



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

“OPTIMIZACIÓN DE MÚLTIPLES VARIABLES DE RESPUESTA UTILIZANDO LA FUNCIÓN DE DESEABILIDAD Y LA DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA BAYESIANA”

MITZY PORY LUGO

Para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERÍA

Director de tesis
DR. JORGE LIMÓN ROMERO

Ensenada, Baja California, México
Septiembre 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

“OPTIMIZACIÓN DE MÚLTIPLES VARIABLES DE RESPUESTA
UTILIZANDO LA FUNCIÓN DE DESEABILIDAD
Y LA DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA BAYESIANA”

TESIS

Para obtener el grado de
MAESTRA EN INGENIERÍA presenta:

MITZY PORY LUGO

Aprobada por el siguiente comité:



Dr. Jorge Limón Romero
Director de tesis



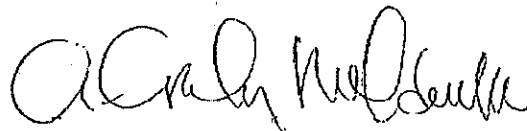
Dr. Diego Alfredo Tlapa Mendoza
Miembro del Comité



Dr. Guillermo Cortes Robles
Miembro del comité



Dra. Yolanda A. Báez López
Miembro del Comité



Dra. Aidé A. Maldonado Macías
Miembro del Comité

Ensenada, Baja California, México. Septiembre, 2015.

Resumen de la tesis de MITZY PORY LUGO presentada como requisito para la obtención del grado de MAESTRÍA EN CIENCIAS E INGENIERÍA del programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería de la UABC. Ensenada Baja California, México, Agosto de 2015.

“OPTIMIZACIÓN DE MÚLTIPLES VARIABLES DE RESPUESTA UTILIZANDO LA FUNCIÓN DE DESEABILIDAD Y LA DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA BAYESIANA”

Actualmente, lo que buscan las compañías, tanto de manufactura como de servicios, alrededor del mundo es mejorar su calidad con el fin de mantener a sus clientes cautivos, ya que esto determina su permanencia en el mercado. En ambos giros se tienen distintas características de calidad, las cuales deben ser consideradas en un análisis a la hora de optimizar dichos productos o servicios, lo cual lo convierte en un problema de optimización de múltiples variables.

En los últimos años se pueden encontrar diferentes trabajos que abordan el tema de optimización simultánea de múltiples variables de respuesta, en las cuales se deja atrás la opción de optimizar cada variable por separado, evitando soluciones contradictorias entre sí. Se han propuesto diversas alternativas propuestas de optimización simultánea, las cuales conllevan altos niveles de complejidad, esta problemática ha sido resuelta con la ayuda de los sistemas de cómputo, ejemplo de ello es el hecho de que existen paquetes estadísticos comerciales que cuentan con algunas de estas opciones, lo que los sitúa como los más conocidos y utilizados por las compañías, sin ser necesariamente las mejores alternativas.

En este trabajo se plantea modificar una técnica de optimización que utiliza el enfoque bayesiano, que es la distribución predictiva bayesiana, con la opción de aplicarle robustez e incorporando la posibilidad de agregar ponderaciones a las variables de respuesta como lo representa la metodología de la función de deseabilidad, en este caso se propone que los

pesos sean distintos, de esta manera se forma un híbrido de las metodologías Bayesiana y la función de deseabilidad, donde se toman las bondades de ambas propuestas.

La modificación consiste en sustituir la probabilidad de concordancia conjunta, por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales para cada variable de respuesta. Esta modificación permite incorporar una ponderación distinta para cada una de las variables de respuesta, de acuerdo con la importancia que tengan en la funcionalidad o costo del producto, después se calcula la deseabilidad global para las deseabilidades individuales, de tal forma que se convierte en una variable de respuesta unificadora, posteriormente se modelan estas deseabilidades mediante mínimos cuadrados ordinarios y por último se optimiza mediante el método de gradiente reducido generalizado.

Esta investigación demuestra mediante la representación de distintos escenarios, en dos casos de estudios tomados de la literatura, donde las deseabilidades más altas y a su vez los valores óptimos propuestos siempre se movieron hacia las regiones donde las variables tienen mayores pesos o ponderaciones, ésto a expensas del desempeño de las variables con menor ponderación. Lo que fue comprobado de manera visual mediante gráficas comparativas del comportamiento de cada variable de respuesta en los distintos escenarios y posteriormente de manera estadística construyendo intervalos de confianza del 95% para cada deseabilidad de cada variable de respuesta. Por lo que es posible concluir que la modificación planteada, sí ayuda a mejorar la flexibilidad de las metodologías tomadas como referencia, además de conservar sus bondades.

