48).	84
<b>Figura 51.</b> Ilustración Gráfica con pulsos parciales en el TPC (Extracto de la Fig. 48).	85
<b>Figura 52.</b> Ilustración Gráfica con un ancho constante en el TPC (Algoritmo de Euclides con Congruencias).	87
<b>Figura 53.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo del uso de Congruencias).	89
<b>Figura 54.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Definición de la Coincidencias de Proporción).	90
<b>Figura 55.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo donde influye el MCM).	91
<b>Figura 56.</b> Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo donde influye el MCD).	92
<b>Figura 57.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (1er Ejemplo).	93

<b>Figura 58.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (2do Ejemplo).....	94
<b>Figura 59.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (3er Ejemplo).....	95
<b>Figura 60.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfasamiento en el TPC (1er Ejemplo).....	97
<b>Figura 61.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfasamiento en el TPC (2do Ejemplo).....	98
<b>Figura 62.</b> Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfasamiento en el TPC (3er Ejemplo).....	99
<b>Figura 63.</b> Representación Geométrica de la $F_x$ y la $F_o$ , donde hacen coincidencias en $X_1$ y $X_2$ . .....	100
<b>Figura 64.</b> Tabla para la Obtención del Número de Pulsos. ....	101
<b>Figura 65.</b> Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos sin Desfasamiento en el TPC (Primer Ejemplo).....	102
<b>Figura 66.</b> Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos sin Desfasamiento en el TPC (Segundo Ejemplo).....	103
<b>Figura 67.</b> Representación Geométrica de la $F_x$ y la $F_o$ , donde hacen coincidencias en $X_1$ y $X_2$ . .....	104
<b>Figura 68.</b> Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos con Desfasamiento en el TPC (Primer Ejemplo).....	105
<b>Figura 69.</b> Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos con Desfasamiento en el TPC (Segundo Ejemplo).....	106
<b>Figura 70.</b> Configuración PULL-DOWN.....	109
<b>Figura 71.</b> Diagrama General; donde se implementan los microcontroladores, las compuertas AND, la frecuencia externa y de referencia, el generador (Hz) y el botón. ....	110
<b>Figura 72.</b> Diagrama Gráfico Ideal del Procedimiento de Medición.....	112
<b>Figura 73.</b> Diagrama de Funcionamiento Ideal; donde se implementan los programas internos de los microcontroladores de habilitación y de conteo.....	113
<b>Figura 74.</b> Prototipo Físico Implementado en la Tesis.....	114
<b>Figura 75.</b> Ilustración Gráfica del Programa desarrollado en Matlab (Incisos A y B).....	115
<b>Figura 76.</b> Ilustración Gráfica del Programa desarrollado en Matlab (Inciso C).....	116
<b>Figura 77.</b> Ilustración Gráfica del Primer Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes). ....	118
<b>Figura 78.</b> Ilustración Gráfica Adicional del Primer Ejemplo de la Experimentación con Desfasamiento (Anchos de Pulsos Constantes). ....	120
<b>Figura 79.</b> Ilustración Gráfica del Segundo Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes). ....	121
<b>Figura 80.</b> Ilustración Gráfica del Tercer Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes).....	123
<b>Figura 81.</b> Ilustración Gráfica del Cuarto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).....	125
<b>Figura 82.</b> Ilustración Gráfica del Quinto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales). ....	127
<b>Figura 83.</b> Ilustración Gráfica del Sexto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).....	129
<b>Figura 84.</b> Ilustración Gráfica del Séptimo Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales). ....	131

# Índice de Tablas

<b>Tabla 1 – Terminología General</b> .....	15
<b>Tabla 2 – Resultados Ideales de la Fig. 5</b> .....	22
<b>Tabla 3 – Resultados Ideales de la Fig. 6</b> .....	24
<b>Tabla 4 – Resultados Ideales de la Fig. 7</b> .....	25
<b>Tabla 5 – Resultados ideales de la Fig. 8</b> .....	26
<b>Tabla 6 – Resultados Ideales de la Fig. 9</b> .....	27
<b>Tabla 7 – Resultados Ideales de la Fig. 10</b> .....	29
<b>Tabla 8 – Resultados Ideales de la Fig. 11</b> .....	30
<b>Tabla 9 – Periodos en Comparación (Par e Impar)</b> .....	32
<b>Tabla 10 – Panorama General (Cercanía y Lejanía)</b> .....	33
<b>Tabla 11 – Elemento del Rango de Desfasamiento</b> .....	34
<b>Tabla 12 – Extracto de la Tabla 10</b> .....	34
<b>Tabla 13 – Valores de la Fig. 15</b> .....	36
<b>Tabla 14 – Valores de la Fig. 16</b> .....	37
<b>Tabla 15 – Valores de la Fig. 17</b> .....	39
<b>Tabla 16 – Valores de la Fig. 18</b> .....	40
<b>Tabla 17 – Valores de la Fig. 19</b> .....	40
<b>Tabla 18 – Valores de la Fig. 24</b> .....	48
<b>Tabla 19 – Valores de la Fig. 25</b> .....	49
<b>Tabla 20 – Valores de la Fig. 26</b> .....	50
<b>Tabla 21 – Coincidencia entre Pulsos de la Fig. 26</b> .....	50
<b>Tabla 22 – Continuación de la Tabla 21</b> .....	51
<b>Tabla 23 – Valores de la Fig. 27</b> .....	51
<b>Tabla 24 – Valores de la Fig. 28</b> .....	53
<b>Tabla 25 – Valores de la Fig. 29</b> .....	54
<b>Tabla 26 – Valores de la Fig. 30</b> .....	55
<b>Tabla 27 – Valores de la Fig. 31</b> .....	56
<b>Tabla 28 – Valores de la Fig. 32</b> .....	57
<b>Tabla 29 – Valores de la Fig. 33</b> .....	58
<b>Tabla 30 – Desfasamientos de la Fig. 34</b> .....	59
<b>Tabla 31 – Desfasamientos de la Fig. 35</b> .....	60
<b>Tabla 32 – Desfasamientos de la Fig. 36</b> .....	61

<b>Tabla 33</b> – Desfasamientos de la Fig. 37 .....	62
<b>Tabla 34</b> – Desfasamientos de la Fig. 38 .....	63
<b>Tabla 35</b> – Desfasamientos de la Fig. 39 .....	64
<b>Tabla 36</b> – Desfasamientos de la Fig. 40 .....	65
<b>Tabla 37</b> – Valores de la Fig. 43.....	75
<b>Tabla 38</b> – Resultados Adicionales de la Fig. 44 .....	77
<b>Tabla 39</b> – Resultados Adicionales de la Fig. 45 .....	79
<b>Tabla 40</b> – Influencia del MCM .....	91
<b>Tabla 41</b> – Influencia del MCD.....	92
<b>Tabla 42</b> – #Pulsos de $n_2$ (Fig. 68).....	105
<b>Tabla 43</b> – #Pulsos de $n_2$ (Fig. 69).....	107
<b>Tabla 44</b> – Resultados de la Primera Experimentación .....	117
<b>Tabla 45</b> – Valores de la 1ra Experimentación.....	118
<b>Tabla 46</b> – Valores de la 2da Experimentación .....	120
<b>Tabla 47</b> – Resultados de la Segunda Experimentación.....	120
<b>Tabla 48</b> – Valores de la 3ra Experimentación.....	122
<b>Tabla 49</b> – Resultados de la Tercera Experimentación .....	122
<b>Tabla 50</b> – Valores de 4ta Experimentación .....	124
<b>Tabla 51</b> – Resultados de la Cuarta Experimentación.....	124
<b>Tabla 52</b> – Congruencias de la Fig. 80.....	126
<b>Tabla 53</b> – Valores de la 5ta Experimentación .....	126
<b>Tabla 54</b> – Resultados de la Quinta Experimentación.....	126
<b>Tabla 55</b> – Congruencias de la Fig. 81.....	128
<b>Tabla 56</b> – Valores de la 6ta Experimentación .....	128
<b>Tabla 57</b> – Resultados de la Sexta Experimentación .....	128
<b>Tabla 58</b> – Congruencias y #Pulsos por Paquete de la Fig. 82 .....	129
<b>Tabla 59</b> – Valores de la 7ma Experimentación .....	130
<b>Tabla 60</b> – Resultados de la Séptima Experimentación .....	130
<b>Tabla 61</b> – Congruencias de la Fig. 83.....	132
<b>Tabla 62</b> – Coincidencias de Pulsos de la Fig. 83 .....	132
<b>Tabla 63</b> – Continuación de la Tabla 62 .....	132

# 1 Introducción

**Definición del Problema:** Para la medición de una frecuencia desconocida en un proceso, usualmente se requiere de un equipo de medición con una frecuencia de muestreo muy alta; por lo tanto, para obtener dichas señales desconocidas de medición (señales cuadradas y rectificadas) provenientes de un proceso exterior, se puede utilizar un método geométrico de comparación de trenes de pulsos por medio de una señal conocida; para el cálculo de la señal de frecuencia desconocida a medir.

**Justificación:** Esta investigación se realiza, debido a que se busca conocer los factores matemáticos principales que influyen en la comparación de los trenes de pulsos de sus respectivas frecuencias y dan como resultado un escenario geométrico específico en el tren de pulsos de coincidencias, y también se busca considerar las ventajas y desventajas de cada uno de estos escenarios geométricos resultantes.

**Hipótesis:** Es posible calcular el valor de una frecuencia desconocida utilizando modelos matemáticos (teoría de números), basándose en el principio de la comparación de trenes de pulsos con una frecuencia conocida. Así mismo, es posible desarrollar un prototipo electrónico que permita teóricamente realizar la comparación de los trenes de pulsos y desarrollar un simulador que compruebe la teoría con lo práctico.

## 1.1 Antecedentes de la Investigación

En la publicación [1], los autores propusieron un método para aumentar la exactitud de medición de frecuencia por método de la coincidencia de pulsos y la búsqueda analítica de la mejor coincidencia. Posteriormente los mismos autores en su mayoría en el grupo hicieron estudios adicionales de cómo influyen diferentes factores en la factibilidad de la aplicación práctica del método propuesto en la publicación [1].

Los factores investigados fueron: desfase aleatorio de la señal conocida como jitter [2], [3] variedad de frecuencia [4], [5] variedad de ancho de pulso [6], [7] y análisis geométrico [8]. Este último análisis fue representado de manera no completa y desprecia muchos factores físicos los cuales no consideró. Lo más crucial en este caso fue que todos los factores fueron investigados

separadamente, cada uno solo, sin tomar en cuenta la influencia mutua de todos los otros. Mientras la lógica nos dice, que la situación verdadera será en aplicación simultánea de todos los posibles factores influyentes, además de suma importancia será estimar el nivel de importancia que causa cada factor en el resultado final común.

Todo lo mencionado anteriormente, nos permite concluir que ninguna de las investigaciones anteriores tenía carácter sistemático, y no podrían explicar todo el complejo de los fenómenos físicos que pueden influir en el proceso de formación de los paquetes de pulsos de coincidencias, y analizar todas las posibles variaciones geométricas y su correspondiente dependencia de los parámetros físicos de ambos trenes de pulsos que forman coincidencias, al igual que sus influencias mutuales.

La investigación presente se trata de hacer un análisis completo de todas las posibles combinaciones de los parámetros físicos influyentes, y con amplia gama de variedad de valores que pueden tomar estos parámetros. El objetivo de esta investigación es ordenar por importancia todos los factores que pueden influir en los trenes de pulsos de coincidencias, y elaborar recomendaciones de cómo aplicar mejor el método, también establecer límites razonables de su aplicabilidad.

Una de las intenciones que tiene esta investigación, es mostrar que no existen reglas determinadas de cómo se va a comportar exactamente el resultado del tren de pulsos de coincidencias cuando se comparan los trenes de pulsos de las frecuencias desconocida y conocida, debido a que existen muchas posibles combinaciones; tiene como propósito que el usuario entienda como los análisis numéricos influyen en la formación del tren de pulsos de coincidencias por medio de ecuaciones matemáticas, ilustraciones gráficas o la teoría de números.

Sin embargo, como se comentó anteriormente de la complejidad del análisis geométrico que pueda existir en la formación del tren de pulsos de coincidencias, también hay que mencionar que existen tanto ventajas como desventajas al momento de comparar los trenes de pulsos de la frecuencia conocida y desconocida.

Por lo tanto, fue importante determinar que parámetros iban a influir en la formación de paquetes del tren de pulsos de coincidencias. Los parámetros que se estaban considerando analizar eran los anchos de pulsos de las frecuencias, el periodo de cada frecuencia y desfaseamiento al inicio del conteo de periodos, todos estos vistos anteriormente desde una perspectiva geométrica; para después concluir cuales serían los mejores escenarios para que se pueda conocer la frecuencia desconocida. Si se busca conocer todos los parámetros que influyen, como consiguiente se modificaría la frecuencia conocida reajustándola para después de la manera más cómoda compararla de nuevo con la desconocida y así obtener realmente el valor más aproximado a lo que se está buscando que es la frecuencia desconocida.

Durante esta investigación también se propuso mostrar ciertos geométricos en la formación de los paquetes de pulsos, de alguna manera seguir un criterio geométrico que distinguiera como se forman. Por lo tanto, se escribieron algunas fórmulas matemáticas que mostraban cuantos pulsos iban a formar el paquete y como los parámetros influían en la cantidad de pulsos que formaban parte de ese paquete, e incluso considerar algunas de sus ventajas.

También en esta investigación se tuvo la necesidad de obtener resultados prácticos, anteriormente en las investigaciones pasadas los prototipos desarrollados tuvieron problemas al momento de obtener resultados congruentes con respecto a la teoría de números. Esos resultados deben ser la obtención del conteo de periodos correctamente y evitar el menor error posible. Por lo tanto, fue importante durante esta investigación buscar nuevos materiales que modificaron los prototipos anteriores y construir un nuevo prototipo para comprobar el método de la coincidencia de pulsos para la búsqueda de la frecuencia desconocida.

Como conclusión de todo lo dicho anteriormente puedo mencionar, que el reto más importante de esta tesis será la investigación plena y sistematizada de toda gamma de los posibles factores geométricos, eléctricos, temporales y de diafonía ("cross-talk effects"), cuya presencia puede afectar la formación de paquetes de pulsos de coincidencia, y consecutivamente, disminuir o aumentar la eficiencia del método propuesto en la publicación [1], tomando las conclusiones prácticas claras y fácilmente realizables en dispositivos electrónicos.

## 1.2 Propósito de la Investigación

En esta tesis fue muy importante plantear el objetivo general y los particulares, para ir investigando y desarrollar la tesis. A continuación, se muestran los objetivos planteados:

### 1.2.1 Objetivo General

Generar lista justificada de recomendaciones para que el usuario aplique el método de coincidencia de pulsos, y pueda hacer ajustes apropiados para deducir más fácilmente cual es la frecuencia desconocida.

### 1.2.2 Objetivos Particulares

Los objetivos particulares teóricos que se necesitan investigar serían los siguientes:

- Encontrar las condiciones en las que los paquetes de pulsos se convierten a un sólo pulso.
- Determinar cómo se modifica la forma de los paquetes de pulsos de acuerdo a las condiciones de relación matemática entre los periodos de las frecuencias analizadas.
- Determinar la dependencia de la proximidad de los periodos (desconocido y conocido) en la forma de paquetes de pulsos.
- Encontrar los factores de los que dependerán los anchos de los paquetes de pulsos.
- Determinar la modificación en la forma de paquetes de pulsos en la presencia de ruido (desfasamiento).
- Determinar el efecto en el tren de pulsos de coincidencias, en distintas condiciones:
  - Si los  $\tau$  (anchos de pulso) en frecuencia conocida y desconocida no son iguales.
  - Si las posiciones tienen desfasamiento aleatorio y cómo influye el desfasamiento en el resultado.

Los objetivos particulares prácticos que se necesitan desarrollar serían los siguientes:

- Realizar un prototipo electrónico.
- Desarrollar un programa en Matlab para realizar simulaciones.
- Hacer experimentaciones prácticas que comprueben las teorías numéricas.

# 2 Conceptos Básicos

## 2.1 Terminología

En esta tesis de maestría, se aplicó una terminología específica de significados, donde cada uno de ellos tiene un símbolo definido. En la *Tabla 1* se define la terminología de los significados.

<i>Tabla 1 – Terminología General</i>	
<b>SIGNIFICADO</b>	<b>SÍMBOLO</b>
<i>Ancho de Pulso</i>	$\tau$
<i>Ancho de Pulso con Desfasamiento</i>	$\tau_{CD}$
<i>Ancho de Pulso sin Desfasamiento</i>	$\tau_{SD}$
<i>Ancho de Pulso Mayor</i>	$\tau_{mayor}$
<i>Ancho de Pulso Menor</i>	$\tau_{menor}$
<i>Aumenta</i>	$\uparrow$
<i>Cociente</i>	$C$
<i>Desfasamiento</i>	$D$
<i>Disminuye</i>	$\downarrow$
<i>Frecuencia Conocida</i>	$F_o$
<i>Frecuencia Desconocida</i>	$F_x$
<i>Máximo Común Divisor</i>	$MCD$
<i>Mínimo Común Múltiplo</i>	$MCM$
<i>Periodo de Frecuencia Conocida</i>	$T_o$
<i>Periodo de Frecuencia Desconocida</i>	$T_x$
<i>Pulsos por Paquete</i>	$K$
<i>Residuo</i>	$R$
<i>Total de Pulsos Completos del Paquete</i>	$KK$
<i>Tren de Pulsos de Coincidencia</i>	$TPC$
<i>*Unidades de Frecuencia</i>	$UF$
<i>Unidades de Tiempo</i>	$UT$

\*NOTA: Las Unidades de Frecuencia (UF) se multiplican por 1000.

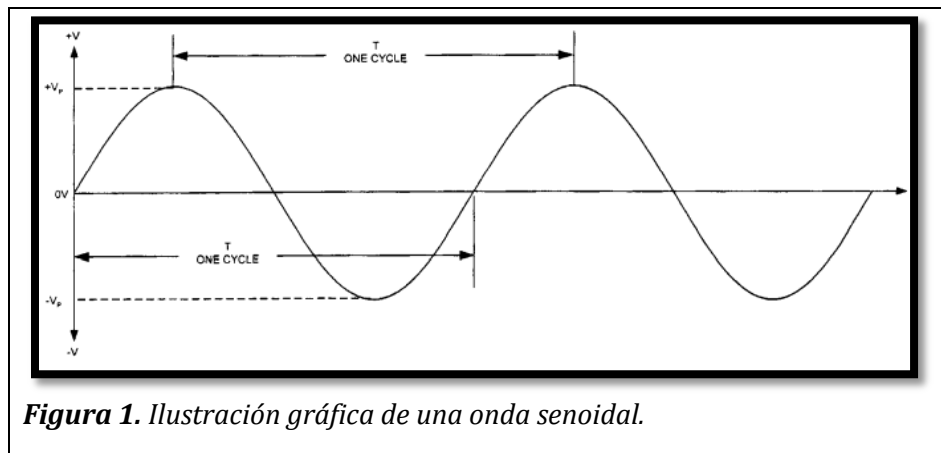
## 2.2 Definición de la Frecuencia

Se le llama *frecuencia* ( $F$ ) al número de ciclos o eventos periódicos en la señal eléctrica que ocurren en una ventana definida de tiempo, como regla general es un segundo (1 s). La *frecuencia* se mide en hercios (Hz) y un hercio equivale a un ciclo por segundo, o en unidades mayores; por ejemplo, los kilohercios (miles de hercios) y los megahercios (millones de hercios).

Aunque existen varias formas de onda, comencemos nuestra discusión con la onda sinusoidal básica, que se muestra en la *Fig. 1*. El ciclo es una excursión positiva y negativa completa de la forma de onda sinusoidal de CA. Se puede describir comparando características idénticas en formas de onda sucesivas, como se muestra en la *Fig. 1*.

El *periodo* es el tiempo ( $T$ ) requerido para que ocurra un ciclo completo. El período y la frecuencia son recíprocos entre sí [14, pp. 151 - 152].

$$F = \frac{1}{T} \quad (1)$$



**Figura 1.** Ilustración gráfica de una onda sinusoidal.

El *tiempo de aumento* ( $\tau_r$ ) del pulso es el tiempo requerido para que el pulso se eleve del 10% de la amplitud máxima al 90% de la amplitud máxima.

El *ancho de pulso* ( $\tau$ ) es el tiempo entre los puntos de amplitud del 50%. Cuando el tren de impulsos tiene un período de amplitud cero entre impulsos sucesivos, que se denomina tiempo

de apagado (en inglés: “*off time*”) ( $\tau_{off}$ ). La duración total del impulso, incluidos  $\tau$  y  $\tau_{off}$ , se denomina *intervalo de repetición de pulso* (en inglés: “*pulse repetition interval*”, por sus siglas *PRI*).

La *frecuencia de repetición de pulso* (en inglés: “*pulse repetition frequency*”, por sus siglas *PRF*) es el número de pulsos por segundo, o:

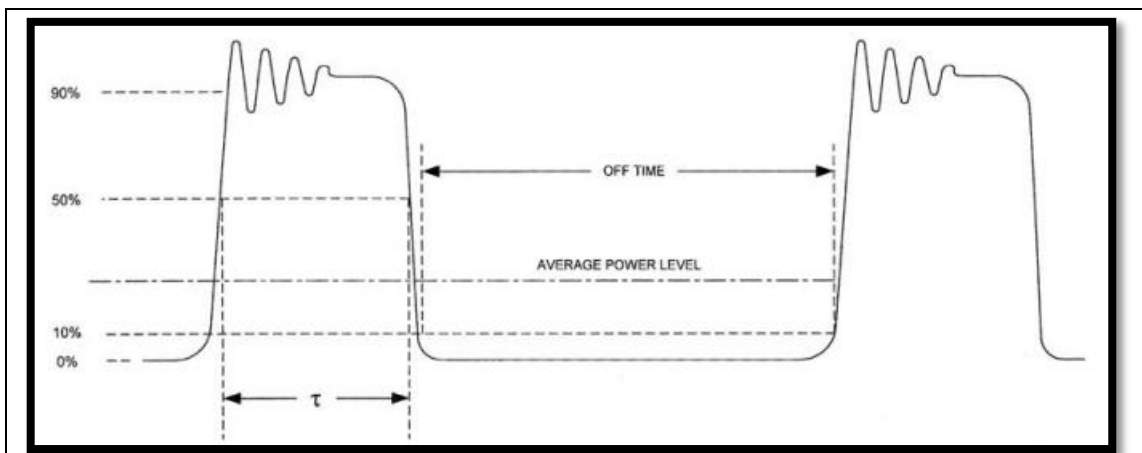
$$PRF = \frac{1}{PRI} \quad (2)$$

El *ciclo de trabajo del pulso* (en inglés: “*Duty Cycle*”) es la relación entre el tiempo de encendido ( $\tau$ ) y el tiempo de apagado ( $\tau_{off}$ ), expresado como un porcentaje o:

$$Duty\ Cycle = \frac{\tau}{PRI} * 100\% \quad (3)$$

La *potencia promedio* (en inglés: “*Average Power*”) es la transferencia de energía promediada durante todo el pulso, incluido el tiempo de encendido ( $\tau$ ) y el tiempo de apagado ( $\tau_{off}$ ). Matemáticamente, la potencia promedio en un pulso es [14, pp. 126 - 128]:

$$P_{Pulse} = \frac{1}{\tau} \int v(t)i(t)dt \quad (4)$$



**Figura 2.** Ilustración gráfica de una onda cuadrada real.

## 2.3 Aplicaciones del Uso de la Frecuencia

Algunos sistemas donde se aplica el uso de la frecuencia es: “*el Variador de Frecuencia*”, “*el Sensor Ultrasónico*” y “*el Micrófono*”.

Se le llama *variador de frecuencia* a los sistemas que principalmente estabilizan el incremento del uso o varían la velocidad, lo cual va a depender de la amplia gama disponible del variador. Un ejemplo de estos sistemas son *los motores de corriente alterna (AC)* [16, pp. 1]. Cuando es usada una frecuencia fija, el cual provee un medio de fuente de alimentación, es básicamente una velocidad de motor fija [16, pp. 2]. El sistema del motor inductor, como la mayoría, consiste en un convertidor para cambiar un suministro de red de voltaje fijo y frecuencia fija en voltaje DC, seguido de un inversor de conmutación forzada para convertir DC en una salida de AC de frecuencia variable [16, pp. 131].

Se le llama *sensor ultrasónico* a los detectores que se basan en la transmisión al objeto y recibir ondas acústicas reflejadas. Se utilizan en caso de que empleen medición de distancias sin contacto. Cuando las ondas son incidentes en el objeto, parte de la energía es reflejada. La energía ultrasónica es reflejada de una manera difusa, independientemente de la dirección de donde vino la energía, es reflejada casi uniformemente dentro un amplio ángulo, el cual puede alcanzar los 180 grados. Si un objeto se mueve, las frecuencias de las ondas reflejadas van a diferir de las ondas transmitidas (*esto es conocido como el efecto Doppler*) [17, pp. 286 -287].

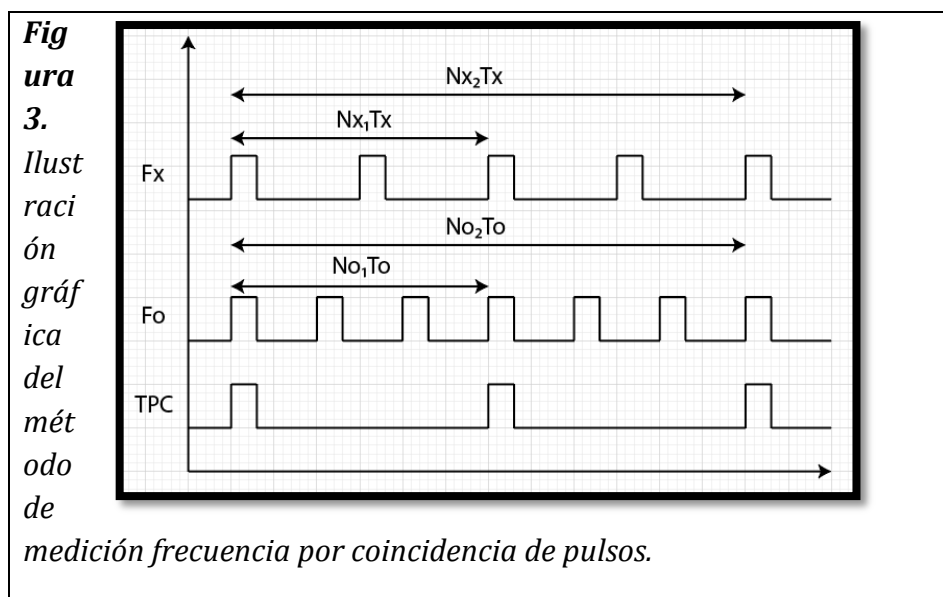
Se le llama *micrófono* al transductor que convierte el sonido a energía eléctrica. Un micrófono utilizará filtros acústicos, pasajes cuya forma y dimensiones modifican la respuesta de todo el sistema. Se utilizan como sensores en sonómetros. Esto requiere un micrófono cuya respuesta de frecuencia esté cuidadosamente controlada, con compensación electrónica para picos o caídas sustanciales. La lectura suele ser en términos de decibelios por encima del nivel de ruido de umbral, el nivel de presión en el que el oído puede detectar la presencia de un sonido [18, pp. 119 - 120]. Algunas características son:

- Un micrófono con alta impedancia generalmente tiene una salida eléctrica bastante alta, pero la alta impedancia lo hace muy susceptible a la captación de zumbidos. Un valor de impedancia bajo generalmente se asocia con una salida muy baja, pero la captación de zumbidos es casi insignificante.  $\tau$
- Cuando el micrófono es omnidireccional captará el sonido que llegue de cualquier dirección. Si el micrófono responde a la velocidad (dirección y velocidad) de la onda de sonido, entonces es un

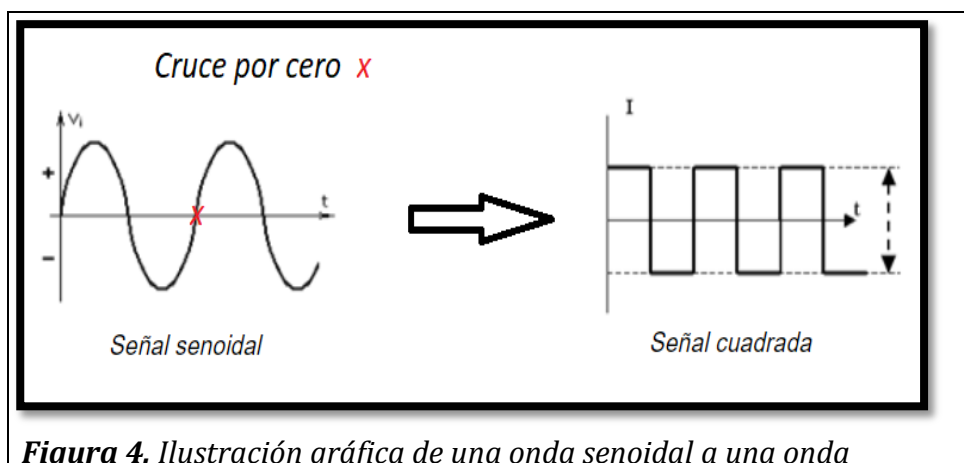
micrófono direccional, y la sensibilidad debe medirse en términos de dirección y amplitud de la onda de sonido.

### 3 Método de Medición de Frecuencia por Coincidencia de Pulsos

En el *método de medición* que se muestra en la *Fig. 3*, una señal de *frecuencia desconocida* ( $F_x$ ) es comparada con otra de *frecuencia conocida* ( $F_0$ ), o *estándar* [9]. Muchos aspectos de aplicación de este método fueron investigados en los trabajos [22 - 30]; sin embargo, ninguno de ellos terminó el análisis explícito y sistematizado de que depende la formación de paquetes. Esta tesis está dedicada a describir este análisis sistematizado basándose en comparaciones geométricas.



Los cruces por cero de ambas frecuencias de señales sinusoidales, que se representa en la *Fig. 4* son usados para formar dos trenes de pulsos periódicos, estrechos e independientes.



Ambos trenes de pulsos, de frecuencia desconocida y estándar son comparados en el lapso de tiempo, y como resultado se genera una sucesión de pulsos de coincidencia (tren TPC en la *Fig. 3*). Esta comparación se realiza mediante un aparato electrónico dedicado a eso (*compuerta lógica AND*), la cual genera un pulso de tren TPC únicamente cuando en este instante del tiempo existen ambos pulsos de trenes  $F_x$  y  $F_o$  juntos (a la vez).

Los pulsos coincidentes, que ocurren en el lapso de tiempo por el eje x entre ambos trenes de pulsos de las frecuencias desconocida y estándar, se pueden utilizar como disparadores para iniciar o detener contadores digitales (este inicio o detención van formando en el contador correspondiente el número  $N_x$  y  $N_o$  de la *fórmula (5)* que representan la cantidad de periodos de señales desconocido y estándar hasta el momento de tiempo cuando ambos trenes  $F_x$  y  $F_o$  coinciden perfectamente (sin ningún desplazamiento), y en este instante se puede recibir la aproximación del mensurando  $f_x$ ).

Los periodos de cada tren de pulsos de las frecuencias desconocida y estándar ( $f_x$  y  $f_o$  de la *Fig. 3*), se van sumando a los contadores internos del microcontrolador. Cuando ocurre una coincidencia en el lapso de tiempo entre ambos trenes de pulsos, el microcontrolador va a reflejar la suma total de periodos obtenidos en ese instante de tiempo transcurrido. Por lo tanto, se obtiene una medida de frecuencia desconocida multiplicando la frecuencia estándar conocida por la relación entre el conteo de periodos desconocidos y el conteo de periodos de la señal de frecuencia estándar.

Como resultado; la frecuencia desconocida, en el caso ideal, se puede expresar mediante:

$$f_x \cong \frac{N_x}{N_o} f_o \quad (5)$$

Por lo tanto, se puede calcular un valor determinado de frecuencia desconocida, considerando como señal de inicio la medición del primer pulso de coincidencia y como señal de fin la medición del segundo o consiguiente pulso de coincidencia. Para aclararlo, obsérvese en la *Fig. 6*; se muestra un ejemplo gráfico.

Sin embargo, aunque el cociente de medición entre  $N_x$  y  $N_o$  de la *fórmula (5)*, representa una de las convergentes calculables; no necesariamente es la óptima, sino un aproximado. La diferencia de tiempo medida, entre las dos coincidencias, en base al conteo de periodos transcurridos de ambas señales de frecuencia desconocida y estándar se puede expresar mediante la *fórmula (6)*.

$$|N_o T_o - N_x T_x| \leq \Delta t \quad (6)$$

Donde  $N_x$  y  $N_o$  son, respectivamente, el número de periodos contados a partir de la primera coincidencia de ambas frecuencias y  $\Delta t$  es el tiempo de desfaseamiento.

### 3.1 Método de Medición con Anchos de Pulsos Iguales

En esta *Sección* se analizarán los escenarios que pueden suceder en caso de que existan pulsos iguales. Es importante considerar que el  $\Delta t$  (**tiempo de desfaseamiento**) varía cuando se aplica un diferente escenario.

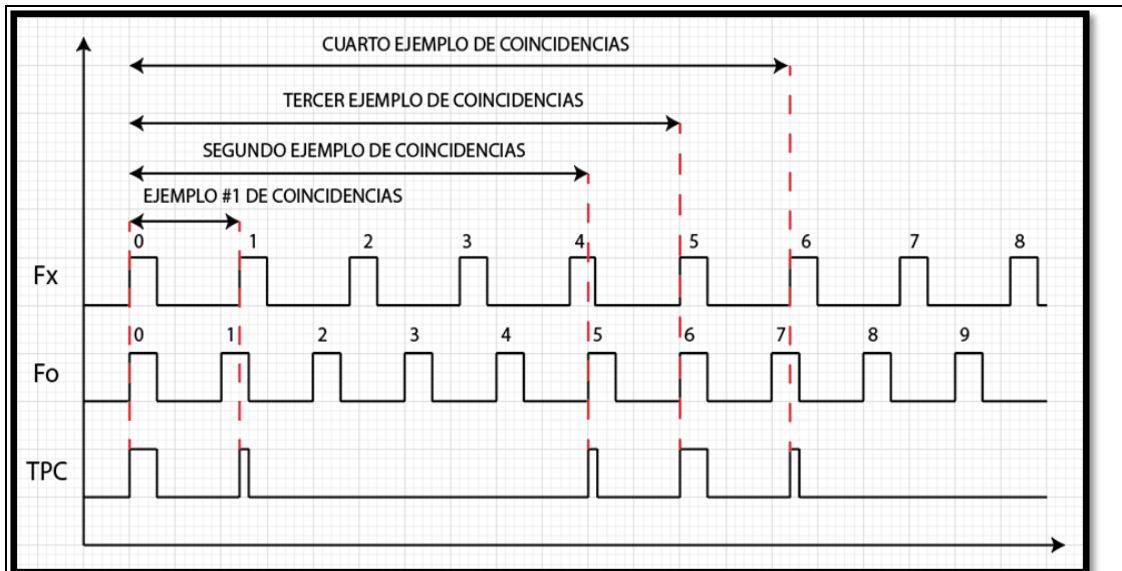
Sin Desfaseamiento:  $\Delta t = \tau$

Con Desfaseamiento:  $\Delta t = 2\tau$

#### 3.1.1 Sin Desfaseamiento

Ahora se analizará la *Fig. 5*, donde los valores son los siguientes:

$T_x = 12 UT$ ,  $T_o = 10 UT$ ,  $\tau = 3 UT$ ,  $F_x = 83.33 UF$ ,  $F_o = 100 UF$  y  $\Delta t (\tau) = 3 UT$



**Figura 5.** Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.

En la *Tabla 2* se observan los resultados de la *Fig. 5*; donde se observa que el *Ejemplo #2*, es donde se encontró la frecuencia ideal.

**Tabla 2 – Resultados Ideales de la Fig. 5**

<i>Ejemplo</i>	<i>No</i>	<i>Nx</i>	<i>ToNo</i>	<i>TxNx</i>	<i>  Error   &lt; <math>\tau</math></i>	<i>fx</i>	<i>Unidades</i>
#1	1	1	10	12	-2	100	UF
#2	5	4	50	48	2	80	UF
#3	6	5	60	60	0	83.33333333	UF
#4	7	6	70	72	-2	85.71428571	UF

### 3.1.2 Con Desfasamiento

En la *Fig. 6* (con desfasamiento en  $f_o$ ), se puede percibir que se agregaron cuatro ejemplos de coincidencias en donde se da la primera coincidencia (donde  $N_x$  y  $No$  son 0 conteos) hasta que se dan las coincidencias consiguientes (donde  $N_x$  son 2, 5, 6 o 7, y  $No$  son 2, 6, 7, u 8 conteos respectivamente). Donde los valores de la *Fig. 6* son los siguientes:

$$T_x = 12 \text{ UT}$$

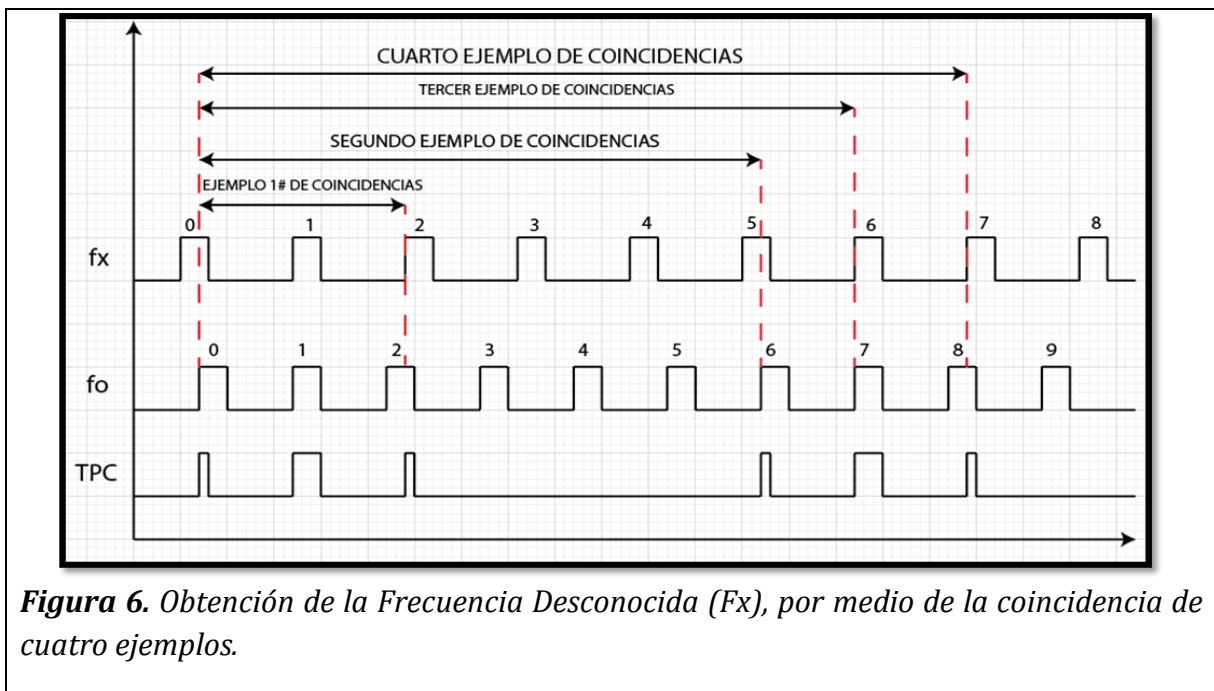
$$T_o = 10 \text{ UT}$$

$$\tau = 3 \text{ UT}$$

$$F_x = 83.33 \text{ UF}$$

$$F_o = 100 \text{ UF}$$

$$\Delta t (2\tau) = 6 \text{ UT}$$



Por lo tanto; para medir la frecuencia aproximada de la Fig. 6, se va a emplear la fórmula (5) y se analizarán los ejemplos siguientes con sus frecuencias ideales conocida y desconocida:

$$F_o = 100 \text{ UF}$$

$$F_x = 83.33 \text{ UF}$$

*Ejemplo #1 de Coincidencias:*

$$f_x \cong \frac{N_x}{N_o} f_o \cong \frac{2}{2} * (100 \text{ UF}) \cong 100 \text{ UF}$$

*Ejemplo #2 de Coincidencias:*

$$f_x \cong \frac{N_x}{N_o} f_o \cong \frac{5}{6} * (100 \text{ UF}) \cong 83.33 \text{ UF}$$

*Ejemplo #3 de Coincidencias:*

$$f_x \cong \frac{N_x}{N_o} f_o \cong \frac{6}{7} * (100 \text{ UF}) \cong 85.71 \text{ UF}$$

*Ejemplo #4 de Coincidencias:*

$$f_x \cong \frac{N_x}{N_o} f_o \cong \frac{7}{8} * (100 UF) \cong 87.50 UF$$

Se pudo observar que *el Ejemplo #2*, es el que obtuvo mayor aproximación e incluso destacar que se encontró la frecuencia ideal. En la *Tabla 3* se observan los resultados de la *Fig. 6*.

<b>Tabla 3 – Resultados Ideales de la Fig. 6</b>						
<b>No</b>	<b>Nx</b>	<b>ToNo</b>	<b>TxNx</b>	<b>  Error   &lt; 2τ</b>	<b>fx</b>	<b>Unidades</b>
2	2	20	24	-4	100	UF
6	5	60	60	0	83.3333333	UF
7	6	70	72	-2	85.7142857	UF
8	7	80	84	-4	87.5	UF

El **Error** señalado en la *Tabla 3*, es para indicar que existe coincidencia y para asegurarse que se cumpla tiene que ser menor a lo indicado (*fórmula 6*).

## 3.2 Método de Medición con Anchos de Pulsos Diferentes

En esta *Sección* están analizados varios escenarios que pueden suceder en caso de que existan pulsos diferentes. Es importante considerar que el tiempo de desfaseamiento ( $\Delta t$ ) cambia cuando se aplica un diferente escenario.

