

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA



**“Biomimética de pierna, modelado,
acoplamiento y sincronización con
enfoque maestro-esclavo”**

TESIS

que se presenta para cubrir el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS

Raúl Ramírez Ramírez

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Ensenada, B.C.

Mayo, 2021.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA


**Biomimética de pierna, modelado, acoplamiento y sincronización
con enfoque maestro-esclavo**

TESIS


Que para obtener el grado de maestría en ingeniería / Doctorado en Ciencias presenta:

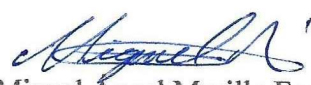
Raúl Ramírez Ramírez

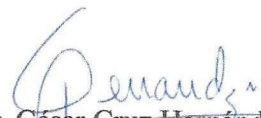
Aprobada por:


Dra. Rosa Martha López Gutiérrez
Director de tesis


Dr. Adrian Arellano Delgado
Co-Director de tesis


Dra. Liliana Cardoza Avendaño
Miembro del comité


Dr. Miguel Ángel Murillo Escobar
Miembro del comité


Dr. César Cruz Hernández
Miembro del comité

Ensenada Baja California, México. Mayo 2021

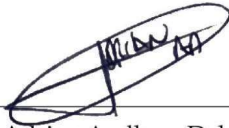
Resumen de la tesis de **Raúl Ramírez Ramírez**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS del programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería (MYDCI) de la UABC. Ensenada Baja California, México, Mayo del 2021.

Biomimética de pierna, modelado, acoplamiento y sincronización con enfoque maestro-esclavo

Resumen Aprobado por:



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez.
Director de tesis



Dr. Adrian Arellano Delgado.
Co-Director de tesis

En este trabajo se presenta la sincronización de dos extremidades inferiores o piernas, bajo el enfoque maestro-esclavo, siendo una de las piernas el maestro y la otra el esclavo. Se describe el método de control por modos deslizantes para el seguimiento de una trayectoria del efector final de la pierna maestra, así como el método para sincronizar el efector final de la pierna esclava con el efector final del maestro. En el estudio de la sincronización presente en la literatura se encuentran dos principales tipos de sincronización interesantes, la sincronización en fase y en anti fase. Es nuestra percepción que estos dos tipos de sincronización se presentan en movimientos humanos como brincar, caminar, corre o nadar. Este trabajo pretende replicar algunos de estos movimientos en una prótesis de pierna, con el fin de ayudar en la habilitación de personas con una amputación de pierna, siendo la prótesis el esclavo y la pierna natural el maestro. Los resultados de éste trabajo fueron simulados con dos modelos dinámicos de un sistema mecánico no-lineal de dos grados de libertad (2-DOF).

Palabras Clave – Synchronization, Nonlinear control, Position control, Robotics, Sliding mode control.

A mis seres queridos:

Mi esposa, avec amour.

Mi hija, tu es la joie de ma vie.

Mi madre (q.e.p.d), tu es toujours dans mes pensées.

Mi padre, hermanos y sobrinos.

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente: A la Dra. Rosa Martha López G. y al Dr. Adrian Arellano D. por darme su confianza, guía y conducción en mi trabajo de tesis. Al Dr. César Cruz H., Dra. Liliana Cardoza A. y Dr. Miguel Ángel Murillo E.

Al Dr. Javier Pliego J., Dr Fausto Abundiz P., Ing. Miguel A. Ramírez R. y a todos y cada uno que, directa o indirectamente, me ayudaron a la culminación de este trabajo.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes	4
1.1.1	Causas y tipos de amputaciones	4
1.2	Estado del Arte.	6
1.3	Planteamiento del problema.	9
1.4	Objetivos generales y específicos.	10
1.4.1	General	10
1.4.2	Específicos	10
1.5	Metodología	11
1.6	Resultados esperados	11
1.7	Contenido	11
2	Cuerpo humano	13
2.1	Introducción	13
2.2	Descripción del cuerpo humano	15
2.2.1	Planos de referencia	17
2.2.2	Marcha humana	18
2.3	El robot caminante	19
2.3.1	Uniones primarias	20
2.3.2	Cadena cinemática	21
2.3.3	Marcha cinemática	21
2.4	Modelo matemático	22
2.4.1	Espacio de unión	23
2.4.2	Espacio de tarea	24

2.5	Modelo dinámico	24
2.5.1	Subsistema de piernas	25
2.6	Control discreto-continuo	25
2.7	Resumen	27
3	Modelo dinámico	29
3.1	Introducción	29
3.2	Sistemas robóticos de piernas	30
3.3	Ecuaciones de movimiento	31
3.4	La dinámica del manipulador 2R	32
3.5	Modelado del mecanismo 2-DOF	35
3.6	Resumen	38
4	Resultados y Discusión	39
4.1	Introducción	39
4.2	Control por modos deslizantes	40
4.2.1	Superficies de deslizamiento	41
4.2.2	Modo de deslizamiento ideal y control equivalente	41
4.3	Sincronización maestro-esclavo	42
4.4	Sincronización de dos sistemas de 2-DOF	43
4.4.1	Estrategia de sincronización	43
4.4.2	Modos deslizantes basado en estabilidad entrada-salida	43
4.5	Simulación numérica	49
4.5.1	Trayectoria deseada	50
4.5.2	Valores de los parámetros de control	51
4.5.3	Programa en Simulink	52
4.6	Resultados	53
5	Implementación	57
5.1	Estrategia de control	57
5.1.1	Perfil sinusoidal	58
5.1.2	Perfiles de velocidad para el motor a pasos	60
5.2	SensorTag CC2650	61
5.2.1	Unidad de procesamiento central	63
5.2.2	Núcleo de RF	65
5.3	Descripción del <i>Software</i> para tiempo real	65
5.3.1	Módulos de <i>Threading</i>	67
5.3.2	Módulos de sincronización	70

6 Conclusiones	73
6.1 Observaciones finales	73
6.2 Perspectivas	74
6.3 Trabajo a futuro	76
6.4 Producto derivado del trabajo doctoral	77
Apéndice A Discapacidad poblacional	79
Apéndice B Cinemática diferencial	81
Apéndice C Programas en Matlab	83
C.1 Maestro	83
C.2 Esclavo	87
Apéndice D Programa motor en código C	93
Apéndice E Diagramas	97
E.1 Diagramas CC2650STK	97
E.2 Diagramas Oriental Motor	99
E.2.1 Driver	99
E.2.2 Motor	100
Referencias	101

Lista de Figuras

1.1	Porcentaje de población con discapacidad, por tipo de discapacidad (INEGI, 2017).	2
1.2	Distribución porcentual de la población con discapacidad por tipo de discapacidad (ENADIS, 2019).	2
1.3	Porcentaje de población con limitación, por sexo y grupo de edad según tipo de limitación 2014. 1ra. parte.	3
1.4	Porcentaje de población con limitación, por sexo y grupo de edad según tipo de limitación 2014. 2da. parte y última.	3
1.5	Principales amputaciones de pierna.	6
1.6	Clasificación de las prótesis. Tomada de (Díaz, 2016).	7
1.7	Prótesis activas para tobillo (a-j), rodilla (k-q) y ambas (r). Tomada de (Grimmer and Seyfarth, 2014).	9
2.1	Evolución del hombre, según Charles Darwin.	14
2.2	Partes de cuerpo humano.	16
2.3	Tres planos de referencia y seis direcciones fundamentales para el movimiento del cuerpo. Tomado de (Bertomeu-Motos, 2015).	17
2.4	Ciclo marcha humana en el plano sagital. Tomado de (Bravo M. and Rengifo R., 2014).	19
2.5	Tipos de uniones primarias. a) revolución y b) prismática.	20
2.6	Trayectoria descrita por la cadera y los pies del robot. Tomada de (De-León-Gómez et al., 2016).	22
2.7	Marcos de referencia y variables para la descripción cinemática. Tomado de (Llagunes, 2016, Cap. 14).	23

3.1	Definición de los ángulos de flexión-extensión de rodilla y cadera para el modelo humano (θ_h) y modelo mecánico (θ_m). Tomada de (Torricelli et al., 2018).	30
3.2	Modelo del manipulador 2R. Tomado de (Jazar, 2010).	33
3.3	Configuración mecánica con 2-DOF. Pierna (l_{i1}) y ante pierna (l_{i2}) del sistema maestro. Nótese que la misma configuración se utiliza para el sistema esclavo denotado por el sub índice i	37
4.1	Planificación de trayectoria y ley de control. En la planificación de la trayectoria se determinan <i>pares</i> viables de la trayectoria deseada X_d y el vector de estado continuo-discreto ζ . Tomada de (Sobotka and Buss, 2005).	40
4.2	Esquema de sincronización maestro-esclavo.	44
4.3	Seguimiento de la trayectoria circular del maestro (izquierda) y del esclavo (derecha).	49
4.4	Soluciones geométricas para un robot planar con 2-DOF.	51
4.5	Seguimiento de la trayectoria circular del maestro (izquierda) y del esclavo (derecha).	52
4.6	Posición de las articulaciones para el seguimiento de la trayectoria deseada (4.32): a) Gráfica superior q_{d1} , q_{m1} y q_{s1} con $0 < t \leq 15$, gráfica inferior con $0 < t \leq 0.6$, b) Gráfica superior q_{d2} , q_{m2} y q_{s2} con $0 < t \leq 15$, gráfica inferior con $0 < t \leq 2.0$	54
4.7	Valores de la entrada de control (4.20) para el seguimiento de la trayectoria deseada. a) Gráfica superior τ_{m1} y τ_{s1} , gráfica inferior τ_{m2} y τ_{s2} , ambas con $0 < t \leq 15$ b) Gráfica superior τ_{m1} y τ_{s1} , gráfica inferior τ_{m2} y τ_{s2} , ambas con $0 < t \leq 2$	55
4.8	Gráfica superior e_s (2.1) del eslabón 1, gráfica inferior e_s (2.1) del eslabón 2.	56
5.1	Diagrama a bloques de los espacios de unión.	58
5.2	Perfiles de velocidad, aceleración y <i>tiro</i> . Tomada de (Arévalo, 2001).	60
5.3	Banco de prueba.	61
5.4	Valores de la entrada de control (4.20) para el seguimiento de la trayectoria deseada. a) Diagrama a bloques. b) Circuito impreso cara superior. c) Circuito impreso cara inferior.	62
5.5	Diagrama a bloques de la unidad de microcontrolador CC26x0	64
5.6	Esquema simplificado del núcleo de RF y sus dependencias externas.	66
5.7	Esquema de prioridades de <i>Threads</i>	69
5.8	Escenario de preferencias (prioridades).	69

6.1	Diagrama esquemático de una pierna con una amputación transtibial y su prótesis. Tomada de (Mai and Commuri, 2016).	77
A.1	Porcentaje de población con limitación, por entidad federativa según tipo de limitación 2014. 1ra. parte.	79
A.2	Porcentaje de población con limitación, por entidad federativa según tipo de limitación 2014. 2da. parte y última.	80
E.1	CC2650STK diagrama esquemático.	97
E.2	CC2650STK diagrama esquemático.	98
E.3	CC2650STK diagrama esquemático.	98
E.4	Motor a pasos PKP series.	99
E.5	Manejador del Motor a pasos.	100

Lista de Tablas

2.1	Medidas de masa y longitud de las diferentes partes del cuerpo.	16
2.2	Pares inferiores	20
4.1	Valores de los parámetros utilizados	50

Lista de Abreviaturas

ENADID Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica	1
ENIGH Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares	1
ENH Encuesta Nacional de los Hogares	1
ENADIS Encuesta Nacional sobre Discriminación	1
SMC Sliding Mode Control	38
DOF Degree Of Freedom	29
HSM Hybrid State Model	26
CoM Center of Mass	24

Introducción

En la actualidad, el fenómeno de la discapacidad ha cobrado importancia por múltiples factores; entre ellos destacan, reconocer que la población que vive con esta condición también goza de los mismos derechos que el resto, evitar la discriminación y por la tendencia mundial al envejecimiento, en que puede ocurrir la disminución o pérdida de la capacidad visual, auditiva, motriz, entre otras. Según la Organización Mundial de la Salud (Officer, 2011, xi) “más de mil millones de personas viven en todo el mundo con algún tipo de discapacidad; de ellas, casi 200 millones experimentan dificultades en su funcionamiento”. Tal situación indica que la prevalencia de la discapacidad va en aumento; por lo tanto, deberán existir acciones encaminadas a contrarrestar los efectos negativos que de ello se deriven.

La pérdida de la capacidad motriz es debida principalmente por algún tipo de amputación de la extremidad inferior. Se calcula que a nivel mundial se realizan 2,800 amputaciones a diario. En Estados Unidos se practican cerca de 86,000 amputaciones cada año y en México la Academia Mexicana de Cirugía señaló en 2012 la realización de 75 amputaciones cada día, lo que significa 27,375 amputaciones/año; el Instituto Mexicano del Seguro Social indicó que en 2013 se efectuaron 75,000 amputaciones en la República Mexicana.

La información de la Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica (ENADID), la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH) y la Encuesta Nacional de los Hogares (ENH) del 2014, publicados en (INEGI, 2017), presentan que: la discapacidad para caminar, subir o bajar usando sus piernas fueron reportadas por 64.1% de la población que vive con esta condición, mientras que 58.4% señaló tener dificultad severa o grave para ver; 38.8% para aprender, recordar o concentrarse, 33.5% para escuchar y 33% para mover o usar brazos o manos, ver figura 1.1.

Por su parte, Encuesta Nacional sobre Discriminación (ENADIS) del 2017, publicado

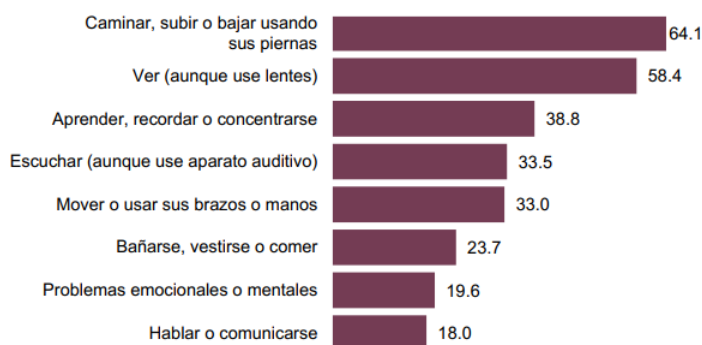
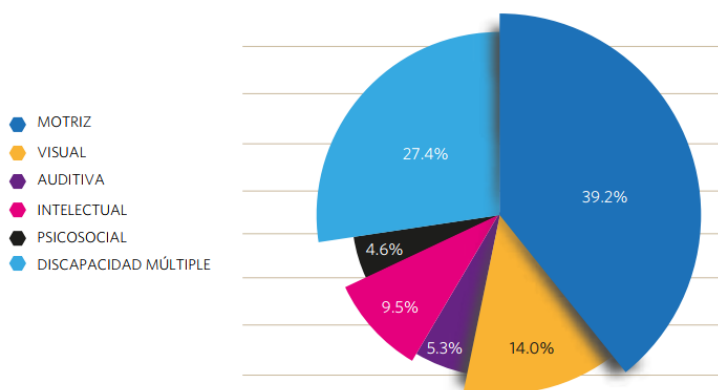


Figura 1.1: Porcentaje de población con discapacidad, por tipo de discapacidad (INEGI, 2017).

en (ENADIS, 2019), presenta que: el tipo de discapacidad reportado con mayor frecuencia es la motriz (39.2%), seguida de la visual, intelectual, auditiva y psicosocial (14.0%, 9.5%, 5.3% y 4.6%, respectivamente). Por otra parte, 27.4 por ciento de las personas con discapacidad declaró tener dos o más discapacidades, las combinaciones más frecuentes son discapacidades motriz y visual (23%), motriz e intelectual (11.3%) y motriz y auditiva (9.6%), ver figura 1.2.



Nota: se considera discapacidad múltiple a la presencia de dos o más de las siguientes discapacidades: motriz, visual, auditiva, intelectual o psicosocial.
Fuente: Enadis 2017.

Figura 1.2: Distribución porcentual de la población con discapacidad por tipo de discapacidad (ENADIS, 2019).

En ambas estadísticas muestran que la principal causa de discapacidad en la población es la motriz. La tabla 1.3 y tabla 1.4 muestran el porcentaje de la población con limitaciones por sexo y grupo de edad. En el apéndice A se muestra la misma información pero por entidad federativa.

Sexo y grupo de edad	Tipo de limitación			
	Caminar, subir o bajar usando sus piernas	Ver (aunque use lentes)	Mover o usar sus brazos o manos	Aprender, recordar o concentrarse
Total	37.7	55.8	12.4	19.3
Niños (0 a 14 años)	18.3	41.3	3.5	22.3
Jóvenes (15 a 29 años)	18.0	56.2	5.6	14.4
Adultos (30 a 59 años)	35.6	59.3	12.2	16.7
Adultos mayores (60 años y más)	55.4	54.5	18.3	24.7
Hombres	34.1	53.9	11.4	17.7
Niños (0 a 14 años)	16.7	35.1	4.1	26.4
Jóvenes (15 a 29 años)	20.0	52.4	6.3	14.7
Adultos (30 a 59 años)	33.0	57.8	11.2	13.1
Adultos mayores (60 años y más)	49.2	55.2	16.8	23.4
Mujeres	40.9	57.5	13.3	20.8
Niños (0 a 14 años)	20.2	48.5	2.9	17.6
Jóvenes (15 a 29 años)	15.9	60.4	4.7	14.2
Adultos (30 a 59 años)	37.8	60.6	13.0	19.7
Adultos mayores (60 años y más)	60.6	53.9	19.6	25.7

Figura 1.3: Porcentaje de población con limitación, por sexo y grupo de edad según tipo de limitación 2014. 1ra. parte.

Sexo y grupo de edad	Tipo de limitación			
	Escuchar (aunque use aparato auditivo)	Bañarse, vestirse o comer	Hablar o comunicarse	Problemas emocionales o mentales
Total	17.3	2.3	4.0	6.1
Niños (0 a 14 años)	7.6	3.4	16.8	9.1
Jóvenes (15 a 29 años)	8.6	1.0	5.1	9.3
Adultos (30 a 59 años)	14.2	1.2	2.0	6.1
Adultos mayores (60 años y más)	29.1	4.2	2.6	3.8
Hombres	19.9	2.2	5.1	5.7
Niños (0 a 14 años)	7.6	4.0	21.0	11.2
Jóvenes (15 a 29 años)	9.0	1.0	6.5	8.8
Adultos (30 a 59 años)	16.3	1.0	2.4	5.2
Adultos mayores (60 años y más)	35.5	3.8	3.0	3.0
Mujeres	15.0	2.3	2.9	6.4
Niños (0 a 14 años)	7.6	2.7	12.1	6.7
Jóvenes (15 a 29 años)	8.3	1.0	3.6	9.8
Adultos (30 a 59 años)	12.3	1.3	1.6	6.8
Adultos mayores (60 años y más)	23.7	4.4	2.3	4.4

Nota: El porcentaje se calcula con respecto al total de personas con limitación en cada sexo y grupo de edad. La suma de los porcentajes es mayor que 100 porque una persona puede tener más de un tipo de limitación.
Fuente: INEGI, Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica 2014. Base de datos.

Figura 1.4: Porcentaje de población con limitación, por sexo y grupo de edad según tipo de limitación 2014. 2da. parte y última.

1.1 | Antecedentes

En México, según cifras del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), 70% de las amputaciones de extremidades inferiores ocurre por una atención médica tardía de lesiones en pies, sobre todo en personas que padecen diabetes. Se calcula que sólo una de cada 10 personas con miembros amputados se rehabilita y sólo 30% de los rehabilitados sabe usar de forma adecuada sus aparatos y prótesis que, por otro lado, son muy caros, ya que en México pueden llegar a costar en promedio más de \$100,000. Si estos datos se extrapolan sólo a las 75,000 amputaciones reportadas como realizadas en el 2013 como consecuencia del pie diabético se tendría que al año 67,000 personas que fueron amputadas no recibieron una prótesis (pieza o aparato artificial que se coloca o se implanta en el cuerpo de un ser vivo para sustituir a otra pieza, a un órgano o a un miembro) o se rehabilitaron, y de las que sí lo recibieron sólo 2,250 saben usarla de manera adecuada; por lo tanto, resulta que al año México está acumulando más de 70,000 amputados sin ninguna posibilidad de ser rehabilitados y que pasan a formar parte del universo de discapacitados en el país (Vázquez, 2016, Cap. 2).

1.1.1 | Causas y tipos de amputaciones

La amputación se deriva del latín *amputāre*, donde su significado es cortar y separar enteramente del cuerpo un miembro o una porción de él, diccionario de la Real Academia Española, 2019. La amputación puede constituirse como el procedimiento quirúrgico más antiguo, considerándose una acción destructiva que puede convertirse en constructiva cuando suprime la incapacidad y la enfermedad y restituye la capacidad, funcionalidad y comodidad (Vázquez, 2016, Cap. 2). La amputación o separación de una parte del cuerpo, por lo general de un miembro inferior o superior, va a provocar en el paciente, y por supuesto en su entorno familiar, problemas de toda índole y que se deben detectar de forma rápida para así planificar los cuidados que más se adapten a sus necesidades (INEGI, 2017).

Algunas de las posibles causas de amputación y algunos porcentajes de la afectación en la población mexicana (Vázquez, 2016, Cap. 2) son:

1. Vasculares. Las causas vasculares son las que generan el mayor número de amputaciones en México.
2. Traumáticas producidas por accidentes. En el caso de las amputaciones traumáticas producidas por accidentes la población en edad productiva es la más afectada, con los jóvenes entre 15 y 24 años de edad y del sexo masculino como los que

presentan el mayor número de casos con una razón de 5:1, es decir por cada cinco casos en el sexo masculino ocurre uno en el femenino.

3. Problemas degenerativos. Los casos de amputación debidos a problemas degenerativos, como el cáncer, presentan una distribución diferenciada según el grupo de edad y sexo, con un incremento en los grupo de 40 a 64 años de edad y predominio del sexo masculino.
4. De origen congénito. Las amputaciones de origen congénito se concentran en los menores de 5 años de edad con mínimas diferencias por sexo.

Existen muchos factores que determinan el lugar de la amputación. Generalmente, la amputación que permita conservar la mayor parte de la pierna y con la mayor cantidad de las uniones (cadera, rodilla ó tobillo) intactas, es más fácil de adaptarse a usar una prótesis. Según la clasificación de la American Academy of Orthopaedic Surgeons las amputaciones a través del muslo y la pierna se denominan, respectivamente, transfemoral y transtibial; las amputaciones que se realizan a través de las articulaciones de rodilla y tobillo se designan como desarticulación de rodilla y de tobillo cada una (Vázquez, 2016), ver figura 1.5.

1. *Amputaciones del pie* - Es una amputación de cualquier parte del pie. Estas incluyen amputación del medio tarso, amputación del Lisfranc, amputación del Boyds y amputación del Symes.
2. *Amputaciones Trans-tibial* (abajo de la rodilla) - Amputación que ocurre en cualquier parte entre la rodilla y el tobillo.
3. *Des-articulación de la rodilla* - Amputación que ocurre en la unión de la rodilla.
4. *Amputaciones Trans-femoral* (arriba de la rodilla) - Amputación que ocurre en cualquier parte entre la cadera y la rodilla.
5. *Des-articulación de la cadera* - Amputación que ocurre en la unión de la cadera, todo el muslo y la pierna son extraídos.

El aspecto más importante por considerar en la amputación de la extremidad pélvica es que a mayor altura de la amputación existe un mayor gasto de energía para efectuar la marcha y, al mismo tiempo, a mayor altura de la amputación la velocidad de la marcha disminuirá y el consumo de oxígeno se incrementará. Como consecuencia, en la mayoría de las personas a las que se practica una amputación transtibial el costo energético de la marcha es 25% mayor que el requerido para una persona sin amputar, mientras

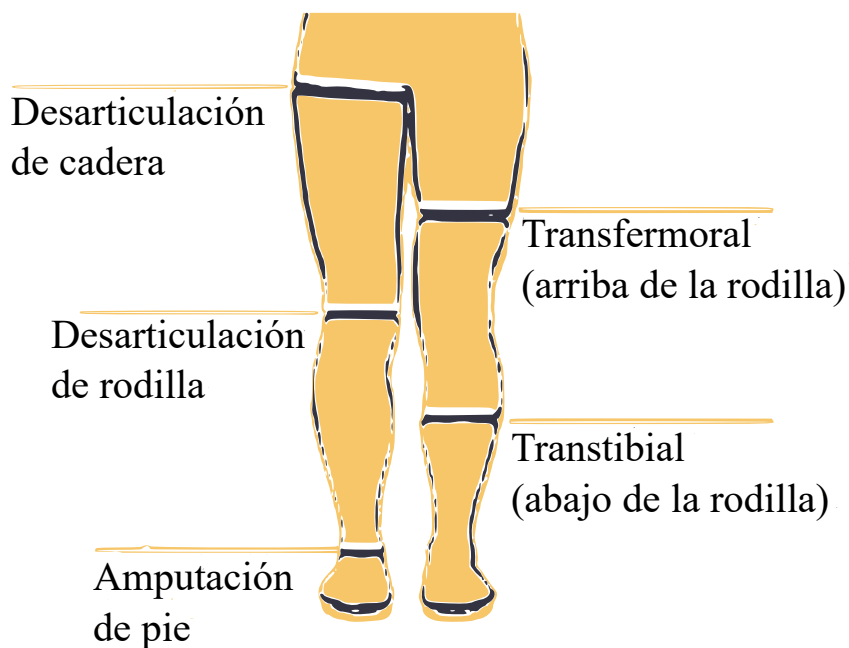


Figura 1.5: Principales amputaciones de pierna.

que para un paciente al que se hizo amputación transfemoral el costo energético resulta ser inclusive 65% mayor que el que requiere el miembro no amputado. Si a ello se agrega una enfermedad sistémica o cardiopulmonar resultará difícil conservar la independencia de la marcha (Vázquez, 2016, Cap. 9).

La importancia de contar con la nomenclatura adecuada para definir los diferentes niveles de amputación que resultan de la aplicación de técnicas quirúrgicas usadas por distintos autores radica en saber cuáles serán los diseños y dispositivos tecnológicos que existen en la actualidad para la elaboración de las prótesis más adecuadas. Por todo lo anterior es de suma importancia conocer la biomecánica del cuerpo humano, y en particular el brazo de palanca restante después de una técnica operatoria, con base en ello contar con una mejor idea de los componentes y los materiales que serían idóneos para el diseño y la fabricación de una prótesis que al final sustituirá a una función específica del cuerpo sin olvidar las limitaciones del campo de acción de cada una de ellas (Vázquez, 2016, Cap. 10).

1.2 | Estado del Arte.

El ciclo de marcha humana, figura 2.4, es una de las acciones más complicadas que efectúa el cuerpo humano, razón por la cual es importante conocerla para que nos ayuden

a desarrollar e implementar prótesis.

La innovación en prótesis siempre ha buscado proporcionar una mayor función para los amputados. A medida que las tecnologías de prótesis mejoran, las habilidades de los amputados aumentan. Además, la seguridad, la simetría y la apariencia real también han mejorado, mientras que el gasto energético en el ciclo de marcha humana ha disminuido.

Las prótesis tienen una clasificación de acuerdo con su función, acción, modo de control, y realimentación como lo observamos en la figura 1.6. Las prótesis inteligentes de miembros inferiores se crean a partir del estudio en planos anatómicos donde se obtienen 8 grados de libertad, de los cuales la cadera tiene 3, la rodilla tiene 2, y el tobillo tiene 3. Por lo tanto, se realiza un análisis de la biomecánica de la marcha reconociendo cada ciclo en los movimientos ejecutados y de esta forma se conocerá cuáles son los respectivos movimientos que deben efectuarse por medio de la prótesis, donde un 60% pertenece a la fase de apoyo y un 40 % a la fase de oscilación como se observa en la figura 2.4

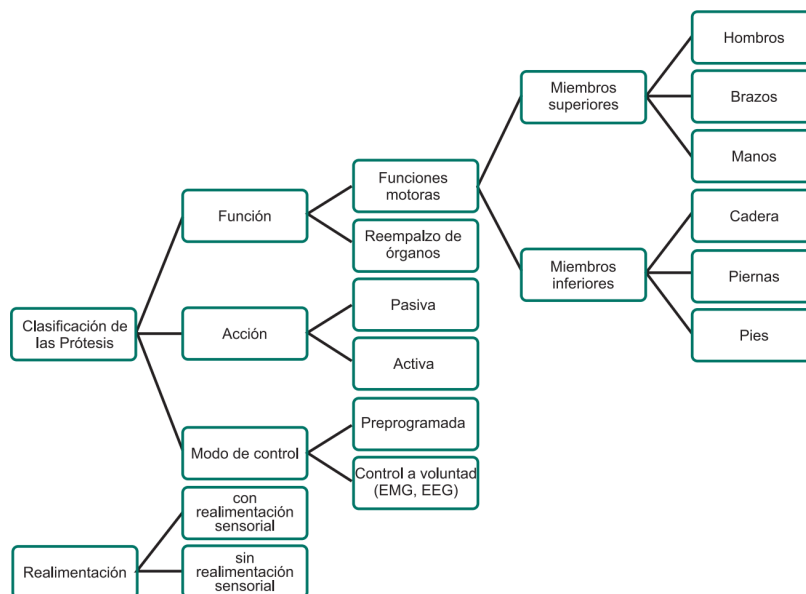


Figura 1.6: Clasificación de las prótesis. Tomada de (Díaz, 2016).

