

# **Universidad Autónoma de Baja California, Baja California**



---

## **Doctorado en Ciencias en el MYDCI con orientación en Electrónica**

---

### **Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Rolando Díaz Castillo**

Ensenada, Baja California, México

2025

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO**

**MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA**

**Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados**

**TESIS**

Que para obtener el grado Doctorado en Ciencias presenta:


**Rolando Díaz Castillo**

Aprobada por:

  
Dra. Rosa Martha López Gutiérrez  
Director de tesis

  
Dr. César Cruz Hernández  
Codirector de tesis

  
Dr. Adrián Arellano Delgado  
Sínodo

  
Dr. Miguel Ángel Murillo Escobar  
Sínodo

  
Dr. Javier Pliego Jiménez  
Sínodo

  
Dra. Liliana Cardoza Avendaño  
Sínodo

Ensenada Baja California, México. Diciembre 2025

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA


## Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados

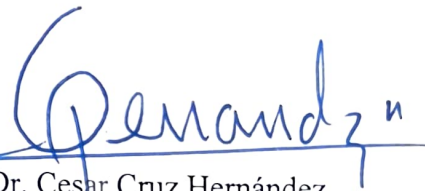
### TESIS


Que para obtener el grado de Maestría en Ingeniería / Doctorado en Ciencias presenta:

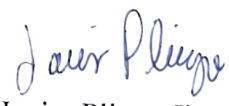
**Rolando Diaz Castillo**


Aprobada por:

  
Dra. Rosa María López Gutiérrez  
Director de tesis

  
Dr. Cesar Cruz Hernández  
Co- Director de tesis

  
Dr. Adrián Arellano Delgado  
Miembro del comité

  
Dr. Javier Pliego Jiménez  
Miembro del comité

  
Dr. Juan José Cetina Denis  
Miembro del comité

Ensenada Baja California, México. Junio 2025

Resumen de la tesis que presenta Rolando Díaz Castillo como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en el MYDCI con orientación en Electrónica.

## **Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados**

Resumen aprobado por:



\_\_\_\_\_  
Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Codirector de tesis



\_\_\_\_\_  
Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

El presente trabajo aborda el problema del vuelo en formación de múltiples vehículos aéreos no tripulados (UAVs), con énfasis en su aplicación a tareas de búsqueda y detección de objetivos en áreas de exploración delimitadas. Para lograr este objetivo, se emplean dos enfoques principales: la teoría de sistemas complejos, que permite modelar interacciones colectivas inspiradas en comportamientos naturales, y el control no lineal tipo backstepping, una técnica robusta y eficaz para estabilizar dinámicas complejas como las de los UAVs.

En este contexto, se desarrollan algoritmos de control que permiten a los UAVs mantener formaciones específicas mientras ejecutan misiones cooperativas, como cubrir de manera eficiente una región determinada. La tesis incluye un análisis numérico detallado sobre la sincronización y mantenimiento de la formación, asegurando la cohesión del grupo durante el vuelo incluso cuando los trayectos varían con el tiempo. Asimismo, se presenta un estudio de cobertura que evalúa la eficacia de las distintas formaciones de UAVs para maximizar la detección de objetivos. Se analizan diversos escenarios en los que las trayectorias cambian dinámicamente, permitiendo evaluar el rendimiento del sistema frente a condiciones variables y perturbaciones externas.

Los resultados obtenidos validan el enfoque propuesto, demostrando que es posible replicar comportamientos colectivos complejos en UAVs autónomos, y que estas estrategias pueden aplicarse exitosamente en misiones reales como rescate, vigilancia o monitoreo ambiental.

**Palabras clave: Sistemas complejos, Formación, Control Backstepping, Múltiples UAVs, Búsqueda.**

Abstract of the thesis presented by Rolando Díaz Castillo as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in the MYDCI with orientation in electronics.

Abstract approved by:



---

Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Thesis Co-Director



---

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

This work addresses the problem of formation flight of multiple unmanned aerial vehicles (UAVs), with an emphasis on their application to search and target detection tasks within defined exploration areas. To achieve this goal, two main approaches are employed: complex systems theory, which allows the modeling of collective interactions inspired by natural behaviors, and nonlinear backstepping control, a robust and effective technique for stabilizing complex dynamics such as those of UAVs.

In this context, control algorithms are developed to enable UAVs to maintain specific formations while carrying out cooperative missions, such as efficiently covering a designated area. The thesis includes a detailed numerical analysis of the synchronization and maintenance of the formation, ensuring group cohesion during flight even when trajectories vary over time. Additionally, a coverage study is presented to evaluate the effectiveness of different UAV formations in maximizing target detection. Various scenarios are analyzed in which the trajectories change dynamically, allowing the performance of the system to be assessed under varying conditions and external disturbances.

The results obtained validate the proposed approach, demonstrating that it is possible to replicate complex collective behaviors in autonomous UAVs, and that these strategies can be successfully applied in real-world missions such as rescue operations, surveillance, or environmental monitoring.

**Keywords: Complex systems, Formation control, Backstepping control, Multiple UAVs, Search mission.**

## **Dedicatoria**

***A mi familia por su apoyo incondicional para lograr todas mis metas, a Dios por darme la oportunidad de conocer a buenas personas y a todos mis compañeros por brindarme su amistad.***

## **Agradecimientos**

A la Universidad Autónoma de Baja California por apoyarme en la realización de mi doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de doctorado. No. de becario: 693198.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo a través del proyecto de investigación , Ref. A1-S-31628.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	iv
Resumen en inglés .....	v
Dedicatoria .....	vi
Agradecimientos .....	vii
Lista de figuras .....	x
Lista de tablas .....	xiv
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Motivación .....	1
1.2. Justificación .....	2
1.3. Planteamiento del problema de estudio .....	3
1.4. Objetivos .....	4
1.4.1. Objetivo general .....	4
1.4.2. Objetivos específicos .....	4
1.5. Organización de la memoria de tesis .....	5
<b>Capítulo 2. Antecedentes</b>	
2.1. Formación de cuadracópteros .....	6
2.2. Sistemas complejos .....	27
2.3. Teoría de grafos .....	28
2.4. Tipos de grafos .....	29
2.5. Matrices asociadas a un grafo .....	31
2.6. Comportamientos colectivos en la naturaleza .....	32
2.6.1. Ejemplos de comportamientos colectivos en la naturaleza .....	33
<b>Capítulo 3. Detección de objetos</b>	
<b>Capítulo 4. Sincronización y formación</b>	
4.1. Sincronización .....	39
4.2. Formación .....	41
<b>Capítulo 5. Diseño de la ley de control</b>	
5.1. Modelo dinámico del cuadracóptero .....	45
5.2. Control backstepping .....	48

## Tabla de contenido (continuación)

### Capítulo 6. Resultados numéricos

6.1. Sincronización de cuadracópteros . . . . .	70
6.1.1. Topología estrella . . . . .	70
6.1.2. Formación de cuadracópteros . . . . .	74
6.1.3. Cambio de trayectoria deseada . . . . .	81

### Capítulo 7. Aplicación de la formación de cuadracópteros a la detección de objetos

7.0.1. Detección de un objeto en la superficie de exploración .	94
---	----

### Capítulo 8. Conclusiones

Literatura citada . . . . .	122
-----------------------------	-----

## Lista de figuras

Figura	Página
1. Grupo de cuadracópteros en búsqueda de un objeto. . . . .	4
2. Configuración física de un cuadracóptero. . . . .	7
3. Simulación de seguimiento de trayectoria de un grupo de 3 cuadracópteros. Abbas y Wu (2013). . . . .	13
4. Seguimiento de trayectoria de una espiral por un grupo de 3 cuadracópteros. Abbas y Wu (2013). . . . .	15
5. Representación del esquema de seguimiento de trayectoria implementado en varios cuadracópteros. Dong <i>et al.</i> (2017). . . . .	16
6. Simulación de una trayectoria circular. Dong <i>et al.</i> (2017). . . . .	17
7. Localización del punto $p_2(x_2, y_2)$ . Ivanov <i>et al.</i> (2014). . . . .	20
8. Localización del punto $p_3(x_3, y_3)$ de la posición $v_3$ . Ivanov <i>et al.</i> (2014). . . . .	21
9. Localización del punto $p_4(x_4, y_4)$ de la posición $v_4$ . Ivanov <i>et al.</i> (2014). . . . .	22
10. Demostración experimental de un grupo de 3 cuadracópteros. Ivanov <i>et al.</i> (2014). . . . .	23
11. Formación en triangulo de un grupo de 3 agentes. Flores-Palmeros <i>et al.</i> (2019). . . . .	24
12. Diagrama del cuadracóptero. Flores-Palmeros <i>et al.</i> (2019). . . . .	25
13. Estructura de control del cuadracóptero. Flores-Palmeros <i>et al.</i> (2019). . . . .	25
14. Seguimiento en altura del cuadracóptero. . . . .	26
15. Seguimiento en la posición X del cuadracóptero. . . . .	26
16. Seguimiento en la posición Y del cuadracóptero. . . . .	26
17. Los siete puentes de Königsberg en la ciudad de Königsberg en 1976. Diestel (2024). . . . .	28
18. Abstracción de la ciudad de Königsberg. . . . .	29
19. Grafo dirigido transmisión de información unidireccional entre nodos. . . . .	30
20. Grafo no dirigido, donde el flujo de la información es en ambos sentidos entre nodos. . . . .	30
21. Grafo mixto. . . . .	30
22. Comportamiento colectivo en las hormigas. Fuente:www.asknature.org. . . . .	34

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
23. a) Zonas que gobiernan a un pez. b) Enjambre estacionario. c) Torus. d) Grupo paralelo moviéndose en la misma dirección. Fuente: <a href="http://www.rstb.royalsocietypublishing.org">www.rstb.royalsocietypublishing.org</a> . . . . .	35
24. Comportamiento colectivo de las aves. Fuente: <a href="http://www.es.gizmodo.com">www.es.gizmodo.com</a> . . . . .	36
25. Comportamiento colectivo de los peces. Fuente: <a href="http://www.bashny.net">www.bashny.net</a> . . . . .	36
26. (a) Posición de la cámara vertical (b) Posición de la cámara horizontal. . . . .	37
27. Experimento de Huygens en 1665. Fuente: Pikovsky <i>et al.</i> (2003). . . . .	39
28. Esquema del cuadracóptero con respecto al marco inercial. . . . .	45
29. Grafo utilizado para la sincronización de una red de 5 cuadracópteros. . . . .	70
30. Seguimiento de los esclavos $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ y $S_4$ al líder a una posición deseada. . . . .	74
31. Seguimiento de los esclavos al líder a una trayectoria deseada. . . . .	74
32. Formación cuadracópteros separados en el eje x. . . . .	78
33. Formación de cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo. . . . .	78
34. Cuadracópteros separados en horizontal. . . . .	79
35. Cuadracópteros separados en el eje y. . . . .	80
36. Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo. . . . .	80
37. Cuadracópteros separados en vertical. . . . .	81
38. Formación de la red de cuadracópteros separados en el plano 2D. . . . .	82
39. Formación de la red de cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo. . . . .	82
40. Formación de la red de cuadracópteros separados en el plano 2D. . . . .	83
41. Formación de la red de cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo. . . . .	83
42. Superficies de exploración. . . . .	85
43. Exploración de la superficie con trayectoria circular. . . . .	86

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
44. Exploración de la superficie con trayectoria lemniscata. . . . .	86
45. Exploración de la superficie con trayectorias combinadas en formación horizontal. . . . .	87
46. Exploración de la superficie con trayectorias combinadas en formación vertical. . . . .	88
47. Exploración de la superficie en formación horizontal. . . . .	88
48. Curvas de Lissajous descritas por (164) para diferentes valores de parámetros. . . . .	89
49. Exploración de la superficie con trayectoria de lissajous 1. . . . .	90
50. Exploración de la superficie con trayectoria de Lissajous 2. . . . .	91
51. Exploración de la superficie en formación vertical. . . . .	91
52. Exploración de la superficie con trayectoria Lissajous en formación vertical. . . . .	92
53. Formación en triángulo de la formación de la red de cuadracópteros. . . . .	92
54. Formación en triángulo de la red de cadracópteros. . . . .	93
55. Exploración de la superficie con trayectoria de Lissajous 2. . . . .	94
56. Detección de objeto. . . . .	95
57. Curva 1 con el objeto variado 10% del área de exploración. . . . .	96
58. Curva 2 con el objeto variado 10% del área de exploración. . . . .	97
59. Curva 1 con el objeto variado 7.5% del área de exploración. . . . .	98
60. Curva 2 con el objeto variado 7.5% del área de exploración. . . . .	99
61. Curva 1 con el objeto variado 5% del área de exploración. . . . .	100
62. Curva 2 con el objeto variado 5% del área de exploración. . . . .	101
63. Curva 1 con el objeto variado 1% del área de exploración. . . . .	102
64. Curva 2 con el objeto variado 1% del área de exploración. . . . .	103
65. Trayectorias de Lissajous. . . . .	104
66. Búsqueda del objeto con la primera curva de Lissajous. . . . .	107
67. Búsqueda del objeto con la segunda curva de Lissajous. . . . .	107

## Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
68. Curva de Lissajous. . . . .	108
69. Búsqueda del objeto con curva de Lissajous en formación horizontal.	109
70. Búsqueda del objeto con curva de Lissajous en formación vertical. .	110
71. Búsqueda del objeto del 0.1%. . . . .	112
72. Curvas de Lissajous. . . . .	114
73. Combinación de las dos curvas de Lissajous con los cuadracópteros.	114
74. Búsqueda del objeto con la combinación de curvas de Lissajous. . .	115
75. Combinación de las dos curvas de Lissajous con los cuadracópteros.	116
76. Combinación de las dos curvas de lissajous con los cuadracópteros.	116
77. Búsqueda del objeto con la combinación de curvas de Lissajous. . .	117
78. Conteo de cajas de la combinación 1. . . . .	118
79. Conteo de cajas de la combinación 2. . . . .	118

## Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Tabla de parámetros físicos del cuadracóptero. . . . .	48
2.	Pruebas de la primera curva de Lissajous. . . . .	105
3.	Pruebas de la segunda curva de Lissajous. . . . .	105
4.	Dimensiones del objeto . . . . .	106
5.	Pruebas con la curva de Lissajous en formación línea hori- zontal. . . . .	110
6.	Pruebas con la curva de Lissajous en formación línea hori- zontal. . . . .	111
7.	Pruebas con la curva de lissajous en formación línea vertical.	111
8.	Pruebas con la curva de lissajous en formación línea vertical.	111
9.	Pruebas con la curva de lissajous formación en línea horizontal.	113
10.	Pruebas con la curva de lissajous formación en línea horizontal.	113

# Capítulo 1. Introducción

---

Desde las formaciones en “V” que adoptan ciertas aves para extender su tiempo de vuelo durante las migraciones, hasta la organización y el nado coordinado de los cardúmenes de peces para reducir el riesgo frente a depredadores, se observa que numerosas especies animales tienden a asociarse de manera natural con el propósito de alcanzar un objetivo o beneficio común que, de forma individual, resultaría inalcanzable.

Estas conductas colectivas no solo incrementan sus posibilidades de supervivencia, sino que también optimizan el uso de la energía, mejoran la eficiencia en la búsqueda de alimento y facilitan la protección del grupo frente a amenazas externas. Dichos comportamientos cooperativos representan ejemplos de estrategias evolutivas exitosas, donde la interacción y coordinación entre individuos se traduce en ventajas adaptativas para la especie en su conjunto.

El intercambio de información generado por las interacciones entre los miembros de estos grupos da lugar a comportamientos colectivos que difieren de los que muestra un individuo aislado, conocidos como *comportamientos colectivos emergentes*.

## 1.1. Motivación

En la naturaleza, muchas especies han desarrollado estrategias colectivas que les permiten mejorar su eficiencia y aumentar sus probabilidades de supervivencia. Ejemplos de ello son las bandadas de aves migratorias, que adoptan formaciones específicas para reducir la resistencia del aire y optimizar el consumo de energía, y los cardúmenes de peces, que nadan de manera coordinada para confundir a los depredadores y aumentar sus posibilidades de escapar. Estos comportamientos emergen a partir de interacciones locales entre individuos y dan lugar a dinámicas grupales altamente organizadas sin la necesidad de un líder centralizado.

Inspirados en estos mecanismos biológicos, en la actualidad, investigadores

en el campo de la robótica buscan trasladar estos principios a la coordinación de vehículos aéreos no tripulados (UAV). La capacidad de replicar la sincronización y formación observada en la naturaleza en enjambres de UAVs representa un avance significativo en la autonomía y eficiencia de estos sistemas. A diferencia de un solo UAV operando de manera independiente, un grupo de UAVs trabajando en formación puede cubrir un área mucho mayor en menos tiempo, lo que resulta particularmente útil en aplicaciones como búsqueda y rescate, patrullaje de fronteras, monitoreo ambiental y exploración de terrenos peligrosos.

El estudio y la implementación de estos comportamientos colectivos en UAVs pueden traer múltiples beneficios, como una mayor eficiencia operativa, reducción de costos y una mayor adaptabilidad a diferentes escenarios. Además, la capacidad de los UAVs para operar en entornos hostiles sin poner en riesgo la vida humana los convierte en una herramienta invaluable para misiones críticas. Sin embargo, la coordinación efectiva de múltiples UAVs requiere modelos matemáticos y estrategias de control avanzadas que permitan mantener la estabilidad y cohesión del grupo, evitando colisiones y optimizando las trayectorias de vuelo.

En este contexto, la teoría de sistemas complejos y el control no lineal ofrecen un marco adecuado para modelar y diseñar estrategias de control que permitan la formación y sincronización de UAVs de manera eficiente y robusta. La exploración de estos principios no solo contribuirá al avance del conocimiento en robótica y automatización, sino que también impulsará el desarrollo de tecnologías innovadoras con aplicaciones directas en diversas industrias y sectores estratégicos.

## **1.2. Justificación**

Con los múltiples comportamientos colectivos observados en la naturaleza como la sincronización y formación. Se desea reproducir estos comportamientos en vehículos aéreos no tripulados, para que posteriormente se emplee el

comportamiento de la formación en labores de búsqueda, patrullaje o rescate.

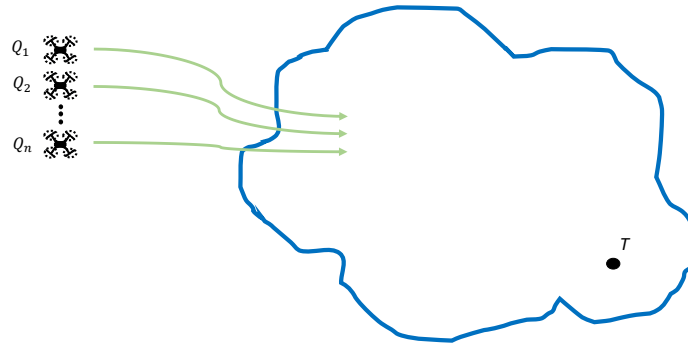
Una ventaja de la aplicación de la formación de vehículos aéreos no tripulados en las labores descritas anteriormente, es que se puede abarcar un área mayor de exploración que si lo hiciera un solo vehículo aéreo no tripulado.

### **1.3. Planteamiento del problema de estudio**

En las últimas décadas, se han desarrollado numerosas propuestas de control orientadas a lograr la formación en robots móviles. Particularmente, la formación en vehículos aéreos no tripulados (UAV) ha despertado un notable interés debido a sus amplias aplicaciones potenciales en ámbitos como el militar, civil y agrícola, entre otros. Estos desarrollos buscan mantener la movilidad del sistema mientras se conserva una estructura de grupo compacto, lo cual ofrece ventajas como la reducción de costos de implementación, mayor robustez y eficiencia del sistema. El cuadracóptero, en particular, se ha empleado para acceder a entornos hostiles donde no se garantiza la seguridad física de los operadores humanos. Su configuración le permite realizar despegues verticales, aterrizajes controlados y maniobras con gran agilidad, lo que ha captado el interés de numerosos investigadores en los últimos años.

Existen diversas técnicas de control aplicables a este tipo de vehículos, entre ellas el control no lineal, control PID, Backstepping, linealización por realimentación dinámica y control por modos deslizantes, como se puede ver en trabajos como los de Adleman (1998) y Lakin *et al.* (2012).

El análisis de los comportamientos colectivos presentes en la naturaleza y su modelado mediante ecuaciones matemáticas ha abierto nuevas oportunidades para su aplicación en el ámbito de la robótica móvil, especialmente en vehículos aéreos no tripulados (UAVs). El objetivo de esta tesis es reproducir dinámicas colectivas observadas en especies animales —como la sincronización y la formación en grupo— para implementarlas en redes de UAVs orientadas a tareas de búsqueda, rescate y patrullaje.



**Figura 1.** Grupo de cuadrcópteros en búsqueda de un objeto.

En la figura 1 se observa la aplicación de la formación y sincronización de una red de cuadrcópteros para la localización de un objeto dentro de una zona en exploración.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Aplicar la teoría de sistemas complejos y control no lineal para generar comportamientos colectivos en grupos de vehículos aéreos no tripulados. En particular, la formación de grupos de robots aéreos tipo cuadrcóptero. Aplicar este comportamiento colectivo será aplicado en tareas de búsqueda, rescate o patrullaje.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Determinar sincronización con análisis numérico en una red de cuadrcópteros con la teoría de sistemas complejos.
- Determinar si se realiza la formación con análisis numérico en una topología de red utilizando cuadrcópteros y la teoría de sistemas complejos.

- Aplicar la formación con análisis numérico, en redes de cuadracópteros a labores de búsqueda, exploración o patrullaje.

### 1.5. Organización de la memoria de tesis

El contenido de esta tesis doctoral se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el **capítulo 2**, se presentan los fundamentos teóricos en los que se basa esta tesis, así como la revisión de la literatura relacionada con los temas abordados, los cuales se emplean para alcanzar los objetivo general y objetivos específicos.

En el **capítulo 3**, se describe el proceso de detección de objetos sobre superficies de búsqueda.

En el **capítulo 4**, se expone el desarrollo de los comportamientos de interés en esta tesis, específicamente la sincronización y la formación de cuadracópteros.

En el **capítulo 5**, se detalla el desarrollo del modelo dinámico que caracteriza a un cuadracóptero, así como el diseño del algoritmo de control utilizado para lograr la formación de vehículos aéreos no tripulados.

En el **capítulo 6**, se presentan los resultados numéricos obtenidos al aplicar la ley de control diseñada, utilizando una red de cuadracópteros en formación y los parámetros definidos en el capítulo anterior.

En el **capítulo 7**, se reportan los resultados numéricos correspondientes a la búsqueda de un objeto en una superficie regular, empleando la red de cuadracópteros en formación y la ley de control desarrollada en el capítulo 6.

Finalmente, en el **capítulo 8**, se exponen las conclusiones generales obtenidas a lo largo del desarrollo de esta tesis, así como las posibles líneas de trabajo futuro.

## Capítulo 2. Antecedentes

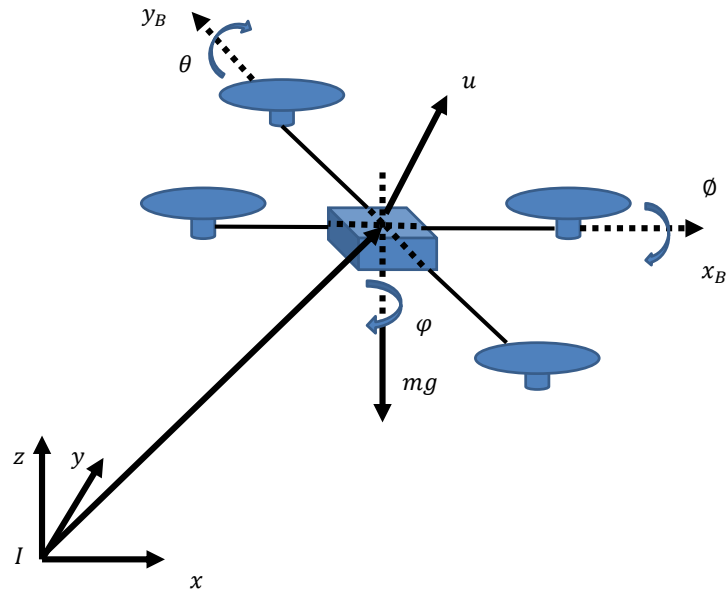
---

### 2.1. Formación de cuadracópteros

El estudio de los comportamientos colectivos observados en la naturaleza y su formalización a través de modelos matemáticos ha generado nuevas perspectivas de aplicación en la robótica móvil, particularmente en los vehículos aéreos no tripulados (UAVs). En este trabajo se plantea como objetivo la reproducción de dinámicas colectivas presentes en organismos animales —tales como la sincronización y la formación en grupo— con el fin de implementarlas en redes de UAVs destinadas a operaciones de búsqueda, rescate y patrullaje en R. Abbas y Wu (2013), utiliza el modelo dinámico del cuadracóptero mediante el método de Newton-Euler:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi), \\
 \ddot{y} &= U_1(\cos\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\phi \cos\varphi), \\
 \ddot{z} &= U_1(\cos\phi \cos\theta) - g + d(t), \\
 \ddot{\phi} &= U_2 l, \\
 \ddot{\theta} &= U_3 l, \\
 \ddot{\psi} &= U_4,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $(x, y, z)$  corresponde a la posición del centro de masa con respecto al marco inercial de origen,  $(\phi, \theta, \varphi)$  representan los tres ángulos de orientación del cuadracóptero,  $U_1$  es el vector de fuerza de empuje sobre el cuerpo del cuadracóptero,  $U_2$ ,  $U_3$  y  $U_4$  corresponden a las entradas de control de los momentos de “roll”, “pitch” y “yaw”, respectivamente,  $g$  es la aceleración gravitacional,  $d(t)$  es una perturbación externa y  $l$  es la distancia del centro de masa al motor, ver la figura 2.



**Figura 2.** Configuración física de un cuadricóptero.

Para el seguimiento de trayectorias se implementó una estrategia de control mediante modos deslizantes, para esto se consideran  $N$  cuadricópteros con el modelo matemático descrito por (1). Se utiliza el vector de estados  $X = [x_{1i} \ x_{2i} \ x_{3i} \ x_{4i} \ x_{5i} \ x_{6i} \ x_{7i} \ x_{8i} \ x_{9i} \ x_{10i} \ x_{11i} \ x_{12i}]^T$  y se reescribe el sistema en espacio de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1i} &= x_{2i}, \\
\dot{x}_{2i} &= U_{1i}U_{xi}, \\
\dot{x}_{3i} &= x_{4i}, \\
\dot{x}_{4i} &= U_{1i}U_{yi}, \\
\dot{x}_5 &= x_6, \\
\dot{x}_{6i} &= x_{4i}\cos x_{7i}\cos x_{9i} - g + d_i(t), \\
\dot{x}_{7i} &= x_{8i}, \\
\dot{x}_{8i} &= lU_{2i}, \\
\dot{x}_{9i} &= x_{10i}, \\
\dot{x}_{10i} &= lU_{3i}, \\
\dot{x}_{11i} &= x_{12i}, \\
\dot{x}_{12i} &= U_{4i}.
\end{aligned} \tag{2}$$

En el cual  $U_{xi}$  y  $U_{yi}$  son el control virtual que gira el vector  $U_{1i}$  para el  $i$ -ésimo cuadracóptero y se describe como sigue:

$$\begin{aligned}
U_{xi} &= \cos x_{7i} \operatorname{sen} x_{9i} \cos x_{11i} + \operatorname{sen} x_{7i} \operatorname{sen} x_{11i}, \\
U_{yi} &= \cos x_{7i} \operatorname{sen} x_{9i} \operatorname{sen} x_{11i} - \operatorname{sen} x_{7i} \cos x_{11i}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Se asume que todas las trayectorias están disponibles para cada cuadracóptero y, en primera instancia, se analiza el movimiento en el eje vertical. Para el sistema anterior de segundo orden se define una nueva superficie de deslizamiento, la cual está dada por:

$$S_{zi} = e_{6i} + \alpha_i e_{5i} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{5i} - x_{5j}), \tag{4}$$

donde  $e_{5i}$  es el error de seguimiento en altitud definido por  $e_{5i} = x_{5i} - x_{5i}^d$ ,  $\alpha_i$  es una constante de valor positivo,  $e_{6i}$  es el error de velocidad de seguimiento definido por:  $e_{6i} = x_{6i} - x_{6i}^d$ ,  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  es  $(i, j)$ th de la matriz de adyacencia. Se considera que la trayectoria deseada para todos los cuadracópteros

( $x_{5i}^d = x_{5j}^d$ ), se reescribe la superficie deslizante (4) como,

$$S_{zi} = e_{6i} + \alpha_i e_{5i} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_{5i} - e_{5j}). \quad (5)$$

Se toma en cuenta que una vez que todos los agentes lleguen a su superficie deslizante  $S_i = \dot{S}_i = 0$ , se obtiene

$$\dot{e}_{6i} + \alpha_i e_{6i} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_{6i} - e_{6j}) = 0. \quad (6)$$

Para obtener la condición suficiente de existencia de la superficie deslizante del sistema (1), se utiliza el siguiente teorema.

**Teorema 2.1** *Considere el sistema (1) Abbas y Wu (2013). Si la entrada de control se diseña como*

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}} (-k_i \operatorname{sgn}(S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_{6i} - e_{6j})), \quad (7)$$

donde  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  es la función signo y  $k_i > 0$ . La superficie de deslizamiento  $S = \dot{S} = 0$  se alcanza cuando  $t \rightarrow +\infty$  y  $x_i \rightarrow x_1^d$ ,  $\dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d$  y  $x_i \rightarrow x_j$ .