Sin Desfaseamiento:  $\Delta t = \tau_{mayor}$

Con Desfaseamiento:  $\Delta t = \tau_{mayor} + \tau_{menor}$

### 3.2.1 Sin Desfaseamiento

Incluso el método también se puede aplicar en casos donde los anchos de pulsos son diferentes. Se dará un ejemplo en la *Fig. 7*, donde sus valores son los siguientes:

$$T_x = 12 UT$$

$$T_o = 10 UT$$

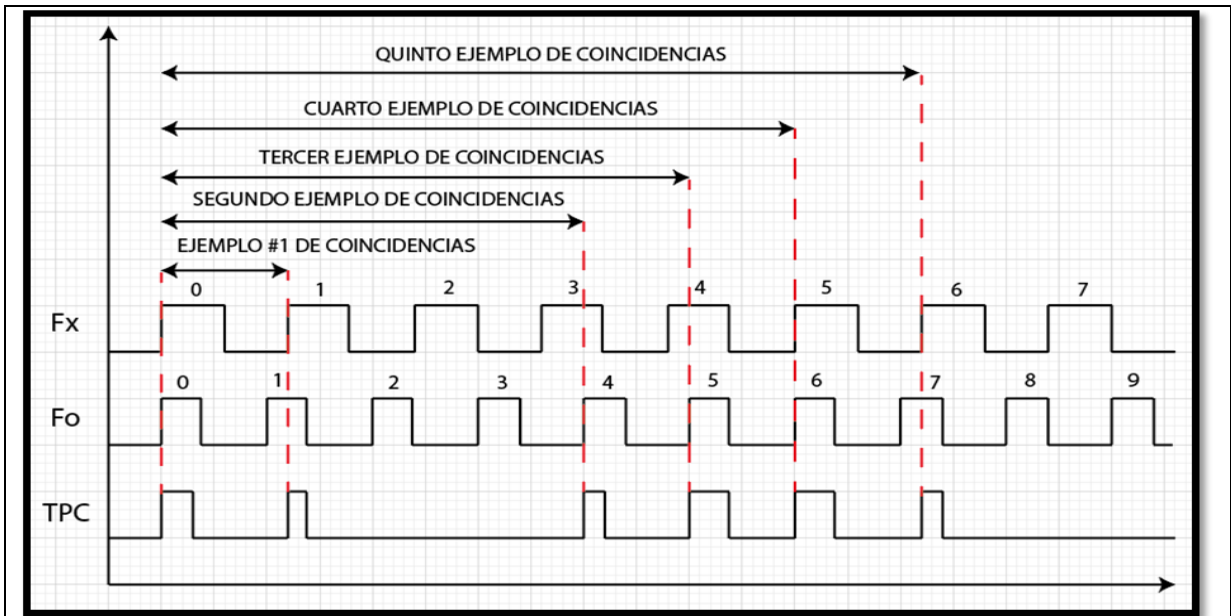
$$\tau_{mayor} = 6 UT$$

$$\tau_{menor} = 4 UT$$

$$F_x = 83.33 UF$$

$$F_o = 100 UF$$

$$\Delta t (\tau_{mayor}) = 3 UT$$



**Figura 7.** Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cinco ejemplos.

En la

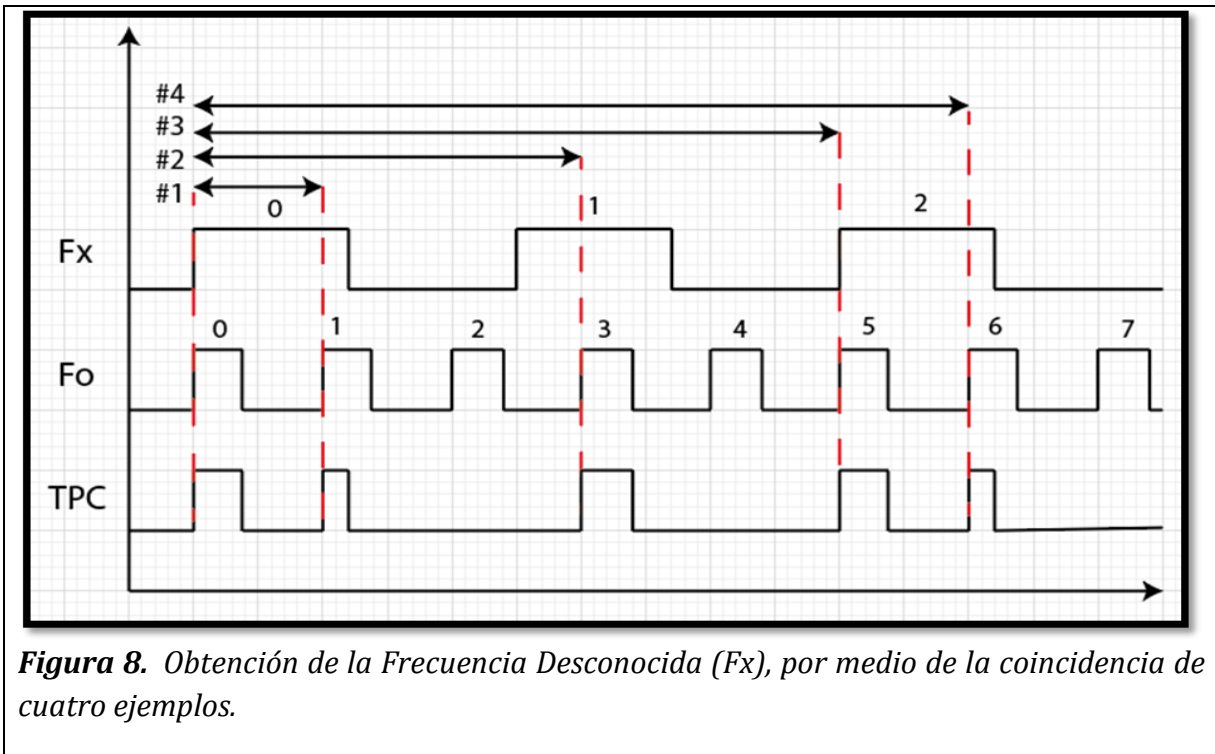
Tabla

4 se observan los resultados de la Fig. 7; donde se observa que el Ejemplo #4, es donde se encontró la frecuencia ideal.

<b>Tabla 4 – Resultados Ideales de la Fig. 7</b>							
<b>Ejemplo</b>	<b>No</b>	<b><math>N_x</math></b>	<b><math>T_o N_o</math></b>	<b><math>T_x N_x</math></b>	<b><math>  \text{Error}   &lt; \Delta t</math></b>	<b><math>f_x</math></b>	<b>Unidades</b>
#1	1	1	10	12	-2	100	UF
#2	4	3	40	36	4	75	UF
#3	5	4	50	48	2	80	UF
#4	6	5	60	60	0	83.33333333	UF
#5	7	6	70	72	-2	85.71428571	UF

En la Fig. 8, se analiza otro ejemplo; donde los valores son los siguientes:

- $T_x = 25 \text{ UT}$
- $T_o = 10 \text{ UT}$
- $\tau_{\text{mayor}} = 12 \text{ UT}$
- $\tau_{\text{menor}} = 4 \text{ UT}$
- $F_x = 40 \text{ UF}$
- $F_o = 100 \text{ UF}$
- $\Delta t (\tau_{\text{mayor}}) = 12 \text{ UT}$



En la *Tabla 5* se observan los resultados de la *Fig. 8*; donde se observa que el *Ejemplo #3*, es donde se encontró la frecuencia ideal.

<b>Tabla 5 - Resultados ideales de la Fig. 8</b>							
<b>Ejemplo</b>	<b>No</b>	<b>Nx</b>	<b>ToNo</b>	<b>TxNx</b>	<b> Error  &lt; Δt</b>	<b>fx</b>	<b>Unidades</b>
#1	1	0	10	0	10	0	UF
#2	3	1	30	25	5	33.333333	UF
#3	5	2	50	50	0	40	UF
#4	6	2	60	50	10	33.333333	UF

### 3.2.2 Con Desfasamiento

Incluso el método también se puede aplicar en casos donde los anchos de pulsos son diferentes.

En la *Fig. 9* se analizará el ejemplo con la *Tabla 9*.

$$T_x = 12 \text{ UT}$$

$$T_o = 10 \text{ UT}$$

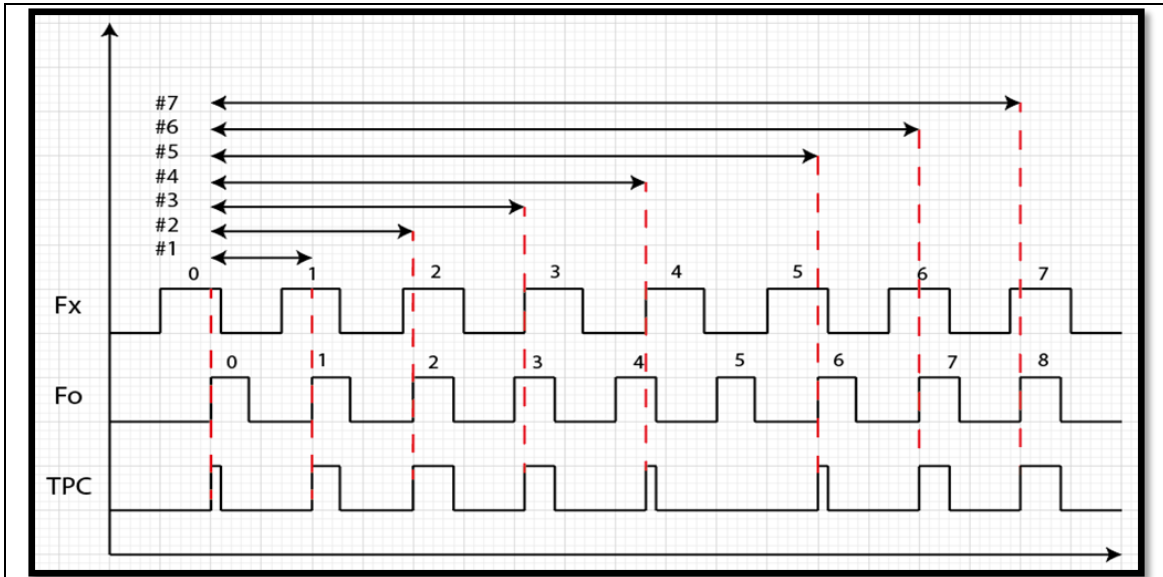
$$\tau_{\text{mayor}} = 6 \text{ UT}$$

$$\tau_{\text{menor}} = 4 \text{ UT}$$

$$F_x = 83.33 \text{ UF}$$

$$F_o = 100 \text{ UF}$$

$$\Delta t (\tau_{mayor} + \tau_{menor}) = 10 UT$$



**Figura 9.** Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de siete ejemplos.

En la

Tabla 6

se observan los resultados de la Fig. 9; donde se observa que el Ejemplo #4, es donde se encontró la frecuencia ideal.

<b>Tabla 6 – Resultados Ideales de la Fig. 9</b>							
<b>Ejemplo</b>	<b>No</b>	<b>Nx</b>	<b>ToNo</b>	<b>TxNx</b>	<b>  Error   &lt; Δt</b>	<b>fx</b>	<b>Unidades</b>
#1	1	1	10	12	-2	100	UF
#2	2	2	20	24	-4	100	UF
#3	3	3	30	36	-6	100	UF
#4	4	4	40	48	-8	100	UF
#5	6	5	60	60	0	83.33333333	UF
#6	7	6	70	72	-2	85.71428571	UF
#7	8	7	80	84	-4	87.5	UF

### 3.3 Observaciones con respecto al Método de Medición de Frecuencia

Si se pudo observar con atención en la Sección 4.1 (método de medición con anchos de pulsos iguales) y también en la Sección 4.2 (método de medición con anchos de pulsos diferentes), hay observaciones muy importantes.

En las Tablas 2 y 3 de la Sección 4.1:

- Se observa que se encontró el valor real de  $fx$ , cuando el *Error* tendía a ser cero; lo cual se considera una ventaja.
- En ambas *Tablas* los valores del *Error* varían, y más en la *Sección 4.1.2* donde existe desfaseamiento al inicio del conteo de periodos; lo cual es una clara desventaja.

En las *Tablas 4, 5 y 6* de la *Sección 4.2*:

- Varía mucho más su *Error*, e incluso destacar en la *Tabla 5* donde el *Ejemplo #1* la  $fx$  es igual a cero. Ambos casos son desventajas.
- Aunque haya desventajas, también se pudo demostrar que se puede encontrar la frecuencia desconocida real cuando *Error* tendía a cero.

### 3.3.1 Ejemplos con el Error Cero

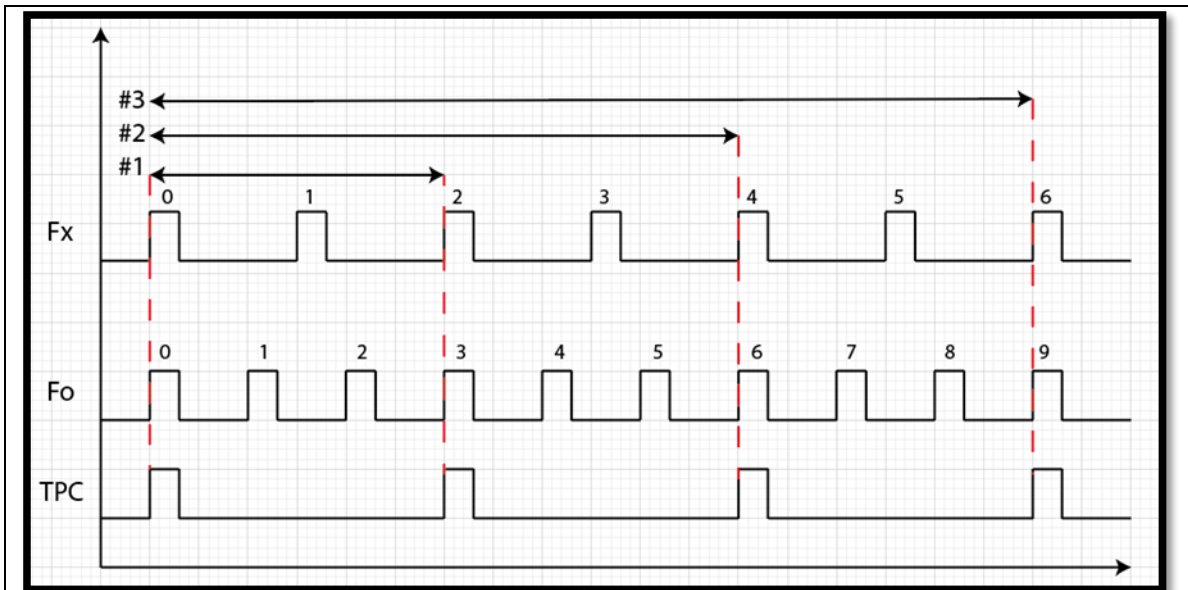
Para mejorar un escenario, en referencia a la comparación de trenes de pulsos con sus respectivas frecuencias y conocer su frecuencia desconocida; es importante conocer la teoría numérica (*Sección 5.6: Análisis Numérico en la Comparación de Trenes de Pulsos*) para evitar que se dé el menor error posible. Por ejemplo, obsérvese en la *Fig. 10* junto con la *Tabla 7* donde todos los ejemplos de coincidencias, el error es igual a cero. Donde los valores y variables:

$$T_x = 15 \text{ UT}$$

$$T_o = 10 \text{ UT}$$

$$\tau = 3 \text{ UT}$$

$$\Delta t(\tau) = 3 \text{ UT}$$



**Figura 10.** Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de tres ejemplos.

<b>Tabla 7 - Resultados Ideales de la Fig. 10</b>							
<b>Ejemplo</b>	<b>No</b>	<b>Nx</b>	<b>ToNo</b>	<b>TxNx</b>	<b>  Error   &lt; <math>\Delta t</math></b>	<b><math>f_x</math></b>	<b>Unidades</b>
#1	3	2	30	30	0	66.66667	UF
#2	6	4	60	60	0	66.66667	UF
#3	9	6	90	90	0	66.66667	UF

Incluso en la Fig. 11 con su Tabla 8, se puede observar que los anchos de pulsos son diferentes y aun así el error obtenido es igual a cero.

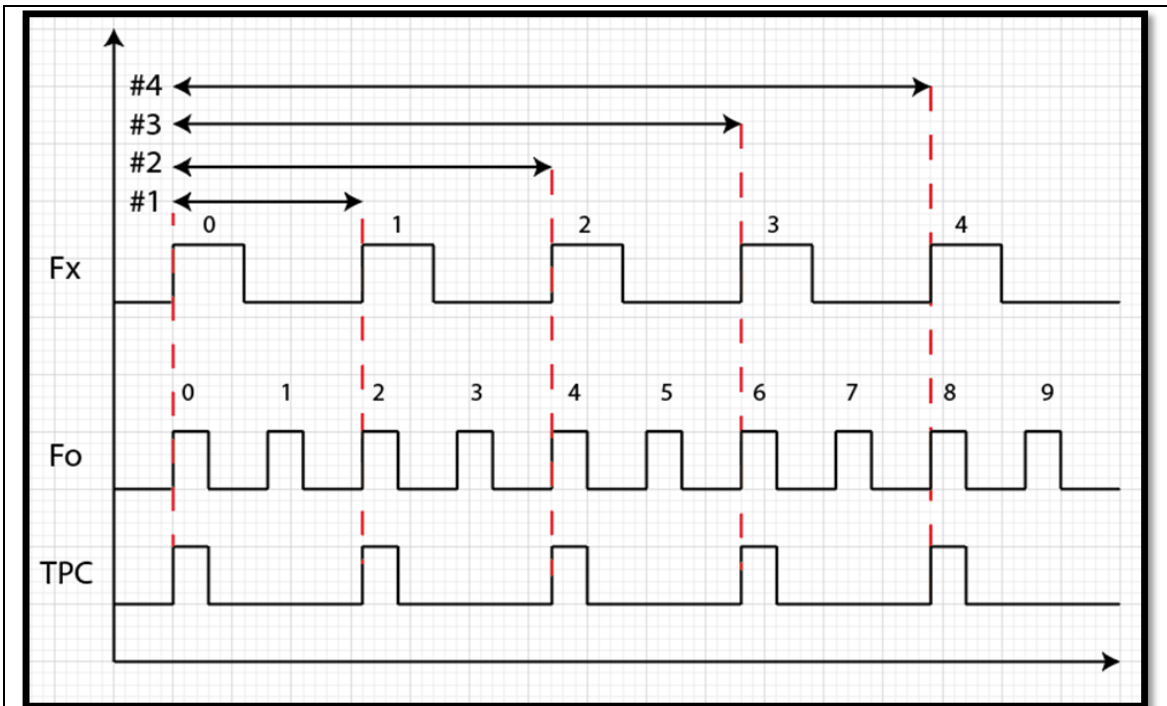
$$T_x = 16 \text{ UT}$$

$$T_o = 8 \text{ UT}$$

$$\tau_{\text{mayor}} = 6 \text{ UT}$$

$$\tau_{\text{menor}} = 3 \text{ UT}$$

$$\Delta t (\tau_{\text{mayor}}) = 6 \text{ UT}$$



**Figura 11.** Obtención de la Frecuencia Desconocida ( $F_x$ ), por medio de la coincidencia de cuatro ejemplos.

<b>Tabla 8 – Resultados Ideales de la Fig. 11</b>							
<b>Ejemplo</b>	<b>No</b>	<b><math>N_x</math></b>	<b><math>ToNo</math></b>	<b><math>T_xN_x</math></b>	<b><math> Error  &lt; \Delta t</math></b>	<b><math>f_x</math></b>	<b>Unidades</b>
#1	2	1	16	16	0	62.5	UF
#2	4	2	60	32	0	62.5	UF
#3	6	3	48	48	0	62.5	UF
#4	8	4	64	64	0	62.5	UF

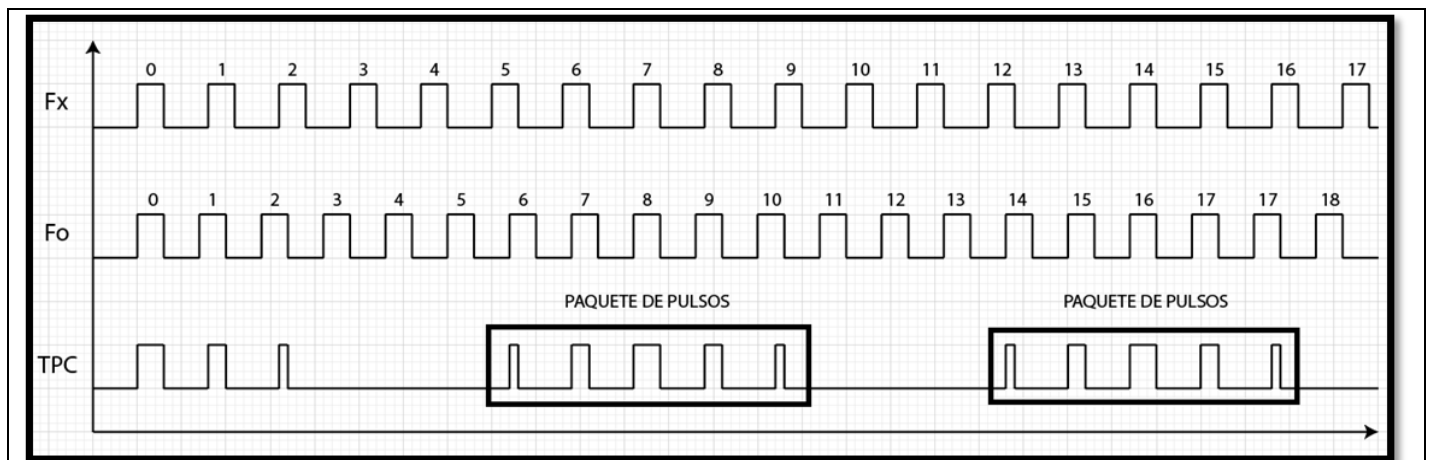
## 4 Análisis Teórico Numérico

En esta *Sección*, que consiste en explicar las cuestiones teóricas de la comparación de los trenes de pulsos de sus respectivas frecuencias, es importante mencionar que se darán distintos escenarios por medio de ejemplo gráficos y resultados sobre cómo influyen ciertos factores

numéricos en la formación de pulsos; ya sean paquetes de pulsos o cualquier escenario que el usuario desea implementar respectivamente.

## 4.1 Definición Analítica de los Paquetes de Pulsos

En términos generales y subjetivos, los “Paquetes de Pulsos”, como los que se muestran marcados en un recuadro del “TPC” de la *Fig. 12*, son un conjunto de pulsos juntos que forman una simetría en común y están apartados de otros “Paquetes de Pulsos”. Para formar los “Paquetes de Pulsos” es importante comparar los trenes de pulsos de sus respectivas frecuencias.

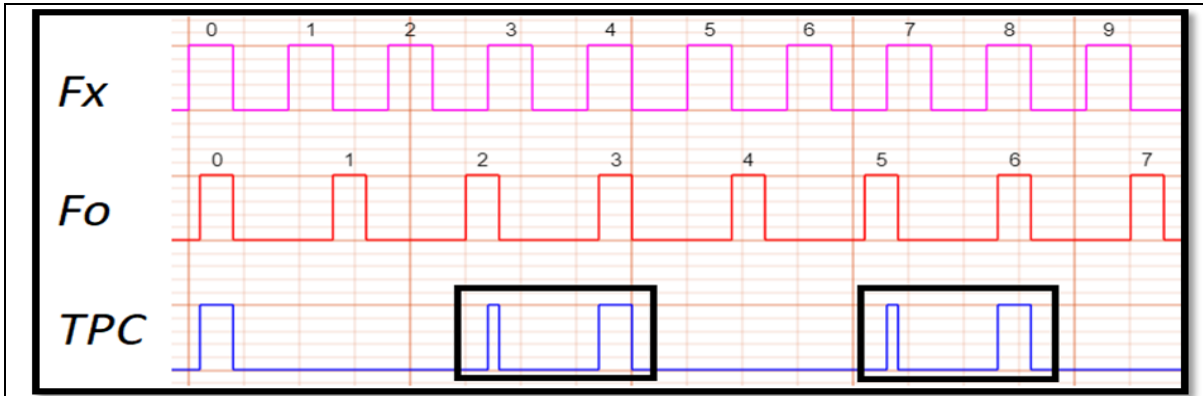


**Figura 12.** Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).

Algunas características generales que *tienen los paquetes de pulsos*, son las siguientes:

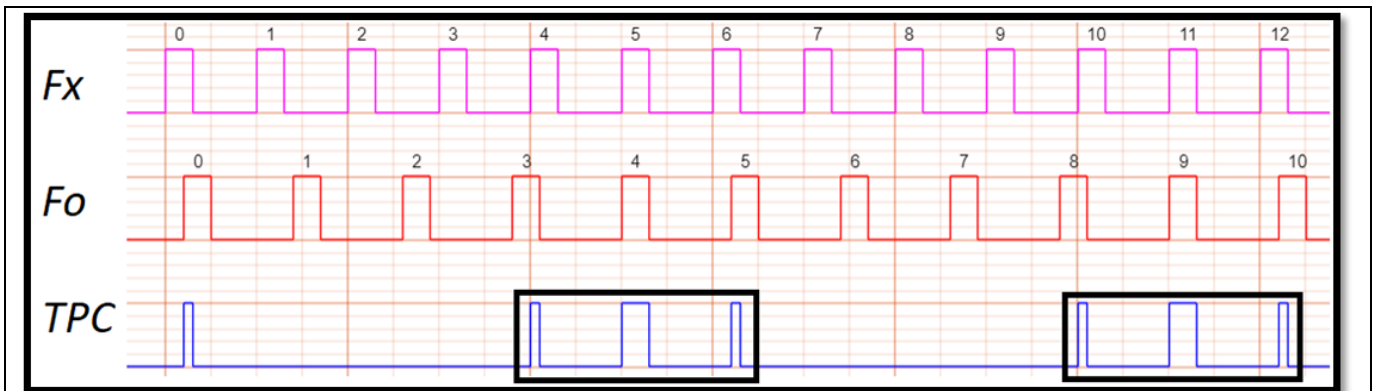
- *Generalmente tienen pulsos céntricos y a sus alrededores tienen pulsos parciales.*
- *Se caracterizan por ser en general geometrías simétricas.*
- *Normalmente los “Paquetes de Pulsos” evitan lejanías entre cada pulso dentro del conjunto, aunque puede haber excepciones en las cuales no se cumpla esa regla.*
- *Los “Paquetes de Pulsos” se pueden formar también con anchos de pulsos diferentes, no necesariamente tienen que ser la misma anchura.*

Sin embargo, los “Paquetes de Pulsos” no necesariamente tienen que ser como los mostrados en la *Fig. 12*, también pueden ser los mostrados en la *Fig. 13* y *14*.



**Figura 13.** Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).

A lo observado en ambas Fig. 13 y Fig. 14, se puede deducir que los “Paquetes de Pulsos” son, independiente de la cantidad de pulsos dentro del paquete, pulsos juntos y el paquete apartado del siguiente paquete. Incluso mencionar que se pueden formar habiendo un desfase inicial, en Fo en ambas Fig. 13 y Fig. 14.



**Figura 14.** Ilustración Gráfica con pulsos completos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo de la Representación Simétrica de los Paquetes de Pulsos).

## 4.2 Criterios Generales

Cuando se comparan los periodos (conocido y desconocido) de los trenes de pulsos de sus frecuencias, tendrán un máximo común divisor resultante e incluso va depender si son los números pares e impares (véase la Tabla 9).

<b>Tabla 9 – Periodos en Comparación (Par e Impar)</b>		
<b>PERIODOS COMPARADOS</b>	<b>MCD RESULTANTE</b>	<b>NOTA</b>

Periodo Impar	Periodo Par	MCD = 1, 3, 5, 7, ...	NÚMEROS IMPARES
Periodo Par	Periodo Par	MCD = 2, 4, 6, 8, ...	NÚMEROS PARES
Periodo Impar	Periodo Impar	MCD = 1, 3, 5, 7, ...	NÚMEROS IMPARES

En la formación de paquetes, las cercanías y lejanías depende bastante y debido a los factores geométricos que influyen en ellos, es importante analizar la *Tablas (10 - 12)*; para obtener distintos escenarios con respecto a la cercanía/lejanía de los Tx y To; pero la *Tabla 10* es la que muestra el panorama general; donde P y Q son los periodos o la suma total de ellos (inciso A).

<b>Tabla 10 - Panorama General (Cercanía y Lejanía)</b>											
<b>A</b>											
<i>+N</i>				...				<i>+N</i>			
<i>*P<sub>1</sub></i>	<i>P<sub>2</sub></i>			...				<i>P<sub>S-1</sub></i>		<i>P<sub>S</sub></i>	
<i>*Q<sub>1</sub></i>	<i>Q<sub>2</sub></i>			...				<i>Q<sub>S-1</sub></i>		<i>Q<sub>S</sub></i>	
<i>+M</i>				...				<i>+M</i>			
<b>B</b>						<b>C</b>					
<i>P<sub>1</sub></i>	<i>Y<sub>1</sub></i>	...	<i>Y<sub>C-1</sub></i>	<i>Y<sub>C</sub></i>	<i>P<sub>2</sub></i>	<i>P<sub>(S-1)</sub></i>	<i>Y<sub>1</sub></i>	...	<i>X<sub>(C-1)</sub></i>	<i>Y<sub>C</sub></i>	<i>P<sub>S</sub></i>
<i>Q<sub>1</sub></i>	<i>X<sub>1</sub></i>	...	<i>X<sub>C-1</sub></i>	<i>X<sub>C</sub></i>	<i>Q<sub>2</sub></i>	<i>Q<sub>(S-1)</sub></i>	<i>X<sub>1</sub></i>	...	<i>Y<sub>(C-1)</sub></i>	<i>X<sub>C</sub></i>	<i>Q<sub>S</sub></i>

\*Si existiera un desfaseamiento al inicio en cualquiera de *P<sub>1</sub>* o *Q<sub>1</sub>*, se le agregaría el valor del desfaseamiento.

Por ejemplo:

Con desfaseamiento: *\*P<sub>1</sub> = P<sub>1</sub> + Desfaseamiento* o *\*Q<sub>1</sub> = Q<sub>1</sub> + Desfaseamiento*.

Sin desfaseamiento: *\*P<sub>1</sub> = P<sub>1</sub> + 0* o *\*Q<sub>1</sub> = Q<sub>1</sub> + 0*.

Para determinar si hubo una coincidencia con respecto a los anchos de pulsos de sus respectivas frecuencias en comparación, obsérvese las condiciones que tienen que cumplir cuando son anchos de pulsos iguales o diferentes (*Tablas 11 - 12*). La diferencia del lapso de tiempo que ha ocurrido entre ambos periodos o la suma total de esos periodos siendo elemento del conjunto del rango de desfaseamiento, se interpreta de la siguiente manera:

$$(nP - mQ) \in \{-(\tau - 1), \dots, 0, \dots, (\tau - 1)\}$$

Si no es elemento del conjunto del rango de desfaseamiento, se interpreta de la siguiente forma:

$$(nP - mQ) \notin \{-(\tau - 1), \dots, 0, \dots, (\tau - 1)\}$$

En la *Tabla 11* se muestran los elementos o no elementos de los conjuntos del rango de desfaseamiento que se explicaron, donde se consideran para anchos de pulsos iguales y diferentes.

<b>Tabla 11 – Elemento del Rango de Desfaseamiento</b>	
<i>Anchos de Pulsos Iguales:</i>	$(P_s - Q_s) \in \{-(\tau - 1), \dots, 0, \dots, (\tau - 1)\}$ $(Y_c - X_c) \notin \{-(\tau - 1), \dots, 0, \dots, (\tau - 1)\}$
<i>Anchos de Pulsos Diferentes:</i>	$(P_s - Q_s) \in \{-(\tau_{mayor} - 1), \dots, 0, \dots, (\tau_{mayor} - 1)\}$ $(Y_c - X_c) \notin \{-(\tau_{mayor} - 1), \dots, 0, \dots, (\tau_{mayor} - 1)\}$

La *Tabla 12* muestra en el inciso A donde inicia la primera coincidencia y los criterios a seguir para llegar hasta la segunda coincidencia. En la parte B se muestra la penúltima y la última coincidencia; para después iniciar el ciclo de la primera coincidencia, donde PT es igual a la suma total de periodos (*para mayor entendimiento véase el ejemplo de la Fig. 26*).

<b>Tabla 12 – Extracto de la Tabla 10</b>		
<b>A</b>	<b>...</b>	<b>B</b>
$P_1 > Q_1 \rightarrow Y_1 = (P_1 + PT), X_1 = (Q_1 + 0);$ $Q_1 > P_1 \rightarrow X_1 = (Q_1 + PT), Y_1 = (P_1 + 0);$ ..... $Y_c > X_c \rightarrow Q_2 = (X_c + PT), P_2 = (Y_c + 0);$ $X_c > Y_c \rightarrow P_2 = (Y_c + PT), Q_2 = (X_c + 0);$	... ... ...	$P_{(S-1)} > Q_{(S-1)} \rightarrow Y_1 = (P_1 + PT), X_1 = (Q_1 + 0);$ $Q_{(S-1)} > P_{(S-1)} \rightarrow X_1 = (Q_1 + PT), Y_1 = (P_1 + 0);$ ..... $Y_c > X_c \rightarrow Q_s = (X_c + PT), P_s = (Y_c + 0);$ $X_c > Y_c \rightarrow P_s = (Y_c + PT), Q_s = (X_c + 0);$

### 4.3 Obtención de Pulsos de Anchos Constantes en el TPC

Existen distintas maneras de como el TPC se convierte a un sólo pulso con un ancho constante, es importante seguir una serie de criterios para obtener los pulsos con un ancho constante dentro del TPC, que se presentan en los criterios (7 – 11).

A continuación, se presentan los modelos:

*PARA EL MODELO (1) – (ANCHOS DE PULSOS IGUALES)*

$$MCD \geq \tau \quad (7)$$

PARA EL MODELO (2) - (ANCHOS DE PULSOS DIFERENTES)

$$MCD \geq \tau_{menor} \ \&\& \ MCD \geq \tau_{mayor} \quad (8)$$

$$MCD = \tau_{menor} \ \&\& \ \left(\frac{\tau_{mayor}}{\tau_{menor}}\right) : Divisible \quad (9)$$

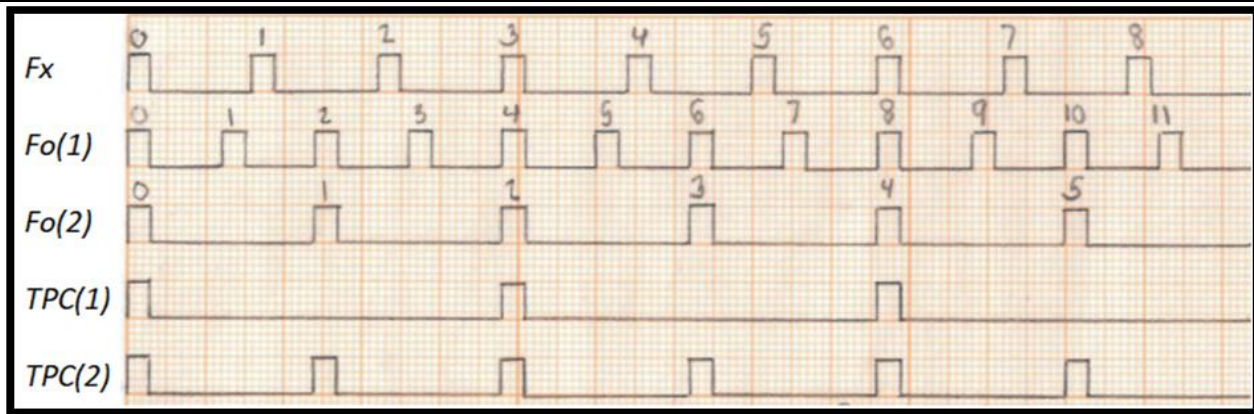
$$R \geq \tau_{menor} \ \&\& \ MCD > \tau_{menor} \quad (10)$$

$$\tau_{mayor} = C(MCD) + R \quad (11)$$

*NOTA: Se tiene que tomar en cuenta que los criterios anteriores (7 - 11), son fórmulas o comparaciones que se obtuvieron para determinar algunos escenarios en específico para la obtención de un sólo pulso con un ancho constante en el tren de pulsos de coincidencias; por lo tanto, se pueden implementar más de esos criterios si se busca más a profundidad.*

#### 4.3.1 Modelo (1) - (Anchos de Pulso Iguales)

Ahora se verán algunos ejemplos para el MODELO (1). El primer ejemplo se observará en el *Fig. 15* junto con la *Tabla 13*.



**Figura 15.** Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Primer Ejemplo de Modelo(1)).

<b>Tabla 13 - Valores de la Fig. 15</b>					
<b>A</b>		<b>B</b>			
VARIABLES	VALOR		$F_x$	$F_o(1)$	$F_o(2)$
$\tau$	3 UT	TPC(1)	✓	✓	✗
$T_x$	16 UT	TPC(2)	✗	✓	✓
$T_o(1)$	12 UT				
$T_o(2)$	24 UT	<b>C</b>			
			VARIABLES	VALORES	MCD
		TPC(1)	$(T_x, T_o(1))$	$(16, 12)$	4 UT
		TPC(2)	$(T_o(1), T_o(2))$	$(12, 24)$	12 UT

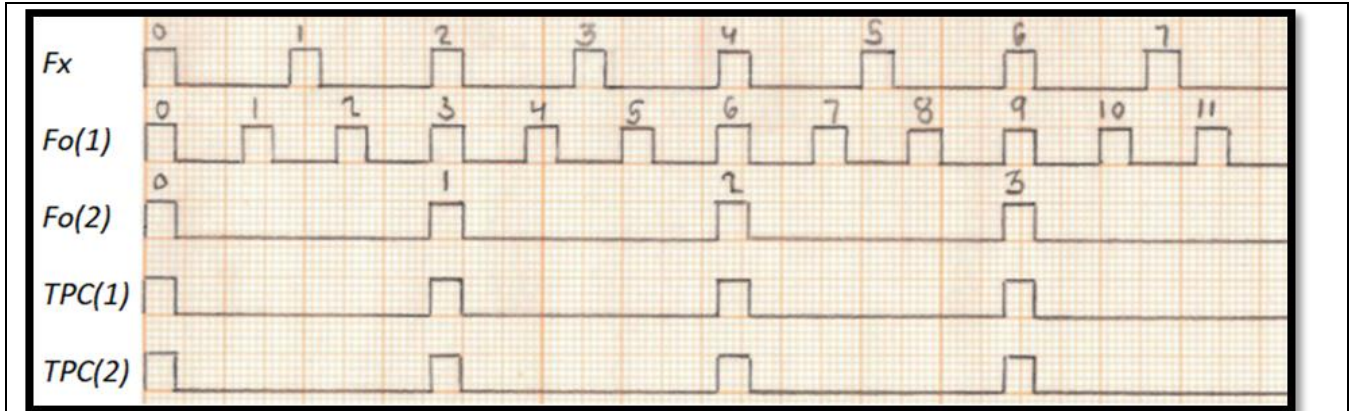
En la *Tabla 13* se pudo observar con respecto al inciso C que el MCD que se obtiene en todas las comparaciones de los periodos (TPC (1 – 2)) con sus respectivas frecuencias es:

*Fórmula (7)*

$(MCD \geq \tau) \rightarrow (4 \geq 3) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$

$(MCD \geq \tau) \rightarrow (12 \geq 3) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$

Para analizar otro ejemplo del MODELO (1), es importante considerar los criterios que se tomaron anteriormente con respecto a la Fig. 15 y la Tabla 13. En la Fig. 16 se va a considerar junto con la Tabla 14.



**Figura 16.** Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo de Modelo(1)).

Tabla 14 - Valores de la Fig. 16					
A		B			
VARIABLES	VALOR		Fx	Fo(1)	Fo(2)
$\tau$	4 UT	TPC(1)	✓	✓	✗
$T_x$	18 UT	TPC(2)	✓	✗	✓
$To(1)$	12 UT				
$To(2)$	36 UT				
		C			
			VARIABLES	VALORES	MCD
		TPC(1)	$(T_x, To(1))$	$(18, 12)$	6 UT
		TPC(2)	$(T_x, To(2))$	$(18, 36)$	18 UT

En la *Tabla 14* se pudo observar con respecto al inciso C que el MCD que se obtiene en todas las comparaciones de los periodos (TPC (1 – 2)) con sus respectivas frecuencias es:

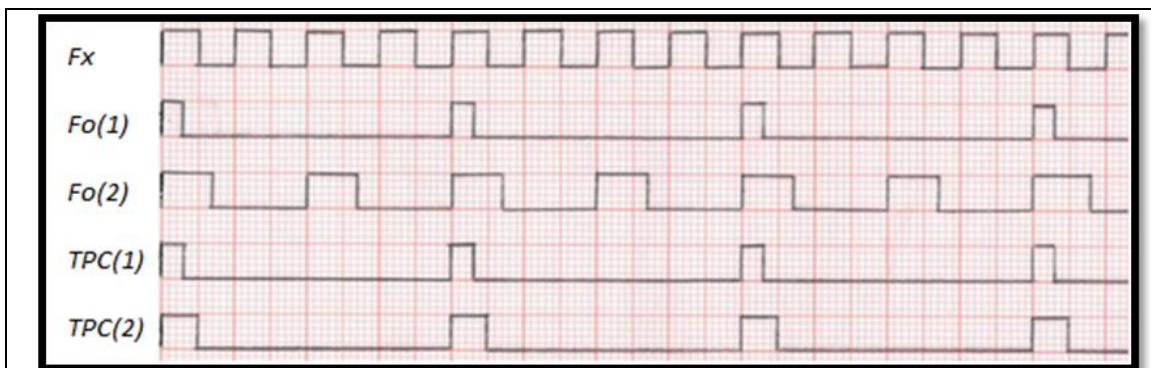
*Fórmula (7)*

$$(MCD \geq \tau) \rightarrow (6 \geq 4) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

$$(MCD \geq \tau) \rightarrow (18 \geq 4) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

### 4.3.2 Modelo (2) – (Anchos de Pulsos Diferentes)

Ahora se verán algunos ejemplos del mismo MODELO (2), pero considerando diferentes anchos de pulso. El primer ejemplo se observará en el *Fig. 17* junto con la *Tabla 15*.