Las prótesis modernas de pierna, tienen uniones mecánicas pasivas que tratan de imitar las características humanas de la pierna, *id. est*, rigidez y viscosidad (Johansson, 2005). Sin embargo, no pueden imitar la fuerza del músculo que se traduciría en fuerza mecánica, esta es la razón por lo que, en una amputación transfemoral, la persona

requiere de un mayor esfuerzo para escalar pendientes pronunciadas y escalones (Sup, 2008).

Los avances recientes de prótesis activas de pierna, figura 1.7, presentan nuevas oportunidades así como nuevos retos para los sistemas de control de prótesis. Las piernas de Vanderbilt (Sup, 2008), resuelve el paradigma tradicional del control de impedancia, modificando la ganancia del control proporcional-derivativo (PD) de acuerdo a las fases discretizadas del ciclo de caminado. El tobillo *iWalk* (Eilenberg, 2010) utiliza estados de máquina finitos para el caso más simple del comportamiento de reflexión muscular, *id. est.*, el tobillo. Este incremento de complejidad en las prótesis, están limitados por el ajuste de los modelos de control de manera manual, para cada uno de los pacientes y las tareas que desempeñan. Por lo que, en situaciones cambiantes en el tiempo no son robustos en perturbaciones externas que afectan a las uniones cinemáticas en el ciclo de caminado (hacia enfrente y hacia atrás).

Estas limitaciones podrían potencialmente ser atacadas por un modelo de control unificado, basado en la fase de marcha (i.e. en la oscilación), la cual deberá ser sensado de manera continua por la prótesis para que coincida con el avance del cuerpo. Con la implementación de motores y actuadores en las prótesis, éstas deben tomar decisiones de control de manera continua durante el ciclo de marcha, por lo que se incrementa la complejidad de éstos. Para atacar ésta complejidad, el ciclo de marcha se descompone en ciclos más pequeños, cada uno con su propio modelo de control. A su vez, cada modelo de control deberá optimizar las características de rigidez y viscosidad ó contar con patrones pre-definidos de ángulos, velocidades ó torques en las uniones respectivas. Se requiere de sensores que detecten las fases ó posiciones del caminado para poder cambiar entre los diferentes modelos de control en el momento apropiado.

Esta manera de control de la prótesis presenta dos problemas principales: 1) la estimación de la fase de caminado debe ser confiable y 2) el ajuste de los parámetros de control para los diferentes modelos de control y/o tarea para cada paciente no es sencillo. La prótesis *ankle SPARKy* (Holgate et al., 2009) es el primer sistema de control de prótesis en emplear control de fase mediante el monitoreo de los datos en personas sin discapacidad, como función de ángulo del vástago y la velocidad, i.e. el ángulo del tobillo al nivel del piso. Sin embargo, sin la definición de una función de restricción general, esta estrategia de control no es posible generalizarlo para cualquier usuario ó tareas diferentes.



Figura 1.7: Prótesis activas para tobillo (a-j), rodilla (k-q) y ambas (r). Tomada de (Grimmer and Seyfarth, 2014).

1.3 | Planteamiento del problema.

Se sabe que caminar con una prótesis pasiva, es una tarea que demanda un esfuerzo físico y mental. Personas con una amputación transfemoral, comparados con personas sanas, son menos eficientes en el caminado. Se presenta un aumento de energía aproxi-

mado de 27-49% en el caminado y se reduce la velocidad de avance. La pérdida motriz en el tobillo y rodilla hace que mantener el balance sea más difícil, crea desconfianza e inseguridad en la persona al reducirse el sentido de estabilidad. Además, al no contar con la retro-alimentación somatosensorial de la pierna amputada, se deberá hacer uso de otro mecanismo, tal como la visión, para controlar la prótesis durante el caminado, lo cual podría desconcentrarlo de otras tareas. Eventualmente, esto puede afectar el nivel de participación en tareas de la vida cotidiana. Al no realizarse éstas tareas, puede presentarse el deterioro físico de la persona y eventualmente la pérdida de la movilidad.

A medida que han surgido nuevas tecnologías en el procesamiento computacional, los materiales y los actuadores, el diseño de prótesis ha comenzado a cambiar; dotando de nuevas y mejores experiencias a las personas que padecen la pérdida de una extremidad. Hoy en día, los amputados pueden realizar hazañas increíbles con el uso de sus prótesis y, en general, pueden funcionar mejor que antes. Sin embargo, aún existe una brecha significativa entre las prótesis más avanzadas y el cuerpo humano, lo que demuestra que todavía existe una gran necesidad de innovación.

Una prótesis motorizada (ó robótica) puede mejorar significativamente la movilidad y, por consiguiente, la calidad de vida de la personas con pérdida de una extremidad.

1.4 | Objetivos generales y específicos.

1.4.1 | General

Contribuir a la solución de problemas abiertos en la sincronización de redes complejas, aplicada a la medicina y tele-medicina, empleando la teoría de sistemas complejos. Realizando algunas aplicaciones de ésta sincronía en mecánica y robótica.

1.4.2 | Específicos

1. Analizar el comportamiento dinámico de redes complejas con diferentes estructuras topológicas para el modelo de una prótesis de extremidad considerando modelos dinámicos de piernas.
2. Sincronizar los nodos con teoría de sistemas complejos utilizando como articulaciones (nodos) de la extremidad.
3. Diseñar e implementar una prótesis de extremidad inferior.

1.5 | Metodología

1. La fase de análisis del comportamiento dinámico de redes complejas con nodos acoplados en diferentes estructuras topológicas. Incluyendo la posibilidad del modelado.
2. La fase de análisis de robustez en la sincronización de redes con nodos acoplados en diferentes estructuras topológicas frente a fallas.
3. La fase final comprende la aplicación de nuestros resultados sobre la sincronización de algunas redes complejas implementadas en la prótesis de pierna.

1.6 | Resultados esperados

1. Generar nuevos conocimientos en la sincronización de sistemas complejos aplicados al área médica: prótesis.
2. Diseñar un prototipo de prótesis de extremidad inferior.
3. Publicar los resultados en una revista científica indizada en Journal Citation Reports (JCR).

1.7 | Contenido

El presente trabajo está estructurado en 6 capítulos. Además, se ha incluido una sección adicional de apéndices complementarios, relacionados con varios capítulos, donde se puede encontrar información detallada que ayuda a comprender mejor algunas partes de la tesis.

El Capítulo 1 presenta los objetivos principales del trabajo y su justificación, así como la descripción resumida de los contenidos de cada capítulo.

El Capítulo 2 describe el encuadre científico-tecnológico en el que se enmarca la marcha humana. Inicia con una breve explicación de la evolución del hombre, según Charles Darwin. Se describe el cuerpo humano y los planos de referencia requeridos para el análisis de la marcha, así como los modelos matemáticos, dinámicos y control para un robot caminante. El Capítulo 3 presenta un sistema robótico de piernas y se determinan las ecuaciones de movimiento a través un análisis lagrangiano. Estas ecuaciones son utilizadas para la simulación de la trayectoria y el desempeño del algoritmo de control.

El Capítulo 4 presenta el control por modos deslizantes y la sincronización maestro-esclavo. Así como una simulación numérica con resultados que validan esta sincronización en el seguimiento de una trayectoria.

El Capítulo 5 está dedicado al trabajo realizado, hasta el momento, en la implementación de una pierna mecánica para dar cumplimiento con los resultados del capítulo 4. Se muestra el banco de pruebas, constituido principalmente por un módulo digital programable dedicado, un motor a pasos y un programa en código C.

Se muestra el banco de pruebas, constituido principalmente por un módulo digital programable dedicado, un motor a pasos y un programa en código C.

El Capítulo 6 hace algunas observaciones finales, perspectivas y describe las líneas futuras de este trabajo.

Cuerpo humano

2.1 | Introducción

La decisión de andar erguido que tomó el hombre hace más de un millón de años Fig. 2.1, dió forma a su esqueleto, el cual es una torre de huesos unidos con bisagras y articulaciones. Es un sistema de palancas tan bien aparejado y equilibrado que su dueño puede correr, saltar y doblarse a pesar de sus pequeños pies. Los 206 huesos dan sujeción a los 600 y tantos músculos, cuya tracción sobre los mismos hacen posible el movimiento. Fuertes y flexibles, se han adaptado con diversos grados de éxito a la singular postura humana. La acción del músculo sobre el hueso es más evidente en la flexión de los brazos y piernas. Los músculos están tan relacionados uno con el otro, que generalmente una contracción entraña muchas otras. El cerebro es el que controla y coordina estas contracciones apoyándose del sistema nervioso. El sistema nervioso tiene a su cargo la complicada tarea de recibir y reaccionar a la tarea de estímulos que asaltan al cuerpo humano (Nourse, 1980).

La postura recta de la marcha del *homo sapiens* es un atributo característico de la especie humana, por lo que la evolución de la marcha humana resulta de un proceso de optimización antropológica. Al descender de los árboles y abandonar los bosques, la supervivencia en los terrenos requiere una adaptación física. Pasamos de tener una postura curva e inclinada a una postura recta Fig. 2.1.

Los resultados se reflejan en el tipo de movimiento humano y en el físico: una marcha erguida muestra beneficios tales como una visibilidad completa distinta, reduce la pérdida de agua como consecuencia de la evaporación y permite la posibilidad de usar herramientas y armas en la lucha para sobrevivir. En paleoantropología, la marcha vertical se aprecia como un evento clave de la evolución humana con grandes cambios en la anatomía: el esqueleto humano está optimizado para caminar bípedo con el resultado

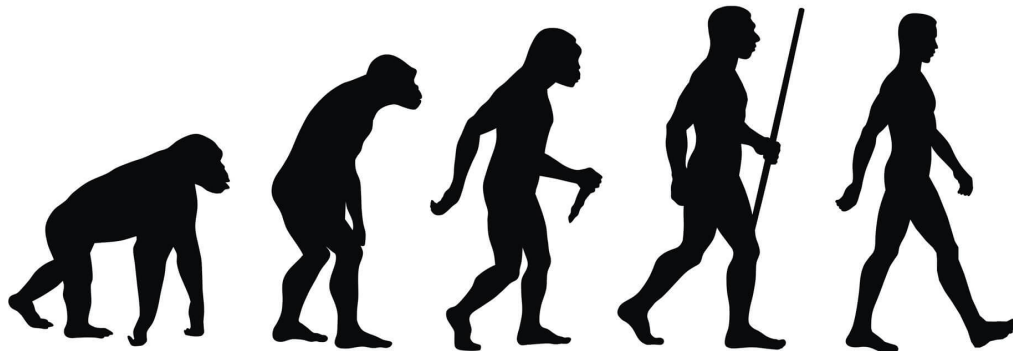


Figura 2.1: Evolución del hombre, según Charles Darwin.

de una locomoción eficiente y económica (Llagunes, 2016, Cap. 6).

Siempre ha sido un problema desafiante para los científicos de diferentes vocaciones: biólogos, fisiólogos, especialistas médicos, incluso matemáticos e ingenieros el movimiento de los organismos vivos por medio de las piernas, especialmente la locomoción de los bípedos. Sin embargo, a pesar de sus esfuerzos, este problema aún no se ha resuelto de manera satisfactoria (Miomir et al., 1990).

Muchos años y esfuerzos se han requerido para desarrollar humanoides. Desde el robot *Knight* hasta el robot *Advanced Step in Innovative Mobility (ASIMO)* o el robot *ATLAS* (Rosheim, 2006; Silva and Tenreiro, 2007; Yoshida, 2018). El robot *Knight* desarrollado por el genio italiano Leonardo Da Vinci en 1495, el robot ASIMO por Honda en 1986 y el robot ATLAS por Boston Dynamics en 2013. Tanto el robot ASIMO como el robot ATLAS involucran, además de la ingeniería mecánica del robot *Knight*, otras disciplinas como la ingeniería eléctrica, ingeniería electrónica, ingeniería computación, análisis de estabilidad y teoría de control, entre otras.

El objetivo de este capítulo es señalar los elementos requeridos para la marcha humana, así como el modelo matemático y dinámico que la describen. La Sec. 2.2 describe el cuerpo humano, principalmente la parte esquelética por ser la base locomotriz, se establecen los marcos de referencia para describir los movimientos en el espacio y se explican las fases de la marcha humana. En la Sec. 2.3.2 se describen los elementos de la ingeniería mecánica para representar el cuerpo humano y en la Sec. 2.5 se presenta el modelo dinámico de las piernas mecánicas. Siguiendo los marcos de referencia establecidos y con la abstracción matemática de la Sec. 2.4 se establecen los elementos que integran los conjuntos y subconjuntos de las piernas para los elementos de unión y de los planos de referencia. El modelado del control continuo-discreto del sistema de

piernas se presenta en la Sec. 2.6.

2.2 | Descripción del cuerpo humano

El aparato locomotor es el conjunto de huesos, músculos y articulaciones de nuestro cuerpo. Los huesos son las piezas más duras y rígidas del cuerpo humano. Los huesos se unen entre ellos mediante las articulaciones. Las funciones del esqueleto son sostener el cuerpo y proteger los órganos más delicados, como el corazón, los pulmones y el cerebro. El presente trabajo se centra solamente en el aparato locomotor por lo que dedicaremos en los subsecuentes capítulos a describirlo.

Las partes del cuerpo humano:

- La **cabeza**. Está formada por la cara y el cráneo. Dentro del cráneo se encuentra el cerebro.
- El **tronco**. Es la parte del cuerpo entre el cuello y las extremidades. Está formado por el **tórax** que es la parte superior y por el **abdomen** que es la parte inferior.
- Las **extremidades**. Son de dos tipos:
 - Extremidades **superiores**: están compuestas por el brazo, el antebrazo y la mano.
 - Extremidades **inferiores**: están formadas por el muslo, la pierna y el pie.

Los valores de estos parámetros se muestran en la Tabla 2.1.

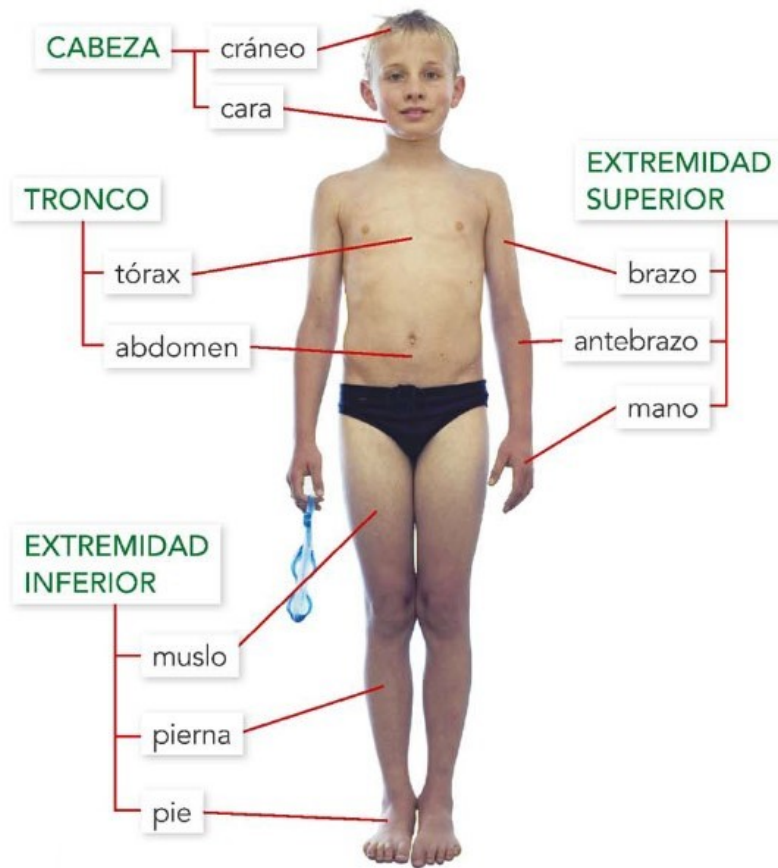


Figura 2.2: Partes de cuerpo humano.

Tabla 2.1: Medidas de masa y longitud de las diferentes partes del cuerpo.

Parte	Masa (% del peso total)	Longitud (% de la altura total)
Cabeza	7.84	10.0
Tronco	53.13	28.7
Antebrazo	2.96	18.8
Brazo	2.20	14.5
Pierna	7.92	24.5
Antepierna	4.70	24.6
Pie	1.72	8.9

2.2.1 | Planos de referencia

Para el estudio del cuerpo humano, y con el fin de brindar una orientación lógica y fácil de entender, éste se ha dividido en tres planos que se consideran perpendiculares. Éstos son el sagital, el transversal y el frontal. Estos planos se han definido de acuerdo a una orientación cardinal, siendo ortogonales y con una intersección común en el centro de gravedad del cuerpo humano. El plano frontal divide el cuerpo en mitad anterior y mitad posterior, por lo tanto es el plano en que se realizan los movimientos de cara. El plano sagital divide el cuerpo en mitad derecha y mitad izquierda y es el plano en que se realizan los movimientos de perfil. El plano horizontal o coronal, como también se le conoce, divide el cuerpo en mitad superior y mitad inferior. En este plano se realizan los movimientos vistos desde arriba o desde abajo. La Fig. 2.3 muestra estos planos de referencia del cuerpo humano, mismos que se tomaron a lo largo de este trabajo; principalmente el plano sagital.

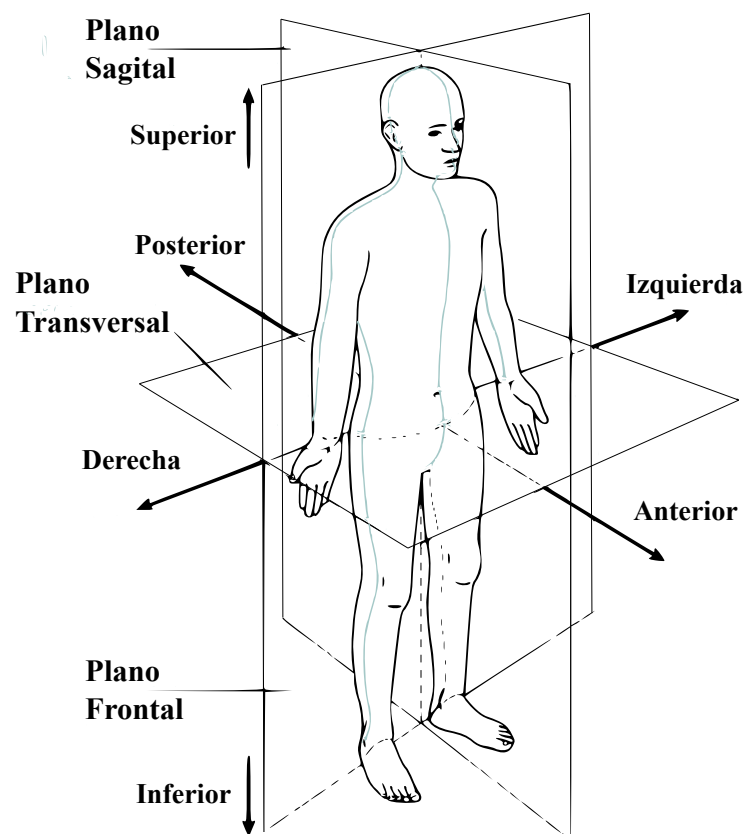


Figura 2.3: Tres planos de referencia y seis direcciones fundamentales para el movimiento del cuerpo. Tomado de (Bertomeu-Motos, 2015).

2.2.2 | Marcha humana

La marcha humana es un proceso de locomoción bípeda. El cuerpo humano, en posición erguida, se desplaza hacia delante o atrás siendo su peso soportado por ambas piernas alternativamente; podría decirse que es un movimiento periódico. Al graficar el centro de gravedad del cuerpo humano durante la marcha, se observan movimientos sinuosos alternos de diferentes partes del cuerpo. Los diferentes patrones de marcha son el resultado de diferencias en los movimientos de las extremidades inferiores en cuanto a velocidad, fuerzas, energía cinética y potencial, y especialmente los cambios de contacto entre el pie y el suelo. Nuestro interés en el movimiento de la marcha humana es a lo largo de una línea recta y se suponiendo que los pasos derecho e izquierdo son idénticos, de modo que se pueden definir las restricciones de periodicidad en la postura, las velocidades y las fuerzas de actuación (Llagunes, 2016, Cap. 6).

2.2.2.1 | Ciclos de la marcha

Durante un ciclo de marcha completo cada pierna pasa por una fase de apoyo durante la cual el pie se encuentra en contacto total o parcialmente con el suelo, seguido por una fase de oscilación, en la cual el pie se encuentra en el aire, al tiempo que avanza. La fase de apoyo comienza cuando el talón está en contacto con el suelo y finaliza cuando los dedos pierden el contacto con él; la fase de oscilación transcurre desde cuando el antepié se despega del suelo hasta cuando el pie se apoya en el talón nuevamente, como lo muestra la Fig. 2.4.

El desarrollo del ciclo de marcha está marcado por una serie de etapas que se pueden relacionar de la siguiente manera:

- Contacto talón suelo.
- Apoyo completo de la planta del pie.
- Despegue del talón.
- Despegue de los dedos.
- Oscilación de la pierna.
- Contacto talón suelo.

En general la duración de las fases son tomadas por la mayoría de la literatura consultada como un porcentaje del ciclo total; para la fase de apoyo también conocida como fase ortostática se tiene un valor estándar de 60%, y 40% restante para la fase de

oscilación. La Fig. 2.4 muestra cómo durante la marcha normal existe un período de tiempo en el cual ambas extremidades se encuentran apoyadas; este apoyo doble hace la diferencia entre el correr y el andar. La fase en la que las dos extremidades están en contacto con el suelo es aproximadamente de un 10% del ciclo total de la marcha.

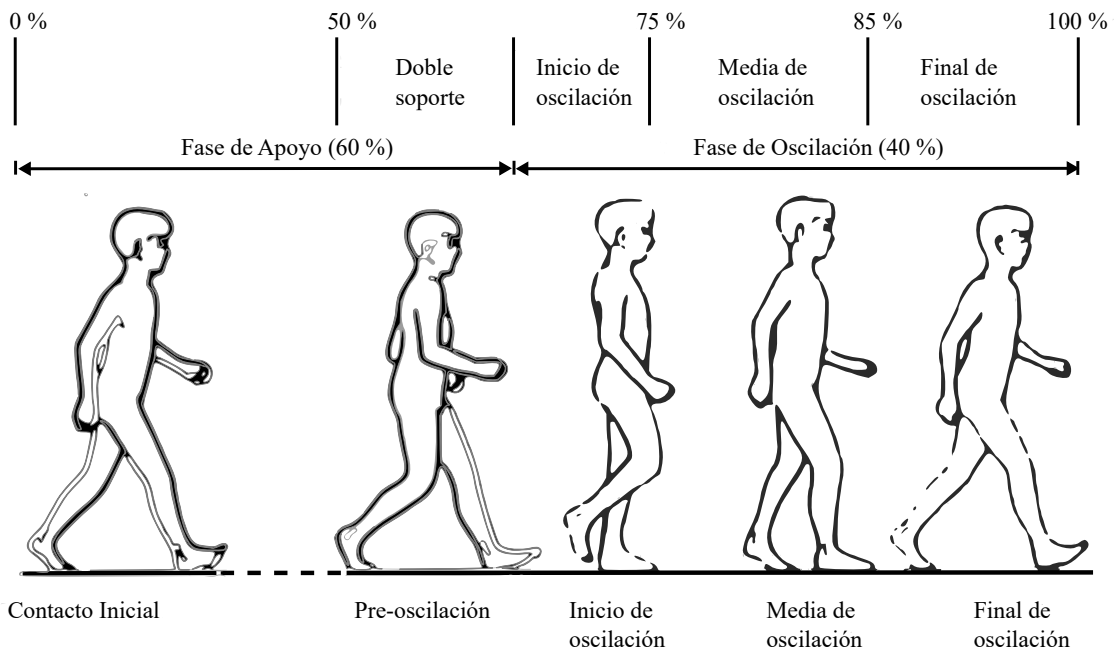


Figura 2.4: Ciclo marcha humana en el plano sagital. Tomado de (Bravo M. and Rengifo R., 2014).

Es evidente que el ciclo de marcha se ve afectado al perder alguna parte de la extremidad como las mostradas en la Sec. 1.1.1, Fig. 1.5. Una manera de analizar mecánicamente los dispositivos que suplantán las partes de la pierna humana es a través de una cadena cinemática, la cual se explica en la siguiente sección.

2.3 | El robot caminante

Los robots humanoides están concebidos con el objetivo de tener un comportamiento similar al humano. Los robots bípedos se componen de cuerpos rígidos unidos por conexiones cinemáticas simples. Los segmentos del cuerpo humano no son rígidos y esta diferencia entre humano y robot produce muchas discrepancias en su equilibrio dinámico (Maiorino and Muscolo, 2020). El estudio de brazos y manos artificiales se inició en 1967 incorporando los activos tecnológicos obtenidos del desarrollo de las

prótesis activas iniciadas tres años antes. Al principio, los estudios tenían como objetivo únicamente desarrollar máquinas para realizar trabajo manual en lugar de personas y enfatizaron el desarrollo de mecanismos de mano artificial (Maiorino and Muscolo, 2020). Recientemente, el objetivo ha sido desarrollar robots que puedan realizar trabajo tanto inteligente como manual, así como el desplazamiento en dos piernas.

Un sistema de robot es un conjunto de cuerpos rígidos conectados entre sí, cada cuerpo rígido involucrado en un mecanismo de robot se denomina enlace o unión y una combinación de uniones se denomina cadena cinemática.

2.3.1 | Uniones primarias

Hay dos tipos de conexiones primarias entre un par de enlaces, como se muestra en la Fig. 2.5. La primera es una unión prismática donde el par de enlaces realiza un desplazamiento traslacional a lo largo de un eje fijo. En otras palabras, un enlace se desliza sobre el otro a lo largo de una línea recta. Por lo tanto, también se llama articulación deslizante. El segundo tipo de unión primitiva es una unión giratoria donde un par de enlaces gira alrededor de un eje fijo. Este tipo de articulación a menudo se conoce como articulación articulada, articulada o rotacional. Es interesante notar que todas las criaturas biológicas están hechas de articulaciones de tipo revoluta; no hay articulaciones deslizantes involucradas en sus extremidades (Miomir et al., 1989).

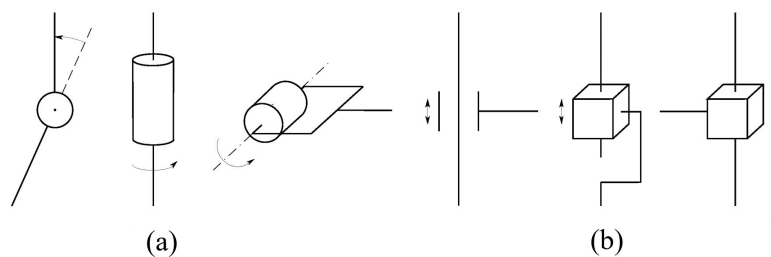


Figura 2.5: Tipos de uniones primarias. a) revolución y b) prismática.

Tabla 2.2: Pares inferiores

Par	Símbolo	Variable del par	Grados de libertad	Movimiento relativo
revoluta	R	$\Delta\Theta$	1	Circular
prisma	P	Δs	1	Lineal

Combinando estos dos tipos de articulaciones primarias, podemos crear muchos mecanismos útiles para la manipulación y locomoción de robots. Estos dos tipos de juntas primarias son simples de construir y están bien fundamentados en el diseño de ingeniería. La mayoría de los robots que se han construido son combinaciones de solo estos dos tipos.

2.3.2 | Cadena cinemática

Una cadena cinemática puede tener diferentes tipos de uniones tales como las descritas en la sección anterior. Cuando varios eslabones están conectados móvilmente por medio de articulaciones, se dice que constituyen una cadena cinemática. Los eslabones que contienen sólo dos pares de conexiones de elementos se llaman eslabones binarios, los que tienen tres se clasifican como ternarios y así sucesivamente. Si cada eslabón de la cadena se conecta por lo menos con otros dos, ésta forma uno o más circuitos cerrados y, en tal caso, recibe el nombre de cadena cinemática cerrada; de no ser así, la cadena se llama abierta (Shigley and Jr., 1980).