Palabra Clave: *Deseabilidad, enfoque bayesiano, distribución predictiva, optimización simultánea, deseabilidad global, media geométrica ponderada, ponderación, variable unificadora.*

A mis padres
Joel y Maribel

Agradecimientos

A DIOS por darme ese cobijo que día a día llevo conmigo, por ser tan bondadoso y brindarme grandes oportunidades como la que aquí se refleja, por ser mi fortaleza en momentos de debilidad, por brindarme una vida de experiencias maravillosas y sobre todo llenarme de amor y felicidad.

De manera muy especial le agradezco al Dr. Jorge Limón Romero por brindarme la oportunidad, orientación y todos aquellos consejos que son parte núcleo de este trabajo, sin su apoyo esto no sería posible.

Al Dr. *Diego Alfredo Tlapa Mendoza* por el apoyo brindado durante el tiempo de posgrado y sus sugerencias en la planeación de mis estudios de maestría.

A la Dra. *Yolanda Angélica Báez López* por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría, consejos y recomendaciones, siempre en apoyo a mi trabajo.

Al Dr. *Efraín Ruiz y Ruiz* por el apoyo, consejos orientación y aquellas aportaciones que influyeron en el desarrollo de mi tesis y también en mi estancia de investigación, gracias por su solidaridad.

En general a todos los doctores que conforman a mi comité de tesis y a los doctores que conforman el MyDCI que con su asesoría y paciencia fueron parte fundamental para lograr este objetivo. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

A mis padres *Joel Edmundo Pory Meza* y *Maribel Lugo Sepúlveda*, primero que nada gracias por darme la vida, gracias por su amor incondicional, por siempre estar al pendiente de mí, tanto económica como moralmente, los amo, no me alcanzaría una vida para demostrar mi agradecimiento.

A mis hermanos, *Joel* y *Noel*, por su amor, apoyo y compañía, ustedes son quienes me motivan un a ser ejemplo de vida, a superarme día con día, a crecer en todos los sentidos;

siempre estaré para apoyarlos, orientarlos y caminar por esta vida de la mano a su lado, así como sé que ustedes estarán en la mía.

A mi tía *Mónica*, por su apoyo incondicional, por ser mi amiga, por saber orientarme cada vez que me pueda perder en el camino y sobre todo por creer en mí, estaré eternamente agradecida.

A mi abuela *Julia* por jugar ese rol de abuela consentidora, muy a su manera, te quiero mucho, gracias por tus consejos, apapachos, sonrisas y travesuras; de igual manera agradezco a mi abuelo *Joel*, que aunque él ya no se encuentre entre nosotros, ha sido columna vertebral en mi vida, desde acá te mando un abrazo, sé que estarás orgulloso de este logro.

Al resto de mi *familia*, les doy gracias por su compañía, consejos, apoyo incondicional y ser un ejemplo de lucha, de alegría y amor en mi vida, Dios los bendiga siempre.

A mis *amigos*, que son la familia que uno elige; tengo la certeza que la vida y Dios me ha puesto enfrente a los correctos, he disfrutado tanto de su compañía, en los momentos de alegría, en los triunfos, como en los momentos de tristeza, en los de debilidad o fracaso, gracias por ser parte de mi sostén y apoyo, sepan que siempre estaré para ustedes, a pesar de la distancia, los quiero mucho.

Al *Dr. Jesús Everardo Olguín Tiznado* y *Dra. Claudia Camargo Wilson*, a quienes les tengo un cariño muy especial, gracias por ser mis amigos y maestros desde la etapa básica, por sus consejos y motivación para continuar con mis estudios.

A *Roberto*, por ser el hombro que hoy necesito en mi crecimiento académico, profesional y personal, por su paciencia, por soportar mis locuras, por motivarme a seguir adelante, por demostrarme su amor y caminar de la mano conmigo, gracias flaco!

Al *Dr. Juan Iván Nieto* que primeramente como director de la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, nos brindó su apoyo para iniciar este proyecto y llevarlo a buen término.

Al *Dr. Juan de Dios Sánchez*, coordinador de posgrado, por su disponibilidad para brindarnos la asesoría requerida para llevar a cabo los trámites correspondientes.

A mis *compañeros y amigos* con quienes inicié este proyecto he hicieron más sencillo este caminar y la culminación de este objetivo: *Sandra Karina Enríquez Casas, Stephanie Aguirre Moreno y Carlos García Horta*.

A la ***Universidad Autónoma de Baja California*** y a la ***Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño*** por todas las facilidades brindadas para hacer posible la re-apertura de este programa de posgrado en Ingeniería Industrial.

