

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ciencias Químicas e Ingeniería

Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería



## Modelado Difuso Sombreado Tipo-2:

Teoría, Diseño y Aplicaciones

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

*Presenta:*

DANIELA ESPERANZA JUÁREZ VILLALOBOS

*Bajo la dirección de:*

DR. JUAN RAMÓN CASTRO RODRIGUEZ

*Co-dirigido por:*

DRA. OLIVIA MENDOZA DUARTE

TIJUANA, BAJA CALIFORNIA, MÉXICO

JULIO 2016

*Dedico este escrito a mis padres ya que ellos fueron el cimiento de mis estudios, vida profesional y personal, son los que sembraron en mi la curiosidad y las ganas de progresar. Y a mi esposo por que el fue el que me apoyo durante los años en que duro la maestría.*



**Universidad Autónoma de Baja California**  
**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA**  
**COORDINACIÓN DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

FOLIO No. 176  
Tijuana, B. C., a 20 de julio de 2016

C. Daniela Esperanza Juárez Villalobos  
Pasante de: Maestro en Ciencias  
Presente

El tema de trabajo y/o tesis para su examen profesional, en la  
Opción TESIS

Es propuesto, por los C. Dres. Juan Ramón Castro Rodríguez y Olivia Mendoza Duarte

Quienes serán los responsables de la calidad de trabajo que usted presente, referido al tema Modelado Difuso Sombreado Tipo-2: Teoría, Diseño y Aplicaciones.

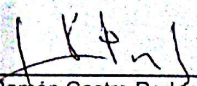
el cual deberá usted desarrollar, de acuerdo con el siguiente orden:


- I.- INTRODUCCION
- II.- MARCO TEORICO
- III.- HACIA EL MODELO DIFUSO SOMBREADO
- IV.- CONJUNTOS SOMBREADOS EN BASE A DECISIONES DE TRES VIAS
- V.- MODELADO DE INFERENCIA DIFUSO SOMBREADO TIPO-2
- VI.- CONCLUSIONES

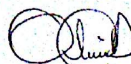
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE BAJA CALIFORNIA



FACULTAD DE CIENCIAS  
QUÍMICAS E INGENIERÍA

  
Dr. Juan Ramón Castro Rodríguez  
Director de Tesis

  
Dr. José Luis González Vázquez  
Secretario

  
Dra. Olivia Mendoza Duarte  
Co-Directora de Tesis

  
Dr. Luis Enrique Palafox Maestre  
Director

# Agradecimientos

Deseo agradecer al

*Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* por el apoyo que me dio para hacer mi maestría, y sobre todo a mi tutor *Juan Ramon Castro* por la ayuda y el apoyo que me dio durante estos años.

# Resumen

Durante esta tesis verán la evolución de la inferencia difusa, desde las bases de la inspiración para crear estos conjuntos difusos, pasando por la definición de cada uno de los conjuntos difusos mas comunes ( $T1FS$ ,  $IT2FS$ ,  $GT2FS$ ) y terminando con la definición de conjunto difuso sombreado. Y así explicar claramente las ventajas de utilizarlos para modelar el sistema de inferencia generalizado que se escribe simplemente como 2 sistemas de inferencia por intervalos, los cuales ya en otros trabajos, se puede probar su eficiencia y simplicidad a la hora de computarlos. Por ende demostrar que modelar un GT2FLS utilizando conjuntos sombreados para los antecedentes y consecuentes, es eficiente.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Plantamiento del Problema . . . . .	5
1.2. Hipotesis . . . . .	5
1.3. Objetivos . . . . .	6
1.3.1. General . . . . .	6
1.3.2. Particulares . . . . .	6
1.4. Metas . . . . .	6
1.5. Metodología . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Conjuntos Difusos Tipo-1 . . . . .	8
2.2. Conjuntos Difusos Tipo-2 por Intervalos . . . . .	11
2.3. Conjuntos Difusos Tipo-2 Generalizados . . . . .	15
2.4. Conjuntos Difusos Tipo-2 Sombreados . . . . .	20
<b>3. Hacia el Modelo Difuso Sombreado</b>	<b>23</b>
3.1. Calculo de los intervalos sombreados . . . . .	23

---

3.1.1.	Función de membresía triangular . . . . .	24
3.1.2.	Función de membresía trapezoidal . . . . .	28
3.1.3.	Función de membresía gaussiana . . . . .	30
<b>4.</b>	<b>Conjuntos sombreados en base a decisiones de tres vías</b>	<b>34</b>
4.1.	Conjuntos sombreados en base a la media . . . . .	36
4.2.	Calculo de la función objetivo . . . . .	39
4.3.	Función de membresía triangular . . . . .	39
4.4.	Función de membresía Trapezoidal . . . . .	41
4.5.	Función de membresía Gaussiana . . . . .	42
4.6.	Función de membresía gauss2 . . . . .	44
<b>5.</b>	<b>Modelo de inferencia difuso sombreado tipo-2</b>	<b>46</b>
5.1.	Caso de Estudio Sintético . . . . .	52
5.2.	Caso Mackey-Glass . . . . .	55
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>62</b>
	<b>Anexos</b>	<b>67</b>
	<b>A. Integrales</b>	<b>68</b>
	<b>B. Algoritmo EKM para el centroide de un IT2FS</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Hace tiempo que se inicio el campo de la lógica difusa, y recientemente el numero de aplicaciones de esta han estado creciendo debido ha que esta es una alternativa a la lógica clásica. La lógica difusa pretende dar un grado de incertidumbre en los conceptos que evalua. Esta idea nos dibuja mejor nuestro mundo real, ya que el razonamiento humano con frecuencia la utiliza. La lógica difusa fue diseñada para imitar nuestro razonamiento.

La lógica difusa se inició en 1965 por Lotfi A. Zadeh, profesor de la Universidad de California en Berkeley. Surgió como herramienta para el control de sistemas y procesos industriales complejos, también para la electrónica de entretenimiento y hogar, sistemas de diagnostico y otros sistemas expertos.

A la lógica difusa, se le atribuye ser una metodología adecuada para el diseño de sistemas robustos que son capaces de un desempeño satisfactorio en un contexto de incertidumbre e imprecisión. Por lo tanto, el sistema de lógica difusa.

---

Mientras la lógica difusa tipo-1 ha sido la forma más popular de lógica difusa, los últimos años han mostrado un aumento significativo en investigación hacia formas más complejas de lógica difusa, en particular, lógica difusa tipo-2 por intervalos [1]-[3], y, aún más recientemente, lógica difusa tipo-2 generalizada [4]-[11]. Esta transición de tipo-1 a formas más complejas de la lógica difusa ha sido motivada en gran medida al darse cuenta de que los conjuntos difusos tipo-1 sólo ofrecen un alcance limitado para modelar la incertidumbre y, por tanto, no pueden soportar los altos niveles de incertidumbre, que suelen estar presentes en las aplicaciones del mundo real [1]-[3]. La lógica difusa tipo-2 permite un mejor modelado de la incertidumbre. Los conjuntos difusos tipo-2 abarcan una superficie de incertidumbre tridimensional (FOU), con más grados de libertad en comparación con los conjuntos difusos tipo-1 [2],[3]. Varias publicaciones han demostrado que los conjuntos difusos tipo-2 por intervalos (IT2FS; del inglés *Interval Type-2 Fuzzy Sets*) superan a los conjuntos difusos tipo-1 (T1FS; del inglés *Type-1 Fuzzy Sets*) en una variedad de aplicaciones [1],[12]-[19]. Esto se ha atribuido en gran medida a la capacidad de los IT2FS, son mejores para modelar la incertidumbre debido a que poseen un número incontable embebido de T1FS [1]-[3].

Los conjuntos difusos tipo-2 generalizados (GT2FS; del inglés *General type-2 Fuzzy Sets*), recientemente se han investigado que poseen una alta complejidad asociada con su diseño y a sus requerimientos computacionales, esto los hace parecer inadecuados para su uso en el mundo real [4]-[11],[16]. Teniendo en cuenta la experiencia con IT2FS, se espera que GT2FS empleados en los sistema de logica difusa tipo-2 generalizado (GT2FLS; del inglés *General Type-2 Fuzzy Logic System*) tengan la ca-

---

pacidad de modelar la incertidumbre con mayor precisión que IT2FS.

Varios esfuerzos se han hecho con el fin de limitar la complejidad de la lógica difusa de tipo-2 generalizada, y en particular, las nuevas formas de representación se han ideado con el fin de permitir el uso de GT2FLS en aplicaciones del mundo real. Coupland y John [4] proponen una representación geométrica de GT2FS, mientras que Mendel y Liu [5], [6] una representación basada en alfa planos y, Wagner y Hagraas [9] han introducido la representación basada en zSlices. Además, varios otros avances se han tratado para reducir la complejidad asociada con GT2FLS [2],[7],[8],[11]. Coupland et al. [16] han investigado el potencial de los GT2FLS en el control de robots.

Actualmente surge un nuevo concepto llamado conjunto difuso tipo-2 sombreado (ST2FS; del inglés *Shadowed Type-2 Fuzzy Sets*) con funciones de pertenencia secundarias representadas como conjuntos difusos sombreados para modelar GT2FLS [25],[26]. El concepto de conjunto sombreado (SS; del inglés *Shadow Set*) fue originalmente propuesto por Pedrycz y fue desarrollado para mejorar la observabilidad e interpretación de los T1FS y mejorar los problemas de precisión excesiva en la descripción de conceptos imprecisos utilizando funciones de pertenencia relacionados con los T1FS [20]-[24]. El SS es directamente inducida por un T1FS, que se divide en tres regiones de exclusión, el núcleo y la sombra sobre la base de los grados de membresía de un T1FS. El valor de umbral óptimo es encontrado de forma automática mediante la resolución de un simple problema de optimización para conservar la cantidad global de incertidumbre en el modelado difuso.

En este trabajo de tesis se utilizaran un sistema de lógica difusa con conjuntos sombreados (ST2FLS; *Shadowed Type-2 Fuzzy Logic System*) para modelar GT2FLS con

---

razonamiento de Mamdani, empleando ST2FS al modelar los antecedentes y consecuentes de reglas difusas. El diseño ST2FLS se deriva automáticamente a partir de un GT2FLS con el fin de preservar la incertidumbre del modelado de los GT2FS. Los ST2FLS pueden así ofrecer un mejor modelado de la incertidumbre cuando se compara con IT2FLS, proporcionando un marco computacional eficiente, aplicando los mecanismos eficaces de inferencia difusa de los IT2FLS. Los modelos GT2FLS desarrollados, se aplicaran a casos de estudios de identificación de sistemas, reconocimiento de patrones, pronóstico de series de tiempo y en problemas de toma de decisiones.

## **1.1. Plantamiento del Problema**

Resolver los problemas al describir conceptos imprecisos con funciones precisas (presición excesiva) a la vez mejorar la eficiencia de los GT2FLS's en aplicaciones del mundo real tambien permitir la obsevabilidad y su interpretación.

## **1.2. Hipotesis**

El modelo de GT2FLS con ST2FLS limita la complejidad asociada con el diseño de los antecedentes y consecuentes de las reglas del GT2FLS, disminuye los problemas generados por la descripcion de conceptos imprecisos y hacen que las aplicaciones reales sean eficientes.

---

## 1.3. Objetivos

Los objetivos en esta tesis, se describirán a continuación

### 1.3.1. General

Modelar e implementar un GT2FLS empleando conjuntos difusos tipo-2 sombreados para modelar los antecedentes y consecuentes de reglas difusas de un GT2FLS en razonamiento de Mamdani.

### 1.3.2. Particulares

- Desarrollar modelos de funciones de membresía tipo-2 generalizadas para el proceso de sombreado de conjuntos difusos tipo-2.
- Desarrollar el modelo de inferencia difusa tipo-2 sombreado con razonamiento de Mamdani.
- Desarrollar un modelo de GT2FLS basado en el sombreado de conjuntos difusos tipo-2 generalizados de los antecedentes y consecuentes de las reglas difusas de un GT2FLS con razonamiento de Mamdani.

## 1.4. Metas

- Generar un GT2FLS con razonamiento de Mamdani, usando la técnica de sombreado en los conjuntos difusos tipo-2 generalizados de los antecedentes y consecuentes de las reglas difusas de un GT2FLS.

- 
- Generar un GT2FLS con razonamiento de Takagi-Sugeno-Kang, usando la técnica de sombreado en los conjuntos difusos tipo-2 generalizados de los antecedentes de las reglas difusas y funciones lineales por intervalos en los consecuentes de un GT2FLS.
  - Diseñar los algoritmos de sombreado de los conjuntos difusos tipo-2 generalizados.
  - Diseñar el algoritmo de inferencia difuso tipo-2 sombreado como dos IT2FIS.
  - Implementar el algoritmo de inferencia difuso tipo-2 sombreado como dos IT2FIS.

## 1.5. Metodología

- Utilizar las técnicas de razonamiento difuso.
- Implementar las técnicas de optimización global.
- Emplear la arquitecturas IT2FLS.
- Desarrollar el modelo difuso con incertidumbre.
- Probar el modelo GT2FLS basado en ST2FLS.
- Análisis y validación de resultados.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

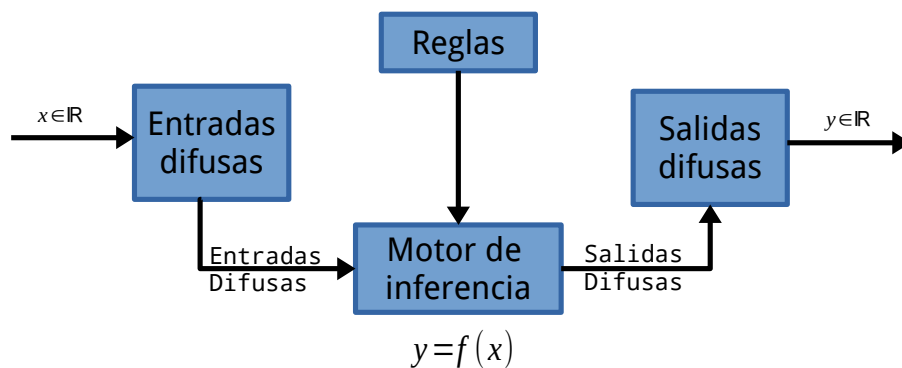
### 2.1. Conjuntos Difusos Tipo-1

Hay dos enfoques para resolver problemas de la vida real, en específico diseños de ingeniería; Normalmente el conocimiento subjetivo es dejado de lado cuando se trata de diseño de ingeniería, pero casi siempre es utilizado para valorar esos diseños. Al ignorar este tipo de conocimiento se genera cierta des-coordinación, pero ahora se puede usar los dos tipos de conocimiento, el objetivo y el subjetivo para resolver problemas de la vida real, la lógica difusa combina estos dos conocimientos, el primer enfoque es un modelo basado en aproximación, el conocimiento objetivo se representa por un modelo matemático y el conocimiento subjetivo es representado por reglas lingüísticas, para después ser cuantificado usando la lógica difusa. El segundo es un modelo de aproximación libre, en el cual las reglas son extraídas de un conjunto numérico y son combinadas con el conocimiento lingüístico, ambos utilizando la lógica

---

difusa. Con este segundo enfoque es con el que se generan los modelos de sistemas de lógica difusa en esta tesis.[4]

Este modelo se puede ver como un mapeo  $y = f(x)$  en el cual entra un conjunto de puntos reales( $x$ ) y sale otro conjunto de puntos reales( $y$ ). El conjunto de reglas se expresa como un conjunto de estatutos de la forma IF-THEN



**Figura 2.1:** Sistema de Lógica Difusa

Ya que los conjuntos difusos fueron diseñados para representar matemáticamente incertidumbre y vaguedad y proporcionar herramientas formalizadas para trabajar con la imprecisión intrínseca en muchos problemas.