Una de las primeras preocupaciones, ya sea en el diseño o en el análisis de un mecanismo, es el número de grados de libertad. Los grados de libertad de un mecanismo es el número de parámetros de entrada (casi siempre variables del par) que se deben controlar independientemente, con el fin de llevar al dispositivo a una posición en particular. Si por el momento se hace caso omiso de ciertas excepciones, es factible determinar la movilidad de un mecanismo directamente a través de un recuento del número de eslabones y la cantidad y tipos de articulaciones que incluye (Shigley and Jr., 1980).

2.3.3 | Marcha cinemática

La simulación del caminado de humanoide requiere de un adecuado modelo del sistema locomotor humano, por lo que son especialmente necesarias las habilidades de movimiento en la articulación de la cadera, la rodilla y el tobillo para generar una marcha natural. La Fig. 2.6 muestra las trayectorias, en el plano sagital, de la cadera y pies para un sistema mecánico de piernas de 2-DOF. La línea sinusoidal se equipara a la gráfica del centro de gravedad del cuerpo humano durante el ciclo de marcha descrito en la Sec. 2.2.2.

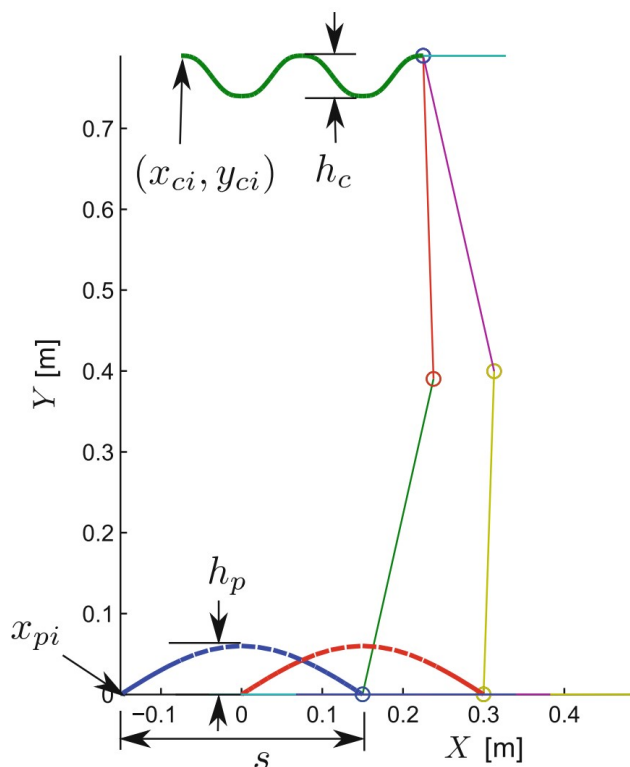


Figura 2.6: Trayectoria descrita por la cadera y los pies del robot. Tomada de (De-León-Gómez et al., 2016).

2.4 | Modelo matemático

Todo modelo matemático requiere de un origen y marcos de referencias. Los marcos y su origen utilizados durante las siguientes secciones se resumen en la Fig. 2.7. El marco \mathcal{W} es un marco fijo mundial con el eje z apuntando en la dirección opuesta del vector de gravedad \mathbf{g} . Un marco fijo de cuerpo (body) \mathcal{B} está unido al torso. Para la descripción de la posición de las extremidades, los marcos \mathcal{F}_R y \mathcal{F}_L se fijan a la pierna izquierda y la pierna derecha. Mientras que la rotación relativa y la traducción de los orígenes entre dos cuadros \mathcal{B} y \mathcal{L} está dado por la transformación homogénea $\mathbf{H}_{BL} \in SE(3)$, la posición y orientación de un marco \mathcal{B} con respecto al marco global \mathcal{W} está dada por $\mathbf{H}_B \in SE(3)$; para simplificar la nomenclatura, se omite el índice del marco global \mathcal{W} . El giro entre dos cuadros viene dado por $\mathbf{V}_{BL}^b \in \mathbb{R}^6$ y corresponde a la velocidad lineal y angular del marco \mathcal{L} relativo al marco \mathcal{B} representado en \mathcal{L} . El superíndice $\{\}^b$ denota un giro corporal. El giro del marco \mathcal{B} con respecto a \mathcal{W} está dada simplemente por $\mathbf{V}_B^b \in \mathbb{R}^6$, (Llagunes, 2016, Cap. 14).

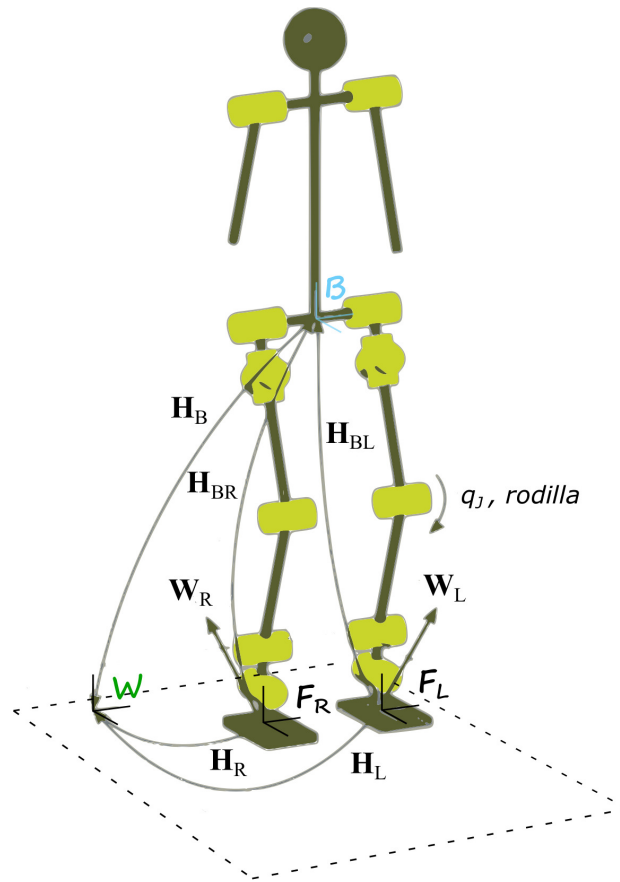


Figura 2.7: Marcos de referencia y variables para la descripción cinemática. Tomado de (Llagunes, 2016, Cap. 14).

2.4.1 | Espacio de unión

El espacio de unión son los valores que pueden adquirir las uniones descritas por el modelo matemático. La configuración cinemática de robots manipuladores está descrito típicamente por las posiciones de sus uniones. Para un robot humanoide esto no es suficiente. Dependiendo del estado de contacto del robot, se necesita información adicional para definir completamente la posición del robot en el marco global \mathcal{W} . En el caso donde no hay contacto del robot con el suelo se denomina *base flotante libre*. Agregar la posición y orientación de un marco adjunto a un enlace arbitrario, e.g. \mathcal{B} para el marco base, al espacio de configuración conduce a la configuración cinemática completa de un robot flotante libre, (Llagunes, 2016, Cap. 14, p. 301). Por lo que la configuración de espacio está dada por

$$\mathcal{Q} = \{(\mathbf{H}_B, \mathbf{q}_J) | \mathbf{H}_B \in SE(3), \mathbf{q}_J \in \mathcal{J}\} \quad (2.1)$$

con $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \cdots \times \mathcal{J}_n$ como el espacio de unión para un robot con n unidades de accionamiento y $\mathcal{J}_i \subseteq \mathbb{R}^m$ como el espacio de parámetros que representa los m grados de libertad del i -ésimo actuador. Además, \mathbf{H}_B es la transformación homogénea de un marco fijo global a la parte superior del cuerpo, \mathbf{q}_J resume todas las uniones conjuntas. Las velocidades generalizadas correspondientes al espacio de unión \mathcal{Q} son elegidos como

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B^b \\ \dot{\mathbf{q}}_J \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.4.2 | Espacio de tarea

Para simplificar la trayectoria y el diseño del controlador, es útil definir diferentes espacios de tareas para el robot (Llagunes, 2016, Cap. 14):

$$\mathcal{T}_1 = \{(\mathbf{r}_c, \mathbf{R}_B, \mathbf{q}_J) | \mathbf{r}_c \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R}_B \in SO(3), \mathbf{q}_J \in \mathcal{J}\} \quad (2.3)$$

y

$$\mathcal{T}_2 = \{(\mathbf{r}_c, \mathbf{R}_B, \mathbf{H}_R, \mathbf{H}_L, \hat{\mathbf{q}}_J) | \mathbf{r}_c \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R}_B \in SO(3), \mathbf{H}_i \in SE(3), \hat{\mathbf{q}}_J \in \hat{\mathcal{J}}\} \quad (2.4)$$

siendo $\hat{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$. En contraste a \mathcal{Q} , para \mathcal{T}_1 la posición \mathbf{r}_c del centro de masa inercial, Center of Mass (CoM), es usada para describir la posición del robot en el espacio. La orientación de la parte superior del cuerpo viene dada por la matriz de rotación \mathbf{R}_B . En \mathcal{T}_2 , las posiciones de las uniones de las piernas se reemplazan por las transformaciones homogéneas de los pies. Las posiciones de las uniones de los brazos. $\hat{\mathbf{q}}_J$ permanecen en el espacio de tareas.

2.5 | Modelo dinámico

Un análisis dinámico describe los movimientos del cuerpo en su conjunto y los movimientos relativos de las partes del cuerpo durante las diferentes fases de la marcha humana, independiente de las fuerzas que se causan durante el ciclo. Con este análisis es posible encontrar la posición, velocidad y aceleraciones de cada uno de los elementos que componen el sistema para cada instante de tiempo.

En general, las ecuaciones de movimiento para un robot con n grados de libertad y una base flotante libre se dan en la forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ es la tupleta de coordenadas generales. Las velocidades no holonómicas generalizadas $\dot{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{6+n}$ están dadas por la Ec. (2.2). Donde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(6+n) \times (6+n)}$ denota la matriz de masa, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(6+n) \times (6+n)}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis y $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{6+n}$ es el vector de fuerzas y pares generalizados (Llagunes, 2016, Cap. 14). Una descripción más detallada se presenta en la Sec. 3.5.

2.5.1 | Subsistema de piernas

Cada subsistema de extremidad consta de N_l ecuaciones. Las velocidades generalizadas de un subsistema de extremidades se eligen como

$$\dot{\mathbf{y}}_{l,i} = \left[\mathbf{V}_{l,i}^b{}^T \dot{\mathbf{q}}_{l,i}^T \right]^T \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{V}_{l,i}^b$ es el giro del origen del marco fijo del cuerpo $\mathcal{L}_i, i \in 1, 2$ unido al torso, ver Fig. 2.7. El vector $\mathbf{q}_{l,i} \subset J$ combina todos los grados internos de libertad del subsistema particular de la extremidad. Los diversos subsistemas de accionamiento se combinan para obtener

$$\left[\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_{d,1}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_{l,i}} \right)^T \cdots \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_{d,N_l}}{\partial \dot{\mathbf{y}}_{l,i}} \right)^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{d,1} \ddot{\mathbf{y}}_{d,1} + \mathbf{G}_{d,1} \dot{\mathbf{y}}_{d,1} - \mathbf{Q}_{d,1}^e \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{d,N_l} \ddot{\mathbf{y}}_{d,N_l} + \mathbf{G}_{d,N_l} \dot{\mathbf{y}}_{d,N_l} - \mathbf{Q}_{d,N_l}^e \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{l,i}^r \quad (2.7)$$

los cuales conllevan al subsistema de ecuaciones

$$\mathbf{M}_{l,i} \ddot{\mathbf{y}}_{l,i} + \mathbf{G}_{l,i} \dot{\mathbf{y}}_{l,i} - \mathbf{Q}_{l,i}^e = \mathbf{Q}_{l,i}^r \quad (2.8)$$

con matrices y vectores correspondientes a cada una de las extremidades consideradas, el término $\mathbf{Q}_{l,i}^r$ son las fuerzas de reacción; tanto la fuerza de los actuadores como fuerzas externas.

2.6 | Control discreto-continuo

El ciclo de marcha humanoide descrito en las secciones anteriores no puede ser descrito por un modelo puramente continuo ni por un modelo puramente discreto. Los aspectos continuos y discretos de la dinámica están acoplados de tal manera que descuidar cualquiera de ellos podría conllevar a resultados desfavorables para el diseño de modelos y controladores. En la literatura, esos sistemas se denominan sistemas dinámicos

híbridos *discretos-continuos* (Sobotka, 2006). En la publicación (BUSS, 2002) se da una descripción detallada de este marco de modelado híbrido en un contexto general.

El modelo de estado híbrido, Hybrid State Model (HSM), describe sistemas de control discreto-continuo y se presentan a continuación.

Vector de estado híbrido. De acuerdo con la definición del vector de estado para un sistema puramente continuo, el vector de estado híbrido $\zeta(t)$ se compone del vector de estado continuo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y la variable de estado escalar discreta $x_d(t) \in \mathbb{Z}$. Si N_d denota el número de posibles estados discretos, $x_d \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_d}\} \subset \mathbb{Z}$ y

$$\zeta(t) = ((x(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

Para sistemas híbridos sin excitación externa, el comportamiento del sistema se manifiesta en todo tiempo $t > t_0$ si el vector de estado ζ se conoce por un tiempo inicial t_0 .

Dinámica discreto-continua. Una manera compacta del modelo dinámico del estado híbrido es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_d, t) \quad \text{si} \quad s_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_d, u_d, t) \neq 0 \quad \forall i \quad (2.10)$$

$$\zeta^+ = \Phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_d, u_d, t^-) \quad \text{si} \quad s_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_d, u_d, t^-) = 0 \quad \text{para } j \in I \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ y_d \end{pmatrix} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_d, u_d, t). \quad (2.12)$$

Modelo de estado híbrido y modelo de espacio de estado. El modelo dinámico de estado híbrido (discreto-continuo) anterior proporciona una extensión al modelo de espacio de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

la cual es ampliamente usada en la teoría de control. Por lo tanto, el modelo de estado híbrido ofrece un marco para la teoría de control de sistemas híbridos.

Modelado híbrido de sistemas mecatrónicos. Para sistemas mecatrónicos, el vector de estado continuo \mathbf{x} tiene un componente de posición \mathbf{q} y un componente de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$. El vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ resume las coordenadas generalizadas. Las coordenadas generalizadas son un conjunto mínimo de variables necesarias para describir la postura ya que $x \in \mathbb{R}^n, n = 2n_q$.

Para los sistemas robóticos con piernas, el estado discreto representa la situación de contacto con el suelo de los pies.

2.7 | Resumen

A pesar del nivel locomotriz alcanzado por ASIMO y/o ATLAS, aún carecen de la gracia, velocidad y desempeño del ser humano. A medida que la locomoción de estos humanoides se asemejen a la de los humanos, podremos usarlos como robots asistentes (Tingfang et al., 2015) o ayudar a que, por ejemplo, personas con alguna amputación de pierna recuperen la capacidad de caminar, nadar o brincar (Gregg et al., 2014; Shultz et al., 2015; Simon et al., 2013; Tucker et al., 2015; Zhang et al., 2018).

El alcance del presente trabajo de investigación es la derivación de las ecuaciones de movimiento y su campo de aplicación para robots humanoides, en particular robots con piernas. La derivación se realiza de forma modular y estructurada y se muestra cómo se pueden emplear estas ecuaciones para el control de robots bípedos. Los métodos utilizados permiten adoptar fácilmente la estructura cinemática de miembros individuales y utilizar los resultados obtenidos para miembros con una estructura cinemática similar empleando diferentes parámetros de inercia, como en el caso de que la pierna izquierda sea una versión reflejada de la derecha, (Llagunes, 2016, Cap. 14, p. 301).

La marcha humana presentada en las Figs. 2.4 y 2.6, en los movimientos de las piernas, presentan sincronización en anti-fase. La sincronización y aplicación en movimientos humanos se detallan en la Sec. 4.3.

Modelo dinámico

3.1 | Introducción

Un robot es una máquina capaz de realizar algún movimiento físico para interactuar con el entorno. Las interacciones físicas incluyen manipulación, locomoción y cualquier otra tarea que cambie el estado del entorno o el estado del robot en relación con el entorno. Un robot tiene algún tipo de mecanismo para realizar una clase de tareas. Una gran variedad de mecanismos de robot así como algoritmos se ha desarrollado en las últimas décadas.

La actividad de locomoción y la marcha en particular, pertenece a la clase de movimientos más automatizados. Cuando un hombre camina en un régimen constante, no está involucrado el sistema nervioso central, incluso en los casos en que ocurren pequeñas perturbaciones. El sistema de control del sujeto los compensa automáticamente sin violar el carácter antropomórfico del movimiento. El sistema se comporta de la misma manera que si siguiera una trayectoria nominal prescrita. En caso de grandes perturbaciones, las acciones del sistema se dirigen solo a la preservación de la estabilidad general del sistema, es decir, a evitar que el sistema se caiga. Este requisito es de primordial importancia en la locomoción (Miomir et al., 1990).

En la Sección 3.2 se describe el sistema robótico de piernas. En la Sección 3.4 se desarrolla la obtención de la ecuación dinámica del sistema robótico de piernas. En la cual se consideran las energías cinéticas y potenciales. Finalmente, en la Sección 3.5 se presenta el modelo dinámico del sistema robótico de piernas con 2 grados de libertad (Degree Of Freedom (DOF)).

3.2 | Sistemas robóticos de piernas

Los sistemas robóticos con piernas están formados por enlaces rígidos que están conectados por juntas rotacionales o traslacionales. Un pie es un enlace especial que bien puede tener o no tener contacto con el suelo. Por simplicidad, solo se consideran construcciones planares donde se tiene como referencia al plano coordenado $x - y$ y sus movimientos están restringido al mismo (Sobotka, 2006), ver la Fig. 3.1.

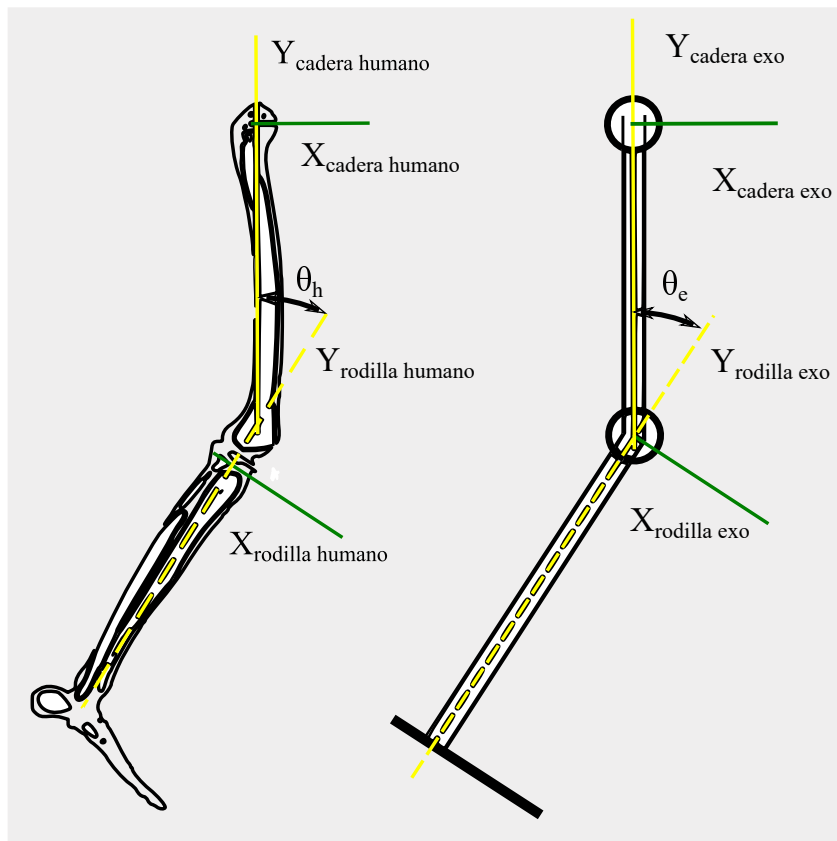


Figura 3.1: Definición de los ángulos de flexión-extensión de rodilla y cadera para el modelo humano (θ_h) y modelo mecánico (θ_m). Tomada de (Torricelli et al., 2018).

Las coordenadas generalizadas \mathbf{q} definen la configuración del sistema mecánico y son, por lo tanto, los ángulos de las articulaciones. A menudo, el conjunto de coordenadas generalizadas se denomina espacio conjunto. En lo subsecuente, las letras griegas ζ , η , α_i y β_i se usan para los componentes del vector de las uniones, donde ϵ y η se usan para distancias cartesianas. Las flexiones rotacionales generalmente se describen mediante los ángulos α_i y β_i , donde los grados de libertad rotacionales pasivos se etiquetan como α_i y los grados de libertad rotacionales activados se etiquetan como β_i . El estado

del sistema de control comprende coordenadas generalizadas \mathbf{q} y velocidades generalizadas asociadas $\dot{\mathbf{q}}$ resumidas en el vector de estado

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Además, los pares externos que actúan en las articulaciones se denotan con τ . Una descripción cartesiana de la postura con coordenadas cartesianas de los enlaces es en general redundante (Sobotka, 2006).

3.3 | Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento conectan los pares de entrada \mathbf{u} y las trayectorias resultantes en el espacio articular $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de manera diferencial. Un robot es un sistema mecánico y el movimiento del robot resulta de un equilibrio de pares externos y fuerzas internas, respectivamente, momentos (Sobotka, 2006).

Un análisis lagrangiano se puede utilizar para derivar ecuaciones de movimiento utilizando coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{n_q})^T$ que forman un conjunto mínimo de coordenadas que especifican la postura del robot. El vector de coordenadas generalizado contiene ángulos de articulación, así como la posición cartesiana de un punto de referencia en el robot en relación con el origen. Usamos $\dot{\mathbf{q}}$ para las derivadas de las coordenadas generalizadas que corresponden a velocidades angulares o lineales en el espacio articular (Sobotka, 2006).

El principio hamiltoniano de menor acción dice que para un sistema dinámico sin excitación externa, la acción integral

$$I[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} K(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - U(\mathbf{q}(t)) dt \quad (3.2)$$

toma su valor extremo. La energía cinética total se denota por $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, y $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial total. Para una configuración inicial dada $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$ y un tiempo inicial y final dado t_0 y t_f , el valor extremo de I define la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ de las coordenadas generalizadas. La función de Lagrange $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ abrevia la diferencia entre la energía cinética total $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial total $U(\mathbf{q})$ del robot.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (3.3)$$

La energía cinética total se escribe comúnmente como $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, donde $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia simétrica. Obviamente $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es positivo semidefinido ya

que la energía cinética solo toma valores mayores o iguales que cero.

El análisis del valor extremo conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0. \quad (3.4)$$

que determinan soluciones para el problema de optimización en la Ec. (3.2) en términos de ecuaciones diferenciales. Si el robot tiene n_q grados de libertad, se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden n_q .

Las fuerzas y pares aplicados externamente denotados por $\mathbf{u} = (u_1, \dots, U_{n_q})^T$ se pueden incluir en la Ec. (3.4) a través de

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u} \quad (3.5)$$

Si la articulación i -ésima es pasiva, la fuerza respectiva desaparece, $u_i = 0$. Este es en particular el caso de las articulaciones que conectan el suelo y el pie en fases de movimiento sin actividad.

En la literatura sobre robótica, las ecuaciones de movimiento a menudo se denotan como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} \quad (3.6)$$

que resulta de la reorganización de la Ec. (3.5). En $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se resume la influencia de las fuerzas coriolis, centrífugas y gravitacionales. Si es necesario, las ecuaciones de movimiento se transforman en $n = 2n_q$ ecuaciones diferenciales de primer orden con el vector de estado $\mathbf{x} = (\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T$ como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}[\mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{x})] \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

3.4 | La dinámica del manipulador 2R

En la Fig. 3.2 se ilustra un modelo ideal de un manipulador plano 2R. Se llama ideal porque asumimos que los enlaces no tienen masa y no hay fricción (Jazar, 2010).

Una vez que se han encontrado las matrices de subsistemas y los vectores para los diversos subsistemas de extremidades, ahora se pueden proyectar a las ecuaciones de movimiento en representación mínima, de un robot con base flotante libre aplicando (14.12) que conduce a (Llagunes, 2016, Cap. 14)

Las masas m_1 y m_2 son la masa del segundo motor para ejecutar el segundo enlace y la carga en el punto final. Tomamos el ángulo absoluto θ_1 y el ángulo relativo θ_2 como

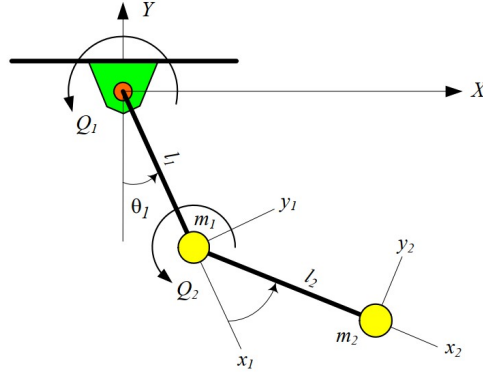


Figura 3.2: Modelo del manipulador 2R. Tomado de (Jazar, 2010).

coordenadas generalizadas para expresar la configuración del manipulador. La posición global de m_1 y m_2 son (Jazar, 2010).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) \\ l_1 \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y por lo tanto, la velocidad global de las masas son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

La energía cinética de este manipulador está hecha de energía cinética de las masas (Jazar, 2010) y es igual a:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

La energía potencial del manipulador es (Jazar, 2010):

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 \\
 &= m_1 g Y_1 + m_2 g Y_2 \\
 &= m_1 g l_1 \text{sen}(\theta_1) + m_2 g (l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2))
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

El lagrangeano 3.3 se obtiene de las ecuaciones 3.12 y 3.13

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \right) \\
 &\quad - (m_1 g l_1 \text{sen}(\theta_1) + m_2 g (l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)))
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

que proporciona las derivadas parciales requeridas 3.5 (Jazar, 2010) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \\
 &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_2)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_2) - m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) \tag{3.20}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para el manipulador 2R son:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \\
 &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \\
 &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 (2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \\
 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) \\
 &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_2) + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2 son las fuerzas requeridas para conducir las coordenadas generalizadas. En este caso, Q_1 es el par en el motor base y Q_2 es el par del

motor en m_1 .

Las ecuaciones de movimiento se pueden reorganizar para tener una forma más sistemática

$$\begin{aligned} Q_1 = & ((m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2(l_2 + 2l_1\cos(\theta_2))) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2(l_2 + l_1\cos(\theta_2)) \ddot{\theta}_2 \\ & - 2m_2l_2l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \\ & + (m_1 + m_2)gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & m_2l_2(l_2 + l_1\cos(\theta_2)) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ & + m_2l_1l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + m_2gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.5 | Modelado del mecanismo 2-DOF

El mecanismo utilizado, consta de dos eslabones conectados en serie con unión tipo revoluta, por lo que es un mecanismo de dos grados de libertad. Otra clasificación tiene que ver con el tipo de actuadores: *pasivos* para sistemas sin actuadores, *sub-actuados* para sistemas con menos actuadores a los grados de libertad, *actuados* para sistemas con igual número de actuadores a los grados de libertad y *sobre-actuados* para sistemas con más actuadores que grados de libertad. La estrategia de sincronización, descrito en la Sección 4.3, fué simulado en un mecanismo actuado con dos grados de libertad, el cual puede realizar movimientos simples en el plano (x, y) . El modelo dinámico para representar este sistema y que involucra la representación de movimientos para N sistemas mecánicos bajo la fuerza de gravedad, está dado por las ecuaciones de *Euler-Lagrange* en (Spong et al., 2004) y (Kelly et al., 2005).

La ecuación dinámica de un manipulador de enlace rígido general que tiene n grados de libertad en un espacio libre se puede escribir como (Li et al., 2011).

$$H_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i, \quad (3.25)$$

donde $i(1 \leq i \leq p)$ denota el i -ésimo índice del robot en la red y p es el número total de elementos individuales. Además, $q_i \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de desplazamientos generalizados de las i -ésimas coordenadas del robot, y $\tau \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de los pares de entrada de control generalizados en las coordenadas del robot; $H_i(q_i) \in \mathbb{R}^n \times n$ matriz de inercia que es simétrica uniformemente limitada y positiva definida, $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i \in \mathbb{R}^n$ es una función vectorial que contiene Coriolis y fuerzas centrífugas, y $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^n$ es una función vectorial que consiste en fuerzas gravitacionales (Li et al., 2011).