Se define una función candidata de Lyapunov como

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_{zi}^T S_{zi}, \quad (8)$$

con  $S_{zi}$  la superficie de deslizamiento sobre el eje z. Derivando  $V$  con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n S_{zi}^T \dot{S}_{zi}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^n S_{zi}^T \dot{S}_{zi}, \\
&= \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [\dot{e}_{6i} + \alpha_i e_{6i} + \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j})],
\end{aligned} \tag{10}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= - \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [k_i \operatorname{sgn}(S_{zi}) - d_i(t)] \\
&\leq \sum_{i=1}^n k S_{zi}^T [\operatorname{sgn}(S_{zi}) - C] \leq - \sum_{i=1}^n S_{zi}^T [k - C],
\end{aligned} \tag{11}$$

y  $C$  es una cota superior de las perturbaciones externas  $d(t)$ . Así que suponiendo y haciendo  $k > C$  entonces

$$\dot{V} \leq 0. \tag{12}$$

Se puede decir que  $\dot{V}$  se satisface y que el modo deslizante ocurre. El control (7) presenta un carácter discontinuo debido a la presencia de la función signo, la cual genera el fenómeno conocido como *chattering*. Con el propósito de mitigar este efecto, se propone una aproximación continua de dicha función, expresada como:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{2}{\pi} \tanh(\eta x) \tag{13}$$

donde  $\eta$  es una constante positiva y la aproximación del error puede disminuir incrementando  $\eta$ . Se reescribe (7) como

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}} (-k_i \tanh(\eta S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_{6i} - e_{6j})). \tag{14}$$

Se siguen los mismos pasos para obtener  $U_{xi}, U_{yi}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i}$  que son dados

por:

$$\begin{aligned}
U_{xi} &= \frac{1}{U_{1i}}(-k_{xi} \tanh(\eta S_{xi}) + \dot{x}_{2i}^d - \alpha_{xi} e_{2i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{2i} - x_{2j})) \\
U_{yi} &= \frac{1}{U_{1i}}(-k_{yi} \tanh(\eta S_{yi}) + \dot{x}_{4i}^d - \alpha_{yi} e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{4i} - x_{4j})) \\
U_{2i} &= \frac{1}{l}(-k_{\phi i} \tanh(\eta S_{\phi i}) + \dot{x}_{8i}^d - \alpha_{\phi i} e_{8i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{8i} - x_{8j})) \quad , \quad (15) \\
U_{3i} &= \frac{1}{l}(-k_{\theta i} \tanh(\eta S_{\theta i}) + \dot{x}_{10i}^d - \alpha_{\theta i} e_{10i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{10i} - x_{10j})) \\
U_{4i} &= -k_{\phi i} \tanh(\eta S_{\phi i}) + \dot{x}_{12i}^d - \alpha_{\phi i} e_{12i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{12i} - x_{12j})
\end{aligned}$$

$S_{xi}, S_{yi}, S_{\phi i}, S_{\theta i}$  y  $S_{\phi i}$  tienen la misma forma que  $S_{zi}$  en (4). Para el control de seguimiento en formación, se plantea una extensión del control definido en (7). La superficie de deslizamiento correspondiente se expresa como:

$$S_{zi} = (x_{6i} - x_{6i}^d) + \alpha_i(x_{5i} - x_{5i}^d) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{5i} - x_{5i}^d) - (x_{5j} - x_{5j}^d). \quad (16)$$

Se define  $d_{ij}$  como la distancia entre los cuadracópteros  $i$  y  $j$  tal que  $d_{5ij} = x_{5i}^d - x_{5j}^d$  a si que (16) se reescribe como

$$S_{zi} = (x_{6i} - x_{6i}^d) + \alpha_i(x_{5i} - x_{5i}^d) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_{5i} - x_{5j} - d_{5ij}), \quad (17)$$

y el control correspondiente esta dado por

$$U_{1i} = \frac{1}{\cos x_{7i} \cos x_{9i}}(-k_i \tanh(\eta S_{zi}) + g + \dot{x}_{6i}^d - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_{6i} - e_{6j})). \quad (18)$$

La superficie deslizante  $S$  alcanzará el modo deslizante cuando  $S = \dot{S} = 0$  y  $x_i \rightarrow x_i^d, \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d, x_i - x_j \rightarrow d_{ij}$ . Se sabe que  $d_{ij}$  es constante, entonces se puede escribir la derivada como

$$\dot{e}_{6i} - \alpha_i e_{6i} - \sum_{j=1}^N a_{ij}(e_{6i} - e_{6j}) = 0. \quad (19)$$

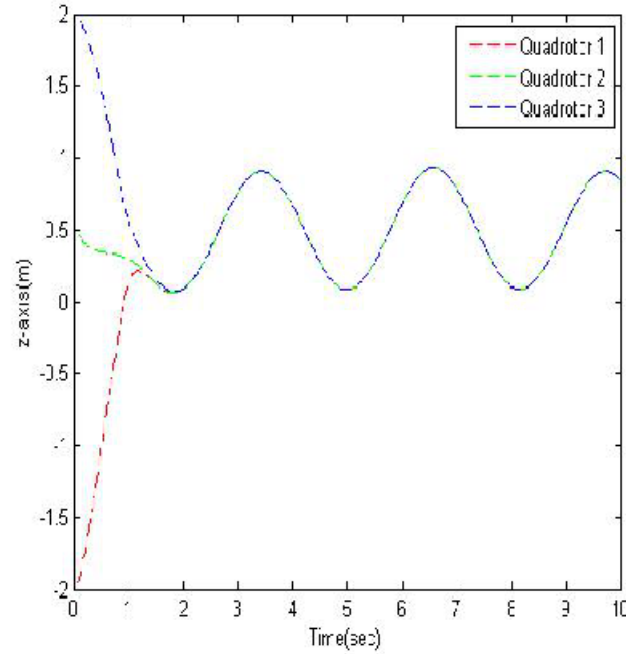
Por lo tanto es similar a lo que se realizó en el Teorema 2.1 que nos dice que  $x_i \rightarrow x_i^d, \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d, x_i - x_j \rightarrow d_{ij}$  con el fin de lograr la formación de múltiples cua-

dracópteros, se siguen los pasos anteriores para obtener  $U_{xi}$ ,  $U_{yi}$ ,  $U_{2i}$ ,  $U_{3i}$ ,  $U_{4i}$ .

El problema se abordó inicialmente mediante la resolución del seguimiento de trayectorias, para lo cual se diseñó una ley de control basada en modos deslizantes y se determinaron las entradas necesarias para garantizar dicho seguimiento. Posteriormente, para implementar la formación, se definió una función que asegura el mantenimiento de una distancia constante entre los cuadracópteros.

La ley de control diseñada para el seguimiento de trayectorias fue modificada para adaptarse a la dinámica de la formación. En cuanto a las posibles perturbaciones, estas fueron rechazadas mediante la selección adecuada de los parámetros involucrados en la ley de control. Los resultados obtenidos a partir de simulaciones numéricas demostraron la eficiencia del control propuesto.

En la figura 3 se presenta una simulación de la sincronización de tres cuadracópteros que se desplazan a lo largo del eje  $z$  con respecto al tiempo, validando así los resultados teóricos expuestos en este trabajo.



**Figura 3.** Simulación de seguimiento de trayectoria de un grupo de 3 cuadracópteros. Abbas y Wu (2013).

N. Koksal *et al.* (2015) consideran en su trabajo el modelo del cuadracóptero Qball-X4, el cual, en su forma simplificada, se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi)}{m}, \\
 \ddot{y}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\sin\phi\cos\psi)}{m}, \\
 \ddot{z}_c &= \frac{(T_1+T_2+T_3+T_4)(\cos\phi\cos\theta)}{m} - g, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{L(T_1-T_2)}{J_x}, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{L(T_3-T_4)}{J_y}, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{K_\psi(T_1+T_2-T_3-T_4)}{J_z}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

donde  $J = [J_x \ J_y \ J_z]^T$  corresponde a la matriz de inercia respecto al marco de referencia de origen;  $L$  representa la distancia entre el centro de gravedad y los motores;  $K_\psi$  denota la ganancia positiva asociada al momento;  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $m$  la masa del cuadracóptero.

$T_i$  es la fuerza de empuje generada por cada motor. Se considera un sistema formado por 3 cuadracópteros  $A_1, A_2, A_3$ . La arquitectura global del controlador se compone de bloques, donde el subbloque  $S_i, i = 1, 2, 3$  representa la dinámica y control de un solo cuadracóptero. Se hacen las siguientes suposiciones:

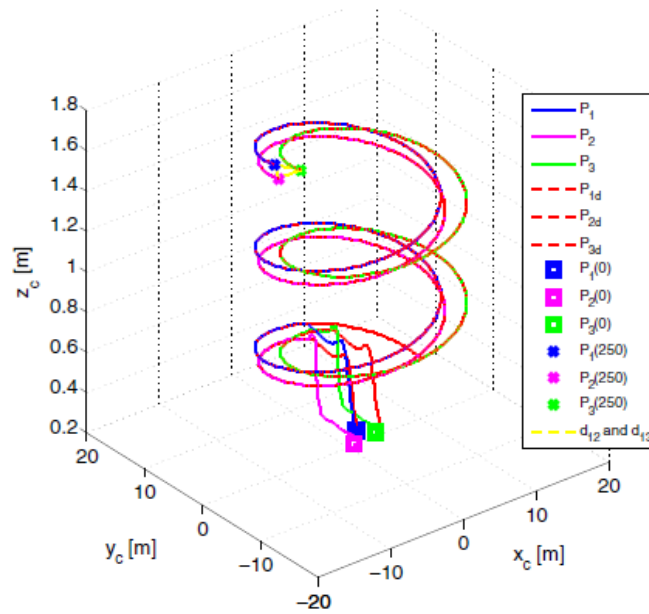
1. Los cuadracópteros se organizan en formación antes de iniciar su movimiento.
2. Durante el desplazamiento, todos los cuadracópteros mantienen una altura constante  $z_c$ , de manera que la formación se encuentra en el plano  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Asimismo, la trayectoria de los cuadracópteros se diseña considerando esta altura constante  $z_c$  y el movimiento en  $P_i(t) = (x_{ci}(t), y_{ci}(t))$ .

Considerando las suposiciones 1 y 2, se generan las posiciones deseadas  $P_{id}(t)$  y ángulos deseados  $U_i = (\phi_{di}, \theta_{di}, \psi_{di}), i = 1, 2, 3$  con respecto a la trayectoria predefinida mediante el líder y manteniendo la distancia entre la formación  $D_F$ . Además, se generan las señales de control  $U_\zeta(t), U_\psi(t)$  y  $U_z(t) \forall(t)$ , para cada cuadracóptero considerando las incertidumbres del sistema como que  $P_i(t)$  siga a  $P_{id}(t)$  para mantener la distancia y forma triangular asintóticamente. Posteriormente, la ley de control para la formación debe satisfacer la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |||r_{ij}| - ||r_{dij}|| = 0, \quad (21)$$

donde  $r_{ij}$  es la posición relativa,  $r_{ij} = -r_{ji}, i = j = 1, 2, 3$  como  $r_{12}(t) = (x_{c1}(t) - x_{c2}(t), y_{c1}(t) - y_{c2}(t))$  y  $r_{dij}$  es la posición deseada entre los otros cuadracópteros. Para lograr la formación, se diseñó un esquema de control en dos niveles: jerárquico y distribuido, incorporando control adaptativo. La estructura propuesta tiene como objetivo mantener la formación de los cuadracópteros en tiempo real. Para compensar los errores derivados de las incertidumbres del sistema, se implementó un controlador LQR que permite la estimación de los parámetros en lazo cerrado. El control de altitud se llevó a cabo mediante un

controlador proporcional-integral-derivativo (PID), mientras que el control del movimiento de rotación se realizó mediante un controlador proporcional (P). A través del esquema combinado de control de altitud y posición, se generaron las señales de entrada que, al integrarse, producen la señal PWM requerida para accionar cada motor del cuadracóptero. El desempeño del algoritmo resultó satisfactorio, logrando mantener la formación de los vehículos. En la figura 4 se presentan los resultados simulados correspondientes al seguimiento de una trayectoria en espiral por parte de tres cuadracópteros.



**Figura 4.** Seguimiento de trayectoria de una espiral por un grupo de 3 cuadracópteros. Abbas y Wu (2013).

En el trabajo realizado por X. Dong *et al.* (2017), se establece un esquema con un líder, considerando que los demás cuadracópteros mantienen una formación previamente definida, la cual se ajusta dinámicamente a lo largo del seguimiento de la trayectoria del líder. La dinámica del líder se describe como sigue:

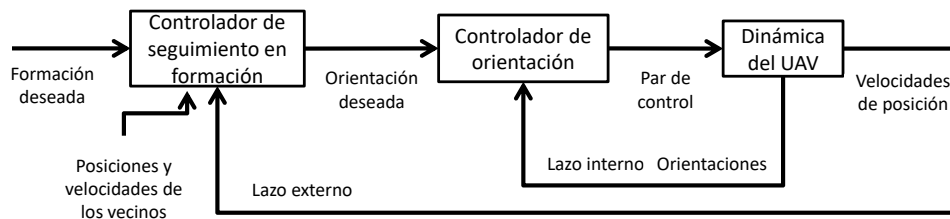
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= v_1(t), \\ \dot{v}_1(t) &= \alpha_x x_1(t) + \alpha_v v_1(t)\end{aligned}\tag{22}$$

donde  $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $v_1(t) \in \mathbb{R}^n$  que es la posición y el vector de velocidad del

líder, con  $n \geq 1$  la dimensión del espacio,  $\alpha_x$  y  $\alpha_v$  las constantes de amortiguamiento. La dinámica de los cuadracópteros seguidores puede ser modelada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \alpha_x x_i(t) + \alpha_v v_i(t) + u_i(t)\end{aligned}\quad (23)$$

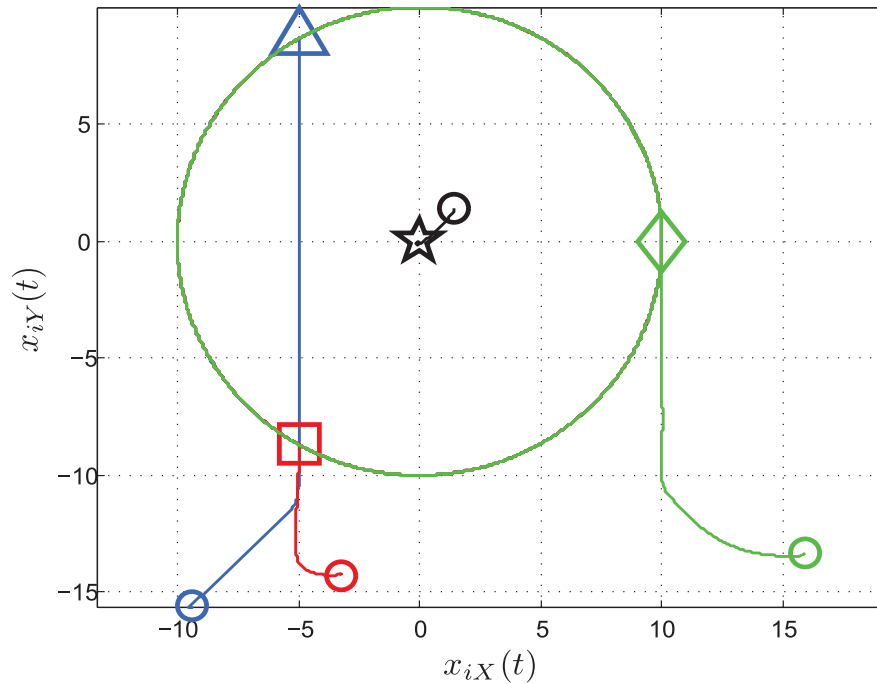
donde  $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_i(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$  corresponde a la posición, velocidad y el vector de entrada de control de seguimiento  $i$  ( $i \in F$ ), respectivamente. La estrategia de formación se implementó mediante el uso de teoría de grafos, aplicada al modelado de la sincronización y el seguimiento de trayectorias en tiempo real, considerando topologías de interacción conmutadas entre los cuadracópteros. En la figura 5 se ilustra el esquema de control en lazo cerrado empleado para garantizar la estabilidad y cohesión de la formación durante el desplazamiento.



**Figura 5.** Representación del esquema de seguimiento de trayectoria implementado en varios cuadracópteros. Dong *et al.* (2017).

El protocolo de comunicación se implementó considerando una topología de vecino más cercano, de manera que cada agente recibe únicamente información de posición de su cuadracóptero adyacente, favoreciendo el control distribuido del enjambre. La localización de cada unidad se obtiene mediante un módulo GPS de alta precisión, complementado con sensores ultrasónicos y un barómetro, lo que permite una estimación robusta y precisa de la altitud tanto en entornos próximos al suelo como a mayores alturas, garantizando la integridad del control de formación y la navegación coordinada.

La dinámica del sistema fue controlada mediante una ley de control clásica tipo PID, implementada para regular las variables de estado relevantes y garantizar la estabilidad durante la interacción entre los cuadracópteros. Los resultados de simulación presentados en la figura 6 validan el comportamiento del sistema y respaldan la efectividad del enfoque propuesto.



**Figura 6.** Simulación de una trayectoria circular. Dong *et al.* (2017).

En el trabajo realizado por D. Ivanov *et al.* (2014), se realiza la formación de un grupo de UAVs considerando que existe un conjunto  $\mathbf{R}$  de cuadracópteros controlados  $r_i \in \mathbf{R}$  ( $i = \overline{1, N}$ ), donde  $N$  es el número de cuadracópteros en un grupo. El estado de cada cuadracóptero  $r_i \in \mathbf{R}$  es descrito por el vector de estado  $s_i(t) = [s_{i,1}(t), s_{i,2}(t), \dots, s_{i,h}(t)]^T$ , donde la variable de estado  $s_{i,h}(t)$  corresponde a las coordenadas del cuadracóptero  $x_i(t), y_i(t), Z_i(y)$ , velocidad, aceleración, “roll”  $\phi_i(t)$ , “pitch”  $\theta_i(t)$  y “yaw”  $\psi_i(t)$  son los ángulos de orientación. La fuerza de acoplamiento de un grupo de cuadracópteros se describe por la siguiente matriz,

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2}(t) & d_{1,3}(t) & \cdots & d_{1,N}(t) \\ - & 0 & d_{2,3}(t) & \cdots & d_{2,N}(t) \\ - & - & 0 & \ddots & \vdots \\ - & - & - & 0 & d_{N-1,N}(t) \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Los elementos  $d_{i,j}(t)$  de la matriz  $D(t)$  representan la distancia entre los cuadracópteros  $r_i$  y  $r_j$  en función del tiempo. Cada cuadracóptero posee su propio controlador, mediante el cual es posible modificar sus coordenadas en respuesta a la señal de control  $u_i(t)$ . Con el objetivo de prevenir colisiones e interferencias mutuas entre los vehículos, se establecen límites en las posiciones permitidas de cada cuadracóptero.

$$|x_i(t) - x_j(t)| \geq \Delta_r, \quad (i \neq j; i, j = \overline{1, N}), \quad (25)$$

donde  $\Delta_r$  es la distancia mínima aceptada entre los cuadracópteros, sin contar con la interferencia entre ellos. La formación deseada  $V$  pertenece a las formaciones  $V_\mu \in V(\mu = \overline{1, N})$  de un simple cuadracóptero. Cada posición  $v_\mu \in V$  es descrita por un punto  $P_\mu(\mu = \overline{1, N})$  con coordenadas  $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$ . No hay información sobre estos puntos, coordenadas y asignaciones entre los cuadracópteros y su posición, la única información disponible es la de la matriz de formación

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,N} \\ - & 0 & d_{2,3} & \cdots & d_{2,N} \\ - & - & 0 & \ddots & \vdots \\ - & - & - & 0 & d_{N-1,N} \\ - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

En la matriz  $D_f$ , cada variable  $d_{i,j}$  representa la distancia entre los puntos  $p_i$  y  $p_j$ , correspondientes a las posiciones  $v_i$  y  $v_j$  dentro de la formación. Se propone un método para la organización de los cuadracópteros denominado "método

de círculos”, en el cual se selecciona inicialmente una posición  $v_\mu$  y un cuadracóptero  $r_i$  que servirá como referencia para iniciar la formación. El punto  $p_c$  corresponde al centro del grupo y se define mediante el vector de radio  $\vec{l}_c$ .

$$\vec{l}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{l}_i. \quad (27)$$

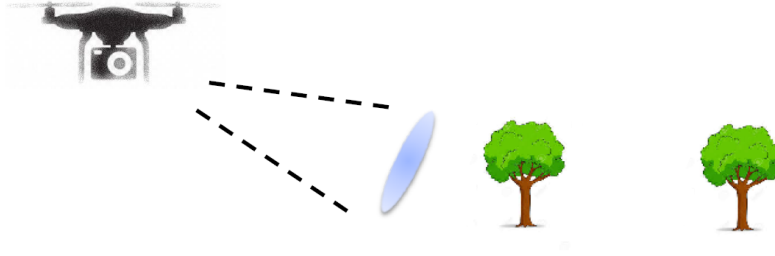
En el segundo paso se asigna una posición deseada  $v_2$  y se determina la posición  $p_2$ . Para esto se formó un círculo  $c_{1,2}$  con el centro en el punto  $p_1$  y radio  $d_{1,2}$  de la matriz  $D_f$ , como se muestra en la figura 7. Entonces se construyen  $N-1$  líneas rectas, que pasan a través del punto  $p_1$  y la posición actual de los cuadracópteros  $r_i (i = \overline{2, N})$ . Para poder determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas y el círculo  $c_{1,2}$  para cada cuadracóptero  $r_i (i = \overline{2, N})$  se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (y_1 - y_i)x_2 - (x_1 - x_i)y_2 + (x_1y_i - x_iy_1) &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= d_{1,2}^2 \quad i \in [\overline{2, N}] \end{aligned} \quad (28)$$

y se obtiene la raíz de  $(x_2, y_2)$  para cada  $r_i (i = \overline{2, N})$ . Entonces se calcula la distancia entre los cuadracópteros  $r_i (i = \overline{2, N})$  y sus puntos  $(x_2, Y_2)$  como

$$l_{1,2} = \sqrt{(x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2}, \quad i \in [\overline{2, N}]. \quad (29)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia  $\min(l_{2,i}), i \in \overline{2, N}$  se le asigna la posición deseada  $v_2$  y el punto  $p_2$  con las coordenadas  $(x_2, y_2)$  como se muestra en la figura 7.



**Figura 7.** Localización del punto  $p_2(x_2, y_2)$ . Ivanov *et al.* (2014).

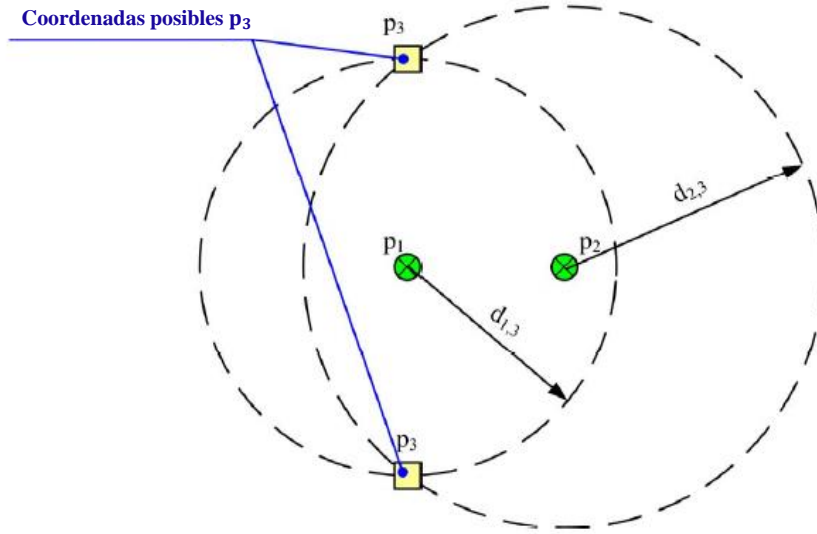
En el tercer paso se determina las coordenadas del punto  $p_3(x_3, y_3)$  con la posición  $v_3$ . Para lograr esto, se construyen dos círculos  $c_{1,3}$  y  $c_{2,3}$ , el primer círculo tiene su centro en el punto  $p_1$  y su radio en  $d_{1,3}$ , el segundo círculo tiene su centro en  $p_2$  y su radio en  $d_{2,3}$ . Se encuentran los puntos de intersección que generalmente son dos. Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de los dos círculos para cada cuadracóptero  $r_i(i = \overline{3, N})$  se usan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 &= d_{1,3}^2, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= d_{2,3}^2, \end{aligned} \quad i \in [\overline{3, N}]. \quad (30)$$

Generalmente, hay dos raíces para  $(x_3, y_3)$ . Se calcula la distancia  $l_{3,1}[i = \overline{3, N}]$  entre los cuadracópteros  $r_i(i = \overline{3, N})$  y cada una de las raíces de  $(x_3, y_3)$ .

$$l_{3,i} = \sqrt{(x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2} \quad i \in [\overline{3, N}]. \quad (31)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia  $\min(l_{3,i}), i \in \overline{3, N}$  se le asigna la posición deseada  $v_3$  y el punto  $p_3$  con las coordenadas  $(x_3, y_3)$  como se muestra en la figura 8.



**Figura 8.** Localización del punto  $p_3(x_3, y_3)$  de la posición  $v_3$ . Ivanov et al. (2014).

En cada paso, se determinan las coordenadas  $p_\mu (\mu = \overline{4, N})$  de la posición  $v_\mu$  se construyeron tres círculos  $c_{\mu-3,\mu}, c_{\mu-2,\mu}, c_{\mu-1,\mu}$ . El primer círculo  $c_{\mu-3,\mu}$  tiene su centro en el punto  $p_{\mu-3}$  y su radio en  $d_{\mu-3,\mu}$ , el segundo círculo  $c_{\mu-2,\mu}$  tiene su centro en el punto  $p_{\mu-2}$  y su radio en  $d_{\mu-2,\mu}$  y el tercer círculo  $c_{\mu-1,\mu}$  tiene su centro en el punto  $p_{\mu-1}$  y su radio en  $d_{\mu-1,\mu}$ . Se encuentran los puntos de intersección entre los círculos pero, generalmente existen solo dos. Se determina las coordenadas de intersección de los círculos con las siguientes ecuaciones:

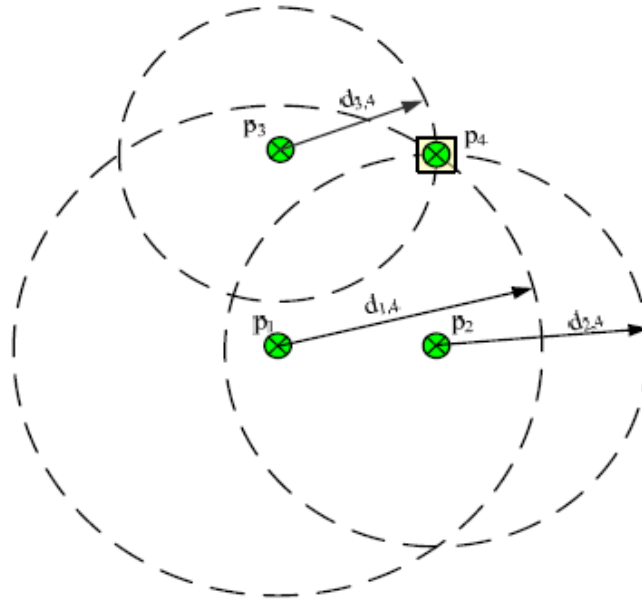
$$\begin{aligned} (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 &= d_{k-1,k}^2 \\ (x_k - x_{k-2})^2 + (y_k - y_{k-2})^2 &= d_{k-2,k}^2, \\ (x_k - x_{k-3})^2 + (y_k - y_{k-3})^2 &= d_{k-3,k}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

se calcula la distancia  $l_{k,i} [i = \overline{k, N}]$  entre los cuadracópteros  $r_i (i = \overline{k, N})$  y las raíces de  $(x_k, y_k)$

$$l_{k,i} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}, \quad i \in [\overline{k, N}]. \quad (33)$$

Al cuadracóptero con la mínima distancia  $\min(l_{k,i}), i \in \overline{k, N}$  se le asigna la posición deseada  $v_k$  y el punto  $p_k$  con las coordenadas  $(x_k, y_k)$ . En la figura 9

se muestra la definición de punto  $p_4(x_4, y_4)$  y la posición  $v_4$ .



**Figura 9.** Localización del punto  $p_4(x_4, y_4)$  de la posición  $v_4$ . Ivanov *et al.* (2014).

El cálculo de las posiciones ( $v_5, v_6, \dots, v_N$ ) para un número mayor de cuadracópteros se realiza de manera análoga. Los cuadracópteros se comunican entre sí mediante Wi-Fi y utilizan su sistema de navegación para determinar la posición relativa de cada uno, todo ello coordinado por un programa que incorpora la ley de control correspondiente. Es fundamental conocer las coordenadas de cada cuadracóptero en el espacio; aunque el algoritmo presenta alta complejidad computacional, permite generar diversas formaciones y controlar múltiples vehículos simultáneamente. Los resultados experimentales se muestran para un grupo de tres cuadracópteros volando en un plano horizontal a una altitud de 1 metro, como se ilustra en la figura 10.



**Figura 10.** Demostración experimental de un grupo de 3 cuadracópteros. Ivanov *et al.* (2014).

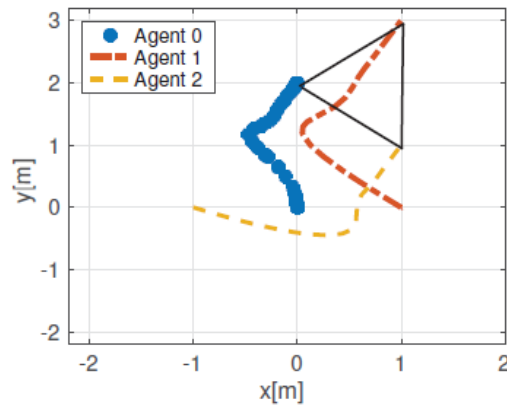
En el trabajo realizado por P. Flores-Palmeros *et al.* (2019) se afronta el problema de la formación de  $n$  vehículos aéreos no tripulados, para ello hace se considera en modelo no lineal dinámico de un cuadracóptero de Newton-Euler que es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -\text{sen}\theta \frac{1}{m} U_1 \\
 \ddot{y} &= \text{cos}\theta \text{sin}\psi \frac{1}{m} U_1 \\
 \ddot{z} &= \text{cos}\theta \text{cos}\psi \frac{1}{m} U_1 - g \\
 \ddot{\psi} &= \dot{\theta} \dot{\psi} \frac{I_y - I_z}{I_x} - \frac{I_r}{I_x} \dot{\theta} \Omega + \frac{l}{I_x} U_2 \\
 \ddot{\theta} &= \dot{\theta} \dot{\phi} \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{I_r}{I_y} \dot{\psi} \Omega + \frac{l}{I_y} U_3 \\
 \ddot{\phi} &= \dot{\theta} \dot{\phi} \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{l}{I_z} U_4
 \end{aligned} \tag{34}$$

Para el diseño de la ley de control se trabaja con el modelo dinámico mediante la ayuda de un vector de estados, el control diseñado para este modelo es control mediante backstepping.

Para el algoritmo de interconexión con los demás agentes se apoya en la teoría de grafos, con la ayuda de las matrices de asociación que describen a un grafo como los son la matriz de grado y de adyacencia.

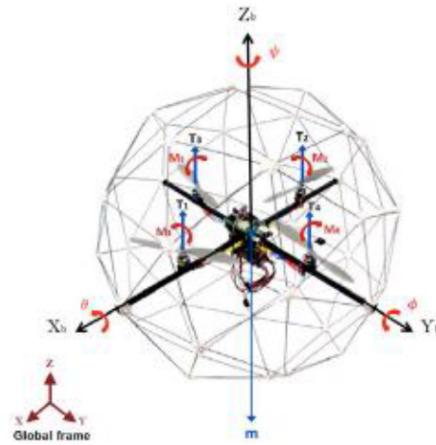
A continuación se muestran algunas simulaciones en el cual se cuenta con 3 agentes y se desea que tengan una formación en triángulo.



**Figura 11.** Formación en triángulo de un grupo de 3 agentes. Flores-Palmeros *et al.* (2019).

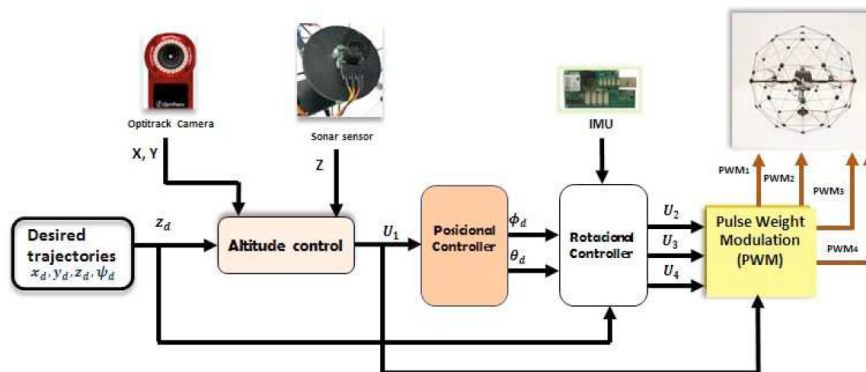
El algoritmo con base al control backstepping para lograr el vuelo formación entre agentes aéreos, ha sido probado para controlar la posición de tres agentes, la estrategia de control se obtuvo en detalle mostrando la estabilidad mediante el análisis a través de la teoría de Lyapunov.

