

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA



***“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA
SEMIÓTICAMENTE ADECUADA QUE INCORPORA TECNOLOGÍA DE CÁLCULO
COMPUTACIONAL PARA ABORDAR APLICACIONES DE MODELADO DE
ECUACIONES DIFERENCIALES.”***

***TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS***

***PRESENTA:
GABRIEL MARTÍNEZ GRADILLA***

***DIRECTOR:
JUAN JOSÉ SEVILLA GARCÍA***

***CODIRECTOR:
MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA***

Mexicali, Baja California, México.

Junio de 2018

ÍNDICE

	Página
1. Introducción	1
1.1 Perspectiva de la didáctica de la matemática	1
1.2 Contexto y antecedentes del problema	6
1.3 Problema de investigación.....	11
1.4 Hipótesis.....	13
1.5 Objetivos	13
1.6 Relevancia	14
1.7 Limitantes del estudio	16
2. Marco teórico	17
2.1 Elementos básicos de semiótica matemática	17
2.1.1 Semiótica y educación.....	18
2.1.2 Semiótica peirceana.....	21
2.1.3 La tríada peirceana	23
2.1.4 Semiótica matemática.....	27
2.2 Perspectiva y algunas definiciones de competencia.....	35
2.3 La competencia matemática	37
2.4 La enseñanza contextualizada	42
2.5 El aprendizaje basado en problemas	44
3. Método de la investigación.....	48
3.1 Descripción	48
3.2 Sujetos.....	50
3.3 Materiales para la investigación	51
3.3.1 Instrumento de pre prueba	52
3.3.2 Estrategia didáctica.....	54
3.3.3 Instrumento de pos prueba.....	60
3.4 Pruebas estadística no paramétrica	62
3.4.1 Introducción	63
3.4.2 Prueba de hipótesis estadística.....	68
3.4.3 Valor crítico de un estadístico de prueba y valor p	74
3.4.4 Prueba ji cuadrada de la bondad de ajuste	78

3.4.5 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados	82
3.4.6 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon	85
3.4.7 Prueba de la U de Mann-Whitney	89
3.4.8 Prueba de la mediana	93
4. Resultados	97
4.1 Pruebas de bondad de ajuste	97
4.1.1 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución binomial	97
4.1.2 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución de Poisson	103
4.1.3 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución hipergeométrica	108
4.1.4 Gráficos	114
4.1.5 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución normal (normalidad)	117
4.2 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados	121
4.2.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica	122
4.2.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica	123
4.3 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon	124
4.3.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica	125
4.3.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica	128
4.4 Prueba de la mediana	130
4.4.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba	131
4.4.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba	134
4.5 Prueba de la U de Mann-Whitney	137
4.5.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba	138
4.5.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba	140
5. Discusión y conclusiones	143
5.1 Discusión	143
5.1.1 Pruebas de bondad de ajuste	143
5.1.2 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados	152
5.1.3 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon	153
5.1.4 Prueba de la mediana	155
5.1.5 Prueba de la U de Mann-Whitney	156
5.2 Conclusiones	158
Referencias bibliográficas	161
Apéndice A. Instrumento de pre prueba	174

Apéndice B. Estrategia didáctica.....	175
Apéndice C. Instrumento de pos prueba.....	178
Apéndice D. Distribución chi cuadrada (χ^2).....	180
Apéndice E. Valores críticos del coeficiente de correlación de rangos r_s de Spearman.....	181
Apéndice F. Puntuaciones z positivas.....	182
Apéndice G. Valores críticos de T para la prueba de rangos son signo de Wilcoxon	183

LISTA DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Perspectiva de México comparado con el de otros miembros de la OCDE	7
Tabla 2. Clasificación de los distintos tipos de registros de representación que pueden ser abordados por la matemática	29
Tabla 3. Competencias matemáticas según Niss	37
Tabla 4. Distribución de los estudiantes que participaron en la etapa experimental por grupo	50
Tabla 5. Descripción de los elementos del instrumento de pre prueba	53
Tabla 6. Descripción de los elementos del primer instrumento de la estrategia didáctica	56
Tabla 7. Descripción de los elementos del segundo instrumento de la estrategia didáctica	57
Tabla 8. Descripción de los elementos del tercer instrumento de la estrategia didáctica	58
Tabla 9. Descripción de los elementos del instrumento de pos prueba	59
Tabla 10. Tipos de decisiones y errores al deducir sobre H_0	71
Tabla 11. Formato de contingencia para la prueba de la mediana	94
Tabla 12. Formato de contingencia para la prueba de la mediana (dos grupos)	95
Tabla 13. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	98
Tabla 14. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	98
Tabla 15. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	99
Tabla 16. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	99
Tabla 17. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	100
Tabla 18. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	100
Tabla 19. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	101
Tabla 20. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	102
Tabla 21. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	103
Tabla 22. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	103

Tabla 23. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	104
Tabla 24. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	105
Tabla 25. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	105
Tabla 26. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	106
Tabla 27. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	107
Tabla 28. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	107
Tabla 29. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	109
Tabla 30. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	109
Tabla 31. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	110
Tabla 32. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	111
Tabla 33. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	111
Tabla 34. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	112
Tabla 35. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	113
Tabla 36. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	113
Tabla 37. Cálculo del coeficiente r_s de Spearman para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica	122
Tabla 38. Cálculo del coeficiente r_s de Spearman para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	123
Tabla 39. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica	124
Tabla 40. Estadísticos de contraste para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica	126

Tabla 41. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	127
Tabla 42. Estadísticos de contraste para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	129
Tabla 43. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba	130
Tabla 44. Formato de contingencia para la prueba de la mediana de los datos de la aplicación de la pre prueba	132
Tabla 45. Estadísticos de contraste para el test de la mediana de los datos de las aplicaciones de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	133
Tabla 46. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba	133
Tabla 47. Formato de contingencia para la prueba de la mediana de los datos de la aplicación de la pos prueba	135
Tabla 48. Estadísticos de contraste para el test de la mediana de los datos de las aplicaciones de la posprueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	136
Tabla 49. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba	137
Tabla 50. Estadísticos de contraste para el test de Mann-Whitney de los datos de las aplicaciones de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	139
Tabla 51. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba	140
Tabla 52. Estadísticos de contraste para el test de Mann-Whitney de los datos de las aplicaciones de la pos prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	141

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Tetraedro de Higginson.....	4
Figura 2. Visión peirceana de signo	25
Figura 3. Modelo del curso de una semiosis en un intercambio de dos turnos	26
Figura 4. Tres actividades cognitivas asociadas a la semiosis	33
Figura 5. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento matemático	34
Figura 6. Ventana del vídeo applet del inciso "e" del primer instrumento de la estrategia didáctica	49
Figura 7. Ventana del vídeo applet del inciso "c" del tercer instrumento de la estrategia didáctica..	49
Figura 8. Estudiantes de la Universidad Estatal de Sonora durante la aplicación de la estrategia didáctica	50
Figura 9. El conjunto de interfaz, calculadora y sensor de temperatura durante la ejecución del primer instrumento de la estrategia didáctica.....	51
Figura 10. La calculadora TI-84 Plus habiendo transferido las mediciones de temperatura a una computadora personal (móvil) para su posterior graficación con Logger Pro 3.....	52
Figura 11. Diseño estadístico de la etapa experimental	61
Figura 12. Regiones variables de rechazo	76
Figura 13. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	114
Figura 14. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	114
Figura 15. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	115
Figura 16. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.....	115
Figura 17. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	117
Figura 18. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	118
Figura 19. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica	119
Figura 20. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	120
Figura 21. Diagrama de dispersión para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica.....	121

Figura 22. Diagrama de dispersión para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	122
Figura 23. Gráfico comparativo para los niveles de los aciertos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica	126
Figura 24. Gráfico comparativo para los niveles de los aciertos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica	129
Figura 25. Gráfico comparativo para el número de aciertos logrado por estudiante en la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	132
Figura 26. Gráfico comparativo para el número de aciertos logrado por estudiante en la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica	135

1. Introducción

La importancia de la educación en ciencias básicas en la formación curricular de los estudiantes de licenciatura ha sido motivo de discusión en foros nacionales e internacionales, primero por su carácter formativo que les capacita para razonar y ser creativos e innovadores en la solución de problemas, segundo por considerársele un herramienta que les prepara para una mejor comprensión.

En el caso específico de la *didáctica de la matemática*, el manejo de conceptos relativos a la llamada *semiótica matemática* ha ganado popularidad en las publicaciones científicas contemporáneas del área a nivel internacional y se debe destacar el creciente interés de la comunidad de investigación por el uso de nociones semióticas en el *estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*(Godino, 2002).

1.1 Perspectiva de la didáctica de la matemática

En esta parte se presentan elementos básicos relativos al área de conocimiento en la que se encuentra inserto el presente trabajo de tesis, a saber, la denominada “didáctica de la matemática”, con objeto de brindar un contexto introductorio adecuado y pertinente.

Para Godino (2013): “La didáctica de la matemática (DdM) como campo de investigación ha adquirido una cierta consolidación a nivel internacional, como

muestran diversos indicadores (revistas, congresos, colectivos académicos, etc.)” (p. 112).

Aunque, como lo señalan D’Amore y Godino (2007), el ubicar una fecha (incluso aproximada) del inicio de los trabajos en la DdM (como sucede con otras disciplinas científicas) sería muy aventurado ya que “en un inicio había tantas interpretaciones de la DdM como investigadores se ocupaban de ella”, no obstante, “creemos que muchos estarán de acuerdo en afirmar que, tal como la conocemos en la actualidad, la DdM surgió en los años setenta” (p. 192).

En México, la primera sección de estudios dedicada a tratar problemas de matemática educativa fue creada en marzo de 1975 teniendo como base al CInvEstAv (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional):

El segundo semestre de ese año vio el inicio del programa de maestría en la especialidad. Originalmente, el programa de estudios estuvo articulado alrededor de los contenidos matemáticos que se consideraban básicos, entre otras cosas porque constituían los ejes organizadores del currículum de matemáticas a diferentes niveles. Nos referimos específicamente al análisis matemático, al álgebra moderna y a la geometría. Además, se intentaba dar a los estudiantes del programa (profesores en servicio) una visión de la matemática dentro de un contexto cultural y científico más amplio. (Artigue *et al.*, 1995, p. 27)

Para 1984 y 1985, el personal académico de la sección de matemática educativa tenía ya una idea muy clara de los alcances del proyecto de maestría en sus modalidades abierta y tradicional. Había acumulado una gran experiencia en su

trabajo con profesores en todo el país. Resultaba natural entonces la creación de un programa académico de doctorado mediante el cual se pudiese articular y sistematizar toda esa experiencia. (Artigue *et al.*, 1995, p. 29)

Desde 1987 se venían realizando, de forma anual, reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa, en las que se observó que existía en la región un amplio colectivo de investigadores sobre este tema, así como un volumen de investigación que requería de un canal de difusión más amplio y formal. Todo esto llevó a constituir en 1996 el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLaME). Luego, en el año 1997 se funda la revista ReLIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) para servir como órgano de publicación oficial del CLaMe. El objetivo era promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en la región. (Mazet *al.*, 2015, p. 92-93)

Por otra parte:

Debido a la masificación de la enseñanza secundaria y a la reforma de los contenidos. Las cuestiones relativas a los contenidos, tanto en el aula como a escala más amplia y la elaboración de los programas han abierto campos de investigación específicos. Cuestiones como: ¿qué tipos de problemas seleccionar para desarrollar el interés de los estudiantes y favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos?, ¿cómo organizar la secuencia de actividades en clase?, o ¿cómo organizar una progresión de los aprendizajes en el currículo?, han llevado a priorizar los problemas con que los profesores se encuentran en

sus clases, tendencia que se ha visto reforzada por el desafío institucional de la formación del profesorado.(Duval, 2006c, p. 143)

En este orden de ideas, un marco como el que motiva este trabajo debe tener como un primer elemento trascendente (y pertinente), el precisar sobre una definición de la DdM, así:

La DdM es el estudio de los *procesos de transmisión y de adquisición* de los diversos contenidos de dicha ciencia (la matemática) y se propone *describir y explicar* los *fenómenos* relativos a la relación entre su *enseñanza* y el *aprendizaje*. Además, se debe advertir que esta disciplina no deberá ser reducida, en absoluto, a la tarea de buscar la mejor forma de instruir un determinado concepto (Douady, 1986).

En un trabajo igualmente clásico, W. Higginson(1980) da amplitud a la idea anterior mediante un modelo que propone una DdM relacionada con los campos del conocimiento de la matemática, la psicología, la sociología y la filosofía como las cuatro materias fundacionales de esta. Visualiza la DdM (por medio de una estructura tetraédrica) en términos de las interacciones entre las distintas ciencias (figura 1).

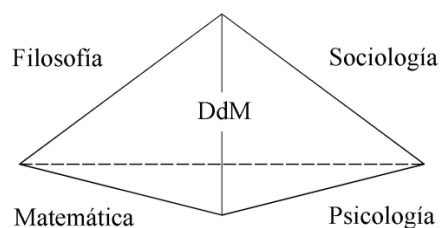


Figura 1. Tetraedro de Higginson en donde las caras son la matemática, psicología, sociología y filosofía.(Higginson, 1980; citado por Godino,1991,p. 108)

Asimismo,

La DdM debe asumir la responsabilidad de elaborar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta disciplina incluye, por tanto, cuestiones que son habitualmente abordadas por otras, como la epistemología, psicología, pedagogía, sociología, etc. (Godino *et al.*, 2008, p. 26)

Tener en cuenta lo anterior genera la posibilidad de lograr “el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica” (Steiner, 1985, p. 16).

Aún con este antecedente, el cual puede generar la tentadora percepción de que se tienen definiciones muy precisas y que los problemas en la DdM están ya bien identificados y en proceso de franca resolución, históricamente la disciplina no ha ofrecido un “paradigma de investigación consolidado y dominante”(Godino *et al.*, 2006), cuando se trata de abordarlos y así, hace unos 20 años, esto es a unos 20 años de distancia de su concepción “moderna” la DdM contaba con un perfil enriquecido de una amplia variedad de enfoques teóricos para atender su investigación (algunos de los cuales aún conservan una relativa vigencia) como se destacan Sierpinski y Lerman (1996).

A pesar de lo expuesto anteriormente, todas las corrientes de pensamiento que conforman la gama teórica de la DdM parecen coincidir en que su “problema fundamental” versa alrededor de “reconocer la necesidad de elaborar nuevos constructos cognitivos que superen las eventuales limitaciones de los existentes, ocupados a veces de manera acrítica” (D’Amore y Godino, 2007, p. 192). Se puede mencionar en adición, que su “fin específico” como campo de investigación es “el

estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos” (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 127). Como propuso el programa de Steiner, para la teoría de la educación matemática, es necesario “el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica” (Steiner, 1985, p. 16). Además, Godino y Batanero (1994) añaden que la DdM se interesa por delimitar el significado que los estudiantes atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como por la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

1.2 Contexto y antecedentes del problema

Un estudio exploratorio internacional, publicado en 2016 bajo los auspicios de la OCDE, esto es, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, a través de su informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), ofreció (entre otros) los siguientes resultados respecto del rendimiento en matemáticas:

- Los estudiantes de México obtienen en promedio 408 puntos, muy por debajo del promedio OCDE de 490.
- En México, 57% de los estudiantes no alcanzan el nivel básico de competencias y tal proporción ha permanecido estable por doce años (2003 a 2015).

- En México, sólo 0.3% de los estudiantes alcanzan niveles de excelencia, por debajo de los respectivos porcentajes para países como Brasil, Chile y Uruguay.
- El “panorama tabular” de México (extractado) es el siguiente:

País	Rendimiento medio en PISA 2015
Singapur	564
China	539
Japón	532
Corea	524
Canadá	516
Finlandia	511
Alemania	506
Rusia	494
Francia	493
Reino Unido	492
Italia	490
España	486
Estados Unidos	470
Argentina	456
Chile	423
Uruguay	418
México	408
Perú	387
Brasil	377

Tabla 1. Perspectiva de México (rendimiento medio en matemáticas en puntos) comparado con el de otros miembros de la OCDE. (OCDE, 2016)

Por otro lado, Rodríguez *et al.* (2016), proporcionan un preliminar histórico del caso particular de los programas educativos de licenciatura en ingeniería, nivel en que se ubica el desarrollo de este trabajo (específicamente sobre la asignatura de ecuaciones diferenciales):

Una de las temáticas a tomar en cuenta [...] y que ha sido abordada desde la ReLME(Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) en ediciones anteriores (por ejemplo Costa Rica 1994), así como en otros foros y publicaciones, es la que resulta de preguntarse si hay más de una matemática a ser estudiada por comunidades de profesionales (en nuestro caso ingenieros).

Hasta la década de los años ochenta del siglo pasado, la formación matemática de los ingenieros estaba de acuerdo con la concepción idealista platónica de la educación matemática, según la cual, se considera que el estudiante debe adquirir primero las estructuras fundamentales de la matemática de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el estudiante por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten.

Sin embargo, la experiencia en las aulas mostró que tal cosa no ocurría y a partir de entonces, parece haber un proceso de reconocimiento de la legitimidad y necesidad de una “matemática para ingenieros” y por tanto, de una matemática escolar cuyos contenidos, metodología didáctica y sistema de evaluación de los aprendizajes, sean especialmente diseñados e instrumentados para la formación escolar de los futuros ingenieros. (p. 574)

Adicionalmente:

- Se estima que en México, entre 16 y 20% de las currículas, corresponde a cursos del área de matemática, a saber: Álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable, ecuaciones diferenciales, entre otros (De Las Fuentes *et al.*, 2012; Ocampo *et al.*, 2010; Rivera *et al.*, 2015).

- Las investigaciones en el campo de la DdM, reflejan que los estudiantes de ingeniería confrontan dificultades para la comprensión, asimilación, interpretación y aplicación a situaciones concretas, de conocimientos relativos a distintos tópicos matemáticos (Ocampo *et al.*, 2010).

En cuanto a recomendaciones específicas sobre la formación matemática de los ingenieros, en el ámbito nacional encontramos las emanadas del Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI). En la versión 2018 del marco de referencia para la acreditación de los programas de ingeniería (CACEI, 2017), encontramos lo siguiente:

Las matemáticas en la formación del ingeniero tienen como propósito contribuir a la formación del pensamiento lógico-deductivo del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza. Estos estudios estarán orientados al énfasis de los conceptos y principios matemáticos, más que a los aspectos operativos.

Deberán incluir cálculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales, además de temas de probabilidad y estadística, algebra lineal, análisis numérico y cálculo avanzado. Los cursos de computación no se consideran dentro del grupo de materias de ciencias básicas y matemáticas. (p. 123)

Rodríguez *et al.* (2017), manifiestan como el brindar un adecuado conectivo entre la ciencia matemática y el contexto de la ingeniería se ha constituido en una necesidad actual y abundan:

En las carreras de ingeniería sus objetivos son: Analizar, diseñar, aplicar, diagnosticar o predecir fenómenos naturales y de contextos propios de la ingeniería para su solución.

El discurso matemático escolar, los programas de estudios de matemáticas están fraccionados y descontextualizados de la “vida real” y sin aplicación en su entorno social, así como, en los textos de ingeniería la matemática solo es usada como una herramienta y no para generar conocimiento matemático por sí mismo.

Por lo tanto, debemos buscar alternativas o propuestas didácticas que apoyen a la relación de la matemática y los contenidos con las ingenierías; con la finalidad de obtener elementos de nuevas formas de aprendizaje de la matemática con el contexto de por medio, es decir, [...] en el sentido de hacer la matemática más funcional en la ingeniería y en la vida cotidiana. Pensamos que esta propuesta enriquece el aprendizaje de las matemáticas en las ingenierías.

En este sentido es pertinente abordar temáticas de: La modelación y graficación en el comportamiento de estructuras; potencial complejo; procesos de infiltración, variación de temperatura, impedancia compleja, campos de pendientes de ecuaciones diferenciales en circuitos eléctrico, producto escalar y vectorial, teorema de continuidad, conservación de masa y procesos de reacción de energía enzimática por mencionar algunos.

Para fortalecer la relación entre los contenidos de los cursos de matemáticas y los contenidos de la ingeniería, se sugiere:

1. Caracterizar los procesos de aprendizaje que relacionan los conceptos, modelos, procedimientos matemáticos que se usan en los contextos de ingeniería civil, mecánica, química, eléctrica y electrónica, etc.
2. Analizar que habilidades tienen los estudiantes en la modelación y resolución de problemas en contextos ingenieriles.

Es relevante notar que son varios los riesgos de trabajos de esta naturaleza, por ejemplo:

La enseñanza de las matemáticas a través de la modelación de fenómenos asume el pensar la modelación como una estrategia didáctica. Para ello, se ha previamente reportado la importancia de que el profesor a cargo de la clase conozca de manera importante no sólo los conocimientos puramente matemáticos sino algunos otros de naturaleza disciplinar (física, química, biología, otros) y además que conozca y desarrolle en sus estudiantes algunos otros conocimientos transversales pero igualmente importante como lo son el uso de ciertas tecnologías (ejemplo: Uso de sensores para la parte experimental en clase) y que pueda lidiar con los diversos argumentos y cuestionamientos que puedan surgir de los propios estudiantes cuando se enfrentan a modelar problemas diversos y abiertos que corresponden no a una única disciplina sino a varias otras. (p. 293-294)

1.3 Problema de investigación

El departamento de ingeniería de la Universidad Estatal de Sonora campus Hermosillo (institución en que se desarrolló la fase experimental del presente trabajo), ha

manifestado las siguientes “áreas de oportunidad” concernientes a los procedimientos académicos que enmarcan e inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los cursos del área de conocimiento de matemática:

- Se identificaron índices de reprobación (para los períodos escolares comprendidos entre los años 2015 y 2016) relativamente altos (superiores en algunos casos al 70% de la matrícula inicialmente inscrita) para las asignaturas de matemáticas.
- La deserción y el “abandono académico” por parte de los estudiantes concurre de forma acentuada en los cursos de matemáticas.
- La existencia de datos históricos y de registros sobre estadísticos respecto de las asignaturas de matemáticas es casi inexistente.
- No se cuenta con instrumentos didácticos de medición que permitan ubicar los contenidos programáticos que resultan particularmente problemáticos a los estudiantes.
- Al no disponer de una admisión “filtrada” (y/o de mecanismos que la suplan) de los aspirantes a los programas de ingeniería, se cuenta con un nivel de conocimiento heterogéneo dentro de las aulas.

Este documento se encuentra orientado hacia la evaluación de la “puesta a prueba” de una propuesta didáctica, la cual busca fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje en el marco del curso de ecuaciones diferenciales que se imparte a estudiantes de ingeniería de la Universidad Estatal de Sonora.

Expuesto lo anterior y con motivo de dar claridad a la postulación del problema que el trabajo atiende, se enuncia el siguiente cuestionamiento que debe ser considerado como equivalente y “portavoz” de tal situación problemática:

¿Existe diferencia en la eficacia de la adquisición de conocimientos sobre aplicaciones de modelado con ecuaciones diferenciales cuando se instruye a los estudiantes bajo un esquema tradicional, en contraparte con la utilización de una estrategia didáctica semióticamente pertinente que incorpora tecnología de cálculo computacional?

1.4 Hipótesis

En concordancia con lo antes expuesto, se proponen las hipótesis enunciadas a continuación y que conducen el desarrollo de esta tesis:

- Hipótesis nula (H_0): La eficacia de la adquisición de conocimientos sobre aplicaciones de modelado con ecuaciones diferenciales, se ve igualmente influenciada cuando se instruye a los estudiantes bajo un esquema tradicional, que al utilizar una estrategia didáctica semióticamente pertinente que incorpora tecnología de cálculo computacional.
- Hipótesis alternativa (H_1): La eficacia de la adquisición de conocimientos sobre aplicaciones de modelado con ecuaciones diferenciales, se ve incrementada cuando se instruye a los estudiantes utilizando una estrategia didáctica semióticamente pertinente que incorpora tecnología de cálculo computacional, en contraparte de cuando se hace de forma tradicional.

1.5 Objetivos

Básico o general:

Generar una estrategia pertinente para la didáctica de aplicaciones de modelado con ecuaciones diferenciales, que tenga como marco teórico central a la semiótica matemática.

Secundarios:

- Comparar la eficacia en la obtención de los conocimientos que alcanzan los estudiantes cuando tratan los conceptos asociados con el modelado con ecuaciones diferenciales a partir de un esquema tradicional y otro semióticamente formulado.
- Evaluar estadísticamente los resultados de la aplicación de la estrategia didáctica.
- Implementar de forma conveniente la tecnología de cálculo computacional dentro de la estrategia didáctica.

1.6 Relevancia

Para Guzmán (1998), cualquier labor similar ala estrategia sugerida en este documento toma relevancia ya que:

Se debe poner en evidencia el rol que juegan los registros (semióticos) de representación en las respuestas de los estudiantes, dado que *distinguir y coordinar distintos registros, es una actividad necesaria y natural en matemáticas*. Estas actividades deberían *construir objetos pedagógicos en la*

enseñanza de la matemática. Por otra parte, la distinción y coordinación de registros son fundamentales para el *desarrollo del pensamiento* [...]. (p. 6)

Dados argumentos como los anteriores, temáticas como la tratada en el presente documento debieran ser atendidas con prioridad, empero, diversos autores en trabajos relativamente recientes, siguen manifestando juicios concurrentes, por ejemplo:

Para Amaya y Medina (2013):

La falta de asociación por parte de los estudiantes del contenido de dos o más registros puede resultar problemático al considerar la importancia de las representaciones semióticas como medio de acceso al conocimiento matemático, para el cual se requiere la integración sinérgica entre dos o más registros. (p. 120)

Además:

La investigación, en un análisis de las respuestas de los alumnos, revela que los alumnos son, en general, monorregistros, sin coordinar explícitamente dos o más (registros). Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases. (Morales, 2013, p. 675)

Asimismo, el “foco de estudio” de esta investigación es en el curso de ecuaciones diferenciales, asignatura que es cursada en seis de los ocho programas de ingeniería que se ofrecen en el campus Hermosillo de la Universidad Estatal de Sonora, a saber: Ingeniería biomédica, ingeniería ambiental, ingeniería en geociencias, ingeniería en

mecatrónica, ingeniería industrial en manufactura e ingeniería en tecnología de alimentos.

De Las Fuentes *et al.* (2011) destacan la importancia de ahondar en el estudio de propuestas que promuevan la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ya que:

[...] permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de los virus, sistemas masa-resorte con o sin amortiguamiento, iluminación, circuitos eléctricos, son ejemplos comunes de ello. (p. 22)

1.7 Limitantes del estudio

El *criterio* que se emplea en este estudio para medir y valorar la *eficacia* en la obtención de los conocimientos que alcanzan los estudiantes, es de carácter meramente estadístico y está asociado única y específicamente con la *cantidad de aciertos* que obtienen al resolver los instrumentos didácticos que conforman la estrategia propuesta.

2. Marco teórico

En este capítulo se exponen elementos de tipo conceptual que ayudan a entender y que brindan el sustento que precisa el resto del documento, se trata de describir (de forma extractada en algunos casos) las áreas del conocimiento a las que se alude en el desarrollo. Como “temática esencial”, se aborda la teoría de la semiótica matemática, base alrededor de la cual circunda la formulación del diseño de la estrategia didáctica aplicada en la parte experimental de la investigación.

2.1 Elementos básicos de semiótica matemática

Como premisa fundamental, se debe tener en cuenta que, como declara Duval (2006c):

Los *escenarios* de representación usados en la *actividad matemática* (incluida su didáctica) son necesariamente *semióticos* y tener en cuenta la naturaleza semiótica de los mismos, implica considerar tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran. (p. 145)

2.1.1 Semiótica y educación

Son diversos los autores que preponderan el nexo entre semiótica y educación, en García (2012) por ejemplo, se afirma que: “La semiótica y la educación se encuentran profundamente atezadas. El recorrido educacional en la vida implica una labor semiótica de variaciones y transformaciones” (p. 11). Adicionalmente:

[...] hoy más que nunca en la historia del conocimiento científico, la semiótica le proporciona a la educación un enfoque y un conjunto de instrumentos que la sitúan como método preciso y eficaz para explicar el proceso de producción, comunicación y transformación del significado de todo fenómeno educativo, dado que provee el máximo de precisión y de diversidad de los discursos con los que se construyen las estrategias específicas para explicar la construcción del conocimiento en la educación del ser social. (García, 2012, p. 11)

La semiótica y la educación son campos de investigación con “intereses” en común y que incluso llegan a superponerse. El estudio de los signos y los procesos de tipo simbólico contribuyen a enriquecer el entendimiento de los significados que intentan ser transmitidos y la noción de como posteriormente se les interpreta, además de como la capacidad para interpretar simbologías es incrementada (Semetsky, 2010). Para Lingefjärd y Farahani (2017) por ejemplo, “representaciones matemáticas a manera de diagramas, histogramas, funciones, gráficos, tablas y simbologías, *promueven el entendimiento y la comunicación de conceptos abstractos* propios de la asignatura, así como otro tipo de fenómenos para su posterior exposición en términos matemáticos” (p. 118).

Según Distéfano et al. (2015):

La investigación en didáctica de las matemáticas ha puesto de manifiesto la importancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La mirada semiótica a estos procesos, en particular gracias a los trabajos de Duval (2004), ha planteado dos preguntas cruciales sobre el tipo de funcionamiento cognitivo que requiere la actividad y el pensamiento matemático: 1) ¿El funcionamiento del pensamiento matemático es (o no) independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación semióticos utilizados? y 2) ¿El pensamiento funciona en matemáticas de la misma manera (o no) que en otros dominios de conocimiento dadas las características específicas de los objetos matemáticos?

Se trata de dos preguntas abiertas con posicionamientos enfrentados entre los investigadores. Ahora bien, cualquier intento de responderlas ha de partir del hecho de que la actividad matemática se desarrolla en un contexto donde se usan signos [...].

Los signos matemáticos y, más en general, las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada. Un símbolo lógico, una ecuación o una fórmula específica, una disposición concreta de bloques multibase, una gráfica particular en un sistema cartesiano, etc., adquieren sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones que se han establecido. (p. 203)

Más en Radford (2013) se advierte: El “vínculo semiótico-educativo” deberá ser un verdadero acercamiento proyectado con origen en la semiótica y consistir en más que una mera amalgama de ambas teorías. Dicha aproximación tendrá que estar focalizada

a la manera en la cual se genera una fusión de preceptos epistemológicos y ontológicos a dicha teoría y la teoría educativa e incluso a la forma en que se transforman por medio de conceptos y constructos semióticos.

No deberá darse por sentada la contribución que la semiótica pudiese hacer a la educación. No existe tal cosa como la “aplicación directa y carente de conflictos” de la semiótica a la educación. Lingefjård y Farahani (2017) abonan asimismo al afirmar que, la tarea antes aludida, enfrenta actualmente una dinámica humana de un “mundo delineado” por sistemas de información multimedia cada vez más complejos, dinámicos y potentes. Asimismo, la sola labor que envuelve la comprensión de la “fenomenología simbólicamente representada”, puede ser estimada como complicada, ya que, “precisa de una habilidad para coordinar distintas concepciones en una representación específica” (p. 118).

Por otra parte, el manejo de conceptos relativos a la denominada “semiótica matemática”, ha ganado popularidad en las publicaciones científicas del área de conocimiento de la matemática educativa a nivel internacional durante las tres últimas décadas (por ejemplo, Berger, 2010; Camargo *et al.*, 2015; Contreras *et al.*, 2005; Dallemoleet *al.*, 2014; D’Amore, 2011; Distéfanoet *al.*, 2015; Duval, 1993a; Duval, 1993b; Duval, 1995; Duval, 2006b; Duval, 2006c; Godino, 2003; Godino, 2010; Molina *et al.*, 2015; Radford, 2006). Tales trabajos dan cuenta de la estrecha asociación que de forma gradual ha sido generada entre ambas disciplinas. Radford (2006) por ejemplo, ya reportaba un “creciente interés” diverso en cuanto a su origen, suscitado en los “últimos años” por la semiótica, puesta la vista desde el campo de la didáctica de la matemática. Otro hecho importante (aunque “complementario” de lo anterior) es el enfatizado por Lingefjård y Farahani (2017) para quienes el ámbito de penetración del simbolismo matemático por medio de sus estructuras y construcciones

ha permeado a otras ramas del saber, tales como las ciencias biológicas, químicas, físicas o las sociales. Es por tanto de mayúscula importancia que: “Los estudiantes aprendan como descifrar las representaciones simbólicas desde una perspectiva científica exitosa” (p. 118).