Según (Cicek et al., 2015), tenemos algunas propiedades fundamentales de las ecuaciones de movimiento:

1. La matriz de inercia $H_i(q_i)$ es simétrica, definida positiva y satisface la siguiente desigualdad:

$$m_1 \|\epsilon\|^2 \leq \epsilon^T H_i(q_i) \epsilon \leq m_2 \|\epsilon\|^2 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

donde m_1 y m_2 son constantes positivas, ϵ es un vector real de dimensión n y $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana.

2. La matriz inercial y la matriz centrífuga y de Coriollis satisfacen la siguiente relación diagonal simétrica.

$$\epsilon^T \left(\frac{1}{2} \dot{H}_i(q_i) - C_i(q, \dot{q}) \right) \epsilon = 0 \quad (3.27)$$

donde $\dot{H}_i(q_i)$ es la primer derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia.

3. La matriz centrífuga y de Coriollis satisface la siguiente relación:

$$\|C_i(q, \dot{q})\| \leq \zeta_c \dot{q} \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n \quad (3.28)$$

donde ζ_c es una constante positiva.

4. El término de la izquierda de 3.4 es linealmente parametrizable como:

$$H_i(q_i) \ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = Y_i(\dot{q}_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) \theta_i \quad (3.29)$$

donde $Y \in \mathbb{R}^{n \times a}$ es la matriz regresora compuesta de funciones conocidas de q, \dot{q} y \ddot{q} ; $\theta_i \in \mathbb{R}^a$ es el vector de parámetros estructurales del manipulador, y a es el número de parámetros desconocidos.

En la topología actual, el borde representa enlaces de comunicación bidireccionales.

$$H_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i, \quad i = m, s \quad (3.30)$$

donde el subíndice m es para el sistema maestro y el subíndice s para el sistema esclavo, por lo que $\mathbf{q}_i = [q_{i1} \ q_{i2}]^T$, $\boldsymbol{\tau}_i = [\tau_{i1} \ \tau_{i2}]^T$ y

$$H_i = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

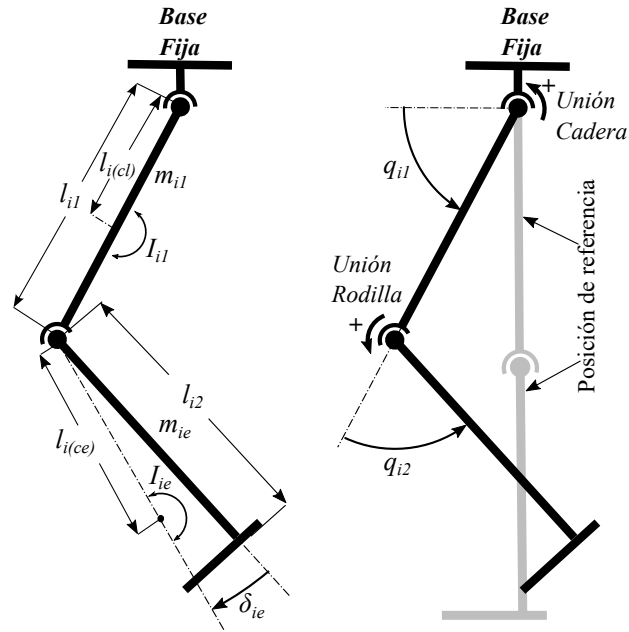


Figura 3.3: Configuración mecánica con 2-DOF. Pierna (l_{i1}) y ante pierna (l_{i2}) del sistema maestro. Nótese que la misma configuración se utiliza para el sistema esclavo denotado por el sub índice i .

donde H_i es la matriz de inercias, C_i la matriz de Coriolis y \mathbf{g}_i el vector gravitacional. Tanto τ_{i1} como τ_{i2} son los pares en las uniones del robot manipulador (pierna y ante pierna), que incluye las fuerzas de acoplamiento o momentos. Por último, q_{i1} y q_{i2} son las posiciones angulares de la pierna y ante pierna, como se muestra en la Fig. 3.3.

Los elementos del grupo de matrices (3.31) son los siguientes:

$$H_{11} = \alpha_i + 2\varepsilon_i \cos(q_{i2}) + 2\eta_i \sin(q_{i2})$$

$$H_{12} = \beta_i + \varepsilon_i \cos(q_{i2}) + \eta_i \sin(q_{i2})$$

$$H_{21} = \beta_i + \varepsilon_i \cos(q_{i2}) + \eta_i \sin(q_{i2})$$

$$H_{22} = \beta_i$$

$$C_{11} = -2\varepsilon_i \sin(q_{i2} + 2\eta_i \cos(q_{i2})) \dot{q}_{i2}$$

$$C_{12} = -\varepsilon_i \sin(q_{i2} + \eta_i \cos(q_{i2})) \dot{q}_{i2}$$

$$C_{21} = \varepsilon_i \sin(q_{i2} + \eta_i \cos(q_{i2})) \dot{q}_{i1}$$

$$C_{22} = 0$$

$$g_{11} = \varepsilon_i \rho_{i2} \cos(q_{i1} + q_{i2}) + \eta_i \rho_{i2} \sin(q_{i1} + q_{i2}) + (\alpha_i - \beta_i + \rho_{i1}) \rho_{i2} \cos(q_{i1})$$

$$g_{12} = \varepsilon_i \rho_{i2} \cos(q_{i1} + q_{i2}) + \eta_i \rho_{i2} \sin(q_{i1} + q_{i2})$$

Los valores de los parámetros α_i , β_i , ε_i y η_i están relacionadas a parámetros físicos de los eslabones (Slotine and Weiping, 1987), y se definen como sigue:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= I_{i1} + m_{i1}l_{i(cl)}^2 + I_{ie} + m_{ie}l_{i(ce)}^2 + m_{ie}l_{i1}^2 \\ \beta_i &= I_{ie} + m_{ie}l_{i(ce)}^2 \\ \varepsilon_i &= m_{ie}l_{i1}l_{i(ce)}\cos(\delta_{ie}) \\ \eta_i &= m_{ie}l_{i1}l_{i(ce)}\text{sen}(\delta_{ie}) \\ \rho_{i1} &= l_{i1}l_{i(cl)} - I_{i1} - m_{i1}l_{i1}^2 \\ \rho_{i2} &= g/l_{i1}\end{aligned}$$

donde

- m_{i1} – masa de la pierna.
- l_{i1} – longitud de la pierna.
- l_{i2} – longitud de la ante pierna.
- $l_{i(cl)}$ – posición del centro de masa de la pierna.
- I_{i1} – inercia de la pierna.
- m_{ie} – masa de la ante pierna.
- l_{ie} – longitud de la ante pierna.
- $l_{i(ce)}$ – posición del centro de masa de la ante pierna.
- I_{ie} – inercia de la ante pierna.
- δ_{ie} – ángulo entre el segundo eslabón y el centro de masa de la ante pierna.

3.6 | Resumen

Se presentó y desarrolló un modelo dinámico del sistema robótico de piernas de 2 grados de libertad y se detallaron sus propiedades fundamentales. Con esta ecuación es posible implementar analíticamente el algoritmo de control y analizar su desempeño. En el siguiente capítulo se explica la sincronización maestro-esclavo mediante el seguimiento de trayectoria controlando la misma con el algoritmo de control de deslizamiento (Sliding Mode Control (SMC)).

Resultados y Discusión

4.1 | Introducción

Una vez obtenidos los modelos cinemáticos y dinámicos del robot es posible abordar el problema del control de los mismos. Para un estudio más estructurado del problema de control del robot, éste suele dividirse en dos bloques: *i) Control cinemático o planificación de trayectorias*. Consiste en describir el movimiento deseado del manipulador como una secuencia de puntos en el espacio (con posición y orientación). El control cinemático interpola el camino deseado mediante una clase de funciones polinomiales y genera una secuencia de puntos a lo largo del tiempo y *ii) Control dinámico o control de movimiento*. Trata de conseguir que el robot siga realmente las trayectorias marcadas por el control cinemático teniendo en cuenta las limitaciones de los actuadores y el modelo dinámico del robot.

La planificación de trayectoria para sistemas robóticos con piernas resuelve el problema de encontrar un movimiento dinámicamente factible que logre el comportamiento deseado como caminar, trotar, saltar, etc. Dinámicamente factible significa que existe una combinación de trayectoria de estado continuo-discreto ζ y una trayectoria con torque \mathbf{u} que sea solución válida del sistema dinámico continuo-discreto. Por lo tanto, el resultado de la planificación de la trayectoria no es solo la trayectoria en el espacio de estado continuo-discreto, sino también el *par* de entrada adecuado que realiza el seguimiento de la trayectoria en el espacio de unión (Sobotka and Buss, 2005).

El método presentado utiliza el conocimiento de la estructura de control en la formulación de la planificación de trayectoria. Si las entradas del controlador son trayectorias deseadas, la tarea de diseño de trayectoria se transforma en un cálculo de trayectorias conjuntas posibles que sean viables \mathbf{X}_d y la trayectoria de estado continuo-discreto resultante ζ , ver Fig. 4.1.

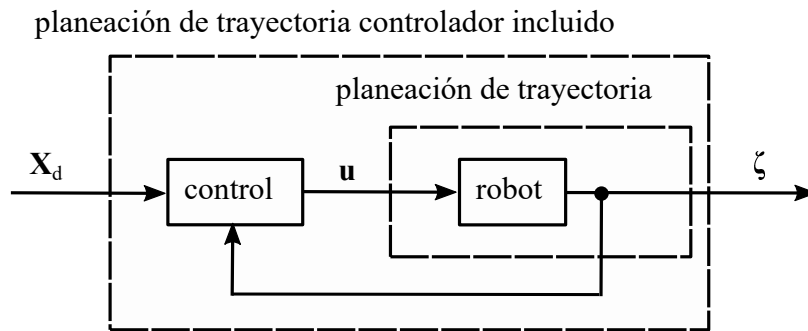


Figura 4.1: Planificación de trayectoria y ley de control. En la planificación de la trayectoria se determinan *pares* viables de la trayectoria deseada X_d y el vector de estado continuo-discreto ζ . Tomada de (Sobotka and Buss, 2005).

Para explotar completamente las capacidades mecánicas de los robots de alto desempeño, es fundamental comprender cómo controlar de manera efectiva la dinámica de la forma de la Ec. (3.25) y considerando las no linealidades. La Sec. 4.2 describe un diseño de control robusto llamado control de modos deslizantes, SMC. En la Sec. 4.3 se analiza la sincronización maestro-esclavo y en la Sec. 4.4 se presenta la sincronización maestro-esclavo de dos sistemas de 2-DOF con el método de control SMC, así como el análisis de estabilidad, los cuales son simulados en la Sec. 4.5. Por último, se presentan los resultados obtenidos en la Sec. 4.6.

4.2 | Control por modos deslizantes

La información de esta sección, que a continuación se presenta, fue tomada de (Nabil et al., 2017).

El enfoque de control de modo deslizante es reconocido como una de las herramientas eficientes para diseñar controladores robustos para plantas dinámicas no lineales complejas de alto orden que operan en condiciones de incertidumbre. La investigación en esta área se inició en la ex-Unión Soviética hace unos 40 años, y luego la metodología de control de modo deslizante ha recibido mucha más atención por parte de la comunidad de control internacional en las últimas dos décadas. La principal ventaja del modo deslizante es la baja sensibilidad a las variaciones y perturbaciones de los parámetros de la planta, lo que elimina la necesidad de un modelado exacto. El control de modo deslizante permite el desacoplamiento del movimiento general del sistema en componentes parciales independientes de menor dimensión y, como resultado, reduce la complejidad del diseño de retroalimentación. El control de modo deslizante implica que

las acciones de control son funciones de estado discontinuas que pueden ser implementadas fácilmente por convertidores de potencia convencionales con "on-off" como el único modo de operación admisible. Debido a estas propiedades, la intensidad de la investigación en muchos centros científicos de la industria y universidades se mantiene a un alto nivel, y se ha demostrado que el control de modo deslizante es aplicable a una amplia gama de problemas en robótica, entre otros.

4.2.1 | Superficies de deslizamiento

Considere el siguiente sistema dinámico: Considere un sistema dinámico de una entrada y una salida, lineal en la entrada (sistema no lineal afín), descrito por la siguiente ecuación:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(x, t) \quad (4.1)$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el tiempo, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es el vector de control y f y g son funciones suaves y al menos dos veces derivables.

Asumiendo que la variable de control $u(x, t)$ presenta una discontinuidad en la superficie de deslizamiento: $S(x) = 0$.

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Definición 1 El sistema definido por la Ec. (4.1) y la Ec. (4.2) se le llama sistema de estructura variable. Y si el control variable $u(x, t)$ satisface la condición de atracción $S(x)\dot{S}(x) < 0$, se dice que el control es de *modo deslizante*.

Definición 2 Existe un modo deslizante en $S(x) = 0$ si y solo si la(s) trayectoria(s) de fase se encuentra(n) en la superficie de deslizamiento y que la condición de atracción se haya verificado, i.e.:

$$x(t \in x/S(x) = 0 \quad y \quad S(x)\dot{S}(x) < 0$$

Se dice que el modo de deslizamiento es *ideal* si $S(x) = 0$ y $\dot{S}(x) = 0$. En el caso que solo la condición de atracción se cumple ($S(x)\dot{S}(x) < 0$), se dice que el deslizamiento es *real*.

4.2.2 | Modo de deslizamiento ideal y control equivalente

El control equivalente se define como el control que permite tener un modo de deslizamiento ideal i.e., satisface la condición $S(x) = 0$ y $\dot{S}(x) = 0$. En siguiente análisis asumimos el caso general de una "hipersuperficie" deslizante la cual depende del tiempo y de su estado, el cual se denota por $S(x, t)$.

Considerando la condición ideal de deslizamiento, tenemos:

$$\dot{S}(x, t) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.3)$$

Empleando el sistema de estados de la Ec. (4.1) y reemplazando $u(x, t)$ por $u_{eq}(x, t)$, se tiene:

$$\dot{S}(x, t) = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T [f(x, t) + g(x, t)u_{eq}(x, t)] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

Si $\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T g(x, t)$ es no singular, el control equivalente es:

$$u_{eq}(x, t) = - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(x, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (4.5)$$

Físicamente, el control equivalente representa el valor promedio de la variable de control $u(t)$ que mantiene el sistema de estado en la superficie de deslizamiento $S(x, t) = 0$.

4.3 | Sincronización maestro-esclavo

Las observaciones de Huygens con respecto a la sincronización de dos péndulos con acoplamiento mecánico débil, revelan cinco tipos de sincronización (Luo, 2013): a) sincronización completa o idéntica, b) sincronización generalizada, c) sincronización en fase, d) sincronización anticipada o de retardo y e) sincronización de amplitud envolvente. Estos fenómenos se observan para dos o más sistemas dinámicos. El presente trabajo se centra en la sincronización en fase para dos sistemas mecánicos con 2-DOF.

Para la sincronización de dos sistemas dinámicos no lineales, suponga un sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{q}}_m = f(\mathbf{q}_m) \quad (4.6)$$

donde f es el vector no lineal, al menos dos veces diferenciable y con una curva suave. Y $\mathbf{q}_m \in R^n$ es el vector de estados del sistema maestro.

Definiendo un segundo sistema esclavo como

$$\dot{\mathbf{q}}_s = g(\mathbf{q}_s, \mathbf{u}) \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{u} \in R^n$ es la señal de entrada al sistema, g es el vector no lineal que, al igual que f , es al menos dos veces diferenciable y con una curva suave.

Y definiendo el error de sincronización como

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_s \quad (4.8)$$

por lo que, el objetivo de control es generar una señal $\mathbf{u} \in R^n$ de manera tal, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_s(t)\| = 0 \quad (4.9)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana.

Lo que significa que, los sistemas (4.6) y (4.7) sincronizan en un tiempo $t \rightarrow \infty$.

4.4 | Sincronización de dos sistemas de 2-DOF

Para la validación de la sincronización de dos sistemas, uno llamado maestro y el otro llamado esclavo, se presenta la simulación del seguimiento a una trayectoria cíclica. Al sistema maestro se le ordena que genere una trayectoria cíclica y el sistema esclavo sigue los movimientos del maestro hasta alcanzar la sincronización. Esta sincronización la lleva a cabo incluso con posiciones iniciales diferentes en los sistemas. Se usó el modelado del sistema descrito en el capítulo anterior para el maestro así como para el esclavo.

4.4.1 | Estrategia de sincronización

Para alcanzar sincronización de dos sistemas mecánicos de 2-DOF bajo el esquema maestro-esclavo, se realizan dos etapas. En la primera etapa el sistema maestro sigue la posición de una trayectoria deseada y en la segunda etapa, el sistema esclavo sigue la posición del sistema maestro. La Fig. 4.2 muestra estas dos etapas, en la cual los elementos sombreados componen la segunda etapa y el resto de la figura los elementos de la primera etapa. Estas etapas cuentan con un lazo cerrado de control. Sin embargo, la primera etapa incrementa o decrementa el valor de τ_m para que $\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_m$ sea casi cero, i.e. $\mathbf{e}_m = 0$; con esto se logra dar seguimiento a la trayectoria deseada. Mientras para la segunda etapa, el sistema esclavo toma \mathbf{q}_m como la posición deseada y la compara con \mathbf{q}_s , cuando $\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_s$ es casi cero $\mathbf{e}_s = 0$, ambos sistemas están sincronizados en fase. La trayectoria que seguirá el sistema maestro está indicada por el vector $\mathbf{x}_d = [x_d \ y_d]^T$, con valores que están en el plano (x, y) . Para convertir estos valores en el plano cartesiano a valores angulares requeridos por las uniones del sistema maestro, se emplea la *cinemática inversa*.

4.4.2 | Modos deslizantes basado en estabilidad entrada-salida

Para un sistema como el que se muestra en la ecuación (3.30) y asumiendo que $\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i$ y η_i son valores conocidos. Para una trayectoria de posición deseada \mathbf{q}_d los errores de

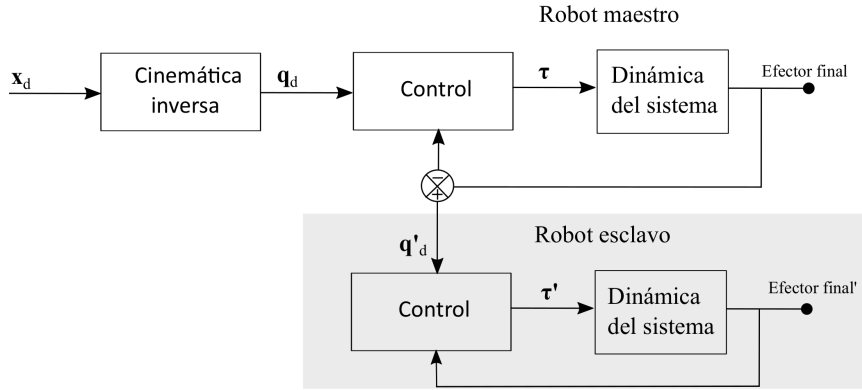


Figura 4.2: Esquema de sincronización maestro-esclavo.

posición para el maestro y esclavo son respectivamente:

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}_m, \quad \mathbf{e}_s = \mathbf{q}_m - \mathbf{q}_s \quad (4.10)$$

Definiendo:

$$\dot{\mathbf{q}}_{mr} = \dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}_m), \quad \dot{\mathbf{q}}_{sr} = \dot{\mathbf{q}}_m + \Lambda(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_s) \quad (4.11)$$

donde Λ es una matriz diagonal definida positiva.

Dado que la dinámica del robot es lineal con respecto a sus parámetros (Liu and Wang, 2011), se tiene

$$H_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{ir} + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ir} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{ir})\mathbf{p}_i \quad (4.12)$$

donde

$$\mathbf{p}_i = [\alpha_i \quad \beta_i \quad \varepsilon_i \quad \eta_i]^T \quad (4.13)$$

$$Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{ir}) = \begin{bmatrix} Y_{i1} & Y_{i2} & Y_{i3} & Y_{i4} \\ Y_{i5} & Y_{i6} & Y_{i7} & Y_{i8} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

con

$$\begin{aligned}
Y_{i1} &= \ddot{q}_{ir1} + \rho_{i2} \cos(q_{i1}) \\
Y_{i2} &= \ddot{q}_{ir2} - \rho_{i2} \cos(q_{i1}) \\
Y_{i3} &= 2\cos(q_{i2})\ddot{q}_{ir1} + \cos(q_{i2})\ddot{q}_{ir2} - 2\sin(q_{i2})\dot{q}_{i2}\dot{q}_{ir1} + \sin(q_{i2})\dot{q}_{i2}\dot{q}_{ir2} + \rho_{i2}\cos(q_{i1} + q_{i2}) \\
Y_{i4} &= 2\sin(q_{i2})\ddot{q}_{ir1} + \sin(q_{i2})\ddot{q}_{ir2} + 2\cos(q_{i2})\dot{q}_{i2}\dot{q}_{ir1} + \cos(q_{i2})\dot{q}_{i2}\dot{q}_{ir2} + \rho_{i2}\sin(q_{i1} + q_{i2}) \\
Y_{i5} &= 0 \\
Y_{i6} &= \ddot{q}_{ir1} + \ddot{q}_{ir2} \\
Y_{i7} &= \cos(q_{i2})\ddot{q}_{ir1} + \sin(q_{i2})\dot{q}_{i1}\ddot{q}_{ir1} + \rho_{i2}\cos(q_{i1} + q_{i2}) \\
Y_{i8} &= \sin(q_{i2})\ddot{q}_{ir1} - \cos(q_{i2})\dot{q}_{i1}\dot{q}_{ir1} + \rho_{i2}\sin(q_{i1} + q_{i2})
\end{aligned}$$

La matriz $Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ir}, \ddot{\mathbf{q}}_{ir})$ es conocida como *matriz de regresor dinámico*.

Utilizando (4.10) y (4.11), la variable *deslizante*, tanto para el maestro como el esclavo ($i = m, s$), está determinada por

$$\sigma_i = \dot{\mathbf{q}}_{ir} - \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{e}}_i + \Lambda \mathbf{e}_i \quad (4.15)$$

y la función de Lyapunov se define como

$$V_i(t) = \frac{1}{2} \sigma_i^T H_i(\mathbf{q}_i) \sigma_i \quad (4.16)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i(t) &= \sigma_i^T H_i(\mathbf{q}_i) \dot{\sigma}_i + \frac{1}{2} \sigma_i^T \dot{H}_i(\mathbf{q}_i) \sigma_i \\
&= \sigma_i^T H_i(\mathbf{q}_i) \dot{\sigma}_i + \sigma_i^T C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \sigma_i \\
&= \sigma_i^T [H_i(\mathbf{q}_i)(\ddot{\mathbf{q}}_{ir} - \ddot{\mathbf{q}}_i) + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)(\dot{\mathbf{q}}_{ir} - \dot{\mathbf{q}}_i)] \\
&= \sigma_i^T [H_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{ir} + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ir} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) - \boldsymbol{\tau}_i]
\end{aligned} \quad (4.17)$$

con la dinámica de la superficie de deslizamiento dada por

$$H_i(\mathbf{q}_i)\dot{\sigma}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\sigma_i = Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ir}, \ddot{\mathbf{q}}_{ir})\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\tau}_i. \quad (4.18)$$

El modo deslizante basado en el límite del modelo de la ecuación (4.17) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i(t) &= -\sigma_i^T [\boldsymbol{\tau}_i - (H_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{ir} + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_{ir} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i))] \\
&= -\sigma_i^T [\boldsymbol{\tau}_i - Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ir}, \ddot{\mathbf{q}}_{ir})\mathbf{p}_i]
\end{aligned} \quad (4.19)$$

y la entrada de control como

$$\begin{aligned}\tau_i &= \bar{k}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{k}_{i1} \operatorname{sgn}(\sigma_{i1}) \\ \bar{k}_{i2} \operatorname{sgn}(\sigma_{i1}) \end{bmatrix}, \quad i = m, s\end{aligned}\quad (4.20)$$

Considere la siguiente región

$$\mathbb{D}_{\sigma_i} = \{\sigma_i \mid \|\sigma_i\| \leq \delta_{\sigma_i}\}.\quad (4.21)$$

A continuación se mostrará que si $\sigma_i \in \mathbb{D}_{\sigma_i}$, entonces, los errores de posición y velocidad así como las trayectorias del sistema q_i y \dot{q}_i también están acotadas. Tomando en cuenta (4.15) se tiene

$$e_i(t) = e^{-\Lambda_i t} e_i(0) + \int_0^t e^{-\Lambda_i(t-\vartheta)} \sigma_i(\vartheta) d\vartheta\quad (4.22)$$

De la ecuación anterior una cota del error de posición se puede calcular de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\|e_i\| &\leq \|e_i(0)\| e^{-\underline{\lambda}_i t} + \frac{\delta_{\sigma_i}}{\underline{\lambda}_i} (1 - e^{-\underline{\lambda}_i t}) \\ &\leq \|e_i(0)\| + \frac{\delta_{\sigma_i}}{\underline{\lambda}_i}\end{aligned}\quad (4.23)$$

donde $\underline{\lambda}_i \triangleq \lambda_{\min}\{\Lambda_i\}$. Del resultado anterior se puede obtener la siguiente cota para el error de velocidad

$$\|\dot{e}_i\| \leq \bar{\lambda}_i \|e_i(0)\| + \delta_{\sigma_i} \left(\frac{\bar{\lambda}_i + \underline{\lambda}_i}{\underline{\lambda}_i} \right)\quad (4.24)$$

donde $\bar{\lambda}_i \triangleq \lambda_{\max}\{\Lambda_i\}$. Dado que la trayectoria deseada $q_d(t)$ y sus derivadas son funciones acotadas las trayectorias del sistema q_i y \dot{q}_i también están acotadas si $\|\sigma_i\| \leq \delta_{\sigma_i}$. Del análisis anterior es posible determinar las siguientes cotas de los elementos del regresor

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_{ir}, \ddot{q}_{ir}) = \left[Y_{i(nj)} \right], \quad |Y_{i(nj)}| \leq \bar{Y}_{i(nj)}.\quad (4.25)$$

Para mostrar que el estado σ_i está acotado, considere (4.16) la cual satisface la siguiente desigualdad

$$\lambda_{hi} \|\sigma_i\|^2 \leq V_i \leq \lambda_{Hi} \|\sigma_i\|^2\quad (4.26)$$

donde $\lambda_{hi} = \lambda_{\min}\{H_i(\mathbf{q}_i)\}$ y $\lambda_{Hi} = \lambda_{\max}\{H_i(\mathbf{q}_i)\}$. La derivada de V_i a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= -\boldsymbol{\sigma}_i^T \bar{\mathbf{k}}_i \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_i) + \boldsymbol{\sigma}_i^T Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{ir}, \ddot{\mathbf{q}}_{ir}) \mathbf{p}_i \\ &= -\sum_{n=1}^2 \bar{k}_i |\sigma_i| + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^4 \sigma_i \left[Y_{i(nj)} \right] p_{ij}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Tomando en cuenta la ec. (4.25) y que los elementos de la diagonal de la matriz $\bar{\mathbf{k}}_i$ se proponen como

$$\bar{k}_{i(n)} = \sum_{j=1}^4 \bar{Y}_{i(nj)} \bar{p}_{ij} + \zeta, \quad \zeta > 0, \quad n = 1, 2 \quad (4.28)$$

donde

$$\mathbf{p}_i = [p_{i1} \quad p_{i2} \quad p_{i3} \quad p_{i4}]^T, \quad |p_{in}| \leq \bar{p}_{in}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

la derivada de V_i satisface

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leq -\sum_{n=1}^2 |\sigma_i| \left(\sum_{j=1}^4 \bar{Y}_{i(nj)} \bar{p}_{ij} + \zeta \right) + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^4 |\sigma_i| \bar{Y}_{i(nj)} p_{ij} \\ &\leq -\zeta \sum_{n=1}^2 |\sigma_i| < 0.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Puesto que la derivada es negativa las variables en lazo cerrado están acotadas y σ_i tiende a cero. Para mostrar la convergencia en tiempo finito se hará uso de la siguiente desigualdad $\sum_{n=1}^2 |\sigma_i| \geq \|\boldsymbol{\sigma}_i\|$. Tomando en cuenta la desigualdad anterior y la desigualdad dada en (4.26) una cota superior para (4.29) está dada por

$$\dot{V}_i \leq -\zeta \|\boldsymbol{\sigma}_i\| \leq -\alpha \sqrt{V_i} \quad (4.30)$$

donde $\alpha = \zeta / \sqrt{\lambda_{hi}}$. O bien,

$$D^+ W_i \leq -\alpha \quad (4.31)$$

donde $W_i = 2\sqrt{V_i}$. Del lema de comparación se tiene $W_i(\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|) \leq W_i(\|\boldsymbol{\sigma}(0)\|) - \alpha t$. Por lo tanto, $\|\boldsymbol{\sigma}_i\| = 0$ en tiempo finito. Entonces, de la ec. (4.22) para un tiempo $t_R \leq W_i(0)/\alpha$ se tiene

$$\mathbf{e}(t) = e^{-\Lambda t} \mathbf{e}(0)$$

De lo anterior se concluye que los errores de posición y velocidad (4.15) convergen exponencialmente a cero. Por lo tanto, en base a la teoría de estabilidad de Lyapunov, se garantiza el seguimiento de trayectoria por parte del maestro y la sincronización del esclavo con el maestro.