Índice de contenido

1.	Introducción	1
1.1	Descripción del proyecto.....	1
1.2	Antecedentes	2
1.3	Planteamiento del problema	4
1.4	Preguntas de investigación	5
1.5	Hipótesis.....	5
1.6	Objetivos	6
1.6.1	Objetivo General	6
1.6.2	Objetivos Específicos.....	6
1.7	Justificación	7
2.	Marco de Referencia	9
2.1	La metodología de superficie de respuesta dual	9
2.2	Optimización de respuestas múltiples	11
2.2.1	Sobreposición de gráficas de contorno.....	13
2.2.2	Problema de optimización restringida	18
2.2.3	Combinación de las respuestas en una sola.....	19
2.2.3.1	Función de Deseabilidad	19
2.2.3.2	Función de pérdida.....	22
2.2.3.3	Índices de capacidad de procesos.....	24
2.2.3.3.2	Índices Mcpm y Mcpk	26
2.2.4	Enfoques que se basan en la proporción de conformancia	28
2.2.4.1	Método de Chiao y Hamada.....	28
2.2.4.2	El enfoque Bayesiano	29
2.3	La inferencia bayesiana	31
2.3.1	El Teorema de Bayes	33
2.3.1.1	El teorema de Bayes para eventos.....	33
2.3.1.2	El teorema de Bayes para densidades	34
2.4	Las Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo (CMMC).....	36
	y el muestreo de Gibbs.....	36
2.5	La media geométrica	37
3.	Materiales y Métodos	38

3.1 Materiales	38
3.2 Metodología	40
4. Análisis de Resultados	43
4.1 Caso de estudio I: Optimización de un sistema de cromatografía líquida de alto rendimiento (HPLC)	43
4.2 Caso de Estudio II: Porcentaje de Conversión y Actividad Térmica.	67
4.3 Discusión de Resultados.....	94
4.3.1 Conclusiones Paso X: Optimización de un sistema de cromatografía líquida de alto rendimiento (HPLC).	94
4.3.2 Conclusiones Paso X: Porcentaje de Conversión y Actividad Térmica	95
5. Conclusión y Recomendaciones	98
5.1 Conclusiones de acuerdo con las Hipótesis y los Objetivos	98
5.1.1 Conclusiones de acuerdo con las Hipótesis.....	98
5.1.2 Conclusiones de acuerdo con los Objetivos.....	100
5.1.3 Conclusiones Generales	100
6. Bibliografía	102
7. Anexos	106
7.1 Anexos	106

Índice de Tablas

Tabla 4.1 Variables de control y variables de respuesta para el caso de estudio I.....	44
Tabla 4.2 Combinaciones de los factores de control utilizadas para formar la malla en la simulación: Caso de estudio I.....	44
Tabla 4.3 Especificaciones de las variables de respuesta del caso de estudio I para el cálculo de la deseabilidad.	46
Tabla 4.4 Escenarios considerados en el caso de estudio I.....	46
Tabla 4.5 Deseabilidades individuales y globales para caso de estudio I.	47
Tabla 4.6 Máximos valores de deseabilidad pronosticados según los modelos ajustados para las 121 combinaciones para el caso de estudio I.	54
Tabla 4.7 Búsqueda del punto óptimo para Dg y Dgp partiendo de 15 valores iniciales distintos.	58
Tabla 4.8 Valores de deseabilidad óptimos alcanzados en ambos modelos para el caso de estudio I.	58
Tabla 4.9 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dg	64
Tabla 4.10 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp	64
Tabla 4.11 Resumen de los estadísticos según las corridas de validación para el caso de estudio I.	66
Tabla 4.12 Variables de control y variables de respuesta para el caso de estudio II.....	67
Tabla 4.13 Combinaciones de los factores de control utilizadas para formar la malla en la simulación: Caso de estudio II.....	68
Tabla 4.14 Especificaciones de las variables de respuesta del caso de estudio II para el cálculo de la deseabilidad.	69
Tabla 4.15 Escenarios de ponderaciones consideradas para las variables de respuesta del caso de estudio II.....	70
Tabla 4.16 Deseabilidades individuales y globales para caso de estudio II.	70
Tabla 4.17 Máximos valores de deseabilidad pronosticados según los modelos ajustados para las 121 combinaciones para el caso de estudio I.	79
Tabla 4.18 Búsqueda del punto óptimo para $Dgp1$, $Dgp2$, $Dgp3$ y $Dgp4$ partiendo de 15 valores iniciales distintos.	85
Tabla 4.19 Valores de deseabilidad óptimos alcanzados en los modelos para el caso de estudio II.	85
Tabla 4.20 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para $Dgp1$	89
Tabla 4.21 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para $Dgp2$	90
Tabla 4.22 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para $Dgp3$	91
Tabla 4.23 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para $Dgp4$	91
Tabla 4.24 Resumen de los estadísticos según las corridas de validación para el caso de estudio II.	93
Tabla 4.25 Intervalos de confianza para las deseabilidades en cada variable de respuesta en las condiciones óptimas del caso de estudio I.....	95
Tabla 4.26 Intervalos de confianza para las deseabilidades en cada variable de respuesta en las condiciones óptimas del caso de estudio II.....	96