Por otro lado, Radford (2006) identifica las escuelas históricas que han servido al “propósito conectivo” entre semiótica e instrucción matemática. Por tanto, propone que tal interfaz puede ser formulada obedeciendo alguna de las siguientes corrientes: La de Ferdinand de Saussure, la de Charles Sanders Peirce o la de Lev S. Vygotski, principalmente.

Un texto más reciente (Semetsky, 2010), destaca el papel de la vertiente peirceana sobre otras, dada: Su inclinación al estudio de los procesos educativos, a que cuenta con importantes elementos pedagógicos intrínsecos y a que el pragmatismo teórico peirceano (expuesto inicialmente alrededor de 1903) trata en buena parte con la importancia de la experiencia en el aprendizaje.

2.1.2 Semiótica peirceana

El antecedente histórico del término semiótica no puede atribuir su formulación al filósofo “antinominalista”, lógico “riguroso” y científico estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914). Tal palabra, ya era asociada en el griego antiguo con los “signos y las señales” (Semetsky, 2010). Según Zecchetto (2002), “en el siglo XVII John Locke habló de una doctrina de los signos con el nombre de semiotiké y Johann Lambert (1764) escribió un tratado que incluía una parte llamada semiótica”. Sin embargo, fue hasta el siglo XX que se planteó el “estatuto científico de una disciplina

de los signos y también el proceso diacrónico de la etimología”, lo anterior derivado de la publicación de los “estudios sistemáticos de Saussure y de Peirce”(p. 7).

En el caso de los trabajos de Peirce, en los que se da bosquejó a su teoría semiótica, estos fueron en su mayoría presentados en las ediciones de Harvard de: Los ocho volúmenes titulados “artículos selectos de Peirce” entre 1931 y 1958 y “los nuevos elementos de la matemática de Peirce” de 1974 (Singer, 1980). Si bien por las fechas en que salieron de imprenta tales obras, pudiesen ser consideradas como ya ampliamente difundidas, no es hasta en fechas recientes que están recibiendo una “atención especial” (Godino, 2010).

Para Lin y Lin (2014), *Peirce fue el primero en argüir que la existencia de signos no es un hecho surgido por sí mismo y así, basado en las diez categorías existenciales aristotélicas y en las doce jerarquías intelectuales kantianas enunció la primera definición académica de signo e identificó su carácter relacional: Signo es “algo que, para alguien, toma lugar de otra cosa (el objeto del signo), no en todos los aspectos de esta cosa, sino solamente de acuerdo con cierta forma o capacidad”* (Radford, 2006, p. 9). Vallejos (1999) aporta:

Un signo, por lo tanto, es un objeto que está, por una parte, relacionado con su objeto y, por otra, con un interpretante, de modo tal que hace que el interpretante tenga una relación con el objeto que corresponde a la misma relación que él tiene con el objeto. Podría decir “similar” a la suya propia, porque una correspondencia consiste en similitud; pero quizás el término correspondencia es más estrecho. (p. 18)

De tal suerte que, para Peirce, semiosis “es la actividad comunicativa o de pensamiento en la que se crean o se usan signos” (Molina *et al.*, 2015, p. 39).

Zecchetto (2002) integra las ideas anteriores y rescata el genuino perfil científico con el que los trabajos de Peirce identifican a la semiótica:

Peirce concibió la semiótica como un campo científico articulado en torno a reflexiones de carácter lógico-filosófico, que tuviera como objeto específico de su investigación la “semiosis”, es decir, el proceso de significación donde participan “un signo, su objeto y su interpretante”. (p. 8)

Por otra parte, Vidales (2009) conduce sus discusiones sobre semiótica sin mostrar adscripción por alguna corriente de autoría específica, por un camino que, aunque no de menor importancia, si puede considerarse menos transitado, el de los “estudios de la comunicación”, de este modo:

La semiótica describe procesos de comunicación no en términos de intercambio de mensajes, sino en términos de producción de sentido, de acción de los signos, de procesos de producción de significado, de sistemas de significación, de procesos culturales o de intercambios simbólicos, todo lo cual parece expandir el espacio de pertinencia no sólo del objeto “comunicación” sino de su naturaleza ontológica, epistemológica y fenoménica. (p. 39)

2.1.3 La tríada peirceana

En los últimos años, se ha discutido sobradamente el aporte de la semiótica como instrumento teórico empleado para el análisis y la descripción de problemas centrales de la DdM (Hoffmann, 2006).

Pero, entretanto y ante tal antecedente, debe entenderse que los siguientes cuestionamientos pueden ser legítimamente planteados: “¿Cómo es que la semiótica peirceana coadyuva en la solución de tales problemas?” y “¿con qué herramienta?”. Siendo estas situaciones muy lejanas a lo “trivial”, se asume que las respuestas no pueden ser formuladas sin antes exponer argumentos oportunos. De tal forma, se precisa primero reconocer que, en vez de ser directo y absoluto, todo acceso a “la realidad” es relativo y se encuentra mediado por signos (Otte, 2001).

Además, la matemática es una ciencia cuya esencia es “genuinamente semiótica” ya que sus recursos pertenecen a esta última disciplina (Hoffmann, 2006). Molina *et al.* (2015) proponen que la construcción de “significado matemático” en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es una actividad que se desarrolla y promueve, fundamentalmente en el seno de la semiótica que deriva de la interacción social entre profesor y estudiantes, a continuación profundizan:

Para describir e interpretar dicha actividad tomamos la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), basada en la teoría del “signo triádico” de Peirce. El signo de Peirce, consiste en la relación triádica que resulta de la integración inseparable de tres relaciones diádicas [...]. Este modelo de la semiosis es esencialmente un “modelo de comunicación” basado en la idea de signo y en la diferenciación que Peirce hace del objeto del signo. (Molina *et al.*, 2015, p. 39-40)

Camargo *et al.* (2015) explican:

En un signo se ponen en relación tres componentes (figura 2): “Objeto”, a lo que se alude en la comunicación; “signo vehículo”, representación con la que se alude al objeto (por ejemplo, palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos, etc.), e “interpretante”, lo que produce el signo vehículo en la mente de quien lo recibe, lo percibe y lo interpreta. (p. 101)

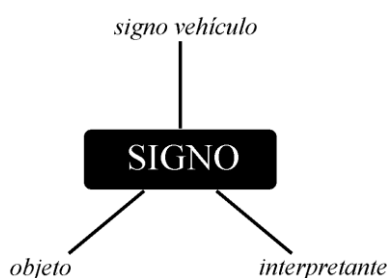


Figura 2. Visión peirceana de signo. (Camargo *et al.*, 2015, p. 101)

La siguiente es una descripción somera de cómo ocurre la semiosis en torno a un determinado objeto real, en un intercambio verbal constituido en dos fases o etapas (ver figura 3). En un acto de interpretación-intra (interacción consigo mismo), la persona A genera un objeto inmediato (oi) seleccionando, de su interpretante (i) asociado al objeto real, algún aspecto específico sobre el que quiere enfocar su comunicación, lo codifica y lo expresa en un signo vehículo (sv) dirigido a la persona B. En un acto de interpretación-inter (interacción con otros) que tiene lugar en el contexto de su conocimiento y experiencia, B decodifica el signo vehículo (sv) emitido por A y genera un interpretante que determina un objeto dinámico (od) que puede estar en mayor o menor concordancia con el inmediato (oi) de A. Luego, en un acto de interpretación-intra, B genera un objeto inmediato (oi), lo codifica en un signo vehículo (sv)

dirigido hacia A, quien a su vez lo decodifica y así se forma un interpretante en la mente de A de donde podría provenir otro objeto dinámico (od). Obsérvese que la relación mediante la cual se compara el objeto dinámico (od) del intérprete con el objeto inmediato (oi) del emisor del signo vehículo (sv) no es de igualdad sino de consonancia. Es prácticamente imposible que en algún momento sean idénticos dada la naturaleza provisional y, por tanto, cambiante de los objetos dinámicos (od), y debido a que ellos están influidos por la experiencia previa y el conocimiento del intérprete. (Molina *et al.*, 2015, p. 40-41)

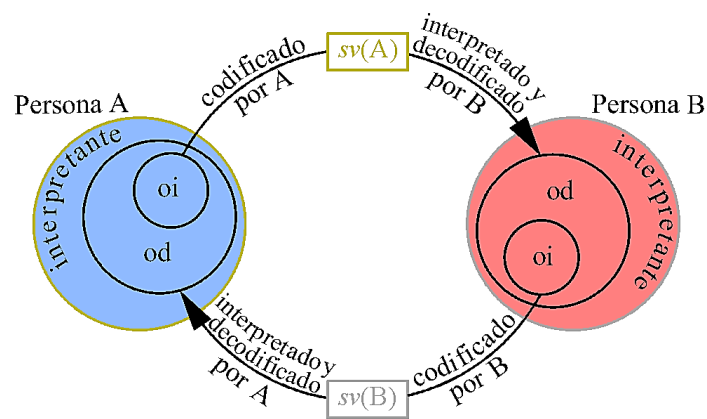


Figura 3. Modelo del curso de una semiosis en un intercambio de dos turnos. (Molina *et al.*, 2015, p. 41)

Se ha retomado en esta sección, uno de los objetos más reconocidos y que apunta a la teoría semiótica peirceana, la representación “tripódica” de signo. La citada “estructura” forma parte del acervo teórico que se incluye como referencial en artículos que atienden tópicos de matemática educativa (por ejemplo, Camargo *et al.*, 2015; D’Amore, 2011; Godino, 2010; Molina *et al.*, 2015).

Ante lo anterior, bien puede validarse la tesis de una vía semiótica que asiste a la didáctica de la matemática en la “generación de significado matemático”, que como apunta Balacheff (1990), debe ser tratada como “temática central”. El conducto, un

modelo tripódico estructural que incide en la no menor tarea (Godino *et al.*, 2003) de la “organización de la enseñanza” en el proceso de comunicación.

2.1.4 Semiótica matemática

Una característica particular de los conceptos matemáticos, es la necesidad de emplear diversas representaciones para que se les pueda asimilar y aprehender en la totalidad de su complejidad.

El papel que juegan los símbolos y signos en el desarrollo del pensamiento matemático es determinante y por ello, la semiótica y todas aquellas disciplinas que forman parte de dicho campo, se han incorporado como ámbito de estudio en el área de la educación matemática, suscitando un interés creciente en los últimos años por considerarse que la consecución de un conocimiento profundo y la presencia de continuas dificultades que experimentan los estudiantes, guardan una estrecha relación con las diferentes maneras de representar las ideas matemáticas. (Macías, 2014, p. 30)

En el trabajo matemático, los símbolos (signos vehículo) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (objetos). Por ello, además del dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico, la semántica, es decir la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y “situaciones problema” de cuya resolución provienen, es un punto crucial en los procesos de la DdM (Godino *et al.*, 2005).

Así, en Blumer (1982), un *objeto o entidad matemática* es: “*Todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando se hace, comunica o aprende matemática*” (p. 8). Objeto (entidad) matemático es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las “cosas físicas” (la posibilidad de distinción o separación de otras “cosas”) a las matemáticas (Godino y Font, 2007).

Si se pretende analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se precisa explicar los distintos tipos de objetos mediante los cuales se describe su actividad y los productos resultantes de la misma (Godino *et al.*, 2005). Más, por una parte, el aprendizaje de las entidades matemáticas no puede ser sino un aprendizaje conceptual y por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad (interacción) sobre y con dichos objetos matemáticos (D’Amore, 2011).

Raymond Duval, uno de los precursores en el campo de la investigación sobre tópicos relacionados con semiótica matemática, expone en diversos trabajos las siguientes definiciones bajo un contexto propio de la DdM:

Semiosis es el quehacer ligado a la producción de representaciones, el cual depende de los signos que conforman la estructura empleada para generarlas, además, se denomina noesis a toda actividad sujeta a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las distintas tareas y procesos cognitivos desarrollados de forma personal (Duval, 1993a; Duval, 1995; Duval, 1996; Duval, 2006a; Duval, 2006b, Duval, 2006c).

La diferencia entre la actividad cognitiva necesaria para la matemática y la requerida por otros campos del conocimiento no radica en la complejidad de los conceptos, sino en las siguientes características:

1. La importancia fundamental de las representaciones semióticas. Una mirada a la historia en el desarrollo del pensamiento matemático revela que una de sus premisas esenciales fue la incorporación creciente de la utilización del simbolismo semiótico. Primero, el tratamiento matemático, por ejemplo el cálculo, requiere en gran parte del apoyo gráfico. Adicionalmente, se puede mencionar el hecho de que los objetos matemáticos, iniciando por los caracteres numéricos, no pueden ser directamente percibidos u observados de manera instrumental, esto es, se encuentran asociados a la utilización de sistemas de representación que posibilitan su nomenclatura.
2. La amplia variedad de simbología empleada en matemática. Además de los sistemas numéricos, la matemática se encuentra provista de representaciones propias de su área de conocimiento como la de figuras geométricas, gráficos y de un tipo de lenguaje “natural”, incluso cuando no se le considera de uso corriente. Descartes fue el primero que utilizó el término “registro de representación” para referirse a los campos simbólicos que operan en matemática, pero lo más relevante es que pueden ser considerados en cuatro tipos básicos:

	Representación discursiva	Representación no discursiva
Registros multifuncionales: Los procesos no pueden ser estructurados como algoritmos	Lenguaje natural <i>Asociaciones verbales (conceptuales)</i> <i>Razonamiento:</i> • <i>Argumentos basados en la observación, las creencias, ...</i> • <i>Deducciones validadas por definiciones o teoremas</i>	Gráfico (y/o geométrico) <i>Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 1 o más dimensiones)</i> • <i>Comprensión operacional y no sólo perceptiva</i> • <i>Construcción con instru-</i>

Registros monofuncionales: Los procesos en su mayoría son algorítmicos	Numérico (sistema de notación) <i>Binario, decimal, fraccional, ...</i>	<i>mental geométrico</i> <i>Gráficos cartesianos</i> • <i>Cambio de sistemas coordenados</i> • <i>Interpolación, extrapolación</i>
	Algebraico (sistema de notación) <i>Simbólicos (lenguajes formales)</i>	

Tabla 2. Clasificación de los distintos tipos de registros de representación que pueden ser abordados por la matemática. (Elaboración propia)

Según Duval:

- *Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural.*
- Diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes e independientes. La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto de sus representaciones mentales. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas la expresa Duval afirmando que; no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos

potencial de sistemas semióticos y por tanto su coordinación por parte del sujeto.

- La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea; la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico. El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de sistemas de representación y los fenómenos de no congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis. (Godino, 2003, p. 56-57)

Para Duval (1993a), *la habilidad de cambiar de registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de la matemática*. Entiende por representaciones semióticas, a las producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento. Tales representaciones no son sólo útiles para fines de comunicación, sino que incluso son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

Además, consecuente con todo lo expuesto líneas antes, Duval plantea los cuestionamientos paradójicos que continúan:

¿Cómo los estudiantes no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos,

necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados?

Estas preguntas son retomadas por distintos autores y han sido denominadas como la “paradoja de Duval” (por ejemplo, D’Amore, 2011; D’Amore, 2012; D’Amore *et al.*, 2015; Macías, 2014; Radford, 2005; Sastre *et al.*, 2008).

De acuerdo con Radford (2005), el problema epistemológico que promueven puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿Cómo llegamos a conocer a los objetos matemáticos generales, dado que no tenemos acceso a estos sino a través de representaciones que nosotros mismos nos hacemos de ellos y nunca de forma directa?

D’Amore (2006) propone una opción para romper el círculo vicioso de la paradoja de Duval al mencionar que en realidad cada representación lleva asociado un “subsistema de prácticas” diferentes de donde emergen entes distintos. Pero la articulación de esos objetos en otro más general requiere un cambio de perspectiva, el paso a otro contexto en el que se plantee la búsqueda de la estructura común en el sistema de prácticas global en el que intervienen los distintos “elementos parciales”.

Así, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El ente matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido, como múltiple. La aprehensión del conocimiento, en matemática, implica la capacidad de cambiar registros.

Para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones, pero se les reconozca en cada una de ellas, es esencial poder “movilizar” varios

registros de representación semiótica: De lenguaje natural, escritura simbólica, gráficos, figuras, etc.

Entendiendo el “tratamiento” de una representación como la transformación de esta en el mismo registro donde ha sido generada y la “conversión” como el cambio de una representación en otra de distinto registro, deberán reconocerse ambas actividades cognitivas como diferentes e independientes, pero fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. (Sastre *et al.*, 2008, p. 2)

El siguiente esquema relaciona tales ideas:

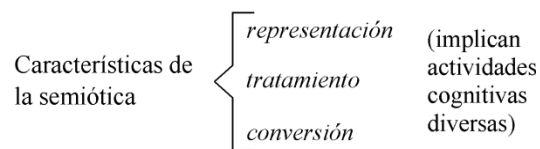


Figura 4. Tres actividades cognitivas asociadas a la semiosis. (D’Amore, 2006, p. 186)

Aznar *et al.* (2010), dan amplitud a lo escrito antes:

La teoría de registros semióticos reconoce tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: La formación de representaciones, el tratamiento y la conversión.

La formación de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados dentro del conjunto de signos del mismo, combinados de acuerdo a sus reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: La determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior.

Los tratamientos y las conversiones están directamente vinculados a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: Su “transformabilidad” en otras representaciones. Particularmente, las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas que sistematicen o regulen su ejecución. Esta es una de las razones por las que “[...]la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos”(Duval, 2004, p.49).

Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las conversiones que no son triviales ni inmediatas porque los elementos involucrados, es decir las unidades significantes, no están en correspondencia uno a uno, se denominan no congruentes. (p. 94-95)

Duval (2006c), expone un ejemplo:

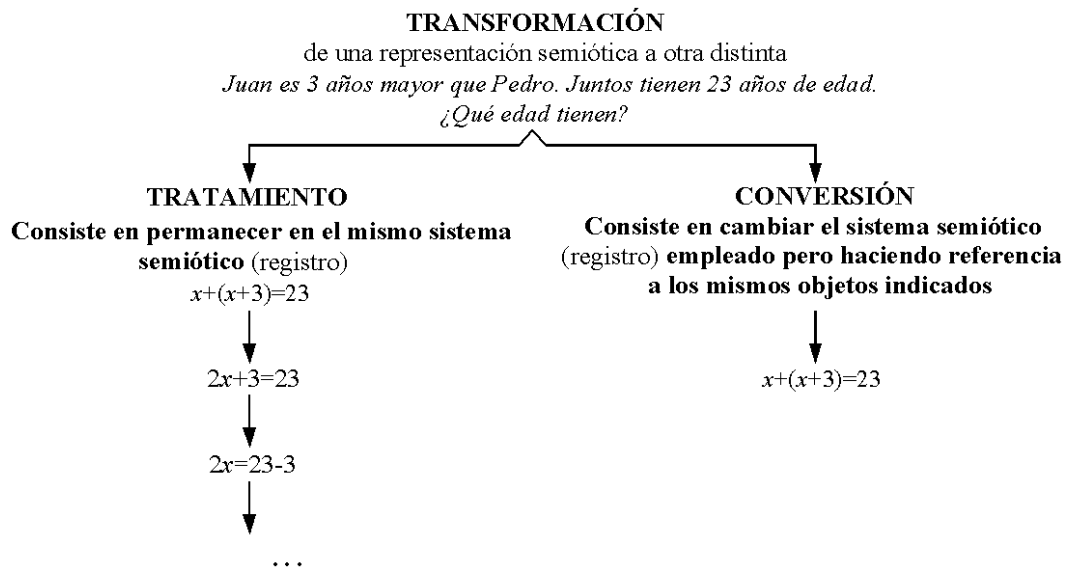


Figura 5. Los dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento matemático.(Duval, 2006c, p. 146)

La investigación en DdMha mostrado la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje; sin embargo, una cuestión que todavía no ha sido suficientemente analizada es la variedad de objetos que desempeñan el papel de representación y de objetos representados.(Mayénet *al.*, 2009, p. 154)

2.2 Perspectiva y algunas definiciones de competencia

Para Íñiguez (2015):

La enseñanza por competencias supone una oportunidad para ayudar a superar algunas de las dificultades del modelo tradicional de enseñanza basado en el aprendizaje memorístico de conocimientos y en el que no suele promoverse la aplicación a situaciones de la “vida real”. El concepto de competencia básica se utiliza como soporte para intentar resolver el interrogante de qué conocimientos

elementales necesita una persona para desenvolverse activamente en la sociedad. Dichos aprendizajes incluyen conocimientos conceptuales y procedimentales, ya que sin el adecuado dominio de tales saberes es difícil ser competentes, resultando imprescindible unas adecuadas habilidades y actitudes. Aunque en los últimos años se están llevando a cabo esfuerzos para promover el desarrollo de las competencias básicas en los distintos niveles educativos, a nuestro juicio, no se potencian suficientemente las conexiones existentes entre las competencias del ámbito científico-matemático. (p. 118)

El programa PISA de la OCDE establece que: *“Una competencia es más que conocimientos y habilidades. Implica la capacidad de responder a demandas complejas, utilizando y movilizandorecursos psicosociales (incluyendo habilidades y actitudes) en un contexto particular”* (OCDE, 2004, p.4).

La Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) define la competencia como:

Un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer las exigencias sociales. Fomentar las competencias es el objetivo de los programas educativos. Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. Pueden estar divididas en competencias de formación profesional en general (competencias genéricas) o con un área de conocimientos (específicas de un campo de estudio). (De Allende y Morones, 2006, p.5)

Philippe Perrenoud señala que: “El concepto de competencia representa una capacidad de estimular varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones” (Perrenoud, 2004, p.11). En esta definición, se incorporan los aspectos que se mencionan a continuación:

- Las competencias no son conocimientos, habilidades o actitudes, más bien “movilizan”, integran y orquestan tales recursos.
- La “movilización” resulta pertinente a la situación particular, siendo esta única, pero se puede tratar de manera análoga a otras ya conocidas.
- Las acciones implicadas en la competencia pasan por operaciones mentales complejas, estas se realizan de un modo más o menos consciente y rápido y adaptado a la situación.
- Las competencias se desarrollan de manera instruccional, pero asimismo en la práctica en la resolución de situaciones cotidianas.

2.3 La competencia matemática

Aunque el conocimiento matemático y los procesos que dicha asignatura conlleva, son prerequisites necesarios para alcanzar la competencia matemática, no son suficientes (Niss, 2003). Por tanto, Niss define competencia matemática como *“habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos”* (p. 218) y propone ocho competencias matemáticas clasificadas en dos grupos y sobre las cuales se exponen las siguientes reflexiones en forma tabular:

Competencias involucradas en preguntar y responder sobre la matemática y a través de ella	• Pensar matemáticamente • Plantear y resolver problemas matemáticos • Saber formular modelos matemáticos
---	---

	• Razonar matemáticamente
Comprensión de entidades matemáticas	• Representación de objetos matemáticos • Manejo de simbología matemática y formalismos • Comunicación en, con y acerca de la matemática • Uso de recursos y herramientas

Tabla 3. Competencias matemáticas según Niss. (Íñiguez, 2015, p. 118)

Pensar matemáticamente implica poder aplicar en nuestra vida diaria el pensamiento cuantitativo y lógico, es decir, conocer las preguntas propias de las matemáticas y conocer los tipos de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer. Un ejemplo concreto de esta capacidad en el área de la estadística es el que exhiben los datos aparecidos en medios de comunicación referidos a balances económicos o resultados electorales.

El planteamiento y la resolución de problemas conllevan identificar, proponer y especificar diversos tipos de situaciones matemáticas. Con frecuencia, los problemas matemáticos que se ofrecen en libros de texto no exigen que los estudiantes elaboren algún tipo de representación previa para resolverles, pudiendo darles respuesta de forma “automática” a partir de la detección de “palabras clave” en el texto y aplicando estrategias de cálculo conocidas. Por otro lado, proponer problemas lo más próximos a la “vida real”, facilita el desarrollo de la competencia matemática, ya que, en definitiva, solucionar problemas es una actividad presente en el quehacer diario.

Saber formular modelos matemáticos es una competencia que se refiere a la capacidad de “ir del mundo real al modelo” y “del modelo al mundo real”, obteniendo e interpretando los resultados. Esto implica el análisis de los

modelos existentes y realizar actividades de modelización en un contexto determinado.

Razonar matemáticamente va unido, a la necesidad de construir adecuadamente los conceptos, de manera consciente, de que las demostraciones no sólo son propias de la matemática sino también de muchos “aspectos de la vida”. Se trata de ser riguroso en los argumentos y no admitir información o declarativas que no fuesen avaladas por las correspondientes demostraciones, además de descubrir las ideas básicas en una línea argumental y concebir formal e informalmente elementos matemáticos y transformar información heurística en pruebas válidas.

La representación de objetos matemáticos, supone la capacidad de comprender y utilizar diferentes clases de presentación (registros) de las entidades matemáticas, por ejemplo, tablas, gráficas, mapas de situaciones o incluso un uso horario.

El manejo de simbología matemática y formalismos forma parte del lenguaje actual, no únicamente matemático, sino a todos niveles, como el empleado, por ejemplo, en los teléfonos móviles. Sin embargo, el uso adecuado de la simbología no debe suponer dificultades para la resolución de un determinado problema. Se deriva la capacidad de traducir lenguaje natural al lenguaje formal y simbólico y poder manipular expresiones que contengan símbolos y fórmulas.

Comunicación en, con y acerca de la matemática se asocia a la capacidad de comprender mensajes orales, escritos o visuales con contenido matemático y expresar los cuestionamientos correspondientes de forma oral, visual o por

escrito con diferentes niveles de precisión teórica y técnica. Tal capacidad está estrechamente relacionada con la adquisición de un nivel suficiente de pericia comunicativa, ya que disponer de una buena aptitud para comunicar en temas cuantitativos formaría parte de la alfabetización matemática.

El uso de recursos y herramientas está asociado al correcto empleo de materiales, aplicaciones informáticas y dispositivos tecnológicos útiles para la actividad matemática.(Íñiguez, 2015, p. 119-120)

Por otro lado, la OCDE ha definido la competencia matemática como: *“La aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en la matemática en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”*. Es por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana. A partir de la definición anterior pueden establecerse los tres ejes alrededor de los cuales el proyecto PISA propone la evaluación de la competencia matemática (OCDE, 2004):

- Los conocimientos propiamente matemáticos, especialmente referidos a cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad.
- Los procesos, esto es, el uso que se hace de los contenidos matemáticos para la resolución de problemas y que corresponden a tres grados de complejidad, ya que es posible asociar una misma tarea con diversos procesos cognitivos y los estudiantes pueden resolverla de diferentes maneras (Sáenz, 2009). Dichos grados son:

- De reproducción: Se trabaja con operaciones comunes, cálculos simples y problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana.
- De conexión: Involucran ideas y pensamientos matemáticos para la solución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios pero que aún incluyen escenarios comunes; además involucran la elaboración de modelos para la solución de problemas.
- De reflexión: Implican la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original. Para tal caso, los estudiantes deben matematizar o conceptualizar las situaciones.
- La presentación de situaciones de contexto próximas al alumnado: Los problemas que se plantean deberán estar siempre relacionados con una situación determinada o un contexto específico. (Íñiguez, 2015, p. 120-121)

También, en Gutiérrez *et al.* (2008) la competencia matemática es:

Es la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

- Finalidades: Utilización, de forma espontánea, de los elementos matemáticos y formas de argumentar y razonar en los ámbitos personal, social y laboral, así como su uso para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y del resto de campos de conocimiento y para tomar decisiones.

- Conocimientos: Entendimiento y comprensión de los elementos matemáticos y de las operaciones y relaciones básicas.
- Destrezas: Habilidades necesarias para aplicar principios y procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de tipo personal, social y laboral. Análisis y producción de información de contenido matemático proveniente de cualquier campo.
- Actitudes: Disposición de tipo propositiva tendiente al respeto de la veracidad y a la búsqueda de la certeza a través del razonamiento. (p. 10)

2.4 La enseñanza contextualizada

La matemática es una herramienta cultural que posibilita el desarrollo de las funciones psíquicas superiores especiales de los sujetos, tales como la atención voluntaria, memoria, lógica y formación de conceptos (D'Ambrocio, 2013). Saber matemáticas no es solamente conocer de definiciones y teoremas para ubicar la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sino que implica el ocuparse de problemas para aprender que la matemática constituye una herramienta (Brousseau, 1986). Desde esta perspectiva sociocultural el sujeto:

No aprende en solitario, sino que, por el contrario, la actividad autoestructurante del sujeto estará mediada por la influencia de los otros y por ello el aprendizaje es en realidad una actividad de construcción de los saberes de una cultura. (Díaz, 2004, p.51).

Más, en contraste, de acuerdo con Camarena (2009):

En el ámbito mundial es reconocida la problemática que enfrentan los estudiantes de todos los niveles educativos con el aprendizaje de la matemática.

Se puede decir que la mayoría del estudiantado no tiene claro por qué estudia matemática, lo cual demerita la motivación hacia esta ciencia; a ello se agrega que, en los objetivos de las carreras técnicas y profesionales se menciona que el egresado deberá poseer una formación integral pero en ninguna parte del currículo se especifica cómo lograrlo. Desde esta perspectiva, la desarticulación entre los cursos de matemática y los de las demás asignaturas se convierte en un cotidiano conflicto para los estudiantes. (p.16)

Las investigaciones que se han efectuado, verificaron que gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de la ingeniería, nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y que con el tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática “pura” que es llevada a los ambientes de aprendizaje, lo cual carece de sentido para aquellos estudiantes que no desean ser matemáticos, como lo describe Chevallard y Johsua (1991).

La matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en esta área se representa con la simbología matemática. Es más, que se emplee como vía a la terminología matemática y se haga uso de tal ciencia en ingeniería, le ayuda a esta última, a tener carácter científico por un lado y le facilita su comunicación con la comunidad científica por el otro (Camarena, 2009).

También, recientemente ha incrementado mucho el interés sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad, lo cual ha llevado a formularse, entre otras, preguntas del tipo: ¿Con qué criterios seleccionamos una tarea u otra? ¿En qué orden las secuenciamos? ¿Cuáles son las que se adaptan mejor a nuestras necesidades o a la situación concreta de aula donde se han de implementar? (Sullivan *et al.*, 2013).

Las tareas son las situaciones que el profesor propone a los estudiantes (problemas, investigaciones, ejercicios, etc.); estas son el punto de partida de la actividad de los estudiantes, lo cual, a su vez produce como resulta, su aprendizaje (Robles et al., 2014).

El trabajo con situaciones contextualizadas aparece como una alternativa que, por una parte, facilita hacer transformaciones de tipo conversión (hacer transformaciones al cambiar de registro) y/o de tipo tratamiento (hacer transformaciones sin cambiar de registro) y por otra, permite relacionar los elementos de los registros involucrados y asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras (Gulfo y Amaya, 2009).

2.5 El aprendizaje basado en problemas

La resolución de problemas se ha convertido en los últimos años en una importante contribución a la DdM en muchas partes del mundo. Puede considerarse como pionera la obra de George Pólya escrita en la década de los años cuarenta del siglo pasado, luego se realizaron más investigaciones en este campo, destacándose los trabajos de Alan H. Schoenfeld, Hort Müller, entre otros (Benítez y Benítez, 2017).

Según Cuicas (1999), “en matemática la resolución de problemas juega un papel muy importante por sus innumerables aplicaciones tanto en la enseñanza como en la vida diaria” (p. 21).

También,

Los nuevos enfoques educativos sostienen la importancia del aprender a pensar y aprender a aprender con el objetivo de desarrollar habilidades cognitivas y sociales en el aula pero con la meta más ambiciosa de desarrollar pensadores racionales e instaurar competencias para la vida en el estudiante.

La resolución de problemas es una propuesta interesante para este propósito. Específicamente, el método de aprendizaje basado en problemas (ABP) está siendo probado en todos los niveles de varios países con muy buenos resultados.

Las nuevas corrientes psicológicas y pedagógicas han hecho cambios en la forma tradicional del proceso de enseñanza-aprendizaje, este se basa en un papel pasivo del estudiante en contraparte de una figura de profesor “sabelotodo”, un modelo estandarizado y un aprendizaje descontextualizado. Actualmente, se considera (busca) un papel activo del estudiante, un profesor que tenga en cuenta sus necesidades, que lo ayude a utilizar su inteligencia, marque tareas ligadas a la realidad significativas y considere el aprendizaje como un proceso finito.

El hecho que algunos conceptos y estrategias erróneos se mantengan puede deberse a ciertas creencias culturales y representaciones sociales, a la forma en que se lleva a cabo el proceso educativo en las escuelas o a la dificultad para aceptar ideas y puntos de vista externos y contradictorios a los propios[...].