4.5 | Simulación numérica

Para la validación de la sincronización de los sistemas maestro y esclavo, ecuación (3.30), se presenta la simulación del seguimiento a una trayectoria cíclica (circunferencia). El sistema maestro sigue esta trayectoria y el sistema esclavo sigue la posición del efector final del mismo; ambos sistemas con posiciones iniciales diferentes. La Fig. 4.3 muestra los sistemas maestro y esclavo, la trayectoria cíclica, la posición de reposo de los eslabones (líneas grises), la posición inicial de la trayectoria (líneas punteadas) y la posición final de los eslabones (líneas negras). Los eslabones del lado izquierdo son del maestro y los del lado derecho son del esclavo.

El seguimiento de la trayectoria se hace sin control de verticalidad de ambos sistemas y sin considerar fuerzas de contacto con alguna superficie. Para las simulaciones se utilizó la función ODE45 (Dorman-Prince) de Matlab con un paso de integración variable y tolerancia relativa de $1e-3$ y *Simulink*, con una duración de 15 segundos. A continuación, se presentan los parámetros físicos, valores de control y condiciones iniciales.

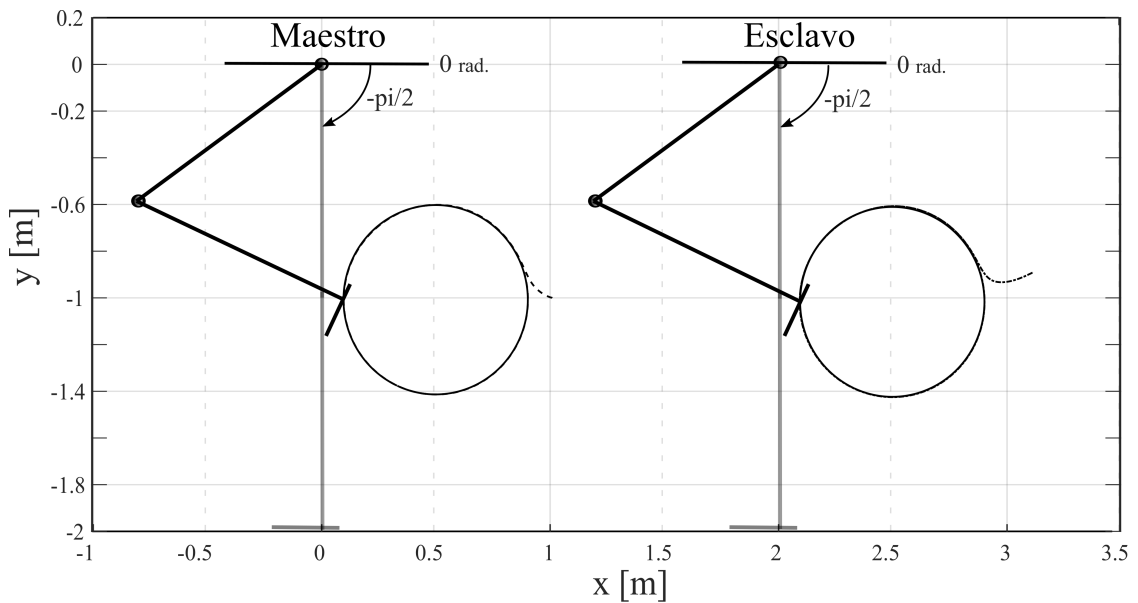


Figura 4.3: Seguimiento de la trayectoria circular del maestro (izquierda) y del esclavo (derecha).

Tabla 4.1: Valores de los parámetros utilizados

Variable	Valor [unidad]	Variable	Valor [unidad]
m_{m1}	1 [kg]	m_{s1}	1 1/5 [kg]
l_{m1}	1 [m]	l_{s1}	9/10 [m]
$l_{m(cl)}$	1/2 [m]	$l_{s(cl)}$	2/3 [m]
I_{m1}	1/12 [kg·m ²]	I_{s1}	0.081 [kg·m ²]
m_{me}	3 [kg]	m_{se}	3 1/4 [kg]
$l_{m(ce)}$	1 [m]	$l_{s(ce)}$	9/10 [m]
I_{me}	2/5 [kg·m ²]	I_{se}	13/30 [kg·m ²]
δ_{me}	0 [rads]	δ_{se}	0 [rads]
ρ_{m1}	-7/12	ρ_{s1}	-0.405
ρ_{m2}	9.81	ρ_{s2}	10.9

4.5.1 | Trayectoria deseada

Se eligió una trayectoria circular por ser predominantemente usada en aparatos de ejercicios terapéuticos. Aplicando la ecuación (4.32) con su centro en $x_c = 0.5$ mts., $y_c = -1.0$ mts. y radio $r = 0.4$ mts.

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{5}\pi t) \\ \text{sen}(\frac{1}{5}\pi t) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

4.5.1.1 | Cinemática directa e inversa

Con la cinemática es posible calcular la posición, velocidad y aceleración del extremo final del último eslabón, sin considerar las fuerzas y pares causantes del movimiento. Se establece la relación geométrica entre las uniones de los eslabones dentro del sistema y el marco de referencia. Si se conoce la longitud de los eslabones y el ángulo entre los mismos, con la *cinemática directa* es posible conocer la posición del extremo final en el plano cartesiano. Por otra parte, si se conocen las longitudes de los eslabones y la posición de la punta final, con la *cinemática inversa* es posible conocer el valor de los ángulos de las uniones de los eslabones. Para un sistema manipulador de dos eslabones en el plano, como el mostrado en la Fig. 4.4, las ecuaciones para la *cinemática directa* son:

$$x_m = l_{m1}\cos(q_{m1}) + l_{m2}\cos(q_{m1} + q_{m2}) \quad (4.33)$$

$$y_m = l_{m1}\text{sen}(q_{m1}) + l_{m2}\text{sen}(q_{m1} + q_{m2}) \quad (4.34)$$

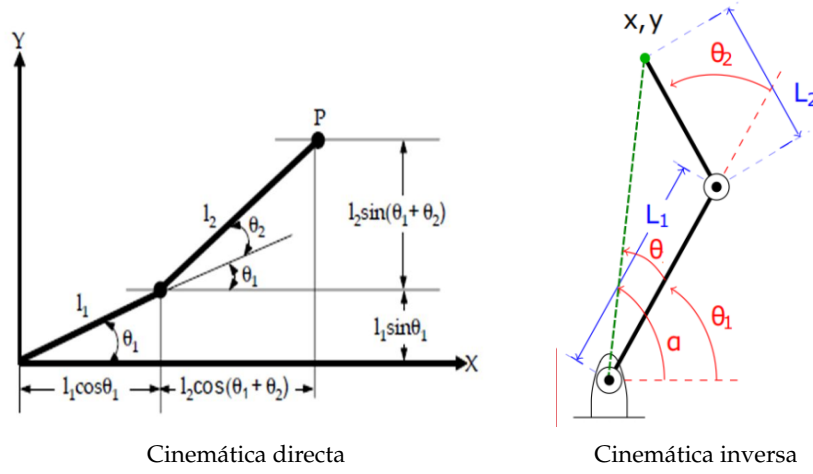


Figura 4.4: Soluciones geométricas para un robot planar con 2-DOF.

donde l_{m1} y l_{m2} son las longitudes del sistema manipulador, mientras que q_{m1} y q_{m2} son las posiciones angulares de las uniones.

Por otra parte, las ecuaciones de la *cinemática inversa* para determinar las posiciones angulares de las uniones, están definidas como sigue:

$$q_{m2} = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - D^2}}{D} \right) \quad (4.35)$$

$$q_{m1} = \tan^{-1} \left(\frac{y_m}{x_m} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{l_{m2} \sin(q_{m2})}{l_{m1} + l_{m2} \cos(q_{m2})} \right) \quad (4.36)$$

donde

$$D = \frac{x_m^2 + y_m^2 - l_{m1}^2 - l_{m2}^2}{2l_{m1}l_{m2}}$$

De esta manera, es posible que una posición deseada \mathbf{x}_d puede expresarse usando las ecuaciones (4.33)-(4.34) o (4.35)-(4.36).

4.5.2 | Valores de los parámetros de control

Los valores usados en la simulación para los sistemas maestro y esclavo se muestran en la Tabla 4.1, de donde se obtienen los valores para el vector \mathbf{p}_i (4.13), empleado en el cálculo de $\bar{\mathbf{k}}_i$ en (4.28) que, a su vez se requiere para la entrada de control $\boldsymbol{\tau}_i$ en (4.20).

Para las simulaciones del control por modos deslizantes, se eligen los valores de $\Lambda = [5 \ 0; \ 0 \ 5]^T$, mismos que son aplicados en la ecuación (4.11). Las condiciones iniciales utilizadas son: para el maestro $\mathbf{q}_m = [-\pi/2, \ \pi]$ y para el esclavo $\mathbf{q}_s = [-\pi/2 +$

$0.1, \pi]$, los valores del vector \bar{p}_i , ecuación (4.13), son: $\bar{p}_m = |[6.7 \ 3.4 \ 3.0 \ 0.0]^T| + 0.50$ y $\bar{p}_s = |[6.2 \ 3.06 \ 2.6 \ 0.0]^T| + 0.50$, mientras que $\zeta = 0.1$. Finalmente, se emplea una función de saturación, en lugar de una función de conmutación, con $\Delta = 0.05$.

4.5.3 | Programa en Simulink

La Fig. 4.5 muestra el programa realizado en *Simulink*. Los archivos de los programas indicados en los bloques de la Fig. 4.5 se encuentran en el Apéndice C.

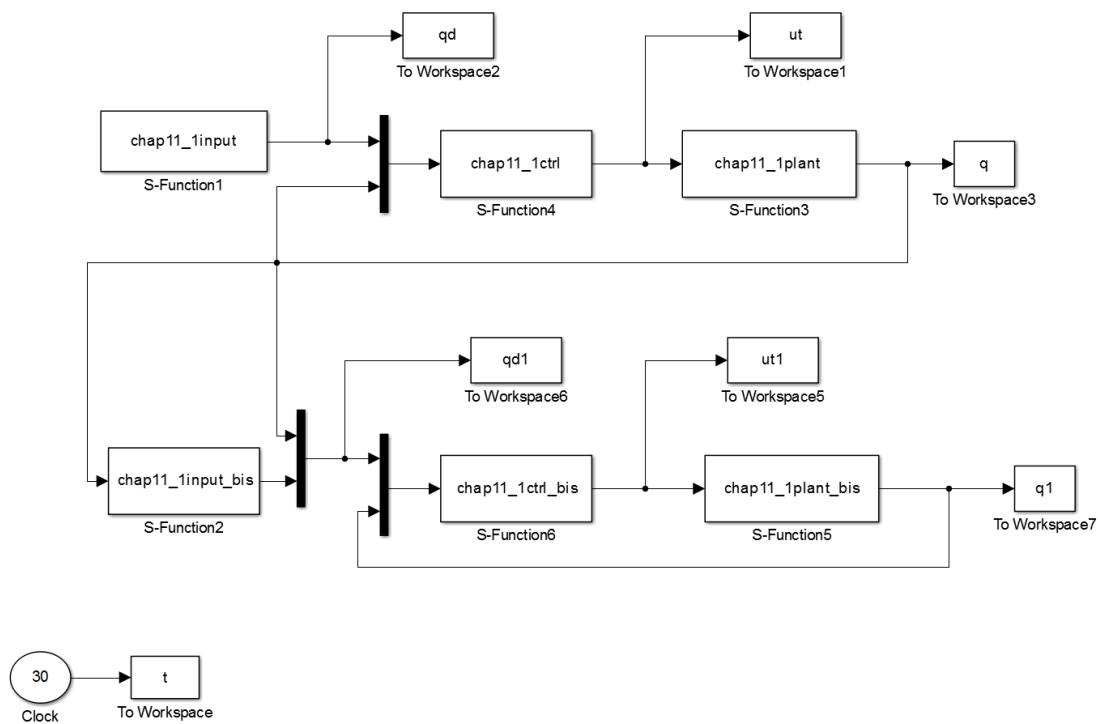
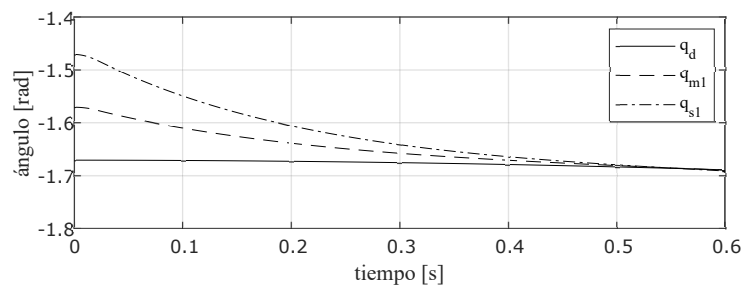
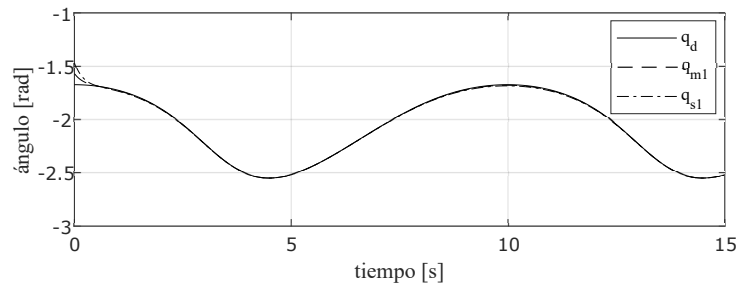


Figura 4.5: Seguimiento de la trayectoria circular del maestro (izquierda) y del esclavo (derecha).

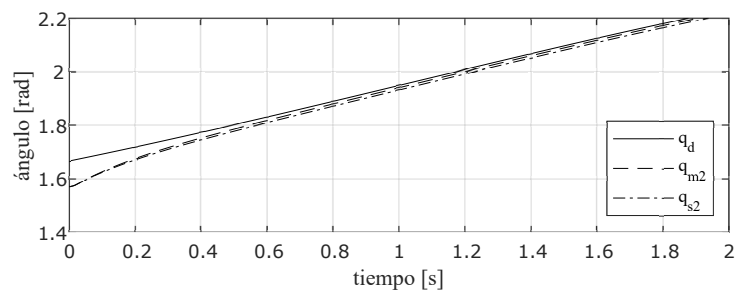
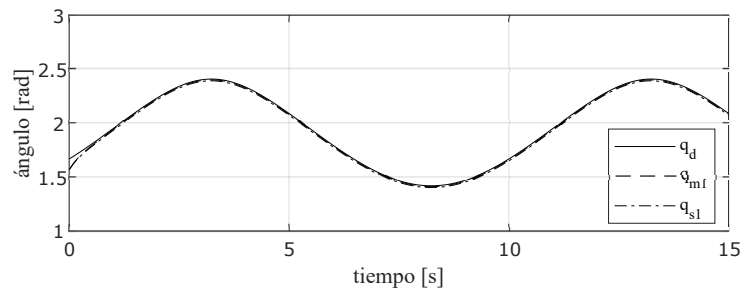
4.6 | Resultados

La sincronización maestro-esclavo establecida en (4.8) para dos sistemas dinámicos descritos por (3.30), con posiciones iniciales diferentes y aplicando la ley de control (4.20) para una trayectoria circular (4.32), se describe a continuación. Aplicando la *cinemática inversa* mediante (4.35) y (4.36) se obtienen q_{d1} y q_{d2} . Lo anterior da como resultado que (4.20) provoque que la posición angular del primer eslabón del maestro q_{m1} se mueva de -1.571 rads. a -1.671 rads, mientras que la posición angular del primer eslabón del esclavo q_{s1} se mueva de -1.471 rads. a -1.671 rads. La posición angular del segundo eslabón del maestro q_{m2} y la del esclavo q_{s2} se mueven de 1.571 rads. a 1.791 rads. Las gráficas de la Fig. 4.6 muestran estos valores y los tiempos en que las posiciones angulares tardan en llegar a la trayectoria deseada.

Finalmente, la Fig. 4.7(a) muestra la entrada de control τ_i aplicada a q_{i1} y q_{i2} requerida para seguir la trayectoria deseada y sincronizar el sistema esclavo con el sistema maestro. La Fig. 4.7(b) muestra una ampliación de estas gráficas con el fin de apreciar los efectos de conmutación *chattering* inherentes al método de control por modos deslizantes. Por último, la gráfica de la Fig. 4.8 muestra que el error de sincronización está por debajo del 1% de la amplitud de la señal involucrada x_d en 0.5 segs. para el primer eslabón del esclavo y en aprox. 0.25 segs. para el segundo eslabón del esclavo. Estos resultados muestran que la sincronización se realiza en un tiempo menor que la reportada en (Bondhus et al., 2005; Cicek et al., 2015; Rodriguez-Angeles and Nijmeijer, 2004).



(a)



(b)

Figura 4.6: Posición de las articulaciones para el seguimiento de la trayectoria deseada (4.32): a) Gráfica superior q_{d1} , q_{m1} y q_{s1} con $0 < t \leq 15$, gráfica inferior con $0 < t \leq 0.6$, b) Gráfica superior q_{d2} , q_{m2} y q_{s2} con $0 < t \leq 15$, gráfica inferior con $0 < t \leq 2.0$.

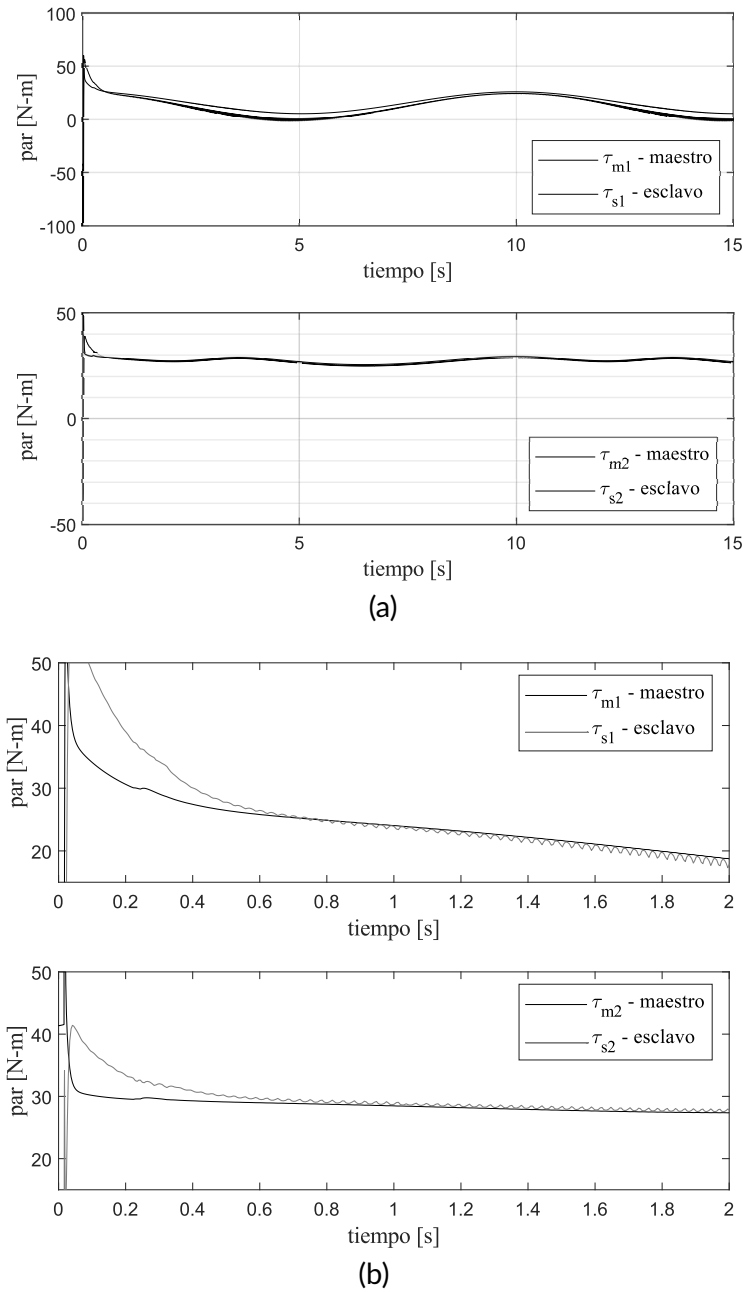


Figura 4.7: Valores de la entrada de control (4.20) para el seguimiento de la trayectoria deseada. a) Gráfica superior τ_{m1} y τ_{s1} , gráfica inferior τ_{m2} y τ_{s2} , ambas con $0 < t \leq 15$ b) Gráfica superior τ_{m1} y τ_{s1} , gráfica inferior τ_{m2} y τ_{s2} , ambas con $0 < t \leq 2$.

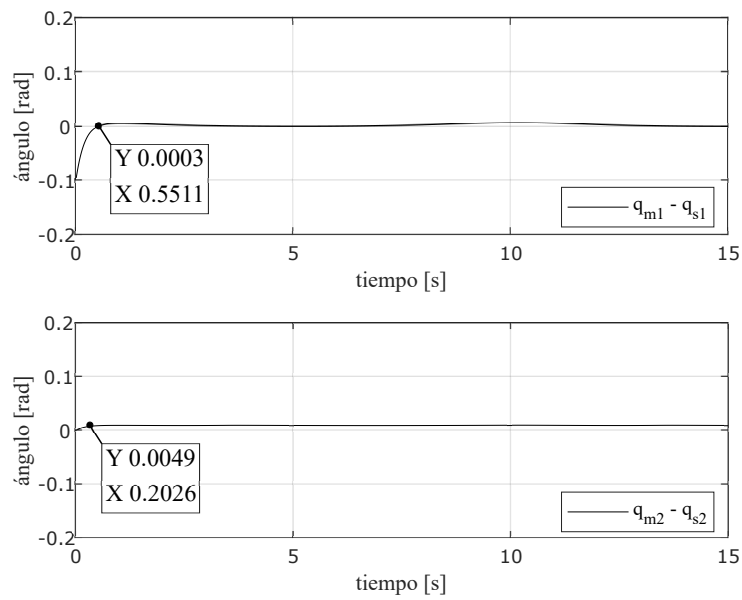


Figura 4.8: Gráfica superior e_s (2.1) del eslabón 1, gráfica inferior e_s (2.1) del eslabón 2.

Implementación

Hoy en día, los microcontroladores y los procesadores de señal digital (DSP) están muy extendidos en muchos sistemas robóticos. La principal ventaja de los microcontroladores es que muchas interfaces están integradas en el mismo "chip" con el procesador y, en consecuencia, el costo de "hardware" de la placa de control es bajo. El poder de los "DSP" está en sus capacidades computacionales: realizar cálculos matemáticos, que son necesarios en algoritmos de control, en poco tiempo. Afortunadamente, existe una tendencia en la industria de los microcontroladores a unir las ventajas de estas dos arquitecturas; hacer arquitecturas de controlador con alta capacidad computacional y al mismo tiempo equipadas con interfaces útiles (Bräunl, 2006).

Por el lado de la programación, y para dar cumplimiento a cabalidad con la aplicación del usuario, se prefiere un sistema operativo de tiempo real. Un sistema operativo en tiempo real, proporciona mecanismos y servicios eficientes para llevar a cabo una programación calendarizadas de tareas, políticas de gestión de recursos, manejo determinístico del tiempo y consumo de recursos predecible y responsable.

5.1 | Estrategia de control

La estrategia de control se basa en el espacio de unión en el que cada grado de libertad del sistema, se considera como un sistema de entrada única y salida única. Es decir, la posición de la pierna robótica podría realizarse controlando el movimiento de cada una de las uniones. El diagrama de bloques de control se muestra en la Fig. 5.1. La estrategia de control que se describe a continuación. La trayectoria de movimiento para el efector final de la pierna robótica se planifica en el espacio de trabajo y se aplica la cinemática inversa para moverse en el espacio de unión. Por último, y para controlar

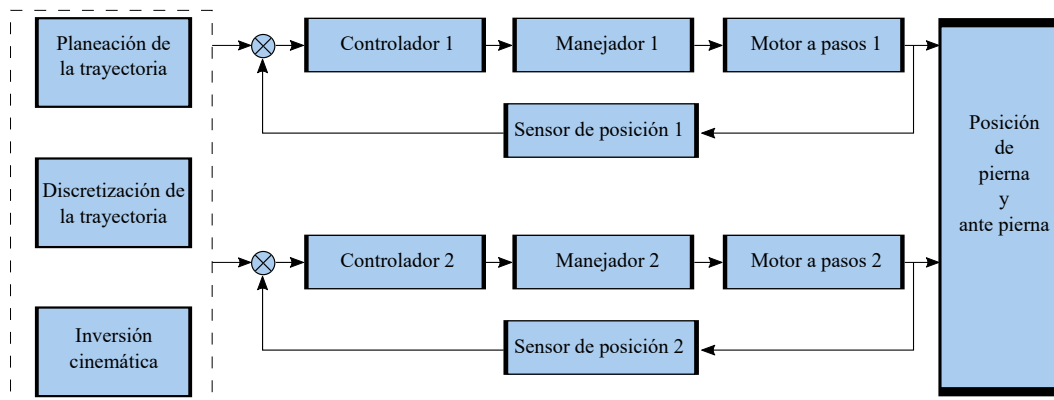


Figura 5.1: Diagrama a bloques de los espacios de unión.

estos movimientos con sistemas digitales, la trayectoria del efector final de la pierna robótica es discretizado.

El método de discretización es el siguiente:

- Basado en la trayectoria de planificación del efector final de la pierna robótica y la cinemática inversa del sistema con las ecuaciones (4.35)-(4.36), el algoritmo calcula la trayectoria de planificación de movimiento de cada motor.
- La posición inicial para la trayectoria de planificación de movimiento de cada motor se considera como 0, y luego se calcula la trayectoria de control de movimiento.
- Según el algoritmo de control, la trayectoria de control de movimiento de cada grado de libertad se discretiza y se obtiene la posición y velocidad deseadas para la instrucción del micro-controlador.

Finalmente, de acuerdo con el algoritmo de control, la instrucción se establece en el micro-controlador correspondiente y se realiza la trayectoria de planificación de movimiento de cada motor.

5.1.1 | Perfil sinusoidal

Para lograr la respuesta de posición deseada, muchos documentos han propuesto varios tipos de perfiles de velocidad. En cada uno de ellos, presentan regiones de aceleración, velocidad constante y desaceleración.

Estas soluciones se pueden resumir de la siguiente manera:

- **Ventana de velocidad *constante*.**- Las rampas de aceleración y desaceleración son muy cortas por lo que funciona relativamente bien para mecanismos robustos con poca de masa y con suficiente potencia para generar las aceleraciones.
- **Perfil de velocidad *trapezoidal*.**- El perfil de velocidad trapezoidal tiene una aceleración, velocidad y desaceleración constantes, por lo que las ventanas de aceleraciones de este perfil son rectangulares. Y el perfil del *tirón*, que se obtiene al derivar el perfil de aceleración, es en forma de impulsos (4 en total), alineados con los bordes de las ventanas de aceleración, Fig. 5.2 gráficas en color rojo.
- **Perfil de velocidad de *curva S*.**- En el perfil de la curva *S*, el *tirón* es un valor constante, lo que difunde el cambio en la aceleración durante un período de tiempo de la aceleración. Sin embargo en la gráfica del *jounce*, derivada del *tirón*, se presentan nuevamente impulsos como la del *tirón* del perfil de velocidad trapezoidal, Fig. 5.2 gráficas en azul y ocre.
- **Perfil de velocidad de curva *Sinusoidal*.**- En el perfil Sinusoidal la gráfica del *tirón* la conforman dos funciones coseno en la rampa de aceleración y desaceleración respectivamente. Por lo que, la gráfica del *jounce* las conforman un par de funciones seno. Las gráficas de aceleración y velocidad se obtienen al integrar la gráfica del *tirón*, Fig. 5.2 gráficas en negro.

Parte del trabajo presentado en (Arévalo, 2001) es el desarrollo de un procedimiento que generaliza el tratamiento de esta familia de perfiles. La generalización incluye los casos especiales de "viaje corto" y permite "seleccionar" el perfil particular por medio de un único parámetro (denotado como γ en las figuras de ejemplo). Al variar continuamente γ en un rango ($0.0 < \gamma < 1.0$), el perfil evoluciona respectivamente de "impulsos del tiro" (es decir, el perfil de velocidad trapezoidal, que aparece como un caso particular y extremo de la familia de funciones de la curva *S*), a su máxima "suavidad", esto es, el perfil de aceleración triangular y la minimización de los valores de *tiro* y pico de potencia.