**Figura 17.** Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Primer Ejemplo de Modelo(2)).

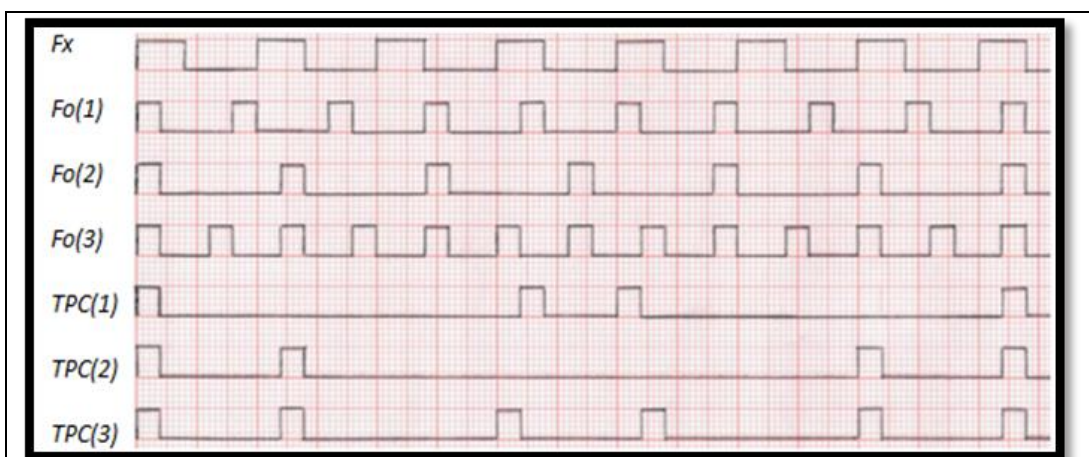
<b>Tabla 15 - Valores de la Fig. 17</b>			
<b>A</b>			
		TIEMPO	
$\tau (F_x)$		5 UT	
$\tau (F_o(1))$		3 UT	
$\tau (F_o(2))$		8 UT	
<b>B</b>		<b>C</b>	
	VALOR		
$T_x$	10 UT		
$T_o(1)$	40 UT	$F_x$	$F_o(1)$
$T_o(2)$	20 UT	$F_o(2)$	
		TPC(1)	TPC(2)
		✓	✗
		✓	✓
<b>D</b>			
	VARIABLES	VALORES	MCD
TPC(1)	$(T_x, T_o(1))$	$(10, 40)$	10 UT
TPC(2)	$(T_x, T_o(2))$	$(10, 20)$	10 UT

En la *Tabla 15* se pudo observar con respecto al inciso (D) que el MCD que se obtiene es mayor a los anchos de pulsos de ambos trenes de pulsos en comparación (*fórmula (8)*):

$TPC(1): (MCD \geq \tau_{Mayor}) \ \&\& \ (MCD \geq \tau_{Menor}) \rightarrow (10 \geq 5) \ \&\& \ (10 \geq 3) : ES CORRECTO \checkmark$

$TPC(2): (MCD \geq \tau_{Mayor}) \ \&\& \ (MCD \geq \tau_{Menor}) \rightarrow (10 \geq 8) \ \&\& \ (10 \geq 5) : ES CORRECTO \checkmark$

El segundo ejemplo tiene otra manera de analizar la obtención de coincidencia de pulsos y se observará en el *Fig. 18* junto con la *Tabla 16*.



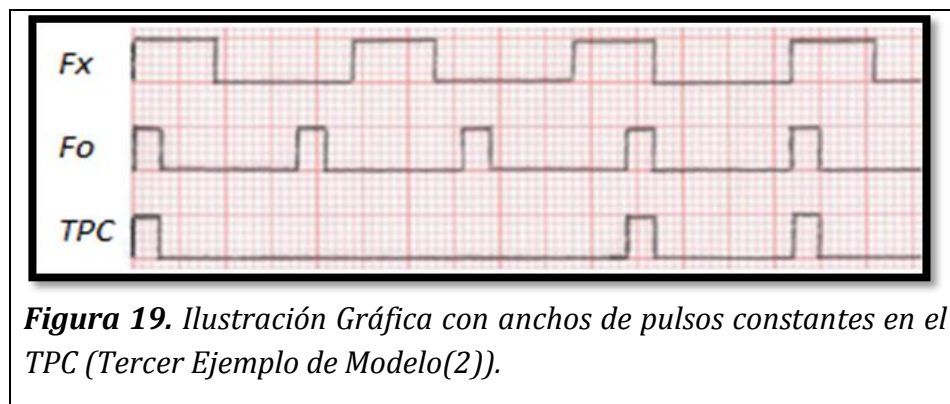
**Figura 18.** Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo de Modelo(2)).

Tabla 16 - Valores de la Fig. 18			
A			
		TIEMPO	
$\tau(Fx)$		8 UT	
$\tau(Fo(1), Fo(2) \text{ y } Fo(3))$		4 UT	
B		C	
	TIEMPO		
$Tx$	20 UT		
$To(1)$	16 UT	Fx	Fo(1)
$To(2)$	24 UT	Fo(2)	Fo(3)
$To(3)$	12 UT	TPC(1)	TPC(2)
		TPC(3)	
		✓	✓
		✓	✗
		✓	✗
		✗	✗
		✗	✓
D			
	VARIABLES	VALORES	MCD
TPC(1)	$(Tx, To(1))$	$(20, 16)$	4 UT
TPC(2)	$(Tx, To(2))$	$(20, 24)$	4 UT
TPC(3)	$(Tx, To(3))$	$(20, 12)$	4 UT

Para todos los casos de la *Tabla 16*, se cumple el mismo criterio con respecto a su MCD y sus respectivos anchos de pulsos es (fórmula (9)):

$$TPC(1 - 3): (MCD = \tau_{Menor}) \ \&\& \ (\tau_{Mayor} / \tau_{Menor}) \rightarrow (4 = 4) \ \&\& \ (8 / 4) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

El tercer ejemplo, se observará en la *Fig. 19* junto con la *Tabla 17*.



**Tabla 17 - Valores de la Fig. 19**

<b>A</b>			
	VALOR		
$\tau(Fx)$	9 UT		
$\tau(Fo)$	3 UT		
<b>B</b>			
	VALOR		
$Tx$	24 UT		
$To$	18 UT		
<b>C</b>			
	VARIABLES	VALORES	MCD
TPC	$(Tx, To)$	$(24, 18)$	6 UT

Para el caso de la *Tabla 17*, se obtienen los respectivos valores para hacer válido el análisis:

*Fórmulas e Igualdades (10 - 11)*

$$\tau_{\text{Mayor}} = C(MCD) + R \rightarrow 9 = C(6) + R; (C = 1, R = 3)$$

$$(R \geq \tau_{\text{Menor}}) \ \&\& \ (MCD > \tau_{\text{Menor}}) \rightarrow (3 \geq 3) \ \&\& \ (6 > 3) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

#### 4.3.3 Observaciones de la Obtención de Pulsos de Anchos Constantes en el TPC

Algunas observaciones que se pudieron determinar en los ejemplos anteriores de la obtención de Pulsos en el TPC, es que como se comentó es que solamente tienen un ancho constante en el TPC y por lo tanto se evitan los pulsos parciales.

Incluso las igualdades que se plasmaron funcionan para entender como formar escenarios en referencia a la sola obtención de pulsos de anchos constantes en el TPC; pero lo más importante es mencionar que se evitan pulsos parciales.

Pero para ir adelantando la razón de su importancia, como consecuencia se podría deducir que la obtención de pulsos de anchos constantes en el TPC, dan los mejores escenarios que permiten encontrar la frecuencia desconocida (incluso los mejores escenarios son si el máximo común divisor es mayor a los anchos de pulsos [21]); porque evitan diferentes desfases cuando coinciden los trenes de pulsos, pero no necesariamente todos los escenarios son apropiados. Por ejemplo, aunque no se ha mencionado por el momento, cuando los anchos de pulsos son diferentes como los vistos en las *Fig. 18* y *Fig. 19* se pueden obtener dos pulsos dentro de otro pulso, lo cual podría ser una desventaja.

Pero si se quiere conocer con mayor detalle cómo influyen los desfases y como aparecen coincidencias parciales, obsérvese en la *Sección 5.6: Análisis Numérico en la Comparación de Trenes de Pulsos* para comprender la relación de la teoría de números en la comparación de trenes de pulsos de las frecuencias.

En la *Sección 5.6*, se podrá observar por medio de ecuaciones diofánticas y congruencias; como formar escenarios que tengan desfases de ceros unidades y también comprender que los anchos diferentes pueden afectar al momento de encontrar la frecuencia desconocida.

## 4.4 Obtención de Paquetes con Pulsos Completos y Parciales

En esta *Sección* se hablará de cómo se obtienen los paquetes con pulsos completos y parciales cuando se comparan mínimo 2 o más trenes de pulsos de frecuencia. Existen ciertas cuestiones sobre la formación de paquetes, algunas de ellas son los siguientes criterios:

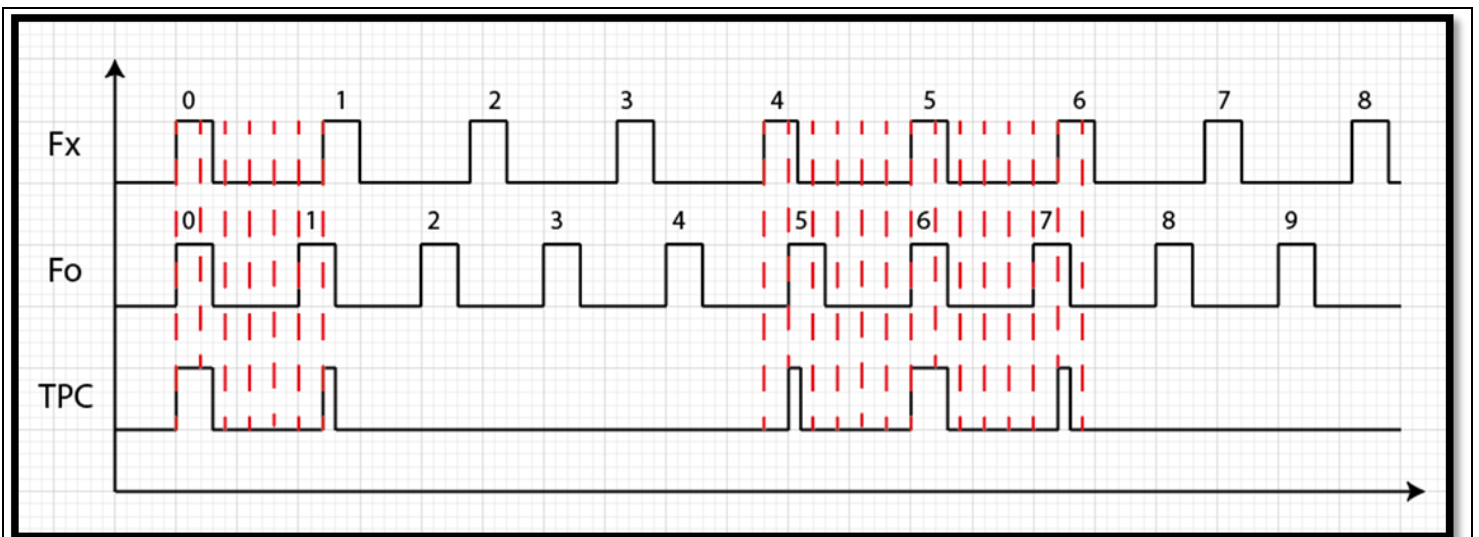
- *Es entender cómo influye el MCD de los periodos comparados ( $T_x, T_o$ ) de los trenes de pulsos de sus frecuencias ( $F_x, F_o$ ) en la formación y modificación de paquetes de pulsos.*
- *Sobre qué condiciones se deben cumplir para tener paquetes cortos y de paquetes largos.*

- Las condiciones que se deben cumplir para que los paquetes sean simétricos y que no sean simétricos (asimétricos).
- Los parámetros geométricos (y cuando) depende la relación entre ancho de paquete y distancia entre dos paquetes adyacentes.

Con respecto a la formación de paquetes, se comentó anteriormente que por lo general son un conjunto de pulsos que están apartados de otro conjunto de paquetes de pulsos.

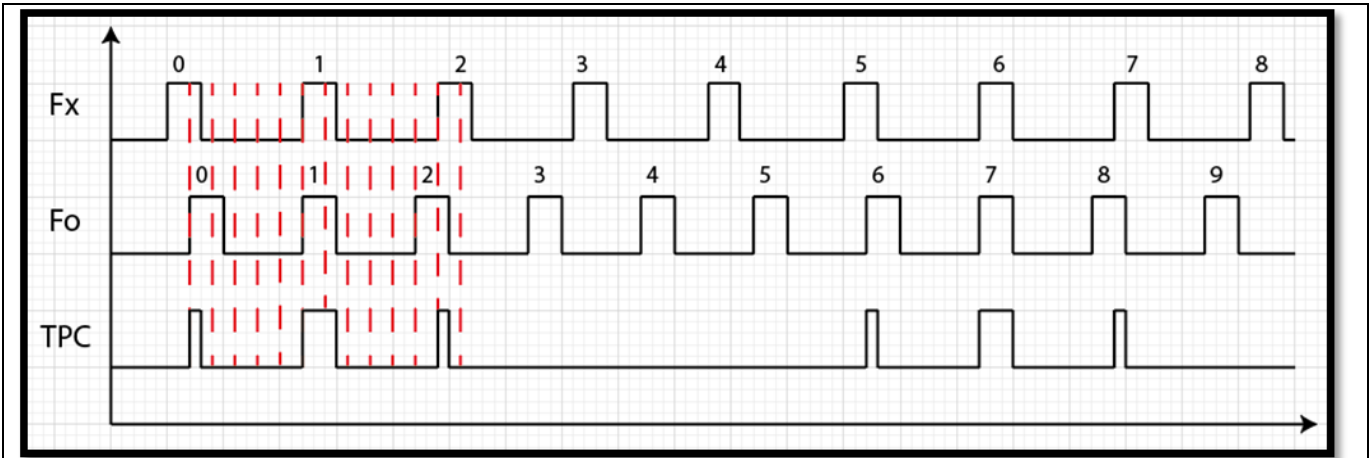
En la *Fig. 20* se representa gráficamente un ejemplo sin desfase de cómo influye el *MCD* en la formación de paquetes, si se puede observar bien las líneas marcadas rojas se van recorriendo hasta que existe una la coincidencia siguiente; donde los valores de la *Fig. 20* son:

$$T_x = 12 UT, T_o = 10 UT \text{ y } \tau = 3 UT$$



**Figura 20.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de la Influencia del MCD).

A diferencia de la *Fig. 20*, en la *Fig. 21* se muestra el ejemplo con un desfase de  $2UT$  en la Frecuencia Conocida ( $F_o$ ).



**Figura 21.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de la Influencia del MCD).

En la formación de paquetes se ha notado que si se sigue la *igualdad (12)*, los paquetes tienden a ser simétricos; que tienen un cierto orden al momento de que hay coincidencias. Si no se sigue la *igualdad (12)*, tiende a existir incertidumbre en el TPC y como consecuencia los paquetes de pulsos serán asimétricos o incluso analizando las geometrías llegar a casos simétricos.

$$|Tx - To| = MCD \quad \text{Sea } \rightarrow MCD = (Tx, To) \ \&\& \ MCD < \tau \quad (12)$$

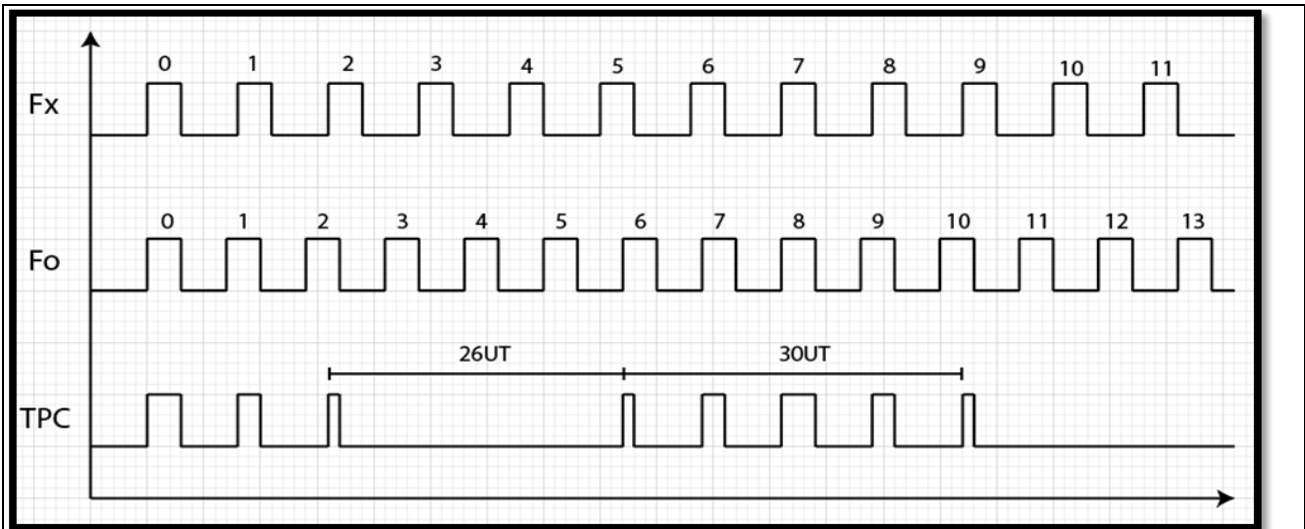
Para las condiciones que se han analizado que tienen que cumplir los paquetes en los siguientes escenarios:

- De tener Paquetes Cortos y Largos.
- La Anchura de Paquete y distancia entre dos Paquetes Adyacentes.

Son directamente proporcionales con la multiplicación de los periodos ( $T_x, T_o$ ); mientras se cumpla la siguiente *igualdad (12)* de la simetría de paquetes de pulsos.

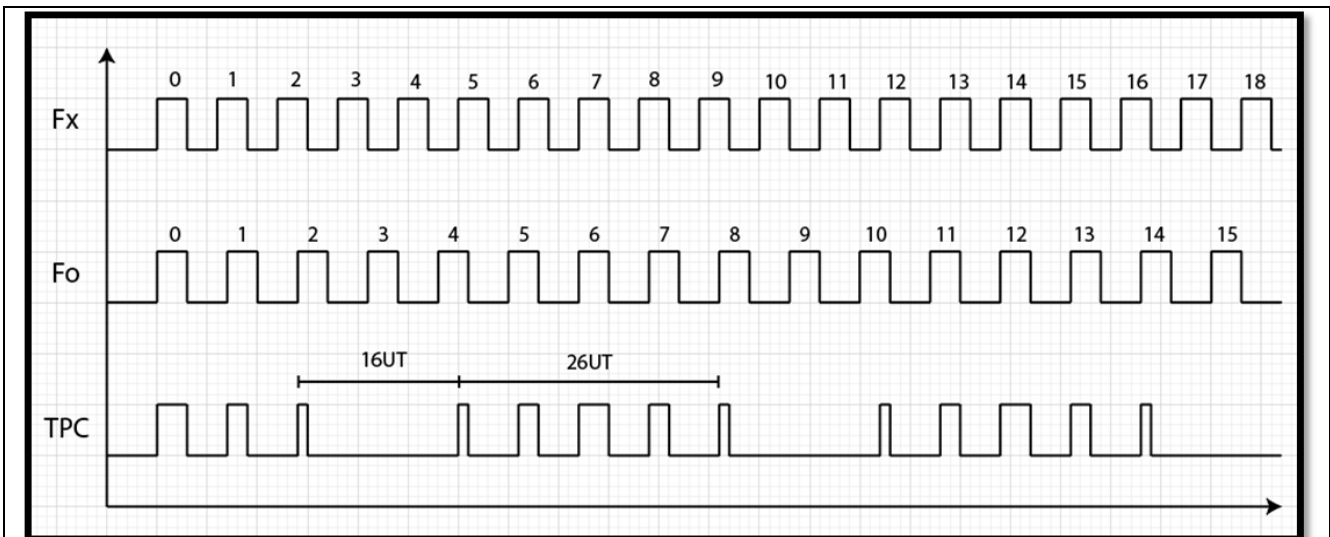
En las *Fig. 22* y *Fig. 23*, se perciben que los paquetes de pulsos son con diferente anchura y que tan adyacente está un paquete de pulsos con respecto a otro paquete. Al igual que la condición de paquete largos y cortos, también éstas últimas condiciones están directamente relacionadas con la multiplicación de los periodos ( $T_x, T_o$ ). En la *Fig. 22* se percibe que la anchura del paquete de

pulsos es igual  $30 UT$  y la distancia adyacente entre otros paquetes sería de  $26 UT$ ; donde su  $T_x = 8 UT$  y su  $T_o = 7 UT$ .



**Figura 22.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de la anchura de Paquete).

Mientras que en la Fig. 23 se percibe que la anchura del paquete de pulsos es igual  $26 UT$  y la distancia adyacente entre otros paquetes sería de  $16 UT$ ; donde su  $T_x = 6 UT$  y su  $T_o = 7 UT$ .



**Figura 23.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de la anchura de Paquete).

#### 4.4.1 Paquetes con Pulsos Completos y Parciales

Para obtener los paquetes con pulsos completos y parciales, es necesario entender los criterios que es para cada caso. A continuación, se va a mencionar ciertos criterios a seguir:

*PARA EL MODELO (3) – ANCHOS DE PULSOS IGUALES*

- *SIN DESFASAMIENTO Y EL DESFASAMIENTO ES DIVISIBLE POR EL MCD (TOTAL DE PULSOS COMPLETOS Y PARCIALES)*

$$(|T_o - T_x| = MCD) \ \&\& \ (MCD < \tau) \quad (13)$$

$$\tau = C(MCD) + RESIDUO \quad (14)$$

$$RESIDUO \begin{cases} = 0 ; & K = 2 * (C) - 1 \\ \neq 0 ; & K = 2 * (C + 1) - 1 \end{cases} \quad (15)$$

*PARA EL MODELO (4) – ANCHOS DE PULSOS DIFERENTES*

- *SIN DESFASAMIENTO (TOTAL DE PULSOS COMPLETOS)*

$$(MCD < \tau_{menor}) \quad (16)$$

$$(\tau_{mayor} - \tau_{menor}) = C(MCD) + R \quad (17)$$

$$KK = C + 1 \quad (18)$$

$$Residuo \begin{cases} = 0 ; & \text{Pulsos Parciales Iguales} \\ \neq 0 ; & \text{Pulsos Parciales Diferentes} \end{cases} \quad (19)$$

- *SIN DESFASAMIENTO (TOTAL DE PULSOS COMPLETOS Y PARCIALES)*

***Lado Derecho***

$$\tau_{mayor} = C(MCD) + R \quad (20)$$

$$R \begin{cases} = 0 & K_1 = C \\ \neq 0 & K_1 = C + 1 \end{cases} \quad (21)$$

### **Lado Izquierdo**

$$\tau_{menor} - MCD = C(MCD) + R \quad (22)$$

$$R \begin{cases} = 0 & K_2 = C \\ \neq 0 & K_2 = C + 1 \end{cases} \quad (23)$$

### **Pulsos por Paquete**

$$K = K_1 + K_2 \quad (24)$$

### **PARA EL MODELO (5) - ANCHOS DE PULSOS IGUALES Y PULSOS DIFERENTES**

- *CON DESFASAMIENTO (TOTAL DE PULSOS COMPLETOS Y PARCIALES) Y OBTENCIÓN DE PULSOS DE ANCHOS CONSTANTES (Si:  $MCD \geq \tau$ )*

### **Lado Derecho**

$$\tau_{SD} - D = C(MCD) + R \quad (25)$$

$$R \begin{cases} = 0 & K_1 = C \\ \neq 0 & K_1 = C + 1 \end{cases} \quad (26)$$

### **Lado Izquierdo**

$$D - MCD + \tau_{CD} = C(MCD) + R \quad (27)$$

$$R \begin{cases} = 0 & K_2 = C \\ \neq 0 & K_2 = C + 1 \end{cases} \quad (28)$$

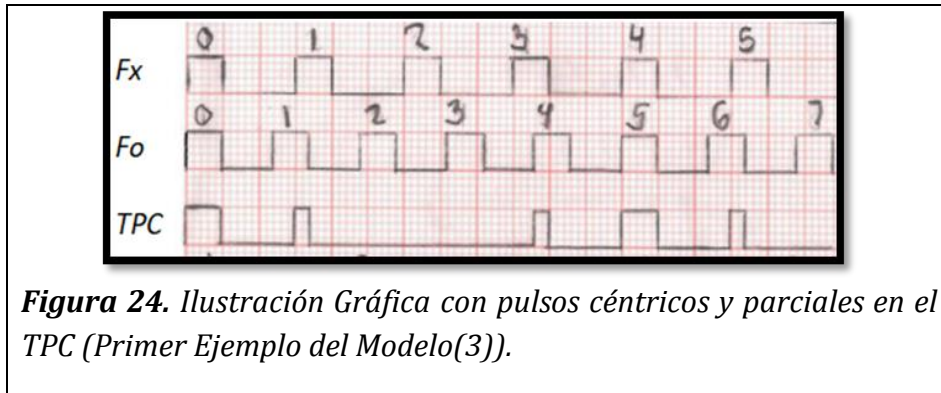
### **Pulsos por Paquete**

$$K = K_1 + K_2 \quad (29)$$

*NOTA: Se tiene que tomar en cuenta que los criterios anteriores (13 - 29), son fórmulas, igualdades o comparaciones que se obtuvieron para determinar algunos escenarios en específico para la obtención de pulsos juntos (paquetes simétricos) en el tren de pulsos de coincidencias; por lo tanto, se pueden implementar más de esos criterios si se busca más a profundidad.*

#### 4.4.1.1 Modelo (3) – (Anchos de Pulsos Iguales)

Ahora se verán algunos ejemplos para el MODELO (3), donde ambos trenes de pulso en comparación; que se observa en la *Fig. 24* junto con la *Tabla 18*.



**Figura 24.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(3)).

Tabla 18 – Valores de la Fig. 24					
A		B			
	TIEMPO		VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau$	5 UT	TPC	$(Tx, To)$	$(15, 12)$	3 UT
$Tx$	15 UT				
$To$	12 UT				

En la *Tabla 18* se pudo observar con respecto al inciso B que el MCD que se obtiene está dentro del rango siguiente:

*Fórmulas e Igualdades (13 – 15)*

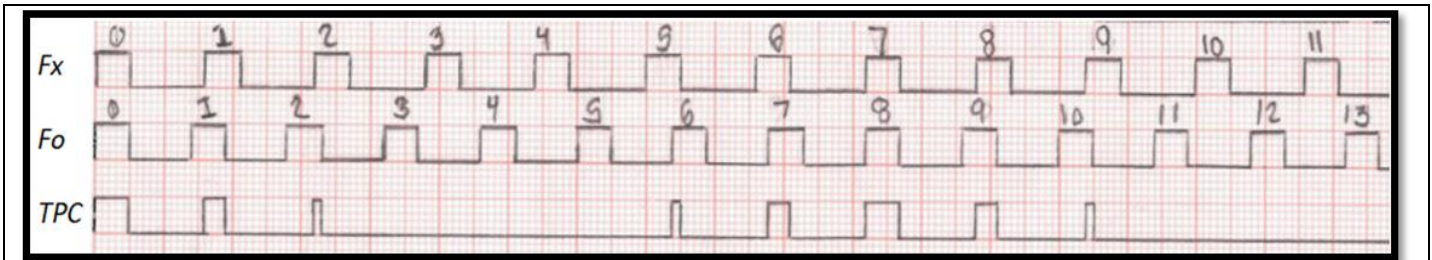
$$(|To - Tx| = MCD) \ \&\& \ (MCD < \tau) \rightarrow (|12 - 15| = 3) \ \&\& \ (3 < 5) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

$$\tau = C(MCD) + \text{RESIDUO} \rightarrow \text{TOTAL DE PULSOS POR PAQUETE} = 2*(C + 1) - 1$$

$$5 = (1)(3) + 2 \rightarrow \text{TOTAL DE PULSOS POR PAQUETE} = 2*(1 + 1) - 1 = 2*(2) - 1$$

“TOTAL POR PAQUETE = 3 PULSOS”

El segundo ejemplo se analiza junto con la *Fig. 25* y la *Tabla 19*. Se modifica las unidades de tiempo con respecto a sus periodos.



**Figura 25.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(3)).

Tabla 19 - Valores de la Fig. 25					
A		B			
	VALOR		VARIABLES	VALORES	RESULTADO DEL MCD
$\tau$	5 UT				
$T_x$	16 UT	TPC	$(T_x, T_o)$	$(16, 14)$	$2 UT$
$T_o$	14 UT				

En la *Tabla 19* se pudo observar con respecto al inciso B que el MCD que se obtiene está dentro del rango siguiente:

*Fórmulas e Igualdades (13 - 15)*

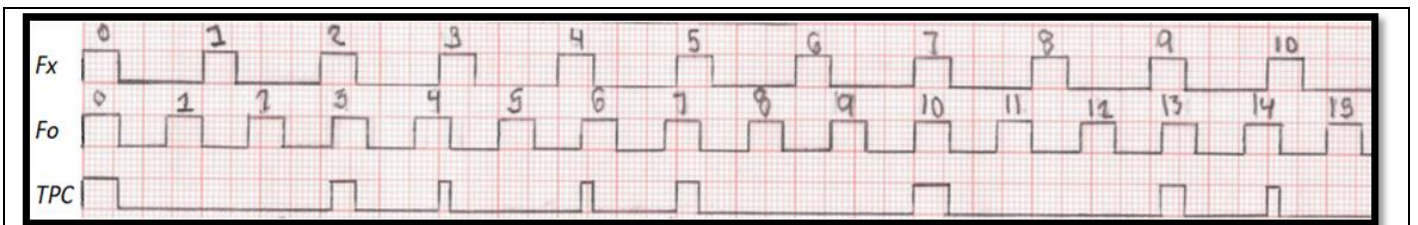
$$(|T_o - T_x| = MCD) \ \&\& \ (MCD < \tau) \rightarrow (|14 - 16| = 2) \ \&\& \ (2 < 5) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

$$\tau = C(MCD) + \text{RESIDUO} \rightarrow \text{TOTAL DE PULSOS POR PAQUETE} = 2*(C + 1) - 1$$

$$5 = (2)(2) + 1 \rightarrow \text{TOTAL DE PULSOS POR PAQUETE} = 2*(2 + 1) - 1 = 2*(3) - 1$$

“TOTAL POR PAQUETE = 5 PULSOS”

En este tercer ejemplo de la Fig. 26 se puede observar que tiene ciertas lejanías entre el pulso céntrico y sus pulsos parciales de lado. El ejemplo se analiza junto con las Tablas (20 – 22).



**Figura 26.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo con lejanías entre pulsos).

Tabla 20 – Valores de la Fig. 26					
A		B			
	VALOR		VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau$	6 UT	TPC	$(T_x, T_o)$	$(20\text{ UT}, 14\text{ UT})$	2 UT
$T_x$	20 UT				
$T_o$	14 UT				

En las Tablas (21 – 22) se muestran las coincidencias que ocurrieron para se diera el ciclo completo a la Fig. 26. Las Tablas (21 – 22) se basan en las interpretaciones de las Tablas (10 – 12)

**Tabla 21 – Coincidencia entre Pulsos de la Fig. 26**

1ra					2da					3ra				
+20	+0	+20	+0	=+40	+20	+0	=+20	+0	+20	+0	=+20			
0	20	20	40	40	40	60	60	60	60	80	80			
0	14	28	28	42	42	42	56	56	70	70	84			
+14	+14	+0	+14	=+42	+0	+14	=+14	+14	+0	+14	=+28			

Tabla 22 - Continuación de la Tabla 21											
4ta				5ta							
+20	+0	=+20	+0	+20	+0	+20	+0	=+40			
80	100	100	100	100	120	120	140	140			
84	84	98	98	112	112	126	126	140			
+0	+14	=+14	+14	+0	+14	+0	+14	=+42			

NOTA: En este ejemplo de la Fig. 26, también se podrían aplicar las fórmulas e igualdades (13 - 15); pero debido a que no se cumple el ( $|T_o - T_x| = MCD$ ), habría cierta incertidumbre sobre el resultado por su orden.

#### 4.4.1.2 Modelo (4) - (Anchos de Pulsos Diferentes)

El primer ejemplo se analiza junto con la Fig. 27 y la Tabla 23.

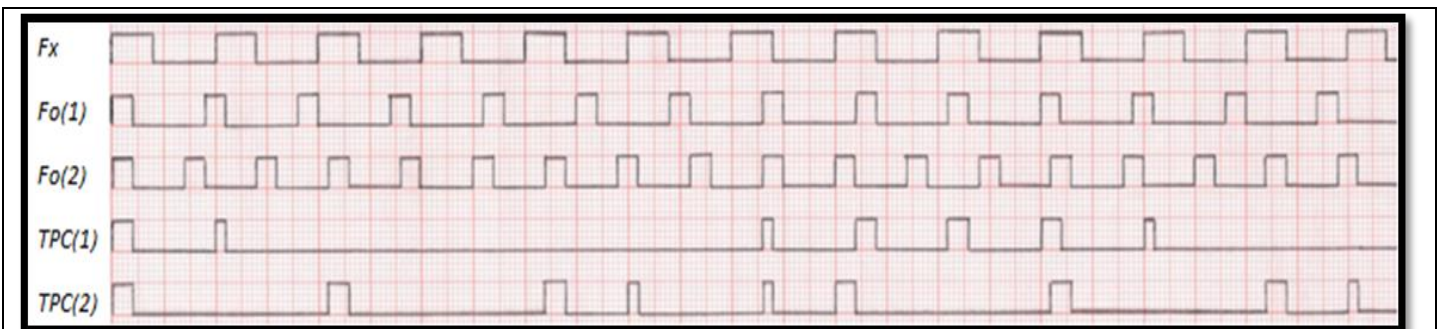


Figura 27. Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(4)).

Tabla 23 - Valores de la Fig. 27							
<b>A</b>							
					VALOR		
$\tau(F_x)$					8 UT		
$\tau(F_o(1))$ y $\tau(F_o(2))$					4 UT		
<b>B</b>							
					<b>C</b>		
VALOR							
$T_x$	20 UT				$F_x$	$F_o(1)$	$F_o(2)$

$To(1)$	18 UT		$TPC(1)$	✓	✓	×
$To(2)$	14 UT		$TPC(2)$	✓	×	✓
<b>D</b>						
	VARIABLES	VALORES	MCD			
$TPC(1)$	$(Tx, To(1))$	$(20, 18)$	2 UT			
$TPC(2)$	$(Tx, To(2))$	$(20, 14)$	2 UT			

Vistos los resultados de la *Tabla 23*, se puede deducir lo siguiente:

*Fórmulas e Igualdades (16 – 19)*

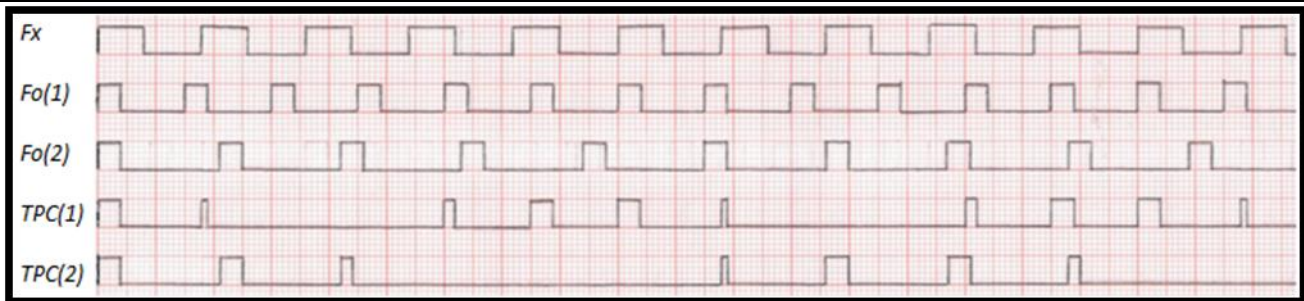
$(MCD < \varnothing_{Menor}) \rightarrow (2 < 4) \rightarrow$  ES CORRECTO ✓

EN TPC (1)  $(\varnothing_{Mayor} - \varnothing_{Menor} = C(MCD) + R) \rightarrow (8 - 4 = 2C + R) : \text{División}$

$(4 = 2C + R), (C = 2, R = 0) : (KK = 2 + 1) \rightarrow (KK = 3)$

*Total de Pulsos Completos del Paquete*  $\rightarrow KK = 3$

El segundo ejemplo se analiza junto con la *Fig. 28* y la *Tabla 24*.



**Figura 28.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(4)).

<b>Tabla 24 - Valores de la Fig. 28</b>			
<b>A</b>			
			VALOR
$\tau(Fx)$			8 UT
$\tau(Fo(1))$ y $\tau(Fo(2))$			4 UT
<b>B</b>		<b>C</b>	
	VALOR		
$T_x$	18 UT	$F_x$	
$To(1)$	15 UT	$Fo(1)$	
$To(2)$	21 UT	$Fo(2)$	
		TPC(1)	TPC(2)
		✓	✓
		✓	✗
		✗	✓
<b>D</b>			
	VARIABLES	VALORES	MCD
TPC(1)	$(T_x, To(1))$	$(18, 15)$	3 UT
TPC(2)	$(T_x, To(2))$	$(18, 21)$	3 UT

Vistos los resultados de la *Tabla 24*, se puede deducir lo siguiente:

*Fórmulas e Igualdades (16 - 19)*

$$(MCD < \tau_{Menor}) \rightarrow (3 < 4) \rightarrow \text{ES CORRECTO } \checkmark$$

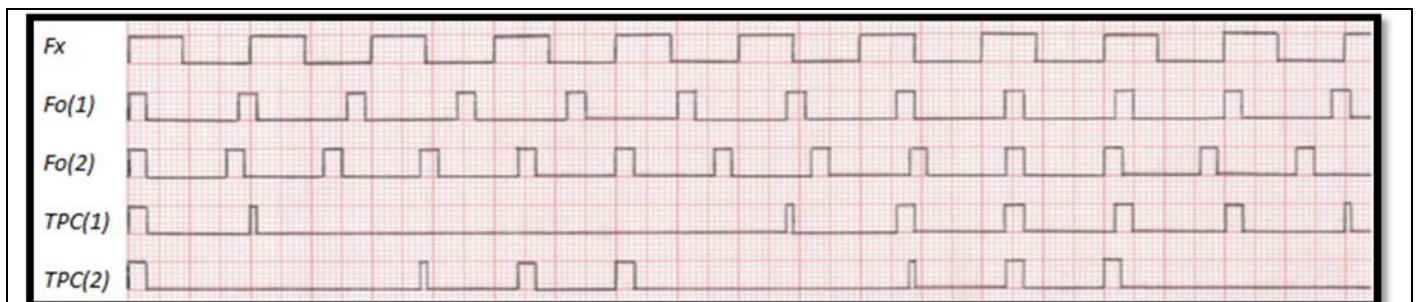
$$(\tau_{Mayor} - \tau_{Menor} = C(MCD) + R) \rightarrow (8 - 4 = 3C + R) : \text{División}$$

$$(4 = 3C + R), (C = 1, R = 1) : (KK = C + 1) \rightarrow (KK = 1 + 1) \rightarrow (K = 2)$$

Si:  $R \neq 0 \rightarrow$  PULSOS PARCIALES DIFERENTES

Total de Pulsos Completos del Paquete  $\rightarrow KK = 2$

Se analizará otro ejemplo en la *Fig. 29* y la *Tabla 25*.



**Figura 29.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo del Modelo(4)).

Tabla 25 - Valores de la Fig. 29						
A			D			
	VALOR			VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau(Fx)$	9 UT		TPC(1)	(Tx, To(1))	(20, 18)	2 UT
$\tau(Fo(1))$ y $\tau(Fo(2))$	3 UT		TPC(2)	(Tx, To(2))	(20, 16)	4 UT
B		C				
	VALOR		Fx	Fo(1)	Fo(2)	
Tx	20 UT		✓	✓	✗	
To(1)	18 UT	TPC(1)	✓	✓	✗	
To(2)	16 UT	TPC(2)	✓	✗	✓	

EN TPC (1)  $\rightarrow$  Fórmulas e Igualdades (16 - 19):  $(MCD < \tau_{Menor}) \rightarrow (2 < 3) \rightarrow$  ES CORRECTO ✓

$(\tau_{Mayor} - \tau_{Menor} = C(MCD) + R) \rightarrow (9 - 3 = 2C + R) : \text{División}$

$(6 = 2C + R), (C = 3, R = 0) : (KK = C + 1) \rightarrow (KK = 3 + 1) \rightarrow (KK = 4); R = 0 \rightarrow$  PULSOS PARCIALES IGUALES

Total de Pulsos Completos del Paquete  $\rightarrow KK = 4$

EN TPC (2)  $\rightarrow$  Fórmulas e Igualdades (20 - 24):  $(|To - Tx| = MCD) \rightarrow (|20 - 16| = 4)$

$\tau_{mayor} = C(MCD) + R \rightarrow 9 UT = C(4 UT) + R \rightarrow C = 2, R = 1$

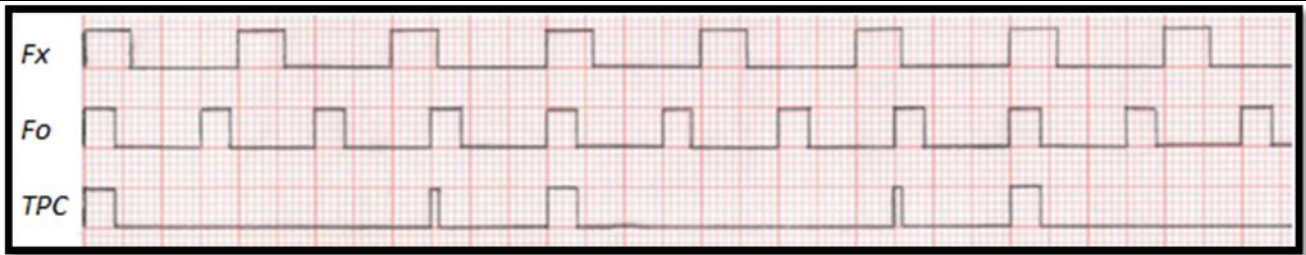
$R \neq 0 \rightarrow K_1 = 2 + 1 = 3$

$\tau_{menor} - MCD = C(MCD) + R \rightarrow -1 UT = C(4 UT) + R \rightarrow C = -1, R = 3$

$R \neq 0 \rightarrow K_2 = C + 1 = 0$

$K = K_1 + K_2 = 3$  PULSOS/PAQUETE

Para la obtención de pulsos céntricos y solamente exista a su lado un pulso parcial. Se analizará en el ejemplo de la Fig. 30 y la Tabla 26.