Gómez (1998) critica el método pedagógico que se sigue en la mayoría de las escuelas: la repetición de datos hasta su memorización momentánea y la repetición de procedimientos hasta su mecanización es el causante de que los estudiantes no sepan razonar ni resolver problemas. (Vázquez, 2011, p. 73-74)

Por otro lado,

El método del ABP se desprende del enfoque constructivista del aprendizaje y propone enfrentar al estudiante a una situación no estructurada o problemática y comprometerlo para que participe activamente aplicando todos sus conocimientos y habilidades, el papel del profesor es de apoyo y mediación. (Vázquez, 2011, p. 77)

En un documento clásico, H. Barrows (1986) define el ABP como: *“Un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”*.

Engel (1991) considera el ABP como un enfoque hacia el aprendizaje más que como una técnica de enseñanza, como una herramienta para capacitar más que para adquirir conocimiento. Barrows (1996) por su parte asocia el ABP con una estrategia particular de enseñanza en pequeños grupos con un tutor de apoyo, pensada originalmente en la educación de adultos como un método que propusiera las bases fundamentales para la educación continua, formal e informal, durante toda la vida.

Flores et al. (2014) exponen:

Hernández (2007) se refiere a las características del ABP como un método de trabajo activo, con la participación constante de los estudiantes en la generación de conocimientos, orientado a la solución de problemas diseñados para el logro del aprendizaje de ciertos conocimientos, que tiene como objetivo, un aprendizaje centrado en los estudiantes, donde el docente se convierte en tutor o facilitador en el proceso de enseñanza.

El ABP es ideal para estudiantes con capacidades para autodirigirse, dispuestos a la flexibilidad y ambigüedad en las metas de aprendizaje y un contexto de instrucción a través de la lectura y la discusión, participando en este proceso el pensamiento crítico a través de la revisión lógica y razonada de problemas reales, que les permita el incremento de habilidades de aprendizaje independiente y participación colaborativa (López, 2008).

La base teórica para esta técnica que proporciona la psicología cognitiva establece tres principios relacionados con el aprendizaje y los procesos cognitivos: el aprendizaje es un proceso constructivo y no receptivo, la metacognición afecta el aprendizaje y los factores sociales y contextuales ejercen influencia en el aprendizaje (Morales y Landa, 2004). De acuerdo con Cataldiet *al.* (2010), los estudiantes son los responsables de sus propios avances y su rol se orienta a sus propias necesidades y motivaciones, investigando, resolviendo, confrontando opiniones y tomando decisiones por propia iniciativa, donde los docentes juegan un rol de guía o tutor. (p. 2126-2127)

3. Método de la investigación

3.1 Descripción

Se diseñaron y avalaron (esto último de manera colegiada), un total de cinco instrumentos didácticos, a saber: un instrumento de pre prueba, tres instrumentos que conforman la estrategia didáctica y un instrumento de pos prueba. Los instrumentos de pre prueba y pos prueba, fueron aplicados a un total de cuatro grupos de estudiantes de dos programas de licenciatura en ingeniería que se ofrecen en el campus Hermosillo de la Universidad Estatal de Sonora (ingeniería en mecatrónica e ingeniería industrial en manufactura).

Dos de los grupos fueron tratados con la estrategia didáctica y dos no, para la aplicación de los instrumentos uno y tres de la estrategia se distribuyeron con anterioridad, un total de doce videoapplets hechos en el software Geogebra, que

corresponden a distintos formatos (.avi, .flv, .mp4 y .mpg) de los incisos “e” del primer instrumento e inciso “c” del tercero. Lo anterior con objeto de que, indistintamente, del nivel de conocimiento que pudiesen tener los estudiantes del software, de sí lo tuviesen en su versión instalada o incluso contasen en el momento de la aplicación con una óptima conexión a internet, ellos estuviesen en posibilidades de reproducir tales reactivos multiregistro utilizando cualquier dispositivo electrónico, incluso uno de tipo móvil.

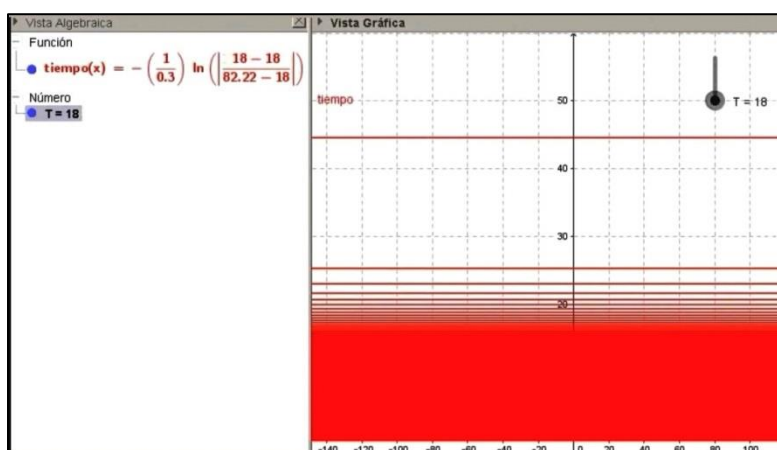


Figura 6. Ventana del video applet del inciso “e” del primer instrumento de la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

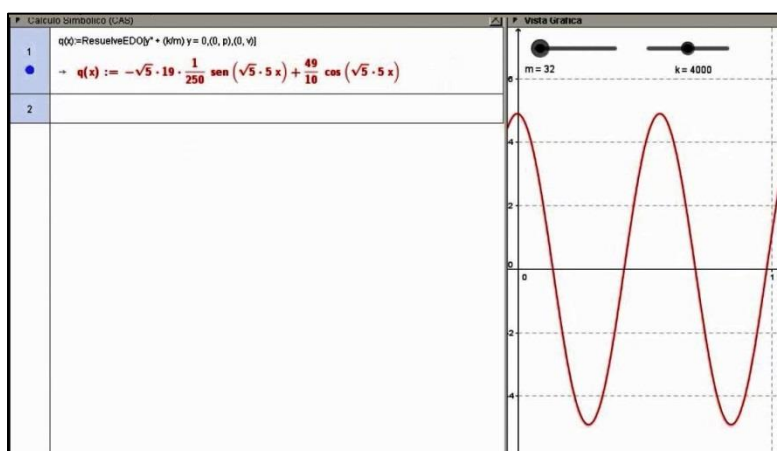


Figura 7. Ventana del video applet del inciso “c” del tercer instrumento de la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Participaron en la investigación un total de 104 estudiantes del departamento de ingeniería del campus Hermosillo de la Universidad Estatal de Sonora, 52 de los cuales integraron el grupo experimental y el resto resolvieron la pos prueba habiendo recibido sólo instrucción de manera tradicional. La experimentación constó de tres sesiones incluyendo la aplicación de la pos prueba. El planteamiento de esta parte es con el formato de estudio de caso. Para Hernández *et al.* (2010) los estudios de caso pueden ser considerados como una clase de diseño experimental. Según Montero y León (2002): “en esta categoría se incluirán todos los estudios experimentales en los que un solo individuo es su propio control” (p. 506).

3.2 Sujetos

Como se mencionó antes, se seleccionaron cuatro grupos que juntos tienen una matrícula de 104 estudiantes de los programas de licenciatura en ingeniería industrial en manufactura (I. I. M.) e ingeniería en mecatrónica (I. M.), ver tabla 4.

Denominación del grupo	Semestre en que están inscritos (en su mayoría)	Cantidad de estudiantes	Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica
I. M. (T)	Tercero	31	Si
I. M. (NT)	Tercero	33	No
I. I. M. (T)	Cuarto	21	Si
I. I. M. (NT)	Cuarto	19	No

Tabla 4. Distribución de los estudiantes que participaron en la etapa experimental por grupo.
(Elaboración propia)

En Hernández *et al.* (2010), “la mayoría de los experimentos utilizan muestras no mayores de 200 personas” (p. 162).



Figura 8. Estudiantes de la Universidad Estatal de Sonora durante la aplicación de la estrategia didáctica.
(Elaboración propia)

3.3 Materiales para la investigación

Para el desarrollo de este trabajo se diseñaron: un instrumento de pre prueba, la estrategia didáctica que incorpora tecnología por medio de la utilización del software Geogebra, la interfaz Texas Instruments CBL (CalculatorBasedLaboratory) versión 2, un sensor de temperatura de la marca Vernier, la calculadora Texas Instruments TI-84 plus, el software Vernier Logger Pro 3, así como un instrumento de posprueba.

Además de lo anterior, se precisó de una computadora personal (móvil) y de un proyector para el desarrollo de la estrategia didáctica (ver imágenes siguientes).



Figura 9. El conjunto de interfaz, calculadora y sensor de temperatura durante la ejecución del primer instrumento de la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

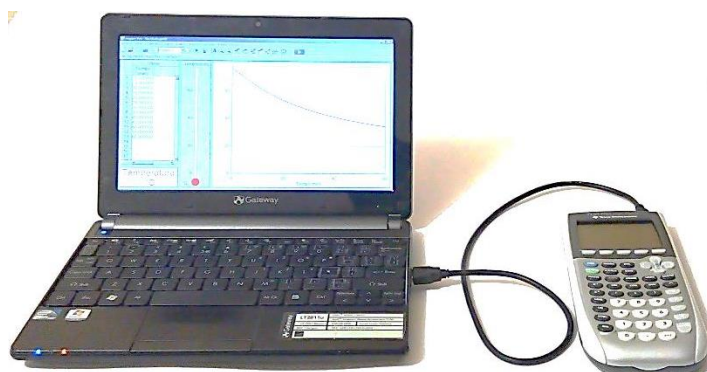


Figura 10. La calculadora TI-84 Plus habiendo transferido las mediciones de temperatura a una computadora personal (móvil) para su posterior graficación con Logger Pro 3.(Elaboración propia)

3.3.1 Instrumento de pre prueba

Se trata de un instrumento de tipo “diagnóstico” formulado con el propósito de establecer las condiciones “iniciales” de los estudiantes en cuanto a la competencia matemática, esto es, el “como se encuentran” en el alcance de la competencia matemática descrita en el capítulo anterior hasta el momento de abordar la estrategia didáctica para los grupos que fueron tratados y de hasta el momento de ser instruidos de forma convencional para los no tratados.

El instrumento de pre prueba (apéndice A), es una reformulación del ejemplo 2-6 (página 53) del libro de ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias de Cengel y Palm (2014), replanteado integrando 6 elementos para su solución, además de uno abierto para expresar argumentos libres, tiene como finalidad “revelar” el estado del estudiante, respecto de la competencia matemática y está orientado a la temática específica de las ecuaciones diferenciales. Es útil como parámetro antes de: abordar los instrumentos propios de la estrategia didáctica, esto en el caso de los estudiantes “tratados” y como primera medición en el caso de los “no tratados” antes de continuar con el esquema instruccional de perfil “tradicional”. En la siguiente tabla se detallan los componentes que identifican a cada elemento del instrumento:

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
---	Aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar un cálculo	Dar solución general a la ecuación diferencial y particular para determinar el parámetros	Conversión	Algebraico	Numérico
a)	Aplicar y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar un cálculo, reconocer la magnitud obtenida y representarla	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el parámetro s y representar dicho resultado sobre la figura 1	Tratamiento	Numérico	Numérico
				Conversión y Representación	Numérico	Gráfico
b)	Comprender	Pensar y ubicar	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el parámetro α y distinguir su valor en la tabla 1	Tratamiento	Numérico	Numérico
c)	Comprender	Ubicar y pensar	Reconocer el valor del parámetro α sobre el eje vertical del gráfico 1, proyectarlo hacia la curva y luego al eje horizontal para hallar la correspondiente magnitud de s	Conversión	Gráfico	Numérico
d)	Aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar un cálculo y comparar	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el parámetro s y confrontar su valor con el obtenido en c)	Tratamiento	Numérico	Numérico
e)	Evaluar	Discernir entre los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como de sus métodos de solución	Discutir sobre las características propias de la ecuación que representa al problema y su procedimiento de resolución	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural

Tabla 5. Descripción de los elementos del instrumento de pre prueba.(Elaboración propia)

3.3.2 Estrategia didáctica

Esta investigación, como se ha dicho antes, explora la utilización de una estrategia didáctica, diseñada teniendo en cuenta principalmente el marco teórico de la semiótica matemática (tratada en el capítulo anterior) y consta de tres instrumentos (apéndice B), en contraparte con la “dinámica tradicional” con que se conduce el curso de ecuaciones diferenciales. Los instrumentos son “versiones ampliadas” y “fortalecidas” (con situaciones planteadas pertinentemente desde la temática semiótica) de ejercicios de bibliografía especializada para el desarrollo de la DdM en específico sobre la asignatura de ecuaciones diferenciales.

Los tres instrumentos se plantearon teniendo también en consideración: la teoría sobre la competencia matemática, la enseñanza contextualizada, el aprendizaje basado en problemas y los resultados de una exploración anterior (Martínez *et al.*, 2016).

Esto es, teniendo en cuenta en principio que todo lo que se hace en matemática tiene relación con la semiótica (Duval, 2006c), además que los conceptos matemáticos necesitan ser manejados en distintas representaciones para que se les pueda abordar totalmente (Macías, 2014) y por tanto, la habilidad para operar dentro de un mismo registro de representación o más aún, de cambiar de registro (tratamiento y conversión, respectivamente) resulta central desde el punto de vista de la DdM (Duval, 1993a).

Por otro lado, el desarrollo por parte de los estudiantes de la estrategia didáctica busca abarcar y cumplir con todos los indicadores de Niss de la tabla 3, de manera fundamental o más acentuada con lo que se refiere a la formulación de modelos matemáticos.

La estrategia didáctica busca abonar en cuanto a opciones de tareas que el profesor pudiese proponer a los estudiantes y que como mencionan Robles *et al.* (2014) llevan como objetivo final el aprendizaje. Al sumar a los planteamientos de los problemas que inicialmente fueron incorporados de fuentes bibliográficas, se busca enriquecer la actividad de tipo “transformacional” para los registros de representaciones semióticas como una virtud de este tipo de ejercicios, tal como destacan Gulfo y Amaya (2009).

También, la estrategia se orienta a, en base a problemas, a un trabajo por parte del estudiante casi en su totalidad autodirigido como destaca López (2008) con una intervención esporádica del profesor.

3.3.2.1 Primer instrumento de la estrategia didáctica

Está basado en el quinto ejercicio de la serie 1.3 de la página 27 del libro de ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera de Zill y Wright (2015) y se encuentra en el apéndice B, la descripción de los elementos es la que se proporciona a continuación:

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
a)	Conocer y aplicar	Representar	Registrar los valores obtenidos de temperatura conforme transcurre el tiempo y trazar el gráfico correspondiente	Tratamiento	Númérico	Númérico
				Conversión	Númérico	Gráfico
b)	Conocer y aplicar	Ubicar y registrar	Reconocer las magnitudes (tiempo y temperatura) que representan las “condiciones de estabilidad”	Tratamiento	Númérico	Númérico
				Conversión	Gráfico	Númérico
c)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico	Describir y discutir la tendencia de la temperatura posterior al “punto de inicio de la estabilidad”	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural
d)	Aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar un cálculo	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el valor de k con las condiciones presentes a los 10 minutos	Conversión	Algebraico	Númérico
e)	Conocer, comprender y aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar un cálculo	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el valor de t con las condiciones dadas y describir y discutir sobre el comportamiento de la solución proporcionada por geogebra	Conversión	Algebraico	Númérico
				Conversión	Gráfico	Lenguaje natural
f)	Evaluar	Discernir entre los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como de sus métodos de solución	Discutir sobre las características propias de la ecuación que representa al problema y su procedimiento de resolución	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural

Tabla 6.Descripción de los elementos del primer instrumento de la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

3.3.2 Segundo instrumento de la estrategia didáctica

Toma como base el problema 14.44 de la página 129 del libro de mecánica para ingeniería (dinámica) de Bedford y Fowler (2008) y está en el apéndice B, la descripción de los elementos es la que sigue:

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
a)	Comprender y conocer	Aplicar, representar y modelar	Trazar los vectores asociados con el problema y desarrollar una estructura algebraica que lo represente	Conversión	Lenguaje natural	Gráfico
				Conversión	Lenguaje natural	Algebraico
b)	Conocer y aplicar	Ejecutar cálculos y representar	Dar solución particular a la ecuación diferencial formulada en a) para determinar el valor de v con distintas magnitudes de t y trazar el gráfico correspondiente	Conversión	Algebraico	Numérico
				Conversión	Numérico	Gráfico
c)	Analizar, conocer y comprender	Pensar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y formular ecuaciones	Interpretar y discutir la relación física que tiene la “ <i>simbología algebraica</i> ” con el problema modelado	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural
				Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural
d)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico	Describir y discutir el “ <i>nexo gráfico</i> ” que guardan los parámetros t y v	Conversión	Gráfico	Lenguaje natural
e)	Evaluar	Discernir entre los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como de sus métodos de solución	Discutir sobre las características propias de la ecuación que representa al problema y su procedimiento de resolución	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural

Tabla 7. Descripción de los elementos del segundo instrumento de la estrategia didáctica.
(Elaboración propia)

3.3.2.3 Tercer instrumento de la estrategia didáctica

Es una versión extendida del inciso “c” del ejemplo 21.1 de la página 550 del libro de mecánica para ingeniería (dinámica) de Bedford y Fowler (2008), se presenta en el apéndice B y la descripción de sus elementos es:

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
a)	Conocer	Aplicar y representar	Trazar los vectores asociados con el problema	Conversión	Lenguaje natural	Gráfico
b)	Conocer y aplicar	Ejecutar cálculos y representar	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el valor de y con distintas magnitudes de t y trazar los gráficos correspondientes	Conversión	Algebraico	Númérico
				Conversión	Númérico	Gráfico
				Tratamiento	Gráfico	Gráfico
c)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico	Describir y discutir sobre el comportamiento de la solución proporcionada por geogebra al cambiar los valores de m y k	Conversión	Númérico	Lenguaje natural
				Conversión	Gráfico	Lenguaje natural
d)	Evaluar	Discernir entre los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como de sus métodos de solución	Discutir sobre las características propias de la ecuación que representa al problema y su procedimiento de resolución	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural

Tabla 8. Descripción de los elementos del tercer instrumento de la estrategia didáctica.
(Elaboración propia)

3.3.3 Instrumento de pos prueba

Es el caso de un instrumento escrito para “hallar” las condiciones “finales” de los estudiantes respecto de la competencia matemática, posterior a la capacitación con la estrategia didáctica, esto es, para los dos grupos que fueron sometidos a ella y ulterior a la enseñanza recibida bajo instrucción tradicionalista referido esto último a los dos grupos que no conocieron los instrumentos de la estrategia.

El instrumento de pos prueba (apéndice C), es una situación didáctica que tiene su sustento en el ejemplo de la página 20 del libro de ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera de Zill y Wright (2015), cuenta con 12 elementos para su solución, además de uno abierto para expresar argumentos libres. Su utilidad es, de un parámetro final que permitirá un comparativo de resultados entre las dos vertientes educativas, la que promueve el uso de una estrategia semiocéntrica y la dinámica de la tradición. La tabla 9 especifica los componentes que identifican a cada elemento del instrumento:

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
a)	Conocer, comprender y aplicar	Pensar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y formular ecuaciones	Interpretar el significado de r y definir ambas ecuaciones diferenciales	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico
				Tratamiento	Algebraico	Algebraico
				Conversión	Algebraico	Lenguaje natural
b)	Comprender y aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar un cálculo	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el valor de P correspondiente a 2020	Conversión	Lenguaje natural	Numérico
				Tratamiento	Numérico	Numérico
c)	Aplicar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar dos cálculos	Dar solución particular a la ecuación diferencial para determinar el valor de t correspondiente a dos distintas magnitudes de P	Conversión	Algebraico	Numérico

Tabla 9. Descripción de los elementos del instrumento de pos prueba. (Elaboración propia)

Identificación (inciso)	Nivel	Competencia	Indicador de logro	Actividad(es) semiótica(s) asociada(s)	Registro inicial	Registro final
d)	Aplicar	Representar	Trazar el gráfico que relaciona año y cantidad de población referenciando a los datos de la tabla 1	Conversión	Numérico	Gráfico
e)	Comprender y aplicar	Representar	Interpretar el significado de r y trazar ambos gráficos	Conversión	Numérico	Gráfico
				Conversión	Algebraico	Gráfico
f)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y distinguir	Describir y discutir la tendencia poblacional a través del tiempo e indicar la función que mejor ajusta a dicho comportamiento	Conversión	Numérico	Lenguaje natural
				Conversión	Numérico	Algebraico
				Conversión	Gráfico	Algebraico
g)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico	Describir y discutir la tendencia de los pronósticos poblacional y de recursos (según el modelo malthusiano) para 2050	Conversión	Gráfico	Lenguaje natural
h)	Aplicar	Ubicar y ejecutar cálculos	Obtener diferencias entre magnitudes identificadas sobre los gráficos	Conversión	Gráfico	Numérico
i)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico	Describir y discutir la tendencia de los pronósticos poblacional y de recursos (según el modelo de la ONU) para 2050	Conversión	Gráfico	Lenguaje natural
j)	Comprender y conocer	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ubicar	Describir y discutir la situación a la cual se alude cuando las curvas de recursos y población intersecan y señalar tales puntos	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural
				Conversión	Lenguaje natural	Gráfico
k)	Comprender y aplicar	Representar	Reconocer el “recorrido máximo” entre dos gráficas y trazar una resultante	Conversión	Lenguaje natural	Gráfico
				Tratamiento	Gráfico	Gráfico

Tabla 9.Descripción de los elementos del instrumento de pos prueba.(Continuación)

1)	Evaluar	Discernir entre los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales, así como de sus métodos de solución	Discutir sobre las características propias de la ecuación que representa al problema y su procedimiento de resolución	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural
----	---------	---	---	------------	------------	------------------

Tabla 9.Descripción de los elementos del instrumento de pos prueba.(Continuación)

3.4 Pruebas estadística no paramétrica

En esta parte se brindan los fundamentos básicos descriptivos de las pruebas sobre las que descansa la evaluación (y posterior argumentación) de los resultados que se obtuvieron en la etapa experimental por los cuatro grupos que conforman este estudio de caso. Se comienza con un panorama en el que se aborda el perfil de lostest y se promueve el razonamiento acerca del porque se trata de las herramientas pertinentes para trabajar la sección de resultados, que es de esencial importancia en el método.La manera en que se distribuyó la aplicación de las pruebas a los datos obtenidos en la etapa experimental es según la figura 11:

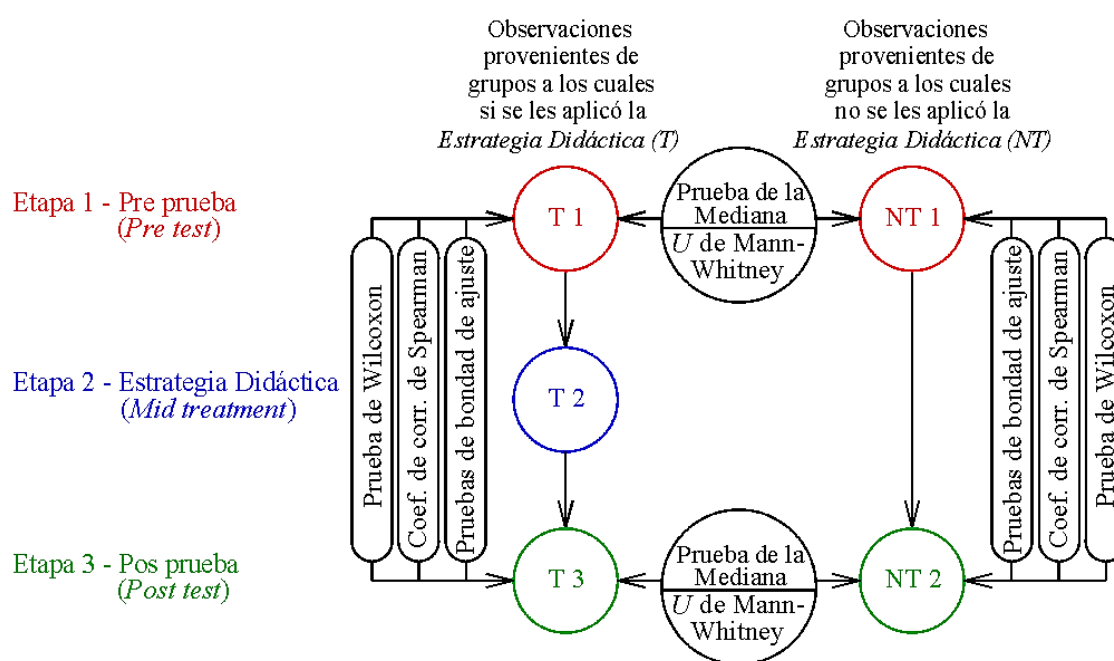


Figura 11. Diseño estadístico de la etapa experimental.(Elaboración propia)

El componente matemático que se plantea no es “profundo”, ya que, no busca la valía desde una perspectiva “puramente matemática”, sino dar claridad suficiente a los profesionales de la DdM, de las características de las pruebas y otras temáticas necesarias para entender el uso que se hace en lo sucesivo de la estadística no paramétrica, independientemente de la formación con que cuenten los que dirigen el proceso de enseñanza de la matemática.

3.4.1 Introducción

En esta parte se exponen elementos que describen los *aspectos generales* de las comúnmente denominadas pruebas estadísticas “*no paramétricas*”, así también, se ofrecen elementos tendientes a marcar una línea diferencial con otros procedimientos estadísticos.

Lindet *al.* (2012) señalan, como una característica que identifica a las “*pruebas paramétricas*”, su asociación con *hipótesis* que son enunciadas en referencia a una, dos y tres o más, *medias poblacionales*. Además, debe tenerse en cuenta que la realización de tales test descansa en el supuesto de que:

[...] las poblaciones siguen la distribución de probabilidad normal. Sin embargo, hay algunas en las cuales no es necesaria una suposición respecto de la forma de la población. A estas pruebas se les conoce como no paramétricas. Esto significa que *no es necesario suponer que existe una población normal*.

También hay pruebas exclusivas para datos a escala de medición nominal. [...] los datos nominales son los “más bajos” o más primitivos. En este tipo de

medición, los datos se clasifican en categorías donde no hay un orden natural, como el género de los representantes del congreso, el estado donde nacieron los estudiantes o la marca de mantequilla de maní que compró. (p. 649)

Según Siegel y Castellan (1998):

Una prueba estadística paramétrica especifica *ciertas condiciones acerca de la distribución de respuestas en la población* de la cual se ha obtenido la muestra investigada. Ya que estas condiciones no son ordinariamente evaluadas, sólo se suponen. La significación de los resultados de la prueba paramétrica depende de la validez de estas suposiciones.

Una prueba estadística no paramétrica está basada en un modelo que especifica sólo *condiciones muy generales y ninguna acerca de la forma específica de la distribución* de la cual fue obtenida la muestra. Ciertas suposiciones están asociadas con la mayoría de las pruebas no paramétricas, a saber: Que las observaciones son independientes y quizá que la variable en estudio es continua; pero estas suposiciones son menores y más débiles que aquellas asociadas con las pruebas paramétricas. Más aún, los procedimientos no paramétricos prueban diferentes hipótesis acerca de la población, que los procedimientos paramétricos no hacen. Por último, a diferencia de las pruebas paramétricas, existen pruebas no paramétricas que pueden aplicarse apropiadamente a datos medidos en una escala ordinal y otras pruebas para datos en una escala nominal o categórica. (p.55)

En general los métodos paramétricos son más sensibles a las suposiciones para muestras de tamaño pequeño y, para muchos de ellos, su aplicación se encuentra

limitada a aquellas observaciones que tienen un carácter cuantitativo, es decir, se supone que lo que se observa es una cantidad numérica continua como el volumen de ventas semanal, la cantidad de cierta sustancia que se vacía en un recipiente, la resistencia de una muestra de metal y otros más. (Canavos, 1988, p.572)

Infante y Zarate De Lara (2012) exponen en una dirección similar:

Una característica común a las técnicas de inferencia paramétrica es que en todas ellas se supone una función de probabilidades para las variables aleatorias que integran la muestra. Más aún, es casi inevitable que el modelo probabilístico que se adopte sea el normal, o que termine usándose este invocando al teorema central del límite. Mientras que en muchos casos la suposición se justifica, en muchos otros es claramente absurda. Las técnicas no paramétricas, se caracterizan porque *su aplicación no depende de un modelo probabilístico específico, sino que son válidas bajo condiciones distribucionales muy amplias*. Por esta razón [...] pueden llamarse *independientes de la distribución*, que es el nombre con el que algunos autores las identifican. El nombre [...] de técnicas no paramétricas se deriva del hecho de que en este conjunto de métodos no es indispensable que las observaciones se modelen en términos de una familia paramétrica de distribuciones, por ejemplo, $N(\mu, \sigma^2)$. Aquí las llamaremos técnicas no paramétricas en atención a la popularidad de este nombre, aunque quizá sea más adecuado el primero. (p.507)

Triola(2013) amplía lo anterior:

Aunque el término no paramétrica sugiere que una prueba no está basada en un parámetro, existen algunas pruebas no paramétricas que sí dependen de un parámetro como la *mediana*. Sin embargo, las pruebas no paramétricas no requieren de una distribución particular, por lo que algunas veces se les conoce como *pruebas de distribución libre*. A continuación se enuncian las principales ventajas y desventajas de los métodos no paramétricos.

Ventajas de los métodos no paramétricos:

3. Los métodos no paramétricos pueden aplicarse a una amplia variedad de situaciones, puesto que no tienen los requisitos más estrictos de los métodos paramétricos correspondientes. En particular, los métodos no paramétricos no requieren de poblaciones distribuidas normalmente.
4. A diferencia de los métodos paramétricos, los métodos no paramétricos a menudo pueden aplicarse a datos categóricos, como el género de quienes responden una encuesta.

Desventajas de los métodos no paramétricos:

3. Los métodos no paramétricos tienden a desperdiciar información porque los datos numéricos exactos suelen reducirse a una forma cualitativa.
4. Las pruebas no paramétricas no son tan eficientes como las paramétricas, de manera que con una prueba no paramétrica generalmente necesitamos evidencia más fuerte (como una muestra más grande o diferencias mayores) para rechazar una hipótesis nula.

Cuando se satisfacen los requisitos de distribuciones poblacionales, las pruebas no paramétricas generalmente son menos eficaces que sus contrapartes paramétricas, pero la reducción en la eficiencia puede compensarse con un tamaño de muestra más grande.(p.662)

Más:

[...] en general (la citada) pérdida de eficiencia no es grande y con frecuencia la diferencia en el tamaño de las muestras es pequeña. Cuando las distribuciones fundamentales no están cerca de una distribución normal, los métodos no paramétricos tienen mucho que ofrecer. Con frecuencia proporcionan una mejora considerable en comparación con los métodos paramétricos de la teoría de distribución normal. (Montgomery y Runger, 2003, p.727)

Además:

Otro aspecto de las técnicas de inferencia convencionales, es que invariablemente hacen uso de la(s) media(s) y la(s) varianza(s) muestral(es). Esto, puede ser una limitación severa al uso de tales técnicas paramétricas, ya que el cálculo de las estadísticas $\bar{X}$ y S^2 requiere realizar operaciones aritméticas tales como la suma y el producto con los elementos de la muestra. *En muchos experimentos los datos que se obtienen no admiten la operación de suma.* (Infante y Zarate De Lara, 2012, p.507)

Por otro lado, el uso de la *mediana como fundamento de una prueba* (lo cual es válido en el caso de las no paramétricas, como se arguye líneas antes) exhibe propiedades interesantes: *Menor sensibilidad* que cuando se emplea la media a

oscilaciones de los valores de la variable en cuestión, *facilidad para el cálculo* cuando se tienen datos agrupados en intervalos, incluso cuando alguno no está acotado e invulnerabilidad ante la dispersión. De hecho, la mediana es *más representativa* que la media aritmética cuando la población es bastante heterogénea.

En general, si es posible aplicar tanto métodos paramétricos como no paramétricos en un problema particular, se usaría el procedimiento paramétrico más eficiente. Sin embargo, *los supuestos del método paramétrico pueden ser difíciles o imposibles de justificar*. Por ejemplo, los datos pueden estar en la forma de rangos. *Esta situación es frecuente en la práctica*. Por ejemplo, puede recurrirse a un panel de jueces para evaluar la calidad global de 10 formulaciones diferentes de una bebida refrescante asignando a la “mejor” formulación el rango 1, a la “segunda mejor” formulación el rango 2 y así sucesivamente. Es improbable que los datos ordenados por rangos satisfagan el supuesto de normalidad. Muchos métodos no paramétricos incluyen el análisis de rangos y, por consiguiente, *se ajustan idealmente a este tipo de problema*. (Montgomery y Runger, 2003, p.727)

3.4.2 Prueba de hipótesis estadística

Es común que, uno de los problemas fundamentales que se enfrenta al trabajar con estadística, sea la *formulación de un procedimiento de decisión* que tiene su base en los datos reunidos y que pueda producir y traducir una conclusión acerca de algún sistema científico. Es también, parte del “esquema rutinario” el que se postulen o se hagan conjeturas acerca de dicho sistema.