En el trabajo realizado por A. Toledo (2018) se propone un controlador integral backstepping con modos deslizantes para un vehículo aéreo no tripulado. El enfoque se realiza en la altitud y posición. El modelo dinámico que se emplea es de Newton-Euler, el cual permite dividir el sistema general en dos subsistemas uno de traslación y otro de orientación. Además, se realizan pruebas experimentales empleando un cuadracóptero Qball-X4, ver figura 12.



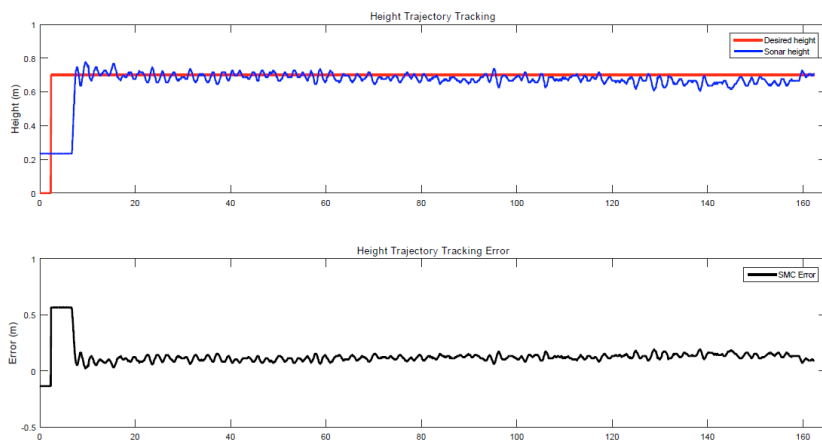
**Figura 12.** Diagrama del cuadracóptero. Flores-Palmeros *et al.* (2019).

Aprovechando el control diseñado, el esquema del controlador propuesto para la experimentación se muestra en la siguiente figura 13 que incluye los sensores que se utilizan para medir la posición.

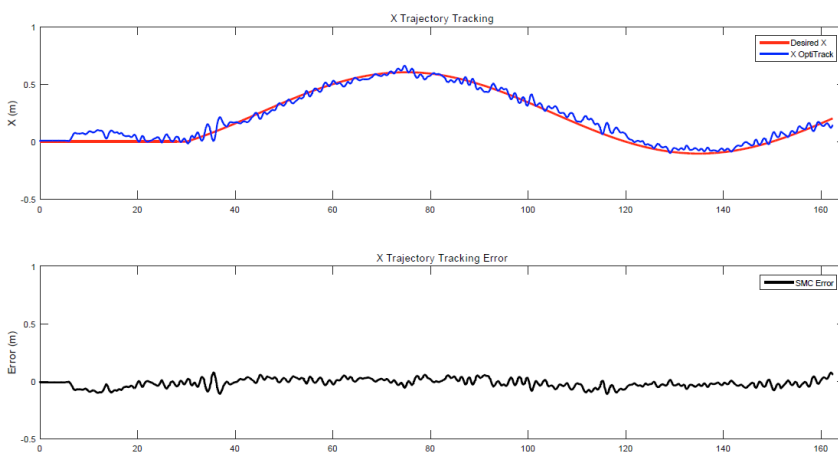


**Figura 13.** Estructura de control del cuadracóptero. Flores-Palmeros *et al.* (2019).

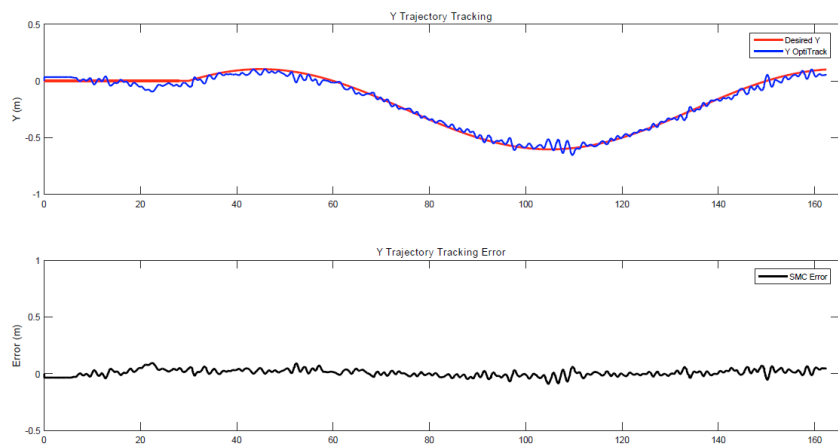
Los resultados de los experimentos son mantener la altura a trayectoria constante deseada mientras que el desplazamiento en el eje X y Y rastrean referencias de posición que varían en el tiempo. El control propuesto así como las ganancias obtenidas son para que el cuadracóptero realice una trayectoria circular de 1.4 metros de diámetro y na altura de 0.7 metros. Los resultados experimentales se muestran a continuación en la figura 16.



**Figura 14.** Seguimiento en altura del cuadracóptero.



**Figura 15.** Seguimiento en la posición X del cuadracóptero.



**Figura 16.** Seguimiento en la posición Y del cuadracóptero.

## 2.2. Sistemas complejos

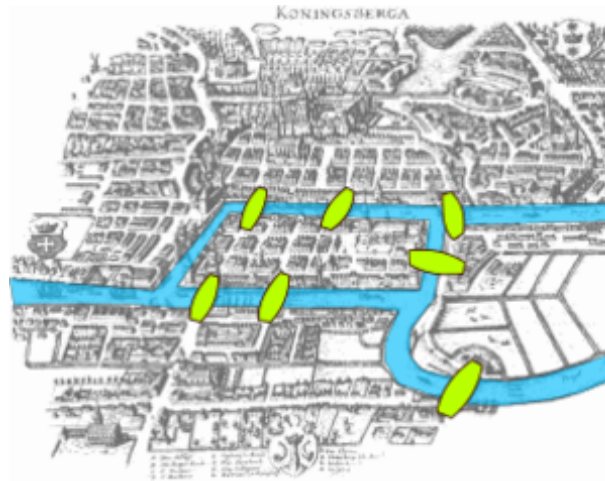
Actualmente, el ser humano tiende a abordar las actividades desde una perspectiva simplificada, sin considerar la complejidad inherente de los fenómenos. Sin embargo, en los últimos años esta visión ha cambiado, ya que investigaciones acumuladas han demostrado que los sistemas y procesos no son tan simples como se suponía inicialmente. Von Bertalanffy introdujo la teoría de sistemas, definiendo un sistema como un “conjunto” de componentes interrelacionados que constituyen una totalidad organizada, caracterizada por la interacción, integración, mecanización, centralización, competencia y finalidad. De ello se deduce que todo sistema, por su propia naturaleza, es complejo. Un sistema complejo se define como aquel que cuenta con un gran número de elementos, bloques de construcción o agentes capaces de intercambiar estímulos entre sí y con su entorno, generando así comportamientos emergentes a nivel del sistema.

La interacción entre los elementos de un sistema puede ocurrir únicamente entre vecinos inmediatos o incluir también a elementos más distantes. Los agentes pueden ser idénticos o heterogéneos, y pueden moverse libremente en el espacio o permanecer en posiciones fijas, así como encontrarse en un solo estado o en múltiples estados posibles. Una característica común de los sistemas complejos es que muestran organización sin la necesidad de un principio de control externo. En la mayoría de los casos, los agentes son capaces de aprender de experiencias pasadas y ajustar sus estados en consecuencia. La adaptación y la robustez suelen surgir como subproductos del sistema, de manera que incluso si una parte se altera, el sistema puede continuar funcionando. Para analizar el comportamiento de los sistemas complejos, se han empleado modelos dinámicos no lineales, ecuaciones diferenciales y análisis de series temporales. Asimismo, se ha recurrido a la teoría de redes y, dependiendo del contexto, a modelos provenientes de otras disciplinas como la economía, la biología e incluso la sociología. Existen algoritmos matemáticos que sustituyen a las ecuaciones diferenciales; aunque no son tan precisos, permi-

ten aproximar el comportamiento del modelo original (ver, por ejemplo, Lakin et al., 2012; Ottino, 2003; Munné, 2005; Adleman, 1998; Bar-Yam, 1997).

### 2.3. Teoría de grafos

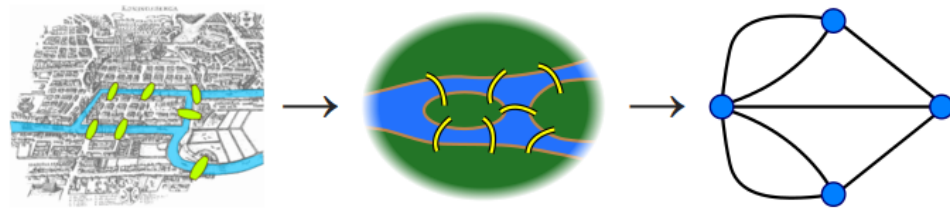
La teoría de grafos comenzó con la solución del problema de los siete puentes de Königsberg, un célebre problema matemático, resuelto analíticamente por Leonhard Euler en 1736. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado. Esta ciudad la atraviesa el río Pregel, el cual bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo la ciudad en cuatro regiones, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel, ver la figura 17.



**Figura 17.** Los siete puentes de Königsberg en la ciudad de Königsberg en 1976. Diestel (2024).

El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo punto de inicio. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en el año 1736 en su publicación "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" demostró una solución

generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg. A los puntos se les llama nodos y a las líneas conexiones o aristas. Euler recurrió a una abstracción del mapa, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, transite por todas las líneas una única vez, y regrese al mismo punto de partida, ver figura 18.



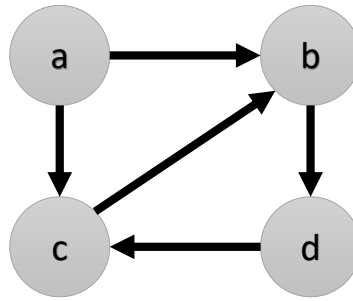
**Figura 18.** Abstracción de la ciudad de Königsberg.

La publicación que realizó Euler fue la primera que hizo alusión a una geometría en que sólo interesan las propiedades estructurales de los objetos y no sus medidas, como tradicionalmente se hacía. De aquí el nacimiento de la rama de las matemáticas, llamada *topología*.

## 2.4. Tipos de grafos

### Grafo dirigido

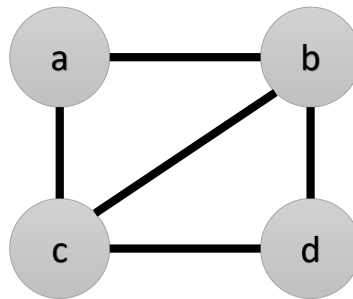
En este tipo de grafo las conexiones que unen dos nodos entre si se encuentra con dirección (una dirección), ver figura 19.



**Figura 19.** Grafo dirigido transmisión de información unidireccional entre nodos.

### Grafo no dirigido

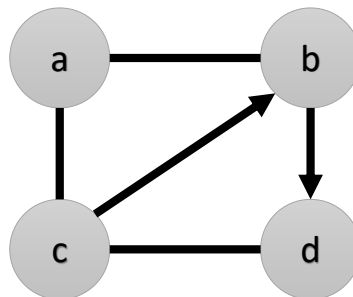
Es grafo, con conexiones en ambas direcciones entre nodos, ver figura 20.



**Figura 20.** Grafo no dirigido, donde el flujo de la información es en ambos sentidos entre nodos.

### Grafo mixto

Es un grafo que contiene tanto conexiones dirigidas y no dirigidas, se denomina grafo mixto.



**Figura 21.** Grafo mixto.

## 2.5. Matrices asociadas a un grafo

Se emplean diversas matrices para representar la estructura de las conexiones, el grado de los nodos y otras propiedades asociadas a un grafo. A continuación, se presentan estas matrices:

### Matriz de adyacencia $E(G)$

Es una matriz de  $n \times n$  donde  $n$  representa el número de nodos del grafo. Se forma con unos y ceros, representa las conexiones entre los nodos y está dada de la siguiente manera,

$$E(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ tiene conexión con el nodo } j, i \neq j, \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (36)$$

### Matriz de grado $D(G)$

Es una matriz con solo valores en la diagonal de dimensión  $n \times n$ , representa el número de vecinos que tiene cada nodo. Los elementos de la diagonal  $d_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , están dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } (i = j) \in E(G) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (37)$$

donde  $d_i$  es el grado del nodo  $i$ .

### Matriz laplaciana $L(G)$

Es igual a la matriz de grado menos la matriz de adyacencia

$$L(G) = D(G) - A(G), \quad (38)$$

en el cual, los elementos de  $L(G)$  son  $l_{ij}$  y están determinados por

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } (ij) \in E(G) \\ d_i, & \text{si } (i = j) \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (39)$$

### **Matriz de acoplamiento $A(G)$**

Es una matriz en la cual, todos los valores de la diagonal son negativos o cero en caso de no contener ninguna conexión. Es utilizada para describir un grafo y se forma de la siguiente manera,

$$A(G) = E(G) - D(G) = -L(G) \quad (40)$$

## **2.6. Comportamientos colectivos en la naturaleza**

La interacción entre los elementos de un sistema puede producirse tanto entre vecinos inmediatos como entre aquellos más distantes. Los agentes que lo conforman pueden ser idénticos o distintos, tener movilidad en el espacio o permanecer en posiciones fijas, y encontrarse en un solo estado o en múltiples estados. Una característica común de los sistemas complejos es que generan organización sin la intervención de un principio externo de formación. En la mayoría de los casos, los agentes son capaces de aprender de su historia pasada y ajustar sus estados en consecuencia. De este modo, la adaptación y la robustez suelen emerger como propiedades inherentes: incluso si parte del sistema se altera, este puede continuar funcionando.

Para analizar el comportamiento de los sistemas complejos se emplean modelos dinámicos no lineales, ecuaciones diferenciales y análisis de series de tiempo. También se recurre a la teoría de redes y, según el tipo de problema, a modelos de otras disciplinas como la economía, la biología e incluso

la sociología. Asimismo, existen algoritmos matemáticos que sustituyen a las ecuaciones diferenciales. Aunque menos precisos, estos permiten aproximar el modelo original (véanse, por ejemplo, Lakin et al., 2012; Ottino, 2003; Munné, 2005; Adleman, 1998; Bar-Yam, 1997).

### **2.6.1. Ejemplos de comportamientos colectivos en la naturaleza**

El concepto de comportamiento colectivo se emplea generalmente para referirse a los eventos y procesos sociales que no se desarrollan de forma organizada, si no que surgen de forma espontánea. Esto ocurre tanto en los comportamientos de los seres humanos y los animales.

#### **Las Hormigas**

Uno de los ejemplos más representativos de comportamientos colectivos en animales es la formación de rutas mediante el uso de feromonas, como ocurre en las hormigas. Muchas de estas especies depositan sustancias químicas, llamadas feromonas, para trazar un camino que conecte la fuente de alimento con el nido. Tras localizar el alimento, la hormiga regresa al nido deteniéndose en intervalos regulares para dejar pequeñas cantidades de feromonas a lo largo de la ruta. Este recorrido se repite varias veces, reforzando progresivamente la trayectoria mediante la deposición adicional de feromonas. Gracias a este mecanismo de refuerzo positivo, el rastro químico se acumula, y en un breve período se establece un camino constante de hormigas entre la fuente de alimento y el nido. A pesar de la simplicidad de este comportamiento, las rutas marcadas con feromonas son suficientes para guiar a la mayoría de las hormigas hacia el nido utilizando el camino más corto, lo que proporciona un beneficio colectivo a la colonia. Beckers (1992) realizó un experimento con colonias de hormigas hambrientas colocando dos rutas alternativas desde el nido hasta la fuente de alimento, una de las cuales era un 40% más larga que la otra. Treinta minutos después de que la primera hormiga encontró el alimento, se contabilizó el número de hormigas en cada camino. Los resultados mostraron que, en 16 de los 20 experimentos, más del 80% de las hormigas

eligieron el camino más corto (Couzin *et al.*, 2002), demostrando cómo un comportamiento individual simple puede generar una coordinación eficiente a nivel grupal.



**Figura 22.** Comportamiento colectivo en las hormigas. Fuente:www.asknature.org.

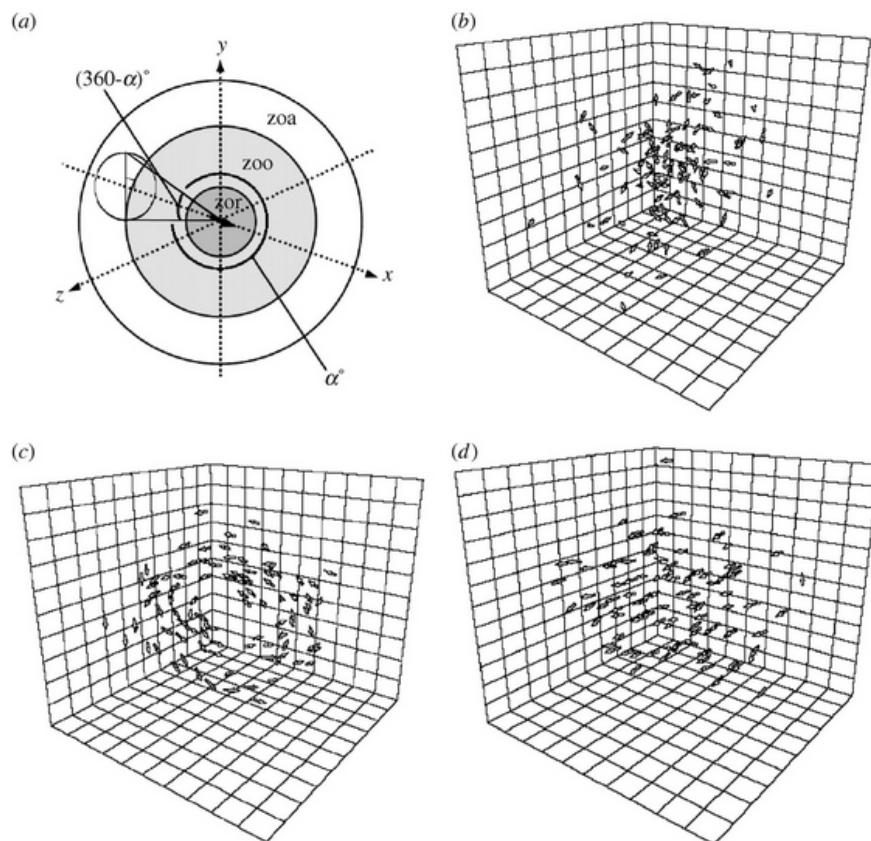
### **Aves, peces**

Otro ejemplo común en la naturaleza, y que hemos podido observar en diversas ocasiones, son las formaciones en “V” de las aves (ver figura 24), las cuales les permiten prolongar el tiempo de vuelo y conservar energía para alcanzar su destino. De manera similar, los bancos de peces presentan formaciones colectivas (ver figura 25) de diferentes tamaños y configuraciones, que les facilitan evadir ataques de depredadores. Estos grupos suelen estar compuestos por miles de individuos, en ocasiones más de 5,000 peces. A pesar de la variedad de formas y movimientos que pueden adoptar estos grupos, los patrones colectivos emergen a partir de pequeñas variaciones en las reglas que sigue cada miembro del grupo. Iain D. Couzin propone un modelo en el que cada animal sigue tres reglas básicas:

1. Alejarse de los vecinos cercanos para evitar colisiones.
2. Adoptar la misma dirección que los individuos cercanos.
3. Evitar aislarse del grupo.

De este modo, cada individuo se encuentra en tres zonas: la zona de repulsión, la zona de alineación y la zona de atracción. Manteniendo constantes los

radios de repulsión y atracción, se observó que al variar el radio de alineación los grupos exhiben comportamientos colectivos significativamente distintos, lo que evidencia cómo pequeñas modificaciones en las interacciones locales pueden generar patrones complejos a nivel grupal. Los patrones colectivos observados varían desde un enjambre estacionario, hasta un “torus” en el que los individuos se disponen formando un círculo alrededor de su centro de masa, y finalmente un grupo paralelo que se desplaza en la misma dirección. Estos tres comportamientos distintos emergen como respuesta a pequeños ajustes de un único parámetro: el radio de alineación entre los individuos. La figura 23 presenta una ilustración de estos patrones.



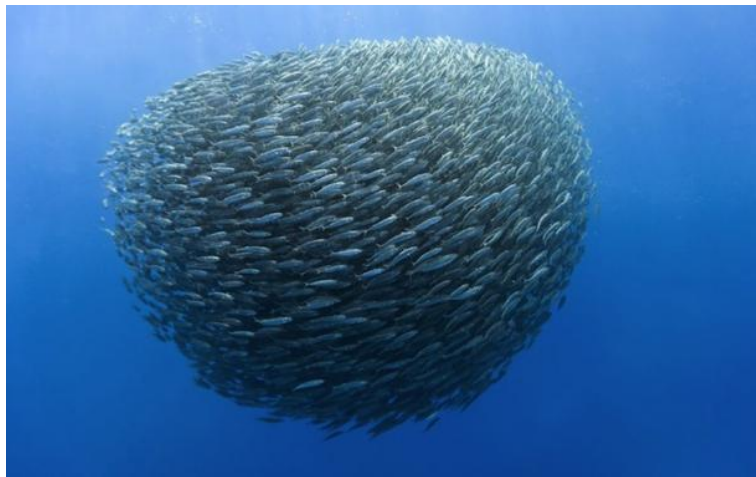
**Figura 23.** a) Zonas que gobiernan a un pez. b) Enjambre estacionario. c) Torus. d) Grupo paralelo moviéndose en la misma dirección. Fuente: [www.rstb.royalsocietypublishing.org](http://www.rstb.royalsocietypublishing.org).

Si los comportamientos colectivos observados en diferentes grupos de animales pueden ser descritos mediante principios matemáticos, es posible representarlos a través de modelos que permitan su simulación e incluso la aplicación de leyes de control. Esto abre la posibilidad de reproducir dichos compor-

tamientos en grupos de robots, emulando la coordinación y la dinámica que se observa en la naturaleza.



**Figura 24.** Comportamiento colectivo de las aves. Fuente: [www.es.gizmodo.com](http://www.es.gizmodo.com).



**Figura 25.** Comportamiento colectivo de los peces. Fuente: [www.bashny.net](http://www.bashny.net).

## **Conclusiones del capítulo**

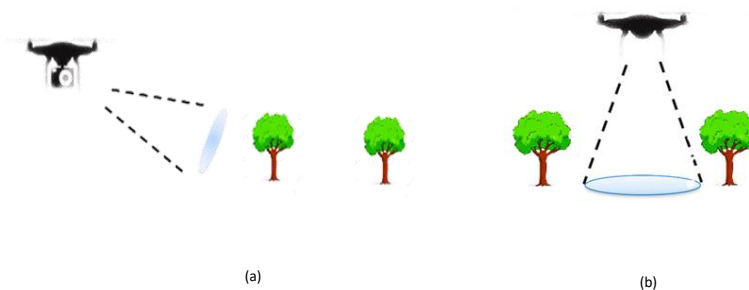
Con la consulta que se ha hecho mediante el estado del arte de algunos trabajos que se han realizado sobre la formación de vehículos aéreos no tripulados (UVAs), se considera que con ayuda de la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos se puede diseñar una ley de control no lineal como el backstepping. Con el comportamiento colectivo observado en la naturaleza en especial la formación se desea reproducirlo en un grupo de agentes, en este un vehículo aéreo no tripulado de tipo cuadracópteros.

## Capítulo 3. Detección de objetos

---

Los vehículos aéreos no tripulados se han aplicado ampliamente en los campos tanto militar como civil. Es efectivo y oculto para que realicen muchas tareas, como el seguimiento de objetivos, el monitoreo de regiones y la búsqueda. Porque proporcionan una amplia visión de grandes áreas a gran altura. Entre esas tareas, el seguimiento continuo de objetivos es una aplicación importante y desafiante, especialmente cuando la vista de la red de UVAs es limitada en el entorno. Muchas tecnologías se emplean en el seguimiento de objetivos, incluida la localización y predicción de objetivos basada en la información de múltiples sensores, métodos de seguimiento de trayectorias y el control colaborativo para múltiples UVAs.

Una aplicación de los vehículos aéreos no tripulados es en la búsqueda de un objetivo, en el ámbito de la seguridad de una propiedad, la policía los ha empleado como medio de búsqueda de un objetivo, en este caso un invasor que entra a un área, este es localizado con ayuda de la cámara que posee el vehículo aéreo no tripulado. La cámara que porta el vehículo aéreo puede estar citada por lo general en dos posiciones, una en la cual mira hacia enfrente y otra en la cual la cámara esta observando hacia la parte de abajo del vehículo, como se muestra en la figura 26 .



**Figura 26.** (a) Posición de la cámara vertical (b) Posición de la cámara horizontal.

Para la detección de un objeto dentro de un área de búsqueda se emplea un solo vehículo aéreo no tripulado con ayuda del campo de visión FOV de sus siglas en inglés (Field Of View) que porta la cámara. Una estrategia para abarcar mas área de búsqueda seria con mas vehículos aéreos no tripulados para ello se podrían explorar la superficie pero en formación. Se puede emplear la formación de los UVAs de sus siglas en inglés (Unmanned Aerial Vehicle) con trayectorias dentro del aérea para localizar el objeto, ya sea que alguno de los UVAs pase por encima del objeto o se determine un área de visión (FOV) de cada vehículo aéreo no tripulado y el objeto se encuentre dentro del ángulo de visión del mismo.

El problema de la formación se define como la coordinación de un grupo de robots para mantener una formación específica al realizar una actividad, las áreas de aplicación actuales de la formación incluyen operaciones de búsqueda y rescate, búsqueda en minas terrestres, exploración espacial y de terrenos remotos, control en conjuntos de satélites y vehículos aéreos no tripulados (UAVs).

La formación de patrones también se observa en varias especies de animales como resultado de la cooperación. Las conductas activas entre sus miembros, donde los individuos se mantienen en una orientación específica y la distancia entre sí mientras se mueven, o llenar un área específica lo mas posible. Ejemplos de la formación en los animales incluyen bandadas de pájaros, banco de peces y hormigas formando cadenas, Bahceci *et al.* (2003).

### **Conclusiones del capítulo**

Para la detección de objetos en un área empleando vehículos aéreos no tripulados, se considera la posición en que se encuentra colocada la cámara que localizara estos objetos, así como también el área de visión con que cuenta dicha cámara para detectar el objeto y su mejor aprovechamiento es en posición horizontal.

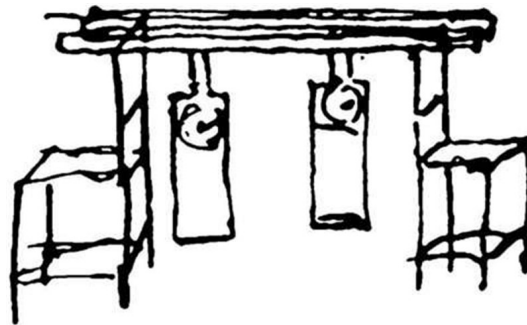
## Capítulo 4. Sincronización y formación

---

Con los comportamientos colectivos observados en la naturaleza como la sincronización y formación. Se desea reproducir estos comportamientos en vehículos aéreos no tripulados, para posteriormente se emplee el comportamiento de la formación en labores de búsqueda, patrullaje o rescate, por un grupo de UAVs.

### 4.1. Sincronización

Reconocido por Christiaan Huygens en 1665, el fenómeno de la sincronización es muy abundante en la naturaleza, ciencia, ingeniería y vida social. Él descubrió que un par de relojes de péndulo colgando de un soporte común, sincronizaban con el paso del tiempo sus oscilaciones haciéndolas coincidir perfectamente, mientras que los péndulos se movían siempre en sentidos contrarios, ver la figura 27.



**Figura 27.** Experimento de Huygens en 1665. Fuente: Pikovsky *et al.* (2003).

Huygens relató con notable precisión su descubrimiento acerca de la sincronización. Al suspender dos relojes de péndulo en una misma viga de madera, notó que ambos terminaban oscilando en oposición, pero de manera perfectamente coordinada: sus movimientos nunca perdían concordancia y los sonidos se percibían de forma simultánea. Incluso cuando esa armonía se alteraba por alguna perturbación externa, volvía a restablecerse en poco tiempo. Aunque inicialmente le resultó un fenómeno sorprendente, tras un análisis detallado concluyó que la causa estaba en el movimiento casi imperceptible de la viga.

Las oscilaciones de los péndulos transmitían energía a la estructura, la cual, a su vez, inducía que ambos alcanzaran un estado de equilibrio estable en el que uno se movía exactamente en sentido contrario al otro, persistiendo así hasta que cesaba la vibración de la viga (Pikovsky *et al.*, 2003).

En términos generales, la sincronización se presenta cuando distintos individuos coordinan sus acciones para comportarse de manera uniforme a lo largo del tiempo. Este fenómeno se observa en diversos procesos colectivos, como el vuelo en formación de aves, el desplazamiento de un cardumen de peces o la orientación conjunta de partículas. Al igual que otros patrones colectivos, la sincronización puede ser explicada mediante modelos matemáticos que describen cómo surge a partir de las interacciones entre los elementos individuales, lo cual permite, además, aplicar técnicas de control sobre dichos sistemas. El grupo de estos individuos se representa como siguiente forma:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (41)$$

Wang en Wang (2002) establece que un grupo de  $N$  nodos sincroniza completa y asintóticamente si,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (42)$$

donde  $x_i \in \mathfrak{R}^n$  representa los estados del nodo  $i$ . Si se define el error de sincronía entre los nodos  $i$  y  $j$  como  $e_{ij} = x_i - x_j$  con  $i \neq j$ , se puede decir que los nodos  $x_i$  y  $x_j$  *sincronizan completamente y asintóticamente* cuando,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| e_{ij}(t) \| = 0. \quad (43)$$

Para lograr la sincronización en un grupo formado por  $N$  nodos idénticos, con acoplamiento lineal y difusivo a través de la primera variable de estado de

cada nodo se recurre a las ecuaciones de estado de cada nodo  $i$  como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= f_1(x_i) + u_{i1}, \\ \dot{x}_{i2} &= f_2(x_i), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{in} &= f_n(x_i), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (44)$$

donde  $x_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in})^T \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados del nodo  $i$ , la ley de control  $u_{i1}$  se define de la siguiente forma

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad (45)$$

donde  $c > 0$  representa la fuerza de acoplamiento y  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  es una matriz constante de conexiones que indica cuales variables de estado de los nodos están acoplados.

## 4.2. Formación

De manera natural, diversas especies animales utilizan formaciones grupales para incrementar su eficiencia. Se ha propuesto, por ejemplo, que las aves vuelan en formación en “V” para reducir el gasto energético, aprovechando el empuje generado por los vórtices en las puntas de las alas del ejemplar que las precede. De forma similar, se ha demostrado que los patos disminuyen el consumo de energía al nadar en formación lineal. Asimismo, se han planteado funciones de carácter antidepredador asociadas a estas configuraciones. En el ámbito de la robótica, el problema de formación consiste en definir el movimiento coordinado o colaborativo de un conjunto de robots con el fin de ejecutar una tarea específica. Entre las aplicaciones más comunes se encuentran la vigilancia, la búsqueda de objetos, la exploración, el rescate y el transporte de cargas. Estas tareas pueden desarrollarse en entornos variados mediante robots móviles terrestres, aéreos, espaciales, marinos o submarinos (Martínez Clark, 2014).