Índice de Figuras

Figura 2.1 Superficie de respuesta para el rendimiento	14
Figura 2.2 Gráfica de contorno para el rendimiento.....	15
Figura 2.3 Superficie de respuesta para la viscosidad	15
Figura 2.4 Gráfica de contorno para viscosidad.....	16
Figura 2.5 Superficie de respuesta para el peso molecular	16
Figura 2.6 Gráfica de contorno para el peso molecular	17
Figura 2.7 Sobreposición de las gráficas de contorno del rendimiento, la viscosidad y el peso molecular.....	18
Figura 2.8 Función de deseabilidad.....	21
Figura 4.1 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades según el modelo ajustado para D_g contra los resultados de la simulación.....	53
Figura 4.2 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades según el modelo ajustado para D_{gp} contra los resultados de la simulación.	53
Figura 4.3 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_g	55
Figura 4.4 Gráfica de contorno para el modelo asociado a D_g	55
Figura 4.5 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_{gp}	56
Figura 4.6 Gráfica de contorno para el modelo asociado a D_{gp}	56
Figura 4.7 Comparación de valores de D_1 en los escenarios D_g y D_{gp}	60
Figura 4.8 Comparación de valores de D_2 en los escenarios D_g y D_{gp}	61
Figura 4.9 Comparación de valores de D_3 en los modelos D_g y D_{gp}	62
Figura 4.10 Comparación de valores de D_4 en los modelos D_g y D_{gp}	63
Figura 4.11 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para D_{gp1} contra los resultados de la simulación.	77
Figura 4.12 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para D_{gp2} contra los resultados de la simulación.	77
Figura 4.13 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para D_{gp3} contra los resultados de la simulación.	78
Figura 4.14 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para D_{gp4} contra los resultados de la simulación.	78
Figura 4.15 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_{gp1}	80
Figura 4.16 Gráfica de contorno del modelo asociado a D_{gp1}	80
Figura 4.17 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_{gp2}	81
Figura 4.18 Gráfica de contorno para el modelo asociado a D_{gp2}	81
Figura 4.19 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_{gp3}	82
Figura 4.20 Gráfica de contorno del modelo asociado a D_{gp3}	82
Figura 4.21 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a D_{gp4}	83
Figura 4.22 Gráfica de contorno del modelo asociado a D_{gp4}	83
Figura 4.23 Comparación de valores de D_1 en los escenarios D_{gp1} , D_{gp2} , D_{gp3} y D_{gp4}	87
Figura 4.24 Comparación de valores de D_2 en los escenarios D_{gp1} , D_{gp2} , D_{gp3} y D_{gp4}	88

1. Introducción

En el presente capítulo se da la introducción al tema, se explica la razón por la que se propone la metodología, antecedentes de como se ha trabajado antes con la optimización múltiple de variables de respuesta simultánea, el impacto que puede llegar a tener en la industria y en la sociedad, también se plantean algunas hipótesis de ciertos comportamientos que esperaba de la propuesta y por último los objetivos que se buscan cumplir.

1.1 Descripción del proyecto

Uno de los principales aspectos que determinan la permanencia en el mercado de cualquier negocio en la actualidad, sea este dedicado a la manufactura o a la prestación de servicios, sin duda alguna, es su nivel de calidad, ya que este aspecto está relacionado directamente con la satisfacción de sus clientes. Los productos o servicios de calidad ayudan a lograr clientes cautivos y por tanto aumentan la posibilidad de seguir haciendo negocios con ellos. Es por esto que en estos días la mejora de los niveles de la calidad de sus productos y servicios es un factor preponderante para las organizaciones.

Cuando se trabaja con la optimización de productos, es probable que éstos cuenten con varias características de calidad que se deban considerar en el análisis. Una alternativa es optimizar de forma independiente cada una de ellas, lo cual según diversos autores no es recomendable ya que se pueden proponer tantas combinaciones distintas de las variables de control, como variables de respuesta que se consideren en el estudio, lo que generaría un conflicto al decidir entre ellas. La mejor forma de abordar esta situación es considerando todas las respuestas de forma simultánea, para lo cual se han propuesto diversas técnicas, algunas más completas respecto a las distintas consideraciones que se deben tener presentes durante la optimización. También se pueden encontrar alternativas con distintos niveles de complejidad técnica, con algunas de ellas incluso, ya contempladas dentro de la paquetería del software estadístico comercial, lo que contribuye a que sean las más

conocidas y por tanto utilizadas, aunque no necesariamente sean las mejores opciones. En este trabajo se utilizará el enfoque bayesiano propuesto por Peterson (2004), el cual considera la correlación entre las respuestas de interés y la incertidumbre en la estimación de los parámetros del modelo de una manera formal. Además se considerará lo propuesto por Miro-Quesada et al. (2004), donde le incorporan variables de ruido al análisis. La aportación que se realizará tendrá un impacto directo en la optimización de múltiples respuestas, ya que esta consiste en una modificación que permita incorporar una ponderación distinta para cada una de las variables de respuesta, de acuerdo con la importancia que tengan en la funcionalidad o costo del producto, lo anterior se llevará a cabo reemplazando como variable a optimizar la probabilidad de concordancia conjunta, por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales para cada variable de respuesta.