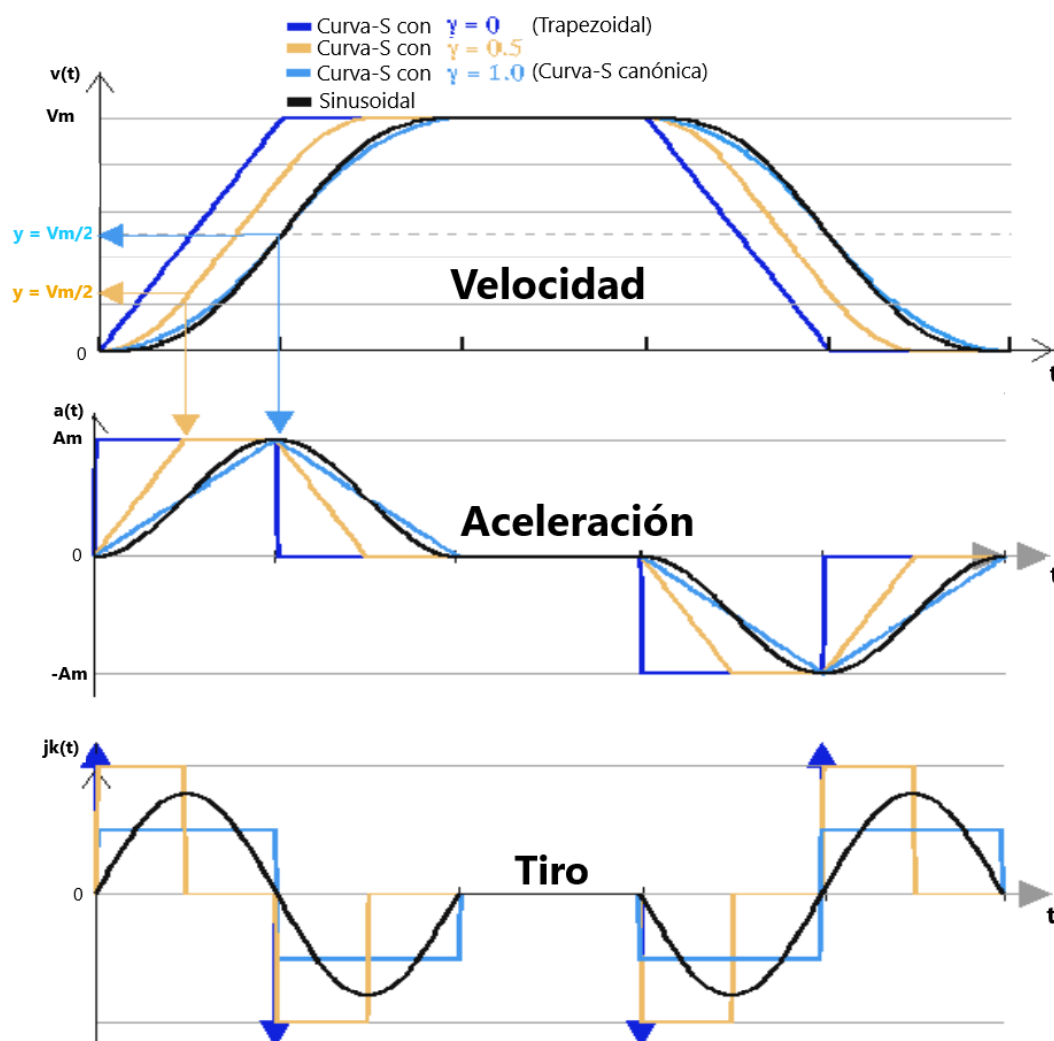


Figura 5.2: Perfiles de velocidad, aceleración y *tiro*. Tomada de (Arévalo, 2001).

5.1.2 | Perfiles de velocidad para el motor a pasos

Para la implementación del perfil de velocidad Sinusoidal, se desarrolló un banco de pruebas mostrado en la Fig. 5.3. Comprende de un motor de corriente directa a pasos, un manejador de energía para el motor y un módulo de control *SensorTag* de la compañía *Texas Instrument*. El motor a pasos y el manejador son de la compañía *Oriental Motor*, sus hojas de especificaciones se encuentran en el apéndice E.2. Y las características módulo *SensorTag* se describen en la Secc. 5.2.

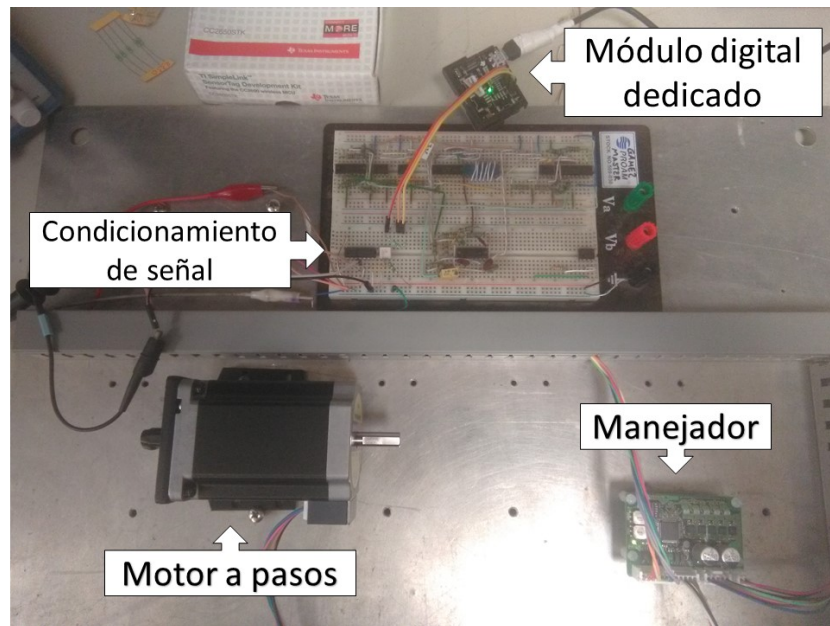


Figura 5.3: Banco de prueba.

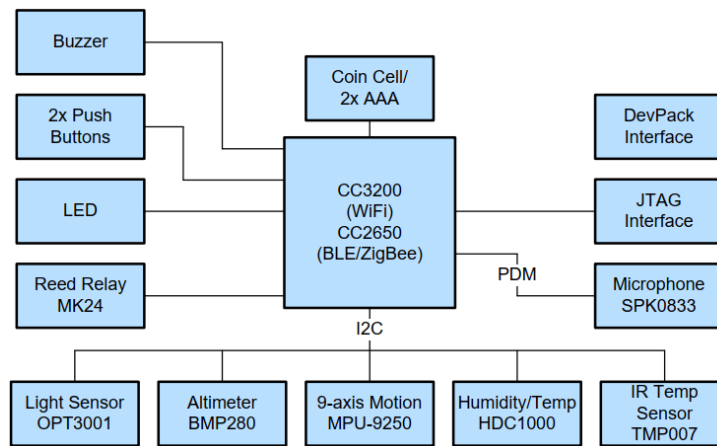
La entrada y salida analógica del módulo *SensorTag* son de 0-3.3 voltios y el manejador trabaja con 0-5 voltios, por lo que se diseñó un circuito de acondicionamiento de estos niveles de voltaje. La frecuencia de muestreo del sistema se establece en 10 kHz. Se programó el microcontrolador en lenguaje C utilizando la interfaz de desarrollo *Code Composer Studio* versión 9.0.0.

La programación del perfil sinusoidal se hizo en lenguaje C, el cual se encuentra en el Apéndice D.

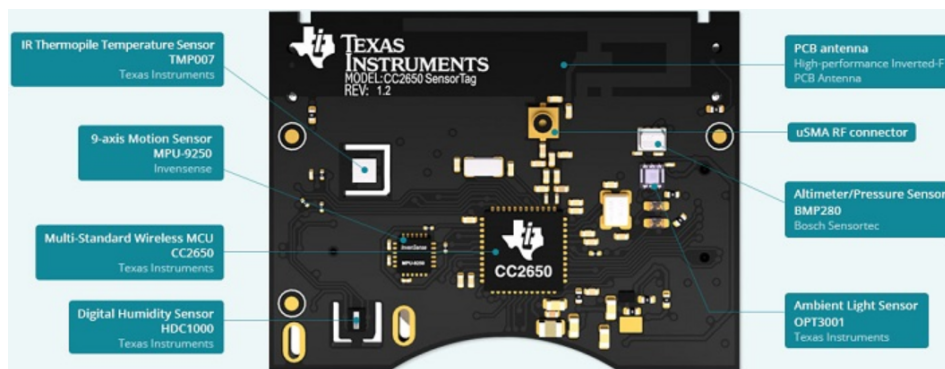
5.2 | SensorTag CC2650

El módulo *SensorTag CC2650* de *Texas Instruments* soporta múltiples estándares de comunicación inalámbrica tales como: Bluetooth® Smart, ZigBee®, así como IPv6 con tecnología de bajo consumo y red de área personal (6LoWPAN). Su microcontrolador es un ARM de consumo extremadamente bajo y alto rendimiento. Es posible usar módulos *DevPacks* para extender la funcionalidad del *SensorTag* para dar cumplimiento las necesidades del usuario. El emulador *Debug DevPack* junto con la interfaz de desarrollo *Composer Studio* conforman un sistema completo de desarrollo. La Fig. 5.4 muestra un diagrama a bloques y la tarjeta impresa con los componentes.

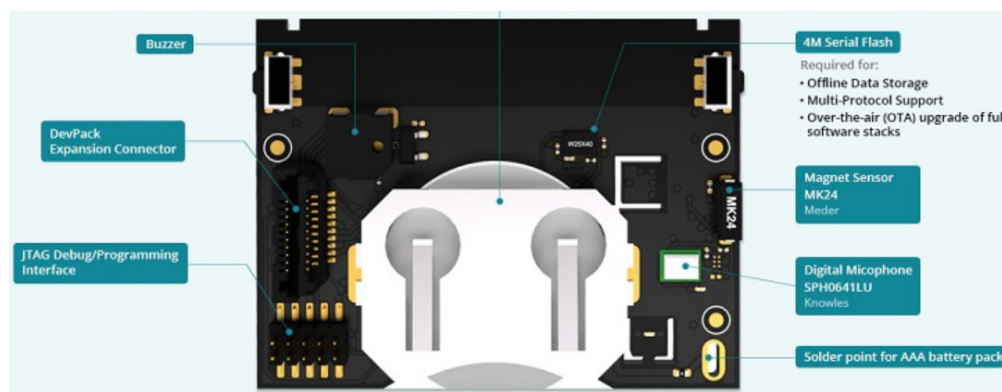
El módulo "*SimpleLink*" CC2650, fabricado por la compañía "*Texas Instrument*", es un



(a)



(b)



(c)

Figura 5.4: Valores de la entrada de control (4.20) para el seguimiento de la trayectoria deseada. a) Diagrama a bloques. b) Circuito impreso cara superior. c) Circuito impreso cara inferior.

módulo con microcontrolador con capacidades inalámbricas ("*Wireless Microcontroller Unit*"). Está dirigido a aplicaciones de control remoto inalámbrica multiplataforma tales como los protocolos: Bluetooth, ZigBee[®], 6LoWPAN y ZigBee RF4CE.

Es miembro de la familia CC26xx de dispositivos de RF de 2,4 GHz de bajo costo y de ultrabaja potencia. El consumo de corriente de RF y MCU de muy baja potencia activa y el modo de bajo consumo de energía proporcionan una excelente vida útil de la batería por lo que permite la operación con baterías de celda pequeña.

Este dispositivo CC2650 contiene un procesador ARM Cortex-M3 de 32-bits que funciona a 48-MHz como procesador principal así como conjunto de características periféricas que incluye un controlador de sensor de potencia ultrabajo. Este controlador de sensor es ideal para conectar sensores externos y para recopilar datos analógicos y digitales de forma autónoma mientras el resto del sistema está en modo de suspensión. Por lo que, el dispositivo CC2650 es ideal para aplicaciones dentro de una amplia gama de productos industriales y médicos, entre otros. El controlador "*Bluetooth Low Energy*" y el "*IEEE 802.15.4 MAC*" están integrados en la "*ROM*" y se ejecutan en parte en un procesador ARM Cortex-M0 por separado. Esta arquitectura mejora el rendimiento general del sistema y el consumo de energía por lo que libera memoria flash para la aplicación.

5.2.1 | Unidad de procesamiento central

Es el proceso principal del sistema que se ejecuta en la aplicación del usuario, junto con la pila de protocolos de alto nivel (para una serie de configuraciones compatibles) y, finalmente, algunas funciones MAC de alto nivel para algunos protocolos. La CPU del sistema ejecuta el código desde la ROM de arranque y el sistema flash. La *Unidad de Procesamiento Central* inalámbrica SimpleLink CC2650 contiene un CPU ARM Cortex-M3 (CM3) de 32 bits, que ejecuta la aplicación y las capas más altas de los protocolos. El procesador Cortex-M3 proporciona una plataforma de alto rendimiento y bajo costo que cumple con los requisitos del sistema de implementación mínima de memoria y bajo consumo de energía, al tiempo que ofrece un alto rendimiento computacional y una rápida respuesta del sistema a las interrupciones. Algunas de estas características son:

- Arquitectura ARM Cortex-M3 de 32 bits optimizada para aplicaciones integradas de pequeño tamaño
- Excelente rendimiento de procesamiento combinado con manejo rápido de interrupciones

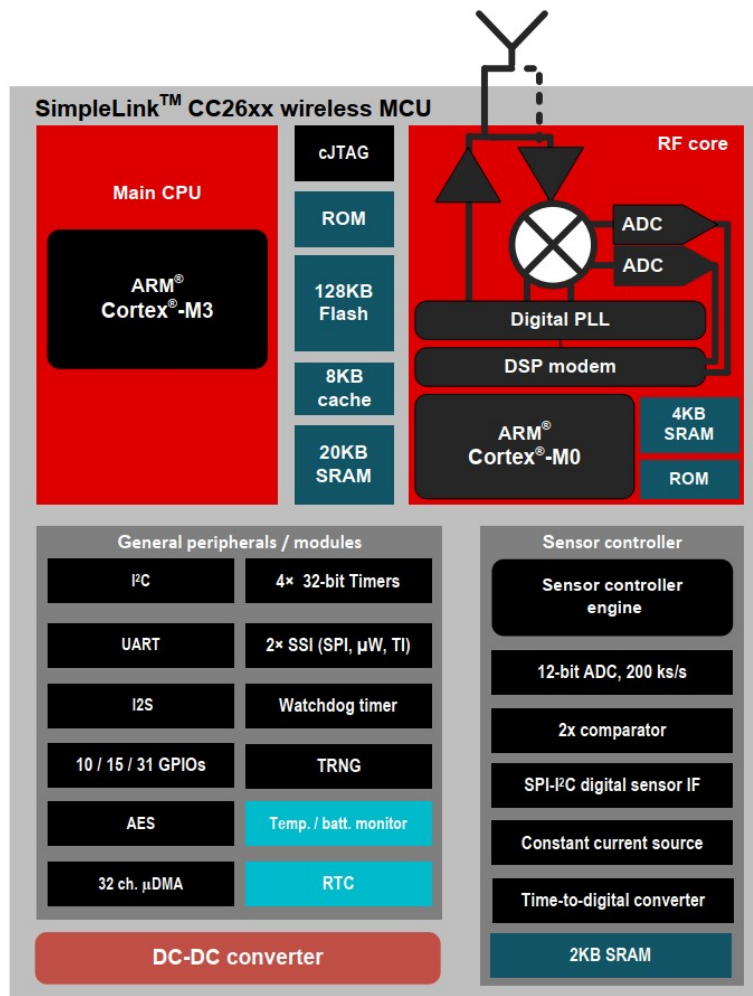


Figura 5.5: Diagrama a bloques de la unidad de microcontrolador CC26x0

- El conjunto de instrucciones ARM Thumb[®]-2 mixto de 16 y 32 bits ofrece el alto rendimiento esperado de un disco de 32 bits Núcleo ARM en un tamaño de memoria compacto generalmente asociado con dispositivos de 8 y 16 bits, generalmente en rango de unos pocos kilobytes de memoria para aplicaciones de clase de microcontrolador.
- La ejecución rápida del código permite un tener un reloj del procesador más lento o tener un mayor tiempo del modo de suspensión
- Arquitectura de "Harvard" caracterizada por ducto de datos separados para instrucción y datos.

- Procesador eficiente, núcleo y sistema.
- Aritmética de saturación para procesamiento de señales.
- Manejo determinístico de interrupciones de alto rendimiento para aplicaciones de tiempo real.
- Depuración mejorada del sistema con amplias capacidades de punto de interrupción y rastreo de código.
- El rastreo por una línea de comunicación en serie reduce la cantidad de pines necesarios para la depuración y el rastreo.
- Optimizado para uso de memoria flash de un solo ciclo.
- Consumo de energía ultrabaja con modos de suspensión integrados.
- Opera con un reloj de 48-MHz.

5.2.2 | Núcleo de RF

El núcleo de radio frecuencia *RF* contiene un procesador ARM Cortex-M0 que interconecta los circuitos analógicos de *RF* y de banda base, maneja los datos hacia y desde el lado del sistema y ensambla los *bits* de información en una estructura de paquetes dada. El núcleo *RF* ofrece una interfaz de aplicación (*API*) de alto nivel basada en mandos para la *CPU* del sistema (ARM[®] Cortex[®]-M3). El núcleo de *RF* puede manejar de forma autónoma los aspectos críticos de tiempo de los protocolos de radio (802.15.4 RF4CE y ZigBee[®], Bluetooth[®] Low Energy, etc.), por lo que quita carga al *CPU* del sistema permitiendo tener más recursos para la aplicación del usuario. El núcleo *RF* tiene un bloque *SRAM* de 4-KB dedicado y se ejecuta casi por completo desde una *ROM* separada (Tex, 2017).

5.3 | Descripción del *Software* para tiempo real

Esta sección describe el *SYS/BIOS*, el cual es el *núcleo* del sistema operativo de tiempo real de *Texas Instruments* (TI-RTOS). *SYS/BIOS* otorga a los desarrolladores de aplicaciones basados en dispositivos de *Texas Instruments* la implementación de programación en tiempo real. La cual se lleva a cabo a través de una pequeña biblioteca de *firmware*

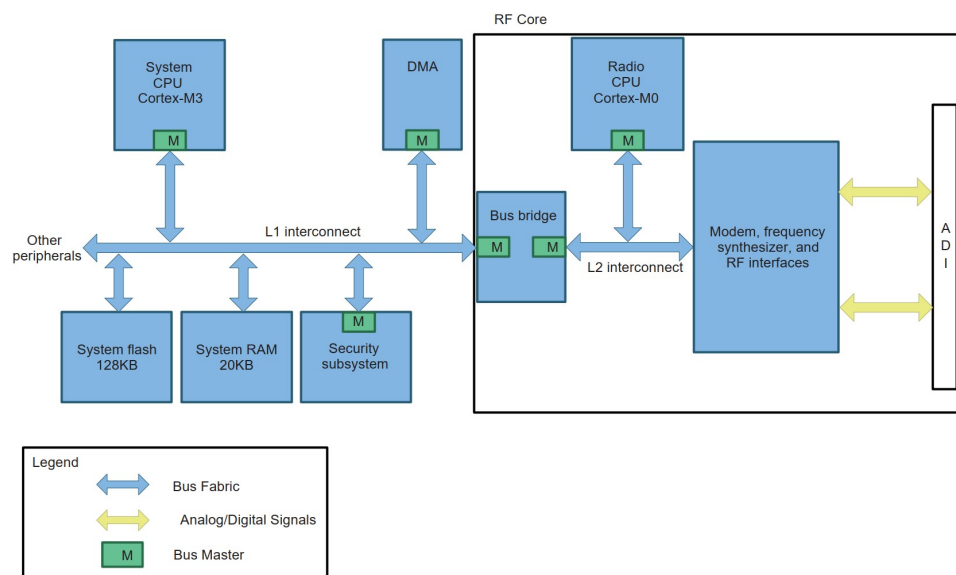


Figura 5.6: Esquema simplificado del núcleo de RF y sus dependencias externas.

en tiempo real, así como herramientas para su rastreo y el análisis. *SYS/BIOS* proporciona herramientas multihilo con atención preferencial, capa de abstracción del *hardware*, análisis en tiempo real y herramientas de configuración. *SYS/BIOS* ayuda a minimizar los requisitos de memoria y *CPU* objeto. *SYS/BIOS* proporciona los siguientes beneficios:

- Todos los objetos *SYS/BIOS* se pueden configurar de forma estática o dinámica.
- Para minimizar el tamaño de la memoria, las *API* están modularizadas de tal manera que solo las *API* que utilizan el programa deben vincularse al programa ejecutable.
- La depuración de errores es configurable y puede eliminarse por completo de las versiones de código de producción para maximizar el rendimiento y minimizar el tamaño de la memoria.
- Casi todas las llamadas al sistema son determinísticas para permitir que las aplicaciones cumplan de manera confiable con los plazos en tiempo real.
- El modelo de hilo proporciona diferentes tipos de hilo para una variedad de situaciones. Se admiten interrupciones de *hardware*, interrupciones de *software*, tareas, funciones inactivas y funciones periódicas. Puede controlar las prioridades y las características de bloqueo de los hilos a través de su elección en los tipos de hilos.

- Se proporcionan estructuras para soportar la comunicación y sincronización entre hilos. Estos incluyen semáforos, buzones, eventos, compuertas y mensajes de longitud variable.
- Servicios de administración de memoria dinámica que ofrecen asignación de bloques de tamaño variable y de tamaño fijo.
- Un despachador de interrupciones maneja operaciones de guardar/restaurar en un contexto de bajo nivel lo que permite que las rutinas de servicio de interrupción se escriban completamente en C.
- Los servicios del sistema permiten la activación/desactivación de interrupciones y la conexión de vectores de interrupción, incluida la multiplexación de vectores de interrupción en múltiples fuentes.

5.3.1 | Módulos de *Threading*

Las aplicaciones en tiempo real realizan una serie de funciones, aparentemente no relacionadas, al mismo tiempo. Responden a eventos externos tales como la disponibilidad de datos o la presencia de señales de control. Es tan importante la realización de estas funciones como el tiempo en que se realizan.

Estas funciones son llamadas *threads*. Una función *thread* es un único punto de control que activa una llamada a función o un servicio a interrupción (ISR).

SYS/BIOS permite estructurar las aplicaciones como una colección de *threads*, cada uno de los cuales lleva a cabo una función modularizada. Los programas *Multithreaded* se ejecutan en un único procesador cambiando la priorización de *threads* de alta-prioridad a preferencia de baja-prioridad y a través de varios tipos de interacción entre *threads*, tales como: el bloqueo, la comunicación y la sincronización.

Los programas de aplicación en tiempo real son organizados de manera modular en lugar de un solo ciclo de lazo centralizado. Lo que los hacen fáciles de diseñar, implementar y mantener. *SYS/BIOS* proporciona para varios tipos de hilos de programa con diferentes prioridades. Cada tipo de *thread* tiene diferentes características de ejecución y preferencia. Los tipos de *thread* (de mayor a menor prioridad) son:

- Interrupciones de *hardware* (Hwi), que incluye funciones de temporización.
- Interrupciones de *software* (Swi), que incluye funciones de reloj.
- Tareas (Task).

- *Thread* de fondo (Idle).

Las interrupciones de hardware (Hwis) manejan el procesamiento crítico que la aplicación debe realizar en respuesta a eventos asíncronos externos. *SYS/BIOS* a través de módulos de *hardware* maneja las interrupciones de *hardware*. En un sistema *embedded* típico, las interrupciones de *hardware* son activadas por periféricos en el dispositivo o por dispositivos externos al procesador. En ambos casos, la interrupción hace que el procesador apunte al vector de la interrupción (ISR).

Las interrupciones de *software* se modelan después de la rutina de servicio de interrupción (ISR) de *hardware*. El módulo *Swi* en el *SYS/BIOS* proporciona una capacidad de interrupción de *software*. Las interrupciones de *software* se activan mediante programación, a través de una llamada a una (API) *SYS/BIOS* como *Swi_post* (). Las interrupciones de *software* tienen prioridades que son más altas que las tareas pero más bajas que las interrupciones de *hardware*. Los subprocesos (*Swi*) son adecuados para manejar tareas de aplicación que ocurren a velocidades más lentas o están sujetas a plazos de tiempo real menos severos que los de (*Hwi*).

Los objetos de tarea del *SYS/BIOS* son hilos administrados por el módulo tarea (*Task*). Las tareas tienen mayor prioridad que *Idle Loop* y menor prioridad que las interrupciones de *hardware* y *software*. El módulo de tareas proporciona un conjunto de funciones que manipulan estos objetos. Acceden a los objetos de la tarea a través de controladores de tipo *Task_Handle*.

El lazo (*Idle*) es el hilo de fondo del *SYS/BIOS*, que se ejecuta continuamente cuando no se está ejecutando ningún (*Hwi*), (*Swi*) o (*Task*). Cualquier otro hilo puede ejecutarse antes del lazo (*Idle*) en cualquier momento, ya que el lazo (*Idle*) es el hilo con menor prioridad en una aplicación *SYS/BIOS*. Las funciones del lazo (*Idle*) se ejecutan solo cuando no se están ejecutando cualquiera de los *threads* (*Hwis*), (*Swis*) o (*Tasks*).

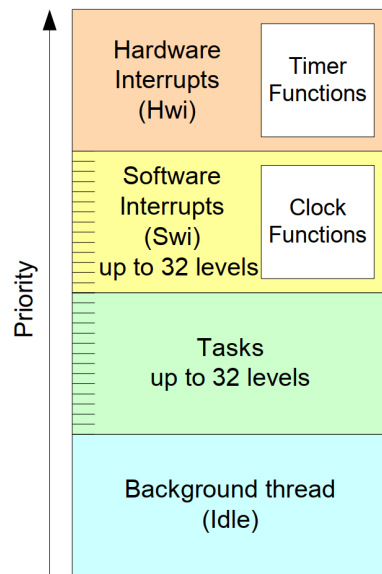


Figura 5.7: Esquema de prioridades de *Threads*.

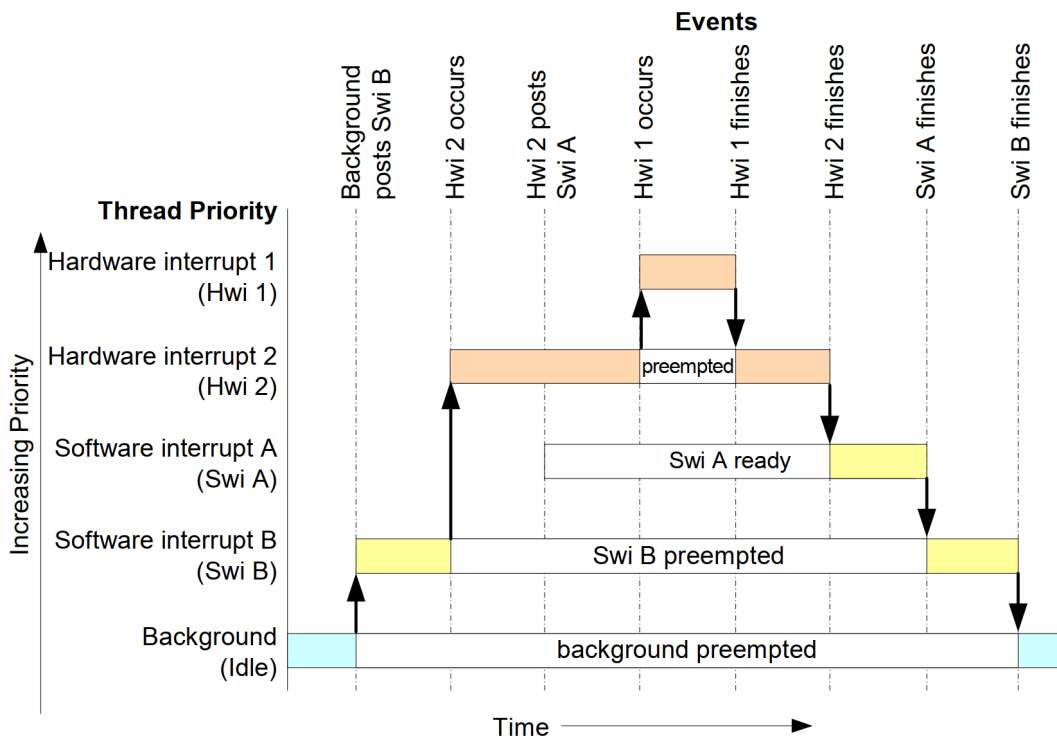


Figura 5.8: Escenario de preferencias (prioridades).

5.3.2 | Módulos de sincronización

SYS/BIOS proporciona soporte para varios tipos de módulos que pueden usarse para sincronizar el acceso a recursos compartidos. Los módulos de sincronización son:

- Semáforos (Semaphores).
- Eventos (Event).
- Compuertas (Gates).
- Buzón de correo (Mailboxes).
- Colas (Queues).