**Figura 30.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Quinto Ejemplo del Modelo(4)).

<b>Tabla 26 - Valores de la Fig. 30</b>			
<b>A</b>			
		VALOR	
	$\tau(Fx)$	6 UT	
	$\tau(Fo)$	4 UT	
<b>B</b>			
		VALOR	
	$Tx$	15 UT	
	$To$	10 UT	
<b>C</b>			
	VARIABLES	VALORES	MCD
TPC	$(Tx, To)$	$(20, 15)$	5 UT

Vistos los resultados de la *Tabla 26*, se puede deducir lo siguiente:

*Fórmulas e Igualdades (20 - 24):*  $(| To - Tx | = MCD) \rightarrow (| 15 - 10 | = 5)$

$$\tau_{mayor} = C(MCD) + R$$

$$6 UT = C (5 UT) + R \rightarrow C = 1, R = 1$$

$$R \neq 0 \rightarrow K_1 = C + 1 = 2$$

$$\tau_{menor} - MCD = C(MCD) + R$$

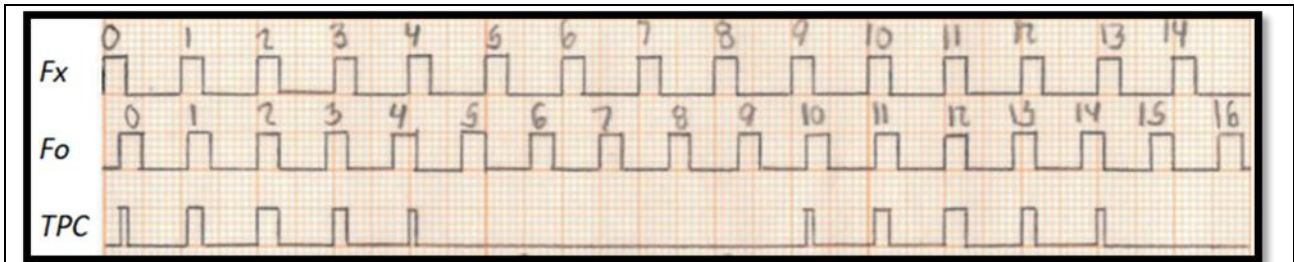
$$- 1UT = C (5 UT) + R \rightarrow C = -1, R = 4$$

$$R \neq 0 \rightarrow K_2 = C + 1 = 0$$

$$K = K_1 + K_2 = 2 \text{ PULSOS/PAQUETE}$$

#### 4.4.1.3 Modelo (5) – (Anchos de Pulsos Iguales y Pulsos Diferentes)

En la Fig. 31 se muestra un ejemplo donde se forma un paquete de pulsos, que se analiza con la Tabla 27.



**Figura 31.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Primer Ejemplo del Modelo(5)).

Tabla 27 – Valores de la Fig. 31					
A		B			
	VALOR		VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau$	3 UT	TPC	$(Tx, To)$	$(10 UT, 9 UT)$	1 UT
$Tx$	10 UT				
$To$	9 UT				
Desfasamiento $Fo$	2 UT				

Fórmulas e Igualdades (25 - 29)

$$(|To - Tx| = MCD) \rightarrow (|9 - 10| = 1)$$

$$\text{Desfasamiento } Fo / MCD \rightarrow 2 UT / 1 UT \rightarrow \text{ES DIVISIBLE}$$

$$\tau = C(MCD) + R$$

$$3 = C(1 UT) + R$$

$$C = 3 UT, R = 0 UT$$

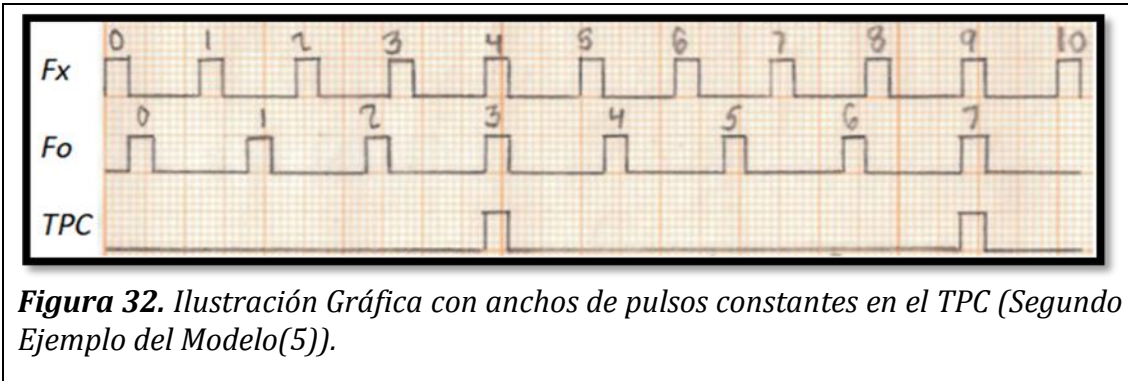
$$\text{Si: } R \neq 0 \rightarrow K = 2*(C + 1) - 1$$

$$\text{Si: } R = 0 \rightarrow K = 2*(C) - 1$$

$$K = 2*(3) - 1 \rightarrow 5$$

$$K = 5 \text{ PULSOS/PAQUETE}$$

En la Fig. 32 se muestra un ejemplo donde se forman pulsos constantes en el TPC, que se analiza con la Tabla 28.



**Figura 32.** Ilustración Gráfica con anchos de pulsos constantes en el TPC (Segundo Ejemplo del Modelo(5)).

Tabla 28 – Valores de la Fig. 32					
A		B			
	VALOR		VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau$	3 UT	TPC	(Tx, To)	(12 UT, 15 UT)	3 UT
Tx	12 UT				
To	15 UT				
Desfasamiento Fo	3 UT				

Fórmulas e Igualdades (25 - 29)

$$(| To - Tx | = MCD) \rightarrow (| 15 - 12 | = 3)$$

$$Desfasamiento Fo / MCD \rightarrow 3 UT / 3 UT \rightarrow ES DIVISIBLE$$

$$\tau = C(MCD) + R$$

$$3 = C(3 UT) + R$$

$$C = 1 UT, R = 0 UT$$

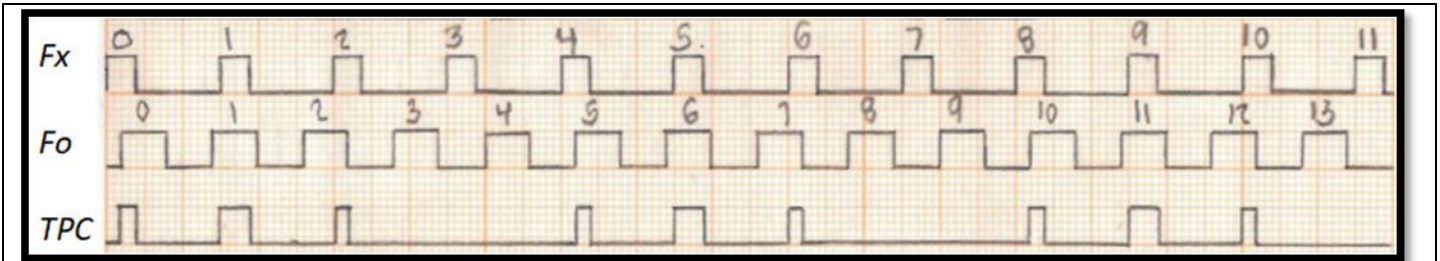
$$Si: R \neq 0 \rightarrow K = 2*(C + 1) - 1$$

$$Si: R = 0 \rightarrow K = 2*(C) - 1$$

$$K = 2*(1) - 1 \rightarrow 1$$

$$K = 1 \text{ PULSO/PAQUETE (PULSO CONSTANTE)}$$

En la Fig. 33 se muestra un ejemplo donde se forman pulsos constantes en el TPC, que se analiza con la Tabla 29.



**Figura 33.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Tercer Ejemplo del Modelo(5)).

<b>Tabla 29 – Valores de la Fig. 33</b>					
<b>A</b>		<b>B</b>			
	VALOR		VARIABLES	VALORES	MCD
$\tau(Fx)$	4 UT				
$\tau(Fo)$	6 UT				
$Tx$	15 UT	TPC	$(Tx, To)$	$(15, 12)$	3 UT
$To$	12 UT				
Desfasamiento Fo	2 UT				

Fórmulas e Igualdades (25 – 29)

$$(|To - Tx| = MCD) \rightarrow (|12 - 15| = 3)$$

**Lado Derecho**

$$\tau_{SD} - D = C(MCD) + R \rightarrow 4UT - 2UT = C(3) + R \rightarrow 2UT = C(3) + R \rightarrow C = 0UT, R = 2UT$$

$$R \neq 0 \rightarrow K_1 = (C + 1) \rightarrow K_1 = 1$$

**Lado Izquierdo**

$$(D - MCD + \tau_{CD}) = C(MCD) + R$$

$$5UT = C(3UT) + R \rightarrow C = 1UT, R = 2UT$$

$$R \neq 0 \rightarrow K_2 = (C + 1) \rightarrow K_2 = 2$$

### **Pulsos por Paquete**

$$K = K_1 + K_2 \rightarrow K = 3 \text{ PULSOS/PAQUETE}$$

## 4.4.2 Especificaciones de los Paquetes Simétricos y Asimétricos

Anteriormente en las Fig. (24 - 33) se observaron algunas fórmulas y comparaciones que obtuvieron el total de pulsos completos e incluso la cantidad total de pulsos por paquete (completos y parciales).

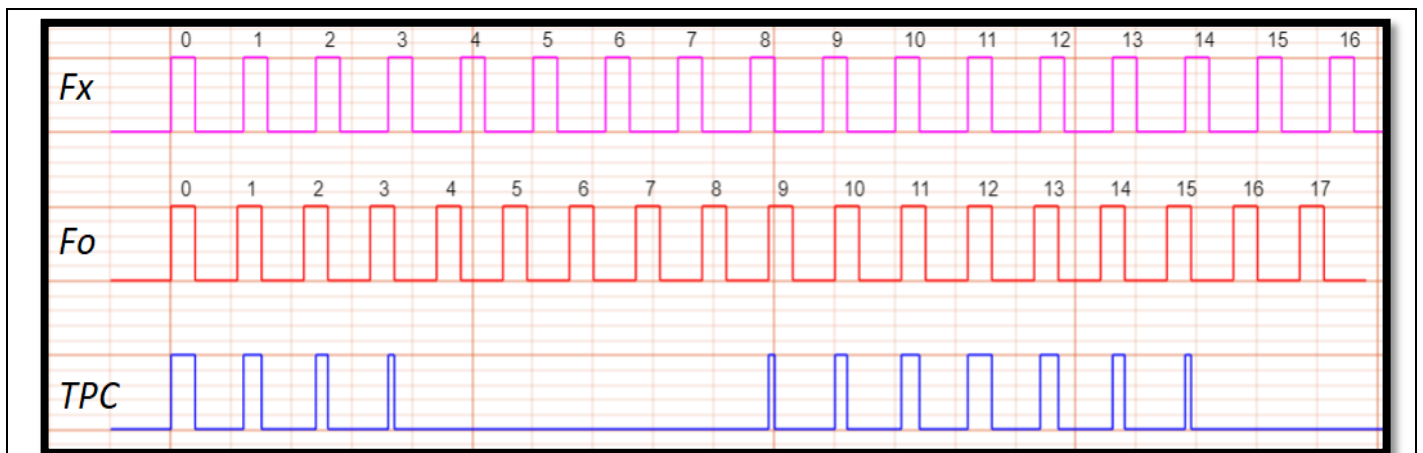
Sin embargo, ahora se verá otra perspectiva con respecto a los paquetes simétricos e incluso asimétricos; estos últimos son geométricas generalmente un poco más desordenadas a diferencia de las simétricas. Por ejemplo, obsérvese la Fig. 34 junto con su Tabla 30; que es por el momento un caso simétrico. Donde los valores son:

$$T_x = 12 \text{ UT}$$

$$T_o = 11 \text{ UT}$$

$$MCD = 1 \text{ UT}$$

$$\tau = 4 \text{ UT}$$



**Figura 34.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de Paquete Simétrico).

**Tabla 30 - Desfasamientos de la Fig. 34**

<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11
<b>Desfasamiento</b>	0	1	2	3	-3	-2	-1	0	1	2	3
<b>Nx</b>	0	1	2	3	8	9	10	11	12	13	14
<b>No</b>	0	1	2	3	9	10	11	12	13	14	15

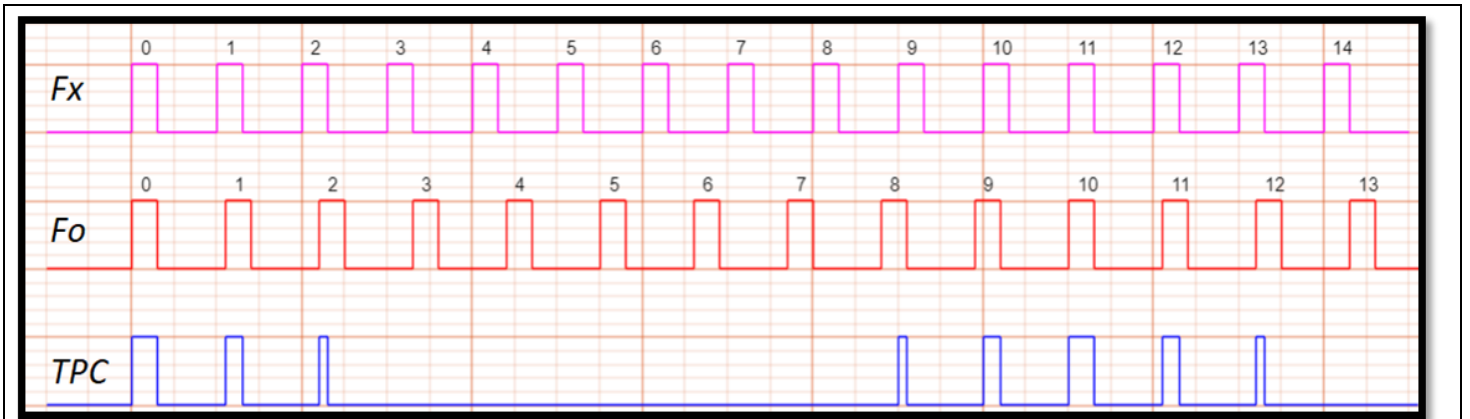
Ahora, obsérvese el ejemplo de la Fig. 35 junto con su Tabla 31; que es también un caso simétrico. Donde los valores son:

$$T_x = 10 \text{ UT}$$

$$T_o = 11 \text{ UT}$$

$$\text{MCD} = 1 \text{ UT}$$

$$\tau = 3 \text{ UT}$$



**Figura 35.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de Paquete Simétrico).

<b>Tabla 31 - Desfasamientos de la Fig. 35</b>								
<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
<b>Desfasamiento</b>	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2
<b>Nx</b>	0	1	2	9	10	11	12	13
<b>No</b>	0	1	2	8	9	10	11	12

Tanto en la Tabla 30 como en la Tabla 31, se muestran desfasamientos ordenados ascendentemente. Incluso algunas conclusiones que se pueden obtener de esas tablas, son las siguientes:

- La diferencia de desfasamiento entre las próximas coincidencias es de 1UT.
- Hay cercanía entre las coincidencias donde la diferencia de desfasamiento es de 1UT.
- La diferencia de los periodos es igual a 1UT, que es el MCD ( $|T_x - T_o| = MCD$ ) y si hay lejanía entre coincidencias es iniciar de nuevo.

Ahora, obsérvese la Fig. 36 junto con su Tabla 32, que es un asimétrico. Este último ejemplo de la Fig. 36 muestra que los casos asimétricos son desordenados a diferencia de los casos simétricos.

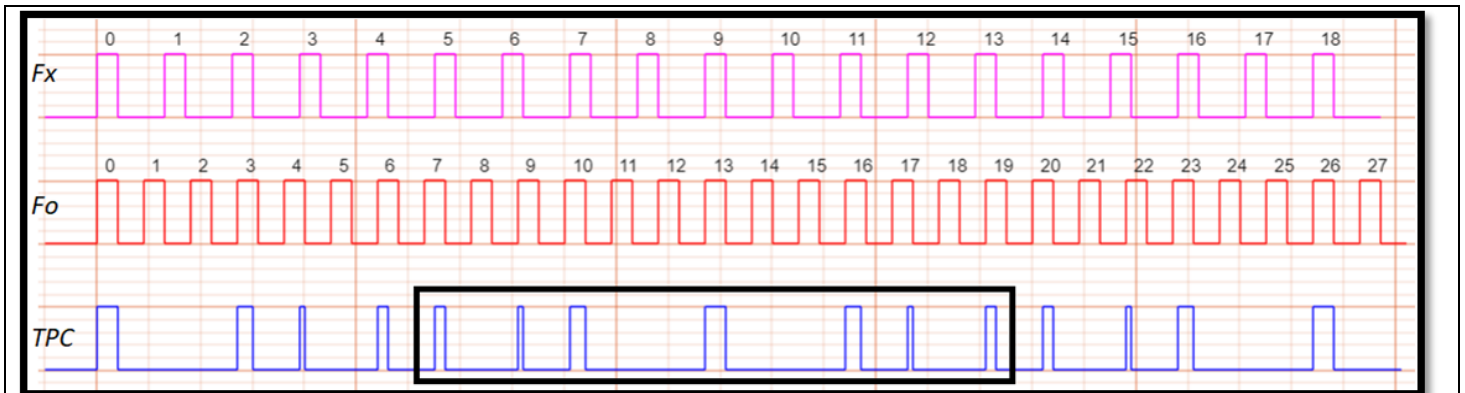
Donde los valores son:

$$T_x = 13 UT$$

$$T_o = 9 UT$$

$$MCD = 1 UT$$

$$\tau = 4 UT$$



**Figura 36.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo de Paquete Asimétrico).

<b>Tabla 32 - Desfasamientos de la Fig. 36</b>									
<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
<b>Desfasamiento</b>	0	-1	3	-2	2	-3	1	0	-1
<b>Nx</b>	0	2	3	4	5	6	7	9	11
<b>No</b>	0	3	4	6	7	9	10	13	15

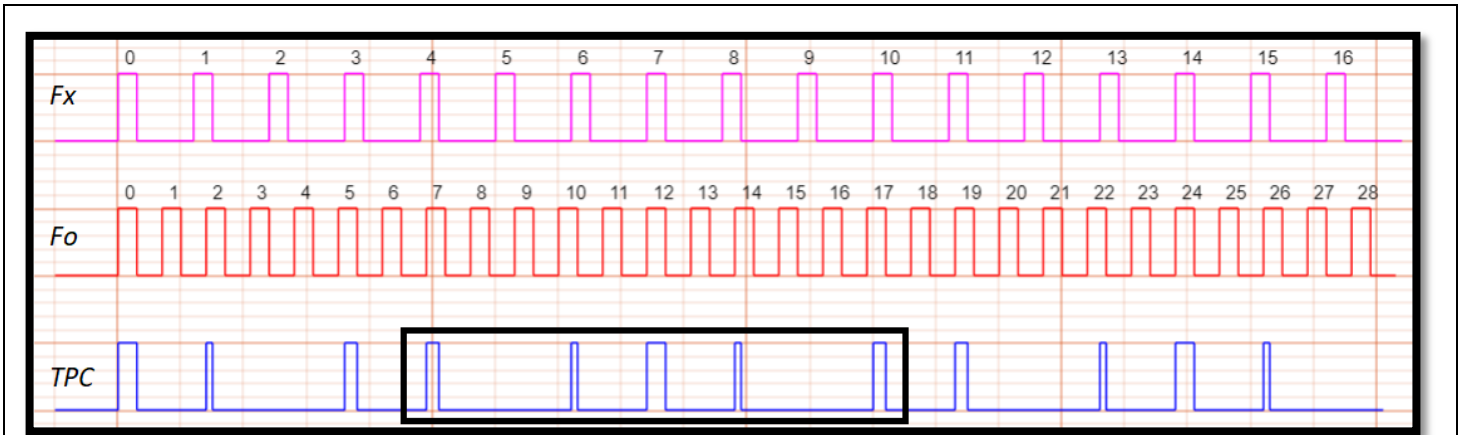
También la Fig. 37 junto con su Tabla 33, es un caso asimétrico. Donde los valores son:

$$T_x = 12 \text{ UT}$$

$$T_o = 7 \text{ UT}$$

$$(T_o, T_x) = \text{MCD} = 1 \text{ UT}$$

$$\tau = 3 \text{ UT}$$



**Figura 37.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo de Paquete Asimétrico).

<b>Tabla 33 - Desfasamientos de la Fig. 37</b>									
<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
<b>Desfasamiento</b>	0	-2	1	-1	2	0	-2	1	-1
<b>Nx</b>	0	1	3	4	6	7	8	10	11
<b>No</b>	0	2	5	7	10	12	14	17	19

Tanto en la Tabla 32 como en la Tabla 33, se muestran desfasamientos desordenados. Incluso algunas conclusiones que se pueden obtener de esas tablas, son las siguientes:

- Hay lejanía entre algunas coincidencias tanto en la Fig. 36 y Fig. 37, esa observación se puede ver en la diferencia con las coincidencias de sus respectivos  $N_x$  y  $N_o$ .
- La diferencia de desfaseamiento entre la siguiente coincidencia, pueden ser varias y no solamente por su MCD que es  $1UT$  (sin importar el signo).

Pero a diferencia de la Fig. 36 y 37, en esta Fig. 38 existe un cierto orden simétrico; pero es importante checar todos los detalles para asegurarse que se está analizando. En la Tabla 34 se puede observar junto con la Fig. 38.

Donde los valores son:

$$T_x = 13 UT$$

$$T_o = 10 UT$$

$$(T_x, T_o) = MCD = 1 UT$$

$$\tau = 3 UT$$



**Figura 38.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo con Orden Simétrico).

<b>Tabla 34 - Desfasamientos de la Fig. 38</b>						
<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6
<b>Desfasamiento</b>	0	-1	2	-2	1	0
<b><math>N_x</math></b>	0	3	4	6	7	10
<b><math>N_o</math></b>	0	4	5	8	9	13

En la Fig. 39 también se muestra un caso similar al de la Fig. 38; pero en este ejemplo de la Fig. 39 junto con su Tabla 46, hay un poco más de cercanías e incluso destacar la distancia de la coincidencia #3 con la #4 de la Tabla 47; que está prácticamente enseguida.

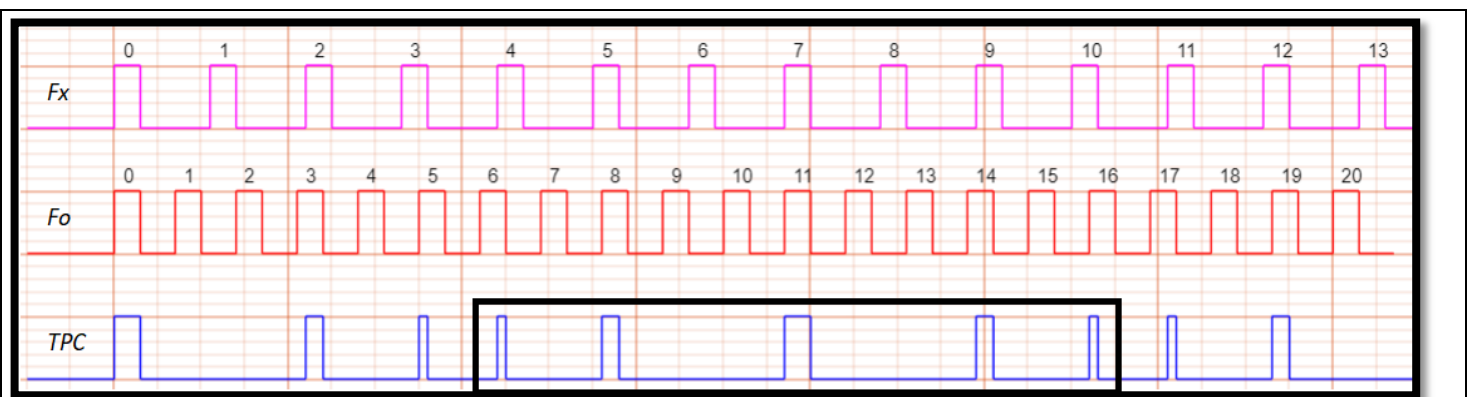
Donde los valores son:

$$T_x = 11 \text{ UT}$$

$$T_o = 7 \text{ UT}$$

$$MCD = 1 \text{ UT}$$

$$\tau = 3 \text{ UT}$$



**Figura 39.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo con Orden Simétrico).

**Tabla 35 - Desfasamientos de la Fig. 39**

<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10
<b>Desfasamiento</b>	0	1	-2	2	-1	0	1	-2	2	-1
<b>Nx</b>	0	2	3	4	5	7	9	10	11	12
<b>No</b>	0	3	5	6	8	11	14	16	17	19

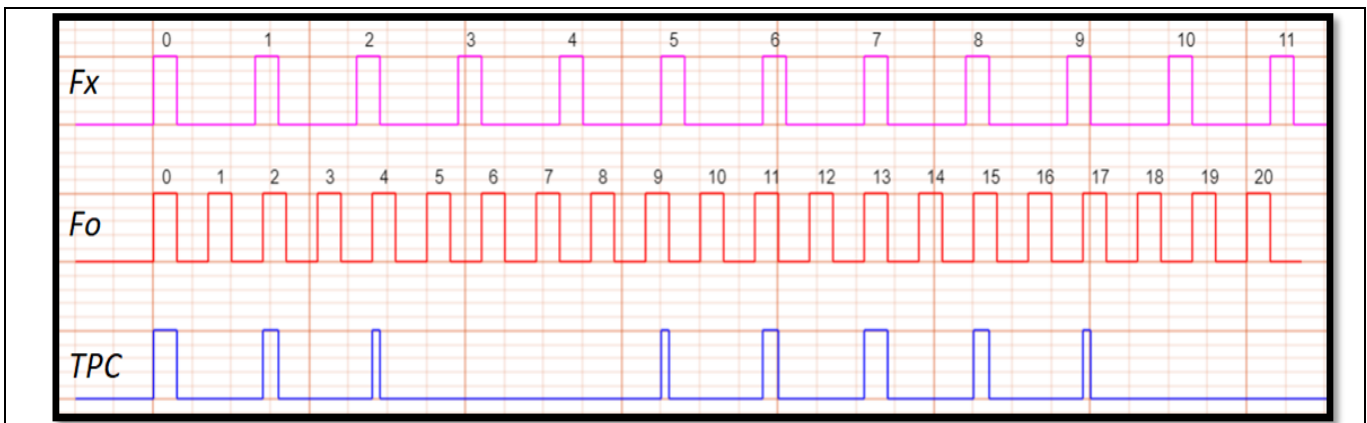
Por último, hay que observar la *Fig. 40*; que es un caso similar al de la *Fig. 35*. Pero existes ciertas lejanías, debido a sus  $N_x$  y  $N_o$ , a pesar de que se ven iguales ambas geometrías. Donde los valores:

$$T_x = 13 UT$$

$$T_o = 7 UT$$

$$MCD = 1 UT$$

$$\tau = 3 UT$$



**Figura 40.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Orden Simétrico y Lejanías).

<b>Tabla 36 - Desfasamientos de la Fig. 40</b>								
<b>Coincidencia</b>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
<b>Desfasamiento</b>	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2
<b><math>N_x</math></b>	0	1	2	5	6	7	8	9
<b><math>N_o</math></b>	0	2	4	9	11	13	15	17

Algunas conclusiones que se pueden obtener de las *Fig. 38 - 40*, son las siguientes:

- *Es importante analizar las coincidencias, porque puede ser que tengan desfasamientos similares (sin importar el signo); pero no tengan cercanías y existan lejanías.*
- *También se pueden dar casos simétricos como la Fig. 40 que es el mismo que la Fig. 35; pero lo que los diferencia son las cercanías y lejanías entre las coincidencias.*

#### 4.4.3 Observaciones de los Paquetes Completos y Parciales

Algunas observaciones que se pudieron registrar en los ejemplos anteriores de los paquetes completos y parciales en el TPC, es que pueden tener sus desventajas; esto debido a que tienen pulsos parciales y estos evitan obtener la frecuencia desconocida. Pero a pesar de que se tienen esos pulsos parciales, estos mismos dan como resultado algunos desfasamientos y pueden funcionar para determinar cuál podría ser el MCD entre los dos periodos ( $T_x$ ,  $T_o$ ).

Si se observó anteriormente, en casi todas las figuras de los ejemplos de la obtención de paquetes que se plasmaron se cumplía la *Igualdad (12)*, y se notó que los pulsos estaban muy juntos de otros; por lo tanto, se formaban los paquetes de pulsos. Incluso si existe un desfasamiento los pulsos tienden a estar muy cerca de otros. En la *Igualdad (12)*, se percibió que la diferencia entre los dos periodos es igual al MCD. Por lo tanto, si en caso de que se estuviera buscando el periodo desconocido; se tendría una manera de cómo identificarla, ya teniendo como referencia la conocida.

Incluso las igualdades que se plasmaron funcionan para entender como formar escenarios en referencia a cuántos pulsos por paquete habrá en el TPC; en los cuales se observa que los pulsos se recorren y también da un orden a diferencia de los casos asimétricos (casos desordenados e incluso lejanías entre otros pulsos).

Pero lo más importante es identificar parámetros que ayuden a reconocer el MCD, sin importar que caso (simétrico o asimétrico) se esté identificando; aunque hay que mencionar que los paquetes tienen la ventaja de dar indicios de conocer el MCD y el periodo desconocido. Por lo tanto, al final el MCD se modificará y eso implica cambiar el periodo de la frecuencia conocida o modificar su ancho de pulso, porque el propósito es conocer la frecuencia desconocida y como consecuencia el MCD de ambos periodos tiene que ser mayor a sus anchos de pulsos (pueden ser iguales o diferentes).



$$42 = 21(2)$$

$$(525, 231) = 21 \rightarrow \text{Máximo Común Divisor}$$

## 4.5.2 Identidad de Bézout

La identidad de Bézout está asociada al máximo común divisor, cuya existencia teórica viene afirmada por el siguiente teorema [32, pp. 16]:

Sean  $a, b > 0$  enteros y sea  $d = \text{mcd}(a, b)$ . Existen enteros  $\alpha, \beta$  tales que:

$$\alpha(a) + \beta(b) = d \quad (31)$$

A cualquier ecuación (31) de este tipo se le llama identidad de Bézout. Ahora se analizará un ejemplo donde se aplique la identidad de Bézout, donde  $a = 16$  y  $b = 10$ .

Aplicamos el algoritmo de Euclides:

$$16 = 10(1) + 6$$

$$10 = 6(1) + 4$$

$$6 = 4(1) + 2$$

$$4 = 2(2)$$

$$(16, 10) = 2$$

Buscamos la identidad de Bézout:

$$2 = 6(1) - 4(1)$$

$$2 = 6(1) - [(10(1) - 6(1))] (1)$$

$$2 = [(16(1) - 10(1))] (1) - [(10(1) - [(16(1) - 10(1))] (1))] (1)$$

$$2 = [16(1) - 10(1)] - [(10(1) - [(16(1) - 10(1))] (1))] (1)$$

$$2 = [16(1) - 10(1)] - [(10(1) - [(16(1) - 10(1))])] (1)$$

$$2 = [16(1) - 10(1)] - [10(1) - 16(1) + 10(1)]$$

$$2 = [16(1) - 10(1)] - [10(2) - 16(1)]$$

$$2 = 16(1) - 10(1) - 10(2) + 16(1)$$

$$2 = 16(2) - 10(3) \rightarrow \mathbf{16(2) + 10(-3) = 2}$$

Donde  $\alpha = 2$  y  $\beta = -3$ .

### 4.5.3 Ecuaciones Diofánticas Lineales

Para entender, cómo expresar una ecuación diofántica lineal [10, pp. 46]; es importante determinar las variables que son parte de ella.

Si A, B y C son enteros y  $AB \neq 0$ , toda ecuación lineal da la fórmula:

$$Ax + By = C \quad (32)$$

Donde los valores de x e y están restringidos al conjunto de los enteros, se dice una ecuación diofántica lineal en dos variables. A continuación, se analizará un ejemplo de una ecuación diofántica lineal en dos variables:

$$11x + 27y = 4$$

Sea  $A = 27$  y  $B = 11$ . Entonces, por el *Algoritmo de Euclides*:

$$27 = 2(11) + 5, \rightarrow 27 + (-2)(11) = 5$$

$$11 = 2(5) + 1, \rightarrow 11 + (-2)(5) = 1$$

$$5 = 5(1)$$

Por lo tanto,  $(27, 11) = 1$  y como consecuencia se define que son primos relativos. Es posible escribir 1 como una función lineal homogénea de 27 y 11:

$$11 + (-2)[27 + (-2)(11)] = 1$$

$$11 + (-2)(27) + (4)(11) = 1$$

$$11(5) + 27(-2) = 1$$

Como  $11(5) + 27(-2) = 1$ , entonces:

$$[11(5) + 27(-2) = 1](4) \rightarrow 11(20) + 27(-8) = 4$$

Aquí la solución particular de la ecuación diofántica lineal  $11x + 27y = 4$ , está dada por las ecuaciones:

$$X = 20$$

$$Y = -8$$

Una solución general de la ecuación diofántica lineal es dada por las ecuaciones:

$$X = 20 + 27(t), X_0 = 20$$

$$Y = -8 - 11(t), Y_0 = -8$$

Que vienen de las expresiones siguientes:

$$x = x_0 + \frac{b}{g}(t) \quad (33)$$

$$y = y_0 - \frac{a}{g}(t) \quad (34)$$

$$(a, b) = g \mid C$$

#### 4.5.4 Congruencias

Las soluciones de muchos problemas en teoría de números [10, pp. 87] dependen de las propiedades de los restos obtenidos cuando se dividen los números por ciertos enteros positivos.

Sea “m” un entero positivo. Sí “a” y “b” son dos enteros tales que “(a - b) / m”, entonces se dice que “a” es congruente con “b” módulo “m”; esto será denotado por:

$$a \equiv b(\text{mód } m) \quad (35)$$

Si " $m \nmid (a - b)$ ", entonces se dice que " $a$ " es incongruente con " $b$ " módulo " $m$ " y será denotado por:

$$a \not\equiv b(\text{mód } m) \quad (36)$$

A continuación, algunos ejemplos de congruencias:

$$7 \equiv 2 (\text{mód } 5) \rightarrow 5 \mid (7 - 2) \rightarrow \text{Si es divisible } \checkmark$$

$$31 \equiv -2 (\text{mód } 3) \rightarrow 3 \mid (31 + 2) \rightarrow \text{Si es divisible } \checkmark$$

$$16 \not\equiv 9 (\text{mód } 4) \rightarrow 4 \nmid (16 - 9) \rightarrow \text{No es divisible } \times$$

La relación de congruencia  $a \equiv b (\text{mód } m)$  es equivalente a la expresión:

$$a - b = km;$$

es decir,

$$a = b + km,$$

donde " $k$ " es un entero.

#### 4.5.5 Congruencias Lineales

Una congruencia lineal módulo " $m$ " [10, pp. 113] es un enunciado de la forma:

$$ax \equiv b(\text{mód } m) \quad (37)$$

Tiene solución solo si " $\text{MCD} = (a, m) \mid b$ " y no tiene solución si " $\text{mcd} (a, m) \nmid b$ ". Ahora, se tomará como ejemplo las siguientes congruencias lineales:

$$6x \equiv 1 (\text{mód } 5)$$

$$(6, 5) \mid 1 \rightarrow 1 \mid 1 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

$$7x \equiv 2 (\text{mód } 3)$$

$$(7, 3) \mid 2 \rightarrow 1 \mid 2 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

$$10x \equiv 6 (\text{mód } 4)$$

$$(10, 4) \mid 2 \rightarrow 2 \mid 6 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

Ahora se revolverán las congruencias anteriores, el cual consiste en obtener el valor de “x”.

De acuerdo a ciertas propiedades de las congruencias, la congruencia “ $6x \equiv 1 \pmod{5}$ ” tiene como soluciones:

$$\begin{array}{ll} x \equiv 1 \pmod{5} & x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{5} & x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 11 \pmod{5} & x \equiv 9 \pmod{5} \\ \dots & \dots \\ x \equiv 21 \pmod{5} & x \equiv 19 \pmod{5} \end{array}$$

Para la congruencia “ $7x \equiv 2 \pmod{3}$ ” tiene las siguientes soluciones:

$$\begin{array}{ll} x \equiv 2 \pmod{3} & x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{3} & x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv 8 \pmod{3} & x \equiv -4 \pmod{3} \\ \dots & \dots \\ x \equiv 14 \pmod{3} & x \equiv -10 \pmod{3} \end{array}$$

Para la congruencia “ $10x \equiv 6 \pmod{4}$ ”  $\rightarrow 5x \equiv 3 \pmod{2}$  tiene las siguientes soluciones:

$$\begin{array}{ll} x \equiv 3 \pmod{2} & x \equiv 3 \pmod{2} \\ x \equiv 5 \pmod{2} & x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 7 \pmod{2} & x \equiv -1 \pmod{2} \\ \dots & \dots \\ x \equiv 13 \pmod{2} & x \equiv -5 \pmod{2} \end{array}$$

## 4.6 Análisis Numérico en la Comparación de Trenes de Pulsos

En esta *Sección* se mostrarán la importancia de observar cómo influyen las ecuaciones diofánticas y el uso de las congruencias. Al comprender su formación, se puede deducir u observar que pulsos parciales están presentes en la formación de paquetes los paquetes o cualquier caso que un usuario desea analizar. Por lo tanto; se pueden obtener las unidades de tiempo (UT) de la anchura del paquete de pulsos, así como conocer la distancia adyacente a otro paquete de pulsos.

### 4.6.1 Importancia de la Cuestión Geométrica

Antes de iniciar a explicar sobre la cuestión geométrica, es importante aclarar sobre el concepto de la geometría. Se le llama *geometría* a la rama de las matemáticas que estudia la forma y el tamaño de las figuras, así como las transformaciones que se ejercen sobre ellas.

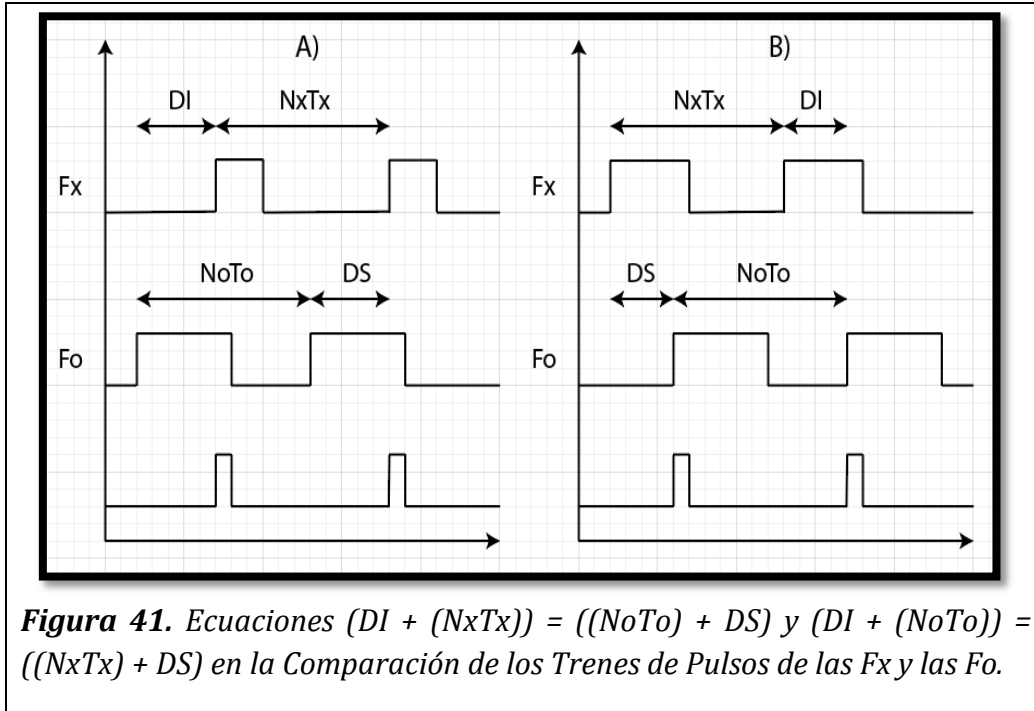
Un campo muy importante de la geometría que estudia las propiedades geométricas de las figuras y que pueden mostrarse fácilmente utilizando el sistema de representación mediante coordenadas cartesianas, se le denomina *geometría analítica* y es actualmente la forma más extendida de estudiar la geometría [15, pp. 129 - 130].

En estos casos se manejarán principalmente en el eje “x” del plano cartesiano ya que son las unidades de tiempo (UT) que se están analizando, debido a que el eje “y” es considerado el voltaje que se presenta en la comparación de los trenes de pulsos de sus respectivas frecuencias; lo cual no es relevante analizar por el momento.

En la *Fig. 41*, se observa el primer ejemplo; del cual se puede percibir que se formaron dos ecuaciones resultantes y se pueden obtener igualdades al despejar las variables:

$$\mathbf{A)} (DI + (NxTx)) = ((NoTo) + DS) \rightarrow (NxTx) - (NoTo) = DS - DI$$

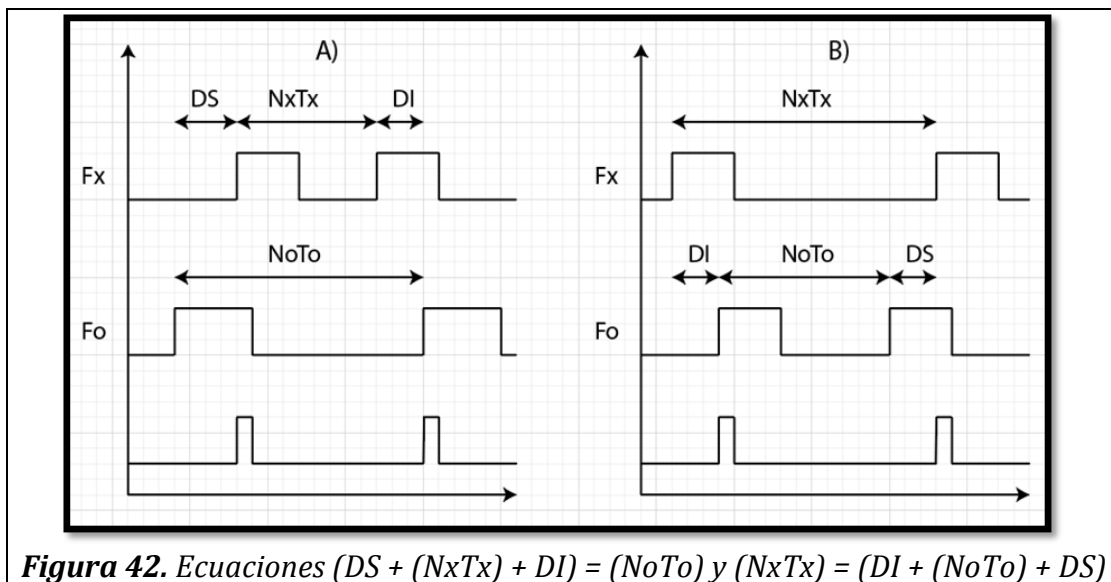
$$\mathbf{B)} (DI + (NoTo)) = ((NxTx) + DS) \rightarrow (NxTx) - (NoTo) = DI - DS$$



En la Fig. 42, se observa el segundo ejemplo. Se puede obtener las siguientes igualdades, al despejar las variables:

$$A) (DS + (NxTx) + DI) = (NoTo) \rightarrow (NxTx) - (NoTo) = DI + DS$$

$$B) (NxTx) = (DI + (NoTo) + DS) \rightarrow (NxTx) - (NoTo) = -DI - DS$$

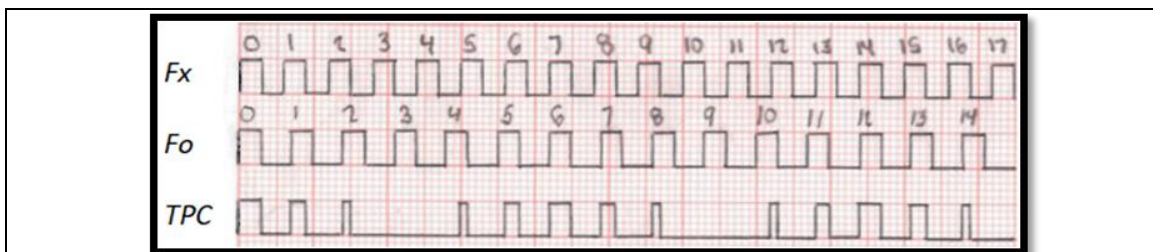


#### 4.6.2 Uso con las Ecuaciones Diofánticas

En base a las ecuaciones diofánticas lineales, se puede analizar el ejemplo de la *Fig. 43* en referencia a la comparación con los trenes de pulso.