1.2 Antecedentes

Como ya se mencionaba anteriormente son diversas las opciones que han surgido para trabajar con el problema de la optimización simultanea de múltiples respuestas, siendo las más comunes las basadas en la función de perdida, las que utilizan índices de capacidad de proceso, las que emplean una función de deseabilidad, la sobreposición de gráficas de superficie de respuesta y recientemente han surgido las técnicas que optimizan la probabilidad de concordancia, teniendo cada una de estas sus ventajas o desventajas con respecto a las otras. Algunas de estas técnicas surgieron para contrarrestar una debilidad que presentaban las otras opciones o incluso para complementar sus versiones anteriores evolucionando sobre la misma idea incorporando alguna modificación que las hiciera más completas.

Los aspectos que deben considerar las diferentes propuestas para llevar a cabo la optimización simultanea de las variables de respuesta son la correlación entre las variables de respuesta, debe también contemplar los factores de ruido que afectan las características

de calidad analizadas y proponer condiciones de operación de los procesos que sean robustas a ellos, asimismo debe incorporar la incertidumbre en los parámetros de los modelos, todo esto sin perder de vista la simplicidad de la herramienta, por lo que la herramienta a utilizar, ha de seleccionarse entonces considerando algunos de estos elementos.

Han sido muchos los esfuerzos realizados por diversos investigadores para lograr diseñar una herramienta que comprenda la mayor cantidad posible de los aspectos antes mencionados y puede encontrar mucha información al respecto en las diferentes revistas de investigación. En este estudio se plantea modificar una técnica existente que utiliza el enfoque bayesiano propuesto por Peterson (2004), incorporando el enfoque robusto propuesto por Miro-Quesada et al. (2004) y retomando la posibilidad de incorporar ponderaciones a las variables de respuesta que presenta la metodología basada en la función de deseabilidad, obteniendo así una metodología híbrida que considere la metodología Bayesiana y la función de deseabilidad que tome las bondades de ambas propuestas, para la optimización simultánea de múltiples. Dicha modificación se pretende hacerla más flexible, incorporándole la posibilidad de que permita introducir diferentes pesos a las variables de respuesta, de acuerdo a su grado de importancia en la calidad o el costo del producto final mediante la función de deseabilidad, partiendo de la función predictiva bayesiana.

1.3 Planteamiento del problema

Cuando se trabaja con la optimización de respuestas múltiples la mayoría de las técnicas existentes no toman en cuenta la incertidumbre en los parámetros estimados para los modelos utilizados en la optimización, la correlación entre las variables de respuesta y la robustez, de manera conjunta.

En este trabajo se utilizará el enfoque bayesiano propuesto por Peterson (2004), el cual considera la correlación entre las respuestas de interés y la incertidumbre en la estimación de los parámetros del modelo de una manera formal. Este sugiere un cambio de las variables a optimizar, ya que sustituye las variables de respuesta originales por la probabilidad de concordancia simultánea, es decir, la probabilidad de que cada una estas respuestas cumplan con sus respectivas especificaciones al mismo tiempo, en cada condición de operación del proceso. Además se extiende el enfoque anteriormente mencionado, al diseño robusto de parámetros al incorporar variables de ruido al análisis, como lo proponen Miro-Quesada et al. (2004), partiendo del trabajo elaborado por Peterson (2004).

La aportación que se hace con el presente trabajo tiene un impacto directo en la optimización de múltiples respuestas, ya que plantea una modificación de las propuestas mencionadas en el párrafo anterior. Esta modificación consiste en la posibilidad de incorporar una ponderación para cada una de las variables de respuesta, de acuerdo con la importancia que tenga cada una en la funcionalidad o costos de los productos, para atender una situación que pudiera presentarse en la práctica, en la cual no todas las variables consideradas son de igual importancia. La anterior modificación se lleva a cabo reemplazando como variable a optimizar la probabilidad de concordancia conjunta, por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales para cada variable de respuesta. Al igual que en las técnicas tomadas como base se logra reducir la dimensión del

problema de optimización, pasando de un problema p-dimensional a uno unidimensional, convirtiendo las variables de respuesta originales a un índice de deseabilidad.