**Definición 2.1.** *Se describe un conjunto difuso en base a su función de membresía,*

---

*tal que:*

$$A = \{x \in X | \mu_A(x) \in [0, 1]\}$$

La incertidumbre se puede ver como parte de la función de membresía, es la falta de certeza, como se puede apreciar en la misma palabra, intentando definirla como la falta de certeza del saber si un punto pertenece o no a un conjunto, cambiando de lógica tradicional que utiliza dos valores para evaluar esa certeza, si o no, estos dos valores que solo me dicen si pertenece o no, pero aquí se genera un problema para describir situaciones en donde los grados de pertenencia no es blanco o negro sino que se encuentra en un gris, osea entre valores de un intervalo, esa falta de certeza es la que se entendería como incertidumbre o vaguedad.

Al tratar de definir nuestro termino incertidumbre mediante una función de membresía puramente numérica, por que se sabe que el propósito de la lógica difusa es eliminar esa certeza al encasillar de forma exacta un valor en un conjunto, por que al describir una variable difusa con una función de membresía numérica (exacta) genera este problema de precisión excesiva, de tratar de definir algo vago, con incertidumbre, a partir de algo exacto que nunca cambia.

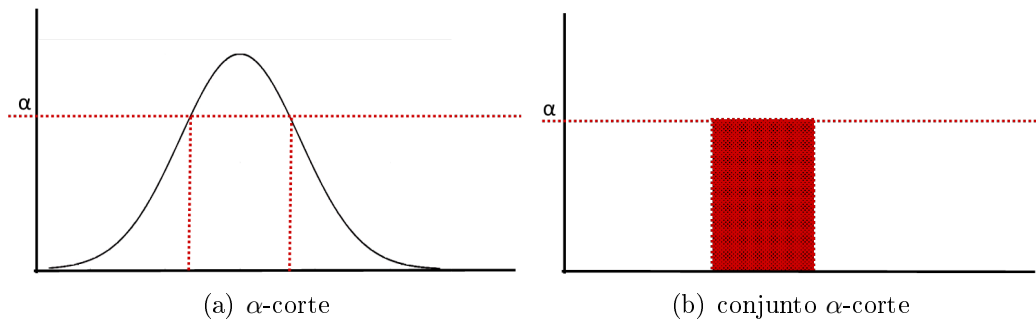
Debido a este problema de representación o aproximación debido a la falta de descripción de la incertidumbre contenida en el conjunto, se consideran varias formas de afrontar el problema, ya descritos en la literatura especializada en el área, una de ellas es la aproximación de un conjunto difuso mediante un  $\alpha$ -corte(en T1FS) o

---

$\alpha$ -plano(en GT2FS).

**Definición 2.2.** *Un  $\alpha$ -corte(en la imagen 2.2) de un conjunto difuso  $A$  esta compuesto por todos los elementos que no son menores que el valor de membresía  $\alpha$ . Tal que:*

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.1)$$



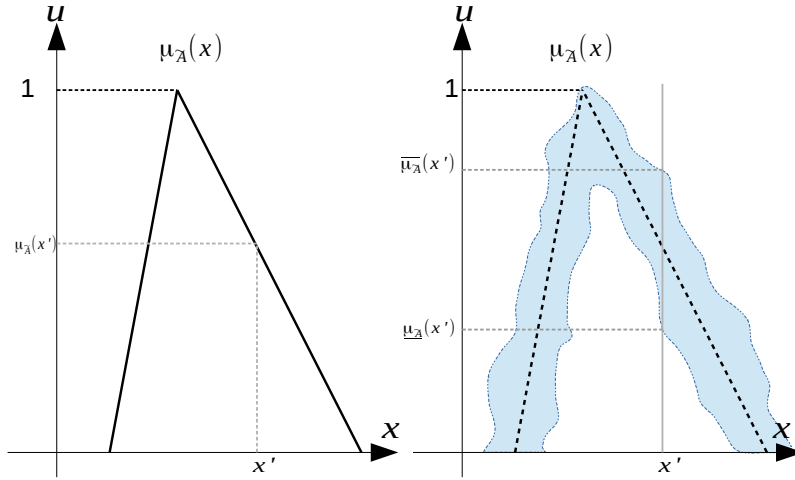
**Figura 2.2:**  $\alpha$ -corte

## 2.2. Conjuntos Difusos Tipo-2 por Intervalos

Para definir lo IT2FS partimos de una T1FS y agreguemos incertidumbre vease la fig 2.3 vemos en la gráfica de la izquierda, una T1FS si evaluamos un número  $x'$  la función de membresía (T1FS) nos regresa un valor de membresía entre  $[0, 1]$ , en cambio la gráfica de la derecha agregamos incertidumbre a la misma T1FS, se puede ver como la inexactitud para determinar el valor de membresía, por lo tanto se podría determinar que ese valor estara dentro de un intervalo  $[w, z] \subset [0, 1]$ , por

lo que para cada valor  $x'$  le corresponderá un intervalo como valor de membresía.

Es importante comprender el escalamiento que se hace de T1FS a IT2FS y de estos



**Figura 2.3:** T1FS agregando incertidumbre

a GT2FS en la lógica difusa. Se comienza a definir las IT2FS como un conjunto bidimensional, con una altura, en donde asignaremos al eje  $x$  como variable primaria,  $u$  como variable secundaria. Este conjunto difuso se describe como un grupo de pares de puntos en el plano  $(x, u)$  con altura 1, uno inferior, otro superior, se podría ver como una rebanada a una altura 1 en el eje  $(\mu_{\tilde{A}}(x, u))$ , en la figura 2.4 se puede ver. El conjunto  $\tilde{A}$  se define:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (2.2)$$

donde  $x \in X$  y  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$  de manera que la función tiene que cumplir  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$  para que el conjunto en la ec. 2.2 se pueda representar como en la ec.

---


$$\int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}}(x, u) / (x, u) \quad J_x \subseteq [0, 1] \quad (2.3)$$

**Definición 2.3.** Una **Función de membresía secundaria** es un corte vertical de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ . Tal que  $\mu_{\tilde{A}}(x = x', u)$  para un  $x \in X$  y  $J_{x'} \subseteq [0, 1]$

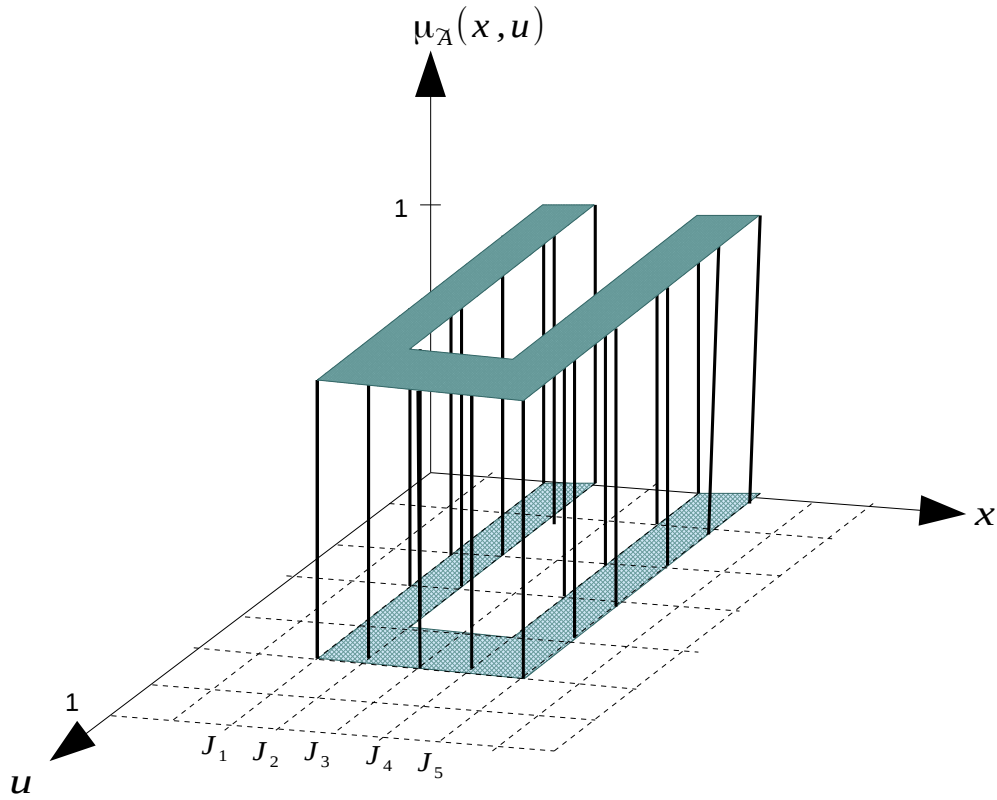
$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', u) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') \equiv \int_{u \in J_{x'}} 1/u, \text{ para } J_{x'} \subseteq [0, 1]$$

Esta función de membresía secundaria se puede visualizar en de tal forma que  $\mu_{\tilde{A}}(x = x', u)$  es una función de tipo-1.

**Definición 2.4.** La **función de membresía primaria** es básicamente el dominio de la función de membresía secundaria en un valor  $x$ , donde  $J_x \subseteq [0, 1] \forall x \in X$

**Definición 2.5.** La **incertidumbre en las funciones de membresía IT2FS**,  $\tilde{A}$ , consta de una región acotada que llamamos **FOU** (del ingles footprint of uncertainly) del conjunto  $\tilde{A}$  que es representado por la unión de todas las funciones de membresía primarias.

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \quad (2.4)$$

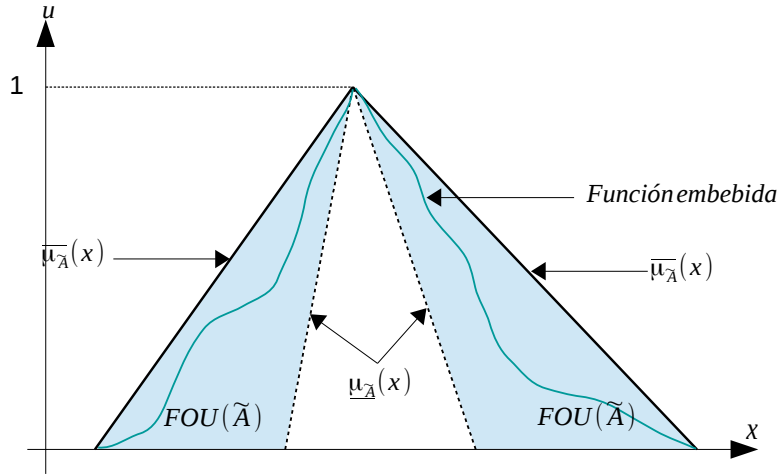


**Figura 2.4:** Función de membresía primaria  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  y secundaria  $J_x$

El FOU esta acotado por dos funciones de membresía tipo-1, denotadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) &= \overline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) &= \underline{FOU(\tilde{A})} \quad \forall x \in X \end{aligned} \tag{2.5}$$

Entre estas dos funciones, habrá una infinidad de funciones embebidas, de las cuales habra dos especificas que nos acotarán la incertidumbre representativa del conjunto, y mas tarde se acotará en un intervalo, tal como se muestra en la figura 2.6. Al proceso de encontrar este intervalo representativo de la incertidumbre se le



**Figura 2.5:** FOU IT2FS

llama reducción de tipo, hay varios algoritmos entre los que se destacan, el algoritmo KM y TKM.

### 2.3. Conjuntos Difusos Tipo-2 Generalizados

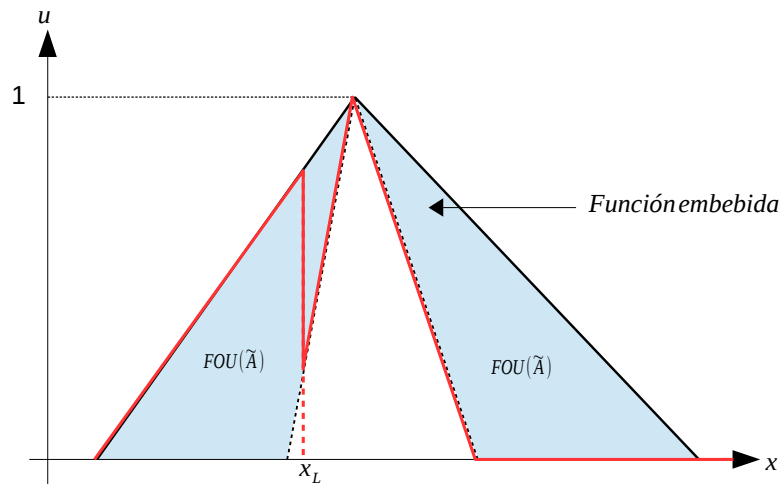
De la misma forma que en IT2FS se construye una función tridimensional  $(\mu_{\tilde{A}}(x, u))$ , definida por la función de membresía primaria y secundaria.

$$\tilde{A} = \{(x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u) | \forall x \in X, \forall u \in [0, 1]\} \quad (2.6)$$

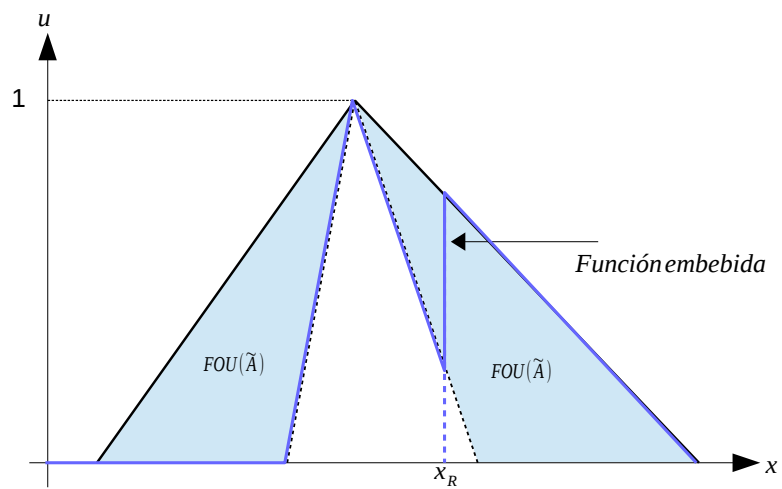
Para la cual:

$$\mu_{\tilde{A}}(x, u) : \{X \times [0, 1]\} \subset [0, 1] \quad (2.7)$$

Para representarlo en la practica se utiliza un soporte bidimensional de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ , a este soporte le llamaron FOU de  $\tilde{A}$  es decir:



(a) función representativa baja



(b) función representativa alta

**Figura 2.6:** Reducción de tipo

**Definición 2.6.** El *FOU* de  $A$  es el conjunto:

$$FOU(\tilde{A}) = \{(x, u) \in \{X \times [0, 1]\} | \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} \quad (2.8)$$

---

La cual esta delimitada por una función de membresía inferior y una superior tal que:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) &= \sup \{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) &= \inf \{u | u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}\end{aligned}\tag{2.9}$$

**Definición 2.7.** Se le llamó a la **función de membresía primaria**  $J_x \rightarrow \{x \in X\} \subset \tilde{A}$  tal que  $J_x \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]$  Entonces esta se puede describir tal como el siguiente conjunto

$$J_x = \{u \in [0, 1] | \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}\tag{2.10}$$

**Definición 2.8.** La **función de membresía secundaria** de  $\tilde{A}$  usualmente es denotado por:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ para cada } x \in X\tag{2.11}$$

Tambien llamado corte vertical de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ , esta función de membresía secundaria es un T1FS, sobre un valor de  $x$  especifico, esto quiere decir que habrá una función de membresía embebida por cada valor de  $x \in X$  se puede visualizar en la fig 2.7.