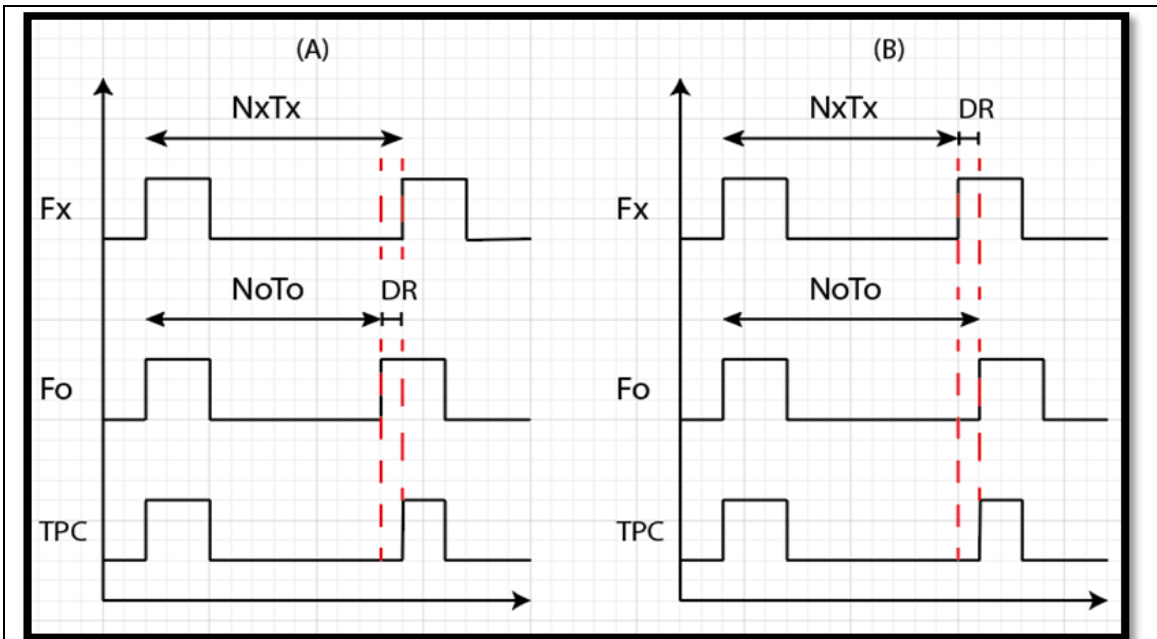
**Tabla 37 – Valores de la Fig. 43**

	VARIABLES	VALOR
Periodo de $F_x$	$A$	6 UT
Periodo de $F_o$	$B$	7 UT



**Figura 43.** Representación de la  $F_x$  y la  $F_o$  en comparación, que obtienen un TPC con pulsos completos y parciales (Ejemplo para el uso de Ecuaciones Diofánticas).

Se analizará el ejemplo de la *Fig. 43*, para ir despejando variables e ir utilizando el Algoritmo de Euclides y la Identidad de Bézout. En la *Fig. 44* se observa la ilustración gráfica.



**Figura 44.** Comparación de los Trenes de Pulsos de las  $F_x$  y las  $F_o$ , con las ecuaciones  $(NxTx) = (NoTo) + DR$  y  $(NxTx) + DR = (NoTo)$ .

Vista la Fig. 44, se utiliza la fórmula (32) en el cual las variables se sustituyen con sus valores:

Opción (A)

$$(NxTx) = (NoTo) + DR \rightarrow -(NoTo) + (NxTx) = DR$$

$$6y = 7x + 1 \rightarrow -7x + 6y = 1$$

Aplicamos el Algoritmo de Euclides:

$$-7 = -2(6) + 5$$

$$6 = 1(5) + 1$$

$$5 = 5(1)$$

$$1 = 1$$

$$(-7, 6) = 1$$

Utilizamos la Identidad de Bézout:

$$1(6) - 1 = 1(5)$$

$$-1(7) = -2(6) + 1(6) - 1$$

$$-1(7) = -1(6) - 1$$

$$-7(-1) + 6(-1) = 1$$

$$\text{Donde } x = -1; y = -1$$

Opción (B)

$$(NxTx) + DR = (NoTo) \rightarrow - (NxTx) + (NoTo) = DR$$

$$6x + 1 = 7y \rightarrow -6x + 7y = 1$$

Aplicamos el Algoritmo de Euclides:

$$-6 = -1(7) + 1$$

$$7 = 7(1)$$

$$1 = 1$$

$$(-6, 7) = 1$$

Utilizamos la Identidad de Bézout:

$$-6(1) + 7(1) = 1$$

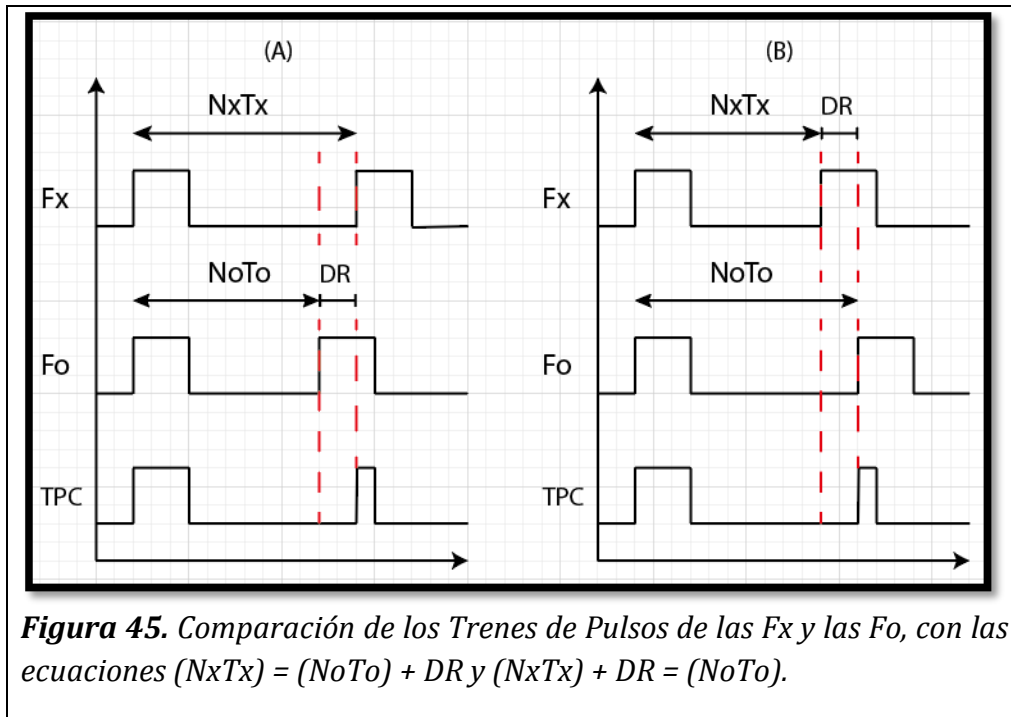
Donde  $x = 1; y = 1$

Otros ejemplos a destacar en la *Tabla 38* son los siguientes:

<b>Tabla 38 - Resultados Adicionales de la Fig. 44</b>				
	<b>A</b>		<b>B</b>	
<b>t</b>	<b>x = -1 + 6 (t)</b>	<b>y = -1 + 7 (t)</b>	<b>x = 1 + 7 (t)</b>	<b>y = 1 + 6 (t)</b>
0	-1	-1	1	1
1	5	6	8	7
2	11	13	15	13

Donde la *Sección A* de la *Tabla 38*, muestra como podría ser una opción de los pulsos parciales con 2 UT de la *Fig. 43*, donde se menciona que las “x” e “y” (resultados obtenidos con sus variables de las fórmulas (33 – 34)) son el número de periodos que han transcurridos hasta ese lapso de tiempo donde ocurrió el pulso parcial de 2 UT, como se puede observar en la parte A de la correspondiente *Fig. 44*. En el caso de la *Sección B* de la *Tabla 38* también se analizan pulsos parciales de 2 UT, pero de otra manera de la parte B de la *Fig. 44*.

Se analizará el otro ejemplo de los pulsos parciales con 1 UT de la *Fig. 43*. En la *Fig. 45* se observa la ilustración gráfica.



Vista la Fig. 45, se utiliza la fórmula (32) en el cual las variables se sustituyen con sus valores:

Opción (A)

$$(NxTx) = (NoTo) + DR \rightarrow -(NoTo) + (NxTx) = DR$$

$$6y = 7x + 2 \rightarrow -7x + 6y = 2$$

Aplicamos el Algoritmo de Euclides:

$$-7 = -2(6) + 5$$

$$6 = 1(5) + 1$$

$$5 = 5(1)$$

$$1 = 1$$

$$(-7, 6) = 1$$

Utilizamos la Identidad de Bézout:

$$1(6) - 1 = 1(5)$$

$$-1(7) = -2(6) + 1(6) - 1$$

$$-1(7) = -1(6) - 1$$

$$[-7(-1) + 6(-1) = 1](2) \rightarrow -7(-2) + 6(-2) = 2$$

$$\text{Donde } x = -2; y = -2$$

Opción (B)

$$(NxTx) + DR = (NoTo) \rightarrow - (NxTx) + (NoTo) = DR$$

$$6x + 2 = 7y \rightarrow -6x + 7y = 2$$

Aplicamos el Algoritmo de Euclides:

$$-6 = -1(7) + 1$$

$$7 = 7(1)$$

$$1 = 1$$

$$(-6, 7) = 1$$

Utilizamos la Identidad de Bézout:

$$[-6(1) + 7(1) = 1](2) \rightarrow -6(2) + 7(2) = 2$$

Donde  $x = 2; y = 2$

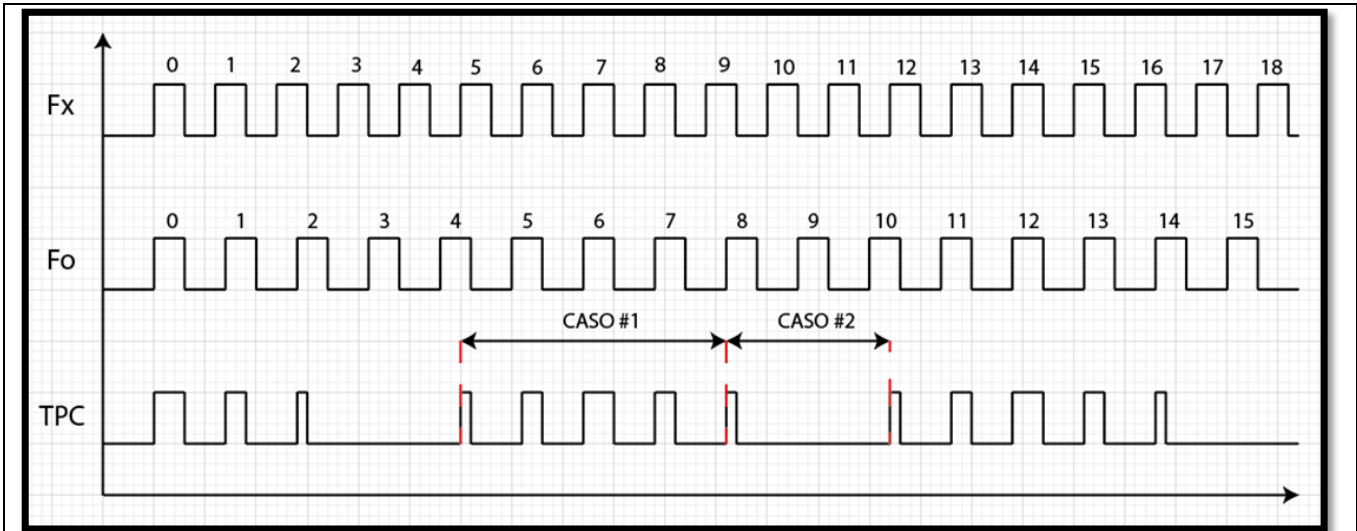
Otros ejemplos de la Fig. 45 se muestran en la Tabla 39, que son los siguientes:

<b>Tabla 39 - Resultados Adicionales de la Fig. 45</b>				
	<b>A</b>		<b>B</b>	
<b>t</b>	<b>x = -2 + 6(t)</b>	<b>y = -2 + 7 (t)</b>	<b>x = 2 + 7 (t)</b>	<b>y = 2 + 6 (t)</b>
0	-2	-2	2	2
1	4	5	9	8
2	10	12	16	14

Al igual que la Tabla 38 en la Tabla 39 se muestran en las Secciones A y B las opciones de los pulsos parciales, pero para casos de 1 UT que se pueden observar en la parte A y parte B de la correspondiente Fig. 45.

Para determinar la anchura promedio de un paquete de pulsos se puede restar el lapso de tiempo que ocurrió de un pulso parcial a otro y también determinar la distancia promedio que hay de un paquete de pulsos a otro. Por ejemplo; observe en la Fig. 46 los siguientes casos:

- CASO #1:  $(6 \text{ UT}) * 5 - (7 \text{ UT}) * 8 = |\text{Lapso de Tiempo}| \rightarrow 26 \text{ UT la Anchura Promedio.}$
- CASO #2:  $(7 \text{ UT}) * 8 - (6 \text{ UT}) * 12 = |\text{Lapso de Tiempo}| \rightarrow 16 \text{ UT la Distancia Promedio.}$

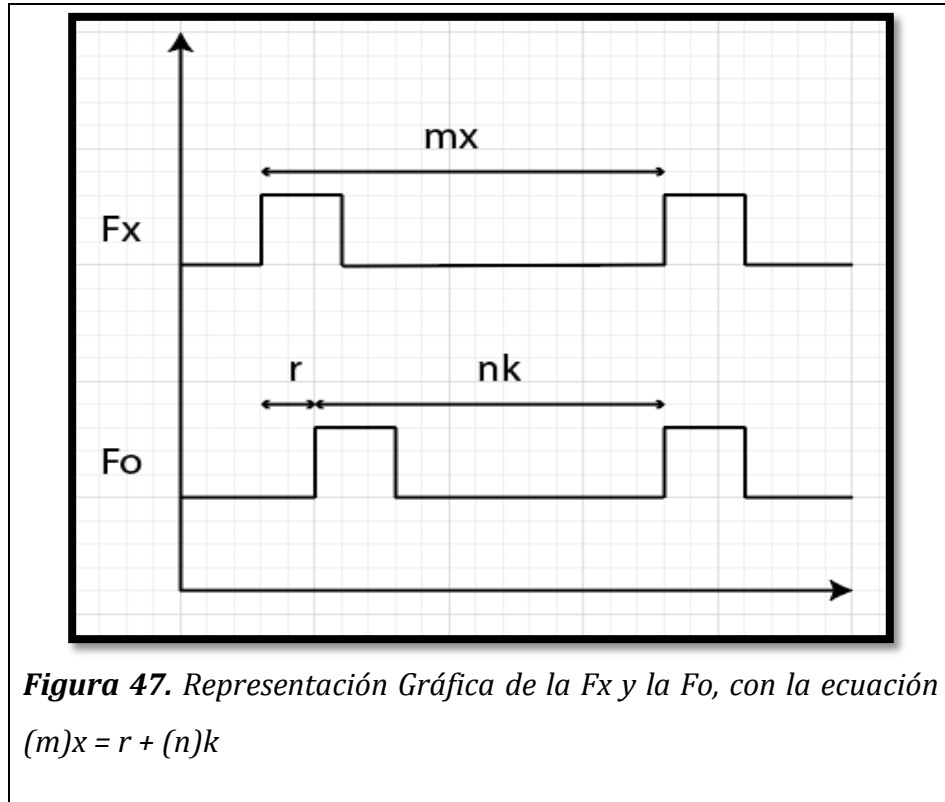


**Figura 46.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplos de distancias de la anchura de paquete y de la adyacencia entre otro paquete).

### 4.6.3 Uso con las Congruencias Lineales

En esta *Sección* se analizarán ejemplos que se basan en la comparación de los trenes de pulsos, lo cual implica seguir una serie de paso o comprender como se comparan ambos trenes para obtener los resultados deseados, utilizando las congruencias lineales.

Ahora se analizarán algunos ejemplos con respecto al uso de las congruencias para el análisis de coincidencia de pulsos [12, pp. 1033]; pero primero se observará la Fig. 47.



Para entender mejor la *Fig. 47*, se analizará a continuación la siguiente *fórmula (38)*.

$$(mx) = r + (n)k \quad (38)$$

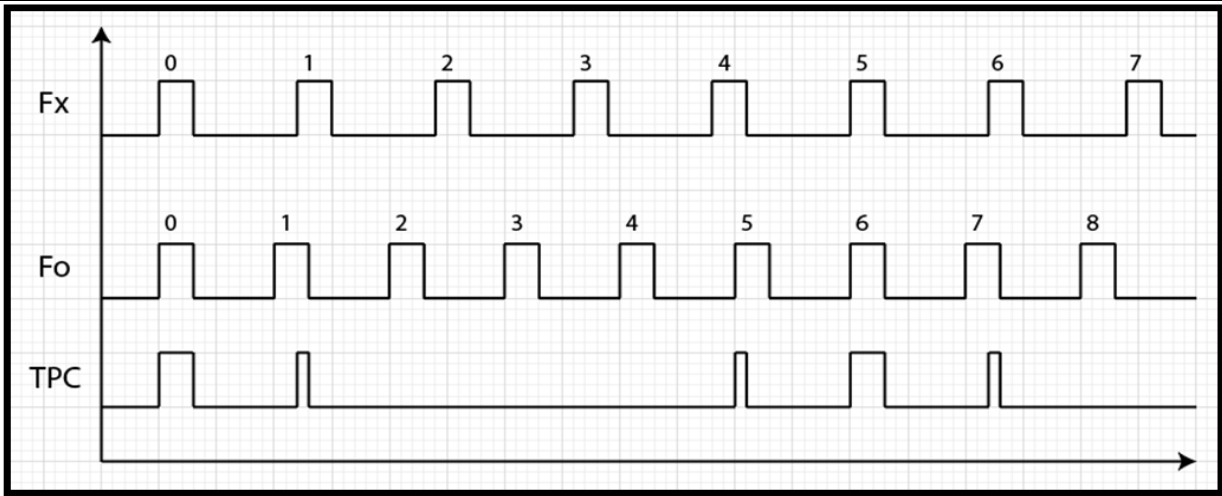
$x$ : es el número de veces que se repite el periodo de  $F_x$ .

$k$ : es el número de veces que se repite el periodo de  $F_o$ .

Ahora se dará el primer ejemplo, que está en la *Fig. 48*. Donde los valores y variables son los siguientes:

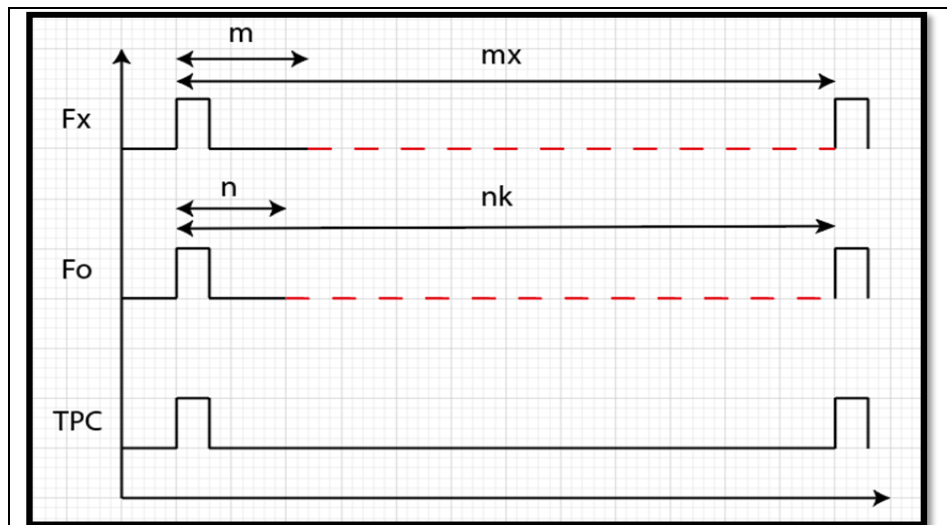
$$T_x(m) = 12 \text{ UT}$$

$$T_o(n) = 10 \text{ UT}$$



**Figura 48.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (1er Ejemplo del uso de Congruencias).

La fórmula (38) y sus variables con sus respectivos significados, e incluso sus valores a analizar; a continuación, en la Fig. 49 se presenta el ejemplo con la Tabla 53; que son parte de la Fig. 48.



**Figura 49.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos en el TPC (Extracto de la Fig. 48).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir en la fórmula (38).

$$(m)x = (n)k \rightarrow mx = nk \rightarrow 12x = 10k \rightarrow 12x \equiv 0 \pmod{10}$$

Teniendo la congruencia " **$12x \equiv 0 \pmod{10}$** ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable " **$x$** ".

$(12, 10) = 2, 0/2 \rightarrow$  Si tiene solución

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  **$6x \equiv 0 \pmod{5}$** , tiende a las siguientes igualdades:

**$x \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida**

**$x \equiv 5 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida**

$(m)x = (n)k \rightarrow mx = nk \rightarrow 12x = 10k \rightarrow 10k \equiv 0 \pmod{12}$

Teniendo la congruencia " **$10k \equiv 0 \pmod{12}$** ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable " **$k$** ".

$(10, 12) = 2, 0/2 \rightarrow$  Si tiene solución

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  **$5k \equiv 0 \pmod{6}$** , tiende a las siguientes igualdades:

**$k \equiv 0 \pmod{6} \rightarrow$  Es una solución válida**

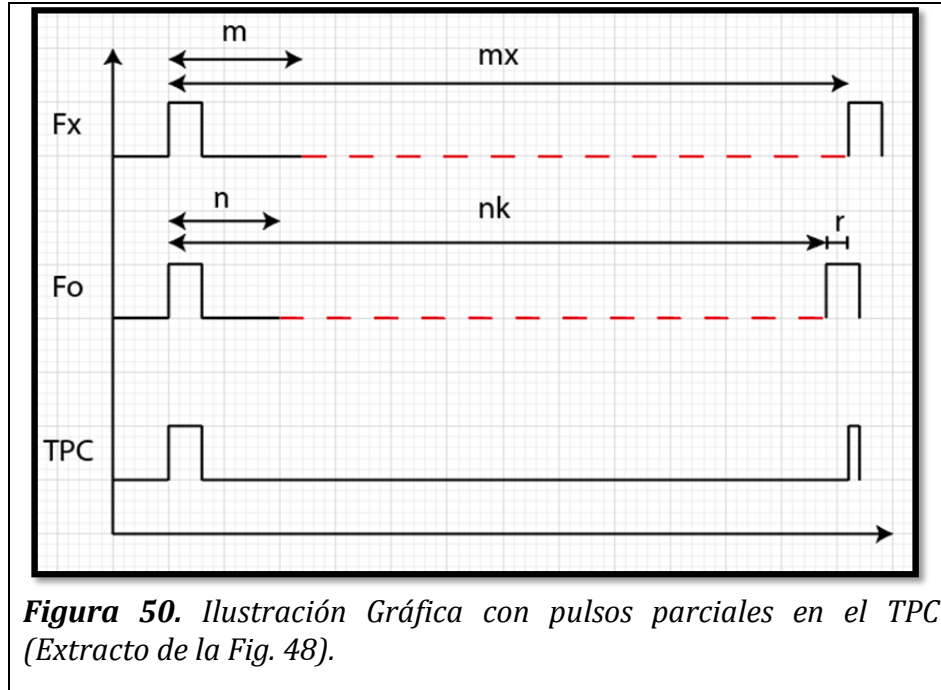
**$k \equiv 6 \pmod{6} \rightarrow$  Es una solución válida**

En la *Fig. 50* se presenta el segundo ejemplo con la *Tabla 54*; donde se dan pulsos parciales, a diferencia de la *Fig. 49* que son pulsos enteros. Donde los valores y variables son:

$$Tx(m) = 12 UT$$

$$T_o(n) = 10 UT$$

$$\text{Desfasamiento de } F_o(r) = 2 UT$$



**Figura 50.** Ilustración Gráfica con pulsos parciales en el TPC (Extracto de la Fig. 48).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir en la fórmula (38).

$$(m)x = r + (n)k \rightarrow mx = r + nk \rightarrow 12x = r + 10k \rightarrow 12x \equiv 2 \pmod{10}$$

Teniendo la congruencia " $12x \equiv 2 \pmod{10}$ ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "x".

$$(12, 10) = 2, 2/2 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  $6x \equiv 1 \pmod{5}$ , tiende a las siguientes igualdades:

$$x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 6 \pmod{5} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$(m)x = r + (n)k \rightarrow mx - r = nk \rightarrow 12x - 2 = 10k \rightarrow 10k \equiv -2 \pmod{12}$$

Teniendo la congruencia " $10k \equiv -2 \pmod{12}$ ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable " $k$ ".

$(10, 12) = 2, -2/2 \rightarrow$  Si tiene solución

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  $5k \equiv -1 \pmod{6}$ , tiende a las siguientes igualdades:

$k \equiv 1 \pmod{6} \rightarrow$  Es una solución válida

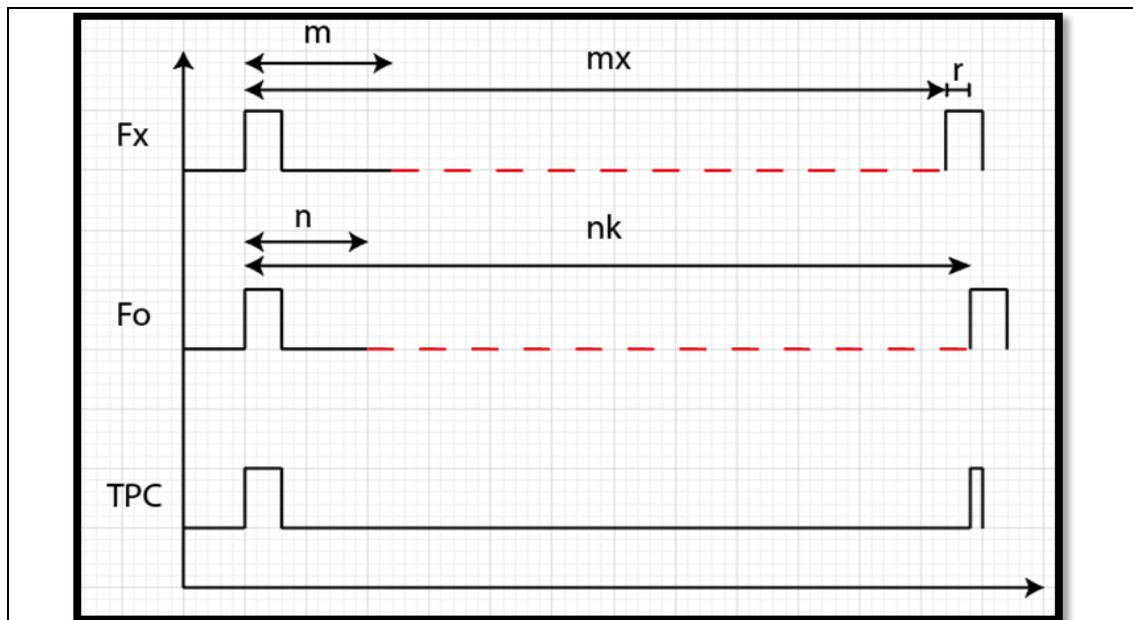
$k \equiv 7 \pmod{6} \rightarrow$  Es una solución válida

En la Fig. 51 se presenta el tercer ejemplo con la Tabla 55; donde también se dan pulsos parciales. Donde los valores y variables son:

$$T_x(m) = 12 \text{ UT}$$

$$T_o(n) = 10 \text{ UT}$$

$$\text{Desfasamiento de } F_x(r) = 2 \text{ UT}$$



**Figura 51.** Ilustración Gráfica con pulsos parciales en el TPC (Extracto de la Fig. 48).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir en la fórmula (38).

$$(m)x + r = (n)k \rightarrow mx + r = nk \rightarrow 12x + r = 10k \rightarrow 12x \equiv -2 \pmod{10}$$

Teniendo la congruencia " **$12x \equiv -2 \pmod{10}$** ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "**x**".

$$(12, 10) = 2, -2/2 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  **$6x \equiv -1 \pmod{5}$** , tiende a las siguientes igualdades:

$$**$x \equiv -1 \pmod{5} \rightarrow \text{Es una solución inválida}$**$$

$$**$x \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow \text{Es una solución válida}$**$$

$$(m)x + r = (n)k \rightarrow mx + r = nk \rightarrow 12x + 2 = 10k \rightarrow 10k \equiv 2 \pmod{12}$$

Teniendo la congruencia " **$10k \equiv 2 \pmod{12}$** ", se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "**k**".

$$(10, 12) = 2, 2/2 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  **$5k \equiv 1 \pmod{6}$** , tiende a las siguientes igualdades:

$$**$-k \equiv 1 \pmod{6} \rightarrow \text{Es una solución inválida}$**$$

$$**$k \equiv -1 \pmod{6} \rightarrow \text{Es una solución inválida}$**$$

$$**$k \equiv 5 \pmod{6} \rightarrow \text{Es una solución válida}$**$$

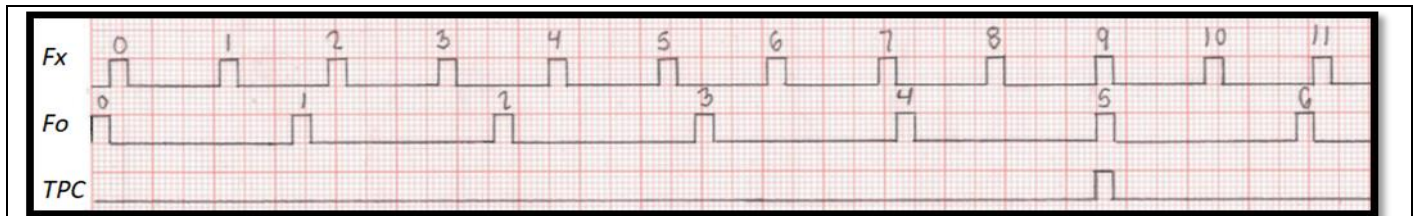
En caso de que no se pueda encontrar la solución en las congruencias con las propiedades, se puede observar cómo resolverlo de una manera en el ejemplo de la *Fig. 52*.

Donde los valores y variables:

$$Tx (m) = 18 UT$$

$$To (n) = 33 UT$$

$$\text{Desfasamiento de } Fx (r) = 3 UT$$



**Figura 52.** Ilustración Gráfica con un ancho constante en el TPC (Algoritmo de Euclides con Congruencias).

Vista la Fig. 52, se tiene que ahora demostrar que TPC, tiene soluciones; por lo tanto, a continuación, se muestra la sustitución de variables de la fórmula (38).

$$(m)x + r = (n)k \rightarrow 18x + 3 = 33k$$

$$18x = -3 + 33k \rightarrow 6x = -1 + 11k \rightarrow 6x \equiv -1 \pmod{11} \rightarrow (6, 11) = 1, 1|-1 \rightarrow \text{Tiene Soluciones}$$

De acuerdo a las propiedades de las congruencias, la congruencia “ $6x \equiv -1 \pmod{11}$ ” tiene las siguientes soluciones [11, pág. 3]:

$$6x \equiv -1 \pmod{11}$$

Aplicamos el Algoritmo de Euclides:

$$(6, 11) = 1$$

$$11 = 6(1) + 5$$

$$6 = 5(1) + 1$$

$$5 = 1(5)$$

$$1 = 1$$

Utilizamos la Identidad de Bézout:

$$5 = 11 - 6(1)$$

$$1 = 6 - 5 (1)$$

$$1 = 6 (1) - (11 (1) - 6 (1)) (1)$$

$$6 (1) - 11 (1) + 6 (1) = 1$$

$$6 (2) - 11 (1) = 1$$

$$6 (2) = 1 + 11(1)$$

$$6 (2) \equiv 1 \text{ (mód 11)} \rightarrow 6x \equiv 1 \text{ (mód 11)} \rightarrow x = 2$$

Buscamos el valor de "x" con respecto a su Congruencia Inicial:

$$[6 (2) = 1(1) + 11(1)](-1) \rightarrow 6 (-2) = 1(-1) + 11(-1) \rightarrow 6(-2) \equiv -1 \text{ (mód 11)} \rightarrow x = -2$$

**$x \equiv -2 \text{ (mód 11)} \rightarrow$  Es una solución inválida**

**$x \equiv 9 \text{ (mód 11)} \rightarrow$  Es una solución válida**

En la Fig. 53, se muestra un ejemplo con anchos de pulsos diferentes y cómo influye en la formación de pulsos completos y parciales. Donde los valores son:

$$T_x (m) = 12 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 10 \text{ UT}$$

$$1er \text{ Desfasamiento de } F_o (r_1) = 2 \text{ UT}$$

$$2do \text{ Desfasamiento de } F_o (r_2) = 2 \text{ UT}$$

Ahora se usará la fórmula (38) para resolver y encontrar los pulsos en TPC de la Fig. 53.

**CASO #1 (EL MÁS ANCHO PULSO EN TPC)**

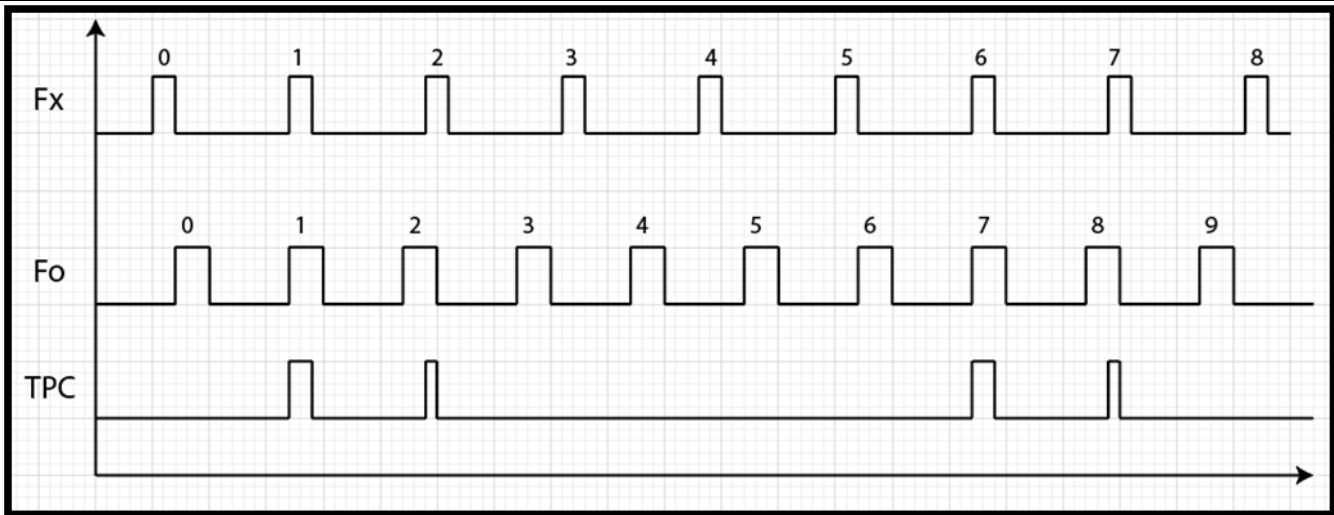
$$(mx = r_1 + nk) \rightarrow 12x = 2 + 10k$$

$$12x \equiv 2 \text{ (mód 10)} \rightarrow (12, 10) = 2, 2/2 \rightarrow \text{ Tiene solución}$$

**CASO #2 (EL MENOS ANCHO PULSO EN TPC)**

$$(mx = r_1 + nk + r_2) \rightarrow 12x = 2 + 10k + 2$$

$$12x = 2 + 10k + 2 \rightarrow 12x \equiv 4 \text{ (mód 10)} \rightarrow (12, 10) = 2, 4/2 \rightarrow \text{ Tiene solución}$$



**Figura 53.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (2do Ejemplo del uso de Congruencias).

De acuerdo, a las propiedades de las congruencias; la congruencia " $12x \equiv 2 \pmod{10}$ ", tiene las siguientes soluciones:

$$6x \equiv 1 \pmod{5}$$

$x \equiv 1 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 6 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida

De acuerdo, a las propiedades de las congruencias; la congruencia " $12x \equiv 4 \pmod{10}$ ", tiene las siguientes soluciones:

$$6x \equiv 2 \pmod{5}$$

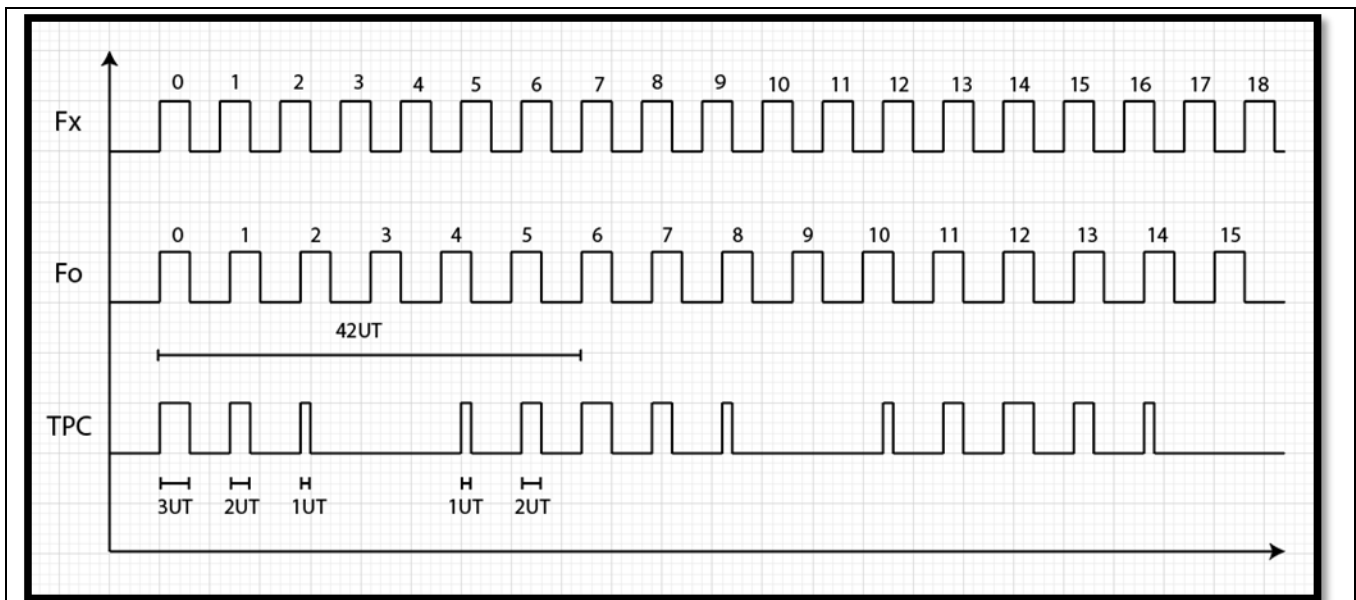
$x \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 7 \pmod{5} \rightarrow$  Es una solución válida

## 4.7 Definición de las Coincidencias de Proporción

Las *coincidencias de proporción* son el número de coincidencias que existen dentro de un intervalo de tiempo (*definición de proporción [19, pp. 24]*).

Por ejemplo, obsérvese en la *Fig. 54* donde están los tres anchos de pulsos con diferentes unidades de tiempo respectivamente ( $1UT - 2UT - 3UT$ ) en el TPC; donde  $T_x = 6 UT$  y  $T_o = 7 UT$ .



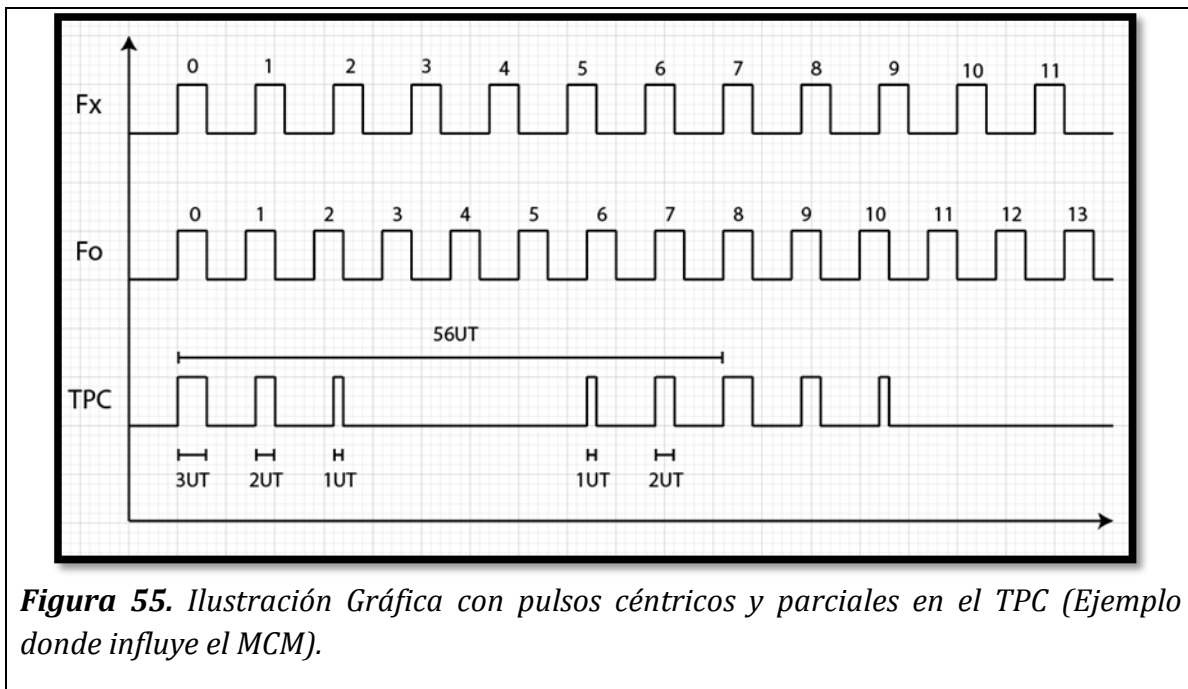
**Figura 54.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (*Definición de la Coincidencias de Proporción*).