SYS/BIOS proporciona un conjunto fundamental de funciones para la sincronización y comunicación entre tareas basadas en semáforos. Los semáforos a menudo se usan para coordinar el acceso a un recurso compartido entre un conjunto de tareas que lo requieren. El módulo (Semaphore) proporciona funciones que manipulan los objetos de semáforo a los que se accede a través de controladores de tipo *Semaphore_Handle*. Los objetos de semáforo se pueden declarar como semáforos contadores o binarios ya sea simples primero en entrar primero en salir (FIFO) o prioritarios. Los semáforos se pueden usar para la sincronización de tareas y de exclusión mutua.

Los eventos (Events) proporcionan un medio para comunicarse y sincronizar hilos. Son similares a los semáforos, excepto que le permiten especificar múltiples condiciones "eventos" que deben ocurrir antes de que regrese el hilo de espera. Una instancia de evento se usa con llamadas *pend* y *post*, al igual que para un semáforo. Sin embargo, las llamadas *Event_pend()* además especifican qué evento esperar y las llamadas *Event_post()* especifican qué eventos se están publicando.

Las puertas (Gates) son dispositivos para evitar accesos concurrentes a regiones críticas de código. Las diversas opciones de (Gate) difieren en cómo intentan bloquear las regiones críticas. Las puertas generalmente funcionan al deshabilitar algún nivel de preferencia como deshabilitar el cambio de tareas o incluso las interrupciones de *hardware*, o al usar un semáforo binario.

Los buzones de correo (Mailboxes) se pueden usar para pasar *buffers* de una tarea a otra en el mismo proceso. El módulo (Mailbox) copia el búfer en búferes internos de tamaño fijo. El tamaño y el número de estos búferes se especifican cuando se crea (o construye) una instancia de (Mailbox). Se realiza una copia cuando se envía un búfer a través de *Mailbox_post()*. Se produce otra copia cuando el búfer se recupera a través de

un `Mailbox_pend()`. Una instancia de buzón puede ser utilizada por múltiples "lectores" y "escritores".

El módulo de cola (`Queue`) proporciona soporte para crear listas de objetos. Una cola se implementa como una lista doblemente vinculada, con lo que los elementos se puedan insertar o eliminar de cualquier parte de la lista, de tal manera que las colas no tengan un tamaño máximo.

Conclusiones

6.1 | Observaciones finales

Esta tesis proporcionó un estudio teórico y de simulación sobre la locomoción y sincronización de dos sistemas mecánicos de 2-DOF. Es un estudio basado en simulación de planificación de trayectoria y control para robots con patas en un modelo del sistema mecánico.

La sincronización de la trayectoria del movimiento de un sistema con otro sistema similar es un desafío por sí mismo. La principal razón es la diferencia en la dinámica propia de los sistemas inmiscuidos, así como las perturbaciones externas. Además, la complejidad del problema de planificación de trayectoria aumenta al hacer contacto con el piso. El problema de perturbaciones externas es resuelto en buena parte con la utilización de control por modos deslizantes. Sin embargo, un inconveniente inherente de este método es la oscilación, aunque puede reducirse empleando los métodos de: x e y . La ventaja, sin embargo, es la rápida convergencia a trayectoria proyectada.

Finalmente, en simulaciones, se investigó la viabilidad de la sincronización entre los sistemas de piernas robóticas con diferentes propiedades para una trayectoria circular. La posibilidad de cambiar entre trayectorias con diferentes propiedades aumenta la destreza de los robots, ya que produce trayectorias de transición sin un esfuerzo de planificación adicional; este campo de investigación se considera bastante joven.

El uso de prótesis electrónicas ayuda, mediante la adaptación y rehabilitación de un elemento protésico personalizado anatómicamente según estandarizaciones y normativas, a mejorar significativamente la calidad de vida de las personas. Con ello, se brinda la oportunidad de seguir realizando sus tareas cotidianas. Las prótesis electrónicas basadas en teorías y criterios experimentales son creadas con veracidad y utilidad para la población con discapacidad, enfocadas a mejorar y cambiar un estilo de vida

que fué afectado al momento de realizar una amputación, ya sea en una intervención quirúrgica o sufrida por causa de un accidente. Teniendo en cuenta que cada prótesis varía sus especificaciones para cumplir exitosamente con la necesidad de una determinada persona, la prótesis debe considerar una gran variedad de elementos y aspectos en la creación de la misma para un control óptimo y un mejor dominio en su proceso de rehabilitación.

Se realizó la simulación numérica de la sincronización de dos sistemas mediante control por modos deslizantes utilizando el enfoque de sincronización maestro-esclavo. La sincronización se obtiene acoplando estos sistemas con una ley de control para el seguimiento de trayectorias. Se logró la sincronización, aún con posiciones iniciales diferentes, en un tiempo de 0.596 segundos. Las gráficas comprueban el seguimiento del esclavo al maestro obteniendo el error tiende a cero con el método de control por modos deslizantes. Por lo que se demuestra la viabilidad de sincronizar un sistema mecánico que emule una prótesis de pierna con otro sistema similar como lo sería una pierna natural, i.e. la pierna de una persona, donde la pierna natural es representada por el sistema maestro y el sistema robótico de 2-DOF representa un sistema esclavo. La etapa de rehabilitación y los ejercicios requeridos para una persona con amputación de pierna están fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, creemos que es la base para aquellos que consideren implementar esta propuesta, es por ello que se optó por utilizar una trayectoria circular que es utilizada predominantemente en aparatos de ejercicio terapéuticos.

6.2 | Perspectivas

El objetivo a largo plazo en la investigación de robots con patas es lograr un rendimiento comparable al de los seres humanos, esto incluye destreza y velocidad, pero también robustez a perturbaciones externas.

Una línea de investigación es el control de modos deslizantes para la trayectoria y el diseño del controlador. El control por modos deslizantes (SMC) permite una rápida convergencia a la trayectoria planificada. Sin embargo, a menudo no se encuentra la solución numérica debido a valores iniciales inadecuados, una convergencia demasiado lenta o una elección inadecuada del método numérico. Se presume que la planificación de la trayectoria del robot con patas se beneficia decisivamente de los avances de algoritmos numéricos de sincronización.

Los avances en la teoría de sincronización se consideran beneficiosos para la mejora hacia la locomoción diestra. El punto crucial en el control del robot con patas es evi-

tar que el robot se caiga. Por lo tanto, el control de estabilidad no debe limitarse a la corrección de pequeñas perturbaciones donde la corrección no hace necesario volver a planificar la serie de situaciones de contacto. A veces, la caída solo se puede evitar si el movimiento planificado se descarta por un tiempo y se realiza una corrección diferente del movimiento planificado. Una correspondencia en la locomoción humana son pasos estabilizadores hacia adelante o hacia atrás o la aceleración de caminar después de un empujón desde atrás. Los antecedentes del sistema híbrido para estas tareas de control son, por ejemplo, el análisis de accesibilidad mejorado, la investigación sobre regiones de atracción, la estabilidad de las leyes de control de conmutación, etc.

Con respecto a la implementación experimental de los conceptos de control, serán necesarios modelos aún más detallados. El marco de modelado descrito presenta una base para la extensión a 3 o más grados de libertad y/o a tres dimensiones, así como la consideración de situaciones de contacto al piso. La validez de los supuestos sobre la ley de colisión debe verificarse en estudios experimentales, y las leyes de colisión posiblemente tengan que modificarse. La implementación experimental es esencial para la evaluación de los resultados teóricos. Surgirán nuevas preguntas en el diseño de *hardware* y *software*, como la elección apropiada de componentes y sensores que permitan la aplicación de los resultados teóricos. No se descarta que también la validación experimental sugerirá modificaciones en el modelado diseñado y la implementación del control.

Mientras más robots con patas entren en entornos humanos, más será necesario que los robots sean capaces de interactuar adecuadamente con el entorno. En un nivel básico, la auto-adaptación del robot a condiciones no esperadas, ya que se desea la textura del suelo o su propia masa variable. En escenarios avanzados, se requiere que el robot reaccione adecuadamente en la interacción robot-humano. Estas áreas de investigación conducirán mucho más allá de la planificación y el control del movimiento basado en modelos dinámicos como se presentó en el Cap. 3.

6.3 | Trabajo a futuro

Implementar el trabajo desarrollado en esta tesis en una prótesis de pierna como la desarrollada en (Mai and Commuri, 2016), descrito a continuación. Aplicando la dinámica de *Euler-Lagrange* de un sistema de pierna con una amputación transtibial en el plano sagital como el que se muestra en la Fig. 6.1, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{H}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + \mathbf{G}(\theta) + \tau_d = \tau \quad (6.1)$$

donde:

- θ (rad) - la variable de unión dependiente del tiempo.
- τ (Nm) - el par de entrada.
- τ_d (Nm) - el par de perturbación.
- $\theta(t) = [\dot{\theta}_a(t) \ \theta_k(t) \ \theta_h(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ - representa la posición angular de la articulación de la prótesis del tobillo, la articulación biológica de la rodilla y la articulación biológica de la cadera.
- $\tau(t) = [\tau_a + \tau_{aG} \ \tau_k \ \tau_h]^T$ - Es el torque de entrada al modelo del sistema, donde:
 - $\tau_a(t)$ - es el torque externo generado por el actuador en la articulación protésica del tobillo.
 - $\tau_{aG}(t)$ - es el torque de reacción del suelo y es causado por la interacción entre la pierna con la prótesis y el suelo durante la marcha.
 - $\tau_k(t)$ - describe los torques internos generados por la rodilla biológica.
 - $\tau_h(t)$ - describe los torques internos generados por la cadera biológica.
- $\tau_d(t) = [\tau_{ad} \ \tau_{kd} \ \tau_{hd}]^T$ - representa el torque de perturbación generado por el movimiento de la cabeza, el brazo y el tronco (HAT), es decir, la parte superior del cuerpo, durante la marcha.

Es importante señalar que se asume que el control total es realizado por la persona en la articulación biológica de la rodilla y la articulación biológica de la cadera. Por lo que, el torque de la rodilla $\tau_k(t)$ y el torque de la cadera $\tau_h(t)$ son generados deliberadamente por el usuario para compensar los efectos de acoplamiento de la articulación del tobillo, el efecto de la reacción al suelo y el par de perturbación del HAT .

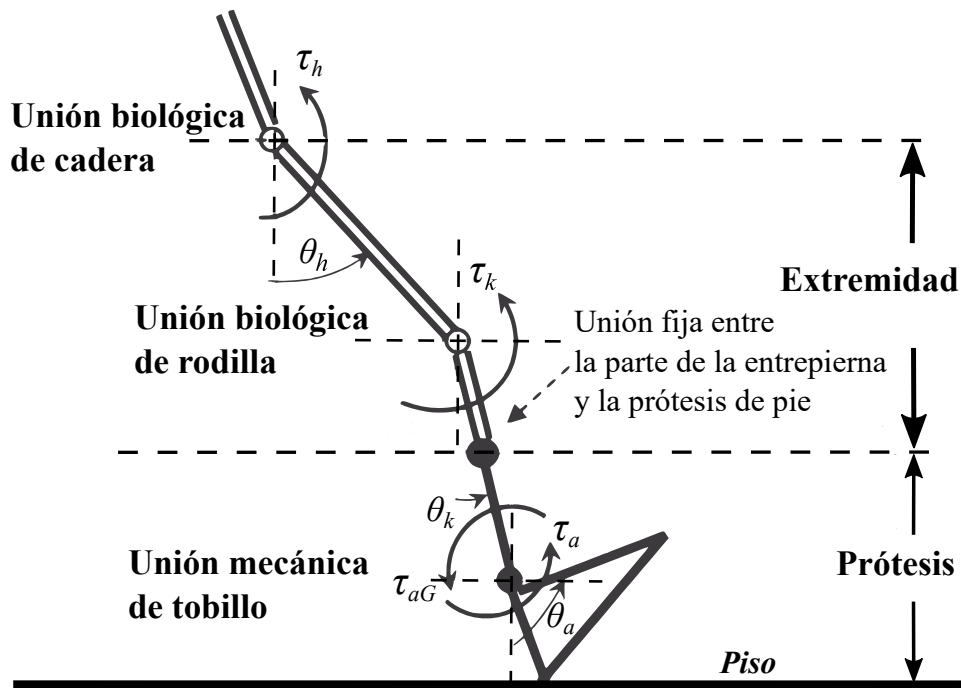


Figura 6.1: Diagrama esquemático de una pierna con una amputación transtibial y su prótesis. Tomada de (Mai and Commuri, 2016).

Sensores y actuadores

Los actuadores de esta prótesis son los motores a pasos y son indicados con las variables τ_h , τ_k y τ_a de la Fig. 6.1. El algoritmo de perfiles sinusoidales, descritos en la Sec. 5.1.1, fueron implementados con los módulos de *Texas Instruments*, los cuales son el perfil de movimiento de los motores. Sin embargo, los sensores de posición correspondientes a las variables θ_h , θ_k y θ_a no han sido implementados.

6.4 | Producto derivado del trabajo doctoral

Artículo sometido para su publicación en la revista *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, titulado *Master-slave synchronization of a planar 2-DOF model of robotic leg*.

Número de manuscrito: ZUSC-D-20-00589

Estado a la fecha: Bajo revisión.

Discapacidad poblacional

Entidad federativa	Tipo de limitación			
	Caminar, subir o bajar usando sus piernas	Ver (aunque use lentes)	Mover o usar sus brazos o manos	Aprender, recordar o concentrarse
Estados Unidos Mexicanos	37.7	55.8	12.4	19.3
Aguascalientes	44.1	48.5	16.2	18.5
Baja California	36.4	52.1	11.9	21.8
Baja California Sur	30.7	59.9	11.2	17.8
Campeche	45.3	40.9	15.2	23.6
Chiapas	33.3	51.4	12.1	19.7
Chihuahua	32.2	56.8	10.4	24.4
Coahuila de Zaragoza	41.9	55.1	11.0	10.8
Colima	39.1	53.8	12.1	21.7
Ciudad de México	45.3	50.0	14.2	16.1
Durango	36.9	54.5	13.4	18.9
Guanajuato	36.4	56.7	10.9	16.3
Guerrero	39.9	59.3	12.1	16.5
Hidalgo	34.8	59.1	12.6	19.8
Jalisco	36.9	49.7	10.9	25.8
México	34.1	61.5	12.5	19.2
Michoacán de Ocampo	34.9	60.7	12.3	18.0
Morelos	41.0	51.0	11.5	19.8
Nayarit	32.6	62.0	11.4	19.7
Nuevo León	38.6	54.8	13.2	14.7
Oaxaca	44.2	55.4	11.4	16.8
Puebla	40.6	50.8	12.6	20.6
Querétaro	35.7	59.0	13.0	21.9
Quintana Roo	33.9	55.3	10.6	20.2
San Luis Potosí	38.1	51.9	14.6	29.4
Sinaloa	37.7	48.3	14.1	23.0
Sonora	40.5	48.4	12.3	17.9
Tabasco	39.0	55.3	12.5	17.2
Tamaulipas	36.7	59.2	11.4	12.4
Tlaxcala	32.0	63.0	11.1	23.7
Veracruz de Ignacio de la Llave	36.6	63.0	12.5	18.9
Yucatán	41.2	48.5	13.5	16.7
Zacatecas	38.2	55.8	13.6	22.4

Figura A.1: Porcentaje de población con limitación, por entidad federativa según tipo de limitación 2014. 1ra. parte.

Entidad federativa	Tipo de limitación			
	Escuchar (aunque use aparato auditivo)	Bañarse, vestirse o comer	Hablar o comunicarse	Problemas emocionales o mentales
Estados Unidos Mexicanos	17.3	2.3	4.0	6.1
Aguascalientes	15.2	2.6	4.3	8.0
Baja California	13.7	1.4	3.6	7.2
Baja California Sur	13.1	2.5	4.7	5.1
Campeche	14.5	2.2	4.8	7.9
Chiapas	20.5	2.7	4.9	5.0
Chihuahua	15.9	2.1	4.7	8.0
Coahuila de Zaragoza	16.4	1.4	3.1	4.5
Colima	18.2	2.2	3.1	5.2
Ciudad de México	20.4	3.4	2.9	4.8
Durango	16.6	3.4	4.3	6.4
Guanajuato	14.5	2.3	3.6	4.4
Guerrero	16.2	1.5	3.6	3.7
Hidalgo	17.2	2.3	5.0	4.2
Jalisco	18.9	1.8	4.5	8.5
México	16.7	2.1	4.2	9.6
Michoacán de Ocampo	16.7	2.4	4.4	6.4
Morelos	18.6	1.8	4.3	5.0
Nayarit	15.7	2.3	4.8	5.7
Nuevo León	17.0	2.6	3.8	4.9
Oaxaca	17.3	1.6	3.9	4.4
Puebla	20.7	2.1	4.7	5.2
Querétaro	16.6	2.4	4.0	7.0
Quintana Roo	14.2	2.1	6.6	6.8
San Luis Potosí	20.0	2.0	4.0	7.1
Sinaloa	17.1	3.1	4.3	4.7
Sonora	15.8	2.4	3.0	4.6
Tabasco	13.9	2.2	4.6	4.2
Tamaulipas	16.1	3.1	3.6	5.0
Tlaxcala	18.7	2.4	4.5	5.3
Veracruz de Ignacio de la Llave	17.9	2.1	2.5	3.5
Yucatán	16.8	2.9	4.8	5.7
Zacatecas	17.6	2.3	4.7	5.3

Nota: El porcentaje se calcula con respecto al total de personas con limitación en cada entidad federativa. La suma de los porcentajes es mayor que 100 porque una persona puede tener más de un tipo de limitación.
Fuente: INEGI. Encuesta Nacional de la Dinámica Demográfica 2014. Base de datos.

Figura A.2: Porcentaje de población con limitación, por entidad federativa según tipo de limitación 2014. 2da. parte y última.

Cinemática diferencial

La cinemática diferencial describe la relación analítica entre el movimiento de la articulación y el movimiento del efector final en términos de velocidades.

Para cada configuración $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ del robot, la matriz jacobiana representa la relación de los desplazamientos de las articulaciones con el desplazamiento de la posición del robot en el espacio de tareas. Para obtener estos movimientos, debemos ajustar adecuadamente los movimientos de las variables conjuntas, expresadas por las velocidades $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$. Por lo tanto, necesitamos encontrar la relación diferencial de \mathbf{q} y \mathbf{p} . Esto se llama cinemática diferencial directa y se expresa mediante, (G.Tzafestas, 2014, Cap. 2):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad \text{o} \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.1})$$

donde,

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Aquí, la matriz jacobiana \mathbf{J} se obtiene diferenciando la Ecs. 4.33 y 4.34, es decir:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) - l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \text{cos}(\theta_1) + l_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Asumiendo que $m = n$ (\mathbf{J} cuadrada) y que la matriz jacobiana inversa \mathbf{J}^{-1} existe (es decir, su determinante no es cero: $\det \mathbf{J} \neq 0$), de la ecuación. (2.6) obtenemos, (G.Tzafestas, 2014, Cap. 10):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1} &= \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{l_1 l_2 \sin(\theta_2)} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto, la ecuación cinemática diferencial inversa de un robot planar de 2-DOF es:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{p}} \quad (\text{B.5})$$

Esta es la ecuación de cinemática diferencial inversa, (G.Tzafestas, 2014, Cap. 2).

Programas en Matlab

C.1 | Maestro

```
%% Nombre del programa: chap11_1input.m

function [sys,x0,str,ts] = input(t,x,u,flag)
    switch flag,
        case 0,
            [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
        case 3,
            sys = mdlOutputs(t,x,u);
        case {2,4,9}
            sys = [];
        otherwise
            error(['Unhandled flag='], num2str(flag));
    end

function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumOutputs = 6; sizes.NumInputs = 0;
    sizes.DirFeedthrough = 0; sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = []; str = []; ts = [];

    function sys = mdlOutputs(t,x,u)

    xc = 0.5; yc = -1; r = 0.4; %parametros del circulo:
    l1 = 1; l2 = 1;
    T1 = 10; T2 = 10; f1 = 1/T1; f2 = 1/T2;
    x = xc + r*cos(2*pi*f1*t); %ecuacion circulo
```

```

y = yc + r*sin(2*pi*f2*t);
%% posicion:
q2_d = acos( (x^2 + y^2 - l1^2 - l2^2) / (2*l1*l2) );
q1_d = atan(y/x) - atan( (l2*sin(q2_d)) / (l1+l2*cos(q2_d)) );

sys(1) = q1_d; sys(2) = dq1_d; sys(3) = ddq1_d;
sys(4) = q2_d; sys(5) = dq2_d; sys(6) = ddq2_d;

```

```

%%% Nombre del programa: chap11_1ctrl.m

function [sys,x0,str,ts] = control_strategy(t, x, u, flag)
    switch flag,
        case 0,
            [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
        case 3,
            sys = mdlOutputs(t,x,u);
        case {2,4,9}
            sys=[];
        otherwise
            error(['Unhandled flag=',num2str(flag)]);
    end

function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumOutputs = 4; sizes.NumInputs = 10;
    sizes.DirFeedthrough = 1; sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = []; str = []; ts = [];

function sys = mdlOutputs(t, x, u)
q1_d = u(1); dq1_d = u(2); ddq1_d = u(3); q2_d = u(4); dq2_d = u(5); ddq2_d = u
    (6);
q1 = u(7); dq1 = u(8); q2 = u(9); dq2 = u(10);

dq = [dq1; dq2];

p = [ 6.7 3.4 3.0 0 ]; %Practical p
ep = [ 7.2 3.9 3.5 0.5 ]; % ep = abs(p) + 0.5

alfa_p = ep(1); beta_p = ep(2); epc_p = ep(3); eta_p = ep(4);

m1 = 1; l1 = 1; lc1 = 1/2; I1 = 1/12; g = 9.8;

```

```

e1 = m1*l1*lc1-I1-m1*l1^2; e2 = g/l1;

dq_d = [ dq1_d, dq2_d]'; ddq_d=[ddq1_d, ddq2_d]';

e = [ q1_d-q1, q2_d-q2]'; de = [dq1_d-dq1, dq2_d-dq2]';

H_p=[alfa_p+2*epc_p*cos(q2)+2*eta_p*sin(q2),beta_p+epc_p*cos(q2)+eta_p*sin(q2);
      beta_p+epc_p*cos(q2)+eta_p*sin(q2),beta_p];

C_p=[(-2*epc_p*sin(q2)+2*eta_p*cos(q2))*dq2,(-epc_p*sin(q2)+eta_p*cos(q2))*dq2;
      (epc_p*sin(q2)-eta_p*cos(q2))*dq1,0];

G_p=[epc_p*e2*cos(q1+q2)+eta_p*e2*sin(q1+q2)+(alfa_p-beta_p+e1)*e2*cos(q1);
      epc_p*e2*cos(q1+q2)+eta_p*e2*sin(q1+q2)];

Fai = 5*eye(2);
s = de+Fai*e;

delta = 0.05; kk = 1/delta;
if abs(s)>delta
    sats=sign(s);
else
    sats=kk*s;
end

dqr = dq_d+Fai*e; ddqr = ddq_d+Fai*de;

Y=[ddqr(1)+e2*cos(q1), ddqr(2)-e2*cos(q1), 2*cos(q2)*ddqr(1)+cos(q2)*ddqr(2)-2*
    sin(q2)*dq2*dqr(1)-sin(q2)*dq2*dqr(2)+e2*cos(q1+q2), 2*sin(q2)*ddqr(1)+sin(
    q2)*ddqr(2)+2*cos(q2)*dq2*dqr(1)+cos(q2)*dq2*dqr(2)+e2*sin(q1+q2);
    0, ddqr(1)+ddqr(2), cos(q2)*ddqr(1)+sin(q2)*dq1*dqr(1)+e2*cos(q1+q2), sin(
    q2)*ddqr(1)-cos(q2)*dq1*dqr(1)+e2*sin(q1+q2)];
Y_max = abs(Y)+0.10;

M = 2;
if M == 1
    ep_up = abs(p-ep)+0.50; %Upper p-ep
    k = Y_max*ep_up';
    % tols = [sign(s(1)) 0;0 sign(s(2))]*k+s;
    tols = [sats(1) 0; 0 sats(2)]*k+s;
    tol = H_p*ddqr + C_p*dqr + G_p + tols;
elseif M == 2 %(3-107)

```

```

    p_up = abs(p)+0.50; %Upper p value
    k_up = Y_max*p_up';
% tol = [sign(s(1)) 0;0 sign(s(2))]*k_up+s;
    tol = [sats(1) 0; 0 sats(2)]*k_up+s;
end

sys(1) = tol(1); sys(2) = tol(2); sys(3) = q1_d; sys(4) = q2_d;

```

```

%%% Nombre del programa: chap11_1plant.m
function [sys,x0,str,ts] = s_function(t, x, u, flag)
    switch flag,
    case 0,
        [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
    case 1,
        sys = mdlDerivatives(t,x,u);
    case 3,
        sys = mdlOutputs(t,x,u);
    case { 2, 4, 9 }
        sys = [];
    otherwise
        error(['Unhandled flag=',num2str(flag)]);
    end

function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumContStates = 4; sizes.NumDiscStates = 0;
    sizes.NumOutputs = 4; sizes.NumInputs = 4; sizes.DirFeedthrough = 0;
    sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = [ -pi/2, 0, pi/2, 0 ]; str = []; ts = [];

function sys = mdlDerivatives(t, x, u)

tol = [ u(1); u(2) ];

q1 = x(1); dq1 = x(2); q2 = x(3); dq2 = x(4);

m1=1; l1=1; lc1=1/2; I1=1/12; g=9.8;
e1 = m1*l1*lc1-I1-m1*l1^2;
e2 = g/l1;

Ie=2/5; me=3; lce=1;

```

```

a1 = I1 + (m1)*(lc1)^2 + Ie + (me)*(lce)^2 + (me)*(l1)^2;
be = Ie + (me)*(lce)^2;
ep = (me)*(l1)*(lce)*(cos(0));
et = (me)*(l1)*(lce)*(sin(0));

p = [a1 be ep et];

alfa = p(1); beta = p(2); epc = p(3); eta = p(4);

H = [alfa+2*epc*cos(q2)+2*eta*sin(q2), beta+epc*cos(q2)+eta*sin(q2);
      beta+epc*cos(q2)+eta*sin(q2), beta];

C = [(-2*epc*sin(q2)+2*eta*cos(q2))*dq2, (-epc*sin(q2)+eta*cos(q2))*dq2;
      (epc*sin(q2)-eta*cos(q2))*dq1, 0];

G = [epc*e2*cos(q1+q2)+eta*e2*sin(q1+q2)+(alfa-beta+e1)*e2*cos(q1);
      epc*e2*cos(q1+q2)+eta*e2*sin(q1+q2)];

S = inv(H)*(tol-C*[dq1;dq2]-G);

sys(1) = x(2); sys(2) = S(1); sys(3) = x(4); sys(4) = S(2);

function sys = mdlOutputs(t, x, u)
sys(1) = x(1); sys(2) = x(2); sys(3) = x(3); sys(4) = x(4);

```

C.2 | Esclavo

```

%%% Nombre del programa: chap11_1input_bis.m
function [sys,x0,str,ts] = input(t,x,u,flag)
    switch flag,
        case 0,
            [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
        case 3,
            sys = mdlOutputs(t,x,u);
        case {2,4,9}
            sys = [];
        otherwise
            error(['Unhandled flag = ', num2str(flag)]);
    end