Además, [...] se deben utilizar los datos experimentales y tomar decisiones basadas en ellos. En cada caso la conjetura se puede expresar en forma de hipótesis estadística. Los procedimientos que conducen a *la aceptación o al rechazo de hipótesis estadísticas* como estas comprenden un *área importante de la inferencia estadística*. (Walpole et al., 2012, p.319)

Lind et al. (2012) exponen, “en el análisis estadístico se establece una afirmación, una hipótesis, se recogen datos que posteriormente se utilizan para probar la aserción. Entonces, una hipótesis estadística es: *Afirmación relativa a un parámetro de la población sujeta a verificación*” (p. 334).

Por otro lado, “la prueba de hipótesis comienza con una afirmación, o suposición, sobre un parámetro de la población” y por tanto, se trata de un “procedimiento basado en evidencia de la muestra y la teoría de la probabilidad para determinar si la hipótesis es una afirmación razonable” (p. 335)

Siegel y Castellan (1998), subrayan que:

En las ciencias de la conducta llevamos a cabo investigaciones con el propósito de probar hipótesis que derivamos de las teorías de la conducta. Una vez establecida una hipótesis estadística que nos parece importante para cierta teoría, recabamos datos que nos permitan decidir acerca de esa hipótesis. Nuestra decisión puede conducirnos a sostener, revisar o rechazar la hipótesis y la teoría de la cual se originó. (p.27)

[...] en muchos problemas [...] es necesario decidir si se acepta o se rechaza un enunciado acerca de algún parámetro. Al enunciado se le llama hipótesis y al

procedimiento para tomar decisiones acerca de la hipótesis se le llama prueba de hipótesis. Se trata de uno de los aspectos más útiles de la inferencia estadística, ya que muchos problemas de toma de decisiones, pruebas o experimentos [...] pueden formularse como problemas de prueba de hipótesis. (Montgomery y Runger, 2003, p.295)

En Canavos (1988):

Una hipótesis estadística es una afirmación con respecto a alguna característica desconocida de una población de interés. La esencia de probar una hipótesis estadística es el decidir si la afirmación se encuentra apoyada por la evidencia experimental que se obtiene a través de una muestra aleatoria. En forma general, la afirmación involucra ya sea a algún parámetro o a alguna forma funcional no conocida de la distribución de interés a partir de la cual se obtiene una muestra aleatoria. La decisión acerca de si los datos muestrales apoyan estadísticamente la afirmación se toma con base en la probabilidad y, si esta es mínima, entonces será rechazada. (p.303)

Infante y Zarate De Lara (2012), destacan el carácter dicotómico de la hipótesis estadística relativo de la proposición, un objeto matemático de uso común en los diversos cuerpos del conocimiento matemático:

[...] una hipótesis estadística es esencialmente diferente de una proposición matemática, ya que esta última puede ser demostrada concluyentemente, o refutada en su caso, mientras que en una hipótesis estadística, cualquiera que sea la decisión que se tome con respecto a su veracidad, la probabilidad de una decisión errónea siempre está presente.

Una hipótesis estadística es esencialmente diferente de una proposición matemática, debido a que la decisión sobre la veracidad de la hipótesis estadística se funda en el comportamiento de una variable aleatoria y, en consecuencia, *pueden tomarse decisiones equivocadas*. (p.257)

Walpole et al. (2012), añaden a lo anterior:

La verdad o falsedad de una hipótesis estadística nunca se sabe con absoluta certeza, a menos que se examine toda la población, lo cual, por supuesto, sería poco práctico en la mayoría de las situaciones. En vez de eso se toma una muestra aleatoria de la población de interés y se utilizan los datos contenidos en ella para proporcionar evidencia que respalde o no la hipótesis. La evidencia de la muestra que es inconsistente con la hipótesis planteada conduce al rechazo de la misma. (p.319)

La estructura de la prueba de hipótesis se establece usando el término hipótesis nula, el cual se refiere a cualquier hipótesis que se desea probar y se denota con H_0 . El rechazo de H_0 conduce a la aceptación de una hipótesis alternativa, que se denota con H_1 . La comprensión de las diferentes funciones que desempeñan la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1) es fundamental para entender los principios de la prueba de hipótesis. La hipótesis alternativa H_1 por lo general representa la pregunta que se responderá o la teoría que se probará, por lo que su especificación es muy importante. La hipótesis nula H_0 anula o se opone a H_1 y a menudo es el complemento lógico de H_1 . (p.320)

Gravetter y Wallnau (2014), explican:

La hipótesis nula (H_0) está referida a un “*no cambio generalizado*” en la población, a una “*no diferencia*” o “*no asociación*”. En el contexto del experimento, H_0 predice que la variable independiente (*el tratamiento*) “*no tiene efecto alguno*” sobre la variable dependiente (la puntuación) para la población.

La hipótesis alternativa (H_1) establece que “*hay un cambio generalizado*” en la población, una “*diferencia*” o una “*asociación*”. Dentro del entorno del experimento, H_1 pronostica como la variable independiente (*el tratamiento*) “*ejerce un efecto*” relativo a la variable dependiente (la puntuación). (p.207)

Como consecuencia de lo anterior, el analista llegará a una de las siguientes conclusiones:

1. Rechazar H_0 a favor de H_1 debido a evidencia suficiente en los datos.
2. No rechazar H_0 debido a evidencia insuficiente en los datos.

Obsérvese que las conclusiones no implican una “aceptación de H_0 ” formal y literal. La aseveración de H_0 a menudo representa el “status quo” contrario a una nueva idea, conjetura, etc., enunciada en H_1 ; en tanto que no rechazar H_0 representa la conclusión adecuada. (Walpole et al., 2012, p.321)

Conforme a Infante y Zarate De Lara (2012), en general, para cualquier juego de hipótesis se tienen las posibilidades que se presentan en la siguiente tabla:

		Situación real (desconocida)	
		H_0 es cierta	H_0 es falsa
Decisión tomada	Rechazar H_0	Error (Llamado Error Tipo I)	Decisión correcta
	No rechazar H_0	Decisión correcta	Error (Llamado Error Tipo II)

Tabla 10. Tipos de decisiones y errores al deducir sobre H_0 . (Infante y Zarate De Lara, 2012, p.257)

La decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula está basada en información contenida en una muestra sacada de la población de interés. Esta información toma estas formas:

- Estadística de prueba: Un solo número calculado a partir de los datos muestrales.
- Valor p : Probabilidad calculada usando la prueba estadística.

Cualquiera de estas mediciones, o ambas, actúan como quienes toman decisiones para el investigador al decidir si rechazar o aceptar H_0 . (Mendenhall *et al.*, 2010, p.345)

Para Siegel y Castellan (1998), el procedimiento general de la prueba de hipótesis incluye varios pasos que se enuncian a continuación (en orden de ejecución):

1. Establecer la hipótesis nula (H_0) y la alterna (H_1). Decidir qué datos se van a recabar y en qué condiciones.
Seleccionar una prueba estadística (con su modelo estadístico asociado) para probar H_0 .
2. De entre varias pruebas que pueden usarse con un diseño de investigación determinado, elegir el modelo de prueba que se aproxime lo más cercanamente posible a las condiciones de la investigación en términos de las suposiciones en las cuales está basada la prueba.
3. Especificar un nivel de significancia (α) y un tamaño de muestra (n).
4. Encontrar la distribución muestral de la prueba estadística bajo la suposición de que H_0 es verdadera.

5. Con base en los puntos 2, 3 y 4, definir la región de rechazo para la prueba estadística.
6. Recabar los datos. Usando los datos obtenidos de la(s) muestra(s), computar el valor de la prueba estadística. Si ese valor está en la región de rechazo, la decisión es rechazar H_0 ; si ese valor está fuera de esta región, la decisión es que H_0 no puede ser rechazada en el nivel de significación elegido. (p.28)

3.4.3 Valor crítico de un estadístico de prueba y valor p

En esta sección se abona argumentación referente al tópico de las “cantidades” que se emplean para derivar en la decisión con respecto a la hipótesis nula y que fueron tratadas brevemente en el apartado anterior, lo ya citado cobra relevancia procedimental dado que, como se trata líneas antes, el carácter de la hipótesis en estadística es lejano a la terminancia que se atribuye por ejemplo, a la proposición.

En Mendenhallet *al.* (2010), dos son las “herramientas equivalentes” para juzgar la toma de decisiones con referencia a una prueba de hipótesis estadística: El valor observado del *estadístico de prueba* y su *valor p* . Llevando lo anterior a términos específicos:

Recuerde [...] que hay dos formas de efectuar una prueba de hipótesis:

- El método del valor crítico, en el cual se propone una región de rechazo basada en los valores críticos de la distribución muestral de la estadística. Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se puede rechazar H_0 .

Hay que recordar que el valor crítico de un estadístico de prueba es aquel que localiza la frontera de la región de rechazo.

- El método del valor p , para el cual se calcula el valor p con base en el valor observado de la estadística de prueba. Si el valor p es menor que el nivel de significancia, α , se puede rechazar H_0 . (p.394)

El *valor crítico* constituye por consiguiente, un “*punto de división entre la región en que se rechaza la hipótesis nula y aquella en la que se acepta*” (Lind et al., 2012, p. 339).

Por otro lado, la incorporación gradual de la segunda forma no fue posible sino hasta las dos últimas décadas con el advenimiento de los valores p generados por computadora, haciendo que estas probabilidades se volvieran componentes esenciales al informar los resultados del análisis estadístico.

Así entonces, el *modo “tradicional”* para reportar los resultados de una prueba de hipótesis, es:

[...] *enunciando que la hipótesis nula fue rechazada o no, en un valor α o nivel de significación especificado*. Pero este enunciado de las conclusiones con frecuencia es inadecuado, pues no le da al responsable de tomar decisiones ninguna idea acerca de si, el valor calculado del estadístico de prueba apenas llegó a la región de rechazo o si se adentró bastante en ella. Además, al enunciarse los resultados de esta manera se impone el nivel de significación predefinido a los demás usuarios de la información. Este enfoque puede ser insatisfactorio, pues algunos responsables de tomar decisiones podrían sentirse incómodos con los riesgos que implica $\alpha = 0.05$, por ejemplo.

A fin de evitar estas dificultades, en la práctica se ha adoptado de manera generalizada el enfoque del valor p . El valor p es la probabilidad de que el estadístico de la prueba tome un valor que es al menos tan extremo como el valor observado del estadístico cuando la hipótesis nula H_0 es verdadera. Por tanto, un valor p comunica bastante información acerca del peso de la evidencia en contra de H_0 y así el responsable de tomar decisiones puede sacar una conclusión con cualquier nivel de significación especificado. (Montgomery y Runger, 2003, p.312)

Montgomery y Runger (2003), precisan: “El valor p es el nivel de significación más bajo que llevaría al rechazo de la hipótesis nula H_0 con los datos dados”(p.312).

Mendenhall *et al.* (2010), orientan sus argumentos de forma semejante:

El valor p o nivel de significancia observado de una prueba estadística es el valor más pequeño de α para el cual H_0 se puede rechazar. Es el riesgo real de cometer un error tipo I, si H_0 es rechazada con base en el valor observado del estadístico de prueba. El valor p mide la fuerza de la evidencia contra H_0 .

También,

Un valor p pequeño indica que el valor observado del estadístico de prueba se encuentra alejado del valor hipotético de μ . Esto presenta fuerte evidencia de que H_0 es falsa y debe ser rechazada. Valores de p grandes indican que la estadística observada de prueba no está alejada de la media hipotética y no apoya el rechazo de H_0 .

Si el valor p es menor o igual a un nivel de significancia α asignado previamente, entonces la hipótesis nula puede ser rechazada y se puede informar que los resultados son estadísticamente significativos al nivel α . (p.351)

La determinación del valor p no sólo da como resultado una decisión respecto de H_0 , sino que brinda la oportunidad de observar la fuerza de la decisión. Un *valor p muy pequeño*, como 0.0001, indica que existe *poca probabilidad de que H_0 sea verdadera*. Por otra parte, un valor p de 0.2033 significa que H_0 no se rechaza y que existe poca probabilidad de que sea falsa. (Lind et al., 2012, p. 346)

Los autores declaran, dando amplitud a lo anterior, que el empleo del valor p se pone de manifiesto ya que:

[...] la utilización de diferentes niveles de significancia puede llevar a diferentes conclusiones. Por ejemplo, si en una prueba de cola derecha, el estadístico de prueba es $z = 2.03$, se puede rechazar H_0 al nivel de significancia de 5% porque el estadístico de prueba excede de $z = 1.645$. Sin embargo, no se puede rechazar H_0 al nivel de significancia de 1% porque el estadístico de prueba es menor a $z = 2.33$ (figura 12). Para evitar ambigüedades en las conclusiones, algunos experimentadores prefieren usar un nivel de significancia variable llamado valor p para la prueba. (p.351)

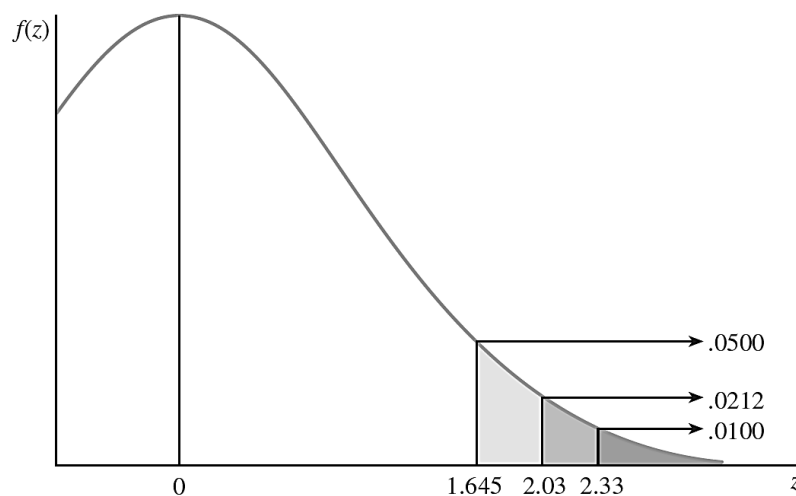


Figura 12. Regiones variables de rechazo. (Mendenhall et al., 2010, p.351)

3.4.4 Prueba ji cuadrada de la bondad de ajuste

Según Siegel y Castellan (1998):

Frecuentemente, en el estudio que un investigador lleva a cabo es necesario conocer el número de sujetos, objetos o respuestas que caen en varias categorías. Por ejemplo, un grupo de pacientes puede ser clasificado de acuerdo con su tipo preponderante de respuestas en la prueba de Rorschach y el investigador puede predecir que ciertos tipos serán más frecuentes que otros. O los niños pueden ser categorizados de acuerdo con sus modalidades de juego más frecuentes, siendo la hipótesis que tales modalidades diferirán en frecuencia de una manera prescrita. O las personas pueden ser categorizadas con base en si están “a favor de”, “indiferentes a” u “opuestas a” una opinión que facilite al investigador probar la hipótesis de que esas respuestas difieren en frecuencia.

La prueba ji cuadrada es adecuada para analizar datos como estos. El número de categorías puede ser dos o más. La técnica es del tipo de *bondad de ajuste* en que puede ser usada para probar si existe una diferencia significativa entre un número *observado* de objetos o respuestas que caen en cada categoría y un número *esperado* basado en la hipótesis nula. Es decir, la prueba ji cuadrada evalúa el grado de correspondencia entre lo obtenido en las observaciones y lo que se espera en cada categoría. (p.67)

Más:

La prueba de bondad de ajuste es una de las pruebas estadísticas de uso más común. Es particularmente útil porque requiere sólo un nivel nominal de

medición. Por ello es posible llevar a cabo una prueba de hipótesis con datos que han sido clasificados en grupos. [...]. Como su nombre lo indica, el propósito de la prueba de bondad de ajuste es comparar una distribución observada con una distribución esperada. (Lindet *al.*, 2012, p. 649)

Este modelo, obtenido por K. Pearson en 1900, *mide la discrepancia entre la frecuencia observada y la esperada teóricamente*, con base en una distribución hipotética.

La prueba de bondad de ajuste ayuda a decidir si los resultados de un experimento concuerdan con los esperados de acuerdo con alguna ley, modelo o teoría científica. (Elorza, 2000, p. 547)

Se trata de una prueba no paramétrica, *“útil para determinar si los datos de una muestra pueden modelarse mediante una función probabilística específica”*(Infante y Zarate De Lara, 2012, p.540).

En Mendenhallet *al.* (2010), es un diseño estadístico “para determinar si los datos son consistentes con datos tomados de una distribución particular de probabilidad, posiblemente normal, binomial, de Poisson u otras distribuciones” (p.615).

Puesto que hacemos una prueba de qué tan bien se ajusta una frecuencia de distribución observada a alguna distribución teórica especificada, el método [...] se llama prueba de bondad de ajuste.

La prueba de bondad de ajuste se utiliza para someter a prueba la hipótesis de que una distribución de frecuencias se ajusta a (o coincide con) alguna distribución establecida. (Triola, 2013, p.586)

La prueba se basa en el nivel de ajuste (diferencial) que existe entre la frecuencia de ocurrencia de las observaciones en una muestra tomada y las frecuencias esperadas que se obtienen a partir de la distribución hipotética (Walpole *et al.*, 2012).

En correspondencia con lo anterior, Canavos (1988) propone:

Una prueba de bondad de ajuste se emplea para decidir cuándo un conjunto de datos se apega a una distribución de probabilidad dada. Considérese una muestra aleatoria de tamaño N de la distribución de una variable aleatoria X dividida en k clases exhaustivas y mutuamente excluyentes y sea n_i , $i = 1, 2, \dots, k$, el número de observaciones en la i -ésima clase. Considérese la verificación de la hipótesis nula

$$H_0: F(x) = F_0(x),$$

en donde el modelo de probabilidad propuesto $F_0(x)$ se encuentra especificado, de manera completa, con respecto a todos los parámetros. De esta forma la hipótesis nula es sencilla. Dado que se especifica $F_0(x)$ de manera completa, se puede obtener la probabilidad p_i de obtener una observación en la i -ésima clase bajo H_0 , en donde necesariamente $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. (p. 363)

Además, Elorza (2000) establece que se trata de una prueba “clásica y se emplea tanto para variables continuas como discretas” (p. 547).

El procedimiento para usar la prueba incluye los siguientes pasos:

1. Coloque las frecuencias observadas dentro de k categorías. La suma de las frecuencias debe ser N , el número de observaciones independientes.
2. A partir de H_0 , determine las frecuencias esperadas (las e_i) para cada una de las k celdas. Cuando $k > 2$ y más del 20% de las e_i son menores que 5, combínense categorías adyacentes cuando esto sea razonable, reduciendo por tanto el valor de k e incrementando los valores de algunas de las e_i . Cuando $k = 2$, la prueba de la bondad de ajuste ji cuadrada para una muestra es exacta sólo si cada frecuencia esperada es 5 o más grande.
3. Use la siguiente ecuación para computar el valor de χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (1)$$

donde:

o_i = el número (frecuencia) observado de casos en la categoría i -ésima

e_i = el número (frecuencia) esperado de casos en la categoría i -ésima cuando H_0 es verdadera

k = el número de categorías

4. Determine los grados de libertad, $gl = k - t - 1$, donde t es el número de parámetros estimados de los datos y usados al calcular las frecuencias esperadas.
5. Por referencia a la tabla del apéndice D, determine la probabilidad asociada con χ^2 según H_0 como un valor tan grande como el valor observado para χ^2 para los grados de libertad apropiados para los datos. Si la probabilidad es menor que o igual a α , rechace H_0 . (Siegel y Castellan, 1998, p. 72-73)

3.4.5 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados

De todos los estadísticos basados en rangos, el coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados, fue el primero en desarrollarse y quizá sea el mejor conocido actualmente. Es una medida de asociación entre dos variables que requiere que ambas estén medidas en al menos una escala ordinal, de manera tal que los objetos o individuos en estudio pueden ser colocados en rangos en dos series ordenadas. (Siegel y Castellan, 1998, p. 272)

La prueba, precisa de la formulación de las hipótesis que se mencionan a continuación (Triola, 2013):

$H_0: \rho_s = 0$ (no existe correlación entre las dos variables).

$H_1: \rho_s \neq 0$ (existe una correlación entre las dos variables).

donde:

ρ_s =coeficiente de correlación de rangos para los datos poblacionales (ρ_s es un parámetro poblacional)

También, se emplea como “estadístico de prueba” a r_s , es decir, el coeficiente de correlación de rangos para datos pareados de una muestra aleatoria simple (r_s es un estadístico muestral).

“Utilizamos la notación r_s para el coeficiente de correlación de rangos [...]. El subíndice s no se refiere a la desviación estándar, sino que se utiliza en honor de Charles Spearman (1863-1945), creador del método de correlación de rangos” (p. 692).

En Canavos (1988), es una “popular” *medida no paramétrica de “la asociación lineal que existe entre dos variables X y Y ” cuando se emplean los rangos.*

Sean X y Y dos características de interés y supóngase que existe una muestra aleatoria de n pares que consiste sólo en los rangos de X y Y . El coeficiente de correlación del rango de Spearman es el coeficiente ordinario de correlación de la muestra [...]. [...] el coeficiente de correlación del rango r_s se define en el intervalo $-1 \leq r_s \leq 1$; y mide el grado de asociación lineal entre los rangos de X y Y . [...] si se emplean los rangos, r_s mide la tendencia de X y Y al relacionarse en forma monótona, es decir, r_s se encuentra cercano a 1 o a -1 , se sugiere una asociación monótona creciente o decreciente para X y Y . En cierto sentido, r_s tiene un significado mayor [...] al medir el grado de asociación monótona entre X y Y , r_s no se encuentra restringido a descubrir sólo una asociación lineal entre estas. (p. 586-587)

[...] el valor de r_s irá de -1 a $+1$. Un valor de $+1$ o -1 indica una asociación perfecta entre X y Y ; el signo más ocurre para rangos idénticos y el signo menos para rangos inversos. Cuando r_s se acerca a cero, se concluye que las variables no están correlacionadas. (Walpole et al., 2012, p. 675)

Según Triola (2013), la correlación de rangos tiene las siguientes ventajas sobre los métodos paramétricos:

1. El método no paramétrico de correlación de rangos puede utilizarse en una variedad más amplia de circunstancias que el método paramétrico de correlación lineal. Con la correlación de rangos, podemos analizar datos pareados que sean rangos o que puedan convertirse en rangos. Por ejemplo,

si dos jueces califican a 30 gimnastas, podemos utilizar la correlación de rangos, pero no la correlación lineal. A diferencia de los métodos paramétricos [...], el método de correlación de rangos no requiere una distribución normal de cualquier población.

2. La correlación de rangos puede utilizarse para detectar algunas relaciones (no todas) que no son lineales.

Una desventaja de la correlación de rangos es su tasa de eficiencia de 0.91 [...]. Esta tasa de eficiencia indica que, con todas las demás circunstancias iguales, el método no paramétrico de correlación de rangos requiere de 100 pares de datos muestrales para tener los mismos resultados que solo 91 pares de observaciones muestrales analizadas a través del método paramétrico, suponiendo que los requisitos más estrictos del método paramétrico se satisfacen. (p. 693)

De acuerdo con Siegel y Castellan (1998), el siguiente es el procedimiento “que hay que seguir en el uso del coeficiente de correlación de Spearman de rangos ordenados”:

1. Asigne rangos a los sujetos (observaciones) en la variable X desde 1 hasta n . Asigne rangos a las observaciones de la variable Y desde 1 hasta n . Para X empates (o Y), asigne a cada una el valor promedio de los rangos asociados.
2. Haga una lista de los n sujetos. Coloque el rango de cada sujeto en la variable X y la variable Y .
3. Determine el valor de d_i (la diferencia en rangos en las dos variables) para cada sujeto sustrayendo el rango de Y del correspondiente rango de X : $d_i = X_i - Y_i$. Eleve al cuadrado este valor para determinar d_i^2 . Sume los d_i^2 para los n casos para determinar $\sum d_i^2$.

4. Si la proporción de empates en cualquiera de las observaciones de X o Y es grande, use la ecuación

$$r_s = \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2 - \sum d_i^2}{2\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}} \quad (2)$$

para calcular r_s . En otros casos, use la ecuación

$$r_s = \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n} \quad (3)$$

5. Si los sujetos constituyen una muestra aleatoria de alguna población, se puede probar si el valor observado de r_s indica una asociación entre las variables X y Y en la población. Las hipótesis son H_0 : no existe asociación entre X y Y y H_1 : existe una asociación entre X y Y . El método para hacer esto depende del tamaño de la muestra n :

- Para n desde 5 hasta 30, los valores críticos de r_s entre los niveles de significación (bidireccionales) 0.10 y 0.01, están proporcionados en la tabla del apéndice E. Para una prueba unidireccional, las probabilidades de significación correspondiente son de la mitad.
- Para $n > 30$, la probabilidad asociada con un valor tan grande como el valor observado r_s , puede ser aproximado al calcular la z asociada con ese valor usando la ecuación

$$z = r_s \sqrt{n-1} \quad (4)$$

y determinando después la significación de ese valor de z al consultar la tabla del apéndice F.

6. Si el valor de r_s (o de z) excede el valor crítico, rechace H_0 en favor de H_1 .

3.4.6 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon

En 1945, Frank Wilcoxon desarrolló una prueba no paramétrica, con base en las *diferencias entre muestras dependientes*, que no requiere la suposición de normalidad. Esta prueba se denomina prueba de rangos asignados de Wilcoxon (Lindet *al.*, 2012).

La prueba de Wilcoxon se aplica con bastante éxito en las *ciencias de la conducta*. Con datos conductuales, es común que el investigador pueda:

1. Determinar cuál miembro del par es “más grande que” (determinar el signo de la diferencia entre cualquier par).
2. Establecer rangos en las diferencias en orden de tamaño absoluto.

Esto es, el investigador puede *hacer juicios de “mayor que” entre los valores de cualquier par, tanto como acerca de las diferencias entre dos pares cualesquiera*.(Siegel y Castellan, 1998, p. 113)

Gómez *et al.* (2003), explican:

Cuando las variables son, al menos, ordinales, una alternativa no paramétrica es la prueba de rangos asignados de Wilcoxon, que *permite una mejor valoración de las diferencias cuantitativas entre los pares de observaciones*.

Rangos asignados de Wilcoxon es una prueba flexible que se puede utilizar en distintas situaciones, con muestras de diferente tamaño y con pocas restricciones. Lo único que se requiere es que la variable sea continua y que sean *observaciones pareadas*, es decir, que sean *sujetos de una misma muestra con medidas pre y pos prueba*, o bien sujetos que hayan sido pareados bajo criterios bien definidos. Contiene varias asunciones críticas:

- Que los datos sean observaciones pareadas, de una muestra seleccionada al azar u obtenida por pares, o bien mediante sujetos considerados como sus propios controles.

- Que los datos que se van a analizar sean continuos, o al menos ordinales, dentro y entre las observaciones pareadas.
- Que haya simetría en los resultados de las diferencias con la mediana verdadera de la población. (p. 98)

La prueba de [...] Wilcoxon toma en cuenta tanto el signo como la magnitud de las diferencias entre cada par de observaciones. Por lo tanto, para tener un buen balance, este es el mejor método no paramétrico por utilizar para observaciones en parejas. (Canavos, 1988, p. 580)

Conforme a Siegel y Castellan (1998):

La diferencia de las puntuaciones entre los miembros del par igualado (d_i) representa la diferencia entre las puntuaciones del par en los dos tratamientos (X y Y). Esto es, $d_i = x_i - y_i$. Para utilizar la prueba de Wilcoxon, se deben poner en columna todas las diferencias sin tener en cuenta el signo: Adjúdicale el rango 1 a la d_i más pequeña, el rango 2 a la siguiente menos pequeña, etc. Cuando se tiene que decidir el rango entre un -1 y un $+2$ o -2 , el más pequeño será -1 .

Entonces, a cada rango se debe añadir el signo de la diferencia. Así podemos indicar e identificar los rangos de las diferencias positivas, de los rangos de las diferencias negativas.

La hipótesis nula es que los tratamientos X y Y son equivalentes, esto es, son muestras de la misma población, con la misma mediana y la misma distribución continua. Si H_0 es verdadera, deberíamos encontrar algunas diferencias en favor del tratamiento X y otras a favor del tratamiento Y . Es decir, si sumamos los

rangos que tienen signo positivo y aquellos con signo negativo, esperaríamos que ambas sumas fueran iguales (siempre que H_0 sea verdadera). Pero si la suma de los rangos positivos es muy diferente de la suma de los rangos negativos, inferiríamos que el tratamiento X difiere del tratamiento Y , por tanto, rechazaríamos la H_0 . Es decir, rechazamos H_0 siempre que cualquiera de las sumas de las diferencias (positivas o negativas) sea demasiado pequeña. (p. 113-114)

Además:

Para la aplicación de la prueba de Wilcoxon se debe observar los pasos siguientes:

1. Para cada par igualado de observaciones, x_i y y_i , determine la diferencia con signo entre las dos variables ($d_i = x_i - y_i$).
2. Ordene los rangos sin tener en cuenta su signo. A las diferencias que tengan el mismo valor, asígneles el rango promedio.
3. A cada rango asigne el signo (+ o -) de la diferencia correspondiente.
4. Determine m , que es el número de las diferencias que no son iguales a cero.
5. Determine T^+ , que es la suma de los rangos que tienen signo positivo.
6. El procedimiento para determinar la significancia del valor observado de T^+ depende del tamaño de m :
 - Si $m \leq 30$, el estadístico de prueba es T^+ y su valor crítico se encuentra en la tabla del apéndice G.
 - Si $m > 30$ es estadístico de prueba es

$$z = \frac{T^+ - \frac{m(m+1)}{4}}{\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{24}}} \quad (5)$$

los valores críticos z se encuentran en la tabla del apéndice F y en caso de existir rangos con empates, corrija la varianza por medio de la ecuación

$$\sigma_{T^+}^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{24} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g t_j(t_j-1)(t_j+1) \quad (6)$$

donde:

g = número de agrupamientos de diferentes rangos empatados

t_j = número de rangos empatados agrupados en j

Determine la probabilidad asociada cuando H_0 es verdadera recurriendo a la tabla del apéndice F.

Para una prueba bidireccional, multiplique por dos el valor de tabla. Si la probabilidad obtenida de esta manera es menor o igual que α , rechace H_0 . (p. 121)

Mendenhall et al. (2010), añaden a lo anterior (respecto de la región de rechazo):

Rechazar H_0 si $z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$ para una prueba de dos colas. Para una prueba de una cola, pónganse todas las α en una cola de la distribución z . Para detectar un cambio en la distribución 1 a la derecha de la distribución 2, rechazar H_0 cuando $z > z_{\alpha}$. Para detectar un cambio en la dirección opuesta, rechace H_0 si $z < -z_{\alpha}$. (p. 648)

3.4.7 Prueba de la U de Mann-Whitney

La prueba de Mann y Whitney fue propuesta originalmente por F. Wilcoxon considerando dos muestras de igual tamaño. Posteriormente, los autores bajo

cuyos nombres ha venido a ser más conocida la generalizaron para tamaños distintos de muestra y generaron las primeras tablas de puntos críticos para la prueba. (Infante y Zarate De Lara, 2012, p. 511)

La *U* de Mann-Whitney es la más popular de las pruebas para el estudio de dos *muestras independientes*. [...] Se utiliza cuando se desea efectuar la comparación de dos grupos en quienes se les ha medido una variable cuantitativa continua que no tiene una distribución normal o cuando la variable es de tipo cuantitativa discreta. Tienen tres premisas:

1. La variable independiente es dicotómica y la escala de medición de la variable dependiente es al menos ordinal.
2. Los datos son de muestras aleatorias de observaciones independientes de dos grupos independientes, por lo que no hay observaciones repetidas.
3. La distribución de la población de la variable dependiente para los dos grupos independientes comparte una forma similar no especificada, aunque con una posible diferencia en las medidas de tendencia central. (Gómez *et al.*, 2003, p. 96)

La *hipótesis nula* (de la prueba) establece la *analogía(homogeneidad) de las dos distribuciones poblacionales y en cierta manera la igualdad de las dos medias o medianas*. No obstante, si las dos distribuciones poblacionales son más o menos similares, tanto en forma como en variabilidad, la *U* es una prueba excelente de la tendencia central. Pero debido a que la prueba se basa en categorías o clases, la medida de tendencia central más adecuada es la mediana. Entonces, cuando se consideran los resultados de dicha prueba, lo primero en que se piensa es la comparación de las dos medianas. (Elorza, 2000, p. 578)

En Canavos (1988):

Dadas muestras aleatorias independientes de dos poblaciones, considérese la prueba de la hipótesis nula de que las poblaciones tienen la misma distribución. La hipótesis puede establecerse como

$$H_0: f_1(x) \equiv f_2(y), \quad (7)$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son las correspondientes funciones de densidad de probabilidad. La hipótesis alternativa puede ser uni o bilateral. La hipótesis alternativa bilateral establece en forma sencilla que las distribuciones no son las mismas. Pero la hipótesis alternativa sólo implica un desplazamiento en la tendencia central de una distribución con respecto a la otra y no sugiere una diferencia en la forma o en la dispersión. En otras palabras, [...], se supone que las distribuciones tienen la misma forma y dispersión.