En el ejemplo anterior de la *Fig. 54*, se pudo observar una observación muy importante. De acuerdo, con la definición de las *coincidencias de proporción* existen en total nueve coincidencias dentro del lapso de 42 UT. Por lo tanto, se puede llegar a la conclusión de que las coincidencias no son lo mismo que los pulsos, ya que por lo general:

- *Las coincidencias se consideran como: (1 UT).*
- *Mientras que los pulsos pueden ser de: (1 UT -  $\infty$  UT).*

Incluso se puede mencionar también cómo influye el mínimo común múltiplo (MCM) en la comparación de los trenes de pulsos.

En la Fig. 55 el periodo de  $F_x$  es mayor que el de la Fig. 54; donde  $T_x = 8 UT$  y  $T_o = 7 UT$ .



**Figura 55.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo donde influye el MCM).

Al observarse y compararse ambas Fig. 54 y Fig. 55, se pudo deducir que el MCM de los periodos de las frecuencias en comparación es proporcional al lapso de tiempo donde se encuentran los pulsos de coincidencias.

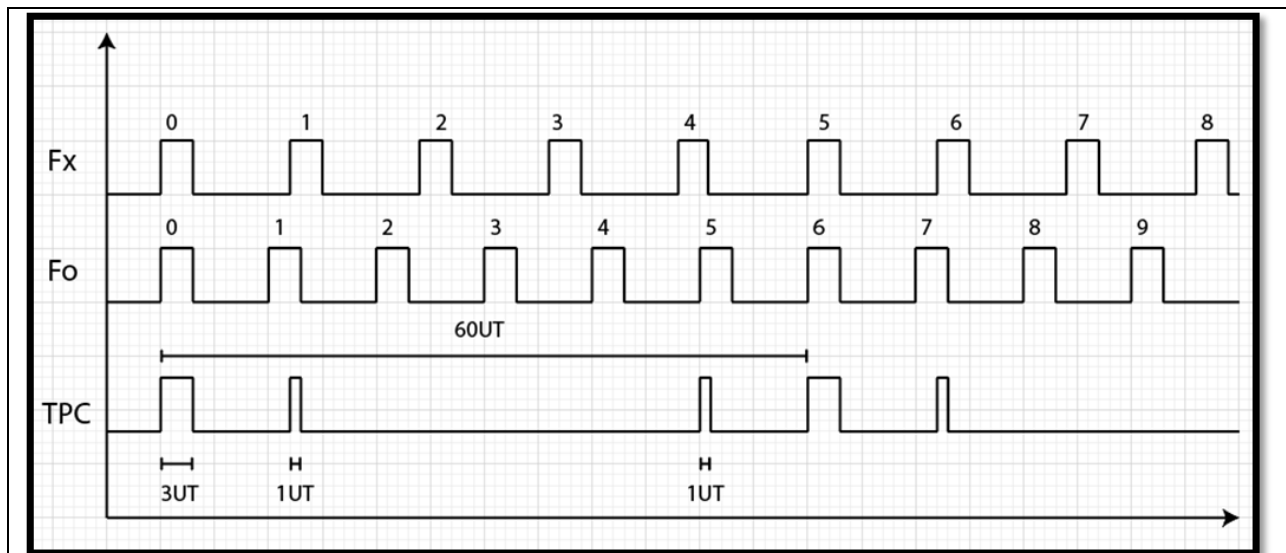
Mientras sea el mismo MCD de los dos periodos en comparación, tanto se mantengan los mismos anchos de pulsos y se incrementa cualquiera de los dos periodos, como resultado los pulsos de coincidencias seguirán siendo los mismos.

En la Tabla 40 se muestra el criterio del MCM con la comparación de trenes de pulsos.

<b>Tabla 40 - Influencia del MCM</b>		
ACCIÓN	CONSECUENCIA	SIN MODIFICACIONES
$MCM \uparrow$	Lapso de Tiempo $\uparrow$	$Pulsos\ de\ Coincidencias\ (=)$
$MCM \downarrow$	Lapso de Tiempo $\downarrow$	

Otro parámetro a destacar es entender cómo influye el MCD en la comparación de los trenes de pulsos, en donde la *Fig. 56* muestra diferencias con respecto a las *Fig. 54* y *Fig. 55*.

En el lapso de tiempo de la *Fig. 56* hay solamente cinco coincidencias y en las *Fig. 54* y *Fig. 55* hay nueve coincidencias; donde  $T_x = 12 UT$ , y  $T_o = 10 UT$ .



**Figura 56.** Ilustración Gráfica con pulsos céntricos y parciales en el TPC (Ejemplo donde influye el MCD).

Vistas las *Fig. (54 – 56)*, se puede deducir que el MCD obtenido de los periodos de los dos trenes de pulsos de sus frecuencias en comparación es inversamente proporcional al número de pulsos de coincidencias en un determinado lapso de tiempo (*Tabla 41*).

<b>Tabla 41 - Influencia del MCD</b>	
<i>ACCIÓN</i>	<i>CONSECUENCIA</i>
<i>MCD ↑</i>	<i>Pulsos de Coincidencias ↓</i>
<i>MCD ↓</i>	<i>Pulsos de Coincidencias ↑</i>

### 4.7.1 Obtención de Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento

Ahora se analizarán fórmulas capaces de obtener las coincidencias dentro de un lapso de tiempo, que son las siguientes [13].

$$\mu = a_1g + r_1 \quad 0 \leq r_1 < g \quad (39)$$

$$v = a_2g + r_2 \quad 0 \leq r_2 < g \quad (40)$$

$$r_{m\acute{a}x} = \acute{m}ax(r_1, r_2) \quad r_{m\acute{i}n} = \min(r_1, r_2) \quad (41)$$

$$f^0 = \frac{Ng}{mn} = \frac{\mu v + r_{m\acute{i}n}(g - r_{m\acute{a}x})}{mn} \quad (42)$$

$$f^0 = \frac{\mu v}{mn} \quad (43)$$

\*Si:  $r = 0$  y una (o ambas) variables de  $\mu, v$  es divisible por el MCD; por lo tanto, se tiene que  $r_{m\acute{i}n} = 0$ .

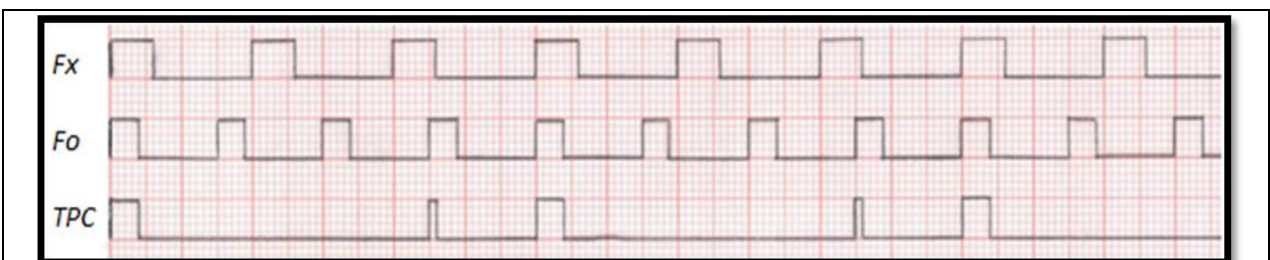
El primer ejemplo está en la Fig. 57, donde los valores son:

Ancho de Pulso de Fx ( $\mu$ ) = 6 UT

Ancho de Pulso de Fo ( $v$ ) = 4 UT

Tx ( $m$ ) = 20 UT

To ( $n$ ) = 15 UT



**Figura 57.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (1er Ejemplo).

Aplicando las fórmulas (39 - 42), con respecto a la Fig. 57, se va a obtener su respectiva coincidencia de proporción:

$$f^0 = \frac{\mu\nu + r_{\min}(g - r_{\max})}{mn}$$

$$f^0 = \frac{(6)(4) + (1)(5 - 4)}{(20)(15)}$$

$$f^0 = \frac{25}{300} = \frac{5}{60}$$

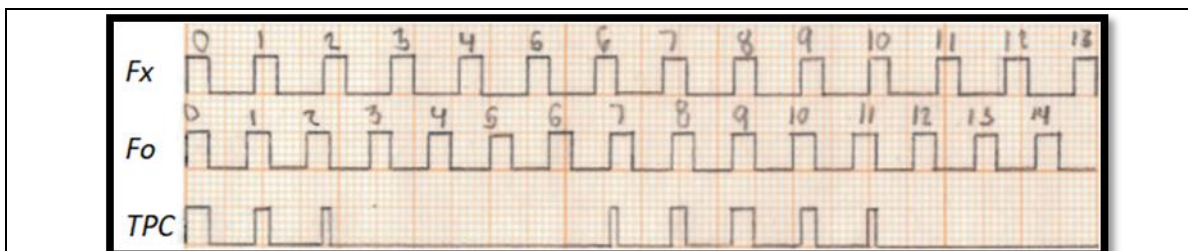
También se tomará el ejemplo de la Fig. 58; donde los valores son:

$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 3 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 9 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 8 \text{ UT}$$



**Figura 58.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (2do Ejemplo).

Aplicando la fórmula (43); se tiene el siguiente resultado:

$$f^0 = \frac{\mu\nu}{mn}$$

$$f^0 = \frac{(3)(3)}{(9)(8)}$$

$$f^0 = \frac{9}{72}$$

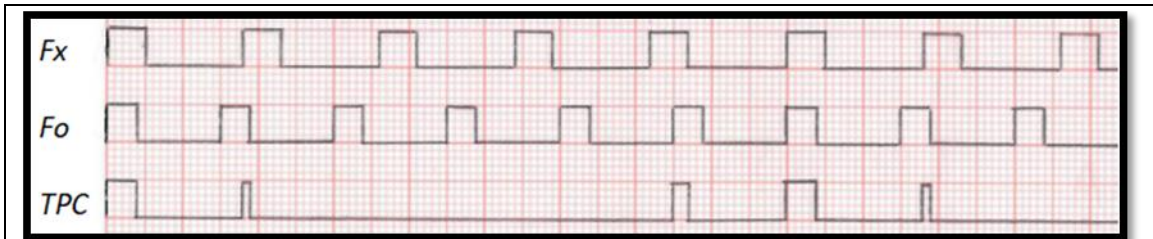
Por último, se analizará el caso; el cual se muestra en el ejemplo de la *Fig. 59* con los siguientes valores:

$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 5 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 4 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 18 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 15 \text{ UT}$$



**Figura 59.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción sin Desfasamiento en el TPC (3er Ejemplo).

Aplicando la *fórmula (42)*, en los cuales se sustituirán los valores que correspondan para dar como resultado una coincidencia de fracción:

$$f^0 = \frac{\mu\nu + r_{\min}(g - r_{\max})}{mn}$$

$$f^0 = \frac{(5)(4) + (1)(3 - 2)}{(18)(15)}$$

$$f^0 = \frac{21}{270} = \frac{7}{90}$$

## 4.7.2 Obtención de Coincidencias de Proporción con Desfasamiento

Las fórmulas para obtener las coincidencias de proporción con desfasamiento son las que se presentan a continuación [13]:

$$f^r = \frac{\mu\nu}{mn} + \varepsilon \quad (44)$$

$$\varepsilon = \frac{r_{\min}^* (g - r_{\max}^*) - r_{\min}^{**} (g - r_{\max}^{**})}{mn} \quad (45)$$

Donde:

$$r_1^* = r_1^{**} = \text{residuo de } \mu/g$$

$$r_2^* = \text{residuo de } (r + \nu) / g$$

$$r_2^{**} = \text{residuo de } r/g$$

$$r_{\min}^* = \min (r_1^*, r_2^*)$$

$$r_{\max}^* = \max (r_1^*, r_2^*)$$

$$r_{\min}^{**} = \min (r_1^{**}, r_2^{**})$$

$$r_{\max}^{**} = \max (r_1^{**}, r_2^{**})$$

Si  $r_{\min}^* = r_{\min}^{**} = 0$  y como fórmula, sin importar el valor que tenga "r", se tiene que:

$$f^r = \frac{\mu\nu}{mn} \quad (46)$$

En la Fig. 60, se muestra el primer caso de desfaseamiento y para complementarlo se utilizarán los siguientes valores:

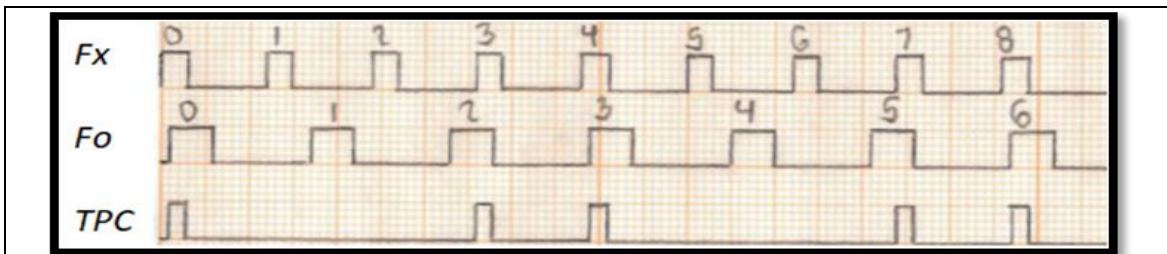
$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 5 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 12 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 16 \text{ UT}$$

$$\text{Desfaseamiento de } F_o (r) = 1 \text{ UT}$$



**Figura 60.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfaseamiento en el TPC (1er Ejemplo).

Al aplicar las fórmulas (44 - 45), se obtiene que:

$$\varepsilon = \frac{r_{\min} * (g - r_{\max} *) - r_{\min} ** (g - r_{\max} **)}{mn}$$

$$\varepsilon = \frac{(2)(4 - 3) - (1)(4 - 3)}{(12)(16)}$$

$$\varepsilon = \frac{(2)(1) - (1)(1)}{(12)(16)}$$

$$\varepsilon = \frac{(2) - (1)}{(12)(16)}$$

$$f^r = \frac{(3)(5)}{192} + \frac{1}{192}$$

$$f^r = \frac{16}{192} = \frac{Ng}{mn} = \frac{(4)(4)}{(192)}$$

$$f^r = \frac{4}{48}$$

En la Fig. 61 se muestra un ejemplo de desfaseamiento; donde sus valores son los siguientes:

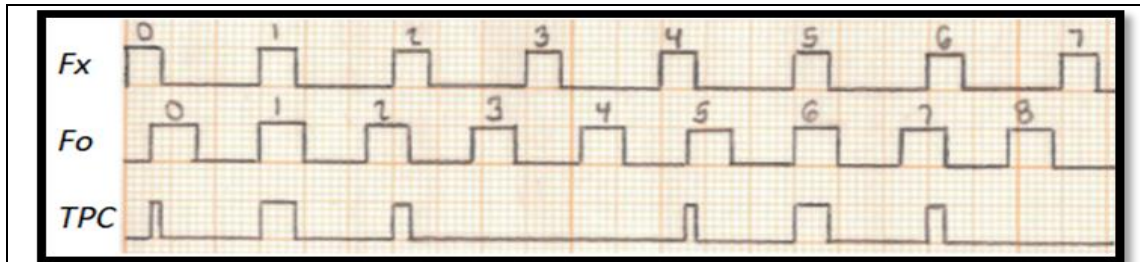
$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 4 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 5 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 15 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 12 \text{ UT}$$

$$\text{Desfaseamiento de } F_o (r) = 3 \text{ UT}$$



**Figura 61.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfaseamiento en el TPC (2do Ejemplo).

Al aplicar las fórmulas (45 - 46), se obtiene que:

$$\varepsilon = \frac{r_{\min} * (g - r_{\max} *) - r_{\min} ** (g - r_{\max} **)}{mn}$$

$$\varepsilon = \frac{(1)(3 - 2) - (0)(3 - 1)}{(12)(15)}$$

$$\varepsilon = \frac{(1)(1) - (0)(2)}{(12)(15)}$$

$$\varepsilon = \frac{(1) - (0)}{(12)(15)}$$

$$f^r = \frac{(4)(5)}{180} + \frac{1}{180}$$

$$f^r = \frac{21}{180} = \frac{Ng}{mn} = \frac{(7)(3)}{(180)}$$

$$f^r = \frac{7}{60}$$

Para mostrar otro ejemplo, se mostrará en la *Fig. 62* otro ejemplo con respecto al desfaseamiento; donde sus valores son los siguientes:

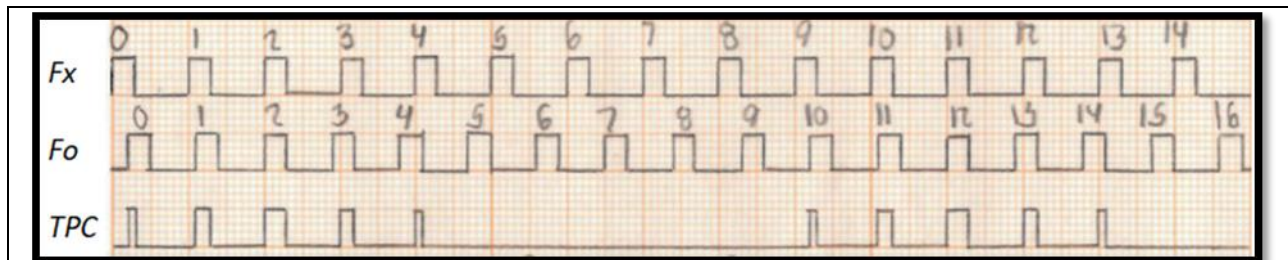
$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 3 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 10 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 9 \text{ UT}$$

$$\text{Desfasamiento de } F_o (r) = 2 \text{ UT}$$



**Figura 62.** Ilustración Gráfica de las Coincidencias de Proporción con Desfasamiento en el TPC (3er Ejemplo).

Al aplicar la fórmula (46), se obtiene que:

$$r_{\min}^* = r_{\min}^{**} = 0$$

Entonces :

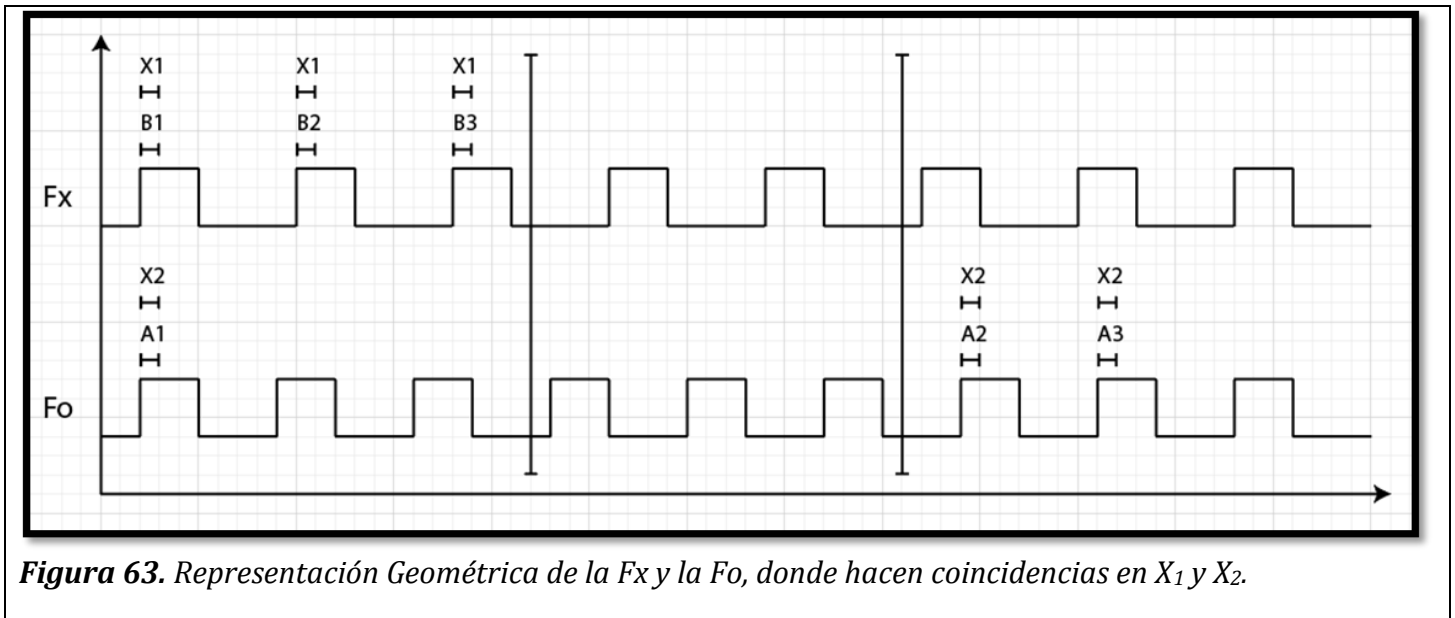
$$f^r = \frac{(3)(3)}{(10)(9)}$$

$$f^r = \frac{9}{90} = \frac{Ng}{mn} = \frac{(9)(1)}{(90)}$$

$$f^r = \frac{9}{90}$$

## 4.8 Obtención del Número de Pulsos de una Proporción sin Desfasamiento

Anteriormente se vieron analizaron fórmulas para la obtención de coincidencias de proporción; en el cual se considera determinar el total de coincidencias dentro de un lapso de tiempo [13]. Ahora se analizará la obtención del total de número de pulsos de un lapso de tiempo. A continuación, obsérvese la Fig. 63.



**Figura 63.** Representación Geométrica de la  $F_x$  y la  $F_o$ , donde hacen coincidencias en  $X_1$  y  $X_2$ .

Si se observó bien la Fig. 63, se pudo percibir que tanto  $X_1$  como  $X_2$  son la primera coincidencia donde hace comparación con la frecuencia contraria (ya sea  $F_x$  o  $F_o$ ). Las letras  $B_1$ - $B_3$  hacen referencia al  $F_x$  y las  $A_1$  -  $A_3$  con respecto al  $F_o$ .

Para entender la Fig. 63, es necesario indicar que tanto  $X_1 = X_2 = 1$ ; porque como se mencionó antes tienden a hacer la primera coincidencia y así demostrar, sin importar las coincidencias consecutivas, de que existe un pulso.

Para determinar el número de pulsos de una proporción es necesario considerar la siguiente fórmula:

$$k_{12} = n_1 + n_2 - 1 \quad (47)$$

Si bien “ $k_{12}$ ” significa el total del número de pulsos, pero para obtenerlo es importante recordar que la primera coincidencia es la que indica que existe un pulso. Ahora obsérvese la Fig. 64 da sus coincidencias con respecto a la  $x_1$  o  $x_2$ .

$x_2$	$x_1$	Total per row
1	1, $g+1$ , $2g+1$ , $\dots$ , $a_1g+1$	$a_1+1$
2	2, $g+2$ , $2g+2$ , $\dots$ , $a_1g+2$	$a_1+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_1$	$r_1$ , $g+r_1$ , $2g+r_1$ , $\dots$ , $a_1g+r_1$	$a_1+1$
$r_1+1$	$r_1+1$ , $g+r_1+1$ , $\dots$ , $(a_1-1)g+r_1+1$	$a_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g$	$g$ , $2g$ , $3g$ , $\dots$ , $a_1g$	$a_1$
-----		
$g+1$	1, $g+1$ , $2g+1$ , $\dots$ , $a_1g+1$	$a_1+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	etc.	

**Figura 64.** Tabla para la Obtención del Número de Pulsos.

Si  $x_2 = 1$ , entonces se utilizará la igualdad (46) y para el caso de  $x_1 = 1$  la igualdad (47). Las igualdades están a continuación:

$$n_2 = \begin{cases} a_1 + 1 & 0 < r_1 \\ a_1 & 0 = r_1 \end{cases} \quad (48)$$

$$n_1 = \begin{cases} a_2 + 1 & 0 < r_2 \\ a_2 & 0 = r_2 \end{cases} \quad (49)$$

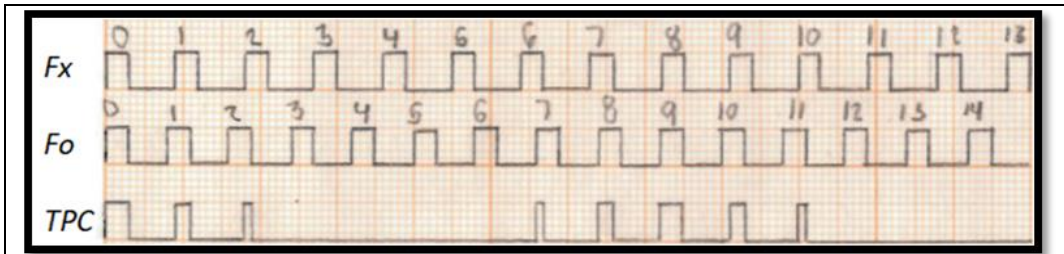
Ahora se va a checar el primer ejemplo que se muestra en la *Fig. 65*; donde sus valores son los siguientes:

$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 3 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 9 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 8 \text{ UT}$$



**Figura 65.** Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos sin Desfasamiento en el TPC (Primer Ejemplo).

Si bien, también es importante considerar las *fórmulas (39 - 40)*, para encontrar los valores de  $a_1$  y  $a_2$  de las *igualdades (48 - 49)* con respecto a la *Fig. 65*, que son los siguientes:

$$\mu = a_1 g + r_1 \rightarrow (3) = a_1(1) + r_1 \rightarrow a_1 = 3 ; r_1 = 0$$

$$\nu = a_2 g + r_2 \rightarrow (3) = a_2(1) + r_2 \rightarrow a_2 = 3 ; r_2 = 0$$

Y siguiendo las *igualdades (48 - 49)*; se puede deducir que  $n_1 = 3$  y  $n_2 = 3$ , y para complementarlo es necesario observar la *fórmula (47)* y utilizarla:

$$k_{12} = n_1 + n_2 - 1$$

$$k_{12} = 3 + 3 - 1$$

$$k_{12} = 5$$

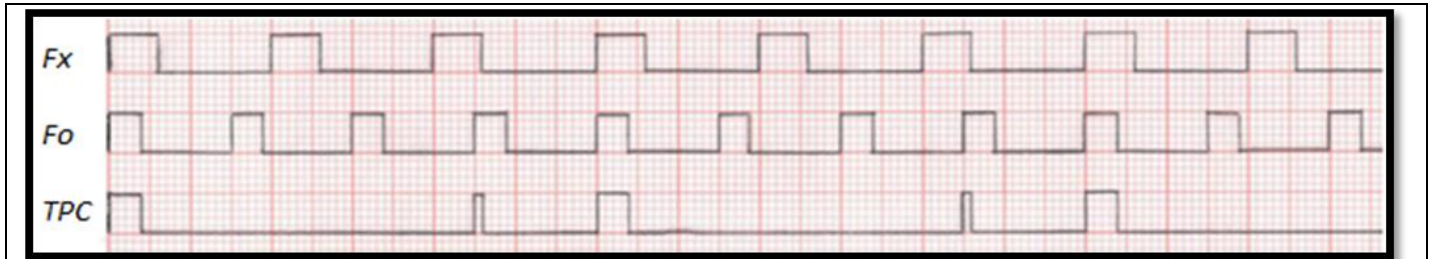
Ahora se tomará en cuenta otro ejemplo, y es con la *Fig. 66*; donde sus valores son los siguientes:

$$\text{Ancho de Pulso de } Fx (\mu) = 6 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } Fo (v) = 4 \text{ UT}$$

$$Tx (m) = 20 \text{ UT}$$

$$To (n) = 15 \text{ UT}$$



**Figura 66.** Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos sin Desfasamiento en el TPC (Segundo Ejemplo).

Utilizando las fórmulas (39 - 40) y la fórmula (47), se obtienen los siguientes resultados:

$$\mu = a_1 g + r_1 \rightarrow (6) = a_1(5) + r_1 \rightarrow a_1 = 1 ; r_1 = 1$$

$$v = a_2 g + r_2 \rightarrow (4) = a_2(5) + r_2 \rightarrow a_2 = 0 ; r_2 = 4$$

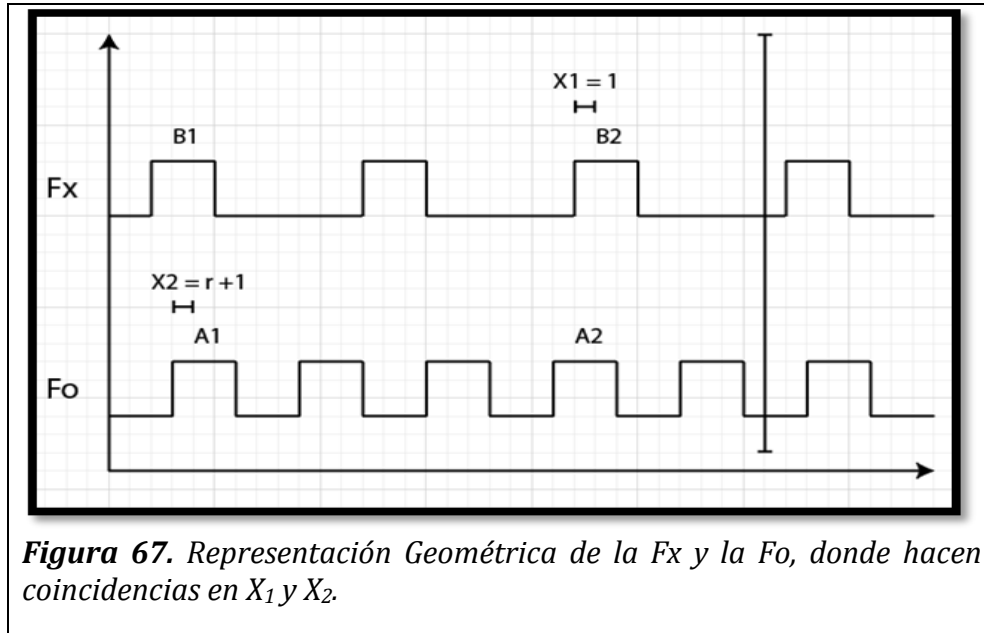
$$k_{12} = n_1 + n_2 - 1$$

$$k_{12} = 1 + 2 - 1$$

$$k_{12} = 2$$

## 4.9 Obtención del Número de Pulsos de una Proporción con Desfasamiento

En esta *Sección* se analizará la obtención del total de número de pulsos de un lapso de tiempo; pero con la condición de que exista un desfaseamiento (*Fig. 67*) [13].



**Figura 67.** Representación Geométrica de la  $F_x$  y la  $F_o$ , donde hacen coincidencias en  $X_1$  y  $X_2$ .

En las fórmulas (50 - 51), se encontraría el  $n_1$  que se necesita para encontrar el valor de  $k_{12}$  (total de pulsos de una proporción).

$$n_1^* = \begin{cases} a_2 + 1 & r_2 > 0 \\ a_2 & r_2 = 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$n_1 = \begin{cases} (a_3 + 1) - n_1^* & r_3 > 0 \\ a_3 - n_1^* & r_3 = 0 \end{cases} \quad (51)$$

$$k_{12} = n_1 + n_2 \quad (52)$$

**NOTA:** Si "g" divide a "r", entonces se aplicaría la fórmula (47); pero si no se aplica la regla que "g" divide a "r", entonces se usaría la siguiente fórmula (52).

En la Fig. 67 se muestra que la  $x_2 = (r + 1)$ ; el cual tiene una explicación válida del porqué se hace esa suma. Para entenderlo, vamos a determinar el ejemplo de la Fig. 68 con sus valores siguientes:

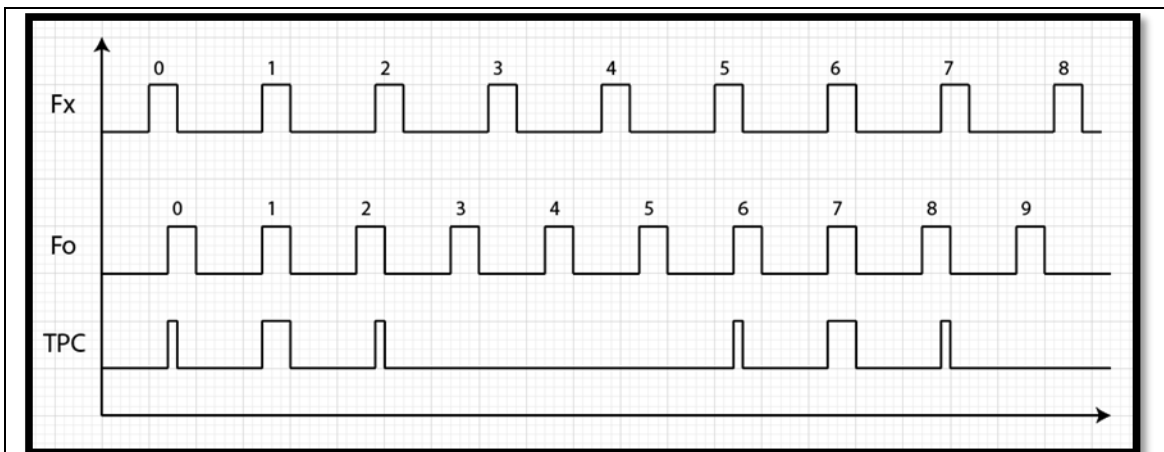
$$\text{Ancho de Pulso de } F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$$

$$\text{Ancho de Pulso de } F_o (\nu) = 3 \text{ UT}$$

$$T_x (m) = 12 \text{ UT}$$

$$T_o (n) = 10 \text{ UT}$$

$$\text{Desfasamiento de } F_o (r) = 2 \text{ UT}$$



**Figura 68.** Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos con Desfasamiento en el TPC (Primer Ejemplo).

Es necesario, entender que la Tabla 42; se desarrolló por medio de la fórmula (39) y de la información de la Fig. 64. La Tabla 42 que se muestra a continuación:

$$\mu = a_1 g + r_1 \rightarrow (3) = a_1(2) + r_1 \rightarrow a_1 = 1 ; r_1 = 1$$

<b>Tabla 42 - #Pulsos de <math>n_2</math> (Fig. 68)</b>			
$x_2$	$x_1$	$TpR$	$n_2$
1	1, 3	2	-
2	2	1	-
3	1, 3	2	$n_2 = 2$

Ahora, se buscarán las posibles coincidencias con respecto a “x<sub>1</sub>”; ya que, si se pudo observar bien en la *Tabla 72* se obtuvieron las coincidencias por medio de “x<sub>2</sub>”. Lo primero, que se tiene que obtener los valores de las fórmulas (40 - 41):

$$r = a_2 g + r_2 \rightarrow (2) = a_2(2) + r_2 \rightarrow a_2 = 1 ; r_2 = 0$$

$$v + r = a_3 g + r_3 \rightarrow (5) = a_3(2) + r_3 \rightarrow a_3 = 2 ; r_3 = 1$$

$$k_{12} = n_1 + n_2 - 1$$

$$k_{12} = 2 + 2 - 1$$

$$k_{12} = 3$$

Ahora se verá otro ejemplo, el cual es la *Fig. 69*; donde los valores son los siguientes:

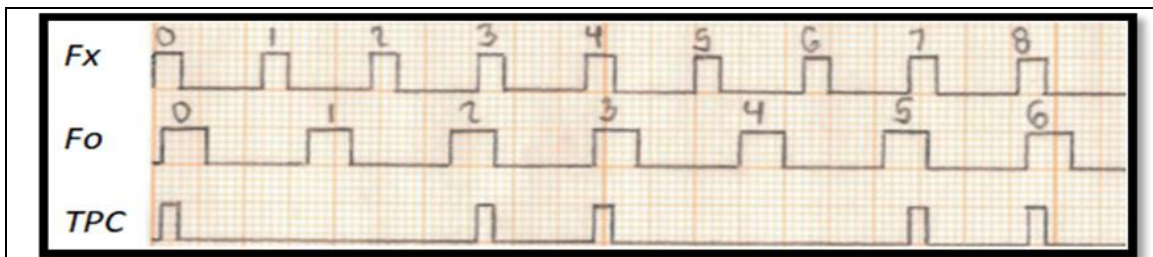
Ancho de Pulso de  $F_x (\mu) = 3 \text{ UT}$

Ancho de Pulso de  $F_o (v) = 5 \text{ UT}$

$T_x (m) = 12 \text{ UT}$

$T_o (n) = 16 \text{ UT}$

Desfasamiento de  $F_o (r) = 1 \text{ UT}$



**Figura 69.** Ilustración Gráfica para la Obtención de Pulsos con Desfasamiento en el TPC (Segundo Ejemplo).

La *Tabla 43* se forma de la *fórmula (39)* y de la información de la *Fig. 64*.

$$\mu = a_1 g + r_1 \rightarrow (3) = a_1(4) + r_1 \rightarrow a_1 = 0 ; r_1 = 3$$

<b>Tabla 43 - #Pulsos de <math>n_2</math> (Fig. 69)</b>			
$x_2$	$x_1$	*TpR	$n_2$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	-
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b><math>n_2 = 1</math></b>

A continuación, se muestran los resultados obtenidos del ejemplo de la *Fig. 69*:

$$r = a_2 g + r_2 \rightarrow (1) = a_2(4) + r_2 \rightarrow a_2 = 0 ; r_2 = 1$$

$$v + r = a_3 g + r_3 \rightarrow (6) = a_3(4) + r_3 \rightarrow a_3 = 1 ; r_3 = 2$$

$k_{12} = n_1 + n_2$ $k_{12} = 1 + 1$ $k_{12} = 2$
--

\*TpR = Total per Row (Fig. 64)

# 5 Análisis Práctico Experimental

Para llevar a cabo el análisis experimental, fue importante definir cuáles eran los propósitos de la investigación y de la importancia de obtener resultados prácticos demostrado en base a lo teórico. Por lo tanto, era vital comprobar que la teoría de números si se pueda aplicar a lo práctico; pero para hacer posible los experimentos fue necesario seguir una estructura de pasos.

Esta serie de pasos consistía en:

- Conseguir el material apropiado del prototipo electrónico
- Diseñar y construir el prototipo electrónico
- Buscar un espacio de trabajo donde realizar los experimentos
- Tener los materiales adicionales para realizar la experimentación (equipo de trabajo)

No necesariamente tienen que estar todos los pasos a como se planteó anteriormente, pero es importante mencionar un criterio general que al menos se siguió para obtener los resultados.

## 5.1 Materiales para el Prototipo Electrónico

Para detectar los periodos transcurridos en cada tren de pulsos de frecuencia desconocida y estándar, se tuvo que desarrollar y construir un *prototipo electrónico*. Los materiales utilizados fueron los siguientes:

- **Botón (*en inglés: push button*).**

Este componente funciona para pasar corriente eléctrica o dar una señal positiva al momento de que se presiona.

- **Compuertas AND (SN74AHCT08N).**

En este prototipo electrónico, donde se implementaron los microcontroladores Teensy, se manejaron voltajes de entrada de 3.3 V; por lo tanto, fue importante buscar que número de serie de *compuerta AND* que considera este determinado voltaje y ese fue el *SN74AHCT08N* que acepta voltajes del rango del 0.5 a 7.0 Volts.

- **Resistencias (Recomendación +10 kOhms)**

Las resistencias sirven para evitar ruidos externos que pueden interferir en nuestro proceso de detección de pulsos, se implementaron las resistencias para evitar señales falsas en las entradas del botón, microcontrolador de habilitación, microcontrolador de conteo e incluso también en las entradas de las compuertas AND. Por lo tanto, fue importante implementar una configuración para evitar tales acontecimientos y en este prototipo se usó la *Configuración PULL-DOWN*, que se muestra en la *Fig. 70*.

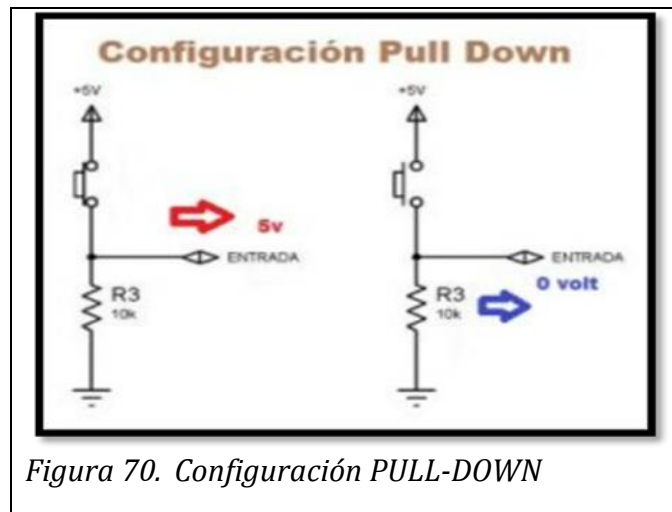


Figura 70. Configuración PULL-DOWN

- **¿Cómo funciona la configuración PULL-DOWN?**

*Cuando se conecta un botón pulsador a la entrada de un chip lógico o microcontrolador, se usa una resistencia PULL-DOWN, que se conecta a tierra, respectivamente, para evitar que "flote" en un estado indeterminado cuando el interruptor está abierto. Cuando se presiona el pulsador, su conexión directa a voltaje positiva anula fácilmente el efecto de la resistencia [20, pp. 85].*

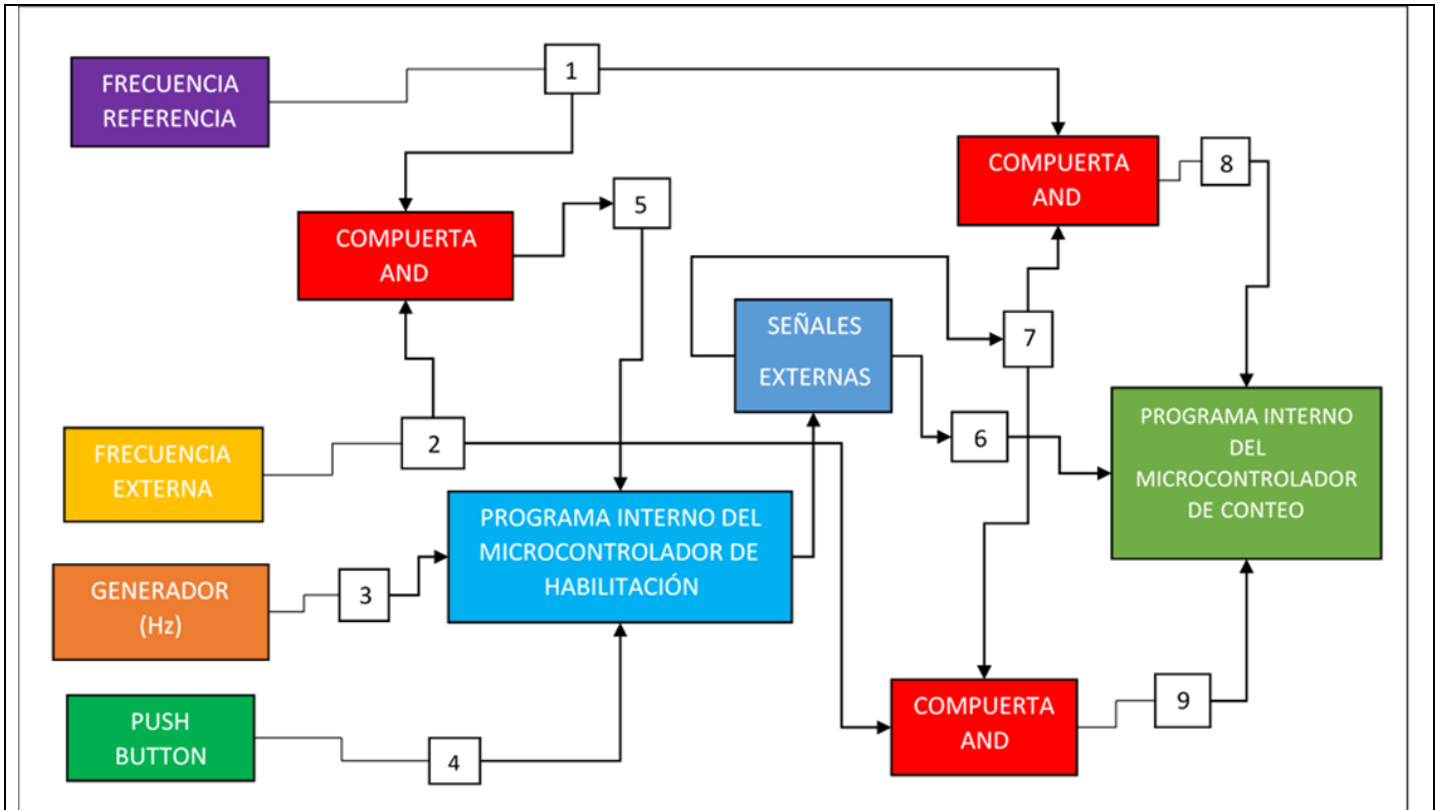
- **Microcontroladores Teensy 3.6 - 4.0 (180 MHz - 600 MHz)**

En este prototipo electrónico se implementaron dos microcontroladores que cumplen funciones tanto de habilitación como de conteo; ya que reciben señales de entradas externas, así como da señales de salida al exterior.