1.4 Preguntas de investigación

- ¿Cómo se comporta la metodología propuesta por Peterson (2004) y complementada por Miro-Quesada et al., (2004) si las variables de respuesta originales se sustituyen por la media geométrica ponderada de las de las deseabilidades individuales?
- ¿Qué tipo de modelo se podrá utilizar para representar de manera adecuada la relación entre la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales y los factores de control?
- ¿Con qué técnica se podrá optimizar el modelo que relacione la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales y los factores de control?
- ¿Cuál será el efecto en las conclusiones respecto a las condiciones óptimas de operación del proceso si se ajusta el modelo a optimizar con respecto a la media geométrica ponderada para las deseabilidades individuales utilizando diferentes ponderaciones para las variables de respuesta?

1.5 Hipótesis

- La metodología propuesta por Peterson (2004) y complementada por Miró-Quesada et al. (2004) funciona correctamente si las variables de respuesta originales se sustituyen por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales.
- La media geométrica ponderada se puede modelar utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios (*MCO*).

- Se puede utilizar el *Método del Gradiente Reducido Generalizado* para optimizar el polinomio resultante, lo que es deseable, ya que este permite la optimización restringida.
- La condición óptima resultante para operar el proceso será diferente si se consideran diferentes ponderaciones y tenderá hacia donde las variables de respuesta más importantes se comportan de la mejor manera, si se utiliza como variable de respuesta a optimizar la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales, dando ponderaciones más altas a dichas variables.

1.6 Objetivos

1.6.1 Objetivo General

Adaptar la metodología propuesta por Peterson (2004) y complementada por Miro-Quesada et al. (2004), para que permita optimizar múltiples variables de respuesta simultáneamente en escenarios en donde no todas estas variables son igual de importantes.

1.6.2 Objetivos Específicos

- Mostrar mediante casos de estudio propios o tomados de la literatura que la metodología de referencia funciona adecuadamente, si se sustituye la probabilidad de concordancia conjunta, por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales.
- Modelar mediante un método adecuado la relación entre los factores de control y la deseabilidad global.
- Mostrar que los resultados óptimos alcanzados en los distintos escenarios propuestos tienden a favorecer a las variables de respuesta con los mayores pesos o ponderaciones.

1.7. Justificación

Un problema común en el diseño de productos o procesos es la selección de niveles de los parámetros para optimizar múltiples respuestas simultáneamente, a lo que se le conoce como problema de multirespuestas (Myers y Montgomery, 1995). Ames et al. (1997), mencionan que la mayoría de los productos manufacturados tienen múltiples criterios de calidad, a su vez, Chiao y Hamada (2001), mencionan que para la mayoría de los productos la calidad es multidimensional, por lo que es común observar múltiples respuestas en las unidades experimentales, también mencionan que optimizar estas respuestas por separado puede llevar a resultados no satisfactorios. Es por esto que este trabajo trata de la optimización de múltiples características de calidad simultáneamente.

Además es un hecho que en muchas ocasiones existe diferencia en la relevancia de las diferentes variables de respuesta a la hora de optimizarlas simultáneamente ya que todas ellas pudieran afectar de diferentes formas la funcionalidad o los costos de los productos, por lo cual un buen método de optimización debería de considerar estas diferencias y asegurar que la condición óptima de operación para el proceso sea tal que se tenga un buen desempeño en estas características y quizá no tan buena en las otras respuestas menos críticas. Este aspecto se aborda en este trabajo dando ponderaciones distintas a las respuestas dependiendo de su importancia, mediante la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales.

El problema antes descrito se abordará utilizando métodos bayesianos considerando que este enfoque no se había usado tan frecuentemente en años anteriores porque puede ser matemáticamente complejo, ya que estimar parámetros usando las distribuciones de probabilidad requiere frecuentemente de la integración y desafortunadamente muchas de las integraciones necesarias para el análisis bayesiano son demasiado complejas para resolverlas usando cálculo simbólico. Recientemente esta problemática ha desaparecido gracias a la simulación bayesiana, la cual es capaz de resolver mediante la computadora los

más complejos problemas de integración. La simulación bayesiana es basada en modernas técnicas de muestreo conocidas como Cadenas de Markov Monte Carlo (*CMMC*). La combinación de estos dos fenómenos, innovación matemática (*CMMC*) y el creciente poder de la computadora, han permitido que el análisis bayesiano emerja como una solución práctica para ser utilizada en nuevas investigaciones.

2. Marco de Referencia

2.1 La metodología de superficie de respuesta dual

Gran parte de la metodología de superficie de respuesta (*MRS*), sobre todo en los primeros años, se centró en la búsqueda de las condiciones de operación que dio lugar a un óptimo de la respuesta media suponiendo varianzas homogéneas. Durante las últimas dos décadas, los estadísticos industriales y profesionales se han dado cuenta de que ya no puede centrarse sólo en el valor esperado de la respuesta de interés. En su lugar, también debe tenerse en cuenta la variabilidad de la respuesta. Un problema común en un proceso industrial es encontrar la condición de funcionamiento que alcanza el valor objetivo para la media de una característica del proceso y reduce al mínimo la variabilidad del proceso.