Un procedimiento popular no paramétrico para probar la hipótesis nula dada por (7) es la prueba U de Mann-Whitney. [...]. La prueba de Mann-Whitney se basa en una combinación de las n_1 y n_2 observaciones para formar un solo conjunto de n_1+n_2 observaciones arregladas en orden creciente de magnitud. Entonces se asigna un rango a cada observación en la secuencia ordenada que comienza con un rango 1 y termina con un rango n_1+n_2 . Si las muestras aleatorias provienen de poblaciones que tienen la misma distribución, se espera que los rangos se encuentren lo suficientemente dispersos cuando se observa en qué muestra se encuentran las observaciones. De otra forma, debe esperarse que los rangos de las observaciones en cada muestra se encuentren muy agrupados en los extremos. En esencia, la estadística de Mann-Whitney determina cuándo un

agregado de rangos observados es suficiente para concluir que las dos muestras aleatorias provienen de poblaciones cuyas distribuciones difieren en la tendencia central.

Para implementar el procedimiento se obtiene la suma de los rangos asociados con las observaciones de una de las dos muestras, por ejemplo la muestra 1, la cual se escoge en forma arbitraria. Denótese esta suma por R_1 . Entonces la estadística U de Mann-Whitney está dada por

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - R_1 \quad (8)$$

La estadística U es una función de la variable aleatoria R_1 y de los tamaños de las muestras n_1 y n_2 . Si H_0 es cierta, la ocurrencia de cualquier orden particular para las observaciones en el conjunto combinado es equiprobable. Por lo tanto, bajo H_0 , R_1 es la suma de n_1 enteros positivos seleccionados en forma aleatoria de entre los primeros $n_1 + n_2$. De acuerdo con lo anterior, puede determinarse que

$$\mu_{R_1} = \frac{n_1 (n_1 + n_2 + 1)}{2}, \quad (9)$$

$$\sigma_{R_1}^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} \quad (10)$$

De (8) sigue que

$$\mu_U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - \mu_{R_1} = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad (11)$$

Y

$$\sigma_U^2 = \sigma_{R_1}^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} \quad (12)$$

Se ha determinado y tabulado la distribución exacta de U . [...]. Para una hipótesis alternativa bilateral, es probable que se rechace H_0 si se obtiene un valor muy grande o muy pequeño de U . Lo anterior ocurrirá cuando el valor de R_1 es muy grande o muy pequeño, respectivamente. Sin embargo, cuando tanto n_1 y n_2 son mayores de 10, la distribución de U se encuentra, en forma adecuada, aproximada por una distribución normal con media y varianza dadas por (11) y (12), respectivamente, es decir, bajo H_0 la variable aleatoria

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sqrt{\sigma_U^2}} \quad (13)$$

es aproximadamente $N(0, 1)$ para valores grandes de n_1 y n_2 .

Debe notarse que a pesar de que no pueden ocurrir empates en la práctica desde un punto de vista teórico, esto ocurre en muchas ocasiones. Cuando ocurre un empate en la secuencia ordenada, se sugiere asignar el promedio de los rangos a las observaciones para las cuales ocurre el empate. Por ejemplo, supóngase que las observaciones octava y novena en la secuencia ordenada son las mismas. Entonces a cada una de estas observaciones se les asigna un rango de 8.5. (p. 574-576)

3.4.8 Prueba de la mediana

La prueba de la mediana está indicada cuando la variable independiente es categórica y la variable dependiente tiene, al menos, un nivel de medida de tipo ordinal, aunque esta habitualmente es cuantitativa continua y se desea *investigar*

diferencias entre dos o más grupos con relación a su mediana, sea porque no cumplen las condiciones de *normalidad* para usar el promedio (media aritmética) como medida de tendencia central o porque la variable es cuantitativa discreta.

[...]. *Responde a la cuestión de que si dos o más grupos proceden de poblaciones que tienen distribuciones similares*. Es especialmente útil cuando los valores exactos de resultados extremos son truncados por abajo o por arriba de cierto punto de corte. También está indicada cuando no hay simetría en la forma de la *U* de Mann-Whitney. La prueba es directa, fácil de aplicar y es particularmente útil cuando no se conocen los valores exactos de todos los resultados, en especial en los valores extremos. La limitación de la prueba es que considera únicamente dos posibilidades: Por arriba o por debajo de la mediana y no se toma en cuenta el tamaño de la diferencia entre los resultados observados respecto a la mediana, por lo que es de menor potencia que la *U* de Mann-Whitney [...]. (Gómez *et al.*, 2003, p. 97)

Siegel y Castellan (1998) exponen:

La prueba de la mediana es un procedimiento para evaluar si dos (o más) grupos independientes difieren en sus tendencias “culturales”. Más precisamente, esta prueba nos proporciona información acerca de qué tan probable es que dos (o más) *grupos independientes* (no necesariamente del mismo tamaño) hayan sido extraídos de la misma población con la *misma mediana*. La *hipótesis nula* plantea que los dos (o más) grupos son de la misma población y tienen la *misma mediana*; la *hipótesis alterna* puede plantear que la mediana de una población es *diferente* de la mediana de al menos otra población (si es prueba *bidireccional*) o que la mediana de una población es *superior* que la de al menos otra población

(si es prueba *unidireccional*). La prueba puede utilizarse cuando las puntuaciones de los dos (o más) grupos se miden en, al menos, una escala ordinal. Se notará que puede no existir una prueba alterna a la prueba de la mediana, aun para datos en escala de intervalo. Esto podría ocurrir cuando una o más de las observaciones están “fuera de la escala” y truncadas hacia el máximo (o mínimo) de las observaciones previamente asignadas. (Siegel y Castellan, 1998, p. 151-152)

Elorza(2000) amplía lo anterior con el siguiente procedimiento:

1. Se agrupan los datos de los k grupos en uno solo y se calcula la mediana (Me).
2. Se proponen las hipótesis
 $H_0: Me_1 = Me_2 = \dots = Me_k = Me_0.$
 $H_1: \text{Al menos dos poblaciones tienen mediana diferente.}$
3. Se establece el valor de α .
4. Una vez obtenida la mediana, la frecuencia de los datos se expone en una tabla de contingencia de la siguiente manera:

	Muestras o grupos (k)				Total
Datos menores o iguales a la Me	f_{o11}	f_{o12}	...	f_{o1k}	a
Datos mayores que la Me	f_{o21}	f_{o22}	...	f_{o2k}	b
Total	n_1	n_2	...	n_k	N

Tabla 11.Formato de contingencia para la prueba de la mediana. (Elorza, 2000, p. 591)

Se aplica el modelo estadístico χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{oi} - f_{ei})^2}{f_{ei}} \text{ si } a \approx b \quad (14)$$

donde:

$$f_{ei} = \frac{n_i}{2}$$

5. Se obtienen los grados de libertad, considerando el número de renglones y de columnas de la tabla de contingencia y se lee el valor crítico de χ^2 , según α y los $g.l.$
6. Se considera la siguiente regla de decisión: Si $\chi_{calc}^2 \geq \chi_{\alpha, g.l.}^2$, entonces H_0 se rechaza.
7. Se calcula el valor de χ^2 .
8. Si no se rechaza H_0 , entonces las poblaciones tienen la misma mediana.

Cuando son dos grupos, en (4) puede utilizarse el siguiente “formato” de cuadro de contingencia:

	Muestra o grupo		Total
	1	2	
Datos menores o iguales a la Me	a	b	k
Datos mayores que la Me	c	d	l
Total	m	n	N

Tabla 12. Formato de contingencia para la prueba de la mediana (dos grupos). (Elorza, 2000, p. 592)

Además:

$$\chi^2 = \frac{N \left(|ad - bc| - \frac{N}{2} \right)^2}{klmn} \quad (15)$$

donde:

k, l, m y n son los totales marginales. (p. 591-592)

4. Resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos al aplicar los test no paramétricos descritos en el capítulo 3, a la “información” (datos) proveniente de los grupos involucrados en la investigación. La ejecución de las pruebas fue asistida empleando las plataformas de cálculo IBM SPSS (Paquete Estadístico para las Ciencias Sociales) y Minitab, así como la hoja de cálculo electrónica Microsoft Excel.

4.1 Pruebas de bondad de ajuste

Dado que las observaciones con las que se trabaja en todo el capítulo corresponden a la cantidad de aciertos conseguida por los estudiantes al resolver los instrumentos de pre y pos prueba (figura 11), tales datos son tomados dentro de la categoría de discretos y por tanto, los test que se exhiben a continuación están referidas a distribuciones de probabilidad compatibles con dicha condición, esto es, distribuciones de probabilidad discretas, a saber, binomial, Poisson e hipergeométrica y por último, se ofrece una prueba contra la distribución normal (la cual es continua) que puede ser considerada como un complemento dada la popularidad de dicha función probabilística.

4.1.1 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución binomial

Para desarrollar los test (en todos los casos), se consideró la función de probabilidad que continúa (Canavos, 1988):

$$b(x_i; n, q) = \begin{cases} {}^nC_{x_i} q^{x_i} (1-q)^{n-x_i} & x_i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases} \quad 0 \leq q \leq 1, \text{ para } n \text{ entero.} \quad (16)$$

donde:

x_i =número de éxitos (aciertos) en la categoría i -ésima

n =número de ensayos (repeticiones) independientes (6 en el caso de la pre prueba y 12 en el de la pos prueba)

$$q = \text{probabilidad de éxito (estimada)} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i o_i}{n \sum_{i=1}^k o_i}$$

o_i =número (frecuencia) observado de casos en la categoría i -ésima

k =número de categorías

4.1.1.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la preprueba tienen (o provienen de una población con) distribución binomial.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución binomial.

La tabla 13 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad binomial (b)	Frecuencia esperada (e_i)
0	17	0.0805	4.1841
1	7	0.2520	13.1033
2	5	0.3288	17.0982
3	9	0.2288	11.8992
4	8	0.0896	4.6581
5	5	0.0187	0.9725
6	1	0.0016	0.0846

Tabla 13. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

q estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
0.342	12.813	3.841	Rechazar H_0

Tabla 14. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.1.1.2 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución binomial.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución binomial.

La tabla 15 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad binomial (b)	Frecuencia esperada (e_i)
0	8	0.0435	2.2600
1	12	0.1790	9.3087
2	10	0.3072	15.9758
3	5	0.2812	14.6229
4	8	0.1448	7.5288
5	6	0.0398	2.0674
6	3	0.0045	0.2365

Tabla 15. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

q estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
0.407	19.936	5.991	Rechazar H_0

Tabla 16. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.1.3 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución binomial.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la posprueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución binomial.

La tabla 17 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad binomial (b)	Frecuencia esperada (e_i)
0	2	0.0005	0.0249
1	3	0.0051	0.2661
2	7	0.0251	1.3037
3	4	0.0745	3.8715
4	1	0.1492	7.7606
5	7	0.2127	11.0624
6	3	0.2211	11.4981
7	9	0.1689	8.7804
8	4	0.0940	4.8891
9	8	0.0372	1.9359
10	3	0.0100	0.5174
11	1	0.0016	0.0838

Tabla 17. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

q estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
0.471	13.620	5.991	Rechazar H_0

Tabla 18. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.1.4 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución binomial.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la posprueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución binomial.

La tabla 19 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad binomial (b)	Frecuencia esperada (e_i)
0	17	0.0168	0.8758
1	7	0.0819	4.2604
2	2	0.1827	9.4996
3	6	0.2469	12.8373
4	2	0.2252	11.7097
5	3	0.1461	7.5955
6	3	0.0691	3.5925
8	4	0.0061	0.3163
9	4	0.0011	0.0570
10	2	0.0001	0.0069
11	2	0.0000	0.0005

Tabla 19. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (binomial) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

q estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
0.288	24.084	5.991	Rechazar H_0

Tabla20. Solución del test de bondad de ajuste (binomial) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.2 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución de Poisson

Para desarrollar los test (en todos los casos), se consideró la función de probabilidad que continúa (Canavos, 1988):

$$f_p(x_i; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} & x_i = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0, \\ 0 & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases} \quad (18)$$

donde:

x_i =número de éxitos (aciertos) en la categoría i -ésima

$$\lambda = \text{número promedio de éxitos (estimado)} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i o_i}{\sum_{i=1}^k o_i}$$

o_i =número (frecuencia) observado de casos en la categoría i -ésima

k =número de categorías

4.1.2.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución de Poisson.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución de Poisson.

La tabla 21 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad de Poisson (f_p)	Frecuencia esperada (e_i)
0	17	0.1277	6.6429
1	7	0.2629	13.6691
2	5	0.2704	14.0634
3	9	0.1855	9.6460
4	8	0.0954	4.9621
5	5	0.0393	2.0421
6	1	0.0135	0.7003

Tabla 21. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

λ estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
2.057	27.082	5.991	Rechazar H_0

Tabla 22. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.2.2 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución de Poisson.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución de Poisson.

La tabla 23 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Acertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad de Poisson (f_p)	Frecuencia esperada (e_i)
0	8	0.0870	4.5219
1	12	0.2124	11.0439
2	10	0.2594	13.4863
3	5	0.2111	10.9792
4	8	0.1289	6.7037
5	6	0.0630	3.2745
6	3	0.0256	1.3329

Tabla 23. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

λ estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
2.442	8.2819	5.991	Rechazar H_0

Tabla 24. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.2.3 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución de Poisson.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución de Poisson.

La tabla 25 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad de Poisson (f_p)	Frecuencia esperada (e_i)
0	2	0.0035	0.1822
1	3	0.0198	1.0302
2	7	0.0560	2.9122
3	4	0.1055	5.4885
4	1	0.1492	7.7577
5	7	0.1687	8.7722
6	3	0.1590	8.2661
7	9	0.1284	6.6765
8	4	0.0907	4.7185
9	8	0.0570	2.9642
10	3	0.0322	1.6759
11	1	0.0166	0.8614

Tabla 25. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

λ estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
5.653	17.729	7.815	Rechazar H_0

Tabla 26. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.2.4 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución de Poisson.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución de Poisson.

La tabla 27 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Acertos (x_i)	Frecuencia	Probabilidad	Frecuencia
-------------------	------------	--------------	------------

	observada (o_i)	de Poisson (f_p)	esperada (e_i)
0	17	0.0314	1.6318
1	7	0.1086	5.6487
2	2	0.1880	9.7765
3	6	0.2169	11.2806
4	2	0.1877	9.7621
5	3	0.1300	6.7584
6	3	0.0750	3.8990
8	4	0.0160	0.8343
9	4	0.0062	0.3209
10	2	0.0021	0.1111
11	2	0.0007	0.0350

Tabla 27. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (Poisson) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

λ estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
3.461	56.277	7.815	Rechazar H_0

Tabla 28. Solución del test de bondad de ajuste (Poisson) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.3 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución hipergeométrica

Para desarrollar los test (en todos los casos), se consideró la función de probabilidad que continúa (Canavos, 1988):

$$h(x_i; N, n, m) = \begin{cases} \frac{{}^m C_{x_i} {}^{N-m} C_{n-x_i}}{{}^N C_n}, & x_i = 0, 1, 2, \dots, n; x_i \leq m, \quad n-x_i \leq N-m; \\ & m, N, n, \text{ enteros positivos,} \\ & 0 \text{ para cualquier otro valor.} \end{cases} \quad (18)$$

donde:

x_i =número de éxitos (aciertos) en la categoría i -ésima

n =número de ensayos (repeticiones) independientes (6 en el caso de la pre prueba y 12 en el de la pos prueba). Conocido también como “tamaño de la muestra”

N =número total (tamaño poblacional) de ensayos (repeticiones) dependientes

$$N \text{ (estimado)} = n \sum_{i=1}^k o_i$$

$N = (6) (52) = 312$ en el caso de la pre prueba y $N = (12) (52) = 624$ en la pos prueba

m =número total (poblacional) de éxitos (aciertos)

$$m \text{ (estimado)} = \sum_{i=1}^k x_i o_i$$

o_i =número (frecuencia) observado de casos en la categoría i -ésima

k =número de categorías

4.1.3.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución hipergeométrica.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución hipergeométrica.

La tabla 29 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad hipergeométrica (h)	Frecuencia esperada (e_i)
0	17	0.0784	4.0788
1	7	0.2518	13.0931
2	5	0.3320	17.2620
3	9	0.2301	11.9638
4	8	0.0884	4.5969
5	5	0.0179	0.9284
6	1	0.0015	0.0770

Tabla 29. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

m estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
107	13.106	3.841	Rechazar H_0

Tabla 30. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.1.3.2 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución hipergeométrica.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución hipergeométrica.

La tabla 31 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad hipergeométrica (h)	Frecuencia esperada (e_i)
0	8	0.0420	2.1855
1	12	0.1779	9.2518
2	10	0.3096	16.1011
3	5	0.2836	14.7446
4	8	0.1441	7.4932
5	6	0.0385	2.0036
6	3	0.0042	0.2202

Tabla 31. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

m estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
127	20.621	5.991	Rechazar H_0

Tabla 32. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.3.3 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución hipergeométrica.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la posprueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución hipergeométrica.

La tabla 33 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia observada (o_i)	Probabilidad hipergeométrica (h)	Frecuencia esperada (e_i)
0	2	0.0028	0.1480
1	3	0.0218	1.1351
2	7	0.0762	3.9623
3	4	0.1601	8.3251
4	1	0.2255	11.7258
5	7	0.2243	11.6637
6	3	0.1616	8.4016
7	9	0.0849	4.4156
8	4	0.0323	1.6805
9	8	0.0087	0.4516
10	3	0.0016	0.0814
11	1	0.0002	0.0088

Tabla 33. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

m estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
239	23.279	5.991	Rechazar H_0

Tabla 34. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.3.4 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución hipergeométrica.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la posprueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución hipergeométrica.

La tabla 35 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (1) para poder calcular χ^2 :

Aciertos (x_i)	Frecuencia	Probabilidad	Frecuencia
--------------------	------------	--------------	------------

	observada (o_i)	hipergeométrica (h)	esperada (e_i)
0	17	0.0200	1.0416
1	7	0.0938	4.8751
2	2	0.1995	10.3733
3	6	0.2552	13.2691
4	2	0.2185	11.3639
5	3	0.1320	6.8643
6	3	0.0577	2.9986
8	4	0.0042	0.2197
9	4	0.0007	0.0357
10	2	0.0001	0.0039
11	2	0.0000	0.0003

Tabla 35. Indicadores estadísticos para el test de bondad de ajuste (hipergeométrico) de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Además, se ubica el valor correspondiente de χ^2 en la tabla del apéndice D con $\alpha = 0.05$ y $gl = k - t - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ grados de libertad.

La solución de la prueba es:

m estimada	Estadístico de prueba χ^2 (ecuación 1)	χ^2 de la tabla del apéndice D	Decisión
172	20.324	5.991	Rechazar H_0

Tabla 36. Solución del test de bondad de ajuste (hipergeométrico) para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.4 Gráficos

Se exhiben a continuación una serie de contrastes gráficos (a manera de suplemento de los apartados anteriores) de las frecuencias observadas (o_i) en contraparte con la cantidad (número) de aciertos obtenida al resolver los instrumentos de pre y posprueba (x_i), lo anterior en perspectiva con las frecuencias esperadas (e_i) para las funciones de probabilidad binomial, Poisson e hipergeométrica.

4.1.4.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

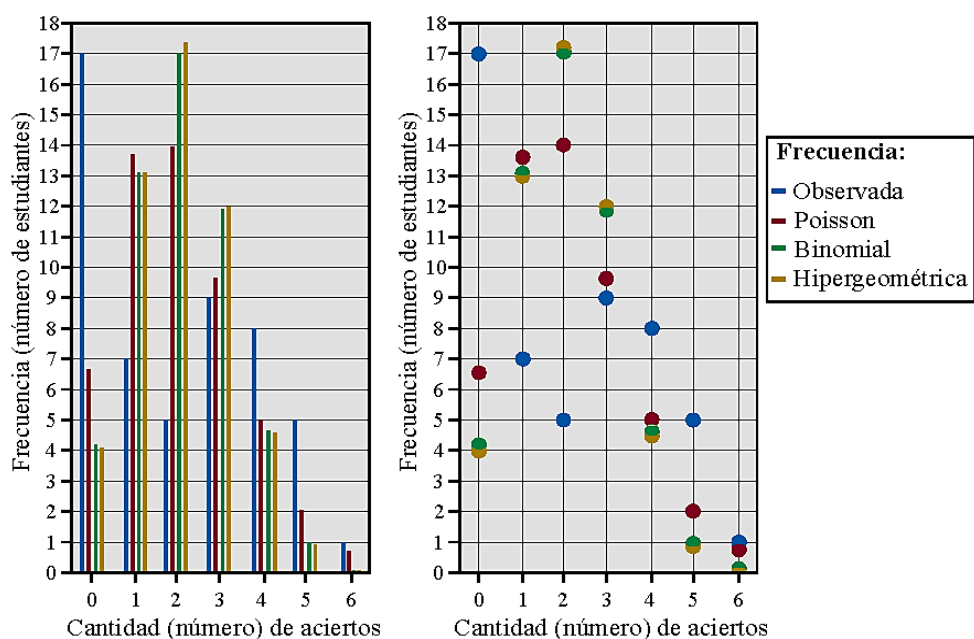


Figura 13. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.4.2 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

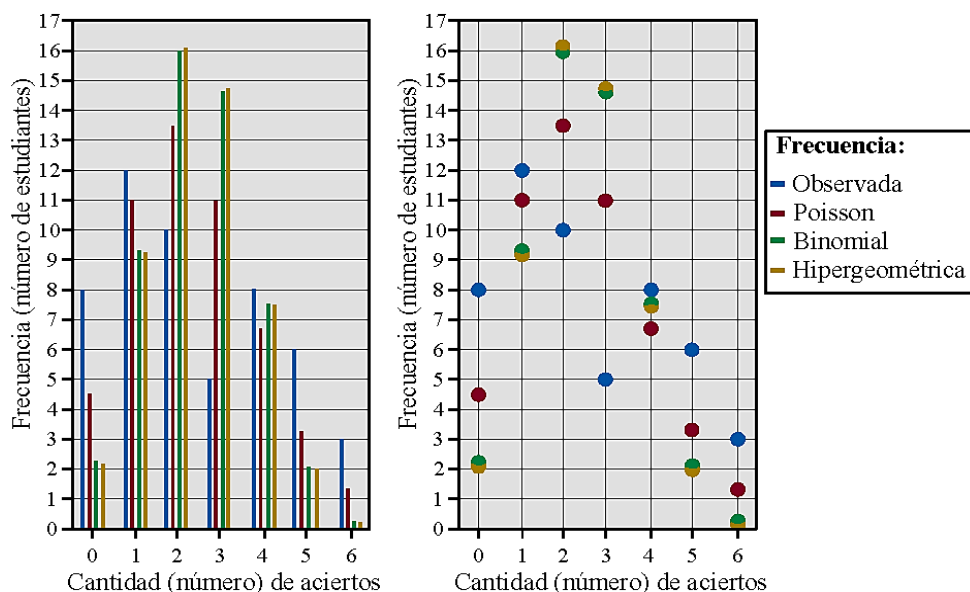


Figura 14. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.4.3 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

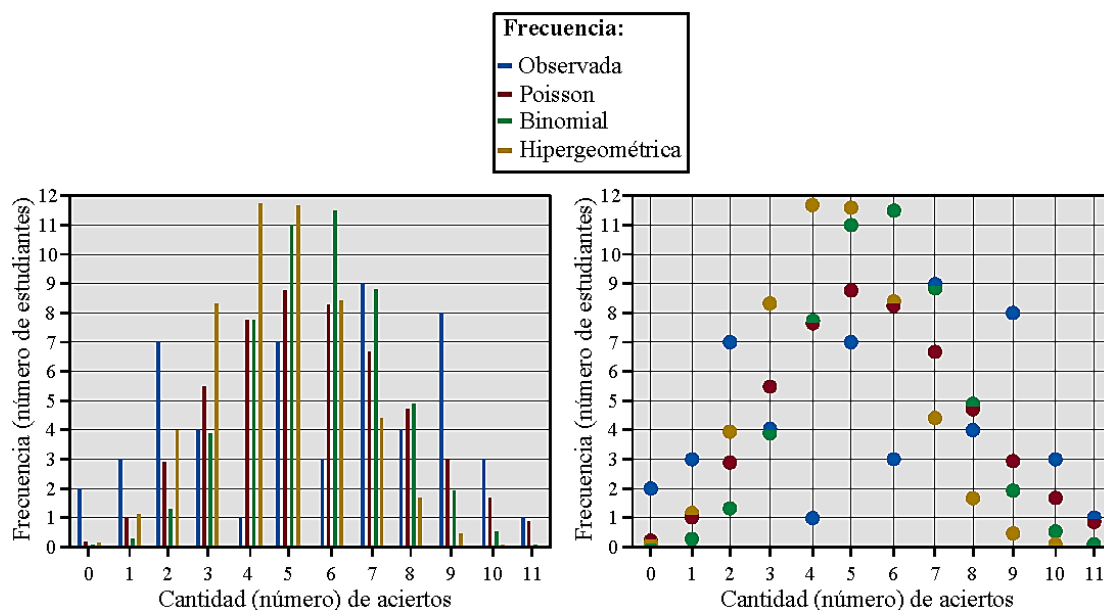


Figura 15. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.4.4 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

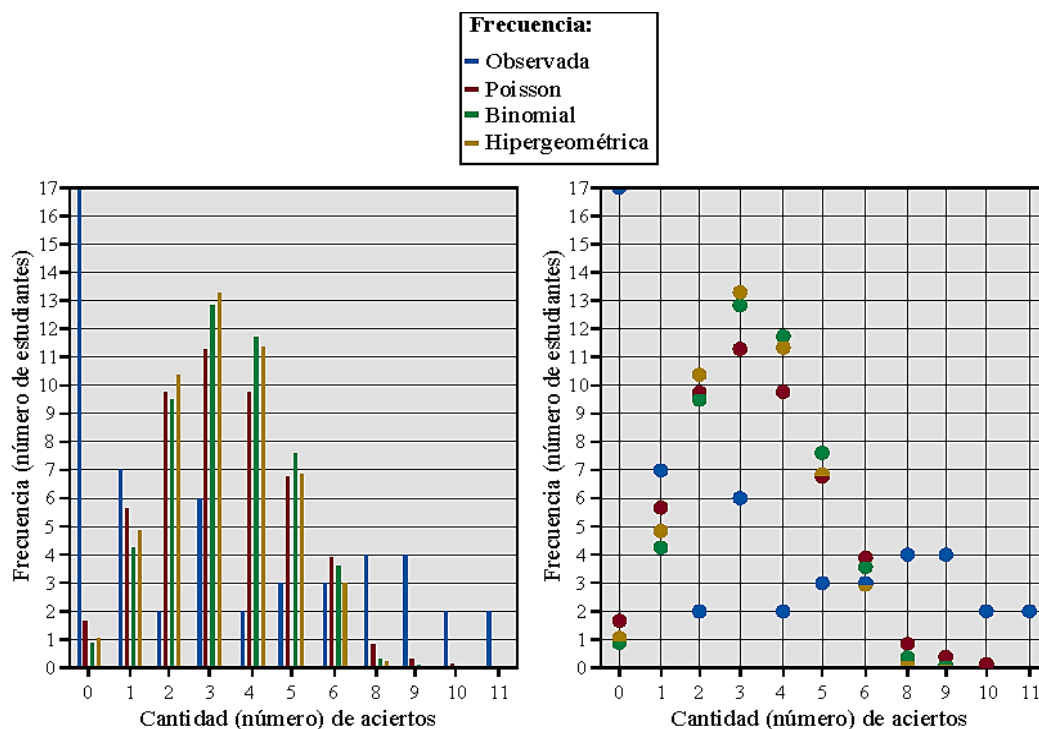


Figura 16. Gráficos comparativos de las frecuencias; observada, Poisson, binomial e hipergeométrica para los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.1.5 Pruebas de bondad de ajuste con respecto a la distribución normal (normalidad)

En esta parte se presentan las ventanas gráficas generadas por Minitab que corresponden a la resolución de los test de normalidad, para los datos obtenidos en las fases de aplicación de la pre y la pos prueba por los grupos que fueron o no, sometidos a tratamiento didáctico. Es importante recalcar que:

- Los test de normalidad sólo se ejecutaron en la plataforma estadística Minitab (sin intervención de la hoja de cálculo Excel) y se les considera complementarios al estar referidos a una función probabilística continua, pero aún con lo anterior, se decidió incluirlos dada la popularidad de este modelo funcional.
- Las interfaces gráficas cuentan con un apartado de “información” de la solución en el que Minitab además de otras variables indica una cantidad para el valor p (destacada en cada ventana), que como se dijo líneas atrás es una de las “herramientas” con que se juzga la toma de decisiones para la prueba de hipótesis y cuyos resultados se discuten en el siguiente capítulo.

4.1.5.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución normal.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución normal.

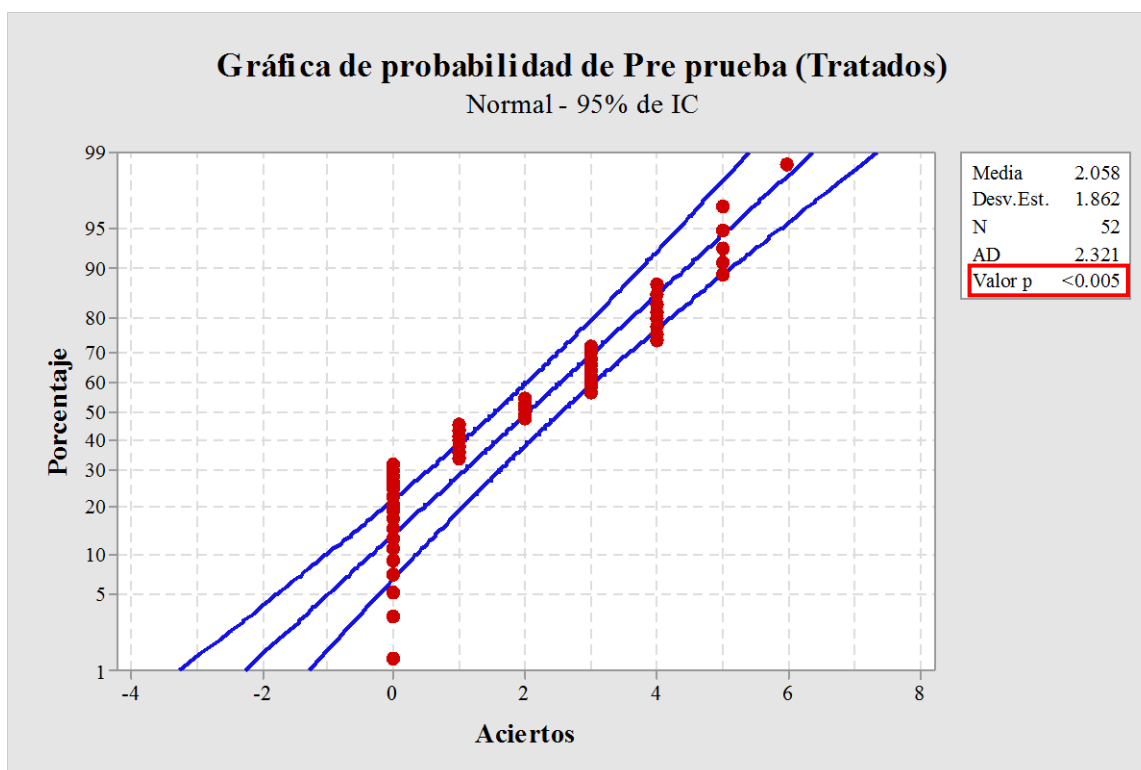


Figura 17. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.1.5.2 Observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba tienen (o provienen de una población con) distribución normal.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pre prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución normal.