Para el caso de la formación de varios robots, se define el problema en el cual se considera un número de elementos no definido que integran la formación. Para ello se considera que el conjunto de estos robots que integran la formación esta representado por  $N = 1, 2, 3, \dots, N$  robots. La dinámica de cada agente se define como:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= u_i\end{aligned}\tag{46}$$

donde  $p_i$  y  $v_i \in R^n$  y son la posición y velocidad respectivamente del robot  $i$  y la entrada de control  $u_i \in R^n$  para todo  $i \in N$ . El problema de la formación consiste en impulsar a todos los agentes descritos en la ecuación 46 a una posición en particular para establecer una forma o un patrón geométrico mientras que la velocidad de los robots converge a cero. Por lo tanto, el objetivo de control es que  $u_i$  sea diseñada de tal manera que satisfaga:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) - \delta_{ij} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) &= 0. \quad \forall i, j \in N\end{aligned}\tag{47}$$

donde  $p_{ij} = p_i - p_j \in R^n$  que es la posición relativa entre el robot  $i$  y su vecino  $j$ ,  $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j \in R^n$  que describe la geometría en la formación y  $\delta_i, \delta_j \in R^n$  son constantes a compensar, ver (Lippay y Hoagg, 2020), (Zhao *et al.*, 2021), (Montañez-Molina *et al.*, 2022).

Para el caso de la formación, se propone emplear un controlador asociado a una de las componentes del nodo, donde cada componente opera de manera independiente respecto a las demás.

$$\dot{x}_i^x = f(x_i) + u_i,\tag{48}$$

donde  $lx_i^x \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados correspondiente al eje  $x$ , donde se desenvuelve el robot  $i$ -ésimo y  $u_i = (u_{ij} \ 0 \ 0)^T \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de entradas de control. Para este caso en particular el controlador que actúa únicamente

sobre la primer variable de estado de cada nodo tendría la siguiente forma,

$$u_{ij} = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{ij} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (49)$$

donde  $c_{ij}$  es la fuerza de acoplamiento entre los robots  $i$  y  $j$ ,  $a_{ij}$  es un elemento de la matriz de acoplamiento  $A = [a_{ij}]$ ,  $\Delta_{ij}$  es la distancia esperada entre los robots  $i$  y  $j$ ,  $\delta_{ij}$  es el coeficiente de repulsión, el cual, puede tomar los siguientes valores,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| > \Delta_{ij}, \\ \delta, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ij}. \end{cases} \quad (50)$$

El controlador (49) puede interpretarse como la suma de dos componentes independientes, lo que permite estudiar por separado el efecto que produce cada una. La primera componente se encarga de alinear los estados del robot  $j$  con los del robot  $i$  cuando ambos se encuentran a una distancia considerable. Sin embargo, cuando la diferencia entre las posiciones de los robots es menor a la separación deseada, entra en acción la segunda componente: en este caso, el coeficiente de repulsión  $\delta_{ij}$  adquiere un valor distinto de cero con el propósito de conservar la distancia objetivo  $\Delta_{ij}$  entre los agentes (Martínez Clark, 2014).

### **Conclusiones del capítulo**

A partir de la revisión de los trabajos consultados, en los cuales se ha abordado la sincronización y la formación de vehículos aéreos no tripulados (UAVs), se concluye que es factible diseñar una ley de control orientada a la formación coordinada de un conjunto de agentes. En particular, este estudio se centra en el caso de cuadracópteros, los cuales, debido a sus características de maniobrabilidad, estabilidad y capacidad de operar en entornos tridimensionales, representan una plataforma idónea para implementar y validar estrategias de control colaborativo. El desarrollo de dicha ley de control permitiría establecer formaciones específicas, garantizando tanto la cohesión del grupo como la correcta ejecución de tareas colectivas en escenarios de aplicación como

vigilancia, exploración o rescate.

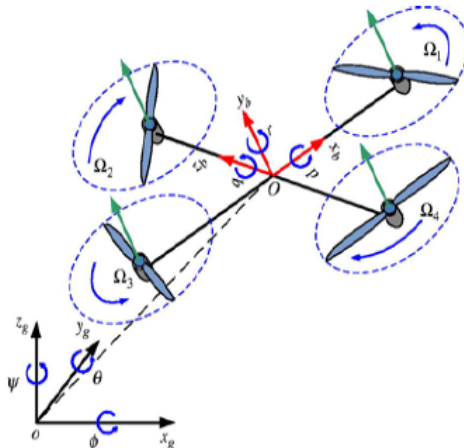
## Capítulo 5. Diseño de la ley de control

### 5.1. Modelo dinámico del cuadracóptero

El modelo dinámico completo de un cuadracóptero con los movimientos en el plano  $x, y, z$  además de sus ángulos de orientación (“roll”, “pitch”, “yaw”), se describe a continuación Swarup y Sudhir (2014); Bouabdallah *et al.* (2004):

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\dot{\Omega} + \frac{l}{I_x} U_2, \\
 \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi}\dot{\Omega} + \frac{l}{I_y} U_3, \\
 \ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta} \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{l}{I_z} U_4, \\
 \ddot{x} &= (\cos\phi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\varphi) \frac{1}{m} U_1, \\
 \ddot{y} &= (\cos\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\phi \cos\varphi) \frac{1}{m} U_1, \\
 \ddot{z} &= -g + (\cos\phi \cos\theta) \frac{1}{m} U_1
 \end{aligned} \tag{51}$$

Las primeras tres ecuaciones corresponden a la orientación del cuadracóptero  $[\phi, \theta, \varphi]^T$ , el resto de las ecuaciones representan la posición del cuadracóptero con respecto al origen del marco inercial  $[x, y, z]^T$ .



**Figura 28.** Esquema del cuadracóptero con respecto al marco inercial.

En la figura 28 se ve el esquema del cuadracóptero con respecto al marco inercial de origen. La velocidad angular debido a las hélices en cada motor esta representada por  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  respectivamente. Las entradas del sistema están denotadas por  $U_1, U_2, U_3, U_4$  y  $\Omega$  es una perturbación, las cuales se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\
 U_2 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\
 U_3 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\
 U_4 &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\
 \Omega &= \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3
 \end{aligned} \tag{52}$$

El modelo dinámico descrito en (51) se puede reescribir en espacio de estados en la forma  $\dot{X} = f(X, U)$  introduciendo el vector de estados,

$$\mathbf{X} = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, z, \dot{z}, x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T \tag{53}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \phi, & x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi} \\
 x_3 &= \theta, & x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta} \\
 x_5 &= \psi, & x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi} \\
 x_7 &= z, & x_8 &= \dot{x}_7 = \dot{z} \\
 x_9 &= x, & x_{10} &= \dot{x}_9 = \dot{x} \\
 x_{11} &= y, & x_{12} &= \dot{x}_{11} = \dot{y}
 \end{aligned} \tag{54}$$

De las ecuaciones (51) y (54) se obtiene el modelo dinámico del cuadracóptero en espacio de estados,

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega + b_1 U_2 \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega + b_2 U_3 \\ x_6 \\ x_4 x_2 a_5 + b_3 U_4 \\ x_8 \\ -g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} U_1 \\ x_{10} \\ u_x \frac{1}{m} U_1 \\ x_{12} \\ u_y \frac{1}{m} U_1 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

donde:

$$a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad a_2 = -\frac{J_r}{I_x}, \quad a_3 = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \quad a_4 = \frac{J_r}{I_y}, \quad a_5 = \frac{I_x - I_y}{I_z},$$

$$b_1 = \frac{l}{I_x}, \quad b_2 = \frac{l}{I_y}, \quad b_3 = \frac{l}{I_z}$$

$$u_x = (\cos x_1 \sin x_3 \cos x_5 + \sin x_1 \sin x_5),$$

$$u_y = (\cos x_1 \sin x_3 \sin x_5 - \sin x_1 \cos x_5)$$

Los parámetros físicos del modelo (55) se describen a continuación en la tabla 1.

**Tabla 1.** Tabla de parámetros físicos del cuadracóptero.

<b>Símbolo</b>	<b>Definición</b>	<b>Valor</b>
$m$	Masa	$0.650 \text{ kg}$
$I_x$	Inercia en el eje x	$7.5e^{-3} \text{ kgm}^2$
$I_y$	Inercia en el eje y	$7.5e^{-3} \text{ kgm}^2$
$I_z$	Inercia en el eje z	$1.3e^{-2} \text{ kgm}^2$
$b$	Coefficiente de empuje	$3.13e^{-3} \text{ Ns}^2$
$d$	Coefficiente de arrastre	$7.5e^{-7} \text{ Nms}^2$
$J_r$	Inercia del rotor	$6e^{-5} \text{ kgm}^2$
$l$	Largo del brazo	$0.23 \text{ m}$
$g$	Gravedad	$9.8 \text{ N/kg}$

## 5.2. Control backstepping

En la teoría de control, el *backstepping* es una técnica desarrollada a inicios de la década de 1990 por Petar V. Kokotovic, Miroslav Krstić e Ioannis Kanellakopoulos, cuyo propósito es diseñar leyes de control estabilizadoras para una clase particular de sistemas dinámicos no lineales. Estos sistemas están contruidos a partir de subsistemas que irradian desde un subsistema irreducible que puede ser estabilizado usando algún otro método.

En el enfoque *backstepping*, la ley de control se diseña con el objetivo de que el sistema siga la trayectoria deseada. Para ello, el modelo del cuadracóptero se divide en dos subsistemas: el de orientación y el de posición. En primera instancia, se determina la entrada de control correspondiente al subsistema de rotaciones angulares, y a partir de esta se deriva posteriormente la entrada de control asociada al subsistema de posición.

### Diseño de ley de control para el subsistema de orientación

Se define una trayectoria deseada  $x_{1d}$  en la cual el error de seguimiento está dado por

$$z_1 := x_{1d} - x_1, \quad (56)$$

Derivando la expresión (56) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1. \quad (57)$$

Del modelo del cuadracóptero (55) sabemos que  $\dot{x}_1 = x_2$ . Sustituyendo esto en (57) se obtiene

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2. \quad (58)$$

Ahora, se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_1$ ,

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2. \quad (59)$$

derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1\dot{z}_1. \quad (60)$$

Sustituyendo la ecuación (58) en (60) se obtiene

$$\dot{V}(z_1) = z_1(\dot{x}_{1d} - x_2). \quad (61)$$

Se considera a  $x_2$  como un control virtual para estabilizar  $z_1$ , de este modo tenemos

$$x_2 = \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1, \quad (62)$$

donde  $\alpha_1 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (62) en (61) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1) &= z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1), \\
&= -\alpha_1 z_1^2.
\end{aligned} \tag{63}$$

Haciendo un cambio de variable

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1. \tag{64}$$

Derivando la expresión (64) se obtiene

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1. \tag{65}$$

Ahora, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_1, z_2)$ ,

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2). \tag{66}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2 \dot{z}_2 + z_1 \dot{z}_1, \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2).
\end{aligned} \tag{67}$$

Despejando  $x_2$  de la ecuación (64) se obtiene  $x_2 = z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1$ , con esto se tiene,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1))) \\
&\quad + z_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1)), \\
&= z_2 \dot{x}_2 - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= z_2(a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \Omega + b_1 U_2) \\
&\quad - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2.
\end{aligned} \tag{68}$$

Se considera a  $U_2$  como un control virtual para estabilizar  $z_2$ , de este modo tenemos

$$U_2 = \frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2), \tag{69}$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (69) en (68) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2) &= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - x_2)) + z_1(\dot{x}_{1d} - x_2), \\
&= z_2(\dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1))) \\
&\quad + z_1(\dot{x}_{1d} - (z_2 + \dot{x}_{1d} + \alpha_1 z_1)), \\
&= z_2 \dot{x}_2 - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= z_2(a_1 x_4 x_6 + a_2 x_4 \Omega \\
&\quad + b_1(\frac{1}{b_1}(z_1 - a_1 x_4 x_6 - a_2 x_4 \Omega - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1) - \alpha_2 z_2))) \\
&\quad - z_2(\ddot{x}_{1d} - \alpha_1(z_2 + \alpha_1 z_1)) - z_1 z_2 - \alpha_1 z_1^2, \\
&= -\alpha_1 z_1^2 - \alpha_2 z_2^2.
\end{aligned} \tag{70}$$

Se sigue diseñando el control para seguimiento de trayectorias y se define el valor de  $z_3$  como sigue

$$z_3 = x_{3d} - x_3, \quad (71)$$

derivando la expresión (71) se obtiene

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_{3d} - \dot{x}_3. \quad (72)$$

Del modelo del cuadracóptero (55) sabemos que  $\dot{x}_3 = x_4$ . Sustituyendo esto en (72), se obtiene

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_{3d} - x_4. \quad (73)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_3$

$$V(z_1) = \frac{1}{2}z_3^2. \quad (74)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_3) = z_3\dot{z}_3. \quad (75)$$

Sustituyendo la ecuación (73) en (75), se obtiene

$$\dot{V}(z_3) = z_3(\dot{x}_{3d} - x_4). \quad (76)$$

Se considera a  $x_4$  como un control virtual para estabilizar  $z_3$ , de este modo tenemos

$$x_4 = \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3, \quad (77)$$

donde  $\alpha_3 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (77) en (76) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_3) &= z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\
&= z_3(\dot{x}_{3d} - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3), \\
&= -\alpha_3 z_3^2.
\end{aligned} \tag{78}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3. \tag{79}$$

ahora derivando la expresión (79), se obtiene

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3 \dot{z}_3. \tag{80}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_3, z_4)$

$$V(z_3, z_4) = \frac{1}{2}(z_3^2 + z_4^2). \tag{81}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (81) y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_3, z_4) &= z_4 \dot{z}_4 + z_3 \dot{z}_3, \\
&= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3 \dot{z}_3) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\
&= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4).
\end{aligned} \tag{82}$$

Despejando  $x_4$  de la ecuación (79) se obtiene  $x_4 = z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3$ , con esto se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_3, z_4) &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\
&= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3))) \\
&\quad + z_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3)), \\
&= z_4 \dot{x}_4 - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2, \\
&= z_4(x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega + b_2 U_3) \\
&\quad - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2.
\end{aligned} \tag{83}$$

Se considera a  $U_3$  como un control virtual para estabilizar  $z_4$ , de este modo tenemos

$$U_3 = \frac{1}{b_2}(z_3 - a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4), \tag{84}$$

donde  $\alpha_3, \alpha_4 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (84) en (83) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_3, z_4) &= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - x_4)) + z_3(\dot{x}_{3d} - x_4), \\
&= z_4(\dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d} - \alpha_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3))) \\
&\quad + z_3(\dot{x}_{3d} - (z_4 + \dot{x}_{3d} + \alpha_3 z_3)), \\
&= z_4 \dot{x}_4 - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2, \\
&= z_4(x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega \\
&\quad + b_2(\frac{1}{b_2}(z_3 - a_3 x_2 x_6 - a_4 x_2 \Omega - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3) - \alpha_4 z_4))) \\
&\quad - z_4(\ddot{x}_{3d} - \alpha_3(z_4 + \alpha_3 z_3)) - z_3 z_4 - \alpha_3 z_3^2, \\
&= -\alpha_3 z_3^2 - \alpha_4 z_4^2.
\end{aligned} \tag{85}$$

Se continua con el diseño del control para seguimiento de trayectorias y se

define  $z_5$  de la siguiente manera:

$$z_5 = x_{5d} - x_5, \quad (86)$$

Derivando la expresión (86), se obtiene

$$\dot{z}_5 = \dot{x}_{5d} - \dot{x}_5. \quad (87)$$

Del modelo del cuadracóptero (55) sabemos que  $\dot{x}_5 = x_6$ . Sustituyendo esto en la expresión (87), se obtiene

$$\dot{z}_5 = \dot{x}_{5d} - x_6. \quad (88)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_5$

$$V(z_5) = \frac{1}{2} z_5^2. \quad (89)$$

derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{V}(z_5) = z_5 \dot{z}_5. \quad (90)$$

Sustituyendo la ecuación (88) en (90), se obtiene

$$\dot{V}(z_5) = z_5(\dot{x}_{5d} - x_6). \quad (91)$$

Se considera a  $x_6$  como un control virtual para estabilizar  $z_5$ , de este modo tenemos

$$x_6 = \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5, \quad (92)$$

donde  $\alpha_5 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida

negativa y sustituyendo (92) en (91), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z_5) &= z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
 &= z_5(\dot{x}_{5d} - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5), \\
 &= -\alpha_5 z_5^2.
 \end{aligned} \tag{93}$$

Considerando el cambio de variable

$$z_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5. \tag{94}$$

y derivando la expresión (94), se obtiene

$$\dot{z}_6 = \dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5 \dot{z}_5. \tag{95}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_5, z_6)$

$$V(z_5, z_6) = \frac{1}{2}(z_5^2 + z_6^2). \tag{96}$$

Derivando la anterior función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z_5, z_6) &= z_6 \dot{z}_6 + z_5 \dot{z}_5, \\
 &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5 \dot{z}_5) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
 &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6).
 \end{aligned} \tag{97}$$

Despejando  $x_6$  de la ecuación (94) se obtiene

$$x_6 = z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_5, z_6) &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
&= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5))) \\
&\quad + z_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5)), \\
&= z_6 \dot{x}_6 - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2, \\
&= z_6(x_4 x_2 \alpha_5 + b_3 U_4) - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2.
\end{aligned} \tag{98}$$

Se considera a  $U_4$  como un control virtual para estabilizar  $z_6$ , de este modo tenemos

$$U_4 = \frac{1}{b_3}(z_5 - a_5 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6), \tag{99}$$

donde  $\alpha_5, \alpha_6 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (99) en (98), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_5, z_6) &= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - x_6)) + z_5(\dot{x}_{5d} - x_6), \\
&= z_6(\dot{x}_6 - \ddot{x}_{5d} - \alpha_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5))) \\
&\quad + z_5(\dot{x}_{5d} - (z_6 + \dot{x}_{5d} + \alpha_5 z_5)), \\
&= z_6 \dot{x}_6 - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2, \\
&= z_6(x_4 x_2 \alpha_5 + b_3(\frac{1}{b_3}(z_5 - a_5 x_2 x_4 - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5) - \alpha_6 z_6))) \\
&\quad - z_4(\ddot{x}_{5d} - \alpha_5(z_6 + \alpha_5 z_5)) - z_5 z_6 - \alpha_5 z_5^2. \\
&= -\alpha_5 z_5^2 - \alpha_6 z_6^2.
\end{aligned} \tag{100}$$

### **Diseño de ley de control para el subsistema de posición**

Para el diseño de la ley de control para seguimiento de trayectorias, ahora para el sistema de posición se define  $z_7$ ,

$$z_7 = x_{7d} - x_7, \tag{101}$$

derivando la expresión (101), se obtiene

$$\dot{z}_7 = \dot{x}_{7d} - \dot{x}_7. \quad (102)$$

Del modelo del cuadracóptero (55) sabemos que  $\dot{x}_7 = x_8$ . Sustituyendo esto en la expresión (102), se obtiene

$$\dot{z}_7 = \dot{x}_{7d} - x_8. \quad (103)$$

Se considera la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_7$

$$V(z_7) = \frac{1}{2}z_7^2. \quad (104)$$

derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{V}(z_7) = z_7\dot{z}_7. \quad (105)$$

Sustituyendo la ecuación (103) en (105), se obtiene

$$\dot{V}(z_7) = z_7(\dot{x}_{7d} - x_8). \quad (106)$$

Se considera a  $x_8$  como un control virtual para estabilizar  $z_7$ , de este modo tenemos

$$x_8 = \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7, \quad (107)$$

donde  $\alpha_7 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (107) en (106), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7) &= z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_7(\dot{x}_{7d} - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7), \\
&= -\alpha_7 z_7^2.
\end{aligned} \tag{108}$$

Realizando el siguiente cambio de variable

$$z_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7. \tag{109}$$

Derivando la expresión (109), se obtiene

$$\dot{z}_8 = \dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{z}_7. \tag{110}$$

Ahora se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_7, z_8)$

$$V(z_7, z_8) = \frac{1}{2}(z_7^2 + z_8^2). \tag{111}$$

y derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8 \dot{z}_8 + z_7 \dot{z}_7, \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7 \dot{z}_7) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8).
\end{aligned} \tag{112}$$

Despejando  $x_8$  de la ecuación (109), se obtiene

$x_8 = z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7$ , con lo cual se tiene,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7))) \\
&\quad + z_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7)), \\
&= z_8 \dot{x}_8 - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= z_8(-g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} U_1) \\
&\quad - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2.
\end{aligned} \tag{113}$$

Se considera a  $U_1$  como un control virtual para estabilizar  $z_8$ , de este modo se tiene

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) - \alpha_8 z_8 + \ddot{x}_{7d}), \tag{114}$$

donde  $\alpha_7, \alpha_8 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (114) en (113), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_7, z_8) &= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - x_8)) + z_7(\dot{x}_{7d} - x_8), \\
&= z_8(\dot{x}_8 - \ddot{x}_{7d} - \alpha_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7))) \\
&\quad + z_7(\dot{x}_{7d} - (z_8 + \dot{x}_{7d} + \alpha_7 z_7)), \\
&= z_8 \dot{x}_8 - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= z_8(-g + (\cos x_1 \cos x_3) \frac{1}{m} (\frac{m}{\cos x_1 \cos x_3} (z_7 + g - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7) \\
&\quad - \alpha_8 z_8 + \ddot{x}_{7d}))) - z_8(\ddot{x}_{7d} - \alpha_7(z_8 + \alpha_7 z_7)) - z_7 z_8 - \alpha_7 z_7^2, \\
&= -\alpha_7 z_7^2 - \alpha_8 z_8^2.
\end{aligned} \tag{115}$$

Continuando con el diseñando del control para seguimiento de trayectorias ahora para el sistema de posición y se define  $z_9$ ,

$$z_9 = x_{9d} - x_9, \tag{116}$$

derivando la expresión (116), se obtiene

$$\dot{z}_9 = \dot{x}_{9d} - \dot{x}_9. \quad (117)$$

Del modelo del cuadracóptero sabemos que  $\dot{x}_9 = x_{10}$ . Sustituyendo esto en (117), se obtiene

$$\dot{z}_9 = \dot{x}_{9d} - x_{10}. \quad (118)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_9$ ,

$$V(z_9) = \frac{1}{2}z_9^2. \quad (119)$$

derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{V}(z_9) = z_9\dot{z}_9. \quad (120)$$

Sustituyendo la ecuación (118) en (120), se obtiene

$$\dot{V}(z_9) = z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}). \quad (121)$$

Se considera a  $x_{10}$  como un control virtual para estabilizar  $z_9$ , se tiene

$$x_{10} = \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9, \quad (122)$$

donde  $\alpha_9 > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (122) en (121), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9) &= z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_9(\dot{x}_{9d} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9), \\
&= -\alpha_9 z_9^2.
\end{aligned} \tag{123}$$

Haciendo el cambio cambio de variable

$$z_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9. \tag{124}$$

y derivando la expresión (124), se obtiene

$$\dot{z}_{10} = \dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9 \dot{z}_9. \tag{125}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_9, z_{10})$ ,

$$V(z_9, z_{10}) = \frac{1}{2}(z_9^2 + z_{10}^2). \tag{126}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10}\dot{z}_{10} + z_9\dot{z}_9, \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9 \dot{z}_9) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}).
\end{aligned} \tag{127}$$

Despejando  $x_{10}$  de la ecuación (124), se obtiene

$$x_{10} = z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9))) \\
&\quad + z_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9)), \\
&= z_{10}\dot{x}_{10} - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= z_{10}(u_x \frac{1}{m} U_1) - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2.
\end{aligned} \tag{128}$$

Se considera a  $u_x$  como un control virtual para estabilizar  $z_{10}$ , de este modo tenemos

$$u_x = \frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10} + \ddot{x}_{9d}), \tag{129}$$

donde  $\alpha_9, \alpha_{10} > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (129) en (128), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_9, z_{10}) &= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - x_{10})) + z_9(\dot{x}_{9d} - x_{10}), \\
&= z_{10}(\dot{x}_{10} - \ddot{x}_{9d} - \alpha_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9))) \\
&\quad + z_9(\dot{x}_{9d} - (z_{10} + \dot{x}_{9d} + \alpha_9 z_9)), \\
&= z_{10}\dot{x}_{10} - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= z_{10}\left(\frac{m}{U_1}(z_9 - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9) - \alpha_{10} z_{10} + \ddot{x}_{9d})\frac{1}{m} U_1\right) \\
&\quad - z_{10}(\ddot{x}_{9d} - \alpha_9(z_{10} + \alpha_9 z_9)) - z_9 z_{10} - \alpha_9 z_9^2, \\
&= -\alpha_9 z_9^2 - \alpha_{10} z_{10}^2.
\end{aligned} \tag{130}$$

Se continua con el diseño del control para seguimiento de trayectorias ahora para el sistema de posición y se define a

$$z_{11} = x_{11d} - x_{11}, \tag{131}$$

Derivando la expresión (131), se obtiene

$$\dot{z}_{11} = \dot{x}_{11d} - \dot{x}_{11}. \quad (132)$$

Del modelo del cuadracóptero (55) sabemos que  $\dot{x}_{11} = x_{12}$ . Sustituyendo esto en (132), se obtiene

$$\dot{z}_{11} = \dot{x}_{11d} - x_{12}. \quad (133)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $z_{11}$ ,

$$V(z_{11}) = \frac{1}{2}z_{11}^2. \quad (134)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{V}(z_{11}) = z_{11}\dot{z}_{11}. \quad (135)$$

Sustituyendo la ecuación (133) en (135) queda se la siguiente forma,

$$\dot{V}(z_{11}) = z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}). \quad (136)$$

Se considera a  $x_{12}$  como un control virtual para estabilizar  $z_{11}$ , de este modo tenemos

$$x_{12} = \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}, \quad (137)$$

donde  $\alpha_{11} > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (137) en (136), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_{11}) &= z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\
&= z_{11}(\dot{x}_{11d} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11}z_{11}), \\
&= -\alpha_{11}z_{11}^2.
\end{aligned} \tag{138}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11}z_{11}. \tag{139}$$

y derivando la expresión (139), se obtiene

$$\dot{z}_{12} = \dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}\dot{z}_{11}. \tag{140}$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov en función de  $(z_{11}, z_{12})$

$$V(z_{11}, z_{12}) = \frac{1}{2}(z_{11}^2 + z_{12}^2). \tag{141}$$

Derivando la función candidata de Lyapunov y sustituyendo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}\dot{z}_{12} + z_{11}\dot{z}_{11}, \\
&= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}\dot{z}_{11}) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\
&= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}).
\end{aligned} \tag{142}$$

Despejando  $x_{12}$  de la ecuación (139), se obtiene

$$x_{12} = z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\
&= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}))) \\
&\quad + z_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11})), \\
&= z_{12}\dot{x}_{12} - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \quad (143) \\
&= z_{12}(u_y \frac{1}{m} U_1) - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) \\
&\quad - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2.
\end{aligned}$$

Se considera a  $u_y$  como un control virtual para estabilizar  $z_{12}$ , de este modo tenemos

$$u_y = \frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11}) - \alpha_{12}z_{12} + \ddot{x}_{11d}), \quad (144)$$

donde  $\alpha_{11}, \alpha_{12} > 0$  para que la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa y sustituyendo (144) en (143), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_{11}, z_{12}) &= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12})) + z_{11}(\dot{x}_{11d} - x_{12}), \\
&= z_{12}(\dot{x}_{12} - \ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11}))) \\
&\quad + z_{11}(\dot{x}_{11d} - (z_{12} + \dot{x}_{11d} + \alpha_{11}z_{11})), \\
&= z_{12}\dot{x}_{12} - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \quad (145) \\
&= z_{12}\left(\frac{m}{U_1}(z_{11} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11}) - \alpha_{12}z_{12} + \ddot{x}_{11d})\frac{1}{m}U_1\right) \\
&\quad - z_{12}(\ddot{x}_{11d} - \alpha_{11}(z_{12} + \alpha_{11}z_{11})) - z_{11}z_{12} - \alpha_{11}z_{11}^2, \\
&= -\alpha_{11}z_{11}^2 - \alpha_{12}z_{12}^2.
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= x_{1d} - x_1, \\
 Z_2 &= x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 Z_1, \\
 Z_3 &= x_{3d} - x_3, \\
 Z_4 &= x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 Z_3, \\
 Z_5 &= x_{5d} - x_5, \\
 Z_6 &= x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 Z_5, \\
 Z_7 &= x_{7d} - x_7, \\
 Z_8 &= x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 Z_7, \\
 Z_9 &= x_{9d} - x_9, \\
 Z_{10} &= x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 Z_9, \\
 Z_{11} &= x_{11d} - x_{11}, \\
 Z_{12} &= x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11} Z_{11}.
 \end{aligned} \tag{146}$$

El modelo dinámico (55) del cuadracóptero se puede dividir en dos subsistemas. El subsistema de orientación esta dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{f}_o(\mathbf{x}_i) + \mathbf{B}_i \mathbf{U}_{oi} \tag{147}$$

donde:

$$\mathbf{U}_{oi} = (U_2 \ U_3 \ U_4)^T,$$

$$\mathbf{f}_o = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 x_6 a_1 + x_4 a_2 \Omega \\ x_4 \\ x_2 x_6 a_3 + x_2 a_4 \Omega \\ x_6 \\ x_4 x_2 a_5 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}. \tag{148}$$

Por otra parte, el subsistema de traslación se representa por la siguiente

expresión:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ti} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}\mathbf{U}_{ti} \quad (149)$$

donde:

$$\mathbf{U}_{ti} = (U_1 \ U_x \ U_y)^T,$$

$$\mathbf{f}_t = \begin{pmatrix} x_8 \\ -g \\ x_{10} \\ 0 \\ x_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos x_1 \cos x_3}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad (150)$$

Así mismo, siguiendo el diseño del algoritmo anterior se calculan las entradas de control virtual obteniéndose las siguientes ecuaciones para cada uno de los cuadracopteros

$$u_{1i} = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} (\dot{x}_8 + g) + \frac{m}{\cos \phi \cos \theta} \sum_{j=1}^N a_{ij} [(1 + \alpha_7 \alpha_8)(x_{7j} - x_{7i}) + (\alpha_7 + \alpha_8)(x_{8j} - x_{8i})] \quad (151)$$

$$u_{xi} = \frac{m}{u_{1i}} \dot{x}_{10} + \frac{m}{u_{1i}} \sum_{j=1}^N a_{ij} [(1 + \alpha_9 \alpha_{10})(x_{9j} - x_{9i}) + (\alpha_9 + \alpha_{10})(x_{10j} - x_{10i})] \quad (152)$$

$$u_{yi} = \frac{m}{u_{1i}} \dot{x}_{12} + \frac{m}{u_{1i}} \sum_{j=1}^N a_{ij} [(1 + \alpha_{11}\alpha_{12})(x_{11j} - x_{11i}) + (\alpha_{11} + \alpha_{12})(x_{12j} - x_{12i})] \quad (153)$$

## Conclusiones del capítulo

Se diseñó una ley de control no lineal basada en el enfoque *backstepping* con el propósito de sincronizar un grupo de agentes, en este caso cuadracópteros. Dicha estrategia de control fue formulada para garantizar el seguimiento preciso de trayectorias, permitiendo que cada agente mantenga la cohesión con el resto de la formación mientras se desplaza en entornos dinámicos. El diseño aprovecha la estructura recursiva del *backstepping*, lo que facilita la descomposición del modelo del cuadracóptero en subsistemas jerárquicos —orientación y posición— y el desarrollo progresivo de las leyes de control correspondientes. Con ello, se asegura no solo la estabilidad del sistema, sino también la capacidad de los agentes para coordinarse de manera colaborativa en tareas como exploración, vigilancia o rescate.

## Capítulo 6. Resultados numéricos

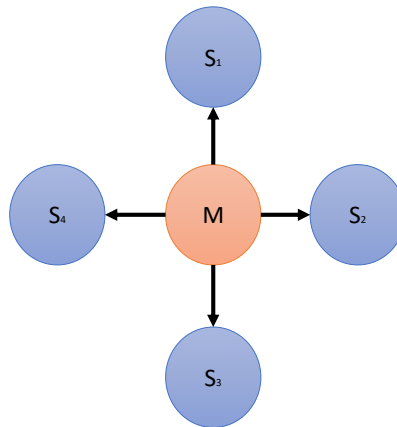
---

### 6.1. Sincronización de cuadracópteros

En este capítulo se obtienen los resultados numéricos empleando el modelo dinámico de un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadracóptero observado en el capítulo anterior, así como el algoritmo de control no lineal diseñado para lograr el seguimiento de trayectorias. Los comportamientos colectivos que se desean reproducir son tanto la sincronización y formación de en un grupo de cinco cuadracópteros los cuales se encuentran conectados en diferente topologías conocidas.