```

```
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumOutputs = 2; sizes.NumInputs = 4;
    sizes.DirFeedthrough = 0; sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = []; str = []; ts = [];

function sys = mdlOutputs(t,x,u)

q1_d = u(1); dq1_d = u(2); q2_d = u(3); dq2_d = u(4);
ddq1_d = 0; ddq2_d = 0;

sys(1) = ddq1_d; sys(2) = ddq2_d;
```

```
%%% Nombre del programa: chap11_1ctrl_bis.m
function [sys,x0,str,ts] = control_strategy(t, x, u, flag)
    switch flag,
        case 0,
            [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
        case 3,
            sys = mdlOutputs(t,x,u);
        case {2,4,9}
            sys=[];
        otherwise
            error(['Unhandled flag= ', num2str(flag)]);
    end

function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumOutputs = 2; sizes.NumInputs = 10; %8;
    sizes.DirFeedthrough = 1; sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = []; str = []; ts = [];

function sys = mdlOutputs(t, x, u)
q1_d = u(1); dq1_d = u(2); ddq1_d = u(5);
q2_d = u(3); dq2_d = u(4); ddq2_d = u(6);
q1 = u(7); dq1 = u(8); q2 = u(9); dq2 = u(10);

dq = [dq1; dq2];

p = [ 6.5 3.2 2.6 0 ]; %Practical p\
ep = [ 7 3.7 3.1 0.5 ]; % ep = abs(p) + 0.5
```

```

alfa_p = ep(1); beta_p = ep(2); epc_p = ep(3); eta_p = ep(4);

m1 = 1; l1 = 1; lc1 = 1/2; I1 = 1/12; g = 9.8;
e1 = m1*l1*lc1-I1-m1*l1^2; e2 = g/l1;

dq_d = [ dq1_d, dq2_d]'; ddq_d=[ddq1_d, ddq2_d]';

e = [ q1_d-q1, q2_d-q2]'; de=[dq1_d-dq1, dq2_d-dq2]';

H_p=[alfa_p+2*epc_p*cos(q2)+2*eta_p*sin(q2),beta_p+epc_p*cos(q2)+eta_p*sin(q2);
      beta_p+epc_p*cos(q2)+eta_p*sin(q2),beta_p];

C_p=[(-2*epc_p*sin(q2)+2*eta_p*cos(q2))*dq2,(-epc_p*sin(q2)+eta_p*cos(q2))*dq2;
      (epc_p*sin(q2)-eta_p*cos(q2))*dq1,0];
G_p=[epc_p*e2*cos(q1+q2)+eta_p*e2*sin(q1+q2)+(alfa_p-beta_p+e1)*e2*cos(q1);
      epc_p*e2*cos(q1+q2)+eta_p*e2*sin(q1+q2)];

Fai = 5*eye(2);
s = de+Fai*e;

delta = 0.05; kk = 1/delta;
if abs(s)>delta
    sats=sign(s);
else
    sats=kk*s;
end

dqr = dq_d+Fai*e; ddqr = ddq_d+Fai*de;

Y=[ddqr(1)+e2*cos(q1),ddqr(2)-e2*cos(q1),2*cos(q2)*ddqr(1)+cos(q2)*ddqr(2)-2*sin
   (q2)*dq2*dqr(1)-sin(q2)*dq2*dqr(2)+e2*cos(q1+q2),2*sin(q2)*ddqr(1)+sin(q2)*
   ddqr(2)+2*cos(q2)*dq2*dqr(1)+cos(q2)*dq2*dqr(2)+e2*sin(q1+q2);
   0,ddqr(1)+ddqr(2),cos(q2)*ddqr(1)+sin(q2)*dq1*dqr(1)+e2*cos(q1+q2),sin(q2)*
   ddqr(1)-cos(q2)*dq1*dqr(1)+e2*sin(q1+q2)];
Y_max = abs(Y)+0.10;

M = 2;
if M == 1
    ep_up = abs(p-ep)+0.50;
    k = Y_max*ep_up';

```

```

% tols = [sign(s(1)) 0;0 sign(s(2))]*k+s;
    tols = [sats(1) 0; 0 sats(2)]*k+s;
    tol = H_p*ddqr + C_p*dqr + G_p + tols;
elseif M == 2 %(3-107)
    p_up = abs(p)+0.50; %Upper p value
    k_up = Y_max*p_up';
% tol = [sign(s(1)) 0;0 sign(s(2))]*k_up+s;
    tol = [sats(1) 0; 0 sats(2)]*k_up+s;
end

sys(1) = tol(1); sys(2) = tol(2);

```

```

%%% Nombre del programa: chap11_1plant_bis.m
function [sys,x0,str,ts] = s_function(t, x, u, flag)
    switch flag,
    case 0,
        [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes;
    case 1,
        sys = mdlDerivatives(t,x,u);
    case 3,
        sys = mdlOutputs(t,x,u);
    case { 2, 4, 9 }
        sys = [];
    otherwise
        error(['Unhandled flag=',num2str(flag)]);
    end

function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes
    sizes = simsizes; sizes.NumContStates = 4; sizes.NumDiscStates = 0;
    sizes.NumOutputs = 4; sizes.NumInputs = 2; sizes.DirFeedthrough = 0;
    sizes.NumSampleTimes = 0; sys = simsizes(sizes);
    x0 = [ -pi/2+.1, 0, pi/2, 0 ]; str = []; ts = [];

function sys = mdlDerivatives(t, x, u)
    tol = [ u(1); u(2) ];
    q1 = x(1); dq1 = x(2); q2 = x(3); dq2 = x(4);

m1=1.2; l1=9/10; lc1=0.6; I1=0.081; g=9.8;
e1 = m1*l1*lc1-I1-m1*l1^2; e2 = g/l1;
me=3.25; lce=9/10; Ie=13/30;

```

```

a1 = I1 + (m1)*(lc1)^2 + Ie + (me)*(lce)^2 + (me)*(l1)^2;
be = Ie + (me)*(lce)^2;
ep = (me)*(l1)*(lce)*(cos(0));
et = (me)*(l1)*(lce)*(sin(0));

p = [a1 be ep et];

alfa = p(1); beta = p(2); epc = p(3); eta = p(4)

H=[alfa+2*epc*cos(q2)+2*eta*sin(q2),beta+epc*cos(q2)+eta*sin(q2);
    beta+epc*cos(q2)+eta*sin(q2),beta];
C=[(-2*epc*sin(q2)+2*eta*cos(q2))*dq2,(-epc*sin(q2)+eta*cos(q2))*dq2;
    (epc*sin(q2)-eta*cos(q2))*dq1,0];
G=[epc*e2*cos(q1+q2)+eta*e2*sin(q1+q2)+(alfa-beta+e1)*e2*cos(q1);
    epc*e2*cos(q1+q2)+eta*e2*sin(q1+q2)];

S = inv(H)*(tol-C*[dq1;dq2]-G);

sys(1) = x(2); sys(2) = S(1); sys(3) = x(4); sys(4) = S(2);

function sys = mdlOutputs(t, x, u)
sys(1) = x(1); sys(2) = x(2); sys(3) = x(3); sys(4) = x(4);

```

Programa motor en código C

```
/*
 * Copyright (c) 2015-2016, Texas Instruments Incorporated
 * All rights reserved.
 */

/* XDCtools Header files */
#include <xdc/std.h>
#include <xdc/runtime/System.h>

/* BIOS Header files */
#include <ti/sysbios/BIOS.h>
#include <ti/sysbios/knl/Clock.h>
#include <ti/sysbios/knl/Task.h>

/* TI-RTOS Header files */
#include <ti/drivers/PIN.h>

/* Board Header files */
#include "Board.h"

#define TASKSTACKSIZE 512

Task_Struct taskOStruct;
Char taskOStack[TASKSTACKSIZE];

/* Pin driver handle */
//static PIN_Handle ledPinHandle;
PIN_Handle ledPinHandle;
```

```

static PIN_State ledPinState;

/*
 * Application LED pin configuration table:
 * - All LEDs board LEDs are off.
 */
PIN_Config ledPinTable[] = {
    Board_LED0 | PIN_GPIO_OUTPUT_EN | PIN_GPIO_LOW | PIN_PUSHPULL |
        PIN_DRVSTR_MAX, // Board_LED0 - led verde
    Board_LED1 | PIN_GPIO_OUTPUT_EN | PIN_GPIO_LOW | PIN_PUSHPULL |
        PIN_DRVSTR_MAX, // Board_LED1 - led rojo
    PIN_TERMINATE
};

/*
 * ===== heartBeatFxn =====
 * Toggle the Board_LED0. The Task_sleep is determined by arg0 which
 * is configured for the heartBeat Task instance.
 */
Void heartBeatFxn(UArg arg0, UArg arg1)
{
    while (1) {
        Task_sleep((UInt)arg0);
        //PIN_setOutputValue(ledPinHandle, Board_LED0, !PIN_getOutputValue(
            Board_LED0));
    }
}

/*
 * ===== main =====
 */
int main(void)
{
    Task_Params taskParams;
    CONFIG_PROT apConf;

    /* Call board init functions */
    Board_initGeneral();

    /* Valores de prueba */
    apConf.Ref_Angular = 395; /*20;

```

```

Num_Ptos_PROT = 0L; /* Para contar deltas */

/* Motor posicionado */
Pos_Servo_MM.z = 0.0;

/* Inicializa el fraccionario de cuenta pendiente */
Delta_Pend.z = 0.0;

/* Adapta contenido de Pto_Ref */
Pos_Ref_MM.z = apConf.Ref_Angular * RADIANES_X_CTA_EJZ;

/* Construct heartBeat Task thread */
Task_Params_init(&taskParams);
taskParams.arg0 = 1000000 / Clock_tickPeriod;
taskParams.stackSize = TASKSTACKSIZE;
taskParams.stack = &taskOStack;
Task_construct(&taskOStruct, (Task_FuncPtr)heartBeatFxn, &taskParams, NULL);

/* Open LED pins */
ledPinHandle = PIN_open(&ledPinState, ledPinTable);
if(!ledPinHandle) {
    System_abort("Error initializing board LED pins\n");
}

PIN_setOutputValue(ledPinHandle, Board_LED0, 0); // Board_LED0 - led verde
PIN_setOutputValue(ledPinHandle, Board_LED1, 1); // Board_LED1 - led rojo

Mueve_Tiro_1D( &Pos_Servo_MM, &Pos_Ref_MM );

System_printf("Starting the example\nSystem provider is set to SysMin.\n"
              "Halt the target to view any SysMin contents in ROV.\n");

/* SysMin will only print to the console when you call flush or exit */
System_flush();

/* Start BIOS */
BIOS_start();

return (0);
}

```

Diagramas

E.1 | Diagramas CC2650STK

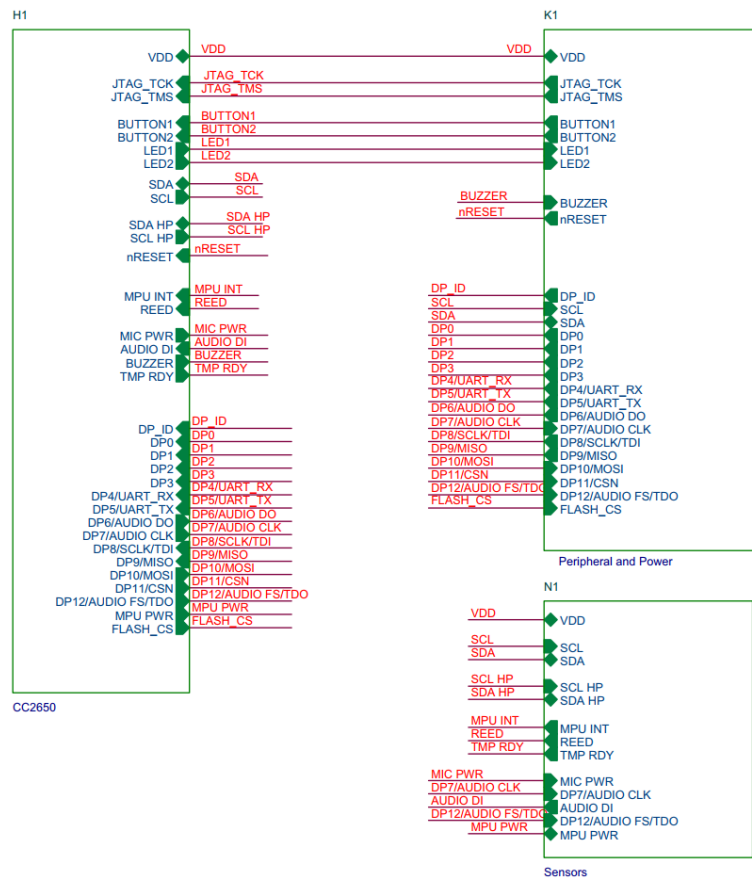


Figura E.1: CC2650STK diagrama esquemático.

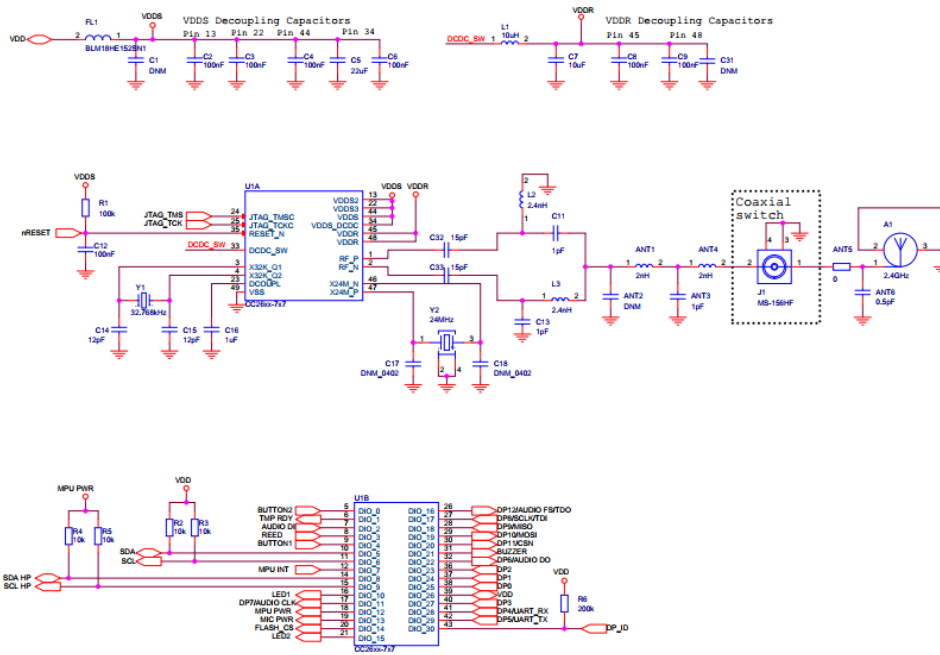


Figura E.2: CC2650STK diagrama esquemático.

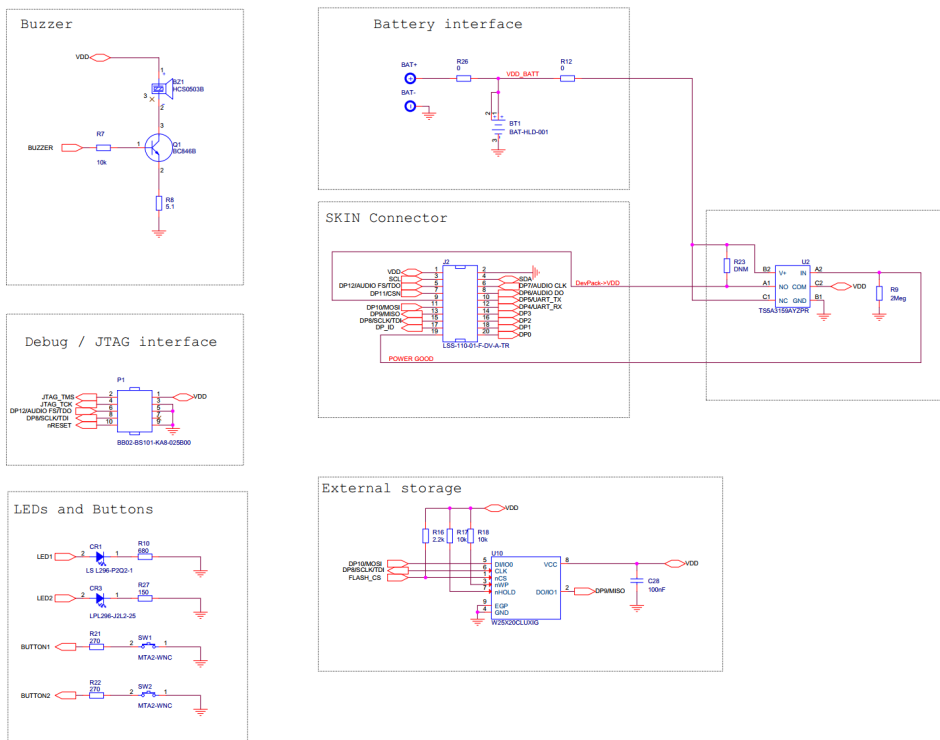
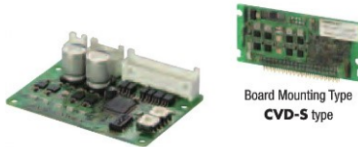


Figura E.3: CC2650STK diagrama esquemático.

E.2 | Diagramas Oriental Motor

E.2.1 | Driver

CVD Driver



DC Input
CVD Series

Motor Types (Bi-polar)	2 Phase (1.8°/0.9°) 5 Phase (0.72°/0.36°)
Current (Amps)	0.5~4.5*
Smooth Drive	2048 per step
Power Supply	VDC 24
Input Current (Amps)	0.5~4.8*
Starting From (Driver)	\$130.00

*See individual driver for ratings



● Low Vibration with Full-Time Microstepping

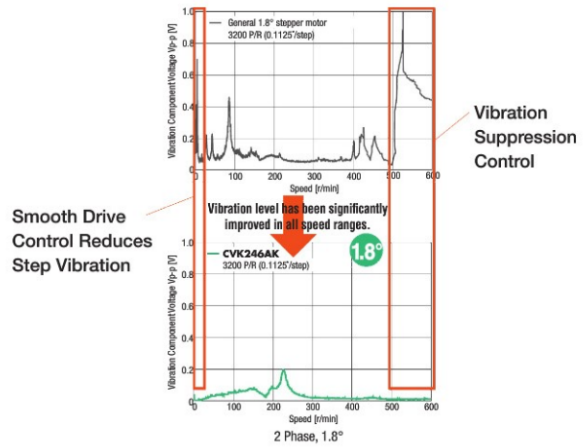
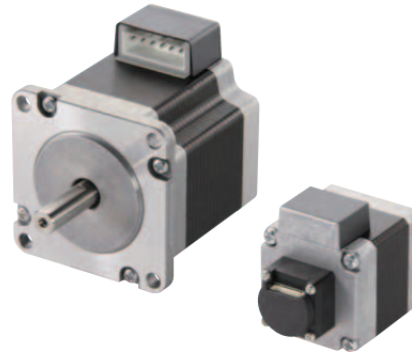


Figura E.4: Motor a pasos PKP series.

E.2.2 | Motor

Bipolar 1.8° and 0.9° Stepper Motors **PKP Series** with Encoders

Introducing the new 1.8° Standard and 0.9° High Resolution **PKP Series** stepper motors with an incremental Line Driver or Voltage output type encoder pre-assembled.

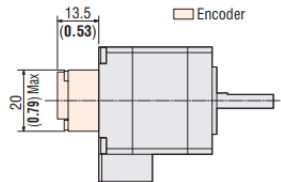


Features

- **Motor position information detection is possible**
Current position monitoring and position gap detection are possible by using an encoder type motor. For example, normal motor operation can be confirmed by comparing the current position and the command position.

- **Compact Encoder**
Contributing to overall space savings, the **PKP Series** features a standard size, compact encoder.

- Example of a 42 mm (1.65 in.)



- **To reduce electrical noise, use the Line Driver Output type**
The Line Driver output offers excellent noise resistance because of the differential output and is capable of longer wiring distance compared to the voltage output.

- **Main Specifications of Encoders**

- Output Circuit Format: Line Driver Output or Voltage Output type
- Resolution: 200P/R (Standard Type), 400P/R (High-Resolution Type)
- Output Signal: A-Phase, B-Phase, Z-Phase (3ch)

Product Lineup

Type	Connection Method	Frame Size				
		20 mm (0.79 in.)	28 mm (1.10 in.)	35 mm (1.38 in.)	42 mm (1.65 in.)	56.4 mm (2.22 in.)
Standard type Basic step angle: 1.8° Encoder resolution: 200 P/R	Bipolar	●	●	●	●	●
	Unipolar*	●	●	●	●	●
High-resolution type Basic step angle: 0.9° Encoder resolution: 400 P/R	Bipolar	–	–	–	●	●
	Unipolar*	–	–	–	●	●

*See website for part number and specifications

Figura E.5: Manejador del Motor a pasos.

Referencias

- V.M. Arévalo. Sinusoidal velocity profiles for motion control. In *Proceedings of the ASPE Control of Precision Systems*, pages 18–20, Philadelphia, PA, USA, April 2001.
- A. Bertomeu-Motos. Biomechanics of human walking and stability descriptive parameters. *Revista Doctorado UMH*, 1:4, 2015. doi: 10.21134/doctumh.v1i1.880.
- A.K. Bondhus, K.Y. Pettersen, and H. Nijmeijer. Master-slave synchronization of robot manipulators: Experimental results. In *IFAC Proceedings Volumes 38(1)*, pages 367–372, 2005.
- Digo A. Bravo M. and Carlos F. Rengifo R. Modelo Biomecánico De Una Prótesis De Pierna. *Revista Iberoamericana De Automática E Informática Industrial*, 11(4):9, October 2014. doi: 10.1016/j.riai.2014.08.003.
- Thomas Bräunl. *Embedded Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- Martin BUSS. Hybrid control of mechatronic systems. *SYSTEMS, CONTROL AND INFORMATION*, 46(3): 129–137, 2002. doi: 10.11509/isciesci.46.3_129.
- E. Cicek, J. Dasdemir, and E. Zergeroglu. Coordinated synchronization of multiple robot manipulators with dynamical uncertainty. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 37(5):672–683, 2015.
- Víctor De-León-Gómez, J. Alfonso Pámanes, and Víctor Santibáñez. Walking of a biped robot balanced with a reciprocating torso. In Saïd Zeghloul, Med Amine Laribi, and Jean-Pierre Gazeau, editors, *Robotics and Mechatronics*, pages 85–99, Cham, 2016. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-22368-1.
- Leidy C. Díaz. Prótesis electrónicas: Una nueva esperanza para mejorar la calidad de vida de las personas. *Informador Técnico (Colombia)*, 80(2):169–177, 2016. ISSN 0122-056X.
- M. Eilenberg. Control of a powered ankle-foot prosthesis based on a neuromuscular model. *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.*, vol. 18, no. 2, page 164–173, 2010.
- ENADIS. *Encuesta Nacional sobre Discriminación 2017*. Consejo Nacional para Prevenir la Discriminación, México, 2019.

- R. D. Gregg, T. Lenzi, L. J. Hargrove, and J. W. Sensinger. Virtual constraint control of a powered prosthetic leg: From simulation to experiments with transfemoral amputees. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(6): 1455–1471, December 2014. ISSN 1552-3098. doi: 10.1109/TRO.2014.2361937.
- Martin Grimmer and Andre Seyfarth. *Mimicking Human-Like Leg Function in Prosthetic Limbs*, pages 105–155. 07 2014. ISBN 978-94-017-8931-8 (Print) 978-94-017-8932-5 (Online). doi: 10.1007/978-94-017-8932-5_5.
- Spyros G.Tzafestas. *Introduction to Mobile Robot Control*. Elsevier, Inc., 225 Wyman Street, Waltham, MA 02451, USA, 2014. doi: 10.1016/C2013-0-01365-5.
- M. A. Holgate, T. G. Sugar, and A. W. Bohler. A novel control algorithm for wearable robotics using phase plane invariants. In *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3845–3850, 2009.
- INEGI. *La discapacidad en México, datos al 2014 : versión 2017*. Instituto Nacional de Estadística y Geografía (México), México, 2017.
- Reza N. Jazar. *Theory of Applied Robotics*. Springer US, 2010. doi: 10.1007/978-1-4419-1750-8.
- J. Johansson. A clinical comparison of variable-damping and mechanically passive prosthetic knee devices. *Amer. J. Phys. Med. Rehabil.*, vol. 84, no. 8, page 563–575, 2005.
- R. Kelly, V. Santibáñez, and J. A. Loría. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag London, 2005.
- Yangmin Li, Yassine Bouteraa, Jawhar Ghommam, Gérard Poisson, and Nabil Derbel. Distributed synchronization control to trajectory tracking of multiple robot manipulators. *Journal of Robotics*, page 10, 2011. doi: 10.1155/2011/652785.
- Jinkun Liu and Xinhua Wang. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- Josep M. Font Llagunes, editor. *Multibody Dynamics*. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- Albert C. J. Luo. *Dynamical System Synchronization*. Springer-Verlag, New York, 2013.
- A. Mai and S. Commuri. Chapter twenty-two - intelligent control of a prosthetic ankle joint using gait recognition. In Kyriakos G. Vamvoudakis and Sarangapani Jagannathan, editors, *Control of Complex Systems*, pages 635 – 660. Butterworth-Heinemann, 2016. ISBN 978-0-12-805246-4. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805246-4.00022-7>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128052464000227>.
- Andrea Maiorino and Giovanni Gerardo Muscolo. Biped robots with compliant joints for walking and running performance growing. *Frontiers in Mechanical Engineering*, 6:11, 2020. ISSN 2297-3079. doi: 10.3389/fmech.2020.00011.
- Vukobratovic Miomir, Borovac Branislav, Surla Dusan, and Stokic Dragan. *Introduction to Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- Vukobratovic Miomir, Borovac Branislav, Surla Dusan, and Stokic Dragan. *Biped Locomotion Dynamics, Stability, Control and Application*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

- Derbel Nabil, Ghommam Jawhar, and Zhu Quanmin. *Applications of Sliding Mode Control*. Springer Singapore, 2017.
- Alan E. Nourse. *El cuerpo humano*. Colección científica de TIME LIFE, México, 1980.
- Alana Officer, editor. *WORLD REPORT ON DISABILITY*, 20 Avenue Appia, 1211 Geneva 27, Switzerland, 2011. World Health Organization, World Health Organization 2011.
- Alejandro Rodriguez-Angeles and Henk Nijmeijer. Synchronizing tracking control for flexible joint robots via estimated state feedback. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126(1):162–172, 2004.
- M. Rosheim. *Leonardo's Lost Robots*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- Joseph Edward Shigley and John Joseph Uicker Jr. *TEORÍA DE MÁQUINAS Y MECANISMOS*. McGRAW-HILL, 1980.
- A. H. Shultz, B. E. Lawson, and M. Goldfarb. Running with a powered knee and ankle prosthesis. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 23(3):403–412, May 2015. ISSN 1534-4320. doi: 10.1109/TNSRE.2014.2336597.
- M. F. Silva and J.A. Tenreiro. A historical perspective of legged robots. *J. Vib. Control*, 13(9–10):1447–1486, September 2007. doi: 10.1177/1077546307078276.
- A. M. Simon, N. P. Fey, K. A. Ingraham, A. J. Young, and L. J. Hargrove. Powered prosthesis control during walking, sitting, standing, and non-weight bearing activities using neural and mechanical inputs. In *2013 6th International IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering (NER)*, pages 1174–1177, November 2013. doi: 10.1109/NER.2013.6696148.
- J. J. E Slotine and L. Weiping. On the adaptive control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 6(3):49–59, 1987.
- M. Sobotka and M. Buss. Locomotion studies for a 5dof gymnastic robot. In *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3275–3280, 2005.
- Marion Sobotka. *Hybrid Dynamical System Methods for Legged Robot Locomotion with Variable Ground Contact*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2006.
- M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Son, Inc., 2004.
- F. Sup. Design and control of a powered transfemoral prosthesis. *Int. J. Robot. Res.*, vol. 27, no. 2, page 263–273, 2008.
- CC13x0, CC26x0 SimpleLink™ Wireless MCU. Texas Instruments Incorporated, Dallas, Texas, 2 edition, August 2017. Rev. ed.
- Y. Tingfang, M. Cempini, C. M. Calogero, and N. Vitiello. Review of assistive strategies in powered lower-limb orthoses and exoskeletons. *Robot. Auton. Syst.*, 64:120–136, February 2015. doi: 10.1016/j.robot.2014.09.032.

- Diego Torricelli, Camilo Cortés, Nerea Lete, Álvaro Bertelsen, Jose E. Gonzalez-Vargas, Antonio J. del Ama, Iris Dimbwadyo, Juan C. Moreno, Julian Florez, and Jose L. Pons. A subject-specific kinematic model to predict human motion in exoskeleton-assisted gait. *Frontiers in Neurorobotics*, 12:18, 2018. ISSN 1662-5218.
- Michael Tucker, Jeremy Olivier, Anna Pagel, Hannes Bleuler, Mohamed Bouri, Olivier Lamercy, Jose del R. Millan, Robert Riener, Heike Vallery, and Roger Gassert. Control strategies for active lower extremity prosthetics and orthotics : A review. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 12:1, January 2015. doi: 10.1186/1743-0003-12-1.
- Eduardo Vázquez, editor. *Los amputados y su rehabilitación. Un reto para el Estado*. Academia Nacional de Medicina de México (ANMM). Intersistemas, S.A. de C.V., México, 2016. ISBN 978-607-443-623-5.
- E. Yoshida. Robots that look like humans: A brief look into humanoid robotics. *Métode Science Studies Journal - Annual Review*, 0(9):143–151, 2018. ISSN 2174-9221. doi: 10.7203/metode.9.11405.
- Xia Zhang, Wenliang Ge, Hao Fu, Renxiang Chen, Tianhong Luo, and Minoru Hashimoto. A human-robot interaction based coordination control method for assistive walking devices and an assessment of its stability. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018(9279627):17, July 2018. doi: 10.1155/2018/9279627.