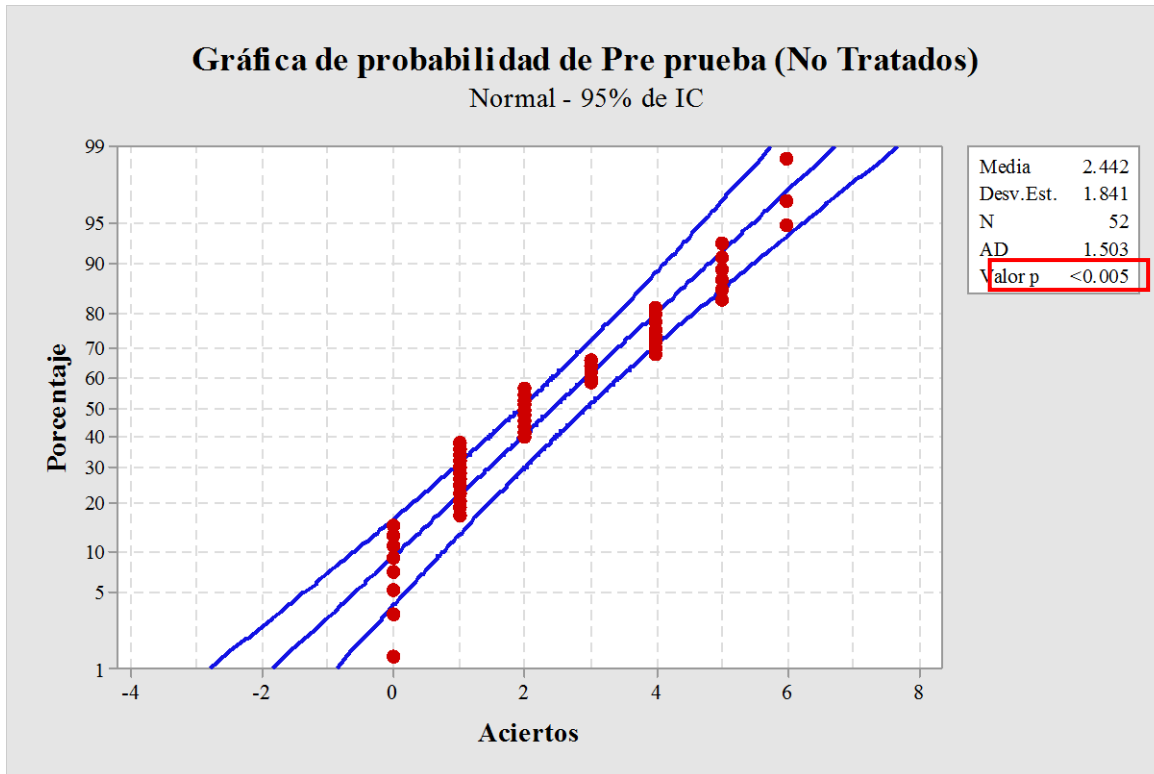


Figura 18. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pre prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.1.5.3 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución normal.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución normal.

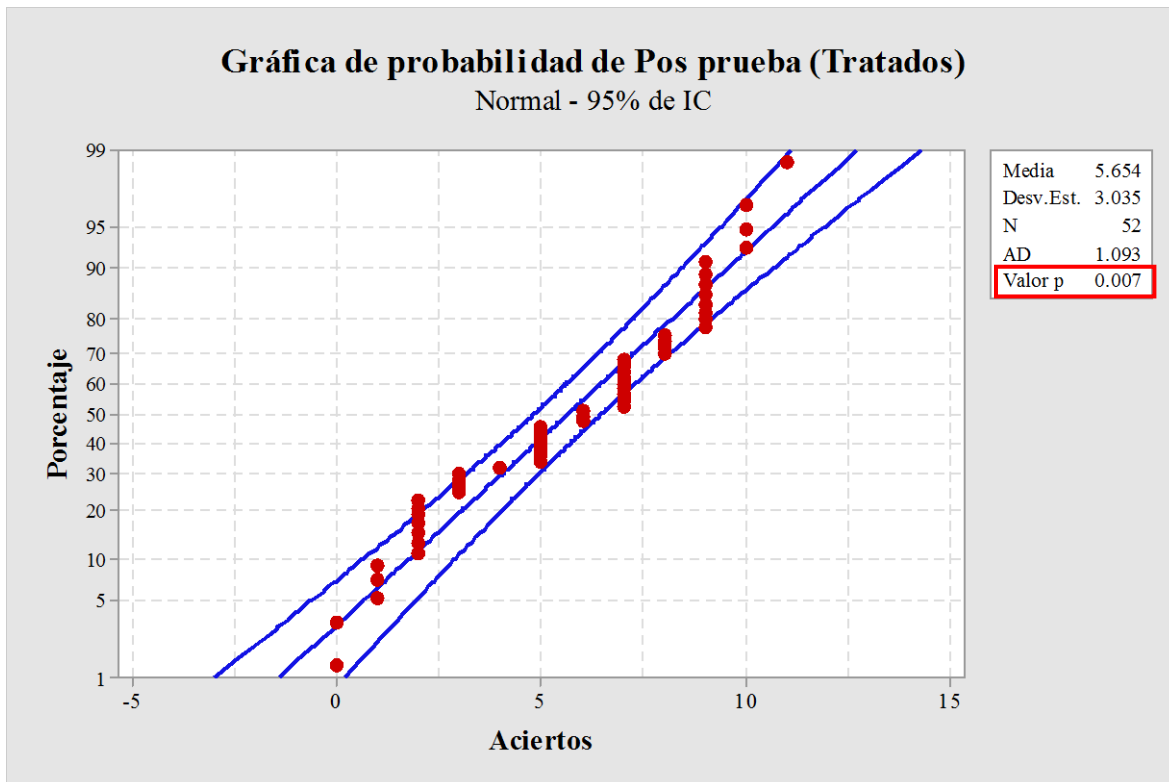


Figura 19. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.1.5.4 Observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba tienen (o provienen de una población con) distribución normal.

H_1 : Las observaciones de la cantidad de aciertos conseguida por estudiante en la pos prueba no tienen (o provienen de una población sin) distribución normal.

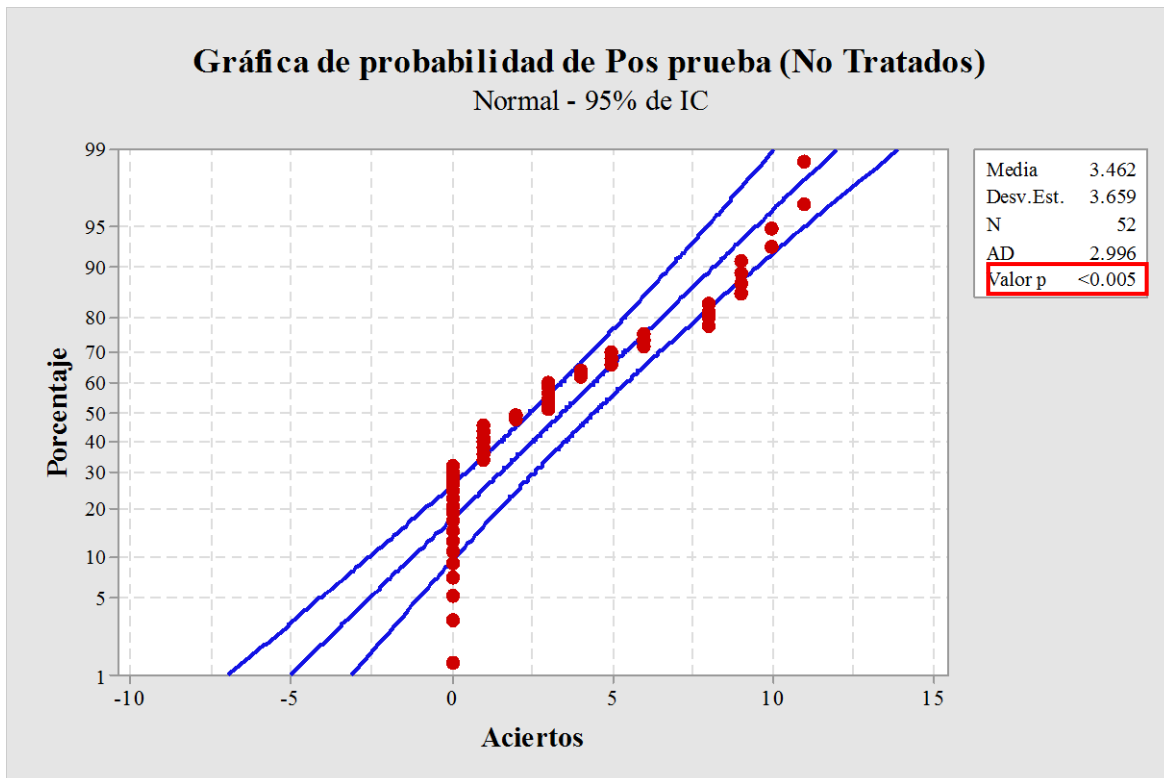


Figura 20. Gráfico para el test de normalidad de los datos de la aplicación de la pos prueba a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.2 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados

Los dos test que se desarrollaron en esta parte están referidos a las “parejas” de observaciones de la cantidad de aciertos obtenida por los estudiantes al resolver los instrumentos de pre y pos prueba, esto es, fueron aplicados de manera “vertical” en el esquema de la figura 11 tanto para los grupos a los que se les instruyó con la estrategia didáctica como para los que no.

Se presentan las soluciones producto de “correr” ambas pruebas en el software SPSS y como se dijo antes, su interpretación y correspondiente discusión constituyen material del capítulo siguiente.

4.2.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

$H_0: \rho_s = 0$ (no existe correlación entre la cantidad de aciertos conseguida por estudiante, en la pre prueba y la obtenida en la pos prueba).

$H_1: \rho_s \neq 0$ (existe una correlación entre la cantidad de aciertos conseguida por estudiante, en la pre prueba y la obtenida en la pos prueba).

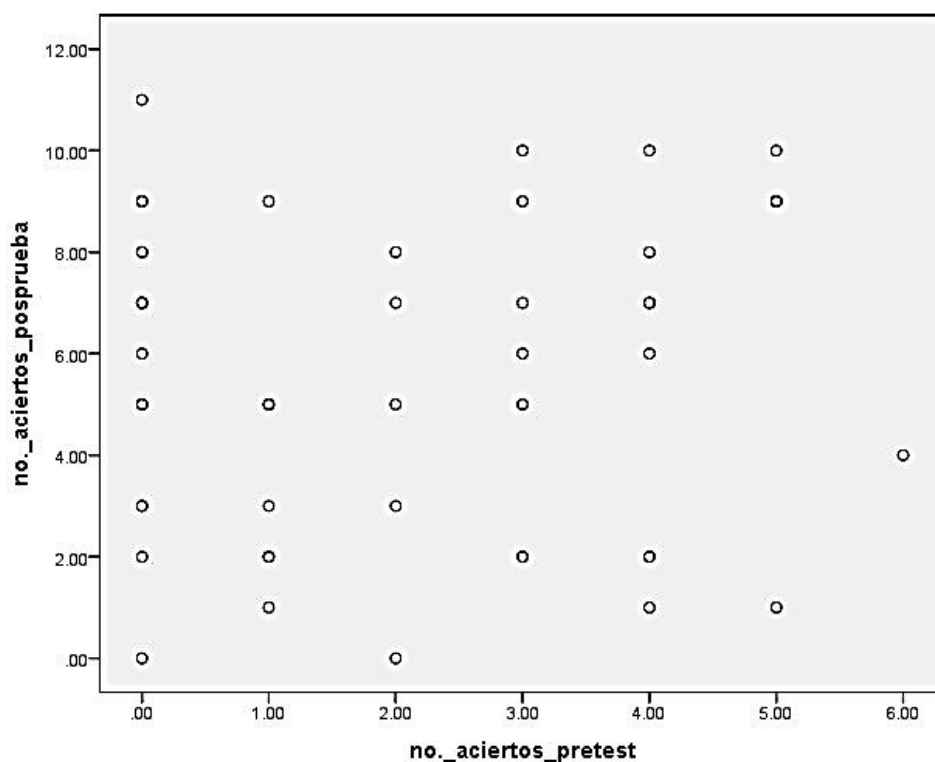


Figura 21. Diagrama de dispersión para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

			no. _aciertos_pre test	no. _aciertos_po sprueba
Rho de Spearman	no._aciertos_pretest	Coefficiente de correlación	1.000	.059
		Sig. (bilateral)		.678
		N	52	52
	no._aciertos_posprueba	Coefficiente de correlación	.059	1.000
		Sig. (bilateral)	.678	
		N	52	52

Tabla 37. Cálculo del coeficiente r_s de Spearman para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.2.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

$H_0: \rho_s = 0$ (no existe correlación entre la cantidad de aciertos conseguida por estudiante, en la pre prueba y la obtenida en la pos prueba).

$H_1: \rho_s \neq 0$ (existe una correlación entre la cantidad de aciertos conseguida por estudiante, en la pre prueba y la obtenida en la pos prueba).

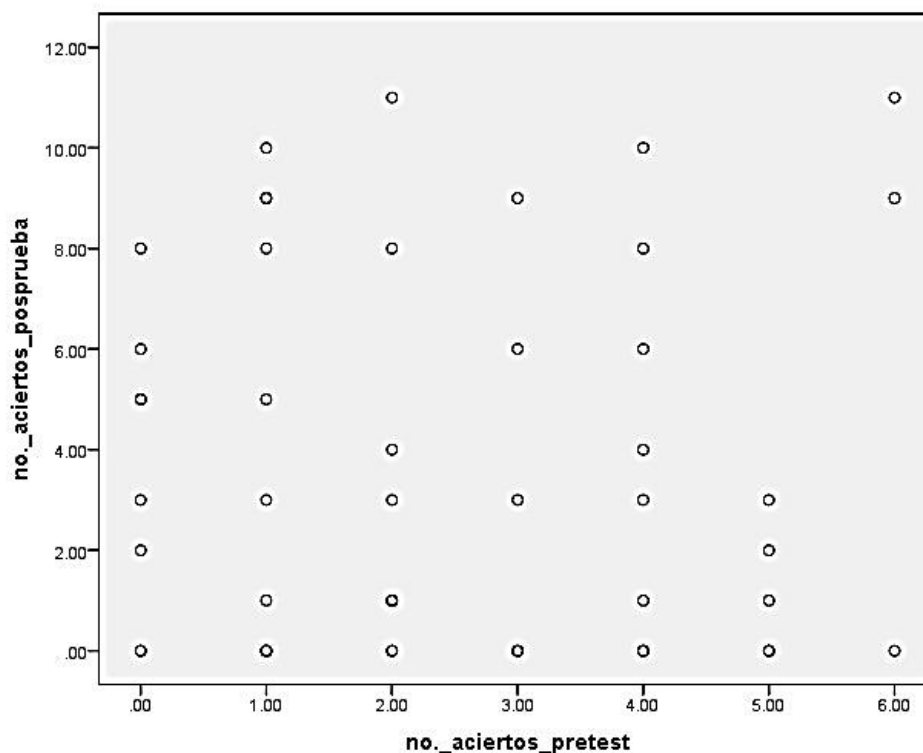


Figura 22. Diagrama de dispersión para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

			no. _aciertos_pre test	no. _aciertos_po sprueba
Rho de Spearman	no._aciertos_pretest	Coefficiente de correlación	1.000	-.041
		Sig. (bilateral)	.	.772
		N	52	52
	no._aciertos_posprueba	Coefficiente de correlación	-.041	1.000
		Sig. (bilateral)	.772	.
		N	52	52

Tabla 38. Cálculo del coeficiente r_s de Spearman para los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.3 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon

De manera similar a la sección anterior, las pruebas relativas a rangos asignados de Wilcoxon se destinaron a los “pares” de datos conformados por la cantidad de aciertos (por estudiante) al dar solución a los instrumentos de pre y pos prueba, es decir, se “ubican” de manera vertical en la figura 11 tanto para los grupos a los que se les suministró la estrategia didáctica como para los que no.

A diferencia del procedimiento para determinar el coeficiente r_s de Spearman y con el objeto de ofrecer compatibilidad con la “mecánica” de los test de Wilcoxon, se hizo un “arreglo” de la cantidad de aciertos obtenida para todos los sujetos en la pos prueba que posibilita el pareo con el correspondiente número para la pre prueba, el indicador se denomina “nivel de aciertos” y su equivalencia es, a saber, de 0 aciertos a un nivel de 0, de 1 y 2 aciertos a un nivel de 1, de 3 y 4 aciertos a un nivel de 2, de 5 y 6 aciertos a un nivel 3, de 7 y 8 aciertos a un nivel 4, de 9 y 10 aciertos a un nivel de 5 y, de 11 y 12 aciertos a un nivel 6. En el caso de la pre prueba el nivel de aciertos se empató con la cantidad de aciertos.

Por la relevancia de los resultados que aportan estos test en relación a los objetivos del trabajo, se exhiben las soluciones de su evaluación utilizando el estadístico de prueba así como el valor p con asistencia de Excel y SPSS, respectivamente. La interpretación y discusión correspondientes se dejan para el capítulo 5.

4.3.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : La mediana de las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tiene un valor de cero.

H_1 : La mediana de las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tiene un valor distinto de cero.

La tabla 39 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (5) para poder calcular el valor del estadístico de prueba z :

Número de estudiante	Nivel de los aciertos		Diferencia ($d_i = x_i - y_i$)	Rango de d_i
	Pre prueba (x_i)	Pos prueba (y_i)		
1	5	5	0	
2	0	5	-5	36.5
3	6	2	4	30.5
4	2	4	-2	14
5	4	4	0	
6	0	5	-5	36.5
7	4	1	3	23
8	1	2	-1	4
9	0	6	-6	38

Tabla 39. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica.
(Elaboración propia)

Número de estudiante	Nivel de los aciertos		Diferencia ($d_i = x_i - y_i$)	Rango de d_i
	Pre prueba (x_i)	Pos prueba (y_i)		
10	3	1	2	14
11	2	2	0	
12	2	4	-2	14
13	2	0	2	14
14	0	3	-3	23
15	3	5	-2	14
16	4	1	3	23
17	0	2	-2	14
18	1	5	-4	30.5
19	3	3	0	
20	5	5	0	
21	3	3	0	
22	1	1	0	
23	0	4	-4	30.5
24	3	1	2	14
25	0	4	-4	30.5
26	5	1	4	30.5
27	0	2	-2	14
28	3	2	1	4
29	0	4	-4	30.5
30	0	4	-4	30.5
31	5	5	0	
32	4	4	0	
33	0	4	-4	30.5
34	4	3	1	4
35	1	1	0	
36	4	4	0	
37	3	5	-2	14
38	1	1	0	
39	1	3	-2	14
40	5	5	0	
41	0	4	-4	30.5
42	4	1	3	23
43	2	3	-1	4
44	1	3	-2	14
45	0	2	-2	14
46	0	4	-4	30.5
47	3	4	-1	4
48	0	1	-1	4
49	4	5	-1	4
50	0	0	0	
51	0	3	-3	23
52	3	5	-2	14
Mediana =	2	3		

Tabla 39. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica.
(Continuación)

Así, $T^+ = 180$ y $m = 38$ y, por tanto, el valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (5) es $z = -2.7626$.

Además, para el test de dos colas (con $\alpha = 0.05$) se ubica en el apéndice $F-z_{\alpha/2} = -1.96$ y su “contraparte” $z_{\alpha/2} = 1.96$, asimismo, para el test de una sola cola (también con $\alpha = 0.05$) se encuentra que $-z_{\alpha} = -1.64$.

El comparativo esquemático con líneas y puntos es el siguiente:

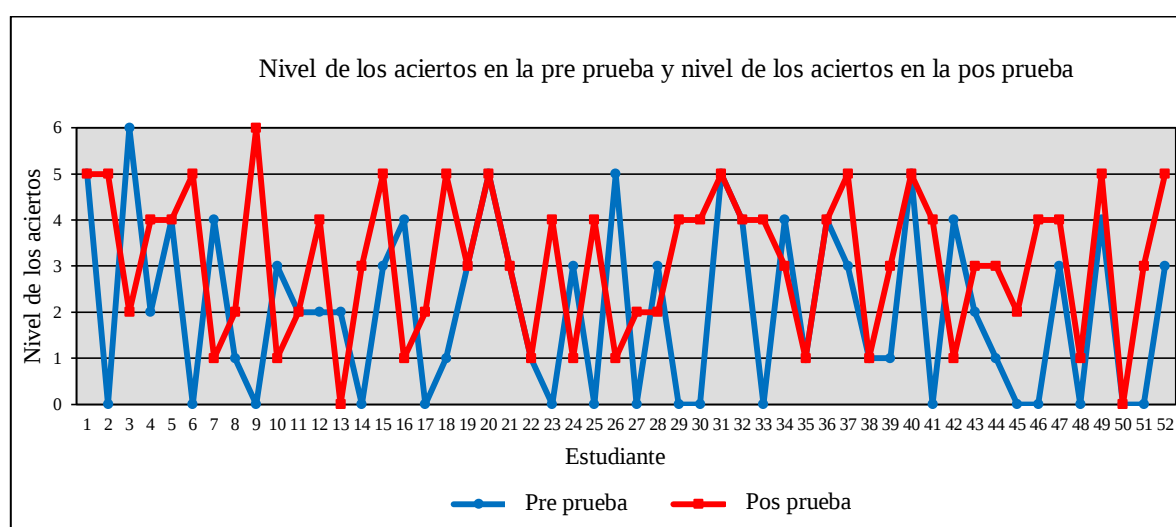


Figura 23. Gráfico comparativo para los niveles de los aciertos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a	
	Posprueba - Pretest
Z	-2.785 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	.005

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

b. Basado en los rangos negativos.

Tabla 40. Estadísticos de contraste para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.3.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica

Hipótesis:

H_0 : La mediana de las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tiene un valor de cero.

H_1 : La mediana de las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tiene un valor distinto de cero.

La tabla 41 hace acopio de las cantidades que requiere la ecuación (5) para poder calcular el valor del estadístico de prueba z :

Número de estudiante	Nivel de los aciertos		Diferencia ($d_i = x_i - y_i$)	Rango de d_i
	Pre prueba (x_i)	Pos prueba (y_i)		
1	4	1	3	27.5
2	2	6	-4	36
3	2	0	2	19.5
4	6	5	1	8
5	2	2	0	
6	5	2	3	27.5
7	0	4	-4	36
8	1	0	1	8
9	0	3	-3	27.5
10	3	2	1	8
11	6	0	6	44
12	0	3	-3	27.5
13	0	1	-1	8
14	1	5	-4	36
15	5	0	5	42
16	5	1	4	36
17	1	3	-2	19.5
18	4	0	4	36
19	1	1	0	
20	1	4	-3	27.5
21	5	0	5	42

Tabla 41. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.
(Elaboración propia)

Número de estudiante	Nivel de los aciertos		Diferencia ($d_i = x_i - y_i$)	Rango de d_i
	Pre prueba (x_i)	Pos prueba (y_i)		
22	2	0	2	19.5
23	1	0	1	8
24	0	2	-2	19.5
25	4	2	2	19.5
26	2	1	1	8
27	2	1	1	8
28	1	5	-4	36
29	1	0	1	8
30	2	2	0	
31	1	5	-4	36
32	3	0	3	27.5
33	4	4	0	
34	1	0	1	8
35	4	2	2	19.5
36	3	5	-2	19.5
37	3	0	3	27.5
38	5	1	4	36
39	4	0	4	36
40	0	0	0	
41	3	3	0	
42	0	0	0	
43	2	1	1	8
44	4	5	-1	8
45	1	0	1	8
46	1	2	-1	8
47	2	4	-2	19.5
48	5	0	5	42
49	0	3	-3	27.5
50	2	1	1	8
51	4	3	1	8
52	6	6	0	
Mediana =	2	1.5		

Tabla 41. Indicadores estadísticos para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.
(Continuación)

Así, $T^+ = 598$ y $m = 44$ y, por tanto, el valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (5) es $z = 1.202$.

Además, para el test de dos colas (con $\alpha = 0.05$) se ubica en el apéndice F
 $z_{\alpha/2} = -1.96$ y su “contraparte” $z_{\alpha/2} = 1.96$.

El comparativo esquemático con líneas y puntos es el siguiente:

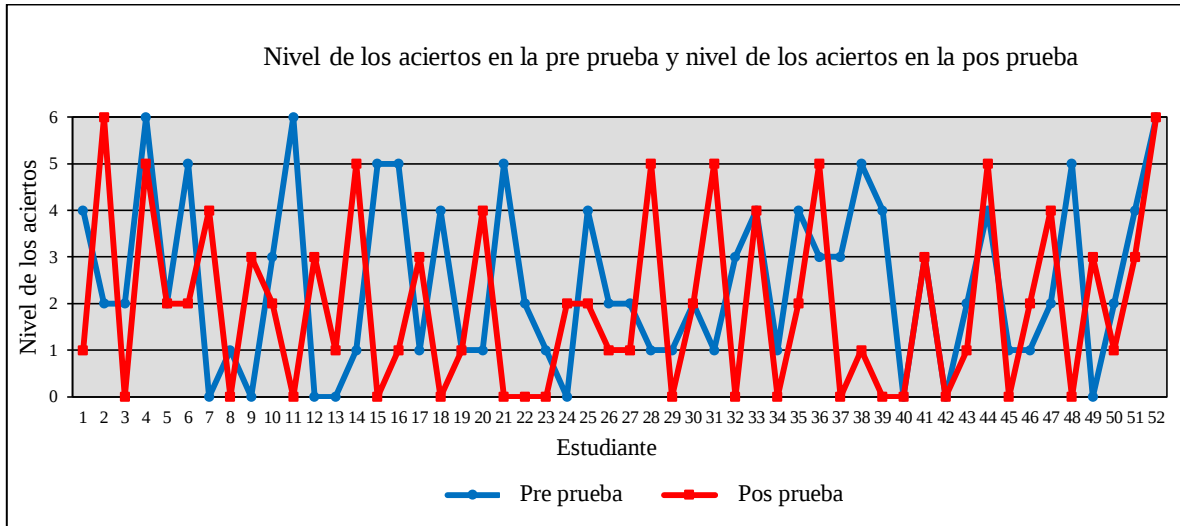


Figura 24. Gráfico comparativo para los niveles de los aciertos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a	
	Posprueba - Pretest
Z	-1.211 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	.226

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

b. Basado en los rangos positivos.

Tabla 42. Estadísticos de contraste para el test de rangos asignados de Wilcoxon de los datos de las aplicaciones de la pre y de la pos pruebas a los grupos no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

4.4 Prueba de la mediana

Como lo muestra la figura 11, estas pruebas se administraron de forma “horizontal” a los pares de observaciones conformados por las cantidades de aciertos logradas por

los estudiantes tratados (con la estrategia didáctica) y los instruidos de forma convencional, para la fase de pre prueba y posteriormente para la pos prueba.

Se valoraron los criterios del estadístico de prueba y del valor p en cada caso, haciendo uso de Excel y SPSS, respectivamente. La interpretación y discusión de lo obtenido de los test se aborda en el siguiente capítulo.

4.4.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba

Hipótesis:

H_0 : La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben la misma mediana.

H_1 : La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben distinta mediana.

La tabla 43 contiene la cantidad de aciertos lograda por estudiante en la pre prueba:

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica	
Número de estudiante	Aciertos	Número de estudiante	Aciertos
1	5	1	4
2	0	2	2
3	6	3	2
4	2	4	6
5	4	5	2

Tabla 43. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba. (Elaboración propia)

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica	
Número de estudiante	Aciertos	Número de estudiante	Aciertos
6	0	6	5
7	4	7	0
8	1	8	1
9	0	9	0
10	3	10	3
11	2	11	6
12	2	12	0
13	2	13	0
14	0	14	1
15	3	15	5
16	4	16	5
17	0	17	1
18	1	18	4
19	3	19	1
20	5	20	1
21	3	21	5
22	1	22	2
23	0	23	1
24	3	24	0
25	0	25	4
26	5	26	2
27	0	27	2
28	3	28	1
29	0	29	1
30	0	30	2
31	5	31	1
32	4	32	3
33	0	33	4
34	4	34	1
35	1	35	4
36	4	36	3
37	3	37	3
38	1	38	5
39	1	39	4
40	5	40	0
41	0	41	3
42	4	42	0
43	2	43	2
44	1	44	4
45	0	45	1
46	0	46	1
47	3	47	2
48	0	48	5
49	4	49	0
50	0	50	2
51	0	51	4
52	3	52	6
Mediana =	2	Mediana =	2

Tabla 43. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba.(Continuación)

Así, la mediana combinada tendría un valor de 2 y al aplicar el formato de la tabla (12) se tendría:

	Grupos		
	Tratados	No tratados	
Puntuaciones por debajo de la mediana	29	30	59
Puntuaciones por arriba de la mediana	23	22	45
<i>Total</i>	52	52	104

Tabla 44. Formato de contingencia para la prueba de la mediana de los datos de la aplicación de la pre prueba. (Elaboración propia)

El valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (15) es $\chi^2 = 0$.

Además, para el test de una cola con $\alpha = 0.05$, se considera que los grados de libertad son (teniendo en cuenta 2 renglones y 2 columnas de la tabla anterior) $g.l. = (2-1)(2-1) = 1$ y se ubica en el apéndice D el valor $\chi^2_{0.05,1} = 3.841$.

El comparativo esquemático con líneas y puntos es el siguiente:

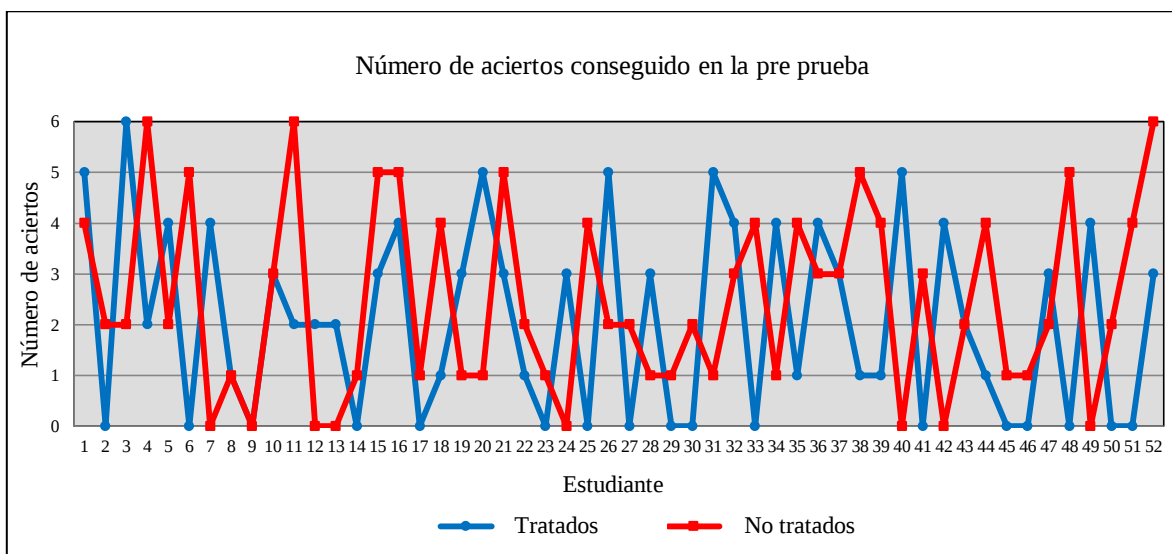


Figura 25. Gráfico comparativo para el número de aciertos logrado por estudiante en la aplicación de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a		
		Cantidad_de_ aciertos
N		104
Mediana		2.00
Chi-cuadrado		.039
gl		1
Sig. asintót.		.843
Corrección por continuidad de Yates	Chi-cuadrado	.000
	gl	1
	Sig. asintót.	1.000

a. Variable de agrupación: Condición

Tabla 45. Estadísticos de contraste para el test de la mediana de los datos de las aplicaciones de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.4.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba

Hipótesis:

H_0 :La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pos prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben la misma mediana.

H_1 :La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pos prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben distinta mediana.

La tabla 46 contiene la cantidad de aciertos lograda por estudiante en la pre prueba:

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica	
Número de estudiante	Aciertos	Número de estudiante	Aciertos
1	9	1	1
2	9	2	11
3	4	3	0

Tabla 46. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba.(Elaboración propia)

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica	
Número de estudiante	Aciertos	Número de estudiante	Aciertos
4	8	4	9
5	7	5	3
6	9	6	3
7	2	7	8
8	3	8	0
9	11	9	6
10	2	10	3
11	3	11	0
12	7	12	5
13	0	13	2
14	6	14	10
15	10	15	0
16	1	16	1
17	3	17	5
18	9	18	0
19	6	19	1
20	9	20	8
21	5	21	0
22	2	22	0
23	8	23	0
24	2	24	3
25	7	25	4
26	1	26	1
27	5	27	1
28	5	28	9
29	7	29	0
30	8	30	4
31	10	31	9
32	8	32	0
33	7	33	8
34	6	34	0
35	1	35	3
36	7	36	9
37	9	37	0
38	2	38	2
39	5	39	0
40	9	40	0
41	7	41	6
42	2	42	0
43	5	43	1
44	5	44	10
45	3	45	0
46	7	46	3
47	7	47	8
48	2	48	0
49	10	49	5
50	0	50	1
51	5	51	6
52	9	52	12
Mediana =	6	Mediana =	2.5

Tabla 46. Número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba.(Continuación)

Así, la mediana combinada tendría un valor de 5 y al aplicar el formato de la tabla (12) se tendría:

	Grupos		
	Tratados	No tratados	Combinados
Puntuaciones por debajo de la mediana	24	37	61
Puntuaciones por arriba de la mediana	28	15	43
<i>Total</i>	52	52	104

Tabla 47. Formato de contingencia para la prueba de la mediana de los datos de la aplicación de la pos prueba. (Elaboración propia)

El valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (15) es $\chi^2 = 5.709$.