- **Microcontrolador Habilitador (Teensy 3.6)**: recibe y escribe señales externas.
- **Microcontrolador Contador (Teensy 4.0)**: recibe solamente señales externas.

## 5.2 Prototipo Electrónico

El *Prototipo Electrónico* está compuesto por los materiales utilizados y diseñado de acuerdo al funcionamiento de este mismo, para que cumpla el requisito de la comparación de los trenes de pulsos de las frecuencias desconocida y estándar, y también para la obtención del tren de pulsos de coincidencias. En la *Fig. 71*, se muestra un diagrama general del *Prototipo Electrónico*.



**Figura 71.** Diagrama General; donde se implementan los microcontroladores, las compuertas AND, la frecuencia externa y de referencia, el generador (Hz) y el botón.

El diagrama general de la *Fig. 71*, se compone de diferentes recuadros marcados de diferentes colores y son los siguientes:

- *FRECUENCIA REFERENCIA*
- *FRECUENCIA EXTERNA*
- *GENERADOR (HZ)*
- *PUSH BUTTON*
- *COMPUERTAS AND'S*

- *PROGRAMA INTERNO DEL MICROCONTROLADOR DE HABILITACIÓN*
- *PROGRAMA INTERNO DEL MICROCONTROLADOR DE CONTEO*

En la *Fig. 71*, también se señalan también los números (encerrados con recuadros), las señales que representan y su función:

**1.- Señal de Frecuencia de Referencia:** señal cuadrada obtenida por el generador de frecuencia.

**2.- Señal de Frecuencia Exterior:** señal cuadrada obtenida por el generador de frecuencia (aplicada durante la experimentación); aunque el caso ideal fuera una desconocida.

**3.- Señal de Generador (Hz):** señal conocida cuadrada que recibe el microcontrolador de habilitación, que tiene como función detener el programa en un determinado lapso de tiempo.

**4.- Señal de Botón:** señal de entrada que detecta el microcontrolador de habilitación, que tiene como función habilitar el inicio del método.

**5.- Señal de Coincidencia entre ambos trenes de pulsos de frecuencia:** señal de entrada que recibe el programa interno del microcontrolador de habilitación, que da como inicio al conteo de pulsos en caso de detectar la primera coincidencia y en los casos posteriores ir escribiendo *la señal exterior de escritura de periodos transcurridos (6)*.

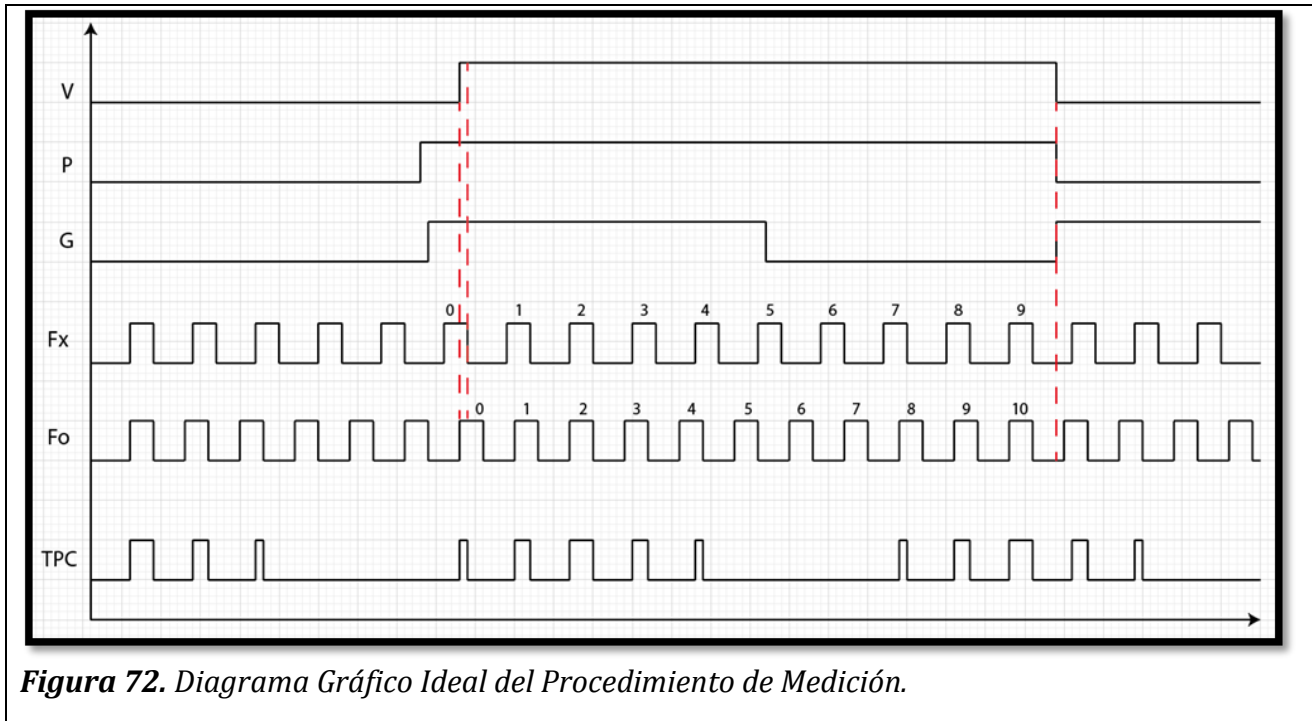
**6.- Señal de Escritura de Periodos Transcurridos:** señal de salida que da el microcontrolador de habilitación, al momento de obtener *la señal de coincidencia (5)*, y que recibe *el microcontrolador de conteo*. Como consiguiente el microcontrolador de conteo se encarga de mostrar al usuario, por medio de un puerto serial, la cantidad de periodos transcurridos en cada tren de pulsos desconocida y estándar.

**7.- Señal de Ventana:** señal de salida que proporciona el microcontrolador de habilitación, que permite habilitar las compuertas AND que tienen como salida las señales (8) y (9); las cuales tienen como función ir detectando los periodos transcurridos de ambos trenes de pulsos e irlos escribiendo en el microcontrolador de conteo.

**8.- Señal de Conteo de Periodos de Frecuencia Conocida:** señal de entrada que recibe el microcontrolador de conteo, que va contando los periodos transcurridos en el tren de pulsos de frecuencia conocida.

**9.- Señal de Conteo de Periodos de Frecuencia Desconocida:** señal de entrada que cumple la misma función que la señal (8), solamente que este caso se analiza la frecuencia desconocida.

En la *Fig. 72*, se muestra un diagrama gráfico ideal del procedimiento de medición; que se basa principalmente en el microcontrolador de habilitación de la *Fig. 71*.



Incluso se puede percibir que el conteo de periodos de ambos trenes de pulsos de frecuencia desconocido y estándar da inicio al momento de que hubo una coincidencia entre dos pulsos, como lo muestra la *Fig. 72*, e incluso si existe un determinado desfaseamiento o no lo hubiera.

Sin embargo; para que pueda dar inicio al conteo de periodos es necesario que se cumplan ciertas reglas, y comprender el funcionamiento de cada señal de la *Fig. 72*.

Las señales son las siguientes:

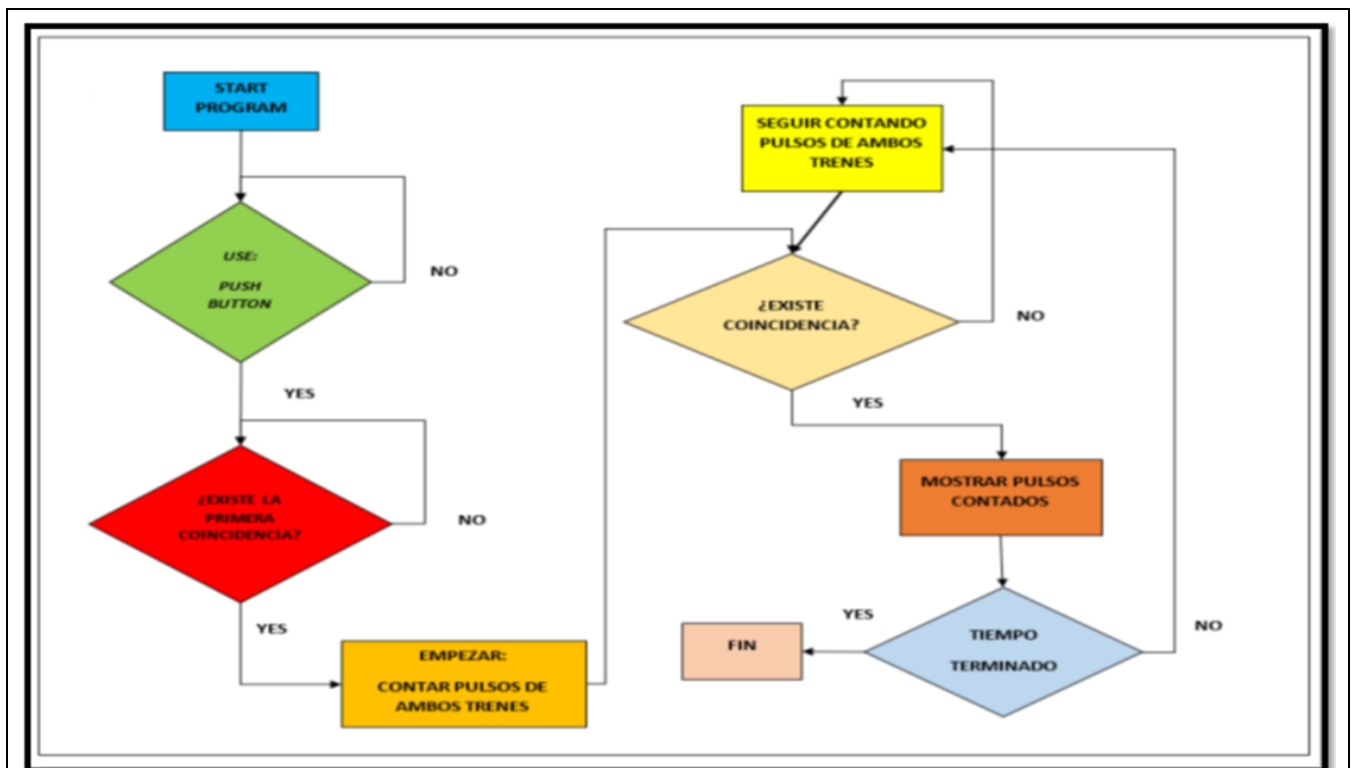
- **La señal (P)**, como se muestra en la *Fig. 72*, es la señal obtenida a partir del botón; que al momento de presionarlo se activa en *ALTO*.

- **La señal (G)** es la señal proporcionada conocida por medio del generador de frecuencia. Cuando da inicio el periodo, el cual se interpreta como un flanco de subida, se activa una señal en *ALTO*.
- **La señal (V)** es la señal que se activa en *ALTO*, al momento de que da la primera coincidencia entre ambos trenes de pulsos.

Las reglas son los siguientes:

- **Si ambas señales (P) y (G)** están activas en *ALTO*, y después se obtiene una coincidencia entre ambos periodos; como resultado se activa **la señal (V)** y empieza a dar inicio al conteo de periodos de ambos trenes de pulsos de las frecuencias.
- Cuando se están contando los periodos de ambos trenes pulsos de frecuencias, tiene que existir un límite en el cual se ocupa detener **el programa de ejecución**. Por lo tanto; cuando se da el segundo flanco de subida de **la señal (G)**, se da como finalizado el conteo de periodos e incluso **las señales (V) y (P)** se ponen en *BAJO*.

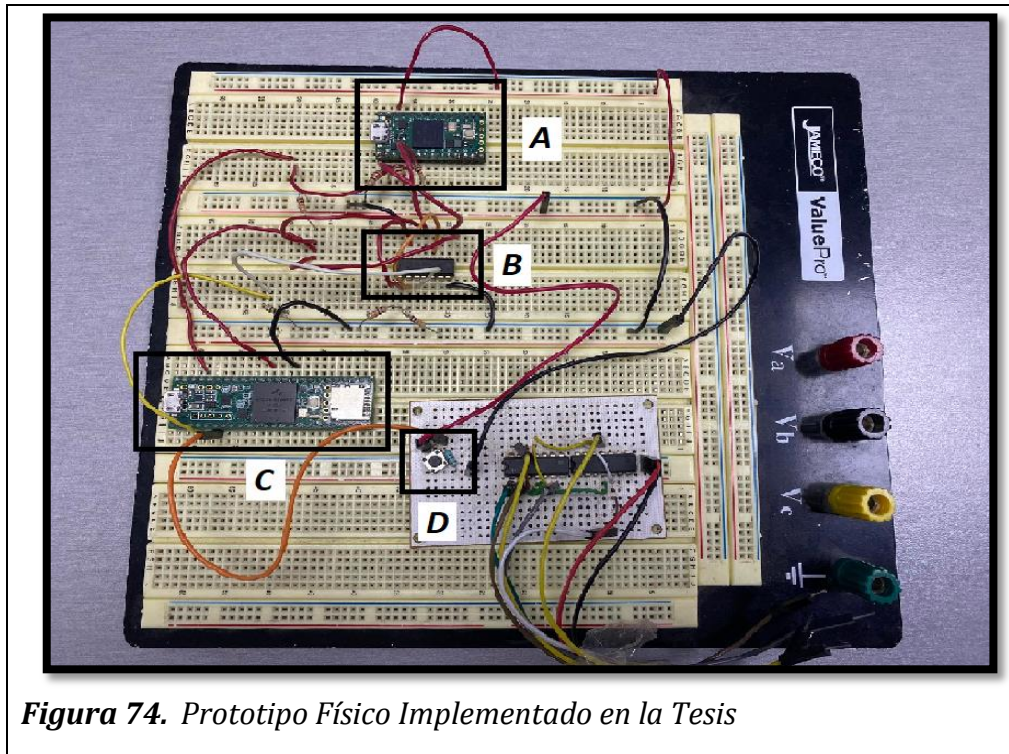
En el *Fig. 73* se muestra el funcionamiento ideal del prototipo implementado y diseñado.



**Figura 73.** Diagrama de Funcionamiento Ideal; donde se implementan los programas internos de los microcontroladores de habilitación y de conteo.

## 5.3 Prototipo Físico Implementado

En esta tesis se desarrolló un prototipo físico, que funcionó para hacer las pruebas físicas de la comparación de los trenes de pulsos de sus respectivas frecuencias (desconocida y conocida). En la *Fig. 74* se observa que hay incisos (A - D); donde se muestran los componentes utilizados.



**Figura 74.** Prototipo Físico Implementado en la Tesis

Los componentes son los siguientes:

- A). - *Teensy 4.0*
- B). - *Compuerta AND (SN74AHCT08N)*
- C). - *Teensy 3.6*
- D). - *Push Button (Botón)*

## 5.4 Diseño de Programa en Matlab

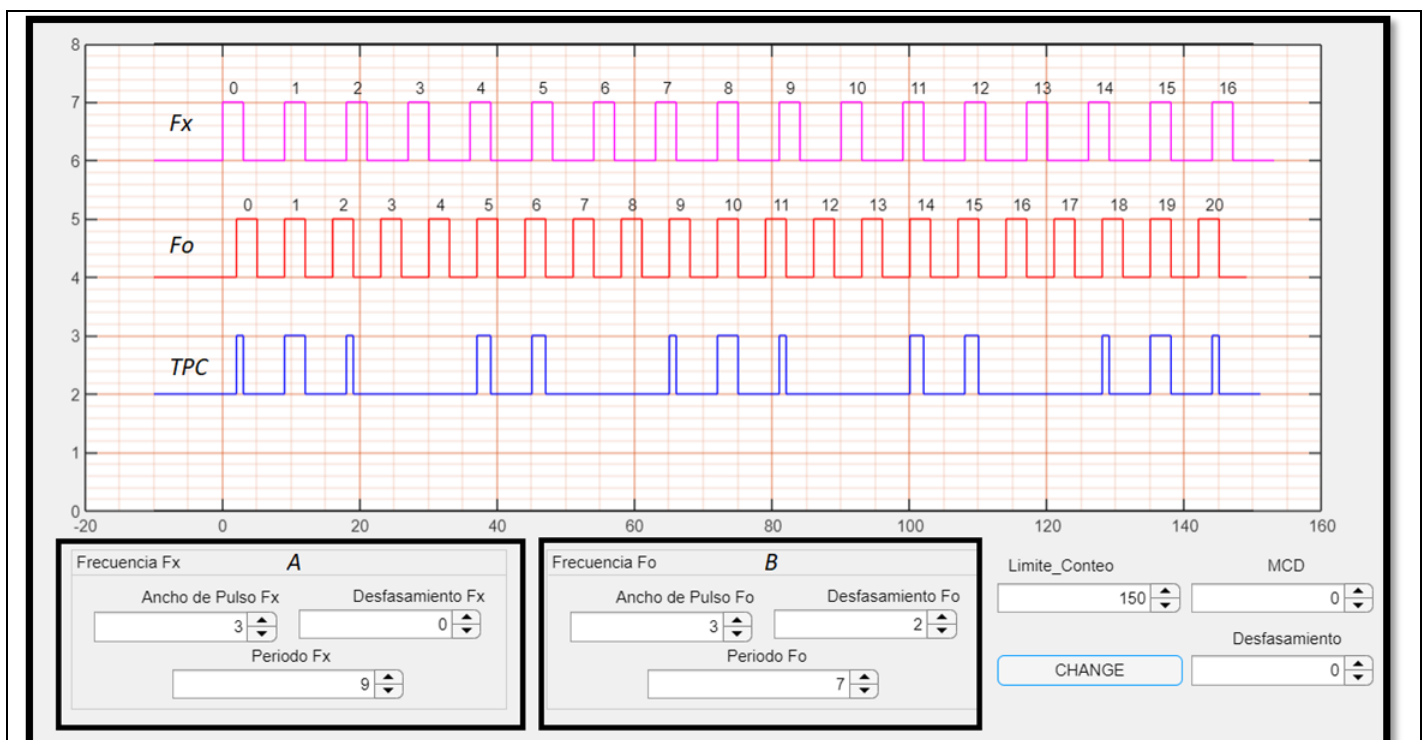
Durante esta investigación de tesis, se propuso diseñar un programa en el software de Matlab para la comparación de trenes de pulsos.

Las razones por las que se diseñó el programa en Matlab fueron las siguientes:

- Para evitar hacer simulaciones en papel milimétrico, porque era muy tardado hacer los escenarios de análisis numérico y durante la experimentación práctica (Sección 6.5) realizar las simulaciones por software más rápido.
- Se desarrolló para comprobar sin errores (casos ideales), cuáles serían los escenarios de análisis numérico al momento de comparar los trenes de pulsos.

En la Fig. 75 se enseña una ilustración gráfica del programa que se diseñó como parte de la investigación de la tesis. En esta Fig. 75 se indican en los incisos A y B las siguientes características:

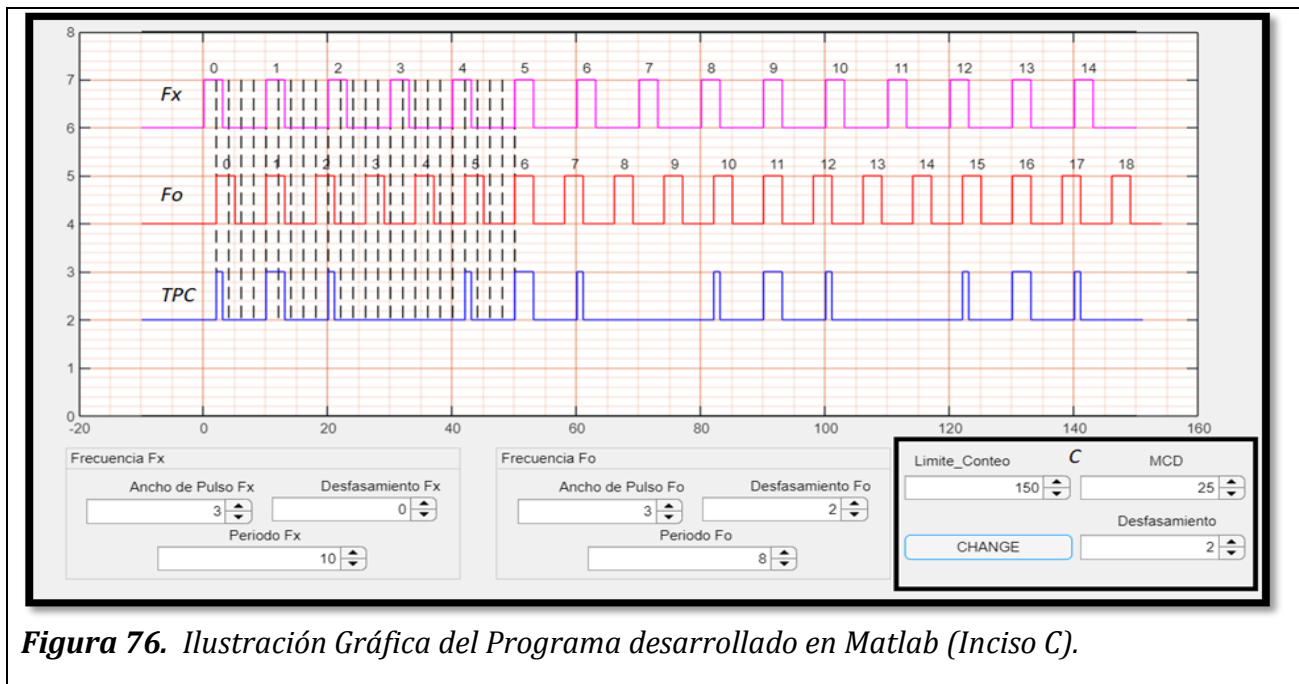
- Inciso A: se muestran los anchos de pulsos, periodos y desfase de  $F_x$ .
- Inciso B: se muestran los anchos de pulsos, periodos y desfase de  $F_o$ .



**Figura 75.** Ilustración Gráfica del Programa desarrollado en Matlab (Incisos A y B).

En la *Fig. 76* se enseña otra ilustración gráfica del programa que se diseñó como parte del desarrollo de la tesis. En esta *Fig. 76* se indican en el inciso C las siguientes características:

- Inciso C: se muestran las opciones del límite de conteo, el botón de cambio, el MCD y el desfaseamiento.



**Figura 76.** Ilustración Gráfica del Programa desarrollado en Matlab (Inciso C).

Las opciones que se agregaron en el inciso C tienen sus razones por las cuales se agregaron específicamente. A continuación, se explica cada una de ellas:

- Límite de Conteo: esta opción del simulador de Matlab, se encargaba de dar un límite con respecto al eje x (eje de tiempo); por ejemplo, obsérvese en la *Fig. 76* que el límite de conteo es de 150 UT.
- MCD: la opción de MCD tiene como función colocar líneas discontinuas negras en el eje y (eje de voltaje), para representar gráficamente cómo influye el MCD en la comparación de trenes de pulsos; por ejemplo, en la *Fig. 76* se muestran 25 líneas discontinuas.
- CHANGE: esta opción funciona para cambiar todo el panorama del simulador, y modificarlo con las opciones finales (deseadas).

- Desfasamiento: esta opción modifica la posición de las líneas discontinuas (opción MCD), por donde inicia la primera coincidencia de los trenes de pulsos. Por ejemplo; en la Fig. 76 inicia en 2 UT, porque hubo un desfasamiento en  $F_0$ .

## 5.5 Experimentación de Análisis Prácticos

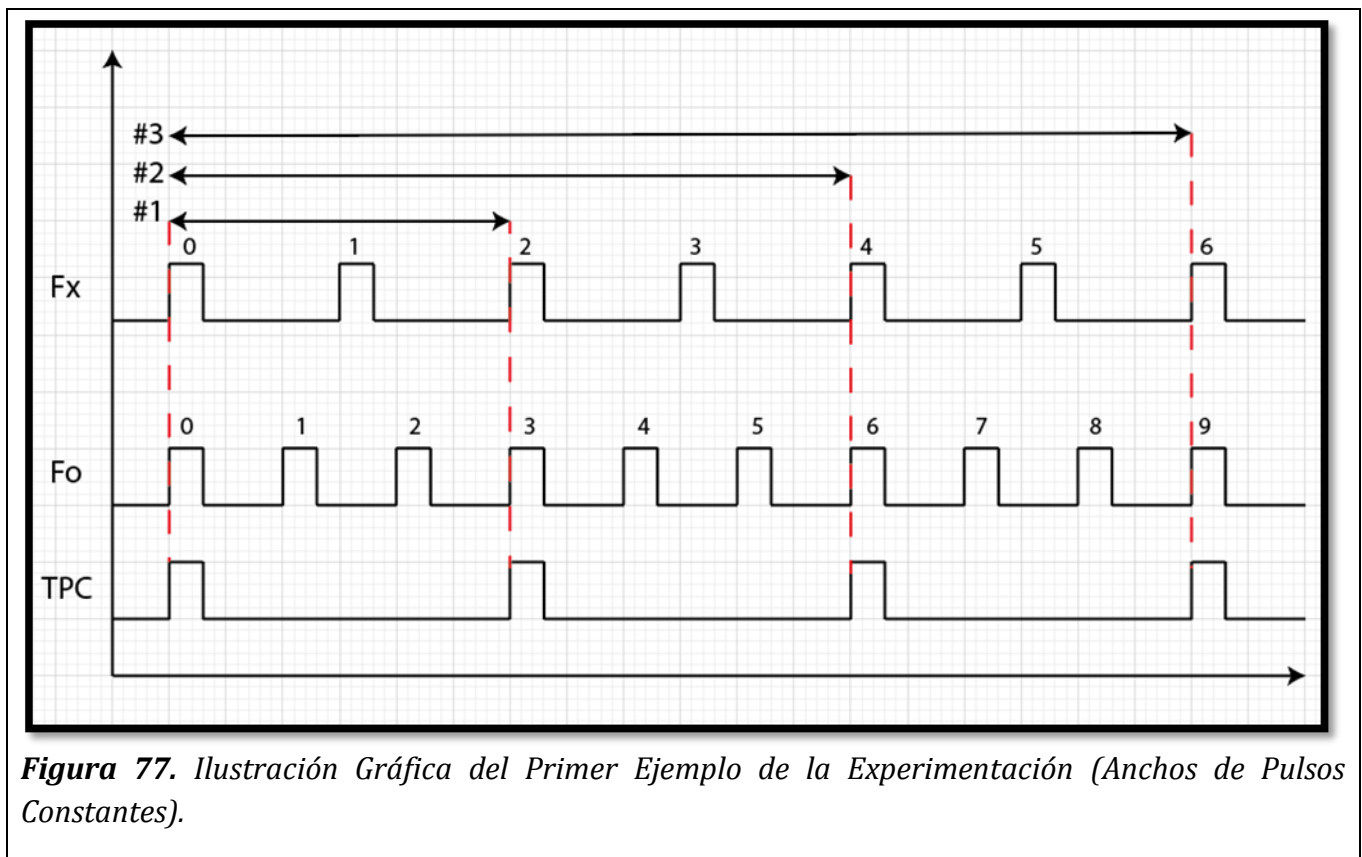
Antes de iniciar a experimentar en un laboratorio, donde existen aparatos ideales para hacer posible los resultados prácticos, se analizaron los casos teóricos en las hojas milimétricas con la ayuda de la teoría de números. A continuación, se mostrarán algunos conteos de periodos que se obtuvieron durante los resultados del experimento, los cuales se obtuvieron por medio del prototipo implementado.

El primer ejemplo donde se muestran los resultados obtenidos de la experimentación son en la Tabla (44 - 45). En este ejemplo se puede observar que se está empleando que el MCD de ambos periodos es mayor que el ancho de pulso (en este caso tanto  $T_x$  y  $T_o$  tienen el mismo ancho de pulso). Por lo tanto; se puede obtener como resultado que no habrá coincidencias parciales, solamente habría en el TPC los pulsos constantes.

<b>Tabla 44 - Resultados de la Primera Experimentación</b>						
<b>No</b>	<b><math>N_x</math></b>	<b><math>T_o N_o</math></b>	<b><math>T_x N_x</math></b>	<b>  Error   <math>\leq \Delta t</math></b>	<b><math>F_x</math></b>	
3	2	30	30	0	66.6666667	UF
6	4	60	60	0	66.6666667	UF
9	6	90	90	0	66.6666667	UF
12	8	120	120	0	66.6666667	UF
15	10	150	150	0	66.6666667	UF
18	12	180	180	0	66.6666667	UF
21	14	210	210	0	66.6666667	UF
24	16	240	240	0	66.6666667	UF
27	18	270	270	0	66.6666667	UF
30	20	300	300	0	66.6666667	UF
33	22	330	330	0	66.6666667	UF
36	24	360	360	0	66.6666667	UF
39	26	390	390	0	66.6666667	UF
42	28	420	420	0	66.6666667	UF
45	30	450	450	0	66.6666667	UF
48	32	480	480	0	66.6666667	UF
51	34	510	510	0	66.6666667	UF
54	36	540	540	0	66.6666667	UF
57	38	570	570	0	66.6666667	UF
60	40	600	600	0	66.6666667	UF

63	42	630	630	0	66.6666667	UF
66	44	660	660	0	66.6666667	UF
69	46	690	690	0	66.6666667	UF
72	48	720	720	0	66.6666667	UF
75	50	750	750	0	66.6666667	UF

<b>Tabla 45 - Valores de la 1ra Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b>T<sub>x</sub></b>	15 UT (1.5 μs)	<b>F<sub>x</sub></b>	66.67 UF (666.67 kHz)
<b>T<sub>o</sub></b>	10 UT (1 μs)	<b>F<sub>o</sub></b>	100 UF (1 MHz)
<b>τ</b>	3 UT (300 ns)	<b>Δt = 2τ</b>	6 UT (600 ns)



**Figura 77.** Ilustración Gráfica del Primer Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes).

Ya sabiendo los valores de la Fig. 77, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

$$(m)x + r = (n)k \rightarrow mx + r = nk \rightarrow 15x + r = 10k \rightarrow 15x \equiv 0 \pmod{10}$$

Teniendo la congruencia  $15x \equiv 0 \pmod{10}$ , se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "x".

$$(15, 10) = 5, 0/5 \rightarrow \text{Si tiene solución}$$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  $3x \equiv 0 \pmod{2}$ , tiende a las siguientes igualdades:

$$x \equiv 0 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 2 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 4 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 6 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

Incluso podría ser el caso en el exista un desfase de  $1 UT$ , en el ejemplo de la Fig. 78 el desfase existe en  $F_0$ . Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

$$(m)x + r_1 = r_2 + (n)k \rightarrow mx + r_1 = r_2 + nk \rightarrow 15x + 1 = 1 + 10k \rightarrow 15x \equiv 0 \pmod{10}$$

Si se pudo observar con atención, este último resultado de congruencias  $15x \equiv 0 \pmod{10}$  es igual que el de la Fig. 77.

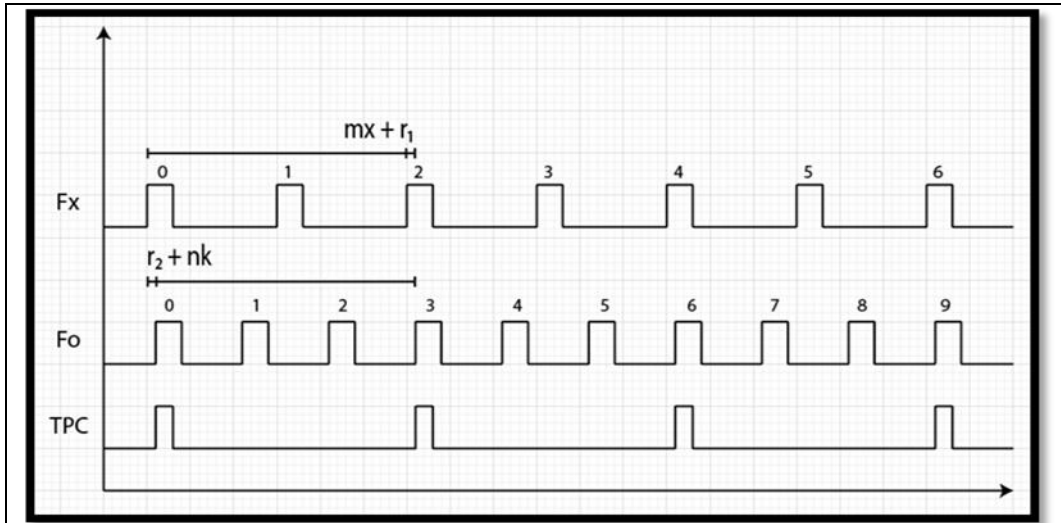
Por lo tanto; se puede deducir que los resultados a obtener serían los mismos, que son las siguientes igualdades:

$$x \equiv 0 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 2 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 4 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$

$$x \equiv 6 \pmod{2} \rightarrow \text{Es una solución válida}$$



**Figura 78.** Ilustración Gráfica Adicional del Primer Ejemplo de la Experimentación con Desfasamiento (Anchos de Pulsos Constantes).

Pero existen desventajas, incluso cuando el MCD de ambos periodos es mayor al ancho de pulso de sus respectivas frecuencias; es que se pueden dar casos como los que se muestran en las siguientes Tablas (46 - 47) junto con las Fig. 79, donde el error no es igual a cero.

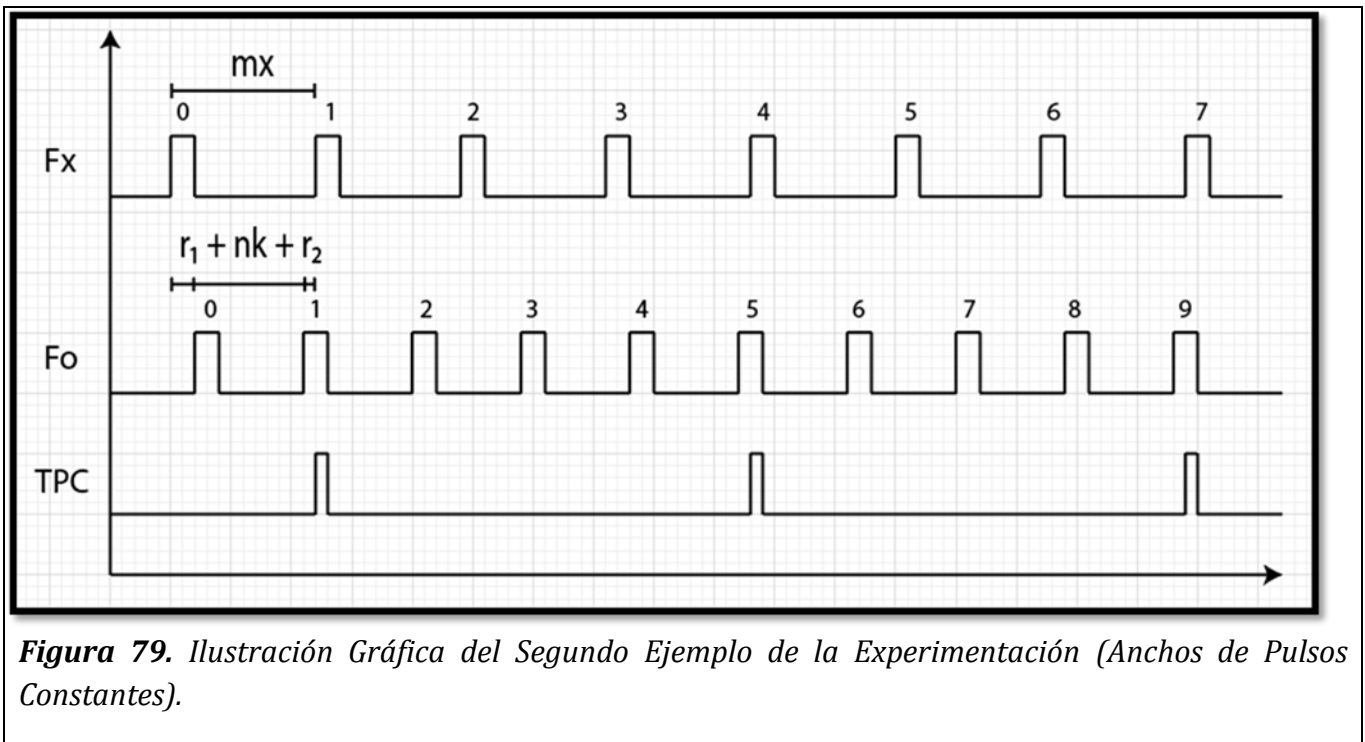
**Tabla 46 - Valores de la 2da Experimentación**

VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b><math>T_x</math></b>	12 UT (12 $\mu$ s)	<b><math>F_x</math></b>	83.33 UF (83.333 kHz)
<b><math>T_o</math></b>	9 UT (9 $\mu$ s)	<b><math>F_o</math></b>	111.11 UF (111.111 kHz)
<b><math>\tau</math></b>	2 UT (2 $\mu$ s)	<b><math>\Delta t = 2\tau</math></b>	4 UT (4 $\mu$ s)

**Tabla 47 - Resultados de la Segunda Experimentación**

No	$N_x$	$T_o N_o$	$T_x N_x$	Error  $\leq \Delta t$	$F_x$	
5	4	45	48	-3	88.8888889	UF
9	7	81	84	-3	86.4197531	UF
13	10	117	120	-3	85.4700855	UF
17	13	153	156	-3	84.9673203	UF
21	16	189	192	-3	84.6560847	UF
25	19	225	228	-3	84.4444444	UF
29	22	261	264	-3	84.2911877	UF
33	25	297	300	-3	84.1750842	UF
37	28	333	336	-3	84.0840841	UF
41	31	369	372	-3	84.0108401	UF

45	34	405	408	-3	83.9506173	UF
49	37	441	444	-3	83.9002268	UF
53	40	477	480	-3	83.8574423	UF
57	43	513	516	-3	83.8206628	UF
61	46	549	552	-3	83.7887067	UF
65	49	585	588	-3	83.7606838	UF
69	52	621	624	-3	83.7359098	UF
73	55	657	660	-3	83.7138508	UF
77	58	693	696	-3	83.6940837	UF
81	61	729	732	-3	83.6762689	UF
85	64	765	768	-3	83.6601307	UF
89	67	801	804	-3	83.6454432	UF
93	70	837	840	-3	83.6320191	UF
97	73	873	876	-3	83.6197022	UF
101	76	909	912	-3	83.6083608	UF
105	79	945	948	-3	83.5978836	UF
109	82	981	984	-3	83.5881753	UF



**Figura 79.** Ilustración Gráfica del Segundo Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

$$(m)x = r_1 + (n)k + r_2 \rightarrow mx = r_1 + nk + r_2 \rightarrow 12x = 2 + 9k + 1 \rightarrow 12x \equiv 3 \pmod{9}$$

Teniendo la congruencia  $12x \equiv 3 \pmod{9}$ , se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "x".