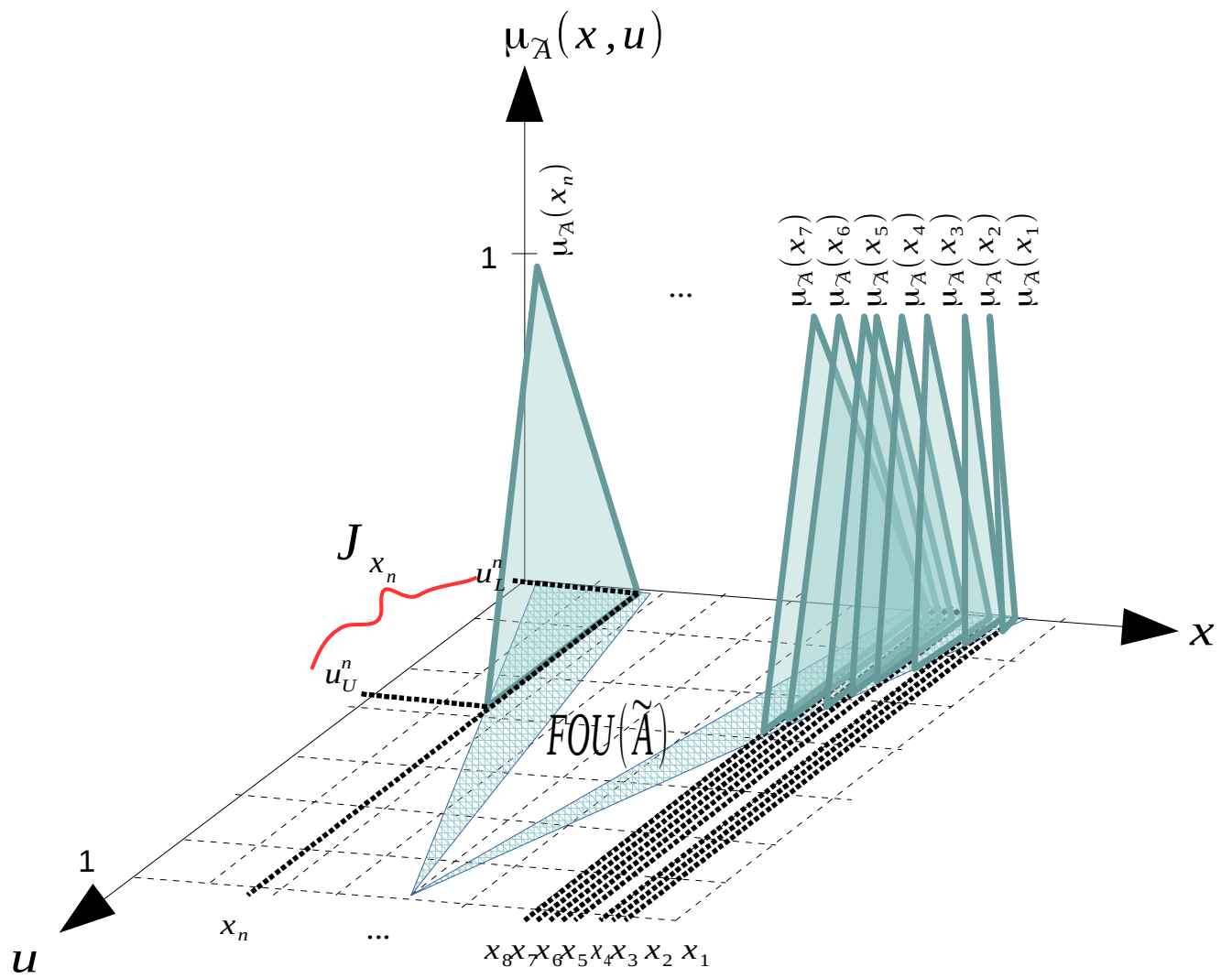


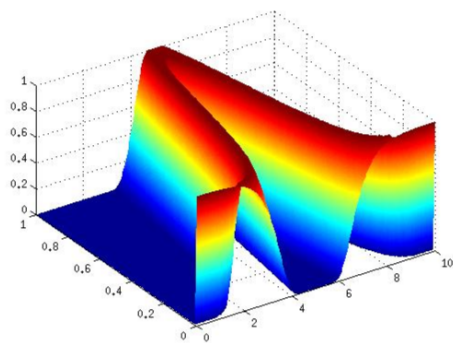
Figura 2.7: GT2FS

**Definición 2.9.** Esa función de membresía embebida,  $A_e$ , se puede expresar, como:

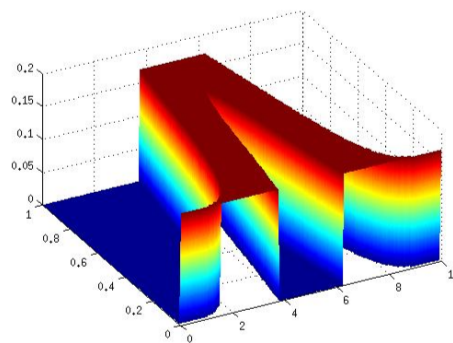
$$A_e = \int_{x \in X} u/x, \text{ para } u \in J_x \quad (2.12)$$

**Definición 2.10.** *Un  $\alpha$ -plano (en la imagen 2.8) es la unión de todas las funciones de membresía de  $A$  para las cuales las funciones de membresía secundarias son mayores o iguales a  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), tal que:*

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha &= \{(x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u) \geq \alpha | \forall x \in X, \forall u \in [0, 1]\} \\ &= \int_{\forall x \in X} \int_{\forall u \in [0,1]} \{(x, u) | f_x(u) \geq \alpha\} \end{aligned}$$



(a) Membresía Generalizado



(b) Conjunto  $\alpha$ -plano

**Figura 2.8:**  $\alpha$ -plano

---

## 2.4. Conjuntos Difusos Tipo-2 Sombreados

Otra forma de solución, es describiendo un conjunto difuso a partir de un punto de quiebre, en donde los valores trascendentales se preservan y los valores insignificantes se desechan, para poder definir ese punto de quiebre y regresando al principal problema de precisión excesiva para definir la incertidumbre. Como propone Pedrycz en su artículo

Existen ya estudios probabilísticos en donde se demuestran que para definir si un punto se encuentra o no en un conjunto es más problemático cuando el valor se encuentra cercano a la media que si se encuentra cercanos al 0 o al 1, se puede deber al hecho de que un valor cercano al 1 me dice que tiene más seguridad de estar en el conjunto, los valores cercanos al 0 me dicen que se tiene una certeza de que el valor no pertenezca al conjunto, mientras que los valores cercanos a la media generan una vaguedad, este hecho está mostrado en.

Para esta propuesta se tiene que los valores cercanos a 1, en los que se tiene una certeza positiva, se elevarán, por decirlo de una forma, y se asignarán al valor 1, por el contrario se dirá que el intervalo de los números cercanos al 0, el complemento del intervalo anterior, se hundirán y se asignan al valor 0, pero los valores que quedan inciertos, serán los valores que llamaremos sombra, esta sombra es la que aproxima a la incertidumbre de este.

**Definición 2.11.** *Pedrycz define un conjunto sombreado, empleando el siguiente*

---

*mapeo:*

$$A : X \rightarrow \{0, 1, [0, 1]\} \quad (2.13)$$

*De donde se atribuye que los elementos de  $X$  asignados al valor 1 son los elementos que constituyen el núcleo, los elementos asignados al 0 constituirían al "spread", y la sombra, sería generada por la incertidumbre del conjunto.*

Para definir esa sombra se toma el área con "la mayor vaguedad", como ya se menciono anteriormente, esa zona con mayor vaguedad es el área cercana a la media, para seleccionar el área sombreada y mantenerla equilibrada se calcula la sección umbral  $\alpha$  adecuado. Básicamente lo que se tiene son tres áreas equilibradas de la siguiente forma:

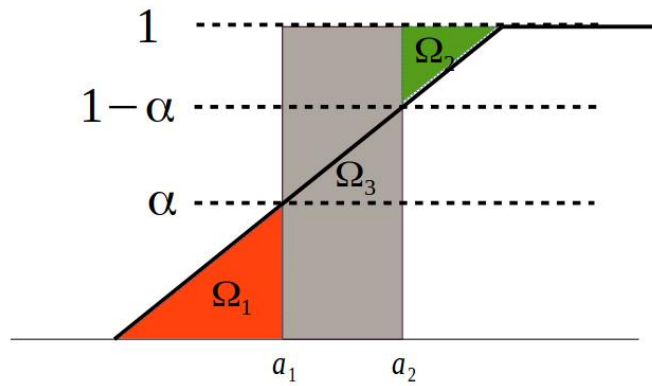
$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3 \quad (2.14)$$

Se puede deducir que  $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$  para que  $V(\alpha) = 0$  Para obtener el umbral mínimo, y su complemento, ilustrada en la imagen 2.9. Para optimizar el umbral  $\alpha$  se genera la siguiente ecuación generada a partir de la ec.2.14

**Definición 2.12.** *La función a optimizar se define como:*

$$V(\alpha) = \left| \int_{-\infty}^{a_1} A(x)dx + \int_{a_2}^{\infty} (1 - A(x))dx - \int_{a_1}^{a_2} A(x)dx \right| \quad (2.15)$$

Realmente en la figura 2.14 se ve solamente la mitad de la función de membresía,



**Figura 2.9:** ecuación 2.14

de la cual solo se pueden apreciar dos de los cuatro puntos de quiebre, con los cuales definimos el conjunto sombreado como la unión de esas dos zonas sombreadas.

$$A : X \rightarrow \{0, 1, [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]\} \quad (2.16)$$

Resultando, que para un conjunto sombreado tipo-1(ST1FS: *del ingles Shadowed Type-1 Fuzzy Set*) en realidad se están tomando dos  $\alpha$ -cortes, utilizando la misma notación anterior, tenemos los cortes  $\alpha$  y  $1 - \alpha$ , obteniendo un intervalo por cada  $\alpha$ -corte, mejor descritas en la figura 2.9.

# Capítulo 3

## Hacia el Modelo Difuso Sombreado

En este capítulo se desarrollará toda la metodología para lograr plasmar el modelo difuso sombreado, que es el objetivo de esta tesis. Lo primero que se debe lograr es encontrar los puntos umbrales para fabricar esos dos intervalos que definen nuestro conjunto sombreado, estos umbrales van a diferir según el conjunto difuso que se le de como entrada. Como primera aproximación se utilizara la primera definición de conjunto sombreado, en la cual se utilizan los umbrales  $\alpha$  y su complemento  $1 - \alpha$ . Posteriormente la misma metodología se utilizará para

### 3.1. Cálculo de los intervalos sombreados

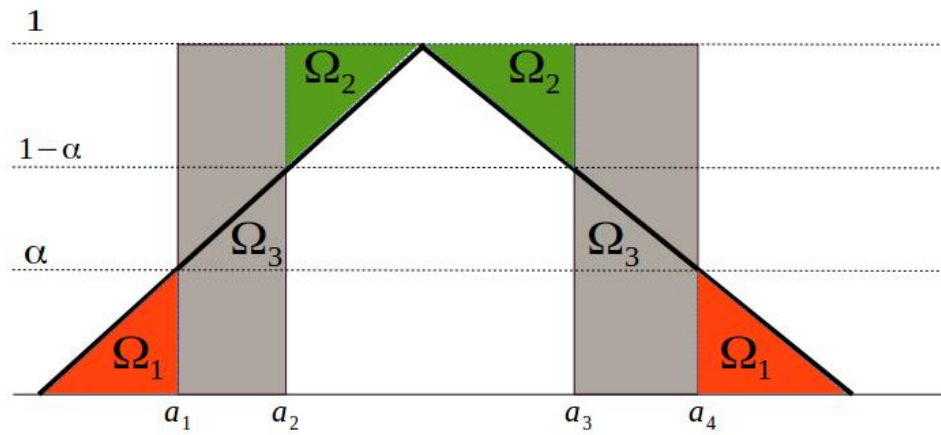
Realmente lo que se debe calcular son los cuatro umbrales  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  que definirán los dos intervalos que serán mi conjunto sombreado descrito en 2.16, para encontrar los mejores valores se optimiza a función 2.15, la cual variara según el tipo de función de membresía que se utilice.

---

### 3.1.1. Función de membresía triangular

En base la una función triangular, se calcula el valor de  $\alpha$  optimo de la función  $V(\alpha)$ .

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{b-c} & \text{si } a \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x. \end{cases} \quad (3.1)$$



---

Donde se tiene que determinar la función a optimizar  $V$  dada por:

$$V(\alpha) = \left| \int_a^{a_1} \mu(x)dx + \int_{a_2}^b 1 - \mu(x)dx - \int_{a_1}^{a_2} dx \right| \quad (3.2)$$

En la cual el primer sumando de la función 3.2 nos indica el área de exclusión, el segundo sumando el área de insertidumbre y el tercer sumando el área de inclusión.

Para determinar la función  $V$  de la función de membresía triangular, primero se calculan los valores  $a_1, a_4$  y  $a_2, a_3$  en el eje  $x$  que corresponden a los valores  $\alpha$  y  $1 - \alpha$  en el eje  $y$ .

Para esto evaluamos la función de membresía 3.1 en los diferentes valores  $a_i$  teniendo en cuenta que sus valores correspondientes serán  $\alpha$  o  $1 - \alpha$ .

Ya que el valor  $\alpha$  será el mismo si tomamos en cuenta toda la función o la primera parte de la misma, por lo que evaluaremos solo  $a_1$  y  $a_2$ .

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{si } x \text{ tiene otro valor.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Por tanto evaluamos  $a_1$  y  $a_2$  en 3.3 y obtenemos

---


$$\alpha = \mu_1(a_1) = \frac{a_1 - a}{b - a} \quad (3.4)$$

$$1 - \alpha = \mu_1(a_2) = \frac{a_2 - a}{b - a} \quad (3.5)$$

y para obtener los valores de  $a_1$  y  $a_2$  los despejamos de las ecuaciones 3.4 y 3.5.

$$a_1 = a + \alpha(b - a) \quad (3.6)$$

$$a_2 = b - \alpha(b - a) \quad (3.7)$$

Retomando el calculo de la ec 3.2 sustituimos los valores de  $a_1$  y  $a_2$ , para obtener asi los limites de las integrales de la función 3.2.

$$V(\alpha) = \left| \int_a^{a+\alpha(b-a)} \mu(x)dx + \int_{b-\alpha(b-a)}^b 1 - \mu(x)dx - \int_{a+\alpha(b-a)}^{b-\alpha(b-a)} dx \right| \quad (3.8)$$

obtenemos la primitiva de la integral de  $\mu(x)$ :

$$\int \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{(x - a)^2}{2(b - a)} + c \quad (3.9)$$

Primera integral.

$$\int_a^{a+\alpha(b-a)} \mu(x)dx = \frac{\alpha^2(b - a)}{2} \quad (3.10)$$

---

Segunda integral.

$$\int_{b-\alpha(b-a)}^b 1 - \mu(x) dx = \alpha^2 \frac{b-a}{2} \quad (3.11)$$

Tercera integral.

$$\int_{a+\alpha(b-a)}^{b-\alpha(b-a)} dx = (1-2\alpha)(b-a) \quad (3.12)$$

Sustituimos directamente los resultados en la función 3.8 y obtenemos.

$$V(\alpha) = |(b-a)(\alpha^2 + 2\alpha - 1)| \quad (3.13)$$

Al optimizar  $V(\alpha)$  obtenemos;

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{2\alpha^2 + 2}{(b-a)(\alpha^2 + 2\alpha - 1)} |(b-a)(\alpha^2 + 2\alpha - 1)| = 0 \quad (3.14)$$

De ahí obtenemos el valor de  $\alpha$  resultante de la ec. 3.14.