Además, para el test de una cola con $\alpha = 0.05$, se considera que los grados de libertad son (teniendo en cuenta 2 renglones y 2 columnas de la tabla anterior) $g.l. = (2-1)(2-1) = 1$ y se ubica en el apéndice D el valor $\chi^2_{0.05,1} = 3.841$. También, del mismo apéndice el test de dos colas ($\alpha = 0.025$) estimaría, $\chi^2_{0.975,1} = 0.001$ y $\chi^2_{0.025,1} = 5.024$.

El comparativo esquemático con líneas y puntos es el siguiente:

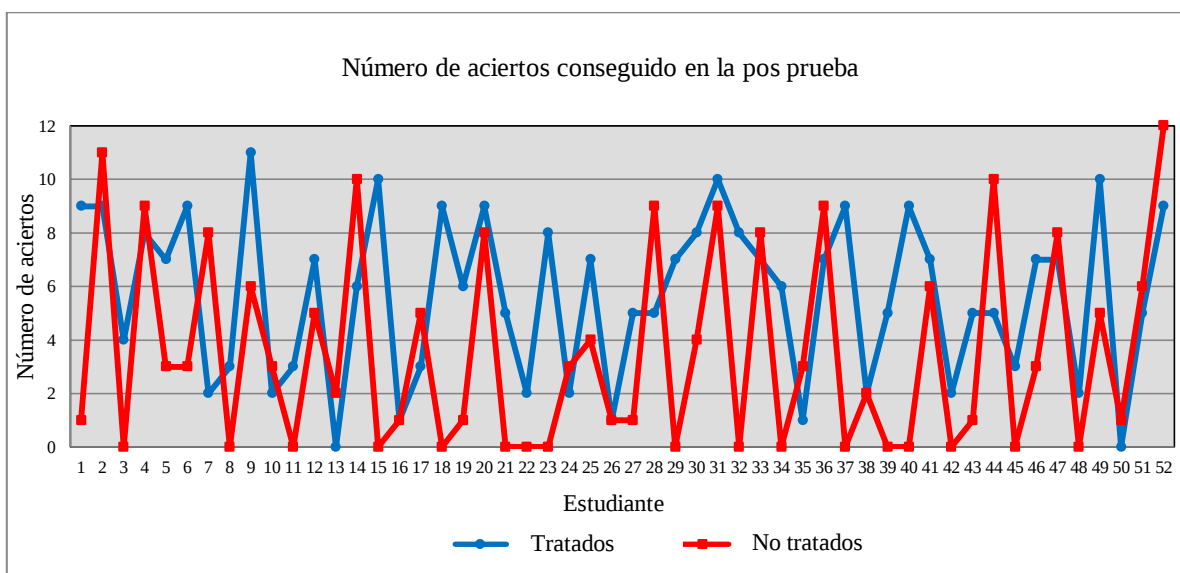


Figura 26. Gráfico comparativo para el número de aciertos logrado por estudiante en la aplicación de la pos prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica. (Elaboración propia)

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a		
		Cantidad_de_ aciertos
N		104
Mediana		5.00
Chi-cuadrado		6.701
gl		1
Sig. asintót.		.010
Corrección por continuidad de Yates	Chi-cuadrado	5.709
	gl	1
	Sig. asintót.	.017

a. Variable de agrupación: Condición

Tabla 48. Estadísticos de contraste para el test de la mediana de los datos de las aplicaciones de la pos prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.5 Prueba de la U de Mann-Whitney

De manera análoga a como se refiere en la parte anterior, los test de Mann-Whitney fueron implementados “horizontalmente” a los datos derivados de los grupos tratados y no, con la estrategia didáctica, al darle solución a los instrumentos de pre prueba y después de pos prueba.

Se emplean también, los criterios del estadístico de prueba y del valor p en cada caso, haciendo uso de Excel y SPSS, respectivamente, con interpretación y discusión en el siguiente capítulo.

4.5.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba

Hipótesis:

H_0 : La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben la misma distribución.

H_1 : La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben distinta distribución.

En la tabla 49 han sido asignados rangos para las cantidades de aciertos de la tabla 43:

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica			No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		
Número de estudiante	Aciertos	Rango	Número de estudiante	Aciertos	Rango
1	5	95	1	4	81.5
2	0	13	2	2	52
3	6	102.5	3	2	52
4	2	52	4	6	102.5
5	4	81.5	5	2	52
6	0	13	6	5	95
7	4	81.5	7	0	13
8	1	35	8	1	35
9	0	13	9	0	13
10	3	66.5	10	3	66.5
11	2	52	11	6	102.5
12	2	52	12	0	13
13	2	52	13	0	13

Tabla 49. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba.
(Elaboración propia)

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica			No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		
Número de estudiante	Aciertos	Rango	Número de estudiante	Aciertos	Rango
14	0	13	14	1	35
15	3	66.5	15	5	95
16	4	81.5	16	5	95
17	0	13	17	1	35
18	1	35	18	4	81.5
19	3	66.5	19	1	35
20	5	95	20	1	35
21	3	66.5	21	5	95
22	1	35	22	2	52
23	0	13	23	1	35
24	3	66.5	24	0	13
25	0	13	25	4	81.5
26	5	95	26	2	52
27	0	13	27	2	52
28	3	66.5	28	1	35
29	0	13	29	1	35
30	0	13	30	2	52
31	5	95	31	1	35
32	4	81.5	32	3	66.5
33	0	13	33	4	81.5
34	4	81.5	34	1	35
35	1	35	35	4	81.5
36	4	81.5	36	3	66.5
37	3	66.5	37	3	66.5
38	1	35	38	5	95
39	1	35	39	4	81.5
40	5	95	40	0	13
41	0	13	41	3	66.5
42	4	81.5	42	0	13
43	2	52	43	2	52
44	1	35	44	4	81.5
45	0	13	45	1	35
46	0	13	46	1	35
47	3	66.5	47	2	52
48	0	13	48	5	95
49	4	81.5	49	0	13
50	0	13	50	2	52
51	0	13	51	4	81.5
52	3	66.5	52	6	102.5
$R_1 =$		2554	$R_2 =$		2906

Tabla 49. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pre prueba.(Continuación)

Por tanto, de la ecuación (8) se pueden obtener $U_1 = 1528$ y $U_2 = 1176$ y con U_2 el valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (13) es $z = -1.144$.

Además, para el test de dos colas (con $\alpha = 0.05$) se ubica en el apéndice F $z_{\alpha/2} = -1.96$ y su “contraparte” $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a	
	Cantidad_de_ aciertos
U de Mann-Whitney	1176.000
W de Wilcoxon	2554.000
Z	-1.162
Sig. asintót. (bilateral)	.245

a. Variable de agrupación:
Condición

Tabla50. Estadísticos de contraste para el test de Mann-Whitney de los datos de las aplicaciones de la pre prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

4.5.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba

Hipótesis:

H_0 :La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pos prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben la misma distribución.

H_1 :La muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pos prueba, por los grupos de estudiantes tratados y la correspondiente para los grupos de estudiantes no tratados, exhiben distinta distribución.

En la tabla 51 han sido asignados rangos para las cantidades de aciertos de la tabla 46:

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica			No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		
Número de estudiante	Aciertos	Rango	Número de estudiante	Aciertos	Rango
1	9	90.5	1	1	24.5
2	9	90.5	2	11	102.5
3	4	50	3	0	10
4	8	80.5	4	9	90.5
5	7	72	5	3	43.5
6	9	90.5	6	3	43.5
7	2	34	7	8	80.5
8	3	43.5	8	0	10
9	11	102.5	9	6	64.5
10	2	34	10	3	43.5
11	3	43.5	11	0	10
12	7	72	12	5	56.5
13	0	10	13	2	34
14	6	64.5	14	10	99
15	10	99	15	0	10
16	1	24.5	16	1	24.5
17	3	43.5	17	5	56.5
18	9	90.5	18	0	10
19	6	64.5	19	1	24.5
20	9	90.5	20	8	80.5
21	5	56.5	21	0	10
22	2	34	22	0	10
23	8	80.5	23	0	10
24	2	34	24	3	43.5
25	7	72	25	4	50
26	1	24.5	26	1	24.5
27	5	56.5	27	1	24.5
28	5	56.5	28	9	90.5
29	7	72	29	0	10
30	8	80.5	30	4	50
31	10	99	31	9	90.5
32	8	80.5	32	0	10
33	7	72	33	8	80.5
34	6	64.5	34	0	10
35	1	24.5	35	3	43.5
36	7	72	36	9	90.5
37	9	90.5	37	0	10
38	2	34	38	2	34
39	5	56.5	39	0	10
40	9	90.5	40	0	10
41	7	72	41	6	64.5

Tabla 51. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba.
(Elaboración propia)

Se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica			No se les aplicó tratamiento por medio de la estrategia didáctica		
Número de estudiante	Aciertos	Rango	Número de estudiante	Aciertos	Rango
42	2	34	42	0	10
43	5	56.5	43	1	24.5
44	5	56.5	44	10	99
45	3	43.5	45	0	10
46	7	72	46	3	43.5
47	7	72	47	8	80.5
48	2	34	48	0	10
49	10	99	49	5	56.5
50	0	10	50	1	24.5
51	5	56.5	51	6	64.5
52	9	90.5	52	12	104
$R_1 =$		3238	$R_2 =$		2222

Tabla 51. Rangos asignados al número de aciertos conseguido por estudiante en la pos prueba.(Continuación)

Por tanto, de la ecuación (8) se pueden obtener $U_1 = 844$ y $U_2 = 1860$ y con U_1 el valor del estadístico de prueba al sustituir en la ecuación (13) es $z = -3.302$.

Además, para el test de dos colas (con $\alpha = 0.05$) se ubica en el apéndice F $-z_{\alpha/2} = -1.96$ y su “contraparte” $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Por último, SPSS ofrece la siguiente tabla de salida (se destaca el valor p) al ejecutar la prueba:

Estadísticos de contraste ^a	
	Cantidad_de_aciertos
U de Mann-Whitney	844.000
W de Wilcoxon	2222.000
Z	-3.323
Sig. asintót. (bilateral)	.001

a. Variable de agrupación:
Condición

Tabla 52. Estadísticos de contraste para el test de Mann-Whitney de los datos de las aplicaciones de la pos prueba a los grupos tratados y no tratados con la estrategia didáctica.(Elaboración propia)

5. Discusión y conclusiones

En este capítulo se proporcionan y discuten una serie de argumentos que ayudan a dar claridad a los resultados expuestos en el capítulo 4, esto es, se interpretan las cantidades que derivan de la aplicación de los test del capítulo anterior, a la luz y con asistencia de los elementos del marco teórico de las pruebas no paramétricas.

Asimismo, por medio de las conclusiones correspondientes, se traslada la discusión al “ámbito” de la estrategia didáctica implementada, es decir, en términos generales de si se aprecia que su influencia generó un diferencial positivo en los resultados.

5.1 Discusión

Esta parte se divide de acuerdo con las pruebas que se desarrollaron en el capítulo 4, analizando cada solución y brindando una explicación compatible y apoyada por los elementos teóricos del capítulo 3.

5.1.1 Pruebas de bondad de ajuste

Se discuten las soluciones de los apartados de la sección 4.1. En donde las tablas de indicadores estadísticos dan una primera guía, ya que al observar las discrepancias (o semejanzas) de la columna de frecuencia observada (o_i) con la columna de frecuencia esperada (e_i), se identifica una evidencia inicial del “ajuste” (o la falta de este) que la distribución surgida de las observaciones “experimentales” tiene con la distribución

teórica. Lo anterior también es relevante porque el estadístico de la prueba ji cuadrada es de tipo “diferencial”, esto es, la ecuación (1) emplea para su cálculo en el numerador tales sustracciones.

5.1.1.1 Con respecto a la distribución binomial, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 13 y la figura 13 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con los casos más significativos para las cantidades de aciertos de 0 y 2 con más de 12 unidades de desigualdad en ambos.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 14), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución binomial.

5.1.1.2 Con respecto a la distribución binomial, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 15 y la figura 14 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 3 con más de 9 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 16), por

lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido afirmar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con el enfoque tradicional no provienen de una población con distribución binomial.

5.1.1.3 Con respecto a la distribución binomial, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 17 y la figura 15 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 6 con más de 8 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 18), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido enunciar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución binomial.

5.1.1.4 Con respecto a la distribución binomial, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 19 y la figura 16 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 0 con más de 16 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 20), por

lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución binomial.

5.1.1.5 Con respecto a la distribución de Poisson, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 21 y la figura 13 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 0 con más de 10 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 22), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido afirmar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución de Poisson.

5.1.1.6 Con respecto a la distribución de Poisson, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 23 y la figura 14 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 3 con casi 6 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 24), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido enunciar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con el enfoque convencional no provienen de una población con distribución de Poisson.

5.1.1.7 Con respecto a la distribución de Poisson, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 25 y la figura 15 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 4 con casi 7 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 26), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos a los que se les aplicó la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución de Poisson.

5.1.1.8 Con respecto a la distribución de Poisson, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 27 y la figura 16 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 0 con más de 15 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 28), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido afirmar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución de Poisson.

5.1.1.9 Con respecto a la distribución hipergeométrica, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 29 y la figura 13 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con los casos más significativos para las cantidades de aciertos de 0 y 2 con más de 12 unidades de desigualdad en ambos.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 30), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido enunciar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución hipergeométrica.

5.1.1.10 Con respecto a la distribución hipergeométrica, de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 31 y la figura 14 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 3 con más de 9 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 32), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con el enfoque tradicional no provienen de una población con distribución hipergeométrica.

5.1.1.11 Con respecto a la distribución hipergeométrica, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La tabla 33 y la figura 15 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 4 con más de 10 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 34), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido afirmar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos instruidos con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución hipergeométrica.

5.1.1.12 Con respecto a la distribución hipergeométrica, de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La tabla 35 y la figura 16 muestran diferencias evidentes entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, con el caso más significativo para la cantidad de aciertos de 0 con casi 16 unidades de desigualdad.

También, el estadístico de prueba determinado a partir de la ecuación (1), resultó ser muy superior al valor de χ^2 obtenido del apéndice D para $\alpha = 0.05$ (ver tabla 36), por lo cual se le considera en “región de rechazo” de la hipótesis nula, otorgando la decisión a favor de la hipótesis alternativa, así, es válido enunciar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución hipergeométrica.

5.1.1.13 Con respecto a la distribución normal (normalidad), de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La figura 17 muestra que muchos de los datos (puntos de color rojo) se encuentran lejos de la línea de normalidad (recta central de color azul), lo cual puede ser considerado como una evidencia visual de la ausencia de normalidad.

También, en el recuadro de información estadística del gráfico puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (<0.005) está muy por debajo del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no aceptar la hipótesis nula, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución normal.

5.1.1.14 Con respecto a la distribución normal (normalidad), de las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La figura 18 muestra que muchos de los datos (puntos de color rojo) se encuentran lejos de la línea de normalidad (recta central de color azul), lo cual puede ser considerado como una evidencia visual de la ausencia de normalidad.

También, en el recuadro de información estadística del gráfico puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (<0.005) está muy por debajo del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no aceptar la hipótesis nula, así, es válido afirmar que las observaciones obtenidas en la pre prueba por los grupos instruidos con el enfoque convencional no provienen de una población con distribución normal.

5.1.1.15 Con respecto a la distribución normal (normalidad), de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos tratados con la estrategia didáctica

La figura 19 muestra que muchos de los datos (puntos de color rojo) se encuentran lejos de la línea de normalidad (recta central de color azul), lo cual puede ser considerado como una evidencia visual de la ausencia de normalidad.

También, en el recuadro de información estadística del gráfico puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (0.007) está muy por debajo del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no aceptar la hipótesis nula, así, es válido enunciar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos a los que se les aplicó la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución normal.

5.1.1.16 Con respecto a la distribución normal (normalidad), de las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica

La figura 20 muestra que muchos de los datos (puntos de color rojo) se encuentran lejos de la línea de normalidad (recta central de color azul), lo cual puede ser considerado como una evidencia visual de la ausencia de normalidad.

También, en el recuadro de información estadística del gráfico puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (<0.005) está muy por debajo del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no aceptar la hipótesis nula, así, es válido declarar que las observaciones obtenidas en la pos prueba por los grupos no tratados con la estrategia didáctica no provienen de una población con distribución normal.

5.1.2 Coeficiente de correlación r_s de Spearman de rangos ordenados

Se discuten las soluciones de los apartados de la sección 4.2, las cuales se exhiben a través de diagramas de dispersión y tablas, generados al “correr” los test en el software SPSS.

5.1.2.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica

La dispersión que revela la figura 21 proporciona un primer indicio gráfico de la ausencia de asociación lineal entre los puntos que representan a las parejas de valores conformadas por el número de aciertos logrado por estudiante en la pre prueba y su “contraparte” en la pos prueba.

Además, la tabla 37 convalida lo dicho en el párrafo anterior, ya que puede apreciarse un valor para el coeficiente de correlación muy cercano a cero (0.059), lo cual de acuerdo con Walpole *et al.* (2012) validaría la afirmación de que las variables no están correlacionadas, aunque “en rigor” la decisión es de aceptar la hipótesis alternativa.

5.1.2.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica

La dispersión que revela la figura 22 proporciona un primer indicio gráfico de la ausencia de asociación lineal entre los puntos que representan a las parejas de valores conformadas por el número de aciertos logrado por estudiante en la pre prueba y su “contraparte” en la pos prueba.

Además, la tabla 38 convalida lo dicho en el párrafo anterior, ya que puede apreciarse un valor para el coeficiente de correlación muy cercano a cero (-0.041), lo cual de acuerdo con Walpole *et al.* (2012) validaría la afirmación de que las variables no están correlacionadas, aunque “en rigor” la decisión es de aceptar la hipótesis alternativa.

5.1.3 Prueba de rangos asignados de Wilcoxon

Se discuten las soluciones de los apartados de la sección 4.3, en donde para cada caso, ha sido calculada la cantidad correspondiente al estadístico de prueba, así como también el valor p , el primero con asistencia de Excel y el segundo a través de SPSS.

5.1.3.1 Grupos tratados con la estrategia didáctica

El estadístico de prueba hallado con la ecuación (5), con valor -2.7626 , claramente puede ser considerado en “región de rechazo” de la hipótesis nula, si se tiene en cuenta que las pruebas de una y dos colas atienden a valores de -1.64 y -1.96 (ambos con $\alpha = 0.05$), respectivamente.

Por otro lado, la figura 23 refleja para muchos de los casos, una ventaja en nivel de aciertos de las “líneas y puntos” de la pos prueba sobre los que son propios de la pre prueba.

Además, en la tabla 40 puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (0.005) está muy por debajo del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no aceptar la hipótesis nula, así, es válido declarar que la mediana de las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tienen un valor distinto de cero.

5.1.3.2 Grupos no tratados con la estrategia didáctica

El estadístico de prueba hallado con la ecuación (5), con valor 1.202, claramente puede ser considerado en “región de no rechazo” de la hipótesis nula, si se tiene en cuenta que la prueba de dos colas atiende a un valor de 1.96 (con $\alpha = 0.05$).

Por otro lado, la figura 24 refleja que, las diferencias entre las “líneas y puntos” de la pre prueba y las correspondientes a la pos prueba parecen “empatare” si bien no en su posición sobre el gráfico, si en su magnitud y número y, por tanto, pudiesen ser cercanas a anularse “unas a otras”.

Además, en la tabla 42 puede apreciarse que la cantidad que representa al valor p (0.226) está muy por encima del nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por lo cual la decisión es de no rechazar la hipótesis nula, así, es válido declarar que la mediana de

las diferencias entre el nivel de aciertos obtenido en la pre prueba y el obtenido en la pos prueba tienen un valor de cero.

5.1.4 Prueba de la mediana

Se discuten las soluciones de los apartados de la sección 4.4, donde se ha valuado en cada caso, los criterios del estadístico de prueba, así como el del valor p , utilizando Excel y SPSS, respectivamente.

5.1.4.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba

El valor del estadístico de prueba hallado con la ecuación (15) es $\chi^2 = 0$, que, al ser comparado con su “contraparte” del apéndice D para el test de una cola con $\alpha = 0.05$ ($\chi^2_{0.05,1} = 3.841$), quedaría en “región de aceptación” de la hipótesis nula.

Por otra parte, el comparativo de la figura 25 muestra dos secuencias de “líneas y puntos” las cuales aunque prácticamente carecen de coincidencia alguna, asemejan “compensar” sus diferencias en cuanto a cantidad y magnitud.

También, la tabla 45 exhibe una cantidad para el valor p (1.000) muy superior al nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por tanto, la decisión es de no rechazar la hipótesis nula y afirmar que la muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos tratados y la correspondiente para los grupos no tratados tienen la misma mediana.

5.1.4.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba

El valor del estadístico de prueba hallado con la ecuación (15) es $\chi^2 = 5.709$ que, al ser comparado con su “contraparte” del apéndice D para el test de una cola con $\alpha = 0.05$ ($\chi^2_{0.05,1} = 3.841$) y, para el test de dos colas con $\alpha = 0.025$ ($\chi^2_{0.975,1} = 0.001$ y $\chi^2_{0.025,1} = 5.024$) queda, en ambas situaciones en “región de no aceptación” de la hipótesis nula.

Por otra parte, el comparativo de la figura 26 muestra una secuencia de “líneas y puntos” que, para los grupos tratados alcanza en la mayoría de los casos cantidades de aciertos mayores que como sucede para las “líneas y puntos” propias de los grupos instruidos con el enfoque tradicional.

También, la tabla 48 exhibe una cantidad para el valor p (0.017) muy inferior al nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por tanto, la decisión es de no aceptar la hipótesis nula y afirmar que la muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos tratados y la correspondiente para los grupos no tratados no tienen la misma mediana.

5.1.5 Prueba de la U de Mann-Whitney

Se discuten las soluciones de los apartados de la sección 4.5, donde se ha valuado en cada caso, los criterios del estadístico de prueba, así como el del valor p , utilizando Excel y SPSS, respectivamente.

5.1.5.1 Observaciones obtenidas en la pre prueba

El valor del estadístico de prueba hallado con la ecuación (13) es $z = -1.144$, que, al ser comparado con su “contraparte” del apéndice D para el test de dos colas con $\alpha = 0.05$ ($-z_{\alpha/2} = -1.96$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$), quedaría en “región de aceptación” de la hipótesis nula.

Además, la tabla 50 revela una cantidad para el valor p (0.245) muy superior al nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por tanto, la decisión es de no rechazar la hipótesis nula y en consecuencia, enunciar que la muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos tratados y la correspondiente para los grupos instruidos con el enfoque tradicional tienen la misma distribución.

5.1.5.2 Observaciones obtenidas en la pos prueba

El valor del estadístico de prueba hallado con la ecuación (13) es $z = -3.302$, que, al ser comparado con su “contraparte” del apéndice D para el test de dos colas con $\alpha = 0.05$ ($-z_{\alpha/2} = -1.96$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$), quedaría en “región de no aceptación” de la hipótesis nula.

Además, la tabla 52 revela una cantidad para el valor p (0.001) muy inferior al nivel de significancia ($\alpha = 0.05$), por tanto, la decisión es de rechazar la hipótesis nula y en consecuencia, enunciar que la muestra de la cantidad de aciertos obtenida en la pre prueba, por los grupos tratados y la correspondiente para los grupos no tratados no tienen la misma distribución.

5.2 Conclusiones

Como se indicó inicialmente, este trabajo pretende como producto el formular una estrategia didáctica relativa al tema de aplicaciones de modelado con ecuaciones diferenciales, que incida de manera pertinente al mostrar mejoría en la eficacia de la obtención de los conocimientos alcanzados por los estudiantes cuando tratan conceptos asociados con dicha temática.

Además, la mencionada mejoría fue valorada desde un punto de vista puramente estadístico por medio de pruebas que corresponden al acervo de la denominada estadística no paramétrica. Los resultados de los test, que se discutieron en la parte anterior, condujeron a las siguientes conclusiones:

- Las pruebas de bondad de ajuste dejaron en claro que el tratamiento de los datos es apropiado por medio de estadística no paramétrica, ya que tanto el criterio del estadístico de prueba, como los esquemas comparativos de frecuencias referidos a las distribuciones binomial, de Poisson e hipergeométrica y los gráficos de normalidad y el criterio del valor p para la normal, revelan distribuciones de frecuencias de las observaciones que en todos los casos son “incompatibles” con las mencionadas funciones probabilísticas.
- La dispersión mostrada en las figuras 21 y 22, así como los valores próximos a cero para el coeficiente de correlación que aparecen en las tablas 37 y 38, dan cuenta de la inexistente asociación entre el “nivel de los conocimientos” mostrado por los estudiantes al solucionar la pre prueba y el correspondiente nivel al resolver la pos prueba. Al ser este análisis centrado en los “efectos” de la aplicación de la estrategia didáctica, lo expuesto antes toma relevancia

porque garantiza que cualquier mejoría en la eficacia de la obtención de los conocimientos (reflejada en la pos prueba), por parte de los estudiantes tratados, es estadísticamente independiente de la formación previa (evidenciada en la pre prueba).

- Los resultados de los test de Wilcoxon, generan información contrastante para los dos tipos de sujetos que participaron en la investigación. Si bien, los estudiantes instruidos con el enfoque tradicional exhibieron un comportamiento “estable” en cuanto al nivel de aciertos, lo cual lleva a declarar que la mediana de las diferencias entre pre prueba y pos prueba es de cero. Por otro lado, los grupos sometidos a la estrategia didáctica mostraron una cuota distinta de cero, para la mediana de las diferencias entre pre prueba y pos prueba, siendo tal desigualdad en favor del segundo instrumento como se puede apreciar en la figura 23 y queda claro por el signo y la magnitud del estadístico de prueba. Dando un recuento a los argumentos anteriores, los sujetos a los que se les aplicó la estrategia didáctica mostraron diferencias estadísticamente significativas entre el nivel de aciertos para pre prueba y pos prueba, siendo la última la que mayormente evidenció un nivel superior.
- Los test de la mediana, así como de la U de Mann-Whitney, revelaron aspectos importantes, para las observaciones obtenidas en la pre prueba por ambos tipos de estudiantes (tratados y no, con la estrategia didáctica), las cantidades de aciertos poseen una misma mediana e incluso una misma forma distribucional, de otra forma, tanto los grupos a los que se les aplicó la estrategia didáctica, como aquellos a los que no, fueron tomados en condiciones de nivel de conocimiento y formativas similares. Por otra parte, la pos prueba desvela una situación distinta, con una diferencia considerable (ver tabla 46) entre medianas (a favor de los grupos instruidos con la

estrategia didáctica)y distribuciones de las cantidades de aciertos y donde para dichas disparidades su significancia estadística fue respaldada en ambos casos por los criterios del estadístico de prueba y del valor p .

Después de analizar los resultados se puede confirmar que la evaluación realizada en esta investigación perfila una estrategia didáctica que, además de estar cimentada principalmente en la teoría de la semiótica matemática, ofreció, bajo las condiciones “experimentales” descritas, un incremento estadísticamente significativo de la eficacia en la obtención de los conocimientos que se vio plasmado en mejores resultados entre pre prueba y pos prueba para los estudiantes tratados, así como cuando se hizo un comparativo entre pos pruebas con los estudiantes que sólo recibieron instrucción tradicional.

Referencias bibliográficas

- Amaya, T. y Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación Matemática*, 25 (2), 119-140. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/405/40528961006.pdf>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
- Balacheff, N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (4), 258-272.
- Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problembased learning methods. *Medical Education*, 20 (6), 481-486.
- Barrows, H. S. (1996). Problem-based learning in medicine and beyond: a brief overview. *Bringing Problem-Based Learning to Higher Education: Theory and Practice* *cherches en Didactique des Mathématiques*, 68, 3-11.
- Bedford, A. y Fowler, W. (2008). *Mecánica para ingeniería. Dinámica*. México: Pearson Educación.
- Benítez, S. B. y Benítez, L. M. (2017). La enseñanza a través de la resolución de problemas. Una experiencia de clase. En L. A. Serna (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Vol. 30, pp. 1215-1224. ISSN 244-8-6469. Recuperado el 10 de septiembre de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf>
- Berger, M. (2010). A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (2), 159-186. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n2/v13n2a3.pdf>
- Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico. Perspectiva y método*. España: Hora.

- Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- CACeI. (2017). *Marco de referencia 2018 del CACeI en el contexto internacional*. México: Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería A. C. Recuperado el 20 de septiembre de 2017 del sitio web http://www.cacei.org/docs/marco_ing_2018.pdf
- Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9 (46), 15-25. Recuperado el 10 de junio de 2017 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf>
- Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Sáenz, A. y Molina, O. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (3), 99-116. Recuperado el 10 de junio de 2017 del sitio web <http://ensciencias.uab.es/article/view/v33-n3-camargo-perry-et-al/1594-pdf-es>
- Canavos, G. (1988). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. México: McGraw-Hill.
- Cataldi, Z., Lage, F. y Cabero, J. (2010). La promoción de competencias en el trabajo grupal con base en tecnologías informáticas y sus implicancias didácticas. *Revista de Medios y Educación*, 37, 209-224.
- Cengel, Y. y Palm, W. (2014). *Ecuaciones diferenciales. Para ingeniería y ciencias*. México: McGraw-Hill.
- Chevallard, Y. y Johsua, M. A. (1991). *La transpositiondidactique. Du savoir savantau savoir enseigné*. Francia: La PenséeEditions.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151-186. Recuperado el 10 de agosto de 2015 del sitio web http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/RDMfinal.pdf
- Cuicas, M. (1999). Procesos metacognitivos desarrollados por los alumnos cuando resuelven problemas matemáticos. *Enseñanza de la Matemática*, 8 (2), 21-29.