$(12, 9) = 3, 3/3 \rightarrow$  Si tiene solución

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  $4x \equiv 1 \pmod{3}$ , tiende a las siguientes igualdades:

$x \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 4 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 7 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

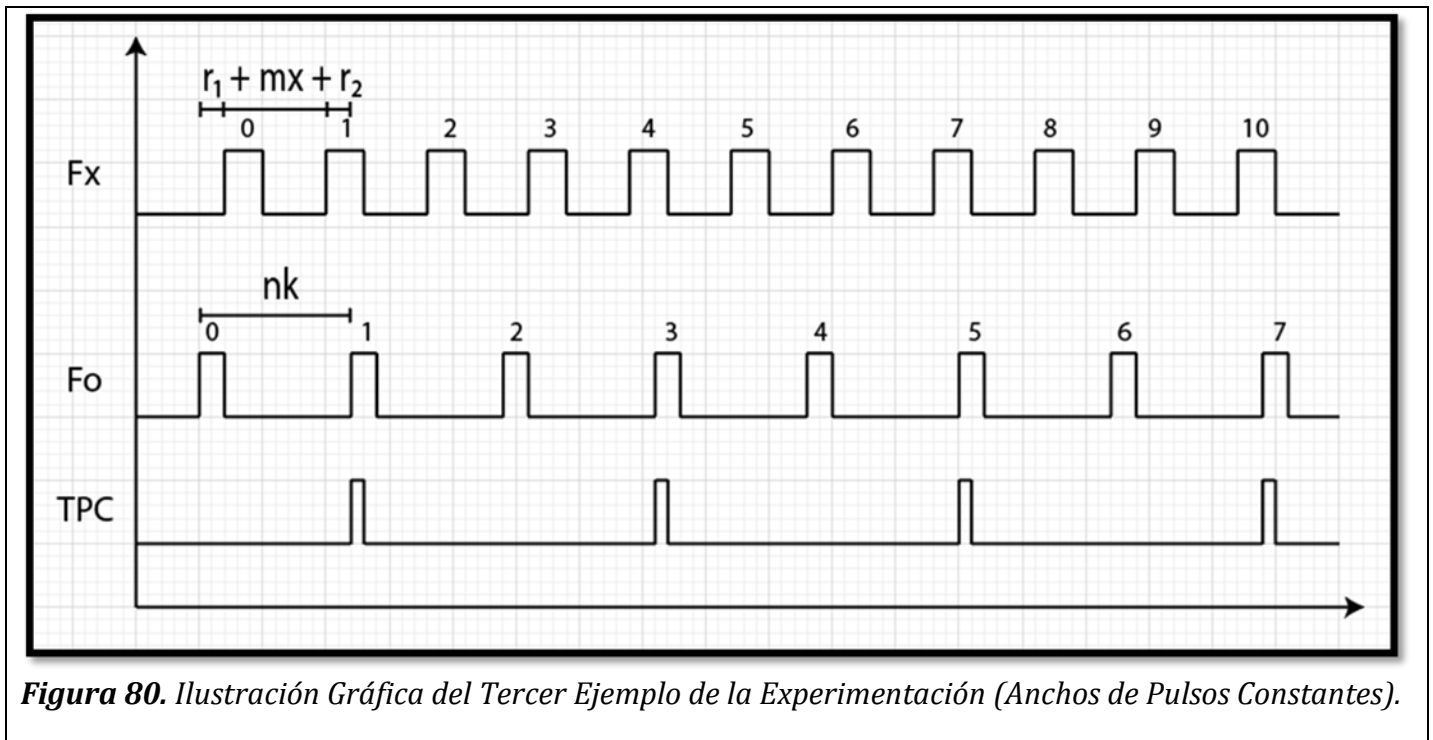
Si existen casos, como este ejemplo de la Fig. 79, el resultado de la frecuencia desconocida no será el que se está buscando.

Incluso puede también suceder el caso de que los anchos de pulsos que se analizan sean diferentes; que se muestra en la Fig. 80, y causar esa desventaja como la Fig. 79. En la Tabla (48 – 49) están los datos para el ejemplo de anchos de pulsos diferentes.

<b>Tabla 48 - Valores de la 3ra Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b>Tx</b>	8 UT (8 $\mu$ s)	<b>Fx</b>	125 UF (125 kHz)
<b>To</b>	12 UT (12 $\mu$ s)	<b>Fo</b>	83.33 UF (83.3333 kHz)
<b><math>\tau_{mayor}</math></b>	3 UT (3 $\mu$ s)	<b><math>\Delta t = \tau_{mayor} + \tau_{menor}</math></b>	5 UT (5 $\mu$ s)
<b><math>\tau_{menor}</math></b>	2 UT (2 $\mu$ s)		

<b>Tabla 49 - Resultados de la Tercera Experimentación</b>						
No	Nx	ToNo	TxNx	Error   =< $\Delta t$	Fx	
4	3	32	36	-4	93.75	UF
7	5	56	60	-4	89.285714	UF
10	7	80	84	-4	87.5	UF
13	9	104	108	-4	86.538462	UF
16	11	128	132	-4	85.9375	UF
19	13	152	156	-4	85.526316	UF
22	15	176	180	-4	85.227273	UF
25	17	200	204	-4	85	UF
28	19	224	228	-4	84.821429	UF

31	21	248	252	-4	84.677419	UF
34	23	272	276	-4	84.558824	UF
37	25	296	300	-4	84.45946	UF
40	27	320	324	-4	84.375	UF
43	29	344	348	-4	84.302326	UF
46	31	368	372	-4	84.23913	UF
49	33	392	396	-4	84.183674	UF
52	35	416	420	-4	84.134615	UF
55	37	440	444	-4	84.090909	UF
58	39	464	468	-4	84.051724	UF
61	41	488	492	-4	84.016393	UF
64	43	512	516	-4	83.984375	UF
67	45	536	540	-4	83.955224	UF
70	47	560	564	-4	83.928571	UF
73	49	584	588	-4	83.90411	UF
76	51	608	612	-4	83.881579	UF
79	53	632	636	-4	83.86076	UF
82	55	656	660	-4	83.841463	UF



**Figura 80.** Ilustración Gráfica del Tercer Ejemplo de la Experimentación (Anchos de Pulsos Constantes).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

$$r_1 + (m)x + r_2 = (n)k \rightarrow r_1 + mx + r_2 = nk \rightarrow 2 + 8x + 2 = 12k \rightarrow 8x \equiv -4 \pmod{12}$$

Teniendo la congruencia  $8x \equiv -4 \pmod{12}$ , se buscará si tiene soluciones; ya sabiendo si tiene soluciones se le buscará con la variable "x".

$(15, 10) = 4, -4/4 \rightarrow$  Si tiene solución

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, la congruencia  $2x \equiv -1 \pmod{3}$ , tiende a las siguientes igualdades:

$-x \equiv -1 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución inválida

$x \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 4 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

$x \equiv 7 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

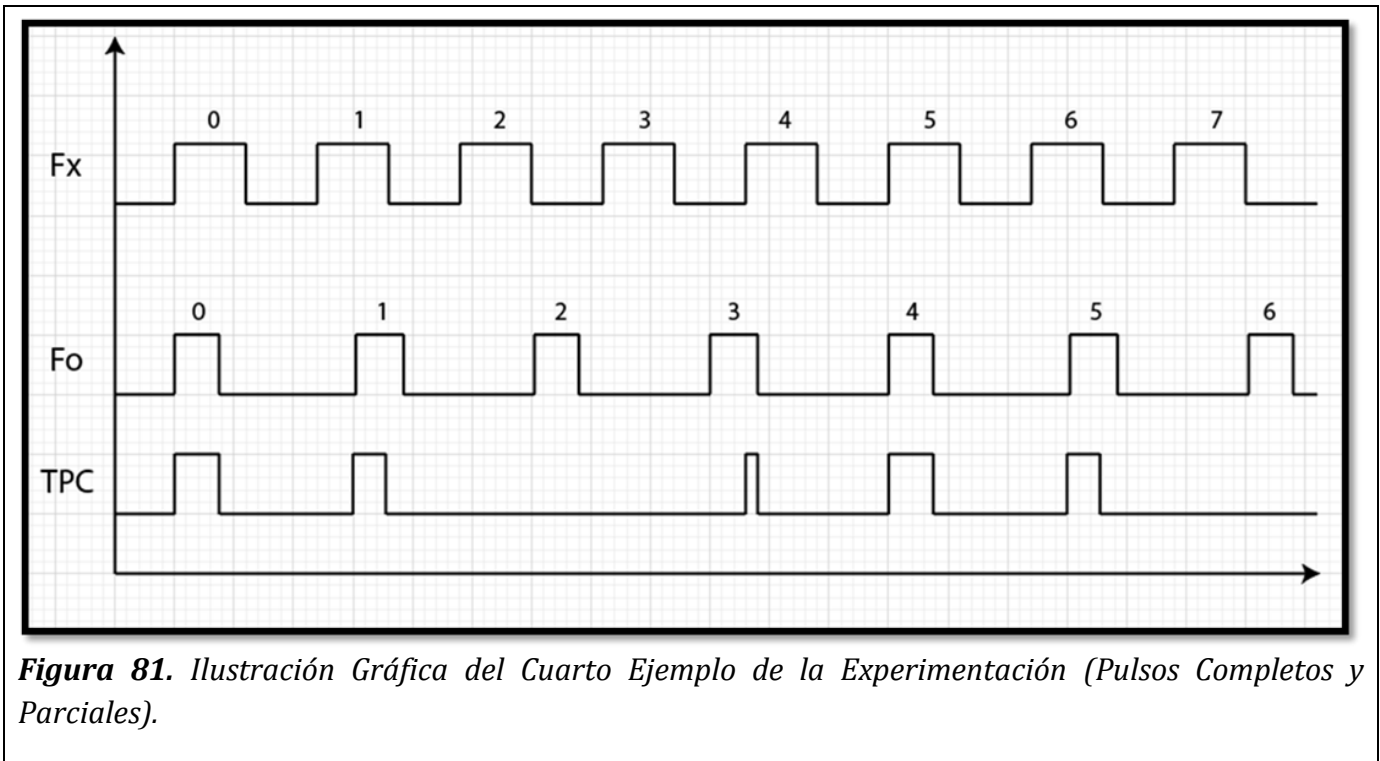
$x \equiv 10 \pmod{3} \rightarrow$  Es una solución válida

Ahora se verá un ejemplo donde las frecuencias tienen diferentes anchos de pulsos e incluso donde no existe un desfaseamiento. Se puede observar en la *Tabla (50 – 51)* junto con la *Fig. 81*.

<b>Tabla 50 – Valores de 4ta Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b><math>T_x</math></b>	15 UT (1.5 $\mu$ s)	<b><math>F_x</math></b>	66.67 UF (666.667 kHz)
<b><math>T_o</math></b>	12 UT (1.2 $\mu$ s)	<b><math>F_o</math></b>	83.33 UF (833.333 kHz)
<b><math>\tau_{mayor}</math></b>	6 UT (600 ns)	<b><math>\Delta t = \tau_{mayor}</math></b>	6 UT (600 ns)
<b><math>\tau_{menor}</math></b>	4 UT (400 ns)		

<b>Tabla 51 – Resultados de la Cuarta Experimentación</b>						
No	$N_x$	$T_o N_o$	$T_x N_x$	Error   $\leq \Delta t$	$F_x$	
4	3	48	45	3	62.5	UF
5	4	60	60	0	66.666667	UF
6	5	72	75	-3	69.444444	UF
9	7	108	105	3	64.814815	UF
10	8	120	120	0	66.666667	UF
11	9	132	135	-3	68.181818	UF
14	11	168	165	3	65.47619	UF
15	12	180	180	0	66.666667	UF
16	13	192	195	-3	67.708333	UF

19	15	228	225	3	65.789474	UF
20	16	240	240	0	66.666667	UF
21	17	252	255	-3	67.460317	UF
24	19	288	285	3	65.972222	UF
25	20	300	300	0	66.666667	UF
26	21	312	315	-3	67.307692	UF
29	23	348	345	3	66.091954	UF
30	24	360	360	0	66.666667	UF
31	25	372	375	-3	67.204301	UF
34	27	408	405	3	66.176471	UF
35	28	420	420	0	66.666667	UF
36	29	432	435	-3	67.12963	UF
39	31	468	465	3	66.239316	UF
40	32	480	480	0	66.666667	UF
41	33	492	495	-3	67.073171	UF
44	35	528	525	3	66.287879	UF
45	36	540	540	0	66.666667	UF
46	37	552	555	-3	67.028986	UF
49	39	588	585	3	66.326531	UF



**Figura 81.** Ilustración Gráfica del Cuarto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

- $r + (m)x = (n)k \rightarrow r + mx = nk \rightarrow 3 + 12x = 15k \rightarrow 12x \equiv -3 \pmod{15}$
- $(m)x = (n)k \rightarrow mx = nk \rightarrow 8x = 12k \rightarrow 12x \equiv 0 \pmod{15}$

- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 12x = 15k + 3 \rightarrow 12x \equiv 3 \pmod{15}$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, las congruencias obtenidas por medio de la Fig. 81,  $12x \equiv -3 \pmod{15}$ ,  $12x \equiv -3 \pmod{15}$  y  $12x \equiv -3 \pmod{15}$ ; tienen las siguientes igualdades mostradas en la Tabla 52.

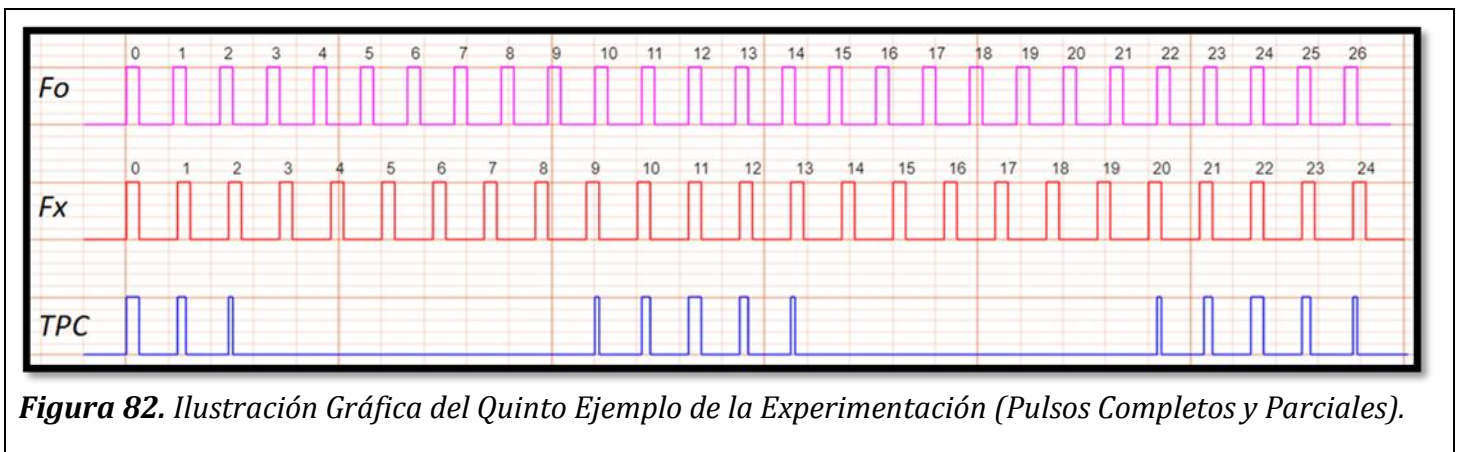
<b>Tabla 52 - Congruencias de la Fig. 81</b>		
$4x \equiv -1 \pmod{5}$	$4x \equiv 0 \pmod{5}$	$4x \equiv 1 \pmod{5}$
$x \equiv 1 \pmod{5}$	$x \equiv 0 \pmod{5}$	$x \equiv 4 \pmod{5}$
$x \equiv 6 \pmod{5}$	$x \equiv 5 \pmod{5}$	$x \equiv 9 \pmod{5}$
$x \equiv 11 \pmod{5}$	$x \equiv 7 \pmod{5}$	$x \equiv 14 \pmod{5}$

Ahora se verá un ejemplo donde las frecuencias tienen diferentes anchos de pulsos e incluso donde no existe un desfaseamiento. Se puede observar en la Tabla (53 - 54) junto con la Fig. 82.

<b>Tabla 53 - Valores de la 5ta Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b>Tx</b>	12 UT (1.2 μs)	<b>Fx</b>	83.33 UF (833.333 kHz)
<b>To</b>	11 UT (1.1 μs)	<b>Fo</b>	90.91 UF (909.091 kHz)
<b>τ</b>	3 UT (300 ns)	<b>Δt = τ</b>	3 UT (300 ns)

<b>Tabla 54 - Resultados de la Quinta Experimentación</b>						
No	Nx	ToNo	TxNx	Error   =< Δt	Fx	
2	1	22	12	10	45.4545455	UF
3	2	33	24	9	60.6060606	UF
4	3	44	36	8	68.1818182	UF
5	4	55	48	7	72.7272727	UF
12	11	132	132	0	83.3333333	UF
13	12	143	144	-1	83.9160839	UF
14	13	154	156	-2	84.4155844	UF
15	14	165	168	-3	84.8484848	UF
16	15	176	180	-4	85.2272727	UF
23	21	253	252	1	83.0039526	UF
24	22	264	264	0	83.3333333	UF

25	23	275	276	-1	83.6363636	UF
26	24	286	288	-2	83.9160839	UF
27	25	297	300	-3	84.1750842	UF
34	31	374	372	2	82.8877005	UF
35	32	385	384	1	83.1168831	UF
36	33	396	396	0	83.3333333	UF
37	34	407	408	-1	83.5380835	UF
38	35	418	420	-2	83.7320574	UF
45	41	495	492	3	82.8282828	UF
46	42	506	504	2	83.0039526	UF
47	43	517	516	1	83.172147	UF
48	44	528	528	0	83.3333333	UF
49	45	539	540	-1	83.4879406	UF
56	51	616	612	4	82.7922078	UF
57	52	627	624	3	82.9346093	UF
58	53	638	636	2	83.0721003	UF
59	54	649	648	1	83.2049307	UF
60	55	660	660	0	83.3333333	UF



**Figura 82.** Ilustración Gráfica del Quinto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

- $(m)x = (n)k \rightarrow mx = nk \rightarrow 12x = 11k \rightarrow 12x \equiv 0 \pmod{11}$
- $r + (m)x = (n)k \rightarrow r + mx = nk \rightarrow 1 + 12x = 11k \rightarrow 12x \equiv -1 \pmod{11}$
- $r + (m)x = (n)k \rightarrow r + mx = nk \rightarrow 2 + 12x = 11k \rightarrow 12x \equiv -2 \pmod{11}$
- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 12x = 11k + 1 \rightarrow 12x \equiv 1 \pmod{11}$
- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 12x = 11k + 2 \rightarrow 12x \equiv 2 \pmod{11}$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, las siguientes congruencias tienen las siguientes igualdades mostradas en la *Tabla 55*.

<b>Tabla 55 - Congruencias de la Fig. 82</b>				
$12x \equiv 0 \pmod{11}$	$12x \equiv -1 \pmod{11}$	$12x \equiv -2 \pmod{11}$	$12x \equiv 1 \pmod{11}$	$12x \equiv 2 \pmod{11}$
$x \equiv 0 \pmod{11}$	$x \equiv 10 \pmod{11}$	$x \equiv 9 \pmod{11}$	$x \equiv 12 \pmod{11}$	$x \equiv 13 \pmod{11}$
$x \equiv 11 \pmod{11}$	$x \equiv 21 \pmod{11}$	$x \equiv 20 \pmod{11}$	$x \equiv 23 \pmod{11}$	$x \equiv 24 \pmod{11}$
$x \equiv 22 \pmod{11}$	$x \equiv 32 \pmod{11}$	$x \equiv 31 \pmod{11}$	$x \equiv 34 \pmod{11}$	$x \equiv 35 \pmod{11}$

Algunas observaciones que se observaron en este ejemplo es que en la *Tabla 54*, es que existen conteo de periodos falsos; pero hay conteos que son correctos a pesar de los errores que hubo durante la experimentación. Por eso es importante saber detectar los desfases, utilizando teoría de números o a simple vista la geometría que se está formando.

Ahora se verá un ejemplo donde las frecuencias tienen diferentes anchos de pulsos e incluso donde no existe un desfase. Se puede observar en la *Tabla (56 - 57)* junto con la *Fig. 83*.

<b>Tabla 56 - Valores de la 6ta Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b><math>T_x</math></b>	$12 UT (12 \mu s)$	<b><math>F_x</math></b>	$83.33 UF (83.3333 kHz)$
<b><math>T_o</math></b>	$10 UT (10 \mu s)$	<b><math>F_o</math></b>	$100 UF (100 kHz)$
<b><math>\tau_o</math></b>	$3 UT (3 \mu s)$	<b><math>\Delta t = \tau_{mayor} + \tau_{menor}</math></b>	$5 UT (5 \mu s)$
<b><math>\tau_x</math></b>	$2 UT (2 \mu s)$		

<b>Tabla 57 - Resultados de la Sexta Experimentación</b>						
No	$N_x$	$T_o N_o$	$T_x N_x$	Error  $\leq \Delta t$	$F_x$	
2	2	20	24	-4	100	UF
7	6	70	72	-2	85.7142857	UF
8	7	80	84	-4	87.5	UF
13	11	130	132	-2	84.6153846	UF
14	12	140	144	-4	85.7142857	UF
19	16	190	192	-2	84.2105263	UF
20	17	200	204	-4	85	UF

25	21	250	252	-2	84	UF
26	22	260	264	-4	84.6153846	UF
31	26	310	312	-2	83.8709677	UF
32	27	320	324	-4	84.375	UF
37	31	370	372	-2	83.7837838	UF
38	32	380	384	-4	84.2105263	UF
43	36	430	432	-2	83.7209302	UF
44	37	440	444	-4	84.0909091	UF
49	41	490	492	-2	83.6734694	UF
50	42	500	504	-4	84	UF
55	46	550	552	-2	83.6363636	UF
56	47	560	564	-4	83.9285714	UF
61	51	610	612	-2	83.6065574	UF
62	52	620	624	-4	83.8709677	UF
67	56	670	672	-2	83.5820896	UF
68	57	680	684	-4	83.8235294	UF
73	61	730	732	-2	83.5616438	UF
74	62	740	744	-4	83.7837838	UF
79	66	790	792	-2	83.5443038	UF



**Figura 83.** Ilustración Gráfica del Sexto Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la fórmula (38).

- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 12x = 10k + 2 \rightarrow 12x \equiv 2 \pmod{10}$
- $(m)x = (n)k + r_1 + r_2 \rightarrow mx = nk + r_1 + r_2 \rightarrow 12x = 10k + 4 \rightarrow 12x \equiv 4 \pmod{10}$

Las congruencias que se obtuvieron de la Fig. 83,  $6x \equiv 1 \pmod{5}$  y  $6x \equiv 2 \pmod{5}$ ; tienen las siguientes igualdades mostradas en la Tabla 58.

**Tabla 58 - Congruencias y #Pulsos por Paquete de la Fig. 82**

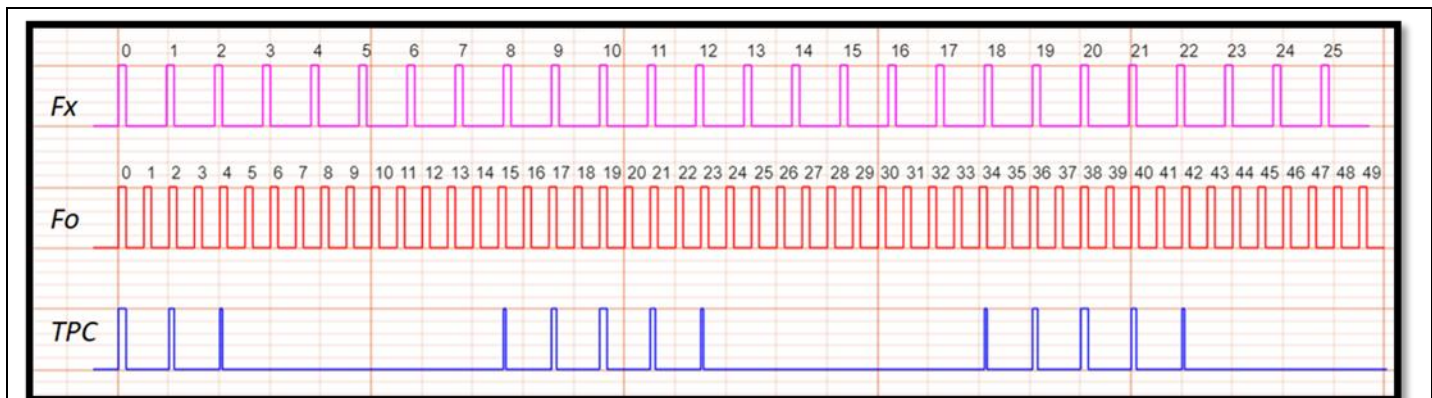
$6x \equiv 1 \pmod{5}$	$6x \equiv 2 \pmod{5}$	$( T_o - T_x  = MCD) \ \&\& \ (\tau > MCD)$
		<i>Fórmulas e Igualdades (25 - 29)</i>
$x \equiv 1 \pmod{5}$	$x \equiv 2 \pmod{5}$	<b>Lado Derecho</b> $\tau_{SD} - D = C(MCD) + R$ $2 UT - 2 UT = C(2 UT) + R$ Si: $R = 0 \rightarrow K_1 = (C)$ $K_1 = 0$
$x \equiv 6 \pmod{5}$	$x \equiv 7 \pmod{5}$	<b>Lado Izquierdo</b> $(D - MCD + \tau_{CD}) = C(MCD) + R$ $3UT = C(2UT) + R$ $C = 1 UT, R = 1 UT$ Si: $R \neq 0 \rightarrow K_2 = (C + 1)$ $K_2 = 2$
$x \equiv 11 \pmod{5}$	$x \equiv 12 \pmod{5}$	<b>Pulsos por Paquete</b> $K = K_1 + K_2; K = 2 \text{ Pulsos por Paquete}$

Ahora se verá un ejemplo donde las frecuencias tienen diferentes anchos de pulsos e incluso donde no existe un desfaseamiento. Se puede observar en la *Tabla (59 - 60)* junto con la *Fig. 84*.

<b>Tabla 59 - Valores de la 7ma Experimentación</b>			
VARIABLES	VALOR	VARIABLES	VALOR
<b><math>T_x</math></b>	$19 UT (1.9 \mu s)$	<b><math>F_x</math></b>	$52.63157895 UF (526.3157895 kHz)$
<b><math>T_o</math></b>	$10 UT (1 \mu s)$	<b><math>F_o</math></b>	$100 UF (1 MHz)$
<b><math>\tau</math></b>	$3 UT (300 ns)$	<b><math>\Delta t = \tau</math></b>	$3 UT (300 ns)$

<b>Tabla 60 - Resultados de la Séptima Experimentación</b>						
No	$N_x$	$T_o N_o$	$T_x N_x$	$ Error  \leq \Delta t$	$F_x$	
2	1	20	19	1	50	UF
5	2	50	38	12	40	UF
7	3	70	57	13	42.8571429	UF
16	8	160	152	8	50	UF
17	9	170	171	-1	52.9411765	UF
19	10	190	190	0	52.6315789	UF
21	11	210	209	1	52.3809524	UF
24	12	240	228	12	50	UF
26	13	260	247	13	50	UF

35	18	350	342	8	51.4285714	UF
36	19	360	361	-1	52.7777778	UF
38	20	380	380	0	52.6315789	UF
40	21	400	399	1	52.5	UF
42	22	420	418	2	52.3809524	UF
44	23	440	437	3	52.2727273	UF
53	28	530	532	-2	52.8301887	UF
54	29	540	551	-11	53.7037037	UF
56	30	560	570	-10	53.5714286	UF
58	31	580	589	-9	53.4482759	UF
61	32	610	608	2	52.4590164	UF
63	33	630	627	3	52.3809524	UF
72	38	720	722	-2	52.7777778	UF
73	39	730	741	-11	53.4246575	UF
75	40	750	760	-10	53.3333333	UF
77	41	770	779	-9	53.2467532	UF
80	42	800	798	2	52.5	UF
82	43	820	817	3	52.4390244	UF
91	48	910	912	-2	52.7472527	UF



**Figura 84.** Ilustración Gráfica del Séptimo Ejemplo de la Experimentación (Pulsos Completos y Parciales).

En las *Tablas (62 - 63)* se muestran las coincidencias que ocurrieron para se diera el ciclo completo con respecto a la *Fig. 84*. Las *Tablas (62 - 63)* se basan en las *Tablas (10 - 12)*.

Ya sabiendo los valores, ahora se pueden sustituir de la *fórmula (38)*.

- $(m)x = (n)k \rightarrow mx = nk \rightarrow 19x = 10k \rightarrow 19x \equiv 0 \pmod{10}$
- $r + (m)x = (n)k \rightarrow r + mx = nk \rightarrow 1 + 19x = 10k \rightarrow 19x \equiv -1 \pmod{10}$

- $r + (m)x = (n)k \rightarrow r + mx = nk \rightarrow 2 + 19x = 10k \rightarrow 19x \equiv -2 \pmod{10}$
- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 19x = 10k + 1 \rightarrow 19x \equiv 1 \pmod{10}$
- $(m)x = (n)k + r \rightarrow mx = nk + r \rightarrow 19x = 10k + 2 \rightarrow 19x \equiv 2 \pmod{10}$

De acuerdo con las propiedades de las congruencias, las siguientes congruencias tienen las siguientes igualdades mostradas en la *Tabla 61*.

<b>Tabla 61 - Congruencias de la Fig. 83</b>				
<b><math>19x \equiv 0 \pmod{10}</math></b>	<b><math>19x \equiv -1 \pmod{10}</math></b>	<b><math>19x \equiv -2 \pmod{10}</math></b>	<b><math>19x \equiv 1 \pmod{10}</math></b>	<b><math>19x \equiv 2 \pmod{10}</math></b>
$x \equiv 0 \pmod{10}$	$x \equiv 1 \pmod{10}$	$x \equiv 2 \pmod{10}$	$x \equiv 9 \pmod{10}$	$x \equiv 8 \pmod{10}$
$x \equiv 10 \pmod{10}$	$x \equiv 11 \pmod{10}$	$x \equiv 12 \pmod{10}$	$x \equiv 19 \pmod{10}$	$x \equiv 18 \pmod{10}$
$x \equiv 20 \pmod{10}$	$x \equiv 21 \pmod{10}$	$x \equiv 22 \pmod{10}$	$x \equiv 29 \pmod{10}$	$x \equiv 28 \pmod{10}$

En las *Tablas (62 - 63)* se puede observar que se plasmaron las coincidencias (opciones rojas), y de la suma de periodos que transcurrieron para obtener la siguiente coincidencia. Si se puede observar bien en la *Tabla 62* hay más cercanía entre las coincidencias.

<b>Tabla 62 - Coincidencias de Pulsos de la Fig. 83</b>					
<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+0</b>	
0	19	19	38	38	38
0	10	20	20	30	40
<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+10</b>	

Y en la *Tabla 63* tuvieron que transcurrir mucha suma de periodos para obtener la siguiente coincidencia; que sería el extremo del paquete de pulsos.

<b>Tabla 63 - Continuación de la Tabla 62</b>																		
<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>		<b>+19</b>				
38	57	57	57	76	76	76	95	95	95	114	114	114	133	133	133	152	152	
40	40	50	60	60	70	80	80	90	100	100	110	120	120	130	140	140	150	150
<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>		<b>+0</b>				

## 6 Conclusiones

Durante esta investigación se tuvo como objetivo principal determinar que coincidencia de pulsos entre ambos trenes de sus frecuencias obtenían la mejor geometría para conocer la frecuencia desconocida y demostrarlo por medio de ejemplos prácticos; lo cual si se cumplió. Por lo tanto; para conocer la frecuencia desconocida, al momento de compararse ambos trenes de pulsos, es importante considerar que el máximo común divisor entre los periodos de sus frecuencias que se están comparando sea mayor a ambos anchos de pulsos.

Pero; aunque se haya determinado el objetivo principal, también fue importante mencionar que otros análisis geométricos tuvieron un impacto indispensable y durante esta tesis fue importante la investigación completa de que factores depende la formación de paquetes, ya sean simétricos o asimétricos. Como se comentó anteriormente, sobre la formación de paquetes se tiene que reconocer que también tienen sus ventajas; por ejemplo, como son pulsos muy juntos es más fácil identificar cual podría ser el máximo común divisor y también deducir cual podría ser el periodo desconocido; debido a los desfases continuos que se presentan en los paquetes (principalmente simétricos).

Aunque los paquetes simétricos, son de los mejores escenarios para conocer los parámetros de la frecuencia desconocida; no necesariamente tienen ser todos los escenarios para dar todos los indicios y conocer la frecuencia desconocida, también los paquetes asimétricos pueden reconocer

ciertos parámetros (aunque en menor medida). Sin embargo; la clave está en reconocer los periodos de ambas frecuencias y así reajustar nuestra frecuencia conocida, porque la frecuencia desconocida (en el caso real) no se modifica. Por lo que, durante esta investigación se utilizó la teoría de números para hacer análisis numéricos durante la comparación de trenes de pulsos y así poder comprobar teóricamente cuales iban a ser los resultados en el tren de pulsos de coincidencias.

Se observó que, durante esta investigación, la teoría de números tiene una función muy importante al momento de la comparación de trenes de pulsos. Cuando se realizaron análisis geométricos (*véase la Sección 5.6*) que transcurren en el eje x (eje de tiempo); el cual supone construir apropiadamente las ecuaciones en la comparación de trenes de pulsos, se puede determinar los resultados en el tren de pulsos de coincidencias; por ejemplo, se utilizaron las ecuaciones diofánticas y el uso de las congruencias, para ir conociendo cuantos periodos desconocidos iban transcurriendo si se obtenían tantos conocidos.

Durante la experimentación se construyó un prototipo electrónico, para poder llevarlo a cabo comprobación del comportamiento geométrico de los paquetes de coincidencia. Aunque el prototipo mostró sus limitaciones al momento de realizar los ejemplos, se pudo comprobar que el método de coincidencias de pulsos para conocer la frecuencia desconocida si funciona y lo que se obtenía como resultado, en el programa del prototipo implementado, en el puerto serial eran el total de periodos contados cuando existe una coincidencia.

Los periodos contados (desconocidos como conocidos) son la información que nos ayudan a deducir por medio de la teoría de números los escenarios que pueden estar sucediendo al momento de compararlos. Como consiguiente esos periodos contados, sirven para deducir que posible escenario está ocurriendo al momento de comparar los trenes de pulsos; el cual implica considerar los mencionados análisis numéricos con o sin sus desfases aleatorios.

Los desfases juegan un rol muy importante en el método de la coincidencia de pulsos, ya que no existe un componente (el componente que se utilizó fue una compuerta AND) que al momento de comparar los primeros pulsos evite el desfase (a veces habría desfases y en otros casos no existiría el desfase), se tuvo que estudiar cómo influyen los desfases al inicio del conteo de periodos haciendo los análisis numéricos. Los

resultados prácticos obtenidos demostraron que el desfasamiento influye al momento de comparar los primeros pulsos, por los análisis numéricos realizados de la obtención de periodos desconocidos y conocidos; los cuales sirvieron para comprobar la formación de paquetes o si se obtienen anchos de pulsos constantes en el tren de pulsos de coincidencias.

## 7 Referencias

- [1] Hernández Balbuena, D., Sergiyenko, O., Tyrsa, V., Burtseva, L., & López, M. R. (2009). Signal frequency measurement by rational approximations. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 42(1), 136–144. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2008.04.009>
- [2] Sergiyenko, O., Hernández Balbuena, D., Tyrsa, V., Rosas Méndez, P. L. A., Lopez, M. R., Hernandez, W., Podrygalo, M., & Gurko, A. (2011). Analysis of jitter influence in fast frequency measurements. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 44(7), 1229–1242. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2011.04.001>
- [3] A. Demir, A. Mehrotra and J. Roychowdhury, "Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 5, pp. 655-674, May 2000, doi: 10.1109/81.847872.
- [4] Murrieta-Rico, F. N., Petranovskii, V., Galvan, D. H., Antunez-Garcia, J., Yocupicio-Gaxiola, R. I., & Tyrsa, V. (2021). Frequency Shifts Estimation for Sensors Based on Optoelectronic Oscillators. *IEEE Sensors Journal*, 21(10), 11283–11290. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.3013732>
- [5] M. P. Kazmierkowski and L. Malesani, "Current control techniques for three-phase voltage-source PWM converters: a survey," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, no. 5, pp. 691-703, Oct. 1998, doi: 10.1109/41.720325.
- [6] Murrieta-Rico, F. N., Sergiyenko, O. Y., Petranovskii, V., Hernandez-Balbuena, D., Lindner, L., Tyrsa, V., Tamayo-Perez, U. J., & Nieto-Hipolito, J. I. (2018). Optimization of pulse width for frequency measurement by the method of rational approximations principle. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 125, 463–470. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2018.05.008>

- [7] J. Holtz, "Pulsewidth modulation-a survey," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 39, no. 5, pp. 410-420, Oct. 1992, doi: 10.1109/41.161472.
- [8] Avalos-Gonzalez, D., Sergiyenko, O., Hernández-Balbuena, D., Tyrsa, V., Kartashov, V., Rivas-Lopez, M., Rodriguez-Quiñonez, J., Flores-Fuentes, W., & Murrieta-Rico, F. N. (2018). Constraints definition and application optimization based on geometric analysis of the frequency measurement method by pulse coincidence. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 126, 184–193. <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2018.05.025>
- [9] Hernández, D. & Tyrsa, V. (2006). *Método para la medición de frecuencia usando aproximaciones racionales*. <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v52n4/v52n4a10.pdf>
- [10] Pettofrezzo, A. & Byrkit, D. (1972). *INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS (1ª ed.)*, Madrid, España: Editorial: PRENTICE/HALL INTERNACIONAL.
- [11] Cilleruelo, F. (s.f.). *CAPÍTULO 3: CONGRUENCIAS*. Nombre del sitio web. <https://matematicas.uam.es/~franciscojavier.cilleruelo/Curso/capitulo%203.pdf>
- [12] K. S. Miller and R. J. Schwarz, "On the Interference of Pulse Trains", *Journal of Applied Physics* 24, 1032-1036 (1953) [On the Interference of Pulse Trains: Journal of Applied Physics: Vol 24, No 8 \(scitation.org\)](https://doi.org/10.1063/1.1721780)
- [13] Henry D. Friedman, "Coincidence of Pulse Trains", *Journal of Applied Physics*, 1001-1005 (1954) <https://doi.org/10.1063/1.1721780>
- [14] Carr, J., (2002). *Practical Radio Frequency Test and Measurement: A Technician's Handbook*. Oxford, Reino Unido. Editorial: Newnes.
- [15] Hernández, E. (1994). *Álgebra y Geometría*. Madrid, España. Editorial: ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA, S.A
- [16] Finney, D. (2006). *Variable Frequency AC Motor Drive Systems*. Londres, Reino Unido. Editorial: IET Power and Energy Series 8.
- [17] Fraden, J. (2004). *HANDBOOK OF MODERN SENSORS: Physics, Designs and Applications*. San Diego, California. Editorial: Springer.
- [18] Sinclair, I. (2001). *Sensors and Transducers (Third Edition)*. Londres, Reino Unido. Editorial: Newnes.
- [19] Buriticá, B. (2009). *Álgebra y Trigonometría (3ra Edición)*. Medellín, Colombia. Editorial: Universidad de Antioquia.
- [20] Platt, C. (2012). *Encyclopedia of Electronic Components (VOL. 1)*. Sebastopol, California. Editorial: O'RELLY.

[21] Wei, Z. (1992). Greatest common factor frequency and its application in the accurate measurement of periodic signals. *Proceedings of the Annual Frequency Control Symposium*, 270–273. <https://doi.org/10.1109/freq.1992.270004>

[22] Daniel Avalos-Gonzalez, Oleg Yu. Sergiyenko, Daniel Hernandez-Balbuena, Vera Tyrsa, Vladimir Kartashov, Moisés Rivas-López, Julio C. Rodríguez-Quíñonez, Wendy Flores-Fuentes, Fabian N. Murrieta-Rico. Constraints definition and application optimization based on geometric analysis of the frequency measurement method by pulse coincidence. *Measurement by Elsevier*, Vol.126, October, 2018, pp.184-193.

[23] Fabian N. Murrieta-Rico, Oleg Yu. Sergiyenko, Vitalii Petranovskii, Daniel Hernandez-Balbuena, Lars Lindner, Vera Tyrsa, Ulises J. Tamayo-Perez, Juan Ivan Nieto-Hipolito. Optimization of pulse width for frequency measurement by the method of rational approximations principle. *Measurement by Elsevier*, Vol.125, September, 2018, pp.463-470.

[24] Sergiyenko, O.Y., Hernandez Balbuena, D.; Tyrsa, V.V.; Rosas Mendez, P.L.A.; Hernandez, W.; Nieto Hipolito, J.I.; Starostenko, O.; Rivas Lopez, M. Automotive FDS Resolution Improvement by Using the Principle of Rational Approximation. *IEEE Sensors Journal*, Volume: 12, Issue: 5, May, 2012, pp. 1112 - 1121. ISSN 1530-437X

[25] Murrieta-Rico, F.N.; Sergiyenko, Oleg; Petranovskii, V.; Hernandez-Balbuena, D.; Lars Lindner; A new approach for frequency shifts measurement using the principle of rational approximations, *Metrology and Measurement Systems*, journal of Polish Academy of sciences, De Gruyter, vol.24, issue 1, March 2017, pp. 45-56, ISSN 0860-8229

[26] Murrieta-Rico, F.N.; Sergiyenko, Oleg; Petranovskii, V.; Hernandez-Balbuena, D.; Lars Lindner; Tyrsa, V; Moises Rivas-Lopez; Juan I. Nieto-Hipolito; and V.M.Karthashov. Pulse width influence in fast frequency measurements using rational approximations. *Elsevier, "Measurement"*, Volume 86, May 2016, Pages 67-78. ISSN: 0263-2241 - doi:10.1016/j.measurement.2016.02.032.

[27] Murrieta-Rico, F.N.; Petranovskii, V.; Sergiyenko, Oleg; Hernandez-Balbuena, D.; Pestryakov, A.; and Tyrsa, V. Frequency domain sensors and Frequency measurement techniques. *Trans Tech Publications*, Switzerland. *Applied Mechanics and Materials*, Vol.756, 2015. Pp.575-584. ISSN: 1662-7482, <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.756.575>

[28] Juan de Dios Sanchez-Lopez, Fabian Murrieta-Rico, Vitalii Petranovskii, Joel Antunez-Garcia, Rosario Yocupicio-Gaxiola, Oleg Sergiyenko, Vera Tyrsa, Juan Nieto-Hipolito, and Mabel Vazquez-Briseno. Effect of phase in fast frequency measurements for sensors embedded in robotic systems. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, SAGE, 16(4), July-August 2019: pp. 1–7. DOI: 10.1177/1729881419869727

[29] Murrieta-Rico, F.N., Petranovskii, V., Galvan, D.H., Antunez-Garcia J.,Sergiyenko O., Lindner L., Rivas-Lopez M., Grishin M., Sarvadii S. Basic Aspects in the Application of QCMs as Sensors: A Tutorial, *IEEE Sensors Journal*, 2022, (impact factor 3.072) Q2 [EARLY ACCESS] doi: 10.1109/JSEN.2022.3148039

**[30]** F. N. Murrieta-Rico, V. Petranovskii, Oleg Sergiyenko, M. Grishin, S. Sarvadii, J.de D. Sanchez-Lopez, J. I. Nieto-Hipolito, D. H. Galván, J. Antúnez-García, R. I. Yocupicio-Gaxiola. QCM modified with FAU zeolite nanostructures for analysis of temperature induced adsorbed mass changes. Measurement by Elsevier, vol.172, February 2021, pp. - . ISSN: 0263-2241

**[31]** Vinogradov, I. M. (1954). *Elements of Number Theory (Fifth Edition)*. Estados Unidos. Editorial: Dover Publications, Inc.

**[32]** Departamento de Algebra (s.f.). *Álgebra Básica*. Nombre del sitio web.  
[http://www.algebra.us.es/Documentos/AB\\_NotasTeoria2012-13.pdf](http://www.algebra.us.es/Documentos/AB_NotasTeoria2012-13.pdf)