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\alpha = -1 + \sqrt{2}$$

dado que no tenemos  $\alpha$  negativos.

Y sustituimos el valor  $\alpha$  para obtener  $a_1$  y  $a_2$  en 3.1.

$$a_1 = a(2 - \sqrt{2}) + b(\sqrt{2} - 1) \quad (3.15)$$

$$a_2 = a(\sqrt{2} - 1) + b(2 + \sqrt{2}) \quad (3.16)$$

---

Sustituimos  $\alpha$  en  $a_3$  y  $a_4$  en la membresía 3.13.

$$a_3 = b(1 - \sqrt{2}) + c(2 + \sqrt{2}) \quad (3.17)$$

$$a_4 = b\sqrt{2} + c(1 - \sqrt{2}) \quad (3.18)$$

Por lo tanto el conjunto sombreado de una membresía triangular es:

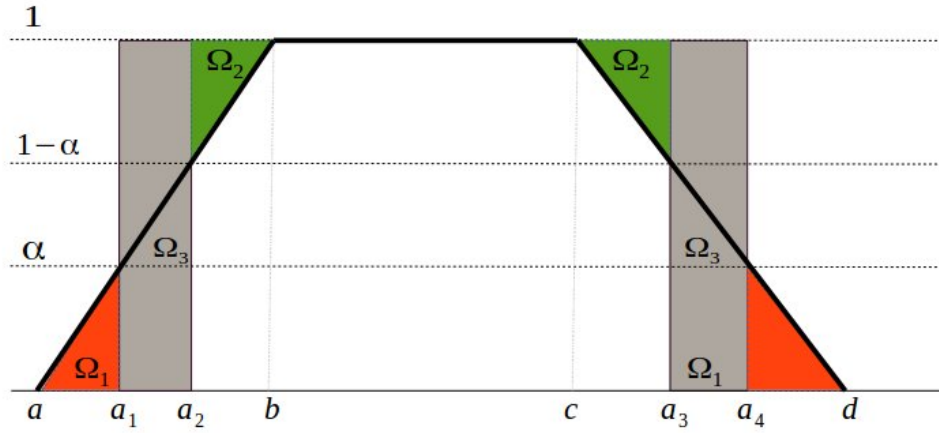
$$\mathbb{S}_{tri} = \{0, 1, [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]\} \quad (3.19)$$

### 3.1.2. Función de membresía trapezoidal

En base a una función trapezoidal, se calcula el valor de  $\alpha$  optimo de la función  $V(\alpha)$ .

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x < c \\ \frac{c-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x. \end{cases} \quad (3.20)$$

Al tomar solo la primera parte de la función de membresía trapezoidal obtenemos



exactamente la misma función que en la membresía triangular.

$$\mu_1(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{si } x \text{ tiene otro valor.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Por lo tanto corresponden los mismos valores de  $\alpha$  y  $a_1$  y  $a_2$ , y calculamos  $a_3$  y  $a_4$  con la otra mitad de la función de membresía 3.21.

$$a_3 = c + \alpha(d - c) \quad (3.22)$$

$$a_4 = d - \alpha(d - c) \quad (3.23)$$

sustituyendo el valor de  $\alpha$  en 3.22 y 3.23.

$$a_3 = c(2 - \sqrt{2}) + d(\sqrt{2} - 1) \quad (3.24)$$

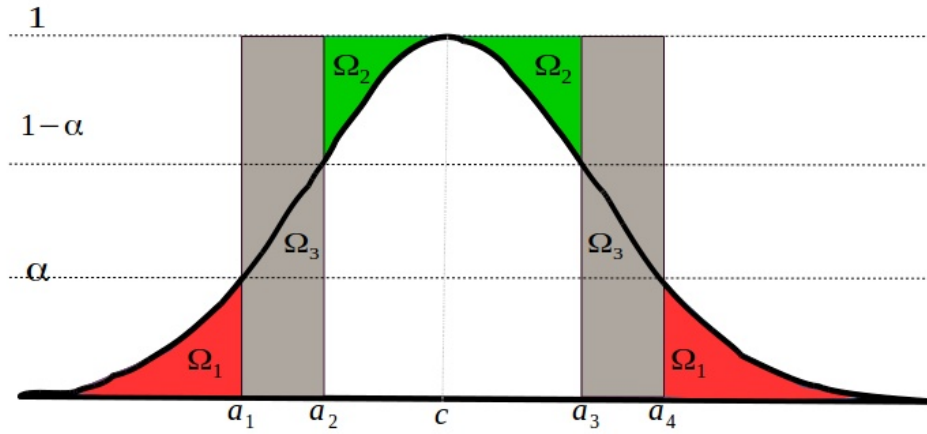
$$a_4 = c(\sqrt{2} - 1) + d(2 - \sqrt{2}) \quad (3.25)$$

Por lo tanto el conjunto sombreado de una membresía triangular es:

$$\mathbb{S}_{trap} = \{0, 1, [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]\} \quad (3.26)$$

### 3.1.3. Función de membresía gaussiana

En base a una función gaussiana, se calcula el valor de  $\alpha$  óptimo de la función  $V(\alpha)$ .



$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (3.27)$$

Determinamos los valores de  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  en función de  $\alpha$ .

$$\mu(a_1) = \alpha = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1-c}{\sigma}\right)^2} \quad (3.28)$$

---


$$\mu(a_2) = 1 - \alpha = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_2-c}{\sigma}\right)^2} \quad (3.29)$$

Similarmente para  $a_3$  y  $a_4$ , despues despejando  $a_i$  obtenemos los siguientes valores.

$$a_1 = c - \sqrt{-2\sigma^2 \ln(\alpha)} \quad (3.30)$$

$$a_2 = c - \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - \alpha)} \quad (3.31)$$

$$a_3 = c + \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - \alpha)} \quad (3.32)$$

$$a_4 = c + \sqrt{-2\sigma^2 \ln(\alpha)} \quad (3.33)$$

Dados estos valores se sustituyen en la ec. para  $V(\alpha)$  3.2, resultando;

$$V(\alpha) = \left| \int_c^{a_3} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{a_4}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx - \int_{a_3}^{a_4} 1 dx \right| \quad (3.34)$$

$$V(\alpha) = \left| \int_c^{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)}} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(\alpha)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx - \int_{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)}}^{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(\alpha)}} 1 dx \right| \quad (3.35)$$

Calculamos el valor de la primera integral de 3.35.

$$\int_c^{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)}} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \sqrt{-2\ln(1-\alpha)} - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{4}\alpha(2-\alpha)} \quad (3.36)$$

Calculamos a segunda integral de 3.35.

---


$$\int_{\sqrt{-2\ln(\alpha)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\alpha^2)} \right] \quad (3.37)$$

Calculamos la tercer integral de 3.35.

$$\int_{c+\sqrt{-2\sigma^2\ln(1-\alpha)}}^{c+\sqrt{-2\sigma^2\ln(\alpha)}} 1 dx = c + \sqrt{-2\sigma^2\ln(\alpha)} - \left[ c + \sqrt{-2\sigma^2\ln(1-\alpha)} \right]$$

$$\int_{c+\sqrt{-2\sigma^2\ln(1-\alpha)}}^{c+\sqrt{-2\sigma^2\ln(\alpha)}} 1 dx = \sigma \left[ \sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sqrt{-2\ln(1-\alpha)} \right] \quad (3.38)$$

Sustituimos las integrales en la ecuación  $V(\alpha)$  3.35.

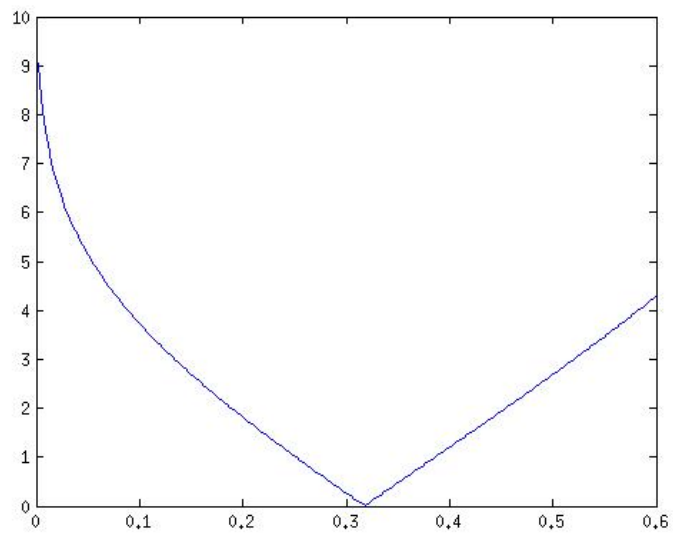
$$V(\alpha) = \left| \sigma \left[ \sqrt{-2\ln(1-\alpha)} - \sqrt{\frac{\pi}{4}\alpha(2-\alpha)} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\alpha^2)} - \sqrt{-2\ln(\alpha)} + \sqrt{-2\ln(1-\alpha)} \right] \right|$$

$$V(\alpha) = \left| \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2\sqrt{-2\ln(1-\alpha)} - \sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sqrt{\frac{\pi}{4}\alpha(2-\alpha)} - \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-\alpha^2)} \right] \right| \quad (3.39)$$

Resultando en la siguiente grafica de la función 3.39.

Usando método computacional se obtiene que

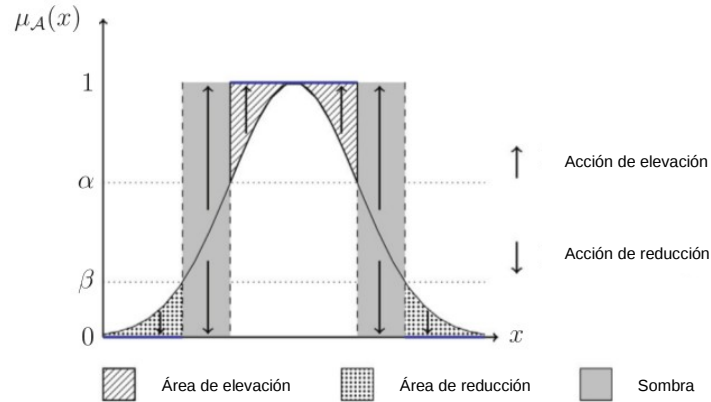
$$\alpha = 0.3186$$



**Figura 3.1:** Curva de la función V

# Capítulo 4

## Conjuntos sombreados en base a decisiones de tres vías



**Figura 4.1:** Definición de Conjunto Sombreado según Pedrycz

Un problema no resuelto de la proposición de Zadeh es la falta de la definición e interpretación del par de umbrales. Pedryczy (referencia) propone un marco de

---

conjuntos de sombra que nos da una solución al problema. Un conjunto sombreado  $S$  en  $U$  (el universo) se define como un mapa de  $U$  al conjunto  $\{0, [0, 1], 1\}$ , esto es  $S : U \rightarrow \{0, [0, 1], 1\}$ . Los elementos con grado de membresía 1 constituyen el núcleo, y los elementos con grados de membresía entre 0 y 1 conforman la sombra de  $S$ . Para la aplicación de un conjunto sombreado como una aproximación de un conjunto difuso, Pedrycz (referencia) propone un método constructivo. Dados un par de umbrales  $(\alpha, \beta)$  con  $0 \leq \beta \leq \alpha$ , podemos construir un conjunto sombreado desde un conjunto difuso  $\mu_A$  de la siguiente forma:

$$S_{\mu_A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, & \text{si } \mu_A(x) \leq \beta \\ [0, 1] & \text{si } \beta \leq \mu_A(x) \leq \alpha \end{cases} \quad (4.1)$$

Según la decisión de tres vías, se tiene que un conjunto sombreado puede ser interpretado por tres regiones: la región positiva definida por el grado de pertenencia 1, la región negativa definida por el grado de pertenencia 0, y la región sombreada. Pedrycz presenta un método optimizando una función objetivo que caracteriza la incertidumbre de un conjunto sombreado. Consideremos un conjunto sombreado que aproxima a un conjunto difuso como se muestra en 4.1 donde las tres áreas representan cambios en la función de pertenencia del conjunto difuso, tal que en base a esta teoría Pedrycz sugiere que el par óptimo de los umbrales debe satisfacer:

$$\text{Área de elevación}_{(\alpha, \beta)}(\mu_A) + \text{Área de reducción}_{(\alpha, \beta)}(\mu_A) = \text{Área Sombreada}_{(\alpha, \beta)}(\mu_A)$$

---

Al fin y al cabo estaríamos optimizando una función  $V(\alpha, \beta)$  similar a la optimizada en capítulos anteriores.

$$V(\alpha, \beta) = \left| \int_{x \in A_r} \mu_A(x) dx + \int_{x \in A_e} \mu_A(x) dx - \int_{x \in S} dx \right| \quad (4.2)$$

## 4.1. Conjuntos sombreados en base a la media

El conjunto que representa la incertidumbre esta dado por los grados de membresía entre 0 y 1 . Se define un conjunto de grados de membresía de incertidumbre tal que  $0 < \mu_A(x) < 1$  dado por:

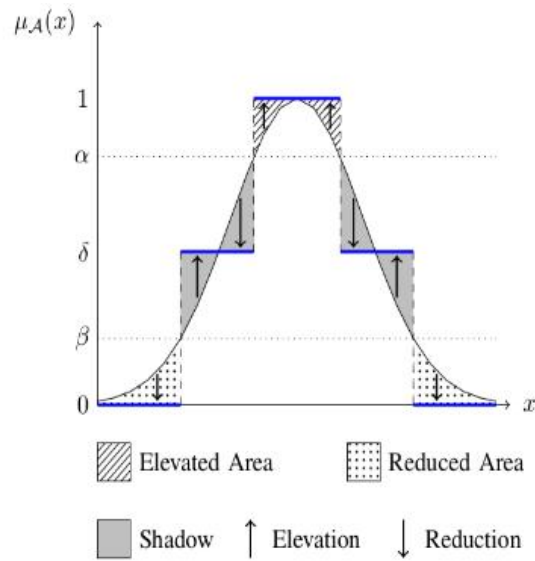
$$S(\mu_A) = x \in U | 0 < \mu_A(x) < 1 \quad (4.3)$$

El valor 0.5 puede ser una buena aproximación para algunos objetos, pero no para todos. El valor de la media para  $S(\mu_A)$  se expresa de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{\sum_{x \in S(\mu_A)} \mu_A(x)}{\text{card}(S(\mu_A))} \quad (4.4)$$

La idea principal de este enfoque basado en costos, es la construcción de los conjuntos difusos en función de costos de decisión. Como se puede observar en la gráfica 4.1 cada objeto en el universo tiene dos opciones, ser elevado o reducido. Para un objeto  $x \in U$  con  $\beta < \mu_A(x) < \alpha$ , se define la sombra.

Supongamos que cada elemento en el conjunto difuso  $x \in U$  es asignado mediante un conjunto acciones =  $\{a_e, a_r, \uparrow, \downarrow\}$ , y se asume que cada acción de decisión esta asociada con un error  $E$  y un costo de decisión  $\lambda$ , entonces tendríamos la tabla 4.3



**Figura 4.2:** Áreas de la sombra

de asociaciones.