#### 6.1.1. Topología estrella

Para sincronizar los cuadracópteros se tomo en cuenta que se tienen 5 cuadracópteros en topología estrella, de los cuales uno es el maestro y los otros cuatro son esclavos utilizando el siguiente grafo de conexiones que se muestra a continuación.



**Figura 29.** Grafo utilizado para la sincronización de una red de 5 cuadracópteros.

La matriz de adyacencia correspondiente a este grafo es la siguiente

$$E(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (154)$$

La sincronización se obtiene mediante la ley de control para cada uno de los cuadracópteros esclavos sigan al líder, en la cual los estados del los cuadracópteros esclavos tendrán que seguir a los estados del líder. Las variables auxiliares quedaron de la siguiente forma para cada cuadracóptero, respectivamente.

Variabes auxiliares para el primer cuadracóptero esclavo  $S_1$ :

$$\begin{aligned} Z_{13} &= x_{1M} - x_{13}, \\ Z_{14} &= x_{14} - \dot{x}_1 - \alpha_{13}Z_{13}, \\ Z_{15} &= x_{3M} - x_{15}, \\ Z_{16} &= x_{16} - \dot{x}_3 - \alpha_{15}Z_{15}, \\ Z_{17} &= x_{5M} - x_{17}, \\ Z_{18} &= x_{18} - \dot{x}_5 - \alpha_{17}Z_{17}, \\ Z_{19} &= x_{7M} - x_{19}, \\ Z_{20} &= x_{20} - \dot{x}_7 - \alpha_{19}Z_{19}, \\ Z_{21} &= x_{9M} - x_{21}, \\ Z_{22} &= x_{22} - \dot{x}_9 - \alpha_{21}Z_{21}, \\ Z_{23} &= x_{11M} - x_{23}, \\ Z_{24} &= x_{24} - \dot{x}_{11} - \alpha_{23}Z_{23} \end{aligned} \quad (155)$$

Variabes auxiliares para el segundo cuadracóptero esclavo  $S_2$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{25} &= X_{1M} - X_{25}, \\
 Z_{26} &= X_{26} - \dot{X}_1 - \alpha_{25}Z_{25}, \\
 Z_{27} &= X_{3M} - X_{27}, \\
 Z_{28} &= X_{28} - \dot{X}_3 - \alpha_{27}Z_{27}, \\
 Z_{29} &= X_{5M} - X_{29}, \\
 Z_{30} &= X_{30} - \dot{X}_5 - \alpha_{29}Z_{29}, \\
 Z_{31} &= X_{7M} - X_{31}, \\
 Z_{32} &= X_{32} - \dot{X}_7 - \alpha_{31}Z_{31}, \\
 Z_{33} &= X_{9M} - X_{33}, \\
 Z_{34} &= X_{34} - \dot{X}_9 - \alpha_{33}Z_{33}, \\
 Z_{35} &= X_{11M} - X_{35}, \\
 Z_{36} &= X_{36} - \dot{X}_{11} - \alpha_{35}Z_{35}
 \end{aligned} \tag{156}$$

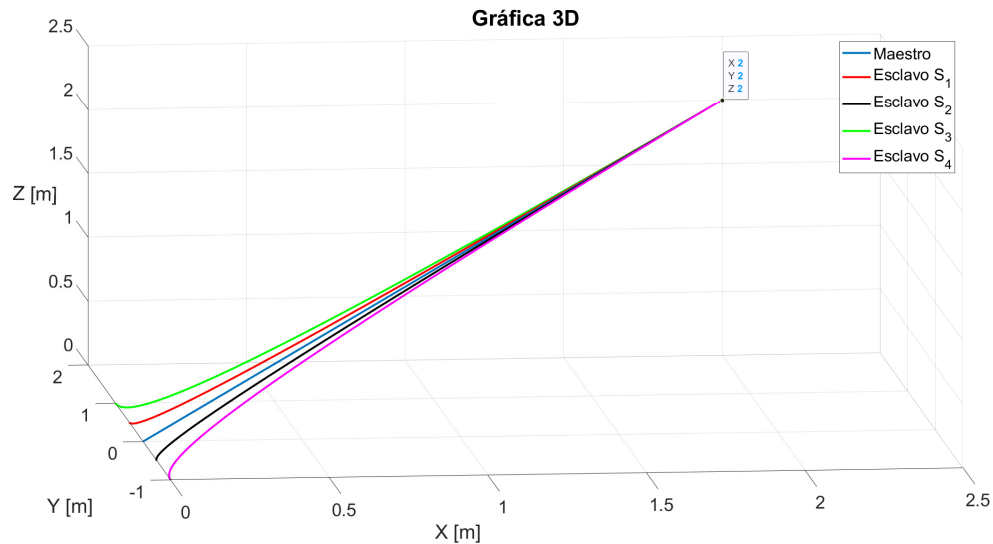
Variabes auxiliares para el tercer cuadracóptero esclavo  $S_3$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{37} &= X_{1M} - X_{37}, \\
 Z_{38} &= X_{38} - \dot{X}_1 - \alpha_{37}Z_{37}, \\
 Z_{39} &= X_{3M} - X_{39}, \\
 Z_{40} &= X_{40} - \dot{X}_3 - \alpha_{39}Z_{39}, \\
 Z_{41} &= X_{5M} - X_{41}, \\
 Z_{42} &= X_{42} - \dot{X}_5 - \alpha_{41}Z_{41}, \\
 Z_{43} &= X_{7M} - X_{43}, \\
 Z_{44} &= X_{44} - \dot{X}_7 - \alpha_{43}Z_{43}, \\
 Z_{45} &= X_{9M} - X_{45}, \\
 Z_{46} &= X_{46} - \dot{X}_9 - \alpha_{45}Z_{45}, \\
 Z_{47} &= X_{11M} - X_{47}, \\
 Z_{48} &= X_{48} - \dot{X}_{11} - \alpha_{47}Z_{47}
 \end{aligned} \tag{157}$$

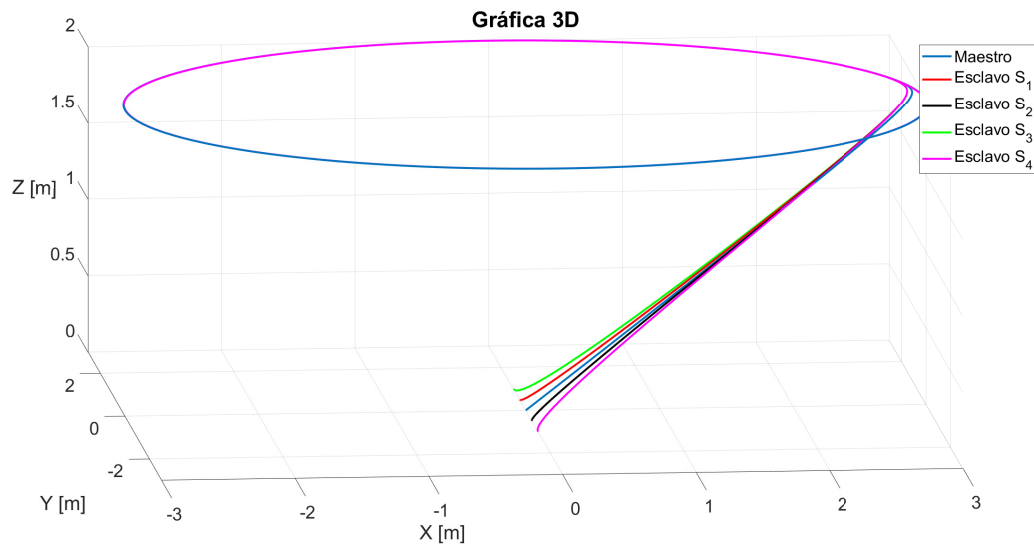
Variabes auxiliares para el cuarto cuadracóptero esclavo  $S_4$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{49} &= x_{1M} - x_{49}, \\
 Z_{50} &= x_{50} - \dot{x}_1 - \alpha_{49}Z_{49}, \\
 Z_{51} &= x_{3M} - x_{51}, \\
 Z_{52} &= x_{52} - \dot{x}_3 - \alpha_{51}Z_{51}, \\
 Z_{53} &= x_{5M} - x_{53}, \\
 Z_{54} &= x_{54} - \dot{x}_5 - \alpha_{53}Z_{53}, \\
 Z_{55} &= x_{7M} - x_{55}, \\
 Z_{56} &= x_{56} - \dot{x}_7 - \alpha_{55}Z_{55}, \\
 Z_{57} &= x_{9M} - x_{57}, \\
 Z_{58} &= x_{58} - \dot{x}_9 - \alpha_{57}Z_{57}, \\
 Z_{59} &= x_{11M} - x_{59}, \\
 Z_{60} &= x_{60} - \dot{x}_{11} - \alpha_{59}Z_{59}
 \end{aligned} \tag{158}$$

Se realizaron algunas simulaciones en primera instancia con el fin de que los cuadracópteros lleguen a la posición deseada que es  $x_d = 2m, y_d = 2m, z_d = 2m$ . El líder empieza de la posición inicial  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 0)$  con los ángulos en la orientación  $(\phi_1, \theta_1, \psi_1) = (0, 0, 0)$  los cuadracópteros esclavos  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$  inician en otra posición, el primero en la posición  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0, 0.5, 0)$  el segundo en la posición  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (0, -0.5, 0)$ , el tercero en la posición  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (0, -1, 0)$ , el cuarto en la posición  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (0, 1, 0)$ . Se realiza una segunda simulación con las mismas condiciones iniciales pero ahora la trayectoria deseada es  $x_d = 3\cos(\pi t), y_d = 3\sin(\pi t), z_d = 2m$ . En la figura 30, se muestra el seguimiento de los cuadracópteros a un punto deseado, mientras que en la figura 31, se muestra el seguimiento de una trayectoria circular de los cudracópteros.



**Figura 30.** Seguimiento de los esclavos  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  al líder a una posición deseada.



**Figura 31.** Seguimiento de los esclavos al líder a una trayectoria deseada.

En las figuras 30 y 31 se observa que los 5 cuadrcópteros conectados en topología estrella y empleando la ley de control anteriormente descrita son capaces de sincronizarse y llegar tanto al punto deseado como seguir la trayectoria circular.

### 6.1.2. Formación de cuadrcópteros

Para realizar la formación con los cuadrcópteros teniendo en cuenta que uno es líder y los otros dos los esclavos, se procederá a dar una distancia en-

tre ellos mediante la ley de control con un vector de posición  $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  quedando las variables auxiliares para la formación como se muestra a continuación.

Variables auxiliares para el primer cuadracóptero esclavo  $S_1$ :

$$\begin{aligned}
 z_{13} &= x_{1M} - x_{13}, \\
 z_{14} &= x_{14} - \dot{x}_1 - \alpha_{13}z_{13}, \\
 z_{15} &= x_{3M} - x_{15}, \\
 z_{16} &= x_{16} - \dot{x}_3 - \alpha_{15}z_{15}, \\
 z_{17} &= x_{5M} - x_{17}, \\
 z_{18} &= x_{18} - \dot{x}_5 - \alpha_{17}z_{17}, \\
 z_{19} &= x_{7M} - x_{19} + \Delta_{z1}, \\
 z_{20} &= x_{20} - \dot{x}_7 - \alpha_{19}z_{19}, \\
 z_{21} &= x_{9M} - x_{21} + \Delta_{x1}, \\
 z_{22} &= x_{22} - \dot{x}_9 - \alpha_{21}z_{21}, \\
 z_{23} &= x_{11M} - x_{23} + \Delta_{y1}, \\
 z_{24} &= x_{24} - \dot{x}_{11} - \alpha_{23}z_{23}
 \end{aligned} \tag{159}$$

VARIABLES AUXILIARES PARA EL SEGUNDO CUADRACÓPTERO ESCLAVO  $S_2$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{25} &= X_{1M} - X_{25}, \\
 Z_{26} &= X_{26} - \dot{X}_1 - \alpha_{25}Z_{25}, \\
 Z_{27} &= X_{3M} - X_{27}, \\
 Z_{28} &= X_{28} - \dot{X}_3 - \alpha_{27}Z_{27}, \\
 Z_{29} &= X_{5M} - X_{29}, \\
 Z_{30} &= X_{30} - \dot{X}_5 - \alpha_{29}Z_{29}, \\
 Z_{31} &= X_{7M} - X_{31} + \Delta_{z2}, \\
 Z_{32} &= X_{32} - \dot{X}_7 - \alpha_{31}Z_{31}, \\
 Z_{33} &= X_{9M} - X_{33} + \Delta_{x2}, \\
 Z_{34} &= X_{34} - \dot{X}_9 - \alpha_{33}Z_{33}, \\
 Z_{35} &= X_{11M} - X_{35} + \Delta_{y2}, \\
 Z_{36} &= X_{36} - \dot{X}_{11} - \alpha_{35}Z_{35}
 \end{aligned} \tag{160}$$

VARIABLES AUXILIARES PARA EL TERCER CUADRACÓPTERO ESCLAVO  $S_3$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{37} &= X_{1M} - X_{37}, \\
 Z_{38} &= X_{38} - \dot{X}_1 - \alpha_{37}Z_{37}, \\
 Z_{39} &= X_{3M} - X_{39}, \\
 Z_{40} &= X_{40} - \dot{X}_3 - \alpha_{39}Z_{39}, \\
 Z_{41} &= X_{5M} - X_{41}, \\
 Z_{42} &= X_{42} - \dot{X}_5 - \alpha_{41}Z_{41}, \\
 Z_{43} &= X_{7M} - X_{43} + \Delta_{z3}, \\
 Z_{44} &= X_{44} - \dot{X}_7 - \alpha_{43}Z_{43}, \\
 Z_{45} &= X_{9M} - X_{45} + \Delta_{x3}, \\
 Z_{46} &= X_{46} - \dot{X}_9 - \alpha_{45}Z_{45}, \\
 Z_{47} &= X_{11M} - X_{47} + \Delta_{y3}, \\
 Z_{48} &= X_{48} - \dot{X}_{11} - \alpha_{47}Z_{47}
 \end{aligned} \tag{161}$$

VARIABLES AUXILIARES PARA EL CUARTO CUADRACÓPTERO ESCLAVO  $S_4$ :

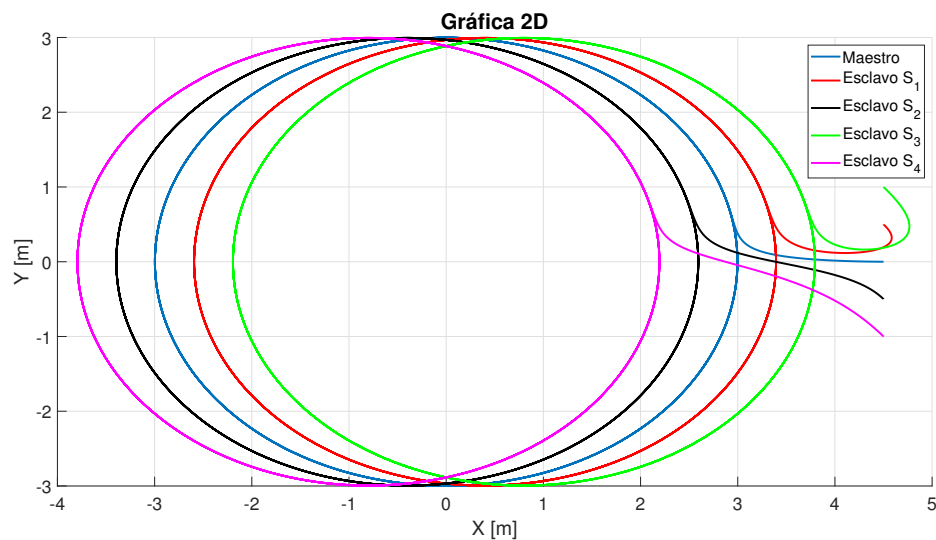
$$\begin{aligned}
 Z_{49} &= X_{1M} - X_{49}, \\
 Z_{50} &= X_{50} - \dot{X}_1 - \alpha_{49}Z_{49}, \\
 Z_{51} &= X_{3M} - X_{51}, \\
 Z_{52} &= X_{52} - \dot{X}_3 - \alpha_{51}Z_{51}, \\
 Z_{53} &= X_{5M} - X_{53}, \\
 Z_{54} &= X_{54} - \dot{X}_5 - \alpha_{53}Z_{53}, \\
 Z_{55} &= X_{7M} - X_{55} + \Delta_{z4}, \\
 Z_{56} &= X_{56} - \dot{X}_7 - \alpha_{55}Z_{55}, \\
 Z_{57} &= X_{9M} - X_{57} + \Delta_{x4}, \\
 Z_{58} &= X_{58} - \dot{X}_9 - \alpha_{57}Z_{57}, \\
 Z_{59} &= X_{11M} - X_{59} + \Delta_{y4}, \\
 Z_{60} &= X_{60} - \dot{X}_{11} - \alpha_{59}Z_{59}
 \end{aligned} \tag{162}$$

VARIABLES AUXILIARES PARA LOS CUADRACÓPTEROS ESCLAVOS

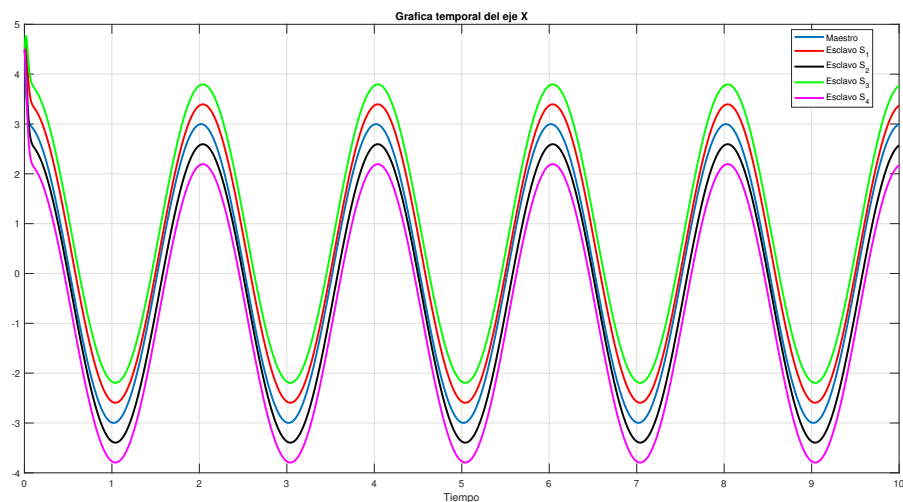
$$\begin{aligned}
 Z_{1Si} &= X_{1M} - X_{1Si}, \\
 Z_{2Si} &= X_{2Si} - \dot{X}_{1M} - \alpha_{1Si}Z_{1Si}, \\
 Z_{3Si} &= X_{3M} - X_{51}, \\
 Z_{4Si} &= X_{4Si} - \dot{X}_{3M} - \alpha_{3Si}Z_{3Si}, \\
 Z_{5Si} &= X_{5M} - X_{53}, \\
 Z_{6Si} &= X_{6Si} - \dot{X}_{5M} - \alpha_{5Si}Z_{5Si}, \\
 Z_{7Si} &= X_{7M} - X_{55} + \Delta_{zSi}, \\
 Z_{8Si} &= X_{8Si} - \dot{X}_{7M} - \alpha_{7Si}Z_{7Si}, \\
 Z_{9Si} &= X_{9M} - X_{57} + \Delta_{xSi}, \\
 Z_{10Si} &= X_{10Si} - \dot{X}_{9M} - \alpha_{9Si}Z_{9Si}, \\
 Z_{11Si} &= X_{11M} - X_{59} + \Delta_{ySi}, \\
 Z_{12Si} &= X_{12Si} - \dot{X}_{11M} - \alpha_{11Si}Z_{11Si}
 \end{aligned} \tag{163}$$

Donde  $i = 1, 2, \dots, n$  que representa el número de cuadracóptero esclavo con que se conecta el cuadracóptero líder.

Se ilustra mediante una simulación en donde se dará una distancia  $\Delta$  entre los cuadracópteros esclavos y el maestro, dos de ellos a una distancia (D1) de 0.4 metros para el eje x y los otros dos a una distancia (D2) de 0.8 metros en el mismo eje x, la posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 2)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.5, 2)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, -0.5, 2)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, 1, 2)$  y la posición del último esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1, 2)$ . Los resultados se muestran en las figuras 32 y 33.

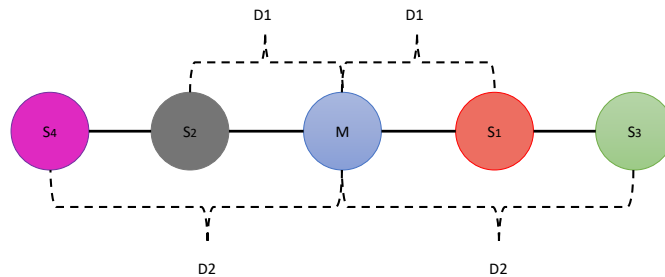


**Figura 32.** Formación cuadracópteros separados en el eje x.



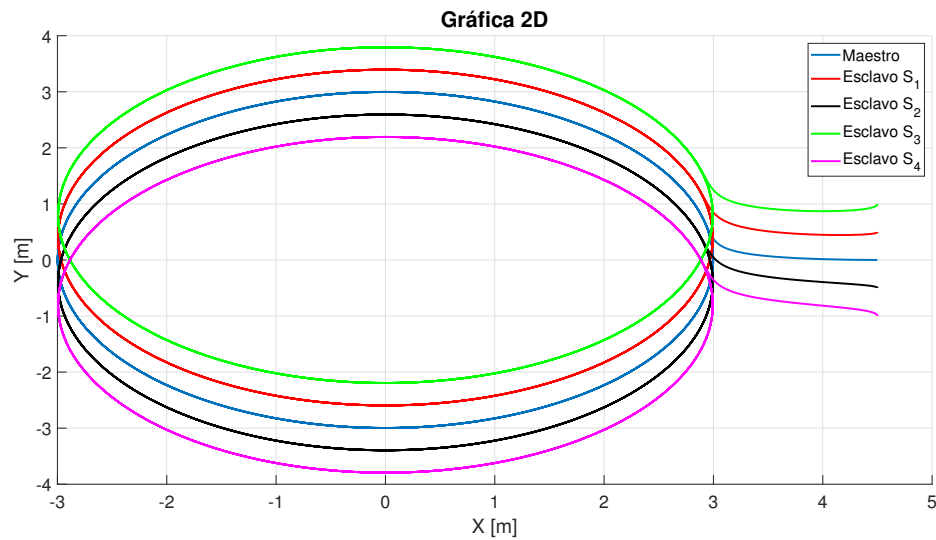
**Figura 33.** Formación de cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

En la figura 32 se muestra la simulación de los 5 cuadracópteros conectados en topología estrella y separados en el eje X por las distancias D1 y D2, esta separación en formación horizontal se observa en la figura 33 con respecto al tiempo. Los 5 cuadracópteros están separados como se muestra en la figura 34.

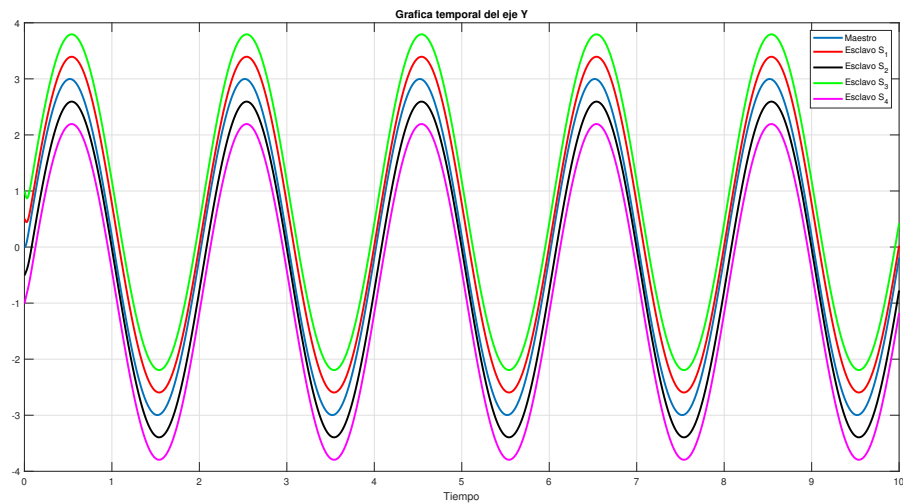


**Figura 34.** Cuadracópteros separados en horizontal.

Ahora se procederá a dar una distancia  $\Delta$  entre los cuadracópteros esclavos y el maestro, dos de ellos a una distancia (D1) de 0.4 metros para el eje y y los otros dos a una distancia (D2) de 0.8 metros en el mismo eje y, la posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 2)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.5, 2)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, -0.5, 2)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, 1, 2)$  y posición del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1, 2)$ , mostradas en las figuras 35 y 36.

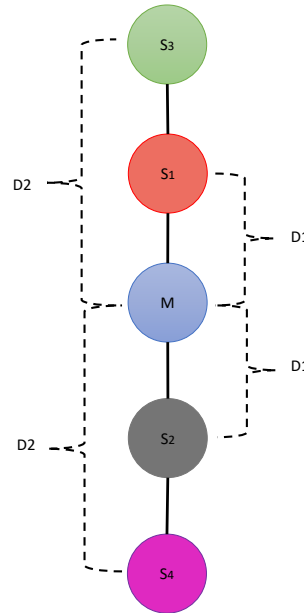


**Figura 35.** Cuadracópteros separados en el eje y.



**Figura 36.** Cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

En la figura 35 se muestra la simulación de los drones que ahora están formados en una línea vertical y separados con respecto al líder además de que siguen una trayectoria circular. En la figura 37 se observa la formación que se mantiene con respecto al tiempo dicha formación se muestra en la siguiente figura 37:



**Figura 37.** Cuadrcópteros separados en vertical.

Se observa en las figuras anteriores que con la topología estrella se realiza la separación de los cuadrcópteros esclavos con respecto a su líder mediante el uso del vector  $\Delta$ , separándolos en los ejes  $y$  y  $x$  con una distancia en metros, además de que mantienen la formación durante el seguimiento de la trayectoria circular.

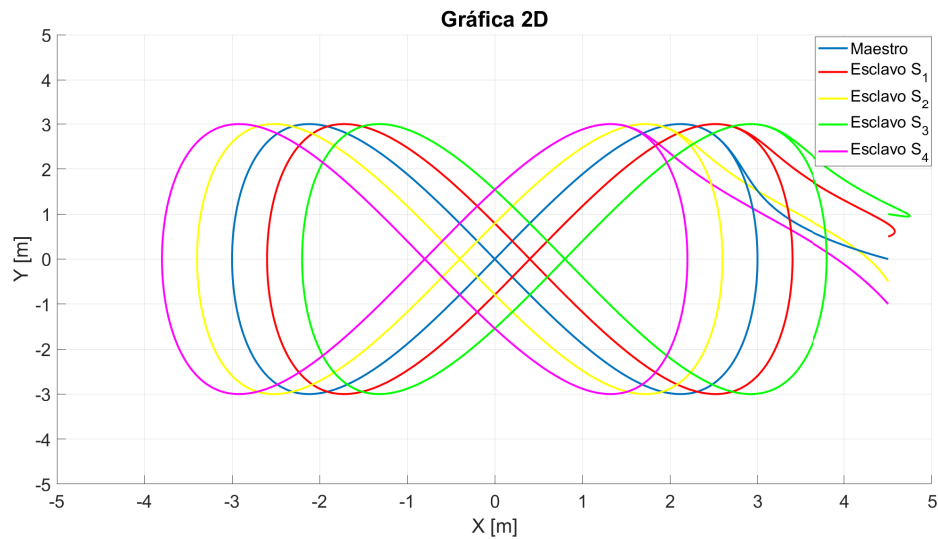
### 6.1.3. Cambio de trayectoria deseada

Como se ha observado el control diseñado para el seguimiento de trayectoria y la formación que se empleó en estas tres topologías es capaz de seguir una trayectoria circular. Ahora se propone que la red de 5 cuadrcópteros sigan una trayectoria de forma de lemniscata, la cual posee una forma similar al número 8 y al símbolo del  $\infty$ .

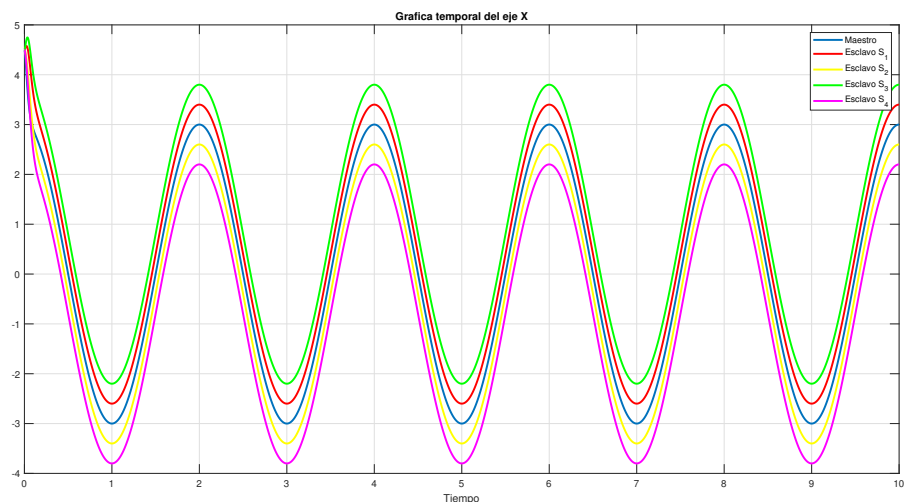
Se procederá a realizar esta trayectoria primero para la topología en estrella, la trayectoria de lemniscata que se quiere seguir es  $x_d = 3\cos(\pi t)$ ,  $y_d = 6\sin(\pi t) * \cos(\pi t)$ ,  $z_d = 2m$ . Se desea que el esclavo  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia de 0.4 metros con respecto al líder mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia de 0.8

metros.

La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.5, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.5, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1, 0)$ . Los resultados se muestran en las figuras 38 y 39.



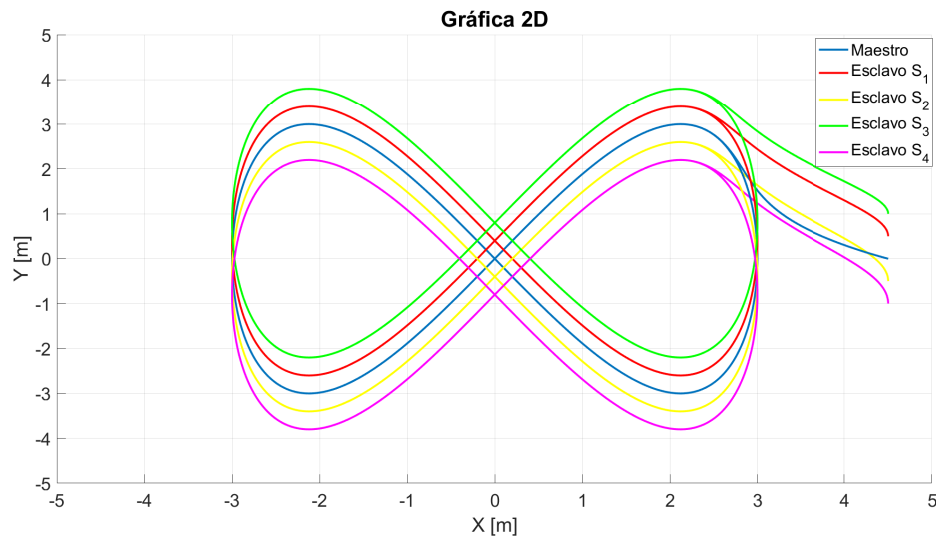
**Figura 38.** Formación de la red de cuadracópteros separados en el plano 2D.