- Dallemole, J., Oliveira, L. y Moreno, L. (2014). Registros de representação semiótica e geometria analítica: uma experiência com futuros professores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (2), 131-163. Recuperado el 15 de agosto de 2015 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n2/v17n2a2.pdf>
- D'Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. España: Ediciones Díaz de Santos.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 177-195. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509909>
- D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/740%20Conceptualizacion.pdf>
- D'Amore, B. (2012). El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición “ingenua” en una teoría “realista” vs. el modelo “antropológico” en una teoría “pragmática”. *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*, 6, 17-46. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web http://200.69.103.18/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_debate_sobre_conceptos_y_objetos_matematicos_posicion_ingenua_en_una_teor%C3%ADa_realista_vs.modelo_antropologico_en_una_teor%C3%ADa_pragmatica.pdf
- D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (2), 191-218. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a2.pdf>
- D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (2), 177-212. Recuperado el 10 de junio de 2017 del sitio <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n2/v18n2a3.pdf>

- De Allende, C. y Morones, G. (2006). *Glosario de términos vinculados con la cooperación académica*. México: ANUIES. Recuperado el 10 de junio de 2017 del [sitio web](http://www.cucs.udg.mx/avisos/PDC_19_02_08/glosario_terminos_vinculados_con_cooperacion_acad.pdf) http://www.cucs.udg.mx/avisos/PDC_19_02_08/glosario_terminos_vinculados_con_cooperacion_acad.pdf
- De Las Fuentes, M., Arcos, J. y Encinas, Á. (2011). Un estudio comparativo de una estrategia didáctica que incorpora calculadora graficadora y el enfoque tradicional, para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 21-26. Recuperado el 15 de abril de 2017 del sitio web <http://semana.mat.uson.mx/semanaxxvii/Memorias/XX.pdf>
- De Las Fuentes, M., Arcos, J. L., Sevilla, J. J. y Corrales, V. A. (2012). *La didáctica de la ingeniería con apoyo de la calculadora en la universidad pública*. México: Educación.
- Díaz, L. (2004). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 10-20. Recuperado el 20 de junio de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf>
- Distéfano, M. L., Pochulu, M. D. y Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 4 (3), 202-233. Recuperado el 15 de diciembre de 2017 del sitio web https://www.researchgate.net/profile/Vicenc_Font/publication/283619227_Analisis_de_la_complejidad_cognitiva_en_la_lectura_y_escritura_de_expresiones_simbolicas_matematicas/links/56816bfa08ae1975838f8791/Analisis-de-la-complejidad-cognitiva-en-la-lectura-y-escritura-de-expresiones-simbolicas-matematicas.pdf
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-31.
- Duval, R. (1993a). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 37-65. Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

- Duval, R. (1993b). *Semiosis y noesis. Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela francesa*. México: Departamento de Matemática Educativa del CInvEstAv-IPN.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suiza: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactiques des mathématiques?. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Journal of Educational Studies in Mathematics*, 61 (1/2), 103-131. Recuperado el 15 de agosto de 2015 del sitio web http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf
- Duval, R. (2006b). Quelles sémiotiques pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 45-81. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509904>
- Duval, R. (2006c). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1), 143-168. Recuperado el 15 de junio de 2015 del sitio web http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- Elorza, H. (2000). *Estadística para las ciencias sociales y del comportamiento*. México: Oxford México.
- Engel, Ch. (1991). *Not just a method but a way of learning in the challenge of problem-based learning*. Londres, Reino Unido: Stirling.
- Flores, L., Rincón, E. G. y Zuñiga, L. (2014). El ABP en la enseñanza de las matemáticas como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento crítico en el nivel medio básico y modalidad telesecundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 2125-2132. Recuperado el 20 de abril de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>

- Franco-Mariscal, A. J. (2015). Competencias científicas en la enseñanza y el aprendizaje por Investigación. Un estudio de caso sobre corrosión de metales en secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 33 (2), 231-252. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web <http://ensciencias.uab.es/article/view/v33-n2-franco/1645-pdf-es>
- García, I. (2012). Semiótica y didáctica. Relaciones pensamiento/semiosis/mundo en la construcción de aprendizajes significativos en el aula preescolar. *Revista Omnia*, 18 (2), 11-24. Recuperado el 30 de junio de 2015 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/737/73723402002.pdf>
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En Gutiérrez, A. (ed.). *Área de conocimiento: Didáctica de la matemática*, 105-148. Madrid, España: Síntesis.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de noviembre de 2015 del sitio web <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*. España: Universidad de Granada. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 111-132. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. España: Universidad de Granada. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada del artículo, Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1/2), 127-135. Recuperado el 10 de agosto de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_ontosemiotico_combinatoria.pdf
- Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150. Recuperado el 15 de agosto de 2015 del sitio web http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/vision_didactica_francesa.pdf
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Versión revisada de la conferencia invitada en el IV Congreso Internacional de Ensino da Matematica. *Publicaciones*, 38, 25-49. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20analisis%20didactico%204Julio08.pdf>
- Gómez, L. F. (1998). El aprendizaje basado en metas, una teoría de aprendizaje para transformar la práctica educativa. *Educación*, 6, 9-16.

- Gómez, M., Danglot, C. y Vega, L. (2003). Sinopsis de pruebas estadísticas no paramétricas. Cuando usarlas. *Revista Mexicana de Pediatría*, 70 (2), 91-99. Recuperado el 15 de diciembre de 2017 del sitio web <http://www.medigraphic.com/pdfs/pediat/sp-2003/sp032i.pdf>
- Gravetter, F. y Wallnau, L. (2014). *Essentials of statistics for the behavioral sciences*. Estados Unidos de América: CengageLearning.
- Gulfo, J. y Amaya, T. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 22, 895-901. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf>
- Gutiérrez, L., Martínez, E. y Nebreda, T. (2008). Las competencias básicas en el área de matemáticas. *Cuadernos de Educación de Cantabria 5*. España: Consejería de Educación de Cantabria.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 5-21. Recuperado el 20 de julio de 2015 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf>
- Hernández, R. (2007). *Propuesta de mejora al proceso enseñanza-aprendizaje de la asignatura de planeación y control de la producción en las universidades tecnológicas de México*. México: ITESM-Campus Monterrey.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1 (2), 3-7.
- Hoffmann, M. (2006). What is a “semiotic perspective”, and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 279-291. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 del sitio web http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/9semiotic.pdf
- Infante, S. y Zarate De Lara, G. (2012). *Métodos estadísticos. Un enfoque interdisciplinario*. México: Colegio de Postgraduados.

- Íñiguez, F. J. (2015). El desarrollo de la competencia matemática en el aula de ciencias experimentales. *Revista Iberoamericana de Educación*, 67 (2), 117-130. Recuperado el 10 de julio de 2017 del sitio web <https://rieoei.org/historico/deloslectores/6761Iniguez.pdf>
- Lin, C.-W. y Lin, T.-L. (2014). Using triadic semiotics in storytelling. *Art and Design Review*, 2 (4), 78-84. Recuperado el 10 de septiembre de 2017 del sitio web http://file.scirp.org/pdf/ADR_2014112513501674.pdf
- Lind, D., Marchal, W. y Wathen, S. (2012). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. México: McGraw-Hill.
- Lingefjärd, T. y Farahani, D. (2017). The symbolic world of mathematics. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 6 (2), 118-135. Recuperado el 15 de diciembre de 2017 del sitio web <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6123577>
- López, M. A. (2008). El aprendizaje basado en problemas. Una propuesta en el contexto de la educación superior en México. *Tiempo de Educar*, 9 (18), 199-232. Recuperado el 30 de marzo de 2017 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/311/31111811003.pdf>
- Macías, J. (2014). Los registros semióticos en matemáticas como elemento de personalización en el aprendizaje. *Revista Digital de Investigación Educativa Conect@2*, 4 (9), 27-57. Recuperado el 15 de agosto de 2015 del sitio web http://www.revistaconecta2.com.mx/archivos/revistas/revista9/9_2.pdf
- Martínez, G., Sevilla, J. J., De Las Fuentes, M., Rivera, R. E. y Ávila, R. (2016). Diagnóstico sobre habilidades semióticas matemáticas básicas en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, 19 (73), 7-14. Recuperado el 1 de septiembre de 2017 del sitio web <http://ingenierias.uanl.mx/73/index.html>
- Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (2), 151-178. Recuperado el 3 de enero de 2015 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n2/v12n2a2.pdf>

- Maz, A., Jiménez, N., Bracho, R. y Adamuz, N. (2015). Análisis bibliométrico de la revista RELIME (1997-2011). *Investigación Bibliotecológica*, 29 (66), 91-104. Recuperado el 5 de marzo de 2018 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/ib/v29n66/0187-358X-ib-29-66-00091.pdf>
- Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística*. México: CengageLearning.
- Molina, O., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del teorema localización de puntos. *Educación Matemática*, 27 (2), 37-66. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web <http://funes.uniandes.edu.co/7971/1/2015-Molina%26Conocer.pdf>
- Montero, I. y León, O. (2002). Clasificación y descripción de las metodologías de investigación en psicología. *Revista Internacional de Psicología Clínica y de la Salud*, 2 (3), 503-508. Recuperado el 5 de diciembre de 2015 del sitio web http://www.aepc.es/ijchp/articulos_pdf/ijchp-53.pdf
- Montgomery, D. y Runger, G. (2003). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México: LimusaWiley.
- Morales, Z. E. (2013). Transformando las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo en el estudio del álgebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 673-678. Recuperado el 10 de febrero de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>
- Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, 13, 145-157. Recuperado el 3 de enero de 2018 del sitio web <http://www.ubiobio.cl/theoria/v/v13/13.pdf>
- Niss, M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, 215-220. Recuperado el 10 de febrero de 2018 del sitio web http://www.gram.edu/sacs/qep/chapter%205/5_3NissQLMath.pdf
- Ocampo, J., Martínez, M. A., De Las Fuentes, M. y Zatarain, J. (2010). *Reprobación y deserción en la facultad de ingeniería Mexicali de la universidad autónoma de Baja California*. México: Instituto Politécnico Nacional.

- OCDE (2004). *El programa PISA de la OCDE. Que es y para qué sirve*. Recuperado el 10 de junio de 2017 del sitio web <http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf>.
- OCDE. (2016). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2015 - Resultados*. Recuperado el 20 de agosto de 2017 del sitio web <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>
- Otte, M. (2001). Mathematical epistemology from a semiotic point of view. En van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th/ Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 1-31. Utrecht, Holanda: Utrecht University.
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. México: SEP.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 2, 191-213.
- Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 7-21. Recuperado el 10 de junio de 2015 del sitio web <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509902>
- Radford, L. (2013). On semiotics and education. *Éducation et didactique*, 7 (1), 185-204. Recuperado el 10 de septiembre de 2017 del sitio web <http://educationdidactique.revues.org/1668>
- Rivera, R. E., Ávila, R. y De Las Fuentes, M. (2015). *Las ecuaciones diferenciales. Una ecología de sus significados*. Alemania: Publicia.
- Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26 (2), 69-109. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web <http://www.redalyc.org/pdf/405/40532665004.pdf>
- Rodríguez, R., Sánchez, B. I., Camacho, A., Arcos, I. y Hernández H. (2016). Formación de ingenieros desde la matemática educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 29, 573-581. Recuperado el 10 de junio de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme29.pdf>
- Rodríguez, R., Sánchez, B. I., Arcos, I., Hernández, H., Camacho, A., De la Cruz, A. y Cajas, F. (2017). El tipo de matemáticas que deben ser enseñadas y

- aprendidas por los futuros ingenieros. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 290-297. Recuperado el 10 de septiembre de 2017 del sitio web <http://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf>
- Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter- interpretation: a peircean perspective. *Pre-proceedings of the 12th/ International congress on mathematical education*. Seoul, Korea. Recuperado el 1 de septiembre de 2016 del sitio web http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip
- Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics*, 71 (2), 123-143.
- Sastre, P., Boubée, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación*, 46 (8), 1-9. Recuperado el 10 de julio de 2016 del sitio web <http://rieoei.org/2219.htm>
- Semetsky, I. (2010). *Semiotics education experience*. Holanda: SensePublishers.
- Siegel, S. y Castellan, N. J. (1998). *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta*. México: Editorial Trillas.
- Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En Bishop A. J. et al. (eds.). *International handbook of mathematics education*, 827-876. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Singer, M. (1980). Signs of the self: an exploration in semiotic anthropology. *American Anthropologist*, 82 (3), 485-507.
- Steiner, H. (1985). Theory of mathematics education (TME). *For the Learning of Mathematics*, 5 (2), 11-17.
- Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). Teaching with tasks for effective mathematics learning. En Peter-Koop, A. y Wilson, P. (eds.), *Mathematics teacher education*. Nueva York , Estados Unidos de América:Springer.
- Triola, M. (2013). *Estadística*. México: Pearson Educación.

- Vallejos, G. (1999). Peirce: pragmatismo, semiótica y realismo. *Cinta de Moebio*, 5, 14-28. Recuperado el 5 de agosto de 2017 del sitio web <http://www.revistas.uchile.cl/index.php/CDM/article/viewFile/26439/27732>
- Vázquez, A. M. (2011). Consideraciones sobre el aprendizaje basado en problemas (ABP). *Revista Educación y Ciencia*, 11 (35), 73-85. Recuperado el 30 de septiembre de 2015 del sitio web <http://www.educacionyciencia.org/index.php/educacionyciencia/article/view/268/pdf>
- Vidales, C. E. (2009). La relación entre la semiótica y los estudios de la comunicación: un diálogo por construir. *Comunicación y Sociedad*, 11, 37-71. Recuperado el 5 de enero de 2017 del sitio web <http://www.scielo.org.mx/pdf/comso/n11/n11a3.pdf>
- Walpole, R., Myers, R., Myers, S. y Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Pearson Educación.
- Zecchetto, V. (2002). *La danza de los signos: nociones de semiótica general*. Ecuador: Ediciones Abya-Yala.
- Zill, D. y Wright, W. (2015). *Ecuaciones diferenciales. Con problemas con valores en la frontera*. México: Cengage Learning.

Apéndice A.

Instrumento de pre prueba. (Elaboración propia)

UNIVERSIDAD ESTATAL DE SONORA

ACADEMIA DE MATEMÁTICA - PRETEST DIAGNÓSTICO

PRÁCTICO DE MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES



Programa en que está inscrito: _____ Semestre que cursa actualmente: _____ Turno: _____

Problema:

El coeficiente de absorción del agua para la luz roja es cercano a 0.5 m^{-1} . Determine a qué distancia puede viajar este tipo de luz en ese medio antes de que se absorba 90% de ella (ver figura 1).

La ecuación diferencial que modela el fenómeno físico es:

$$\frac{dE}{ds} = -\alpha E$$

donde α es el coeficiente de absorción, s es la distancia que la luz viaja en dirección del haz, y E la energía radiante de la luz roja.

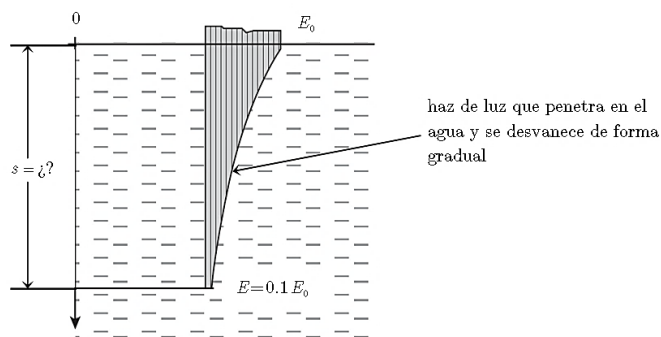


figura 1

Además:

- Calcule la distancia para la cual el haz ha sido asimilado por el líquido en un 40% e indíquela (de forma aproximada) sobre la figura 1.
- Suponga que para un "líquido hipotético" la luz roja ha recorrido una distancia próxima a los 3.5 metros antes de ser absorbida en un 80%, ubique tal sustancia (con base en su coeficiente α) en la tabla 1.
- Para el fluido del b) halle (con el gráfico 1) la distancia aproximada a la cual el haz luminoso se ha desvanecido en un 95%.

Sustancia hipotética	Absorción [m^{-1}]
No. 1	0.33
No. 2	0.46
No. 3	0.57
No. 4	0.60

Tabla 1

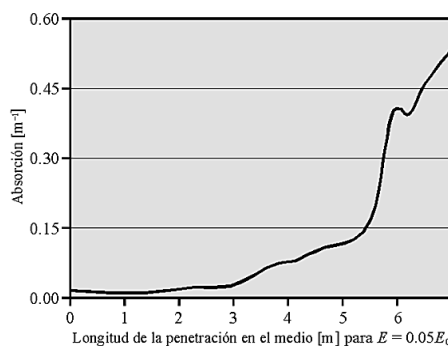


Gráfico 1

- Verifique el resultado de c) aritméticamente.
- ¿De qué orden y tipo es la ecuación diferencial que se plantea para dar solución al problema?, ¿qué procedimiento empleó? Explique.
- ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre la modelación de problemas "reales" utilizando ecuaciones diferenciales? Explique.

Gracias por sus atenciones, tiempo y cooperación!

Apéndice B.

Estrategia didáctica. (Elaboración propia)

UNIVERSIDAD ESTATAL DE SONORA

ACADEMIA DE MATEMÁTICA - ESTRATEGIA DIDÁCTICA
PRÁCTICA DE MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES



Programa en que está inscrito: _____ Semestre que cursa actualmente: _____ Turno: _____

Problema:

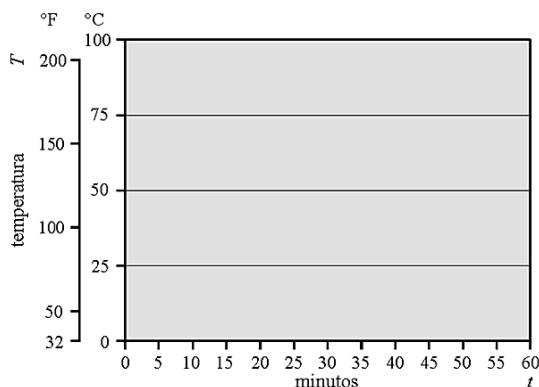
Una taza de café pierde temperatura de acuerdo con la ley (empírica) de enfriamiento de Newton, en la cual se enuncia que la rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la del medio (llamada ambiental) que lo rodea y la suya propia. Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t , T_m es la del entorno que lo circunda y dT/dt es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo, entonces la ecuación de enfriamiento/calentamiento puede ser escrita como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

- a) Complete la tabla* y trace el gráfico correspondiente

Tiempo (minutos), t	Temperatura °C (°F), T



- b) De la tabla y el gráfico anteriores, ¿aproximadamente en cuanto tiempo se alcanzó una temperatura “estable”, ¿cuál es su magnitud en °C y °F?
- c) ¿Cómo esperaría que fuese el comportamiento de la temperatura de la bebida después del punto que “identificó” en b) si sólo existe interacción de ésta con el medio que la rodea? Explique
- d) Use la expresión de Newton para calcular el valor de k bajo las condiciones registradas al haber transcurrido 10 minutos.
- e) Suponga que usted adquiere un vaso de café de una máquina expendedora y lo toma mientras trabaja en una oficina cuya temperatura climatizada se ajusta en el verano a 18°C, además se sabe que el aparato (de manufactura inglesa) despacha la bebida a una temperatura de 180°F, ¿cuánto tiempo le tomará aproximadamente al café el igualar la temperatura circundante?, considere una magnitud de $k = -0.3$. Explique el comportamiento de la solución.
- f) ¿De qué orden y tipo es la ecuación diferencial que se plantea para dar solución al problema?, ¿qué procedimiento empleó? Explique.
- g) ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre la modelación de problemas “reales” utilizando ecuaciones diferenciales? Explique.

Gracias por sus atenciones, tiempo y cooperación!

* recuerde que $\frac{^{\circ}\text{C}}{5} = \frac{^{\circ}\text{F} - 32}{9}$



Programa en que está inscrito: _____ Semestre que cursa actualmente: _____ Turno: _____

Problema:

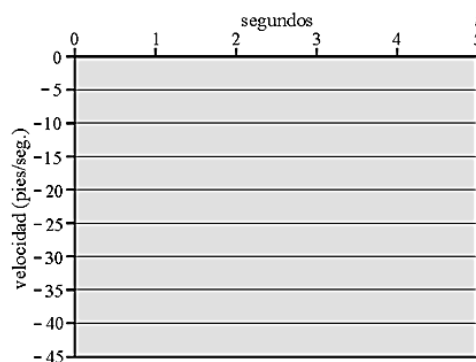
Un soldado y su paracaídas pesan aproximadamente 200 lb. Él está cayendo describiendo un trazo cercano a una vertical (figura 1) y el valor de la fuerza de arrastre (en libras) puede ser calculado mediante la relación $\frac{3}{4}$ (peso).



figura 1

- Indique (sobre la figura) los vectores involucrados en el fenómeno físico, formule la ecuación diferencial que lo modela y que permitiría determinar la magnitud de la velocidad de caída del militar en un instante de tiempo dado.
- Para la siguiente tabla, halle el valor de la velocidad de descenso del sujeto en los primeros 5 segundos y trace el gráfico correspondiente

Tiempo (segundos), t	Velocidad (pies/seg.), v



- ¿Cómo puede interpretar (físicamente) el signo algebraico de los valores de velocidad?
- ¿Qué clase de relación entre el tiempo y la velocidad de caída del individuo revela el gráfico?
- ¿De qué orden y tipo es la ecuación diferencial que se plantea para dar solución al problema?, ¿qué procedimiento empleó? Explique.
- ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre la modelación de problemas “reales” utilizando ecuaciones diferenciales? Explique.

Gracias por sus atenciones, tiempo y cooperación!



Programa en que está inscrito: _____ Semestre que cursa actualmente: _____ Turno: _____

Problema:

El sistema oscilatorio masa-resorte (figura 1) es el ejemplo más sencillo de un sistema vibratorio con un grado de libertad. Una sola coordenada y que mide el desplazamiento de la masa respecto a un punto de referencia es suficiente para especificar la posición del conjunto. Suponga que el resorte está sin estirar cuando $y = 0$. Aplicando la segunda ley de Newton, se puede escribir la ecuación del movimiento vertical de la masa como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

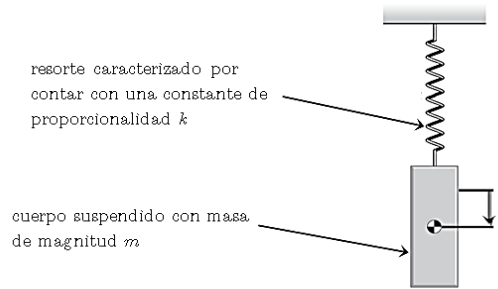
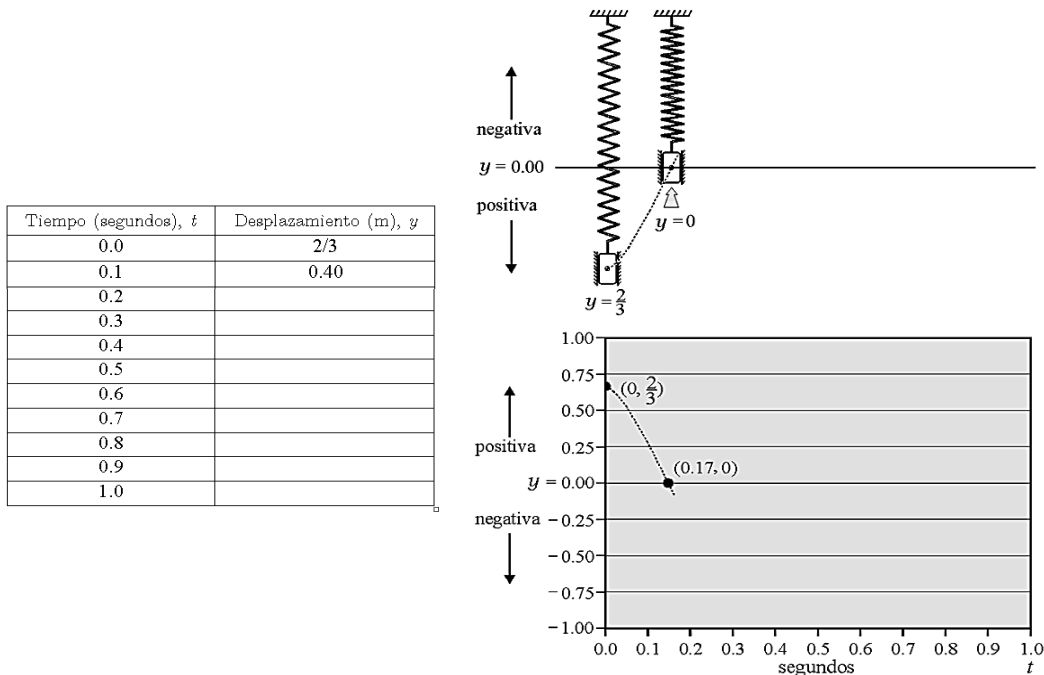


figura 1

- a) Indique (sobre la figura) los vectores involucrados en el fenómeno físico.
- b) Suponga que un bloque de 50 kg de masa se mueve entre guías verticales y es soportado por un resorte del cual se sabe que su $k = 4$ kN/m. Use la ecuación de Newton para completar la tabla y los gráficos que representan el movimiento armónico simple del sistema durante el primer segundo. Considere $y(0) = \frac{2}{3}$ y $y'(0) = -\frac{1}{6}$.



- c) Describa los cambios en el gráfico de solución del b), al modificar las magnitudes de los parámetros m y k .
- d) ¿De qué orden y tipo es la ecuación diferencial que se plantea para dar solución al problema?, ¿qué procedimiento empleó? Explique.
- e) ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre la modelación de problemas “reales” utilizando ecuaciones diferenciales? Explique.

Gracias por sus atenciones, tiempo y cooperación!

Apéndice C.

Instrumento de pos prueba. (Elaboración propia)

UNIVERSIDAD ESTATAL DE SONORA

ACADEMIA DE MATEMÁTICA - POS PRUEBA

PRÁCTICA DE MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES



Programa en que está inscrito: _____ Semestre que cursa actualmente: _____ Turno: _____

Problema:

Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento poblacional humano por medio de la matemática se llevó a cabo en 1798 por Thomas Malthus. Básicamente la idea detrás de su modelo es la suposición de que la razón con la que la cantidad de habitantes de un país incrementa en un cierto tiempo es proporcional a la población total de la nación en ese instante. Esto es, entre más personas estén presentes en t , habrá más en el futuro. Si $P(t)$ denota la cantidad de individuos en t , entonces

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

- Suponga que por motivo del estallamiento de una guerra civil, los ciudadanos de una cierta nacionalidad migran a un estado vecino a una razón constante $r > 0$. Formule la ecuación diferencial correspondiente tanto para el país del cual salen los ciudadanos, como para la nación receptora. Además, ¿qué significado tendría la cantidad $2r$? Explique.
- Hallar el pronóstico poblacional del año 2020 para una cierta entidad de la república mexicana, empleando la relación de Malthus y los registros históricos de la tabla 1. Considere que para tal caso se ha logrado aproximar una magnitud de $k = 0.018$.

Año	Valor t asociado	Mill. de habitantes
1966	0	4.048
		4.429
1980	14	5.208
		6.348
2001	35	7.600
2011	45	9.099

Tabla 1

- Complete la tabla 1 (utilice nuevamente $k = 0.018$).
- Elabore una representación de año contra población basado en los datos de la tabla 1.
- Imagine que $r = 500,000$ personas por año (según el concepto del a), hallar los gráficos año poblacionales para las situaciones en la cual el estado de la república mexicana acoge esa cantidad de ciudadanos y cuando los expulsa.
- Según la información tabular del b) y lo trazado en d), ¿cuál es la pauta que sigue la cantidad de habitantes a través del tiempo para la entidad en mención? Explique. Adicionalmente identifique la forma algebraica que mejor se asocia a tales datos.

$$f.1) \frac{1}{e^{kt}}$$

$$f.2) e^{kt}$$

$$f.3) \frac{x^2}{e^{kt}}$$

- En su obra "*Ensayo sobre la población*", Malthus propuso el siguiente escenario (presentado aquí en forma esquemática) que compara el "*crecimiento poblacional mundial*" en contra parte con el de los "*recursos*" (básicamente alimentarios) *para la subsistencia*" de la especie humana (gráfico 1).

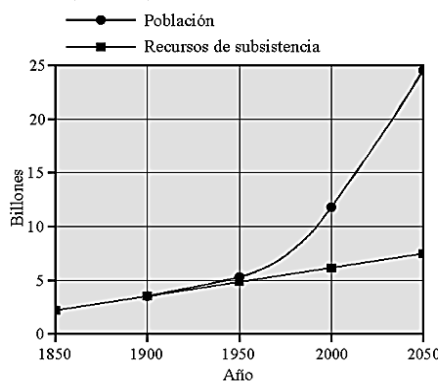


Gráfico 1

basado en la representación anterior, describa la posible situación para el año 2050. Explique.

- h) Por otro lado, la ONU con base en datos actualizados ha generado una perspectiva propia sobre la situación del “*incremento poblacional*” respecto de la “*cantidad de víveres*” necesarios para preservar la existencia de la humanidad y la ha proyectado también hasta el año 2050 (gráfico 2), ¿de cuánto son las diferencias aproximadas que se registran entre ambas expectativas (la malthusiana y la de la ONU) para la parte media del siglo 21 en ambos rubros?
- i) ¿Qué clase de contexto pronostica el gráfico 2 para 2050? Explique.

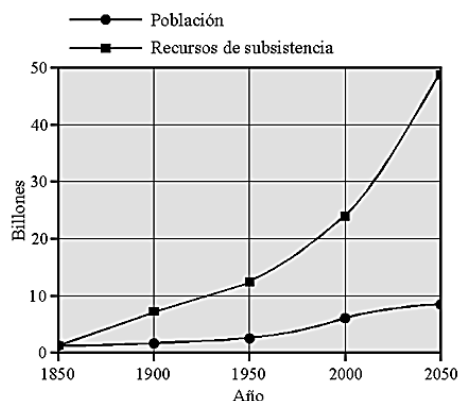


Gráfico 2

- j) Describa la situación para la cual ambas curvas (“*poblacional*” y de “*recursos*”) intersecan, además ubique y marque en ambos gráficos los puntos comunes.
- k) Suponga que es contratado por una empresa internacional que elabora alimentos a base de soya, por las características propias de sus productos piensan que en los próximos años ganaran mercado de forma gradual y están interesados en obtener un gráfico que les ayude a determinar las “*cantidades mínimas*” que deben producir (esto es, que al menos sean idénticas a las *cantidades* más altas predichas para la *población mundial*), el corporativo tiene tanta certeza en su crecimiento que incluso le encomienda dicha representación pronostica para las décadas de 2050 a 2100. Para tal efecto usted cuenta con dos modelos, el de la ONU y el de los servicios de estudios del Deutsche Bank (gráfico 3).

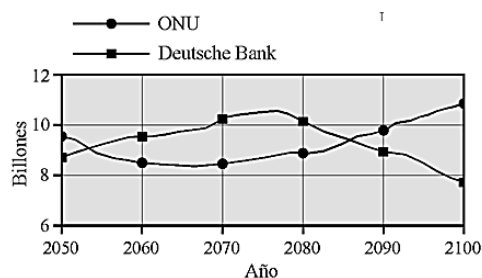


Gráfico 3

- l) ¿De qué orden y tipo es la ecuación diferencial que se plantea para dar solución al problema?, ¿qué procedimiento empleó? Explique.
- m) ¿Piensa que el desarrollo de esta práctica le ayudó a fortalecer su conocimiento sobre la modelación de problemas “*reales*” utilizando ecuaciones diferenciales? Explique.

Gracias por sus atenciones, tiempo y cooperación!

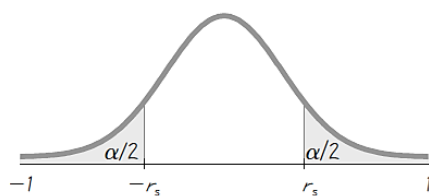
Apéndice D.

Distribución chi cuadrada (χ^2). (Triola, 2013, p. 755)

Grados de libertad	Área a la derecha del valor crítico									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Apéndice E.

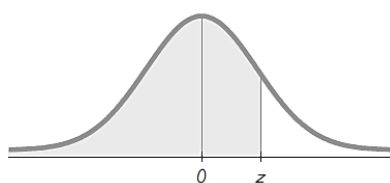
Valores críticos del coeficiente de correlación de rangos r_s de Spearman. (Triola, 2013, p. 763)



n	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.02$	$\alpha = 0.01$
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	.929
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.700	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.536	.618	.709	.755
12	.503	.587	.678	.727
13	.484	.560	.648	.703
14	.464	.538	.626	.679
15	.446	.521	.604	.654
16	.429	.503	.582	.635
17	.414	.485	.566	.615
18	.401	.472	.550	.600
19	.391	.460	.535	.584
20	.380	.447	.520	.570
21	.370	.435	.508	.556
22	.361	.425	.496	.544
23	.353	.415	.486	.532
24	.344	.406	.476	.521
25	.337	.398	.466	.511
26	.331	.390	.457	.501
27	.324	.382	.448	.491
28	.317	.375	.440	.483
29	.312	.368	.433	.475
30	.306	.362	.425	.467

Apéndice F.

Puntuaciones z positivas. (Triola, 2013, p. 753)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	*.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	↑.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	*.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	↑.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.50	.9999									

NOTA: En el caso de valores de z por encima de 3.49, utilice 0.9999 para el área.

*Utilice estos valores comunes que resultan de la interpolación:

Puntuación z	Área
1.645	0.9500 ←
2.575	0.9950 ←

Valores críticos comunes

Niveles de confianza	Valor crítico
0.90	1.645
0.95	1.96
0.99	2.575

Niveles de significación seleccionados para la distribución normal

Bidireccional α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001
Unidireccional α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.00005	0.000005
z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417

Apéndice G.

Valores críticos de T para la prueba de rangos son signo de Wilcoxon. (Triola, 2013, p. 762)

n	α			
	.005 (una cola) .01 (dos colas)	.01 (una cola) .02 (dos colas)	.025 (una cola) .05 (dos colas)	.05 (una cola) .10 (dos colas)
5	*	*	*	1
6	*	*	1	2
7	*	0	2	4
8	0	2	4	6
9	2	3	6	8
10	3	5	8	11
11	5	7	11	14
12	7	10	14	17
13	10	13	17	21
14	13	16	21	26
15	16	20	25	30
16	19	24	30	36
17	23	28	35	41
18	28	33	40	47
19	32	38	46	54
20	37	43	52	60
21	43	49	59	68
22	49	56	66	75
23	55	62	73	83
24	61	69	81	92
25	68	77	90	101
26	76	85	98	110
27	84	93	107	120
28	92	102	117	130
29	100	111	127	141
30	109	120	137	152

NOTAS:

1. * indica que no es posible obtener un valor en la región crítica.
2. Rechace la hipótesis nula si el estadístico de prueba T es menor que o igual al valor crítico encontrado en esta tabla. No rechace la hipótesis nula si el estadístico de prueba T es mayor que el valor crítico encontrado en la tabla.