La metodología de superficie de respuesta (*MRS*) es una colección de técnicas estadísticas y matemáticas útiles para desarrollar, mejorar y optimizar procesos. Esta metodología también tiene importantes aplicaciones en el diseño, desarrollo y formulación de nuevos productos, así como en la mejora de los productos existentes (Myers y Montgomery, 1995)

La *MRS* es una herramienta importante en la ingeniería de calidad moderna. La idea básica es ajustar un modelo para la variable de respuesta y después explorar varios niveles de interés para las variables explicatorias. El principal énfasis ha sido en maximizar (o minimizar) el valor de la media (localización) de la respuesta *Y*. Taguchi enfatizó en la necesidad de desarrollar una metodología estadística que pudiera simultáneamente optimizar la media y la varianza de la característica que se está investigando. Esta necesidad se presenta en muchos problemas industriales para los cuales se requiere lograr de manera simultánea un valor objetivo y mantener una varianza pequeña (Ding et al., 2004).

En la práctica, los dos modelos separados dan al analista una comprensión más científica del proceso total, y por lo tanto les permite ver que niveles de los factores de control pueden dar lugar a valores satisfactorios de la respuesta, así como de la varianza. El

problema dual Optimización de la respuesta consta de tres etapas: (1) construir un experimento para que la información de las respuestas se puede conseguir de manera eficiente; (2) construir dos modelos basados en los datos del experimento, uno para la media del proceso y el otro para la varianza; y (3) buscar la condición de operación óptima en toda la región de interés bajo cierto criterio de optimización basado en los modelos establecidos (Chen y Ye, 2011).

Algunos autores como Box y Draper (1987), Lin y Tu (1995), entre otros tratan de alguna forma el problema del desarrollo de análisis estadístico para múltiples respuestas tales como la media y la varianza de las características de calidad de interés. Así, el objetivo deberá ser determinar las condiciones de ajuste óptimo de las variables independientes (x 's), de manera que la respuesta (y) sea lo más cercana a un valor objetivo establecido y reduciendo al mismo tiempo su variación.

Vining y Myers (1990) ajustan modelos polinomiales de segundo orden de manera separada, para optimizar la media muestral (w_μ) y la desviación estándar de la muestra (w_σ) de la siguiente manera:

$$w_\mu = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon_\mu \quad (2.1)$$

$$w_\sigma = \gamma_0 + \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^k \gamma_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \gamma_{ij} x_i x_j + \varepsilon_\sigma \quad (2.2)$$

y establecen como procedimiento de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \hat{w}_\sigma \\ \text{Sujeto a} & \hat{w}_\mu = T, \text{ donde } T \text{ es el valor objetivo} \end{array} \quad (2.3)$$

Lin y Tu (1995) proponen usar el criterio del cuadrado medio del error (MSE), de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } MSE = (\hat{w}_\mu - T)^2 + \hat{w}_\sigma^2 \quad (2.4)$$

Copeland y Nelson (1996), especifican una desviación de w_μ de T , y establecen el modelo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \hat{w}_\sigma \\ &\text{Sujeto a } (\hat{w}_\mu - T)^2 \leq \Delta^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ding et al., (2004) consideran que en el problema de respuesta Dual, es deseable que la media sea cercana al valor objetivo y la varianza sea pequeña, y utilizan un modelo ponderando la media y la varianza en el criterio del cuadrado medio del error ($WMSE$), esto es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } WMSE = \lambda (\hat{w}_\mu(x) - T)^2 + (1 - \lambda) \hat{w}_\sigma(x) \\ &\text{Sujeto a } X \in \Omega \\ &\text{donde } \lambda \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Optimización de respuestas múltiples

En el mercado tan altamente competitivo de hoy en día, las compañías son inducidas a mejorar constantemente la calidad de sus productos. Estos productos pueden involucrar el estudio simultáneo de varias respuestas teniendo cada una de ellas su importancia relativa para los clientes, ya que como menciona Jhon (2013), el rendimiento de un producto o servicio se caracteriza generalmente por muchas variables de respuesta. Por lo tanto el reto es cómo determinar el ajuste adecuado para las variables de control de tal forma que se obtengan los niveles deseados de calidad (Najafi et al., 2011). En la optimización de estas múltiples respuestas, los investigadores buscan optimizar p características de calidad o variables de respuesta y como menciona Costa et al., (2011) esas respuestas se deben optimizar simultáneamente ya que analizarlas por separado puede resultar en soluciones

incompatibles. Al respecto Pal y Gauri (2010), mencionan que frecuentemente las condiciones del proceso requeridas para dos o más variables de respuesta son contradictorias, por lo que generalmente es difícil encontrar un nivel de operación de las variables de control, que pueda resultar en valores cercanos a sus respectivos valores objetivo para todas las variables de respuesta, por lo que según mencionan, el objetivo de la optimización de múltiples respuestas es encontrar los valores para las variables de entrada con los cuales se logre un compromiso óptimo entre las respuestas, al respecto Vera et al., (2014) proponen un planteamiento muy similar.