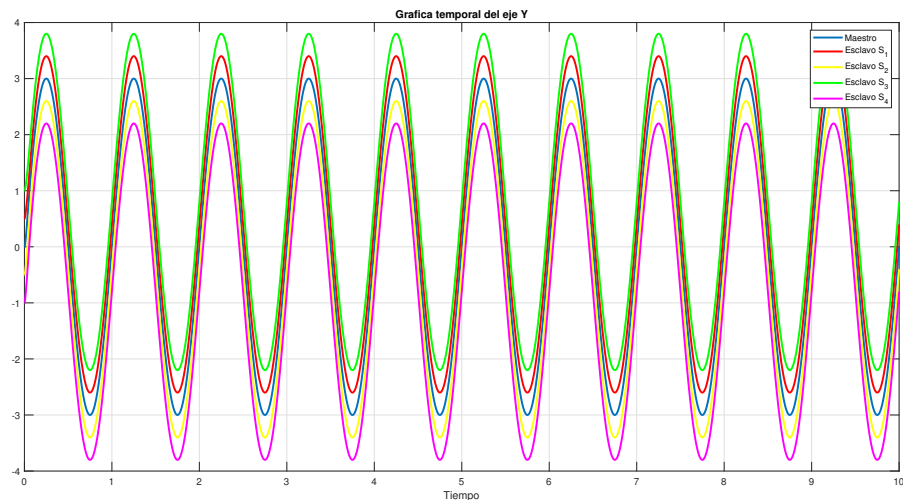
**Figura 39.** Formación de la red de cuadracópteros separados en el eje x con respecto al tiempo.

Ahora, se simulan con una distancia con respecto al líder pero en el eje y

para lo cual las condiciones iniciales son las mismas y se empleará la misma distancia de los esclavos con respecto al líder como se muestra en la figura 40 y 41.



**Figura 40.** Formación de la red de cuadracópteros separados en el plano 2D.



**Figura 41.** Formación de la red de cuadracópteros separados en el eje y con respecto al tiempo.

En las figuras 40 y 41 se observa que con la ley de control diseñada se puede seguir otra trayectoria y la formación con el vector  $\Delta$ , además de que los cuadracópteros están conectados en topología estrella. Con esto se puede concluir que el control es capaz de seguir una trayectoria en forma de lemnis-

cata así como también mantener la formación de los cuadracópteros esclavos y el líder. Se realizó el mismo método para otras dos tipologías, obteniendo resultados similares.

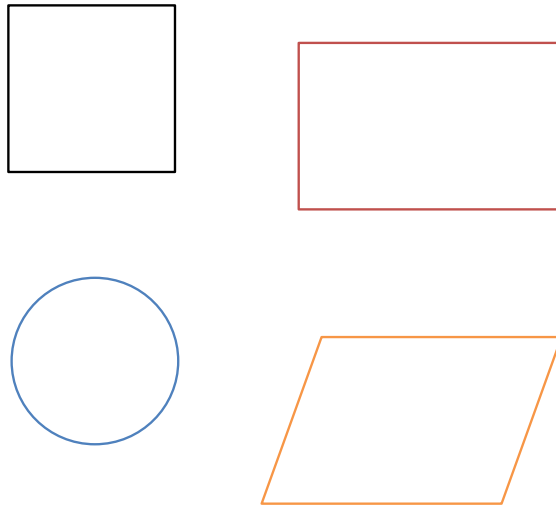
### **Conclusiones del capítulo**

Se realizaron simulaciones con el algoritmo de control diseñado para que la red de cuadracópteros siguiera una trayectoria continua deseada, así como también alcanzar una formación en línea horizontal o vertical al desplazarse por el plano  $xy$ .

## Capítulo 7. Aplicación de la formación de cuadracópteros a la detección de objetos

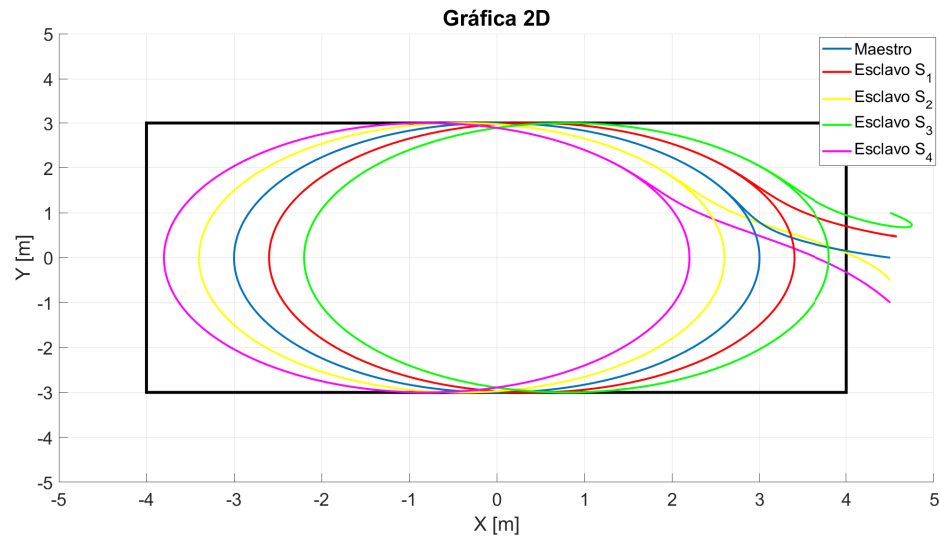
---

Se desea hacer la exploración en una superficie en la cual se emplea la formación de los cuadracópteros, para ello se toma en cuenta que las superficies pueden tener varias formas de interés con fines de exploración como se muestra en la figura 42.



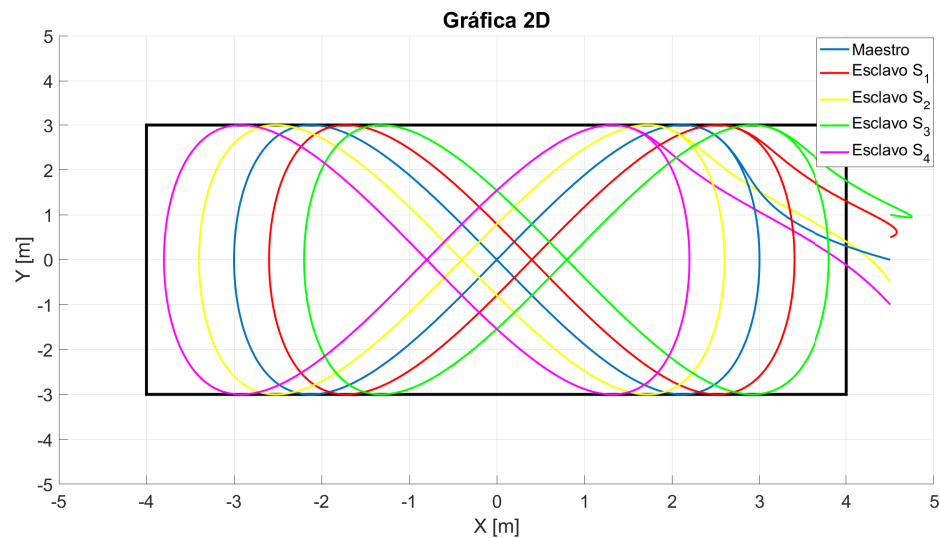
**Figura 42.** Superficies de exploración.

Teniendo en cuenta estas superficies se decide tomar la que tiene forma de rectángulo en este caso tiene una dimensión de 8 metros de largo por 6 metros de ancho y se emplea la formación de la red de cuadracópteros. Para ello se emplea la topología en estrella en la exploración de dicha superficie, mostrado en la figura 43.



**Figura 43.** Exploración de la superficie con trayectoria circular.

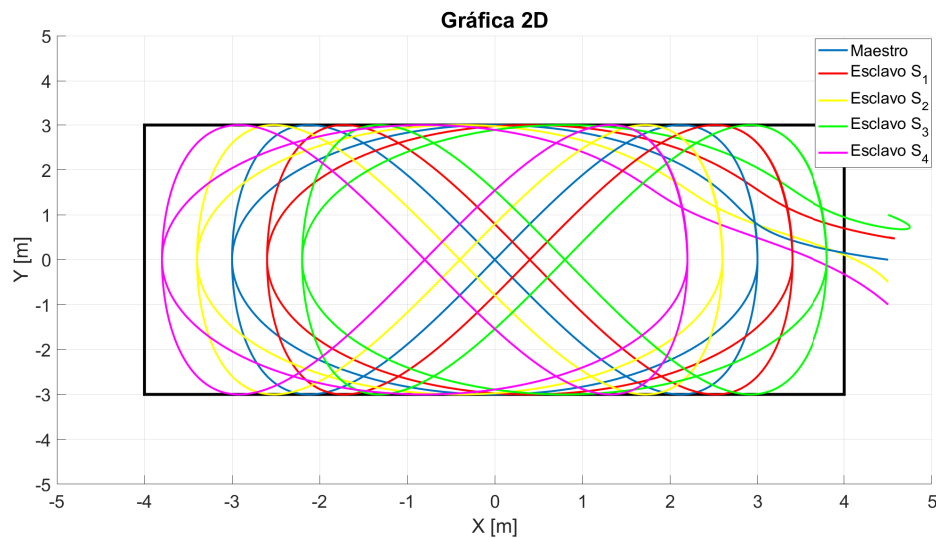
Se puede observar en la figura 43 que los cuadracópteros están formados en una línea horizontal y al emplear una trayectoria circular para explorar una superficie rectangular queda una zona en el centro en la cual se podría decir que no se alcanza a explorar, para ello se plantea usar otro tipo de trayectoria para poder alcanzar a explorar esta área. En este caso se emplea una trayectoria en forma de lemniscata, ver figura 44.



**Figura 44.** Exploración de la superficie con trayectoria lemniscata.

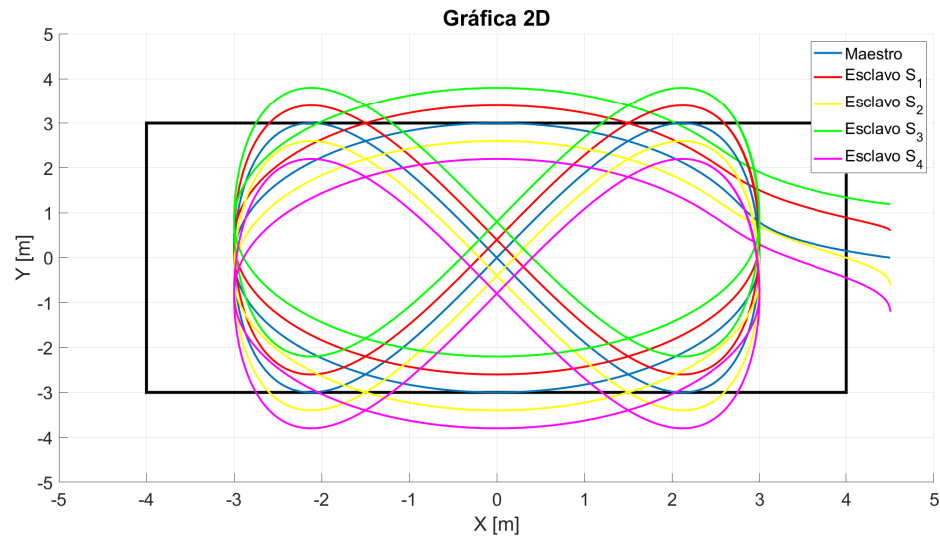
Empleando la trayectoria de lemniscata con los 5 cuadracópteros y forma-

dos en una línea horizontal, si se observa que se logra explorar la superficie que faltaba, pero aun así faltan algunas zonas por explorar y lo que se desea es que se tenga la mayor parte de superficie explorada. Una forma de tratar de tener la mayor área explorada fue la combinación de trayectorias, en la cual primero se realiza la trayectoria en forma circular y después de un tiempo se realiza la trayectoria en lemniscata. El resultado de las simulaciones se muestra en la figura 45.



**Figura 45.** Exploración de la superficie con trayectorias combinadas en formación horizontal.

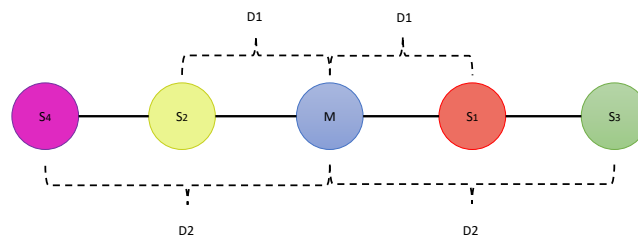
En la figura 45 se observa que con la combinación de las trayectorias y la formación en línea horizontal se disminuyen las áreas que no se exploraban con las trayectorias individuales. A partir de estos resultados, se utilizará una formación en línea vertical para ver sus resultados sobre la superficie rectangular de exploración, la simulación se muestra en la figura 46.



**Figura 46.** Exploración de la superficie con trayectorias combinadas en formación vertical.

En estas simulaciones con los 5 cuadracópteros se observa que formados en una línea horizontal se adapta mejor al área que se desea explorar, de lo contrario si se empleara una formación en vertical podría salirse en el ancho de la superficie de exploración y también no alcanzar a cubrir el largo de la superficie en exploración.

Se implementaron dos trayectorias más, empleando las curvas de Lissajous esto con el fin de ver si se abarca más área de exploración, para ello se tiene en cuenta que la formación es una línea horizontal como se muestra en la figura 47.



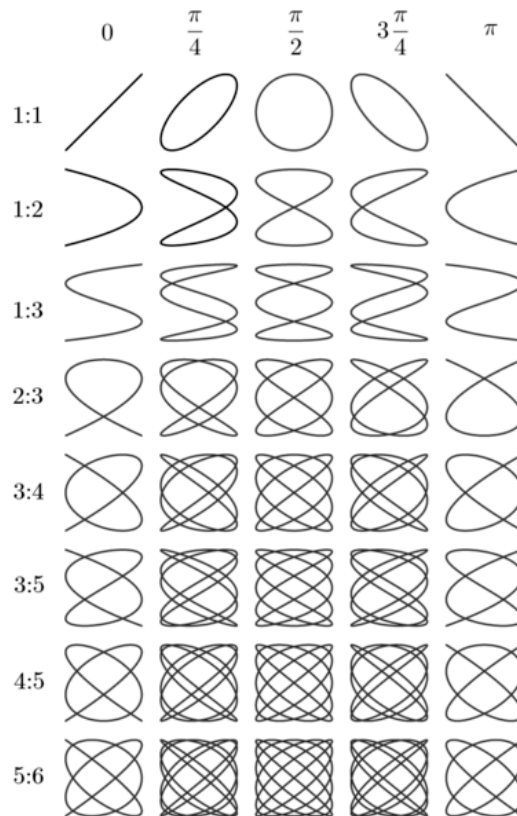
**Figura 47.** Exploración de la superficie en formación horizontal.

## Curvas de lissajous

La curva de Lissajous, también llamada figura de Lissajous o curva de Bowditch, corresponde a la representación gráfica de un sistema de ecuaciones paramétricas que describen la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares (Lawrence, 2013; Marion, 2013; Fleming y Hornes, 2013). Esta se define de la siguiente manera:

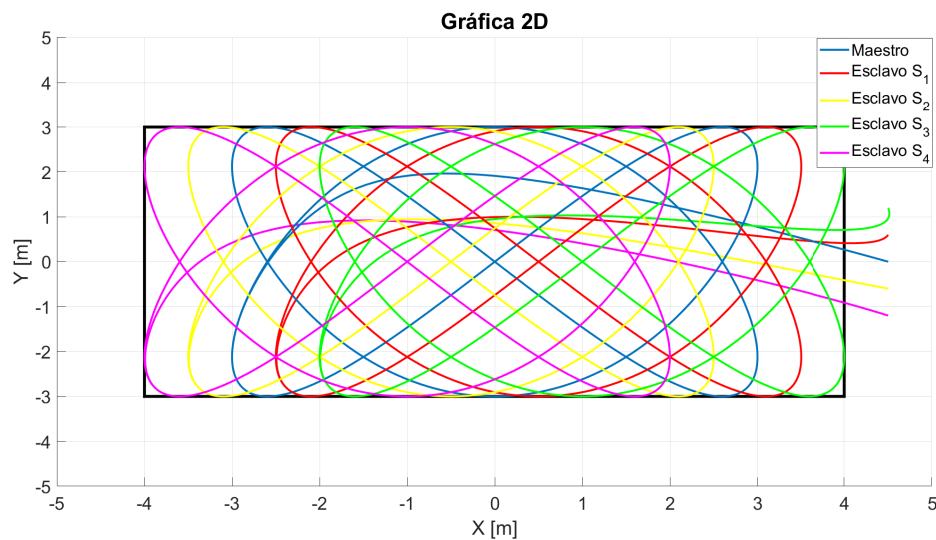
$$x = A \operatorname{sen}(w_x t + \alpha), \quad y = B \operatorname{sen}(w_y t + \beta), \quad \delta = \alpha - \beta. \quad (164)$$

Donde  $w_x$  y  $w_y$  es la frecuencia angular en los respectivos ejes,  $\alpha$  y  $\beta$  son las fases cuya diferencia es  $\delta$ , está se puede observar el la primera fila de la figura 48, además la primera columna corresponde a la frecuencia angular. Las curvas de Lissajous para diferentes valores de los parámetros se muestran en la figura 48.



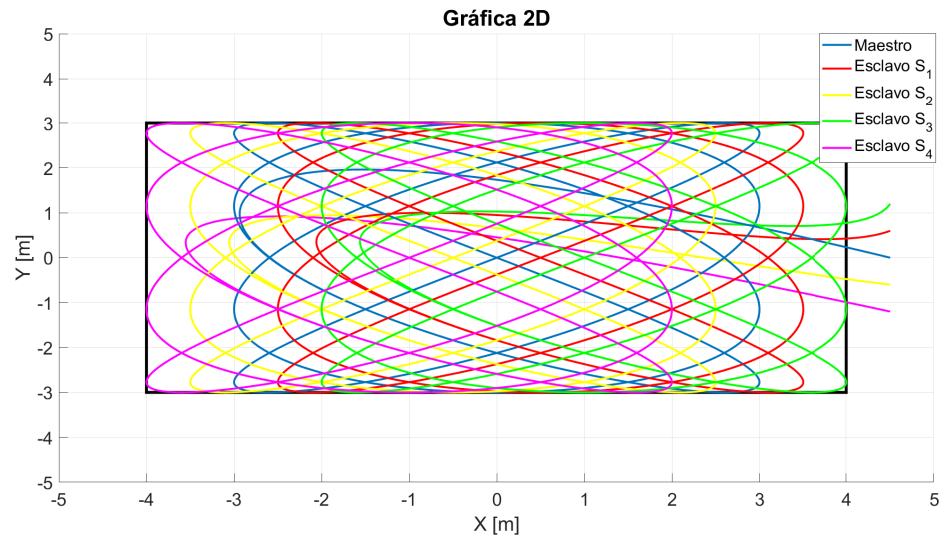
**Figura 48.** Curvas de Lissajous descritas por (164) para diferentes valores de parámetros.

Para la simulación se desea que los esclavo  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder una distancia (D2) de 1 metro. La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ . La trayectoria de Lissajous que se quiere seguir es  $x_d = 3\text{sen}(2 * \pi t + \alpha)$ ,  $y_d = 3\text{sen}(3 * \pi t + \beta)$ ,  $z_d = 2m$ , además de que  $\delta$  tiene un valor de  $\frac{\pi}{2}$ .



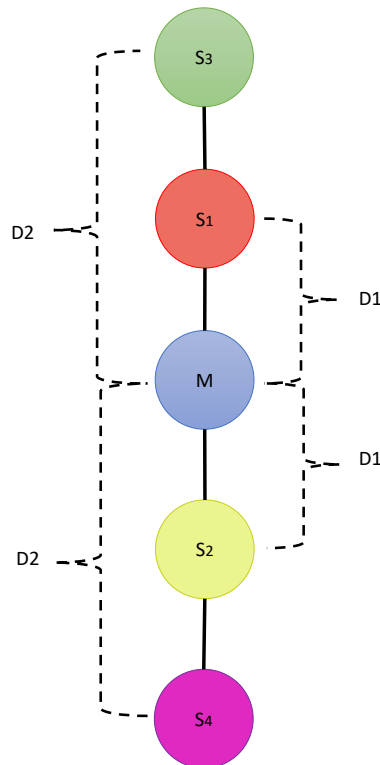
**Figura 49.** Exploración de la superficie con trayectoria de lissajous 1.

Ahora se procederá a emplear la segunda curva de lissajous en la simulación se desea que los esclavo  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro. La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ . La trayectoria de Lissajous que se quiere seguir es  $x_d = 3\text{sen}(4 * \pi t + \alpha)$ ,  $y_d = 3\text{sen}(3 * \pi t + \beta)$ ,  $z_d = 2m$ . La figura se muestra en 50:

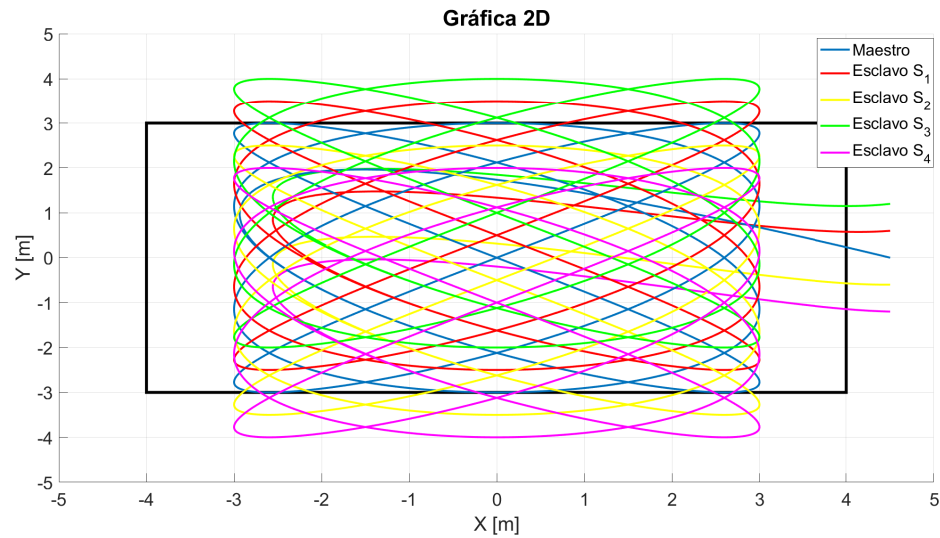


**Figura 50.** Exploración de la superficie con trayectoria de Lissajous 2.

Ahora, se simula con las mismas condiciones iniciales pero en la formación en vertical empleando las mismas distancias  $D1$  y  $D2$  como se muestra en la siguiente figura 51.

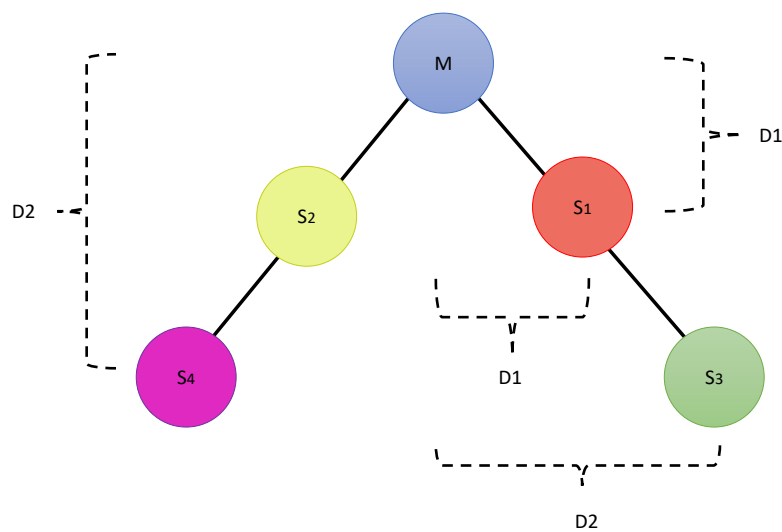


**Figura 51.** Exploración de la superficie en formación vertical.



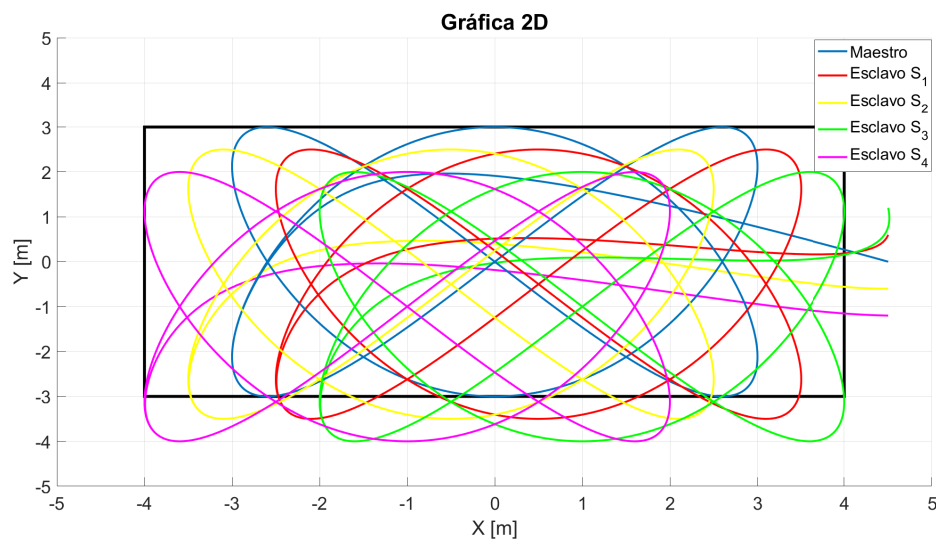
**Figura 52.** Exploración de la superficie con trayectoria Lissajous en formación vertical.

Se puede observar en la figura 52 que los cuadracópteros salen del aérea de exploración y también dejan zonas sin explorar, pero se concentran muy bien en el área del centro abarcando casi por completo un área de 6 por 8 metros. Una propuesta para mejorar el área que cubre, es cambiar la formación aplicada en la exploración, en este caso se propone una forma en triángulo como se muestra en la figura 53.



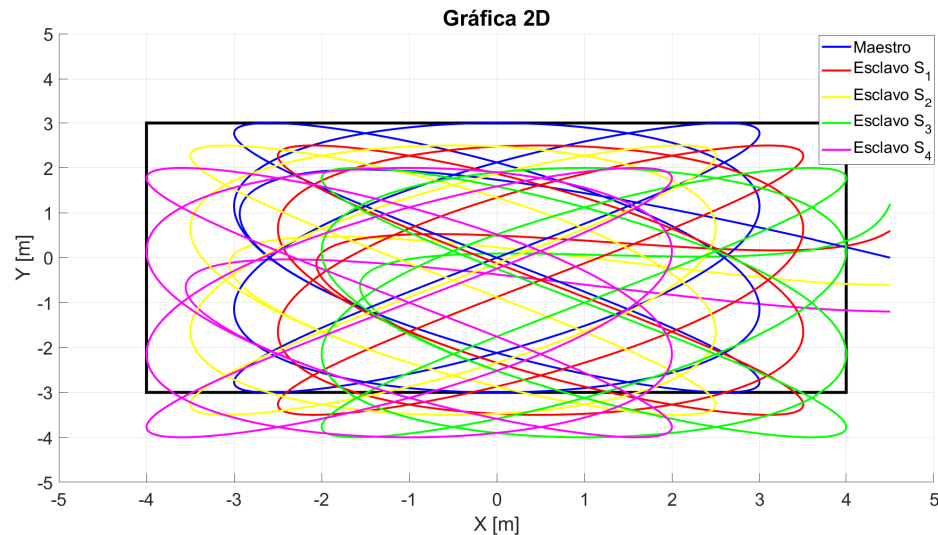
**Figura 53.** Formación en triángulo de la formación de la red de cuadracópteros.

En esta formación el cuadracóptero líder  $M$  se encuentra en la parte superior y los esclavos debajo de el, las distancia D1 es de 0.5 metros y la distancia D2 es de 1 metro, se realiza la simulación con la posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ . La trayectoria de Lissajous que se quiere seguir es  $x_d = 3\text{sen}(2 * \pi t + \alpha)$ ,  $y_d = 3\text{sen}(3 * \pi t + \beta)$ ,  $z_d = 2m$ . La figura 54 muestra lo anterior.



**Figura 54.** Formación en triángulo de la red de cuadracópteros.

**Nota:** Se observa que en las esquinas superiores queda una pequeña zona sin cubrir por lo que se realizara otra simulación empleando la segunda trayectoria de Lissajous con la misma formación en triángulo, la posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ . La trayectoria de Lissajous que se quiere seguir es  $x_d = 3\text{sen}(4 * \pi t + \alpha)$ ,  $y_d = 3\text{sen}(3 * \pi t + \beta)$ ,  $z_d = 2m$ . La figura se muestra en 55.



**Figura 55.** Exploración de la superficie con trayectoria de Lissajous 2.

**Nota:** se observa en la simulación que se sale un poco de la superficie de exploración pero se logra disminuir el área que antes no se alcanzaba a explorar con la trayectoria anterior.

Se puede observar tanto en la figura 54 y 55 que tienen la misma trayectoria de Lissajous, que la formación en que se encuentran los cuadracópteros afecta el área de exploración en este caso el rectángulo.

Ahora empleando estas trayectorias en un caso donde se quiera explorar dicha superficie en la cual se encuentra un objeto colocado aleatoriamente en el área. Se propone colocar un círculo para poder tener una perspectiva de la localización del objeto en la superficie con formación en línea horizontal. El tamaño del objeto se tendrá que variar para ver si alguna trayectoria pasa por arriba de el en la simulación.

### 7.0.1. Detección de un objeto en la superficie de exploración

El objeto que se desea encontrar dentro del área de búsqueda en este caso es un círculo el cual va variando de tamaño con respecto al porcentaje total de la superficie de búsqueda. El objeto que se desea encontrar es un círculo que este se coloca aleatoriamente dentro del área de exploración. Para saber

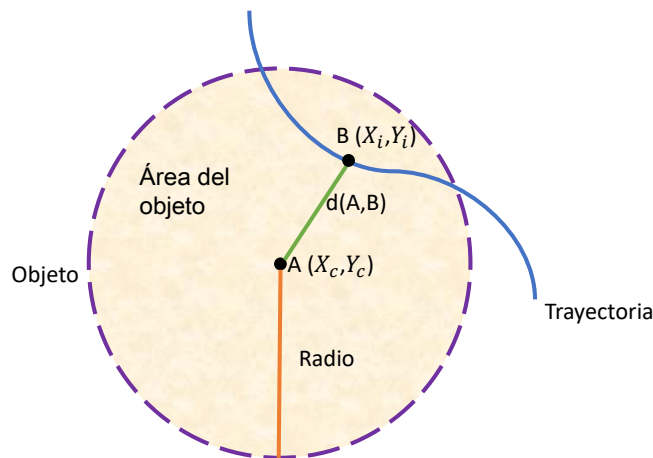
si cualquiera de los 5 cuadracópteros lo detecta se hace mediante las coordenadas de los cuadracópteros y las coordenadas donde se localiza el centro de este círculo, tomando en cuenta el radio de dicho objeto. La detección se hace mediante las coordenadas de cada cuadracóptero y las coordenadas del centro del objeto calculando la distancia de ellos mediante la siguiente relación.

$$d(A, B) = |\vec{AB}| \quad (165)$$

Sustituyendo las coordenadas del centro del círculo y la posición del cuadracóptero, se obtienen los elementos del vector A y B. Se calcula la distancia con la siguiente expresión:

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(X_i - X_c)^2 + (Y_i - Y_c)^2} \quad (166)$$

En donde  $X_i$  y  $Y_i$  son las coordenadas de los cuadracópteros,  $X_c$  y  $Y_c$  son las coordenadas del centro del círculo. En la figura 56 se observa como se hace la detección.