Actions	Fuzzy set	Shadowed set	Errors	Loss/cost
$a_e$	$\mu_A(x)$	1	$1 - \mu_A(x)$	$\lambda_e$
$a_r$	$\mu_A(x)$	0	$\mu_A(x) - 0$	$\lambda_r$
$a_{s\downarrow}$	$\mu_A(x) \geq \delta$	$\delta$	$\mu_A(x) - \delta$	$\lambda_{s\downarrow}$
$a_{s\uparrow}$	$\mu_A(x) < \delta$	$\delta$	$\delta - \mu_A(x)$	$\lambda_{s\uparrow}$

**Figura 4.3:** Tabla de Asociaciones

Primero asumimos que los costos no son negativos, es decir  $\lambda_e \geq 0$ ,  $\lambda_r \geq 0$ ,  $\lambda_{s\uparrow} \geq 0$  y  $\lambda_{s\downarrow} \geq 0$ , también tendríamos que suponer que  $\lambda_{s\downarrow} \leq \lambda_r$ , es decir reduciendo  $\mu_A(x) = 0$  se representaría con un mejor ajuste que la reducción de la media  $\delta > 0$ . Otra forma de verlo es  $\mu_A(x) \geq \delta$ . Y tendremos dos condiciones.

(E1) If  $\mu_A(x) \geq \alpha$ , then  $S_{\mu_A}(x) = 1$ ;

---

(S1) If  $\delta \leq \mu_A(x) < \alpha$ , then  $S_{\mu_A}(x) = \delta$ ,

Dadas estas dos condiciones podremos expresar  $\alpha$  como :

$$\alpha = \frac{\lambda_e + \delta\lambda_{s\downarrow}}{\lambda_e + \lambda_{s\downarrow}} \quad (4.5)$$

Debido a esta expresión se asume que el denominador es distinto de cero ( $\lambda_e + \lambda_{s\downarrow} \neq 0$ ), también, de la condición  $\delta < \alpha < 1$  se puede verificar  $\delta < \alpha < 1$ .

Y se toman encuentra las siguientes condiciones parecidas a las anteriores (E1),(R2).

(R2) If  $\mu_A(x) \geq \beta$ , then  $S_{\mu_A}(x) = 0$ ;

(S2) If  $\beta < \mu_A(x) < \delta$ , then  $S_{\mu_A}(x) = \delta$ ,

Se puede expresar  $\beta$  como:

$$\beta = \frac{\delta\lambda_{s\uparrow}}{\lambda_\gamma + \lambda_{s\uparrow}}. \quad (4.6)$$

Otra vez asumimos que el denominador es distinto de cero, ( $\lambda_\gamma + \lambda_{s\uparrow} \neq 0$ ), se puede verificar  $0 \leq \beta < \delta$ .

y tambien se obtiene  $0 \leq \beta < \delta < \alpha \leq 1$ , se puede combinar las reglas de desición para obtener un grupo de tres reglas:

(E) If  $\mu_A(x) \geq \alpha$ , then  $S_{\mu_A}(x) = 1$ ,

(R) If  $\mu_A(x) \leq \beta$ , then  $S_{\mu_A}(x) = \delta$ ,

(S) If  $\beta < \mu_A(x) < \alpha$ , then  $S_{\mu_A}(x) = \delta$ ,

---

Obtendremos un par de umbrales  $(\alpha, \beta)$  definidas en las ecuaciones 4.1 y 4.1 que serán las soluciones para los conjuntos sombreados en base a la media.

## 4.2. Calculo de la función objetivo

Se utilizara la mitad de la función ya que los valores umbrales no deberían cambiar al utilizar solo una parte de ella, calculando así solo una sombra  $a_1, a_2$  y después sustituyendo los demás valores para calcular la segunda parte  $a_3$  y  $a_4$ . Calculándolos de manera similar al capítulo anterior.

## 4.3. Función de membresía triangular

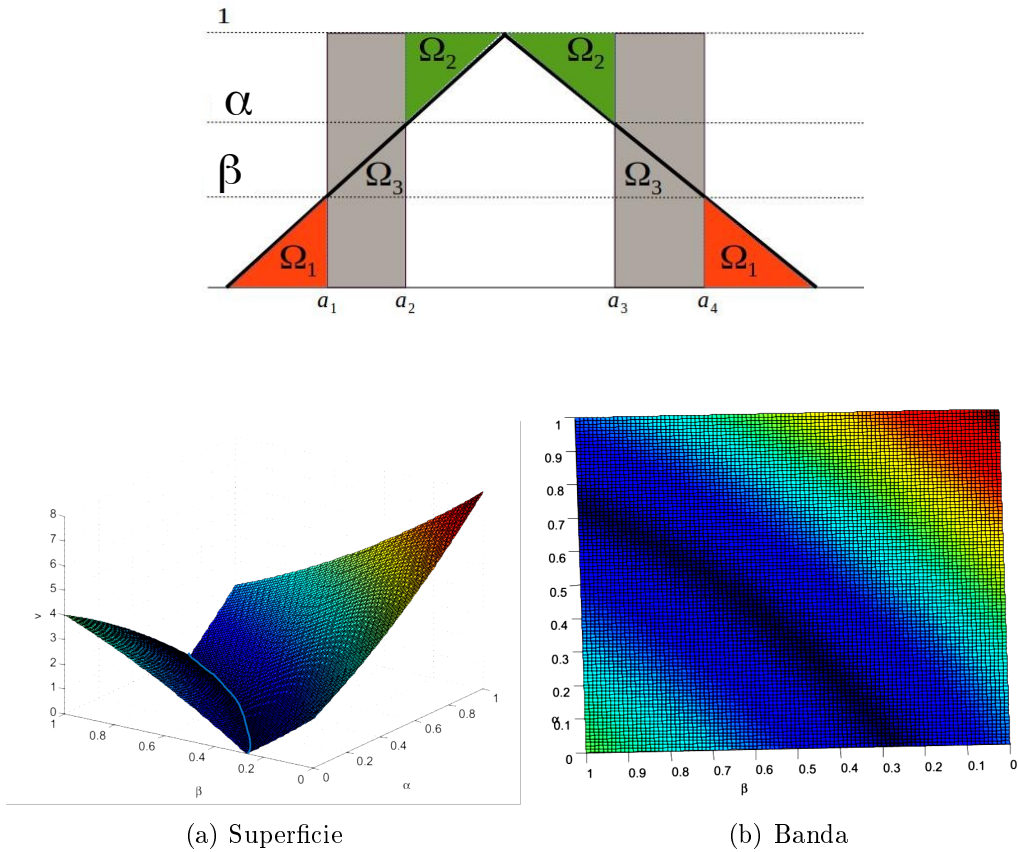
Se optimizara la función anterior, para encontrar los umbrales  $\alpha$  y  $\beta$ . en la misma función de membresía triangular:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } a \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x. \end{cases}$$

La función objetivo (4.7):

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} |(b-a) ((1-\alpha)^2 - 2(\alpha-\beta) + \beta^2)| \quad (4.7)$$

En (b) de la figura 4.4 se puede ver una banda la cual se intersecta con los ejes

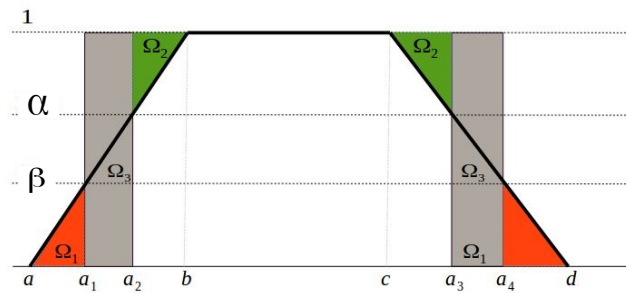


**Figura 4.4:** Superficie V

en  $\alpha = 0.73$  y  $\beta = 0.27$ . Los resultados utilizando el algoritmo genético de matlab,  $\alpha = 0.7677$   $\beta = 0.2556$ , promediando 1000 resultados en la cual se puede ver que no hay variaciones muy grandes. En resultados anteriores  $\alpha = 0.41$  y  $1 - \alpha = 0.58$ , básicamente la función objetivo es invariante a los parámetros de la función  $\mu(x)$ , los óptimos y la banda de óptimos son exactamente los mismos para cualesquiera parámetros  $a, b$  y  $c$ . Por lo tanto los valores para los umbrales de las sombras serán:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a + \beta(b - a) = a + 0.27(b - a) \\
a_2 &= a + \alpha(b - a) = a + 0.73(b - a) \\
a_3 &= c - \alpha(b - c) = c - 0.73(c - b) \\
a_4 &= c - \beta(b - c) = c - 0.27(c - b)
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

#### 4.4. Función de membresía Trapezoidal



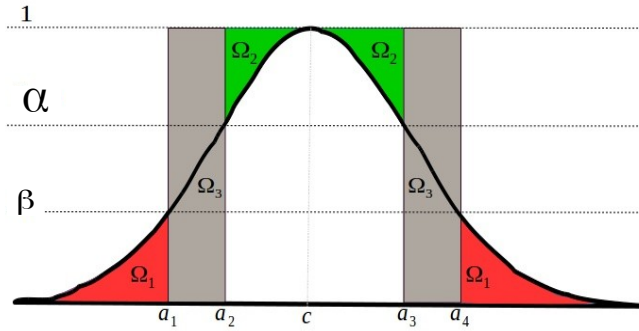
$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{si } d < x. \end{cases}
\tag{4.9}$$

En este caso los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son los mismos que para la función triangular, ya que la parte que se está usando es la misma, en  $[a, b]$  los valores que cambian serán

los valores umbrales de las sombras  $a_3$  y  $a_4$  ya que  $a_1, a_2$  son iguales que los valores anteriores, que son representados por:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a + \beta(b - a) = a + 0.27(b - a) \\
 a_2 &= a + \alpha(b - a) = a + 0.73(b - a) \\
 a_3 &= d - \alpha(d - c) = d - 0.73(d - c) \\
 a_4 &= d - \beta(d - c) = d - 0.27(d - c)
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

## 4.5. Función de membresía Gaussiana



$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}
 \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= c - \sigma\sqrt{-2\ln(\beta)} \\
 a_2 &= c - \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} \\
 a_3 &= c + \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} \\
 a_4 &= c + \sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

---


$$\int_0^a e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{-\frac{\pi}{4}} [e^{a^2} - 1] \quad (4.13)$$

$$\int_c^{c+a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \int_0^{\frac{a}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sigma \sqrt{-\frac{\pi}{4}} \left[ e^{\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2} - 1 \right] \quad (4.14)$$

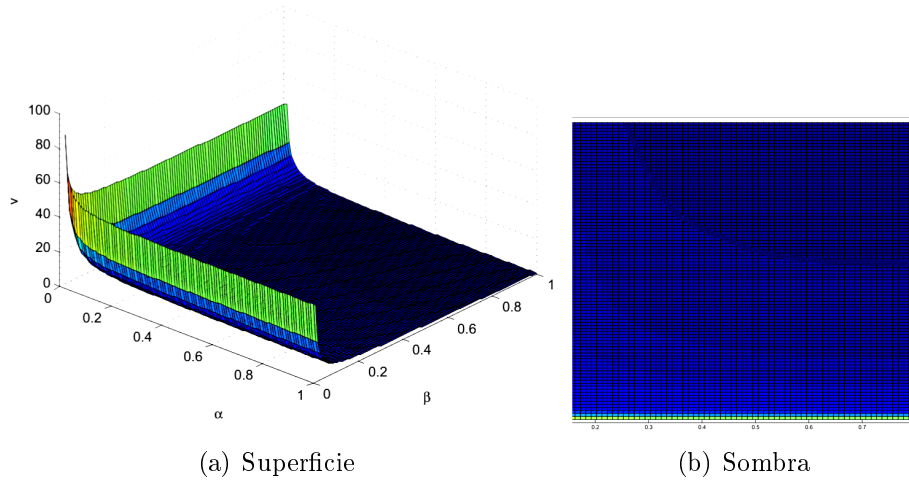
$$\int_c^{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sigma\sqrt{-\frac{\pi}{4}} [\alpha^{-2} - 1] \quad (4.15)$$

$$\int_{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4}} [\beta^{-2} - 1] \right] \quad (4.16)$$

$$\int_{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}}^{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}} 1 dx = \sigma \left[ \sqrt{-2\ln(\beta)} - \sqrt{-2\ln(\alpha)} \right] \quad (4.17)$$

$$v(\alpha, \beta) = |\sigma| \left| \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{-\frac{\pi}{4}} [\alpha^{-2} - 1] - \sqrt{-\frac{\pi}{4}} [\beta^{-2} - 1] - \sqrt{-2\ln(\beta)} + 2\sqrt{-2\ln(\alpha)} \right| \quad (4.18)$$

En la segunda gráfica "se puede.ºbservar, una sombra oscura, de forma que la banda que choca con los ejes son  $\alpha = 0.35$  y  $\beta = 0.65$ . Resultados muy parecidos a los anteriores  $\alpha = 0.31$  y  $1 - \alpha = 0.68$ . Tambien resultados con algoritmo genetico para optimizar la función objetivo  $\alpha = 1.2495$   $\beta = 2.2406$  Y al igual que utilizando un solo umbral, la función objetivo resulta ser independiente de  $c$  y  $\sigma$ . Por lo tanto los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  seran constantes y solo los valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  seran



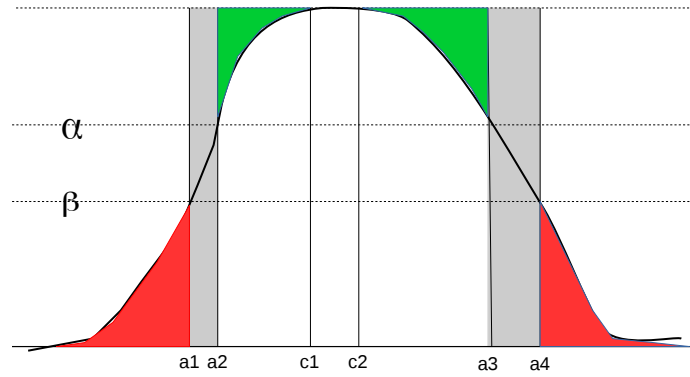
**Figura 4.5:** Superficie V

dependientes de los parametros de la función que se hayan utilizado. Por lo tanto estos valores seran:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= c - \sigma \sqrt{-2\ln(0.65)} = c - 0.9282\sigma \\
 a_2 &= c - \sigma \sqrt{-2\ln(0.35)} = c - 1.449\sigma \\
 a_3 &= c + \sigma \sqrt{-2\ln(0.35)} = c + 1.449\sigma \\
 a_4 &= c + \sigma \sqrt{-2\ln(0.65)} = c + 0.9282\sigma
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

## 4.6. Función de membresía gauss2

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c_1}{\sigma_1}\right)^2} & \text{si } x \leq c_1 \\ 1 & \text{si } c_1 < x < c_2 \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c_2}{\sigma_2}\right)^2} & \text{si } x \geq c_2 \end{cases}
 \tag{4.20}$$



Pasa exactamente lo que con la trapezoidal, los valores  $\alpha$  y  $\beta$  son los mismos ya que la primera parte es igual y los valores tienden a ser los mismos para la segunda parte de la función. Lo que varía son los valores umbrales de las sombras. Por lo tanto tendremos los siguientes valores;

$$\begin{aligned}
 a_1 &= c_1 - \sigma_1 \sqrt{-2\ln(0.65)} = c_1 - 0.9282\sigma_1 \\
 a_2 &= c_1 - \sigma_1 \sqrt{-2\ln(0.35)} = c_1 - 1.449\sigma_1 \\
 a_3 &= c_2 + \sigma_2 \sqrt{-2\ln(0.35)} = c_2 + 1.449\sigma_2 \\
 a_4 &= c_2 + \sigma_2 \sqrt{-2\ln(0.65)} = c_2 + 0.9282\sigma_2
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

# Capítulo 5

## Modelo de inferencia difuso sombreado tipo-2

El sistema de inferencia con conjuntos difusos, es generado con dos alpha planos(en este caso  $\alpha$  y  $\beta$ ), es definido con  $\mathbf{n}$  entradas,  $\mathbf{m}$  salidas y  $\mathbf{r}$  reglas. La  $\mathbf{k}$ -ésima regla tiene el conjunto de antecedentes difusos tipo-2 generalizados,  $\tilde{F}_i^k$ , el conjunto de consecuentes difusos tipo-2 generalizados,  $\tilde{F}_j^k$ , y los hechos difusos,  $\tilde{X}_i$ , se infieren como un razonamiento directo.

$R^k$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{F}_1^k, \dots, x_n$  es  $\tilde{F}_n^k$  Entonces  $y_1$  es  $\tilde{G}_1^k, \dots, y_m$  es  $\tilde{G}_m^k$

$H$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{X}_1, \dots, x_n$  es  $\tilde{X}_n$

---

$C$ :  $y_1$  es  $\tilde{B}_1, \dots, y_m$  es  $\tilde{B}_m$

Ya que la inferencia se hará de forma paralela para los  $\alpha$ -planos y  $\beta$ -planos, tomamos de referencia un plano genérico para realizar toda la inferencia, conscientes de que

la inferencia es la misma para los dos planos, con resultados similares.

$$(\tilde{B}_j^k)_\alpha = \bigcap_{i=0}^n \left[ (\tilde{X}_i)_\alpha \circ \left\{ (\tilde{F}_i^k)_\alpha \rightarrow (\tilde{G}_i^k)_\alpha \right\} \right]$$

$$(\tilde{B}_j)_\alpha = \bigcup_{k=0}^r \left[ (\tilde{B}_j^k)_\alpha \right]$$

$$\mu_{\tilde{B}_j^k}^\alpha = \bigcap_{i=0}^n \left\{ \bigsqcup_{x_i \in X_i} \left[ \mu_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i) \sqcap \mu_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i) \right] \right\} \sqcap \mu_{\tilde{G}_j^k}^\alpha(y_j)$$

$$\Omega_\alpha^k(x) = \bigcap_{i=0}^n \left\{ \bigsqcup_{x_i \in X_i} \left[ \mu_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i) \sqcap \mu_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i) \right] \right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}_j^k}^\alpha(y_i) = \Omega_\alpha^k(x) \sqcap \mu_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i)$$

$$\mu_{\tilde{B}_j}^\alpha(y_i) = \bigsqcup_{k=1}^r \left\{ \mu_{\tilde{B}_j^k}^\alpha(y_i) \right\} = \bigsqcup_{k=1}^r \left\{ \Omega_\alpha^k(x) \sqcap \mu_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i) \right\}$$

**Definición 5.1.** *Definimos el intervalo del  $\alpha$ -corte sobre la entrada no singleton como:*

$$I_{(\tilde{X})^\alpha} = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i), \bar{\mu}_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i)]$$

$$(\tilde{X}_i)_\alpha = \left\{ \int_{x_i \in \tilde{X}_i} \left[ \int_{\mu_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i) \in I_{(\tilde{X})^\alpha}} 1/\mu_{\tilde{X}_i}^\alpha(x_i) \right] / x \right\} = \left\{ \int I_{(\tilde{X})^\alpha} / x_i \right\}$$

---

**Definición 5.2.** Definimos el intervalo del  $\alpha$ -corte sobre los antecedentes como:

$$I_{(\tilde{F})^\alpha} = [\underline{\mu}_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i), \overline{\mu}_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i)]$$

$$\left(\tilde{F}_i^k\right)_\alpha = \left\{ \int_{x_i \in \tilde{F}_i^k} \left[ \int_{\mu_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i) \in I_{(\tilde{F})^\alpha}} 1/\mu_{\tilde{F}_i^k}^\alpha(x_i) \right] / x \right\} = \left\{ \int I_{(\tilde{F})^\alpha} / x_i \right\}$$

**Definición 5.3.** Definimos el intervalo del  $\alpha$ -corte sobre los consecuentes como:

$$I_{(\tilde{G})^\alpha} = [\underline{\mu}_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i), \overline{\mu}_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i)]$$

$$\left(\tilde{G}_i^k\right)_\alpha = \left\{ \int_{y_i \in \tilde{G}_i^k} \left[ \int_{\mu_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i) \in I_{(\tilde{G})^\alpha}} 1/\mu_{\tilde{G}_i^k}^\alpha(y_i) \right] / y \right\} = \left\{ \int I_{(\tilde{G})^\alpha} / y_i \right\}$$

Al calcular las fuerzas de disparo se realiza individualmente las operaciones para el limite derecho e izquierdo del intervalo.

**Definición 5.4.** Se define la *t-norma* ( $Tn$ )

$$Tn(\mu_1(x), \mu_2(x)) = [\underline{\mu}_1(x) \star \underline{\mu}_2(x), \overline{\mu}_1(x) \star \overline{\mu}_2(x)]$$

donde  $\mu_1(x) = [\underline{\mu}_1(x), \overline{\mu}_1(x)]$  y  $\mu_2(x) = [\underline{\mu}_2(x), \overline{\mu}_2(x)]$

---

Por lo tanto las fuerzas de disparo se pueden describir como:

$$\Omega_{\alpha}^k(x) = \star_{i=1}^n \left\{ \text{Sup}_{x_i} \{ \text{Tn}(I_{(\tilde{X})\alpha}, I_{(\tilde{F})\alpha}) \} \right\} \quad (5.1)$$

Los grados de compatibilidad:

$$\mu_{\tilde{B}_j^k}^{\alpha}(y_j) = \text{Tn}(\Omega_{\alpha}^k(x), I_{(\tilde{G})\alpha}(y_j)) \quad (5.2)$$

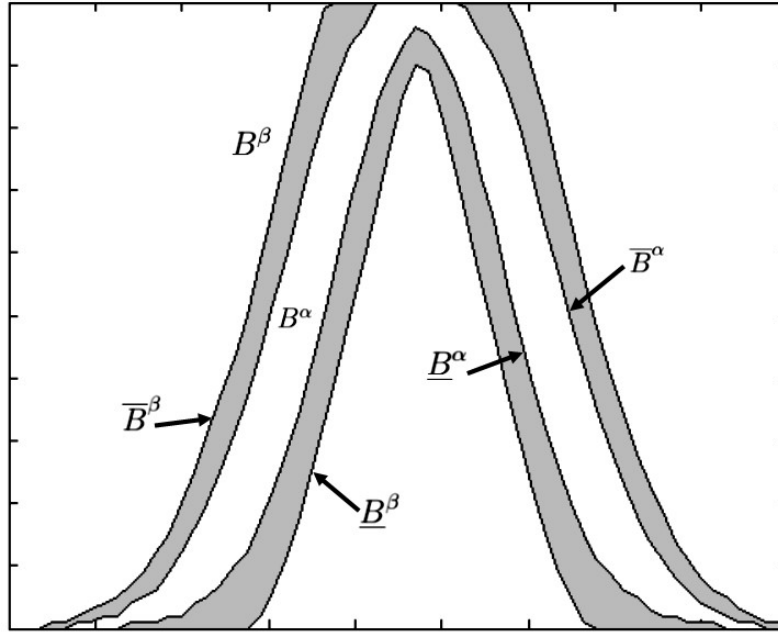
$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^{\beta}(y) &= \bigoplus_{k=1}^r \left\{ \underline{\mu}_{\tilde{B}_j^k}^{\beta}(y_j) \right\} \\ \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^{\beta}(y) &= \bigoplus_{k=1}^r \left\{ \overline{\mu}_{\tilde{B}_j^k}^{\beta}(y_j) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dando como resultado las salidas:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^{\alpha}(y) &= \bigoplus_{k=1}^r \left\{ \underline{\mu}_{\tilde{B}_j^k}^{\alpha}(y_j) \right\} \\ \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^{\alpha}(y) &= \bigoplus_{k=1}^r \left\{ \overline{\mu}_{\tilde{B}_j^k}^{\alpha}(y_j) \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Obteniendo un resultado similar para el plano  $\beta$  tal que:

Ilustradas en la imagen 5.2. A las cuales se introducen en un algoritmo de reducción de tipo tal como el algoritmo km, tskm, o cualquier otro que cumpla su objetivo,



**Figura 5.1:** Salidas difusas con conjuntos sombreados

para obtener cuatro valores por cada salida.

$$\begin{aligned}
 c_{lj}^O &= \text{algoritmo} \left( \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\beta(y), \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\beta(y), y, -1 \right) \\
 c_{lj}^I &= \text{algoritmo} \left( \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\alpha(y), \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\alpha(y), y, -1 \right) \\
 c_{rj}^I &= \text{algoritmo} \left( \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\alpha(y), \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\alpha(y), y, +1 \right) \\
 c_{rj}^O &= \text{algoritmo} \left( \underline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\beta(y), \overline{\mu}_{\tilde{B}_j}^\beta(y), y, +1 \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

El algoritmo utilizado con este objetivo esta descrito en los anexos.

Las defucificaciones existentes, para cada una de la salidas, son tres, la defucificación pesimista, optimista y de peso.

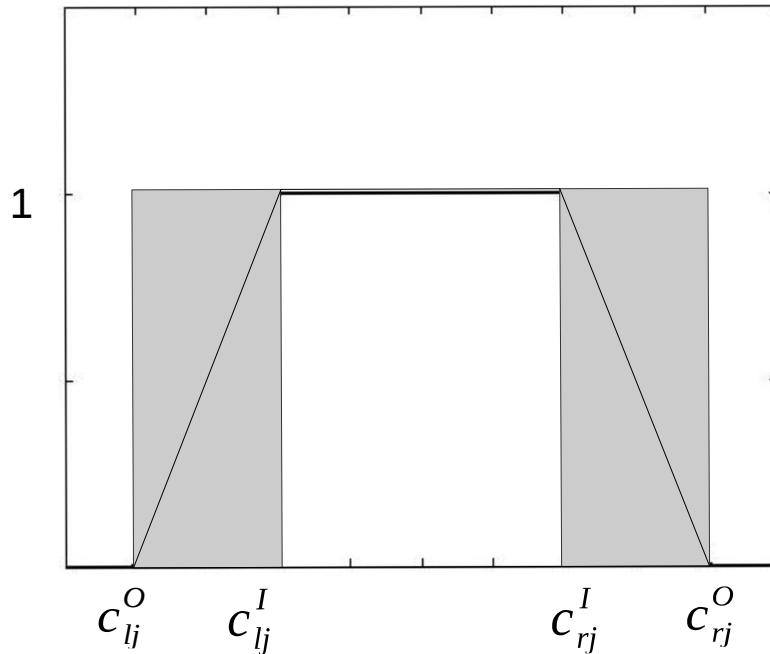
- Pesimista  $y_{pj} = \frac{c_{lj}^O + c_{rj}^O}{2}$

---

- Optimista  $y_{oj} = \frac{c_{lj}^I + c_{rj}^I}{2}$

- Peso  $y_{wj} = \frac{\sum_{i=1}^N w_j(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^N w_j(x_i)}$

Donde  $w_j(x)$  es la función trapezoidal generada por los parametros  $C_j = \{c_{lj}^O, c_{lj}^I, c_{rj}^I, c_{rj}^O\}$  descritos anteriormente en 5 e ilustrada en la figura 5.2



**Figura 5.2:** Función trapezoidal con los parametros  $C_j$

---

## 5.1. Caso de Estudio Sintético

Se representara un caso genérico, de dos antecedentes, dos consecuentes y tres reglas no singleton.

$R^1$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{F}_1^1$ , y  $x_2$  es  $\tilde{F}_2^1$  Entonces  $y_1$  es  $\tilde{G}_1^1$ , y  $y_2$  es  $\tilde{G}_2^1$

$R^2$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{F}_1^2$ , y  $x_2$  es  $\tilde{F}_2^2$  Entonces  $y_1$  es  $\tilde{G}_1^2$ , y  $y_2$  es  $\tilde{G}_2^2$

$R^3$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{F}_1^3$ , y  $x_2$  es  $\tilde{F}_2^3$  Entonces  $y_1$  es  $\tilde{G}_1^3$ , y  $y_2$  es  $\tilde{G}_2^3$

$H$ : Si  $x_1$  es  $\tilde{X}_1$  y  $x_2$  es  $\tilde{X}_2$

---

$C$ :  $y_1$  es  $\tilde{B}_1$  y  $y_2$  es  $\tilde{B}_2$

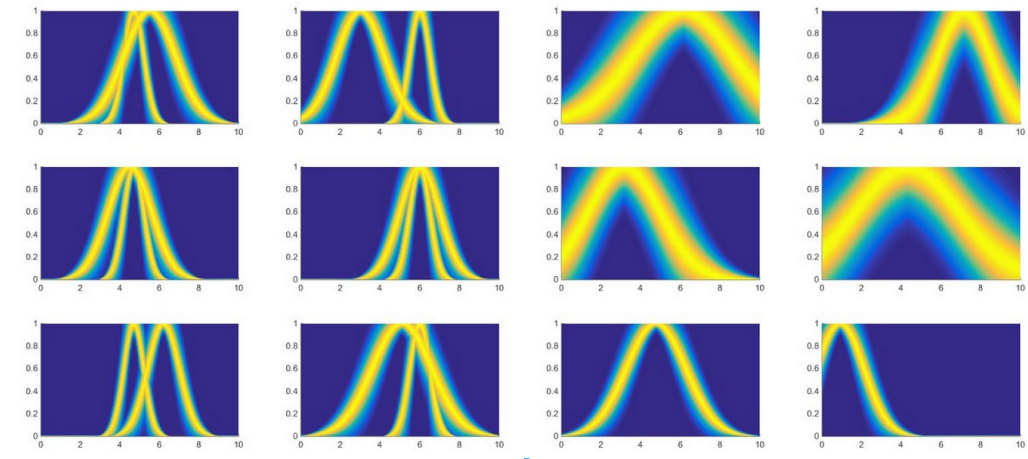


Figura 5.3: dos antecedentes, dos consecuentes y tres reglas

Para las funciones de membresía generalizadas, se utilizo la función descrita por:

$$f = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u - px_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (5.6)$$

---

donde:

$$p_x = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad m = \frac{m_1+m_2}{2} \quad y \quad \sigma_i = \frac{(1+\rho)}{2\sqrt{3}}\Delta u \quad (5.7)$$

En la figura 5.3 se pueden observar las huellas por cada regla, ilustrando cada t-norma de los antecedentes con los hechos. Esas funciones de membresía están dadas por las ecuaciones [5.6-5.1] con los siguientes parámetros:

Escritos de la forma  $P_\mu = \{\sigma, m_1, m_2, \rho\}$

$$\begin{aligned} P_{\mu_{F_1^1}} &= \{1.30, 4.85, 6.15, 0\} & P_{\mu_{F_2^1}} &= \{1.20, 4.40, 3.60, 0\} \\ P_{\mu_{F_1^2}} &= \{1.10, 3.95, 5.05, 0\} & P_{\mu_{F_2^2}} &= \{1.00, 5.50, 6.50, 0\} \\ P_{\mu_{F_1^3}} &= \{0.80, 5.80, 6.60, 0\} & P_{\mu_{F_2^3}} &= \{1.50, 4.35, 5.85, 0\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