**Figura 56.** Detección de objeto.

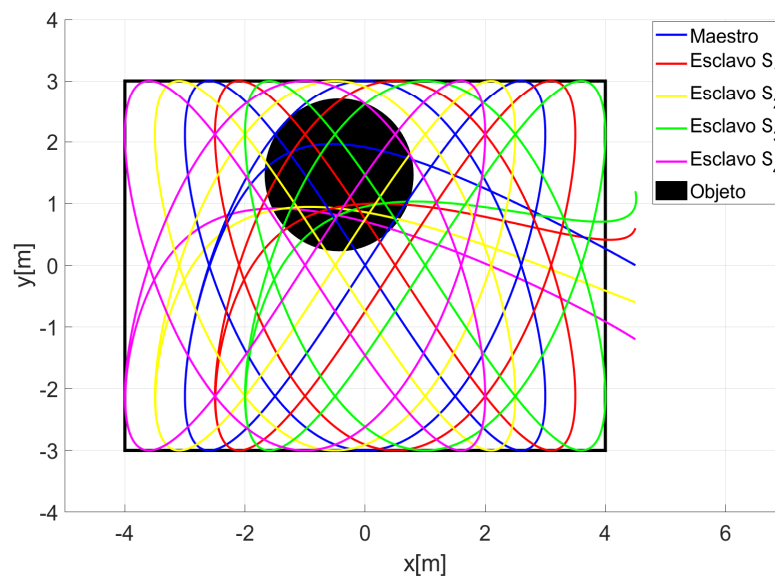
Dentro del análisis se define que si algún punto de las trayectorias de los cuadracópteros es menor o igual que el radio del círculo nos indica que este punto está dentro del área del objeto, por lo cual se dice que fue detectado

y en el caso que mas de una trayectoria pasara por esta área se diferenciaría cual fue el cuadracóptero que paso primero y cumplió con esta condición.

En primera instancia se variará el área del objeto con respecto al área de exploración, se empezara con el 10% del valor e irá disminuyendo el área del objeto hasta el 1% del total del área a explorar que en este caso es de 48 metros cuadrados. Se realizará la simulación para las dos curvas de lissajous.

Se realiza una simulación con la primera curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro.

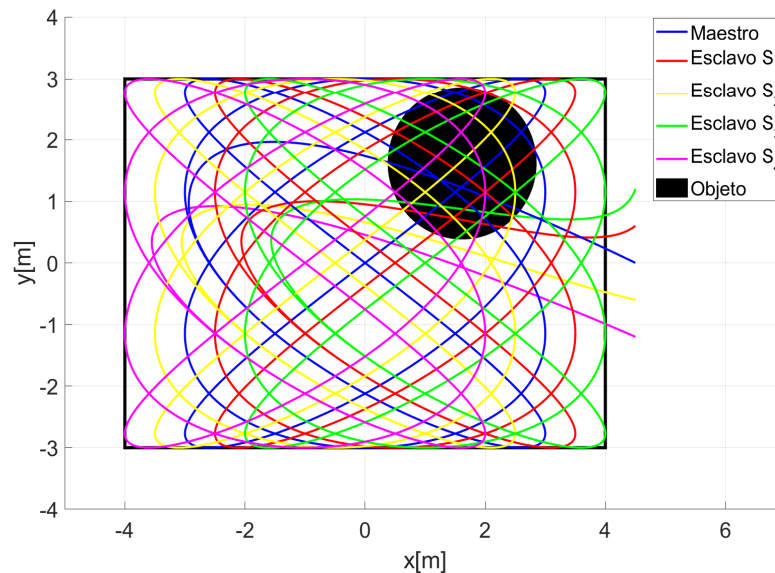
La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 57.** Curva 1 con el objeto variado 10% del área de exploración.

Ahora se realiza una simulación con la segunda curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro.

La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



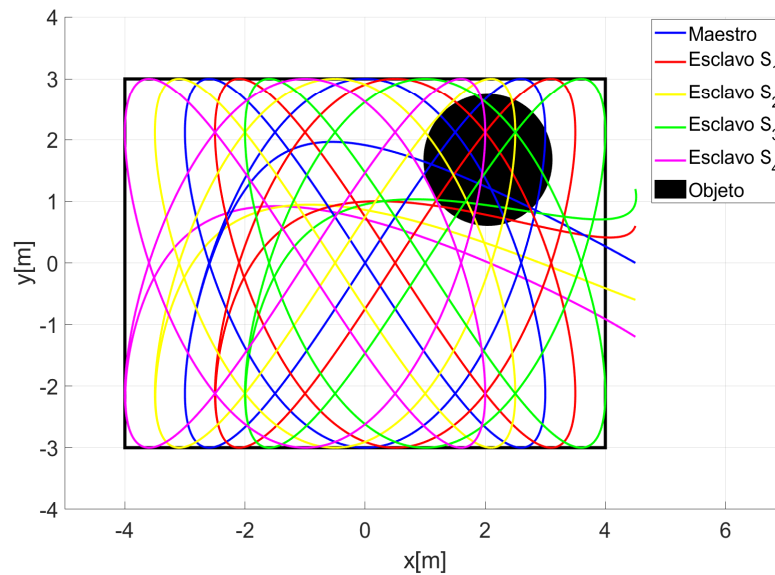
**Figura 58.** Curva 2 con el objeto variado 10% del área de exploración.

Como se puede observar en la figura 57 y 58 las dos curvas son capaces de encontrar el objeto colocado en la superficie, incluso si el objeto se sale un poco de la superficie de exploración. Se variará nuevamente el área del objeto ahora con un 7.5% del área total de búsqueda, se emplearan las mismas curvas de Lissajous.

Se realiza una simulación con la primera curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras

que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D_2$ ) de 1 metro.

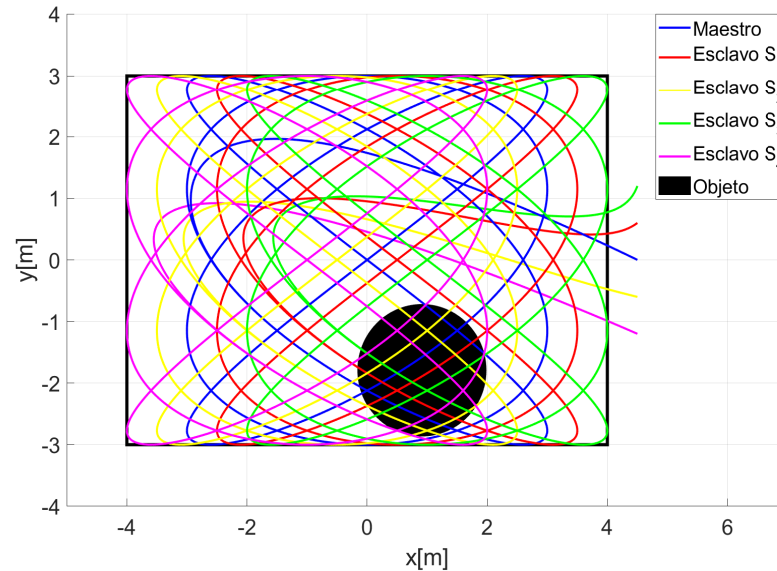
La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 59.** Curva 1 con el objeto variado 7.5 % del área de exploración.

Ahora se realiza una simulación con la segunda curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia ( $D_1$ ) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D_2$ ) de 1 metro.

La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .

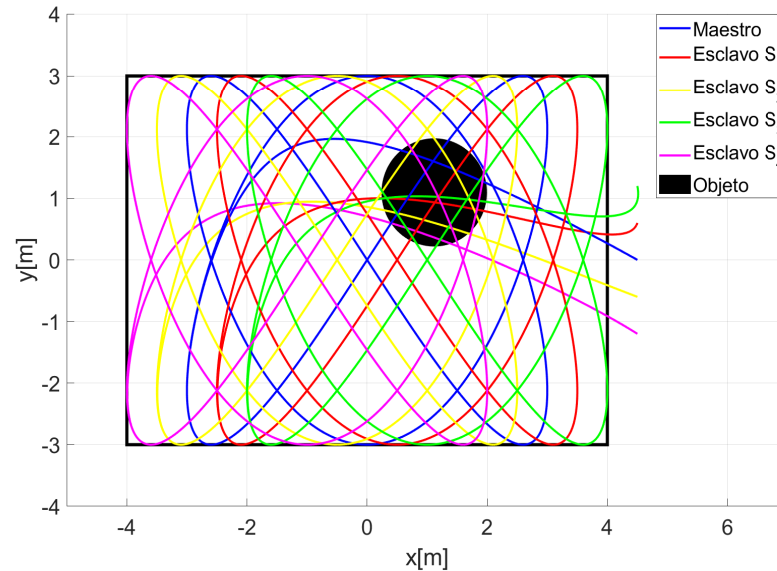


**Figura 60.** Curva 2 con el objeto variado 7.5 % del área de exploración.

En las figuras 59 y 60 se observa que el área del objeto variada un 7.5 % del área de exploración de búsqueda si es encontrada por los cuadracópteros ya que pasan las trayectorias por encima del objeto, ahora se variará tomando el 5 % del área y se harán las simulaciones con las dos curvas.

Se realiza una simulación con la primera curva de lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia ( $D1$ ) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D2$ ) de 1 metro.

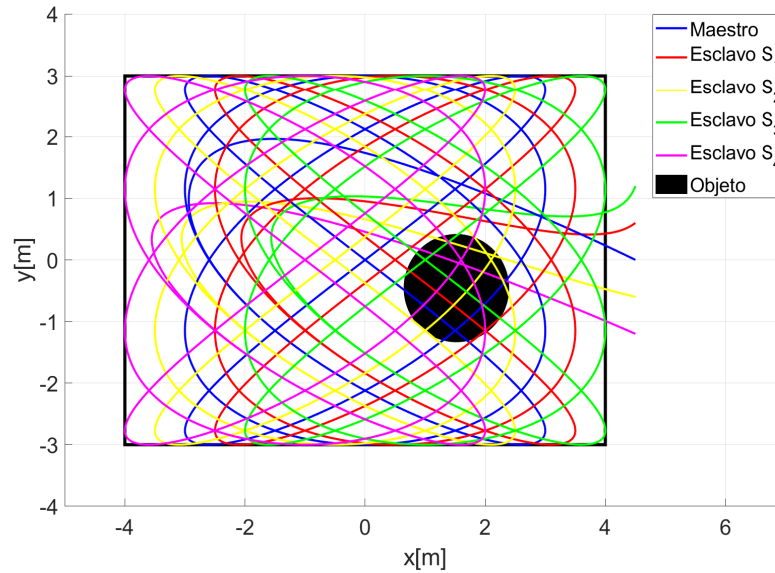
La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 61.** Curva 1 con el objeto variado 5 % del área de exploración.

Ahora se realiza una simulación con la segunda curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia ( $D1$ ) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D2$ ) de 1 metro.

La posición inicial del cuadricóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .

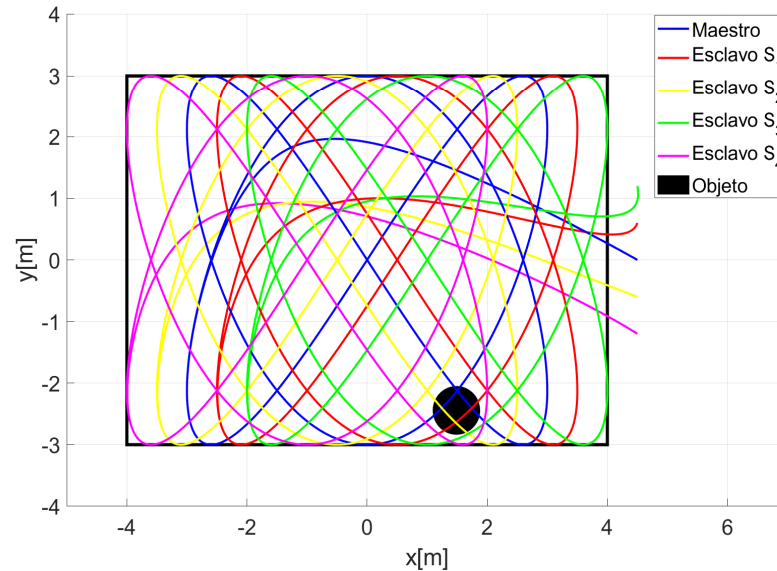


**Figura 62.** Curva 2 con el objeto variado 5 % del área de exploración.

En las figuras 61 y 62 se aprecia que los cuadracópteros encuentran el objeto en la superficie ya que al menos una trayectoria por encima de el, ahora se variará el tamaño del objeto en 1 % del área de búsqueda.

Se realiza una simulación con la primera curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder una distancia (D2) de 1 metro.

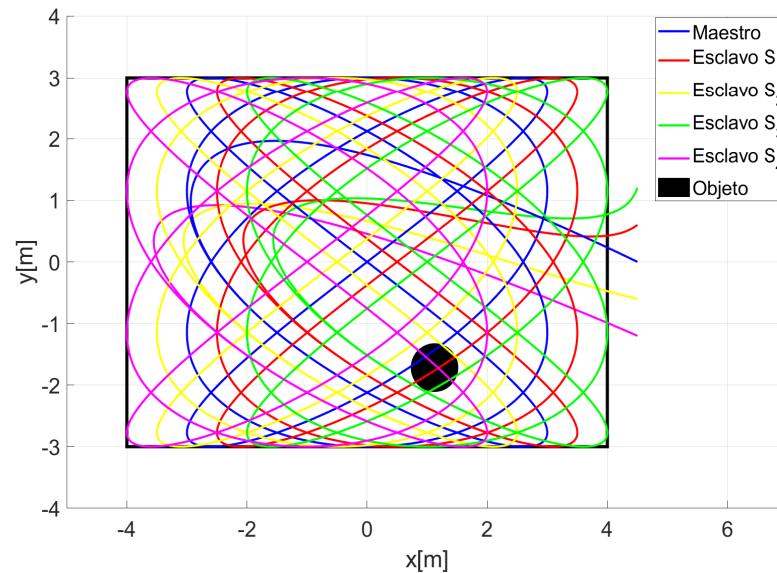
La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 63.** Curva 1 con el objeto variado 1% del área de exploración.

Ahora se realiza una simulación con la segunda curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia ( $D1$ ) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D2$ ) de 1 metro.

La posición inicial del cuadricóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



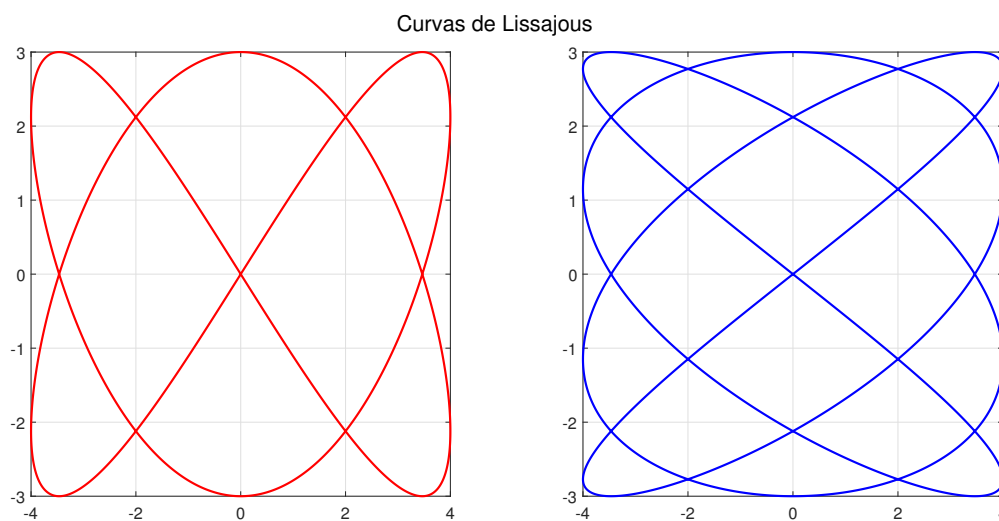
**Figura 64.** Curva 2 con el objeto variado 1 % del área de exploración.

Como se puede apreciar en las figuras 63 y 64 que el objeto es encontrado tanto para las dos curvas ya que al menos una trayectoria de los cuadracópteros pasa por encima de dicho objeto.

Como se puede observar desde la figura 57 hasta la figura 64 se ha estado variando el tamaño del objeto con respecto a la superficie de búsqueda y se ha encontrado que las dos trayectorias si logran encontrar dicho objeto que ha sido variado desde un 10% de la superficie de búsqueda hasta el 1%, ahora se variará aún mas el tamaño del objeto con un porcentaje menor al 1% de la superficie total de búsqueda y se realizaran varias pruebas con las trayectorias para ver la eficiencia con que se localiza el objeto.

## Pruebas de búsqueda

Para observar con que eficiencia cada una de las trayectorias encuentra el objeto en la superficie deseada, se creará una tabla en la cual se realizarán 10 pruebas variando el tamaño del objeto, además de ver en que tiempo se encuentra a dicho objeto en la superficie. En la siguiente figura 65 se muestran las trayectorias de las curvas de Lissajous empleadas para la búsqueda sobre el área de exploración, se realizarán las primeras 10 pruebas en búsqueda del objeto con la primera curva en este caso la de color rojo y posteriormente con la segunda curva de lissajous.



**Figura 65.** Trayectorias de Lissajous.

En las siguientes tablas 2 y 3 se muestran los resultados de las 10 pruebas obtenidas con las dos trayectorias de las curvas de Lissajous empleadas.

**Tabla 2.** Pruebas de la primera curva de Lissajous.

Objeto en búsqueda	Pruebas										Promedio segundos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.5% T. C.	1.479	0.7762	0.730	0.817	0.812	0.692	0.960	0.644	0.661	0.683	0.825
0.24 m <sup>2</sup> T. B.	92.640	199.116	177.124	31.137	98.329	178.139	21.092	178.8868	206.832	75.529	125.882
0.3% T. C.	0.597	0.731	0.654	0.842	0.606	0.574	0.583	0.576	0.583	75.529	0.634
0.144 m <sup>2</sup> T. B.	123.199	75.573	20.171	117.262	107.2295	99.208	42.816	138.425	92.367	210.752	102.7
0.1% T. C.	0.571	0.562	0.579	0.565	0.560	0.564	0.571	0.568	0.566	0.560	0.567
0.048 m <sup>2</sup> T. B.	86.685	63.198	0	43.985	37.534	200.242	111.211	30.216	0	205.623	77.869
0.01% T. C.	0.556	0.566	0.562	0.569	0.575	0.567	0.561	0.562	0.593	0.587	0.57
0.0048 m <sup>2</sup> T. B.	555.945	0	78.558	0	0	0	246.259	0	416.333	0	129.71

**Tabla 3.** Pruebas de la segunda curva de Lissajous.

Objeto en búsqueda	Pruebas										Promedio segundos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0.5% T. C.	0.578	0.577	0.584	0.575	0.585	0.735	0.626	0.646	0.626	0.770	0.63
0.24 m <sup>2</sup> T. B.	29.500	99.187	14.564	57.565	137.566	19.111	59.784	66.787	176.369	27.400	68.783
0.3% T. C.	0.717	0.852	0.595	0.741	0.654	0.8164	0.838	0.934	0.867	0.627	0.764
0.144 m <sup>2</sup> T. B.	31.714	220.877	24.845	18.589	48.548	117.599	26.211	214.846	36.041	321.978	106.125
0.1% T. C.	0.594	0.565	0.571	0.566	0.565	0.599	0.589	0.582	0.580	0.578	0.5789
0.048 m <sup>2</sup> T. B.	206.208	29.929	65.203	83.054	138.908	136.386	19.584	35.794	29.118	57.899	80.208
0.01% T. C.	0.995	0.678	0.578	0.580	0.577	0.577	0.586	0.585	0.592	0.588	0.635
0.0048 m <sup>2</sup> T. B.	0	1064.937	0	0	99.999	0	85.915	171.018	0	0	142.187

**NOTA:** T.C. Es el tiempo de cómputo en que se realiza la simulación y T.B. Es el tiempo en que tarda algunos de los cuadracópteros en encontrar al objeto.

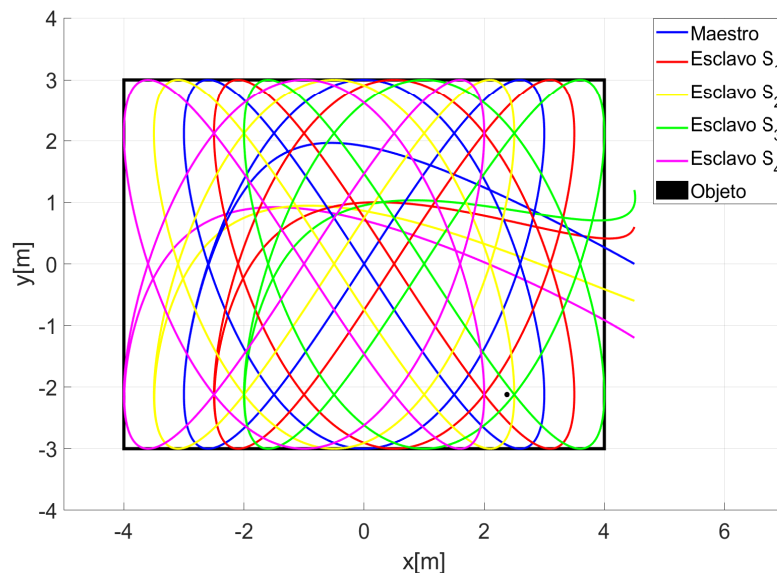
Haciendo un análisis de los resultados obtenidos en las tablas 2 y 3, se puede observar que el objeto con el tamaño del 1% con respecto a la superficie de búsqueda, con la primera curva de Lissajous en dos pruebas no se logra localizar al objeto y que empleando la segunda curva de Lissajous se encuentra el objeto en las 10 pruebas.

Si se varía el tamaño hasta un 0.01% de la superficie de búsqueda se observa que en las dos curvas de Lissajous hay varias pruebas que no lo encuentran, que es más o menos el 60% de pruebas. Esto se debe a que el objeto es pequeño, además de que una curva no pasa por encima de él. El objeto que se desea encontrar es un círculo, a continuación se muestra una tabla con los tamaños del objeto que se ha estado buscando.

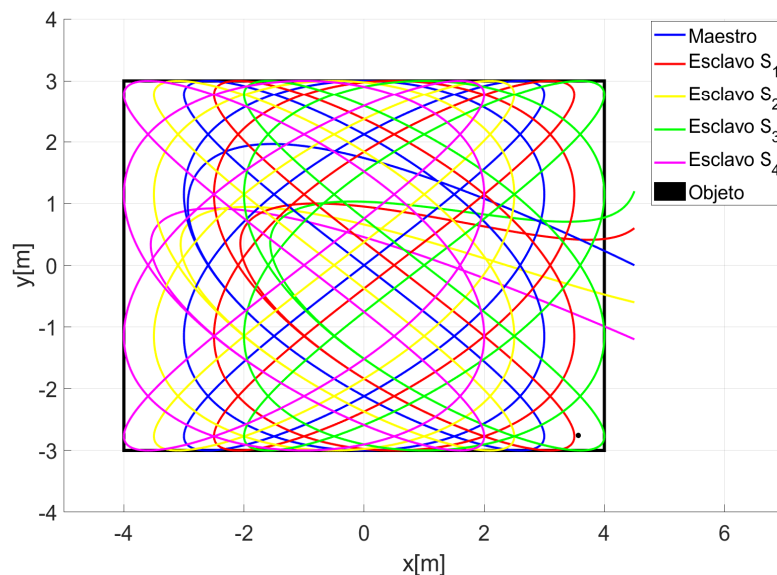
**Tabla 4.** Dimensiones del objeto

Porcentaje de superficie	Área del objeto	Radio
10%	$4.8 \text{ m}^2$	1.23 m
7.5%	$3.6 \text{ m}^2$	1.07 m
5%	$2.4 \text{ m}^2$	0.87 m
1%	$0.48 \text{ m}^2$	0.39 m
0.5%	$0.24 \text{ m}^2$	0.27 m
0.3%	$0.144 \text{ m}^2$	0.21 m
0.1%	$0.048 \text{ m}^2$	0.12 m
0.01%	$0.0048 \text{ m}^2$	0.039 m

En los casos de que el objeto es muy pequeño y no se puede encontrar por alguno de los cuadracópteros se debe a que ninguna de las dos curvas de Lissajous pasa por encima de dicho objeto como se puede ver en la siguiente figura 66 y 67 .



**Figura 66.** Búsqueda del objeto con la primera curva de Lissajous.

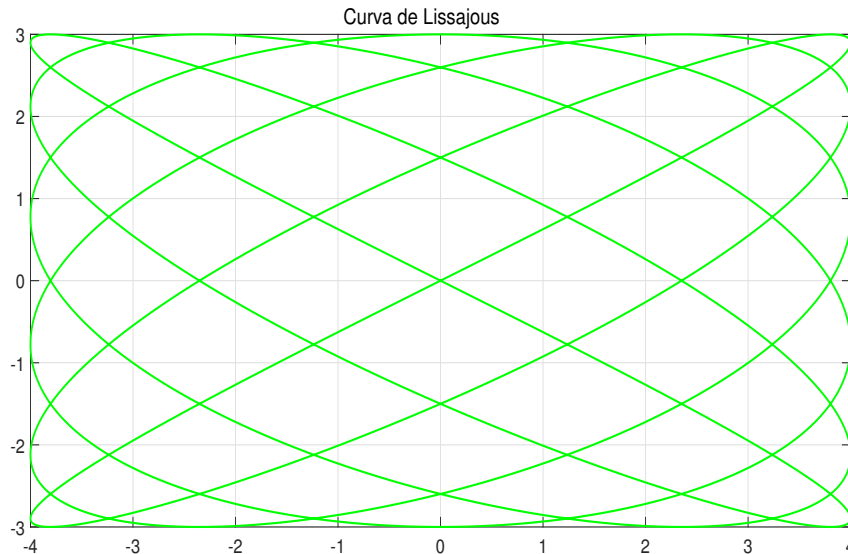


**Figura 67.** Búsqueda del objeto con la segunda curva de Lissajous.

Se observa que en la figura 66 y 67 que ninguna de las trayectorias pasa por encima del objeto por lo que se considera que no fue encontrado, una causa puede ser debido a que el objeto es pequeño y este tendría un diámetro aproximado de 8 cm. Una forma para poder hallar el objeto por cualquier cuadracóptero sería incrementar la frecuencia de las curvas para obtener una trayectoria mas compacta o tal vez cambiar la formación y distancia entre cua-

dracópteros.

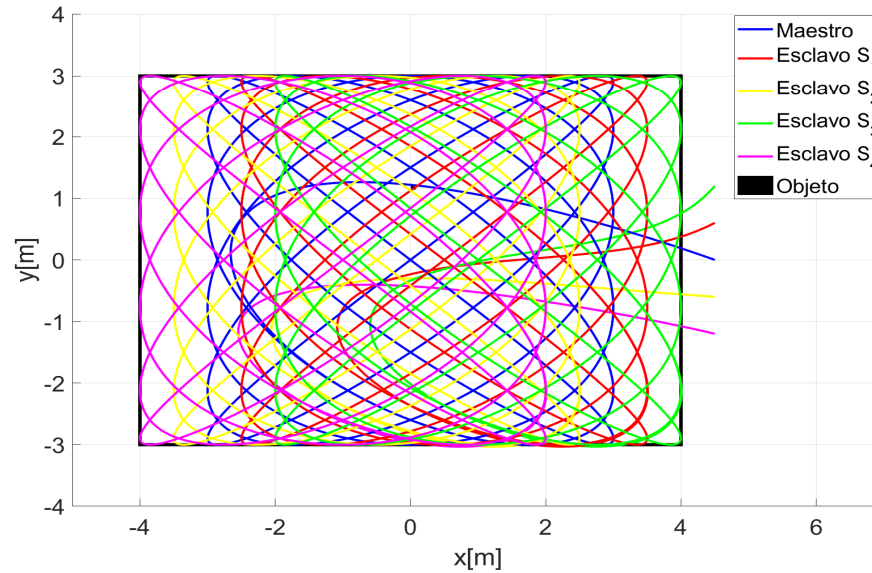
Se propone cambiar la frecuencia de la trayectoria para obtener una curva de Lissajous mas compacta como se muestra en la siguiente figura 68:



**Figura 68.** Curva de Lissajous.

Con esta curva se probarán de nuevo la formación tanto en línea horizontal y vertical para observar si encuentran el objeto colocado aleatoriamente sobre la superficie de búsqueda. Se realizaron 10 experimentos de los cuales se creó una tabla con dichos resultados.

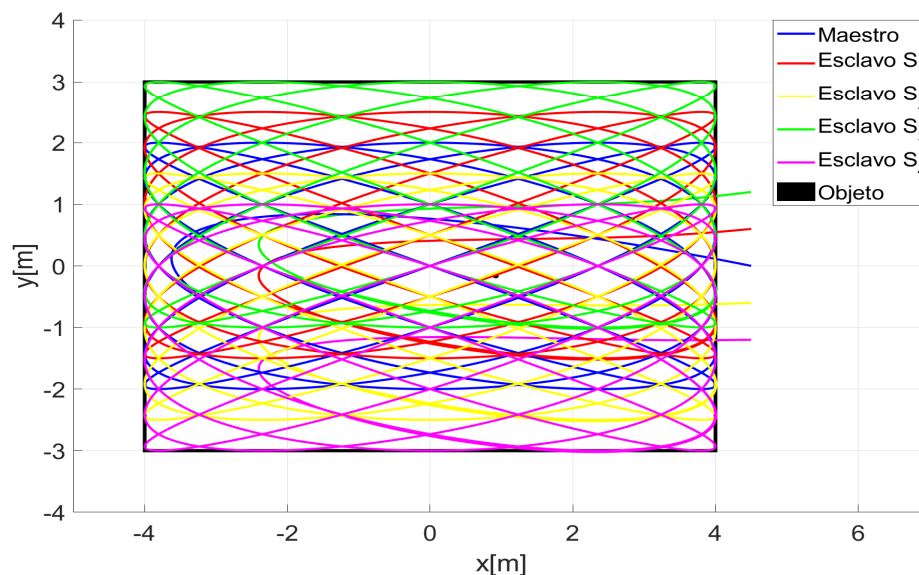
Se realizó una simulación con curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro. La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 69.** Búsqueda del objeto con curva de Lissajous en formación horizontal.

En la figura 69 se puede observar que el cuadracóptero esclavo  $S_1$  y el cuadracóptero maestro pasan por encima del objeto con lo cual se asume que fue detectado por alguno de los dos.

Se realizó una simulación con curva de Lissajous en una formación en línea vertical en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia ( $D1$ ) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia ( $D2$ ) de 1 metro. La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 70.** Búsqueda del objeto con curva de Lissajous en formación vertical.

Como se puede observar en la figura 70 anterior al menos 2 cuadrcópteros pasan por encima del objeto, por lo que se considera que dicho objeto fue detectado en la superficie de búsqueda por algún cuadrcóptero.