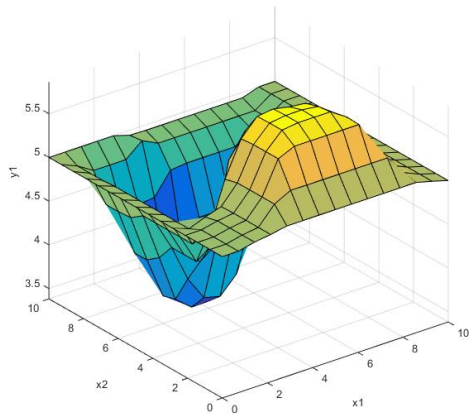
$$\begin{aligned} P_{\mu_{G_1^1}} &= \{2.50, 3.43, 8.8062, 0\} & P_{\mu_{G_1^2}} &= \{1.30, 5.3356, 8.9972, 0\} \\ P_{\mu_{G_1^2}} &= \{1.80, 1.0210, 5.3044, 0\} & P_{\mu_{G_2^2}} &= \{2.60, 0.1271, 8.4949, 0\} \\ P_{\mu_{G_1^3}} &= \{1.50, 4.1400, 5.4016, 0\} & P_{\mu_{G_2^3}} &= \{1.20, 0.3272, 1.4852, 0\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Con parámetros para generar los hechos no singleton:

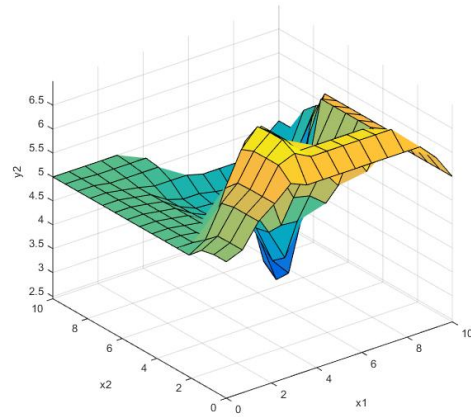
$$\begin{aligned} P_{\mu_{X_1}} &= \{0.50, 0.30, 0\} \\ P_{\mu_{X_2}} &= \{0.50, 0.35, 0\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

---

Obteniendo unas salidas con la inferencia generalizada 5.4



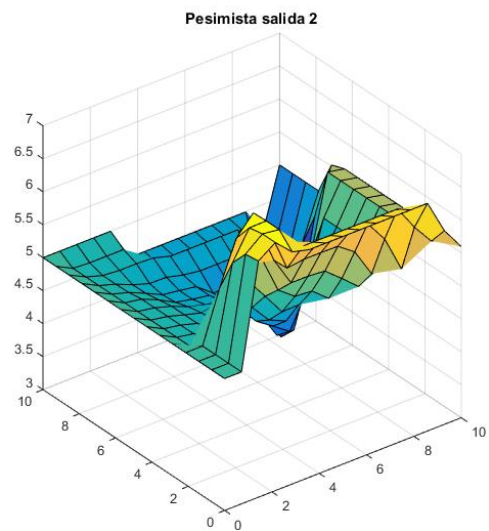
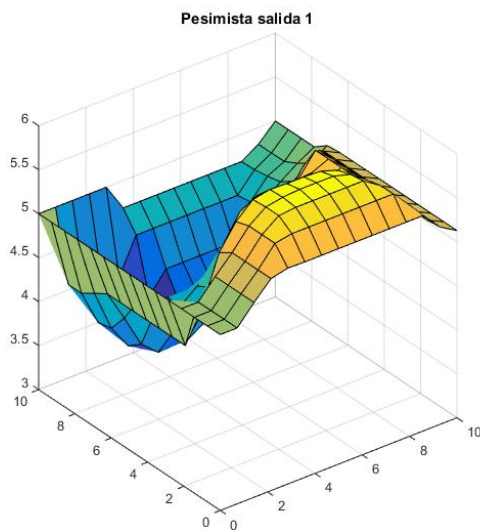
(a) Salida 1



(b) Salida 2

**Figura 5.4:** Salidas con inferencia Generalizada

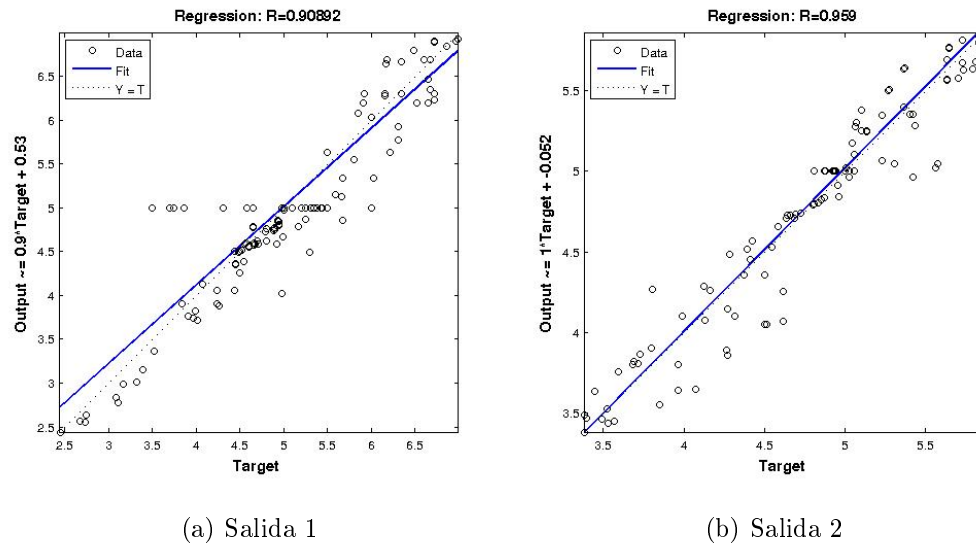
y unas salidas con el modelo de inferencia difusa sombreado tipo-2: 5.5



**Figura 5.5:** Salida con defucificacion Pesimista

---

Calculando la regresión entre la salida de la inferencia del generaliza y la inferencia sombreada, se obtuvieron los resultados en la gráfica 5.6



**Figura 5.6:** Regresión entre I. Generalizada y la I. Sombreada

## 5.2. Caso Mackey-Glass

Se presenta un caso de estudio en donde las funciones de membresía utilizadas para los antecedentes y consecuentes son del tipo descritas en las ecuaciones 5.6 y 5.1. Para este caso de estudio se tienen dieciséis reglas, cuatro entradas para los antecedentes y una salida. Donde los parámetros están descritos a continuación:

---


$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^1}} &= \{0.0129909255819961, 1.25437118304556, 1.263460740386910, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^1}} &= \{0.018627976339377, 0.985792877191128, 0.998826595075298, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^1}} &= \{0.0179022276302298, 0.698401235859129, 0.710927158169722, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^1}} &= \{0.0166877144278241, 0.489380853972865, 0.50105699946614, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^2}} &= \{0.0198978801913713, 0.545028889619383, 0.558091701584375, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^2}} &= \{0.0191193131460186, 0.491869974791296, 0.504421663218616, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^2}} &= \{0.0234707655077432, 0.82623647593135, 0.84164486082227, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^2}} &= \{0.0107590322222615, 0.994733859997131, 1.0017970855012, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^3}} &= \{0.0148428302041096, 1.09725489286454, 1.10646388146816, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^3}} &= \{0.0187354930608048, 0.942896084652045, 0.9545202115677030, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^3}} &= \{0.0188625557050852, 0.752413851900638, 0.764116812733213, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^3}} &= \{0.0183422163737629, 0.662100601436657, 0.673480726333883, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^4}} &= \{0.0102393453145954, 1.13561731594918, 1.14138402122559, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^4}} &= \{0.0160791900592418, 1.11052818944632, 1.11958384166882, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^4}} &= \{0.0207620771340853, 0.976204702235069, 0.987897713465756, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^4}} &= \{0.018298548312939, 0.775750245306488, 0.786055819722123, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

---


$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^5}} &= \{0.0161057804441437, 0.976025754441537, 0.985096382124698, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^5}} &= \{0.0138185393577077, 1.13083168072594, 1.13861415522779, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^5}} &= \{0.019042822199117, 1.18592093353583, 1.19664567617118, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^5}} &= \{0.0208520402008292, 1.18203467284674, 1.19377835045069, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^6}} &= \{0.0180796699163117, 0.752403358082176, 0.763241332183449, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^6}} &= \{0.0186318543532798, 0.662990950772857, 0.674159935376793, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^6}} &= \{0.0224755385484284, 0.80368684061252, 60.817159946362109, 0.010.1\} \\
P_{\mu_{F_4^6}} &= \{0.0161290511469907, 1.05913448792697, 1.06880315109496, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^7}} &= \{0.0173434851199377, 0.949540437453722, 0.958547731819265, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^7}} &= \{0.0144749942567868, 0.985955333224571, 0.993472884242074, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^7}} &= \{0.019156216604284, 1.07827446992054, 1.08822320171762, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^7}} &= \{0.018298548312939, 0.775750245306488, 0.786055819722123, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^8}} &= \{0.0206269652021085, 0.497451863861487, 0.510249523395507, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^8}} &= \{0.024973422859891, 0.819048511756553, 0.834542859084357, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^8}} &= \{0.0125929334825221, 0.992675486876974, 1.00048856425723, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^8}} &= \{0.01451974055718, 0.988205054847337, 0.99721358782116, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

---


$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F_1^9}} &= \{0.0184321994585801, 1.04715835663984, 1.05977248453864, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_2^9}} &= \{0.0176854417944498, 0.749245668403679, 0.761348750580241, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_3^9}} &= \{0.0188769860637054, 0.522195038743929, 0.535113557615566, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F_4^9}} &= \{0.0210452042058397, 0.535300044394812, 0.549702389492334, 0.01, 0.1\}
\end{aligned}
\tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{10}_1}} &= \{0.017970266072981, 0.940439375975458, 0.951588730458019, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{10}_2}} &= \{0.017424237750839, 0.748968472276404, 0.759779052513979, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{10}_3}} &= \{0.019378506495589, 0.655795758816274, 0.667818832786603, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{10}_4}} &= \{0.0217117300071576, 0.802893088041376, 0.816363771964272, 0.01, 0.1\}
\end{aligned}
\tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{11}_1}} &= \{0.0124329664561621, 1.23246437445826, 1.24062652547243, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{11}_2}} &= \{0.0174627277469973, 1.21579214529289, 1.22725629759258, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{11}_3}} &= \{0.0207923688978501, 0.915417665015478, 0.929067702235882, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{11}_4}} &= \{0.0177666327137907, 0.643606369083398, 0.655270032758082, 0.01, 0.1\}
\end{aligned}
\tag{5.21}$$

---


$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{12_1}}} &= \{0.0195297513124071, 0.762927831822719, 0.774834615539624, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{12_2}}} &= \{0.0167445776255242, 1.02444384955839, 1.03465258499126, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{12_3}}} &= \{0.0169262910796902, 1.15227857037494, 1.16259809179594, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{12_4}}} &= \{0.0171908623549066, 1.23726018126945, 1.24774100494676, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{13_1}}} &= \{0.0141720497048721, 1.05929524550879, 1.06705253586021, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{13_2}}} &= \{0.0124065817915291, 1.13633184932965, 1.1431227835438, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{13_3}}} &= \{0.0203421153609398, 1.13991926155243, 1.15105383266268, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{13_4}}} &= \{0.0195997656064244, 1.01901961584937, 1.02974785035285, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{14_1}}} &= \{0.0190943419708812, 0.774279004877342, 0.786814299911887, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{14_2}}} &= \{0.0184237669398481, 0.536519246800191, 0.54861431426001, 20.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{14_3}}} &= \{0.020494929437063, 0.507160211214487, 0.520614981617026, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{14_4}}} &= \{0.0204681392048231, 0.855643752131855, 0.869080934944013, 0.01, 0.1\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

---

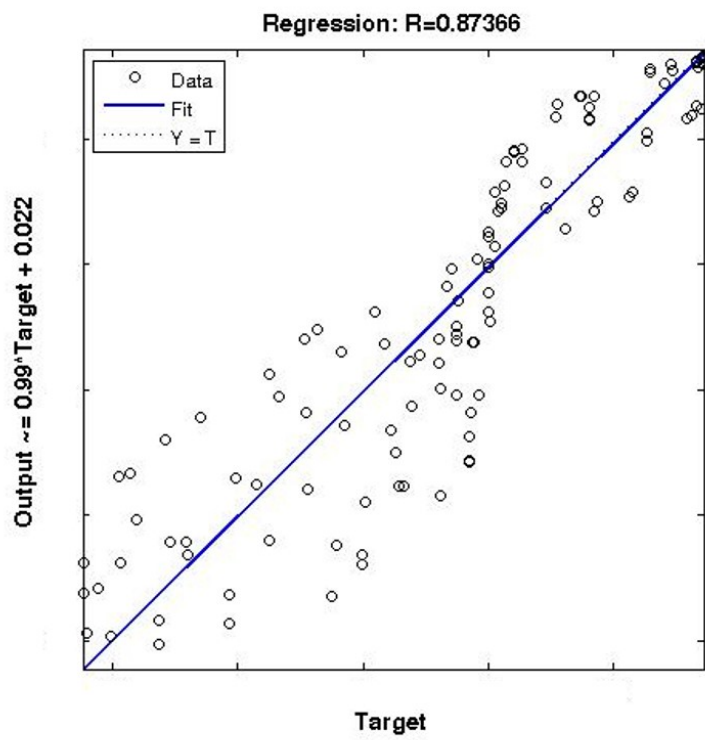

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{15_1}}} &= \{0.0101605233752967, 1.1543347012227, 1.16063862996696, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{15_2}}} &= \{0.0153583648969185, 1.22718052947541, 1.236709373055850, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{15_3}}} &= \{0.020679583363935, 1.18917010487869, 1.20200041048128, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{15_4}}} &= \{0.0202054919993789, 0.893798898327252, 0.906335061780855, 0.01, 0.1\}
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{F^{16_1}}} &= \{0.0159731088627, 0.662621921916038, 0.67204184508305, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{16_2}}} &= \{0.0224427529169084, 0.807375429233216, 0.820610736771073, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{16_3}}} &= \{0.0173982538840371, 1.05138439799925, 1.06164478101151, 0.01, 0.1\} \\
P_{\mu_{F^{16_4}}} &= \{0.013467368176203, 1.17077016405332, 1.1787123608149, 0.01, 0.1\}
\end{aligned}
\tag{5.26}$$

En este caso los dominios a considerar siempre estarán en el intervalo  $[0.412532951457182, 1.998476129219388]$ .

Para estos casos, no se obtienen superficies como salidas, ya que sería imposible graficar cuatro dimensiones, pero se obtiene el gráfico de regresión junto con el coeficiente de correlación.

Obteniendo un coeficiente de correlación de **0.87366**, utilizando como target real la inferencia generalizada, con 15  $\alpha$ -planos.



**Figura 5.7:** Salidas con inferencia Singleton

# Capítulo 6

## Conclusiones

Conociendo el problema para describir los conceptos imprecisos con funciones precisas, y mejorar la eficiencia de de los GT2FL's en las aplicaciones, y dada la hipótesis descrita en las primeras paginas del este escrito, y también se puede observar en los capítulos 4 y 5 tras haber comparado el resultado con el de otros sistemas de inferencia ya comprobados y debido a el tiempo de ejecución, y las salidas obtenidas podemos concluir que al obtener resultados satisfactorios con muchos menos datos y ciclos para computar, los resultados son muy similares a la inferencia Generalizada que utiliza muchos mas  $\alpha$ -planos para generar resultados validos de cualquier sistema de inferencia.