En la siguiente tabla 5 se muestran las 10 pruebas realizadas con esta curva de Lissajous además de las dos formaciones empleadas que es en línea vertical y horizontal.

**Tabla 5.** Pruebas con la curva de Lissajous en formación línea horizontal.

Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	1	2	3	4	5	
0.01 %	0.6829	0.703	0.670	0.692	0.575	...
0.0048 $m^2$	216.590	278.832	0	929.259	0	...
Posición en X	-2.954	-1.754	3.624	-2.712	3.621	
Posición en Y	2.447	0.277	2.752	2.786	-0.086	
Cuadrcóptero que lo encontró	Maestro	Esclavo 3		Maestro		

**Tabla 6.** Pruebas con la curva de Lissajous en formación línea horizontal.

Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	6	7	8	9	10	
0.01 %	0.588	0.570	0.612	0.605	0.627	0.627
0.0048 m <sup>2</sup>	367.119	0	139.414	1040.251	308.384	308.384
Posición en X	2.378	2.765	1.415	1.632	-1.767	
Posición en Y	-2.120	2.765	1.526	-2.772	-2.687	
Cuadracóptero que lo encontró	Maestro	Esclavo 3		Esclavo 2	Esclavo 3	

**Tabla 7.** Pruebas con la curva de lissajous en formación línea vertical.

Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	1	2	3	4	5	
0.01 %	0.589	0.595	0.621	0.595	0.618	...
0.0048 m <sup>2</sup>	164.293	501.441	0	239.767	0	...
Posición en X	-2.954	1.048	-1.754	3.624	3.621	
Posición en Y	2.447	-2.383	0.277	2.752	-0.086	
Cuadracóptero que lo encontró	Esclavo 2	Esclavo 1		Maestro		

**Tabla 8.** Pruebas con la curva de lissajous en formación línea vertical.

Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	6	7	8	9	10	
0.01 %	0.610	0.610	0.606	0.608	0.608	0.606
0.0048 m <sup>2</sup>	148.25	0	0	0	190.795	124.455
Posición en X	2.378	2.314	1.233	2.765	1.415	
Posición en Y	-2.120	2.721	-2.7496	2.570	1.526	
Cuadracóptero que lo encontró	Esclavo 1				Esclavo 2	

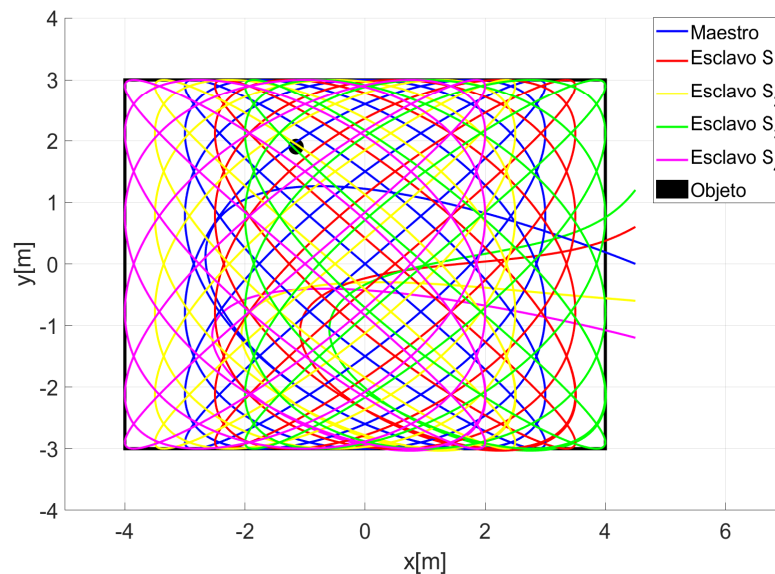
Con los datos obtenidos en las tablas 5 y 6 se puede observar que con la curva de Lissajous y en formación de una línea horizontal se tienen más eventos en los que se encuentra el objeto en la superficie de búsqueda que si se hiciese con la formación en línea vertical con las pruebas obtenidas en las tablas 7 y 8 . Además comparando con la trayectoria anterior que se estaba empleando ahora se tienen mas aciertos comparado con la tabla 2.

Se ha decidido hacer 10 pruebas ahora con el objeto colocado aleatoriamente en la superficie con el 0.1 % del área del objeto con respecto a la superficie

total de búsqueda, calculando esta área nos da como resultado que el objeto tiene un radio de 12.3 *cm*. Se realizan las simulaciones y en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos.

Se realizarán las simulación con curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro.

La posición inicial del cuadracóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$ .



**Figura 71.** Búsqueda del objeto del 0.1 %.

**Tabla 9.** Pruebas con la curva de lissajous formación en línea horizontal.

Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	1	2	3	4	5	
0.1%	0.622	0.624	0.620	0.620	0.631	...
0.0048 m <sup>2</sup>	966.648	389.800	309.201	759.661	958.754	...
Posición en X	2.439	-2.891	1.026	-1.717	3.546	
Posición en Y	2.334	2.378	-2.315	0.269	2.674	
Cuadracóptero que lo encontró	Esclavo 2	Maestro	Maestro	Esclavo 3	Esclavo 1	

**Tabla 10.** Pruebas con la curva de lissajous formación en línea horizontal.

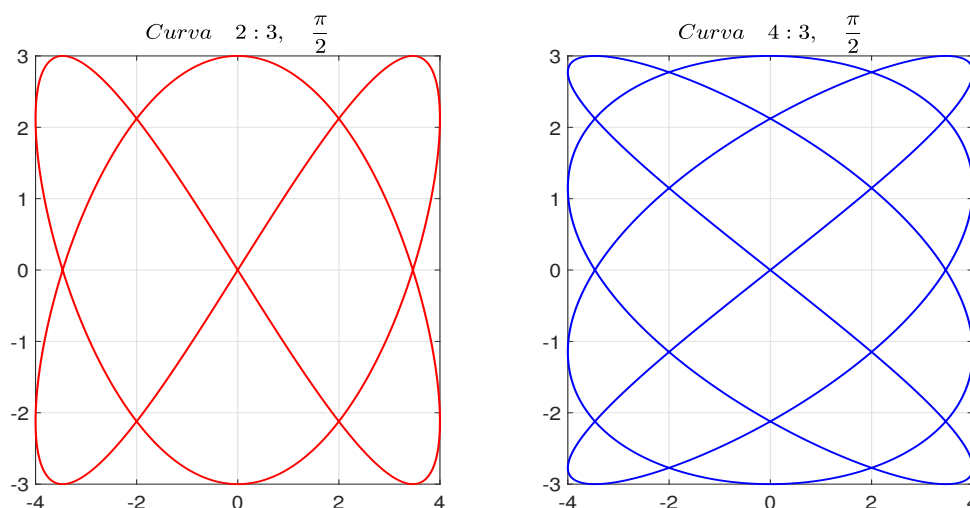
Área del objeto de búsqueda	Pruebas					Promedio segundos
	6	7	8	9	10	
0.1%	0.626	0.629	0.628	0.630	0.736	0.637
0.0048 m <sup>2</sup>	147.690	250.066	128.67	1047.094	72.773	503.036
Posición en X	-2.654	2.328	-0.606	2.265	1.207	
Posición en Y	-2.654	-2.060	2.391	2.643	-2.670	
Cuadracóptero que lo encontró	Esclavo 2	Maestro	Esclavo 3	Esclavo 2	Esclavo 3	

En las tablas 9 y 10 se puede observar que de las 10 pruebas realizadas para encontrar el objeto aleatoriamente en la superficie de búsqueda al menos un cuadracóptero encontró dicho objeto.

Como se puede observar una formación puede abarca un poco mas de área de superficie en exploración aunque hay que tomar en cuenta también el área que puede observar la cámara que portaría el cuadracóptero.

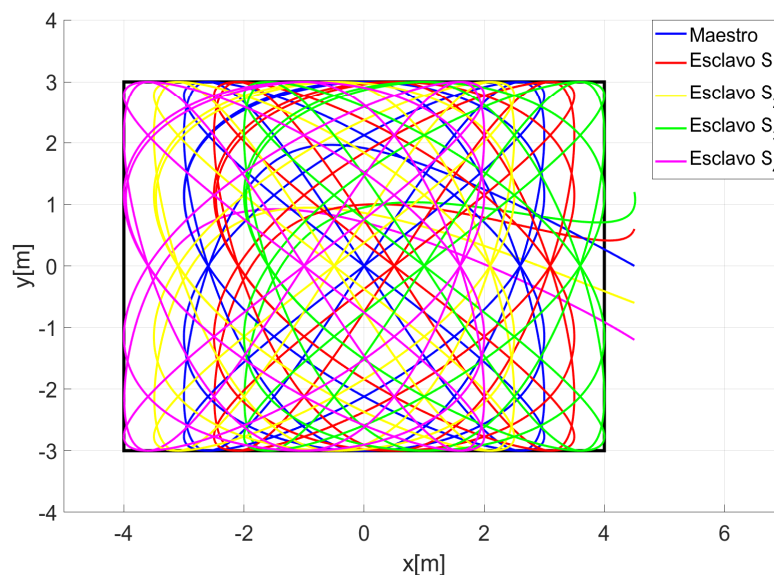
Observando la figura 71 hay zonas en las que si el objeto llegase a colocarse en dicha posición ninguna de las trayectorias de los cuadracópteros sería capaz de detectarlo por lo que una posible solución para dicho inconveniente sería la combinación de dos trayectorias de lissajous.

Para ello se realiza la combinación de las siguientes dos curvas de Lissajous como se muestran en la figura 72.



**Figura 72.** Curvas de Lissajous.

Con la combinación de estas dos curvas de Lissajous se espera que las zonas donde se observaba que ninguna trayectoria que realizaban los cuadracópteros pasaba por estas zonas ahora si puedan ser alcanzados por alguna de las trayectoria de los cuadracópteros. La combinación de estas dos curvas de Lissajous realizadas por los cuadracópteros se muestra en la figura 73.



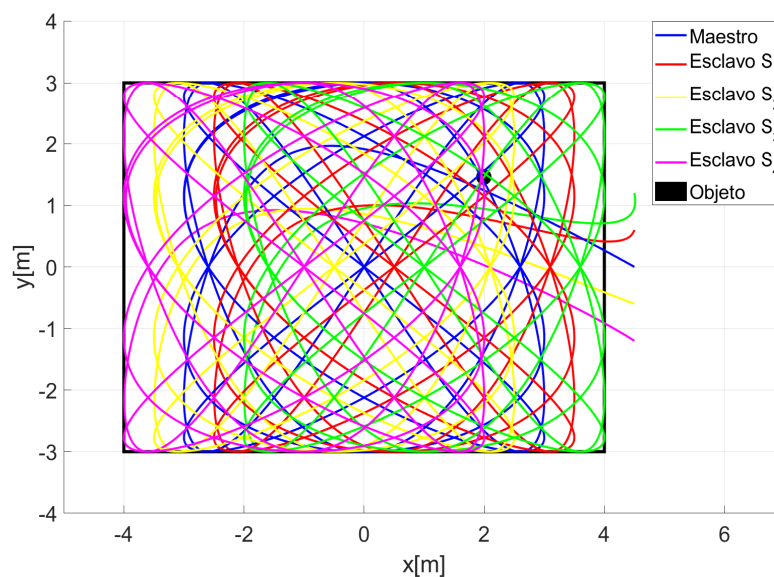
**Figura 73.** Combinación de las dos curvas de Lissajous con los cuadracópteros.

Ahora se procederá a la búsqueda de un objeto colocado aleatoriamente en el área y en cuanto al tamaño de dicho objeto se ha decidido que con

el tamaño de 0.1 % del total de la superficie de exploración se considera un tamaño adecuado para ser buscado.

Se realiza la simulación con la combinación de las curva de Lissajous en una formación en línea horizontal en donde se desea que los esclavos  $S_1$  y  $S_2$  estén separados una distancia (D1) de 0.5 metros con respecto al líder  $M$  mientras que los esclavos  $S_3$  y  $S_4$  estén separados con respecto al líder  $M$  una distancia (D2) de 1 metro.

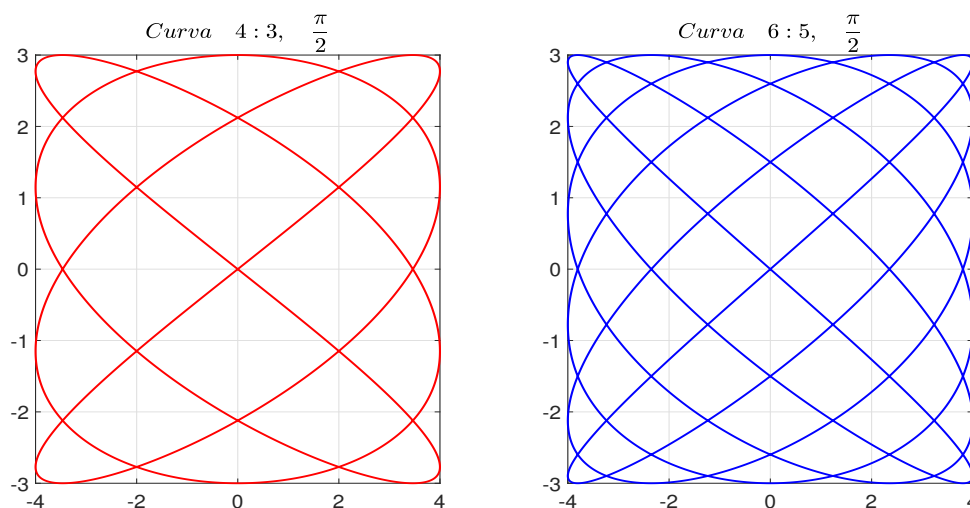
La posición inicial del cuadrcóptero maestro es  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (4.5, 0, 0)$ , la posición del primer esclavo es  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4.5, 0.6, 0)$ , la del segundo esclavo es  $(x_3(0), y_3(0), z_3(0)) = (4.5, 1.2, 0)$ , la del tercer esclavo es  $(x_4(0), y_4(0), z_4(0)) = (4.5, -0.6, 0)$  y la del cuarto esclavo es  $(x_5(0), y_5(0), z_5(0)) = (4.5, -1.2, 0)$



**Figura 74.** Búsqueda del objeto con la combinación de curvas de Lissajous.

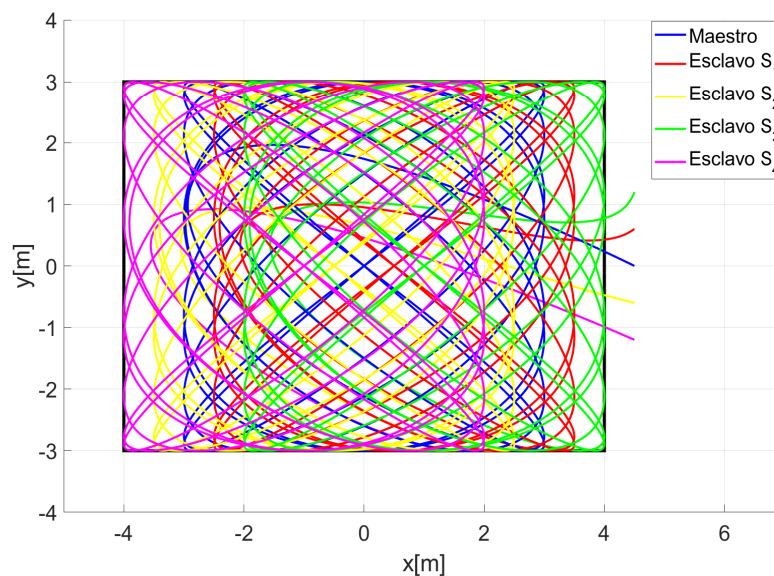
Como se puede observar en la figura 74 varias de las trayectorias de los cuadrcópteros tocan al objeto por lo cual asumimos que fue detectado, pero igual se observan que hay áreas en las que ninguna trayectoria de los cuadrcópteros toca la superficie por lo cual si el objeto en búsqueda llegase a colocarse en dichas áreas no sería detectado. Para ello se procederá a realizar otra combinación de curvas de Lissajous, las curvas de lissajous que se

combinaran serán las mostradas en la figura 75.



**Figura 75.** Combinación de las dos curvas de Lissajous con los cuadracópteros.

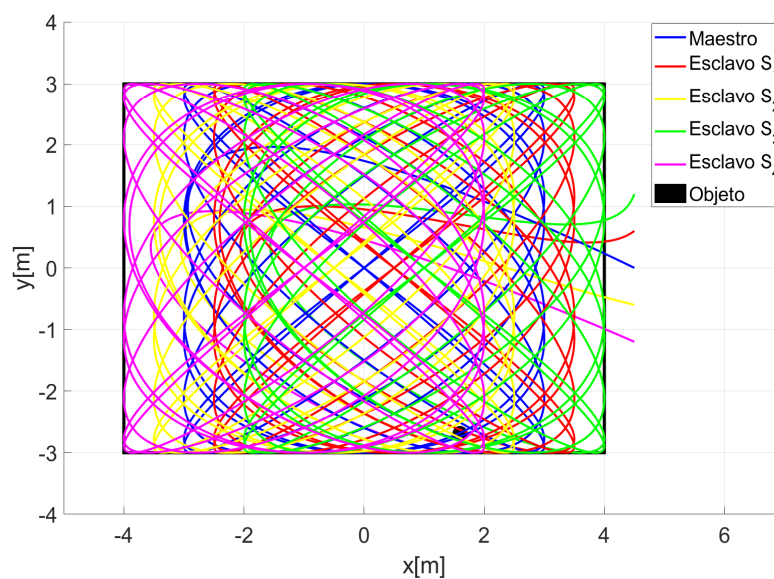
La combinación de estas dos curvas de Lissajous realizadas por los cuadracópteros se muestra en la figura 76.



**Figura 76.** Combinación de las dos curvas de lissajous con los cuadracópteros.

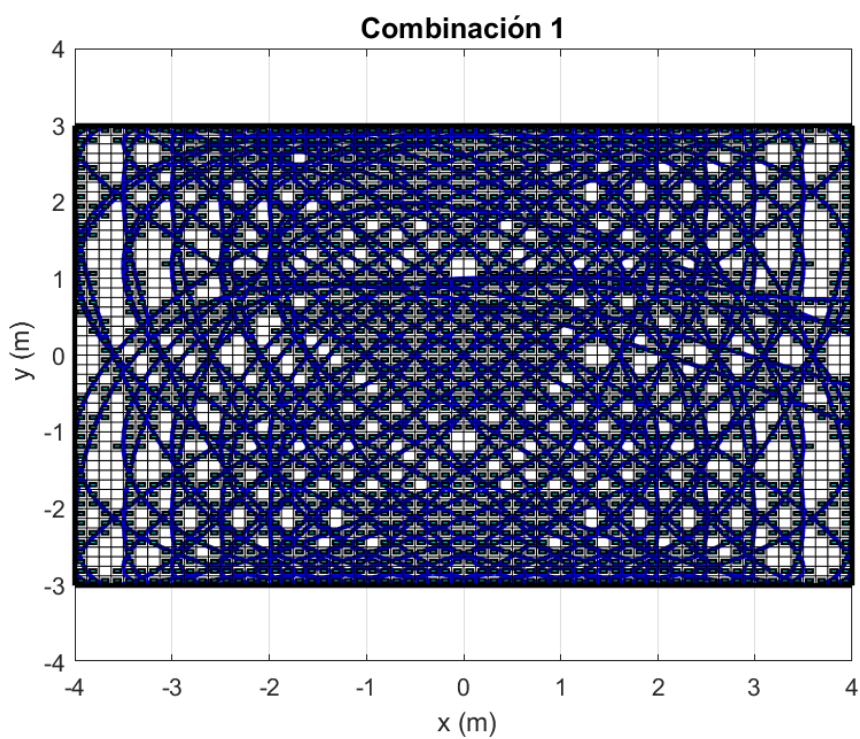
Como se puede observar en la figura 76 varias de las trayectorias de los cuadracópteros ahora si pasan por las áreas sin explorar que con la combinación de trayectorias anterior no pasaban por estas superficies. Se procederá a

realizar una simulación de la búsqueda de un objeto con las condiciones iniciales de la simulación anterior, esto se muestra en la figura 77.

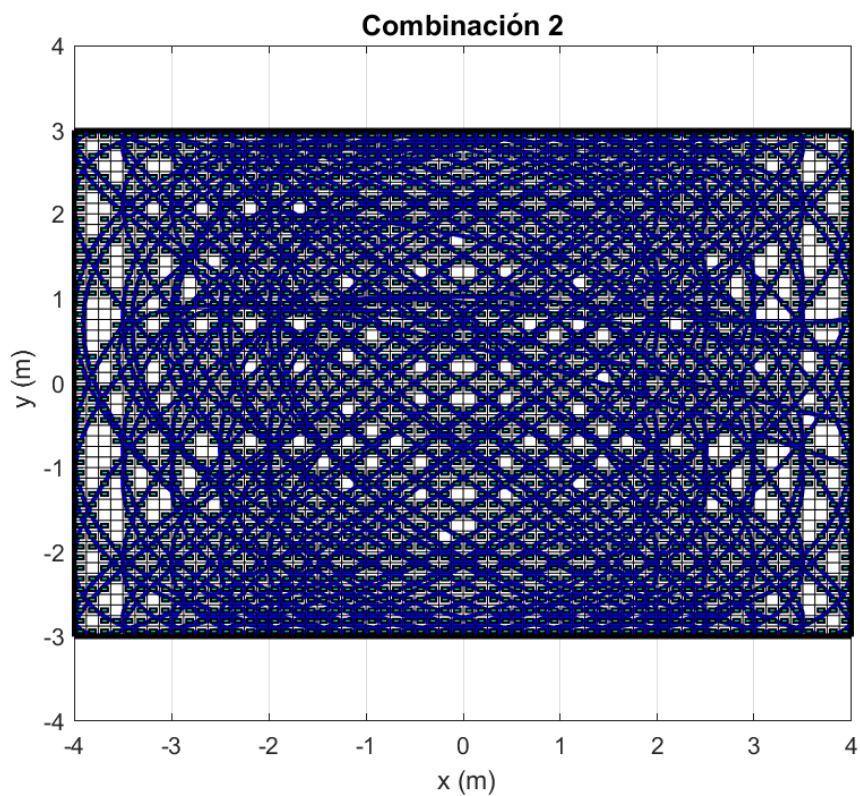


**Figura 77.** Búsqueda del objeto con la combinación de curvas de Lissajous.

Como se observa en la figura 77 el objeto fue detectado por al menos dos cuadracópteros. Una forma para saber que tanto de área se detecta por las trayectorias de todos los cuadracópteros es mediante el conteo de cajas, ver Foroutan-pour *et al.* (1999) y Cetina Denis (2017). Para ello se comparara las dos combinaciones realizadas y teniendo en cuenta que estas cajas son mucho mas pequeñas en dimensión que el objeto que se desea buscar en la superficie.



**Figura 78.** Conteo de cajas de la combinación 1.



**Figura 79.** Conteo de cajas de la combinación 2.

En la figura 78 se hace el conteo de cajas del cual se obtiene el dato que el área total que se abarca de búsqueda corresponde a un 84.4% de la superficie total de búsqueda y en la figura 79 se tiene el data que se logra explorar la superficie en un 92.83% del total del área de búsqueda.

### **Conclusiones del capítulo**

Se realizaron simulaciones para la detección de un objeto en una superficie regular, en la cual una red de cuadracrópteros seguía una trayectoria que exploraba dicha área con los agentes en una formación en específico y de detectaba al objeto. Se obtuvieron mejores resultados con la combinación de trayectorias que si fuera una sola trayectoria para la búsqueda del objeto.

## Capítulo 8. Conclusiones

---

Los comportamientos emergentes observados en la naturaleza pueden reproducirse en la robótica para obtener beneficios con estos en una simplificación específica. Se aplica la teoría de grafos así como el control no lineal para diseñar un algoritmo de control para un modelo dinámico de un vehículo aéreo no tripulado tipo cuadracóptero, con ello se realiza la labor de búsqueda de un objeto.

Se definió un área a explorar la cual tiene una forma rectangular, además se emplearon varias formaciones para la búsqueda de un objeto colocado aleatoriamente dentro de esta zona donde la formación con mejor resultado fue una formación en línea horizontal. Las trayectorias en búsqueda del objeto siendo estas las de barrido presentaban desventaja por si el objeto quedaba en medio de la separación de los cuadracópteros para ello se emplearon trayectorias de Lissajous.

El tamaño del objeto se vario con respecto a la superficie de búsqueda y quedando de 0.1 % con respecto al área total de búsqueda, este es detectado por cualquier cuadracóptero que pase por encima de él. Aun así, hay zonas que no se exploraban por lo cual se combinaron trayectorias de Lissajous para reducir estas zonas sin explorar por algún cuadracóptero.

La combinación de estas curvas de Lissajous que varían en el tiempo produce mejores resultados que una sola curva, lo cual se verifico con el conteo de cajas al tener un 92 % del total del área de búsqueda que si se hiciera con una solo curva de lissajous.

Se pretende realizar experimentos en un grupo de cuadracópteros y emplear la formación así como también el algoritmo de control diseñado para la búsqueda de un objeto en una superficie que tenga una forma rectangular.

## **Trabajo futuro**

Con el algoritmo de control diseñado en esta tesis así como las simulaciones obtenidas se desea poder llevar estos resultados numéricos a la parte experimental con unos drones tipo cuadraóptero.

Diseñar otros algoritmos de control para la red de cuadraópteros y verificar su eficiencia en la búsqueda de objetos.

Probar otro tipo de trayectorias variantes en el tiempo por ejemplo de tipo caótico para la detección de objetos en superficies que tienen forma irregular, obteniendo en primera instancia resultados numéricos y posteriormente en experimentos.

## Literatura citada

- Abbas, R. y Wu, Q. (2013). Formation tracking for multiple quadrotor based on sliding mode and fixed communication topology. En: *Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC), 2013 5th International Conference on*. IEEE, Vol. 2, pp. 233–238.
- Adleman, L. M. (1998). Computing with DNA. *Scientific American*, **279**(8): 34–41.
- Alvarez, A. C. (1997). *Complejidad y caos guía para la administración del siglo XXI*. Ediciones Castillo.
- Antonio-Toledo, M. E., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y., Flórez, J., y Perez-Cisneros, M. A. (2018). Real-time integral backstepping with sliding mode control for a quadrotor uav. *IFAC-PapersOnLine*, **51**(13): 549–554.
- Bahceci, E., Soysal, O., y Sahin, E. (2003). A review: Pattern formation and adaptation in multi-robot systems. *Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RI-TR-03-43*.
- Bar-Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems*, Vol. 213. Addison-Wesley Reading, MA.
- Beckers, R., Deneubourg, J.-L., y Goss, S. (1992). Trails and u-turns in the selection of a path by the ant *Lasius niger*. *Journal of theoretical biology*, **159**(4): 397–415.
- Bouabdallah, S. (2007). *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tesis de doctorado, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausana.
- Bouabdallah, S. y Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. En: *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on IEEE*. pp. 2247–2252.
- Bouabdallah, S., Murrieri, P., y Siegwart, R. (2004). Design and control of an indoor micro quadrotor. En: *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*. IEEE, Vol. 5, pp. 4393–4398.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., y Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, **4**(1): 41–57.
- Cetina Denis, J. J. (2017). Diseño de trayectorias caóticas en robots móviles. *Centro de investigación y estudios superiores de Ensenada, Ensenada Baja California*, **1**(1): 28–36.
- Cormen, T. H. (2009). *Introduction to algorithms*. MIT press.

- Couzin, I. D., Krause, J., James, R., Ruxton, G. D., y Franks, N. R. (2002). Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of Theoretical Biology*, **218**(1): 1–11.
- Deng, Z. y Zhang, Y. (2007). Collective behavior of a small-world recurrent neural system with scale-free distribution. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **18**(5): 1364–1375.
- Diestel, R. (2024). *Graph theory*. Springer (print edition); Reinhard Diestel (eBooks).
- Dong, X., Zhou, Y., Ren, Z., y Zhong, Y. (2017). Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **64**(6): 5014–5024.
- Flemming, J. y Hornes, A. (2013). Lissajous-like figures with triangular and square waves. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **35**: 3702.
- Flores-Palmeros, P., Castillo, P., y Castanos, F. (2019). Backstepping-based controller for flight formation. En: *2019 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, pp. 263–269.
- Foroutan-pour, K., Dutilleul, P., y Smith, D. L. (1999). Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation. *Applied mathematics and computation*, **105**(2-3): 195–210.
- Fu, K., Gonzales, R., y Lee, C. (1987). Robotics: Control, sensing, vision, and intelligence. mcgrawhill. Inc., Singapore.
- Ivanov, D., Kalyaev, I., y Kapustyan, S. (2014). Method of circles for solving formation task in a group of quadrotor uavs. En: *Systems and Informatics (ICSAI), 2014 2nd International Conference on*. IEEE, pp. 236–240.
- Koksal, N., Fidan, B., y Buyukkabasakal, K. (2015). Real-time implementation of decentralized adaptive formation control on multi-quadrotor systems. En: *2015 European Control Conference (ECC)*. IEEE, pp. 3162–3167.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., y Kokotovic, P. V. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Wiley.
- Lakin, M. R., Youssef, S., Cardelli, L., y Phillips, A. (2012). Abstractions for DNA circuit design. *Journal of The Royal Society Interface*, **9**(68): 470–486.
- Lawrence, J. D. (2013). *A catalog of special plane curves*. Courier Corporation.
- Lippay, Z. S. y Hoagg, J. B. (2020). Leader-following formation control with time-varying formations and bounded controls for agents with double-integrator dynamics. En: *2020 American Control Conference (ACC)*. IEEE, pp. 871–876.
- Marion, J. B. (2013). *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press.

- Martínez Clark, R. (2014). Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles. *Centro de investigación y estudios superiores de Ensenada, Ensenada Baja California*, **1**(1): 33–39.
- Martínez Clark, R., Cruz Hernández, C., Reyes De la Cruz, D., Arellano Delgado, A., y Pinedo Lomelí, L. F. (2015). Formación de agentes: una aplicación al patrullaje. *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, pp. 483–488.
- Montañez-Molina, C., Pliego-Jiménez, J., y Cruz-Hernández, C. (2022). Formation control for robot networks with double integrator dynamics. En: *2022 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*. IEEE, pp. 589–594.
- Munné, F. (2005). ¿qué es la complejidad? what's complexity? *Encuentros de psicología social*, **3**(2): 6–17.
- Ottino, J. M. (2003). Complex systems. *AIChE Journal*, **49**(2): 292–299.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Vol. 12. Cambridge University Press.
- Saif, A., Dhaifullah, M., Al-Malki, M., y Shafie, M. (2012). Modified backstepping control of quadrotor. En: *9th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD)*. pp. 1–6.
- Sumpter, D. J. (2006). The principles of collective animal behaviour. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, **361**(1465): 5–22.
- Sumpter, D. J. (2010). *Collective animal behavior*. Princeton University Press.
- Swarup, A. y Sudhir (2014). Comparison of quadrotor performance using backstepping and sliding mode control. *International Conference on Circuits, Systems and Control*, **1**(1): 79–82.
- Tang, Z., Cunha, R., Hamel, T., y Silvestre, C. (2021). Formation control of a leader-follower structure in three dimensional space using bearing measurements. *Automatica*, **128**: 109567.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(05): 885–916.
- Watts, D. J. y Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, **393**(6684): 440.
- Yu, B., Dong, X., Shi, Z., y Zhong, Y. (2013). Formation control for quadrotor swarm systems: Algorithms and experiments. En: *Proceedings of the 32nd Chinese control conference*. IEEE, pp. 7099–7104.
- Zhao, J., Li, X., Yu, X., y Wang, H. (2021). Finite-time cooperative control for bearing-defined leader-following formation of multiple double-integrators. *IEEE Transactions on Cybernetics*.