Tomando los resultados obtenidos podemos decir que el modelo de inferencia difusa generalizado tipo-2 con conjuntos sombreados se asemejan a los resultados obtenidos con la inferencia difusa generalizada tipo-2. Y utilizando el modelo propuesto y darle los conjuntos ya sombreados se ahorra tiempo de ejecución obteniendo salidas

---

similares y con una alta correlación.

# Bibliografía

- [1]Deng, X., & Yao, Y. (2013). Mean-value-based decision-theoretic shadowed sets. In Proceedings of the 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting, IFSANAFIPS 2013. [http : //doi.org/10.1109/IFSA – NAFIPS.2013.6608603](http://doi.org/10.1109/IFSA – NAFIPS.2013.6608603).
- [2]Karnik, N. N., & Mendel, J. M. (1998). Type-2 Fuzzy Logic Systems : Type-reduction. In IEEE International conference on Systems, Man and Cybernetics. [http : //doi.org/10.1109/ICSMC.1998.728199](http://doi.org/10.1109/ICSMC.1998.728199)
- [3]Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks (Vol. 4, pp. 1942–1948). IEEE. [http : //doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968](http://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968)
- [4]Klir, G. J. (n.d.). UNCERTAINTY AND INFORMATION Foundations of Generalized Information Theory. Retrieved from [http : //www.wiley.com/go/permission](http://www.wiley.com/go/permission).
- [5]Liang, Q., & Mendel, J. M. (2000). Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8(5), 535–550.[http : //doi.org/10.1109/91.873577](http://doi.org/10.1109/91.873577).
- [6] Linda, O. (2012). Shadowed Type-2 Fuzzy Sets – Type-2 Fuzzy Sets with Shadowed Secondary Membership Functions. IEEE, 10–15.
- [7]Lucas, L. A., Centeno, T. M., & Delgado, M. R. (n.d.). General Type-2 Fuzzy

---

Inference Systems: Analysis, Design and Computational Aspects.

[8] Mendel, J., Liu, F., & Zhai, D. (2009).  $\alpha$ -Plane Representation for Type-2 Fuzzy

[9] Mendel, J. M. (2009). Enhanced Karnik-Mendel Algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4), 923–934. [http : //doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924329](http://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924329)

[10] Mendel, J. M., John, R. I., & Liu, F. (2006). Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 14(6), 808–821. [http : //doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.879986](http://doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.879986)

[11] Mitra, S., Pedrycz, W., & Barman, B. (2010). Shadowed c-means: Integrating fuzzy and rough clustering. *Pattern Recognition*. [http : //doi.org/10.1016/j.patcog.2009.09.029](http://doi.org/10.1016/j.patcog.2009.09.029)

[12] Pedrycz, W. (1998). Shadowed sets: representing and processing fuzzy sets. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. B. Cybern.*, 28(1), 103–109. [http : //doi.org/10.1109/3477.658584](http://doi.org/10.1109/3477.658584)

[13] Pedrycz, W. (2009). From fuzzy sets to shadowed sets: Interpretation and computing. *International Journal of Intelligent Systems*. [http : //doi.org/10.1002/int.20323](http://doi.org/10.1002/int.20323)

[14] Pedrycz, W., & Song, M. (2012). Granular fuzzy models: a study in knowledge management in fuzzy modeling. *International Journal of Approximate Reasoning*, 53(7), 1061–1079. [http : //doi.org/10.1016/j.ijar.2012.05.002](http://doi.org/10.1016/j.ijar.2012.05.002)

[15] Pedrycz, W., & Vukovich, G. (2001). Granular neural networks. *Neurocomputing*, 36(1-4), 205–224. [http : //doi.org/10.1016/S0925-2312\(00\)00342-8](http://doi.org/10.1016/S0925-2312(00)00342-8).

[16] Pedrycz, W., & Vukovich, G. (2002). Granular computing with shadowed sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(2), 173–197. [http : //doi.org/10.1002/int.10015](http://doi.org/10.1002/int.10015).

[17] Wagner, C., & Hagrais, H. (2010). Toward General Type-2 Fuzzy Logic Systems Based on zSlices. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(4), 637–660. [http : //doi.org/10.1109/TFUZZ.2010.2045386](http://doi.org/10.1109/TFUZZ.2010.2045386).

- 
- [18]Wang, L., Wang, J., Zou, P., & Zhang, X. (2013). Shadowed Sets and Rough Sets in the Characterization of Fuzzy C-means-type Clustering with Mixed-type Attributes Employing a Probabilistic Dissimilarity Function. *Journal of Computational Information Systems*, 9(5). Retrieved from [http : //www.jofcis.com](http://www.jofcis.com).
- [19]Wang, Z., Shao, Y.-H., & Wu, T.-R. (2013). A GA-based model selection for smooth twin parametric-margin support vector machine. *Pattern Recognition*, 46(8), 2267–2277. [http : //doi.org/10.1016/j.patcog.2013.01.023](http://doi.org/10.1016/j.patcog.2013.01.023).
- [20]Wijayasekara, D., Linda, O., & Manic, M. (n.d.). Shadowed Type-2 Fuzzy Logic Systems Index Terms— General Type-2 Fuzzy Logic Systems, Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems, Shadowed Sets, Shadowed Type-2 Fuzzy Sets, Uncertainty Modeling.
- [21]Zadeh, L. A. (1979). Fuzzy sets and information granularity. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, 3–18.
- [22]Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2), 103–111. [http : //doi.org/10.1109/91.493904](http://doi.org/10.1109/91.493904)
- [23]Zhou, J., Pedrycz, W., & Miao, D. (2011). Shadowed sets in the characterization of rough-fuzzy clustering. *Pattern Recognition*. [http : //doi.org/10.1016/j.patcog.2011.01.014](http://doi.org/10.1016/j.patcog.2011.01.014).

# Anexos

# Apéndice A

## Integrales

3.10

$$\begin{aligned}\int_a^{a+\alpha(b-a)} \mu(x) dx &= \left[ \frac{(a+\alpha(b-a)-a)^2}{2(b-a)} \right] - \left[ \frac{(a-a)^2}{2(b-a)} \right] \\ &= \frac{[\alpha(b-a)]^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{\alpha^2(b-a)}{2}\end{aligned}$$

3.11

$$\begin{aligned}\int_{b-\alpha(b-a)}^b 1 - \mu(x) dx &= [b - (b - \alpha(b - a))] - \left\{ \left[ \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} \right] - \left[ \frac{(b-\alpha(b-a)-a)^2}{2(b-a)} \right] \right\} \\ &= \alpha(b - a) - \left[ \frac{b-a}{2} \right] + \left\{ \frac{[(b-a)-\alpha(b-a)]^2}{2(b-a)} \right\} \\ &= \alpha(b - a) - \left[ \frac{b-a}{2} \right] + \left\{ \frac{[(b-a)(1-\alpha)]^2}{2(b-a)} \right\} \\ &= \alpha(b - a) - \frac{(b-a)}{2} + \frac{(b-a)(1-\alpha)^2}{2} \\ &= \alpha(b - a) - \frac{(b-a)}{2} [1 - (1 - \alpha)^2] \\ &= \alpha(b - a) - \frac{\alpha(2-\alpha)(b-a)}{2} \\ &= \frac{(b-a)}{2} [2\alpha - \alpha(2 - \alpha)] \\ &= \alpha^2 \frac{b-a}{2}\end{aligned}$$

---

3.12

$$\begin{aligned}\int_{a+\alpha(b-a)}^{b-\alpha(b-a)} dx &= [b - \alpha(b - a)] - [a + \alpha(b - a)] \\ &= (b - a) - 2\alpha(b - a) \\ &= (1 - 2\alpha)(b - a)\end{aligned}$$

3.13

$$\begin{aligned}V(\alpha) &= \left| \alpha^2 \left(\frac{b-a}{2}\right) + \alpha^2 \left(\frac{b-a}{2}\right) - (1 - 2\alpha)(b - a) \right| \\ &= \left| \alpha^2(b - a) - (1 - 2\alpha)(b - a) \right| \\ &= \left| (b - a) [\alpha^2 - (1 - 2\alpha)] \right| \\ &= \left| (b - a)(\alpha^2 + 2\alpha - 1) \right|\end{aligned}$$

3.36

Obteniendo la ecuación anterior 3.35 calcularemos de forma exacta la siguiente integral:

$$\int_0^a e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} dx$$

Usamos cambio a coordenadas polares;

$$\begin{aligned}(x, y) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) & r &= \sqrt{2a^2} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^a e^{-\frac{x^2-y^2}{2}} dx dy &= \int_0^{\sqrt{2a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2}{2}} d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2}} d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2a^2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr \\
&= -\frac{\pi}{4} \int_0^{-a^2} e^u du \\
&= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \\
\left[ \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]^2 &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2})
\end{aligned}$$

$$\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-a^2})$$

Calculamos la integral que nos interesa.

$$\int_0^a e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx \tag{A.1}$$

Usamos como cambio de variable

$$\begin{aligned}
u &= \frac{x-c}{\sigma}; \quad du = \frac{dx}{\sigma}; \quad dx = \sigma du \\
A &= \frac{a-c}{\sigma}; \quad 0 = c - \frac{c-c}{\sigma}
\end{aligned}$$

$$\sigma \int_0^A e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-A^2})$$

$$\int_c^a e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\left[\frac{a-c}{\sigma}\right]^2}\right)$$

$$\int_c^{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)}} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx = \left[ c + \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)} - c \right] - \sigma \int_0^{\sqrt{-2\ln(1-\alpha)}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

---


$$\begin{aligned}
&= \left[ \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)} \right] - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{4} \left( 1 - e^{-[\sqrt{-2\ln(1-\alpha)}]^2} \right)} \\
&= \left[ \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)} \right] - \sigma \sqrt{\frac{\pi}{4} (1 - e^{2\ln(1-\alpha)})}
\end{aligned}$$

3.37

$$\begin{aligned}
\int_{c+\sqrt{-2\sigma^2 \ln(\alpha)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx &= \sigma \int_{\sqrt{-2\ln(\alpha)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= \sigma \left[ \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - \int_0^{\sqrt{-2\ln(\alpha)}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right] \\
&= \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4} (e^{-2\ln(\alpha)} - 1)} \right]
\end{aligned}$$

4.15

$$\begin{aligned}
\int_c^{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}} 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx &= \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sigma\sqrt{-\frac{\pi}{4} \left[ e^{(\sqrt{-2\ln(\alpha)})^2} - 1 \right]} \\
&= \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sigma\sqrt{-\frac{\pi}{4} [e^{-2\ln(\alpha)} - 1]} \\
&= \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sigma\sqrt{-\frac{\pi}{4} [\alpha^{-2} - 1]}
\end{aligned}$$

4.16

$$\begin{aligned}
\int_{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} dx &= \sigma \left[ \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - \int_0^{\sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right] \\
&= \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4} [e^{-2\ln(\beta)} - 1]} \right] \\
&= \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4} [\beta^{-2} - 1]} \right]
\end{aligned}$$

---

4.17

$$\begin{aligned} \int_{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}}^{c+\sigma\sqrt{-2\ln(\beta)}} 1 dx &= c + \sigma\sqrt{-2\ln(\beta)} - \left[ c + \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} \right] \\ &= \sigma \left[ \sqrt{-2\ln(\beta)} - \sqrt{-2\ln(\alpha)} \right] \end{aligned}$$

4.18

$$\begin{aligned} v(\alpha, \beta) &= \left| \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sigma\sqrt{-\frac{\pi}{4}[\alpha^{-2}-1]} + \sigma \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4}[\beta^{-2}-1]} \right] - \sigma \left[ \sqrt{-2\ln(\beta)} - \sqrt{-2\ln(\alpha)} \right] \right| \\ &= |\sigma| \left| \sqrt{-2\ln(\alpha)} - \sqrt{-\frac{\pi}{4}[\alpha^{-2}-1]} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{4}[\beta^{-2}-1]} - \sqrt{-2\ln(\beta)} + \sqrt{-2\ln(\alpha)} \right| \\ &= |\sigma| \left| \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{-\frac{\pi}{4}[\alpha^{-2}-1]} - \sqrt{-\frac{\pi}{4}[\beta^{-2}-1]} - \sqrt{-2\ln(\beta)} + 2\sqrt{-2\ln(\alpha)} \right| \end{aligned} \tag{A.2}$$

## Apéndice B

# Algoritmo EKM para el centroide de un IT2FS

5

Algoritmo EKM para obtener el valor izquierdo del centroide,  $c_l$ , en donde Dados los valores  $x_i$  en orden ascendente de manera que;  $x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_N$ .

$$c_l = \min_{\forall \theta_i \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}, \overline{\mu}_{\tilde{A}}]} \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \right)$$

1- Dado  $k = \lceil N/2.4 \rceil$  (el entero mayor que  $N/2.4$  y se realiza:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^k x_i \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \\ b &= \sum_{i=1}^k \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \end{aligned}$$

Después hacer  $c' = a/b$

---

2- Encontrar  $k' \in [1, N - 1]$  tal que  $x_k \leq c' \leq x_{k'+1}$

3- Si  $k' = k$  entonces se para el algoritmo y se tiene que  $c' = c_l$  y  $k = L$ , si  $k' \neq k$  entonces seguir al paso 4.

4- Hacer  $s = \text{sign}(k' - k)$  después:

$$\begin{aligned} a' &= a + s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} x_i \left[ \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) - \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) \right] \\ b' &= b + s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} x_i \left[ \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) - \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) \right] \end{aligned}$$

Calcular  $c''(k') = a'/b'$

5- Hacer  $c' = c''(k')$ ,  $a = a'$ ,  $b = b'$  y  $k' = k$  e ir al paso 2.

---

Algoritmo EKM para obtener el valor derecho del centroide,  $c_r$ , en donde Dados los valores  $x_i$  en orden ascendente de manera que;  $x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_N$ .

$$c_r = \max_{\forall \theta_i \in [\underline{\mu_{\tilde{A}}}, \overline{\mu_{\tilde{A}}}]} \left( \sum_{i=1}^N x_i \theta_i / \sum_{i=1}^N \theta_i \right)$$

1- Dado  $k = \lceil N/1.7 \rceil$  (el entero mayor que  $N/1.7$  y se realiza:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^k x_i \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N x_i \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) \\ b &= \sum_{i=1}^k \overline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) + \sum_{i=k+1}^N \underline{\mu_{\tilde{A}}}(x_i) \end{aligned}$$

? Después hacer  $c' = a/b$

---

2- Encontrar  $k' \in [1, N - 1]$  tal que  $x_k \leq c' \leq x_{k'+1}$

3- Si  $k' = k$  entonces se para el algoritmo y se tiene que  $c' = c_l$  y  $k = L$ , si  $k' \neq k$  entonces seguir al paso 4.

4- Hacer  $s = \text{sign}(k' - k)$  después:

$$\begin{aligned} a' &= a - s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} x_i \left[ \overline{\mu_{\bar{A}}}(x_i) - \underline{\mu_{\bar{A}}}(x_i) \right] \\ b' &= b - s \sum_{i=\min(k,k')+1}^{\max(k,k')} x_i \left[ \overline{\mu_{\bar{A}}}(x_i) - \underline{\mu_{\bar{A}}}(x_i) \right] \end{aligned}$$

Calcular  $c''(k') = a'/b'$

5- Hacer  $c' = c''(k')$ ,  $a = a'$ ,  $b = b'$  y  $k' = k$  e ir al paso 2.