En la optimización multivariable, los diseños factoriales completos son muy útiles para los estudios preliminares o en los pasos iniciales de una optimización. Sin embargo, ya que sólo dos niveles son usados, los modelos que pueden estar en forma para estos diseños son algo restringidos. En consecuencia, si un modelo más sofisticado es requerido, como para la ubicación de un conjunto óptimo de condiciones experimentales, entonces se debe recurrir a los diseños de modelos de segundo orden (diseños de superficie de respuesta) que utilizan más de dos niveles en los factores que permitan ajustar un polinomio cuadrático completo (Rezende y Coelho, 2014).

En los últimos años se ha publicado una gran cantidad de artículos referentes a la optimización de múltiples respuestas y es un tópico común en la bibliografía referente a optimización de procesos y productos. Como resultado de ello, han surgido una amplia variedad de opciones en cuanto a metodologías y herramientas con este propósito, algunas similares entre ellas pero muy distintas a otras. Debido a esto, algunos autores tratan de agrupar estas propuestas de acuerdo a una característica común, por ejemplo, Pal y Gauri (2010), clasifican estas propuestas en las siguientes tres categorías: (1) Técnicas matemáticamente rigurosas, (2) Índices de desempeño del proceso simplificados y (3) Técnicas basadas en inteligencia artificial. En su trabajo reportan algunas características propias de cada categoría.

Por otra parte Taleghani (2009), categoriza los métodos existentes para la optimización de múltiples respuestas en las siguientes cuatro categorías básicas: (1) Sobreposición de gráficas de contorno, (2) Problema de optimización restringida, (3) Combinación de las respuestas en una sola y (4) Enfoques que se basan en la proporción de conformancia. En su trabajo pueden encontrarse detalles de cada una de estas categorías.

A continuación se presentan algunas de los métodos de optimización múltiple más populares, agrupándolos de acuerdo con las categorías propuestas por Taleghani (2009).

2.2.1 Sobreposición de gráficas de contorno

Menciona Peterson (2004), que una forma simple de trabajar con múltiples superficies de respuestas cuando solo existe un pequeño número de factores es hacer una Sobreposición de las gráficas de contornos de las superficies de respuestas, lo cual puede indicar una región en el espacio de los factores en la que cada respuesta media satisface los requerimientos del experimentador o se puede obtener una solución compromiso.

En este sentido Vera et al., (2014), mencionan que una forma adecuada para encontrar la ubicación óptima es a través de la representación gráfica del modelo. Dos tipos de gráficos pueden resultar útiles: (a) la superficie de respuesta en el espacio tridimensional y (b) la gráfica de curvas de nivel que es la proyección de la superficie en un plano, representado como líneas de respuesta constante. Cada contorno corresponde a una altura específica de la superficie. En estos gráficos la respuesta se representa como una función de dos factores. De acuerdo con el criterio de optimización establecido, los valores óptimos deberían corresponder a un máximo, un mínimo o un valor específico, que se puede encontrar por la simple inspección visual de la gráfica. Sin embargo, si se están analizando más de tres factores, la Sobreposición de gráficos de contorno se vuelve difícil. Por lo tanto, a veces es necesario un enfoque analítico más formal para la superficie de segundo orden cuando se genera en k dimensiones.

En Montgomery (2005), se muestra esta técnica para la optimización de tres variables de respuesta: Rendimiento, Viscosidad y Peso molecular en un proceso químico. Después de recabar información de acuerdo a un diseño central compuesto, se ajustaron los siguientes modelos considerando los dos factores de control (X_1 : Tiempo y X_2 : Temperatura).

$$y_{rendimiento} = 79.94 + 0.99x_1 + 0.52x_2 - 1.38x_1^2 - 1.00x_2^2 + 0.25x_1x_2$$

$$y_{viscosidad} = 70.00 - 0.16x_1 - 0.95x_2 - 0.69x_1^2 - 6.69x_2^2 - 1.25x_1x_2$$

$$y_{pesomolecular} = 3386.2 + 205.1x_1 + 17.4x_2$$

Con estos modelos se procede a construir las respectivas superficies de respuesta y gráficas de contorno, las cuales se muestran a continuación. Los requerimientos para las variables de respuesta son:

$$y_1 \geq 78.5, \quad 62 \leq y_2 \leq 68, \quad y_3 \leq 3400$$

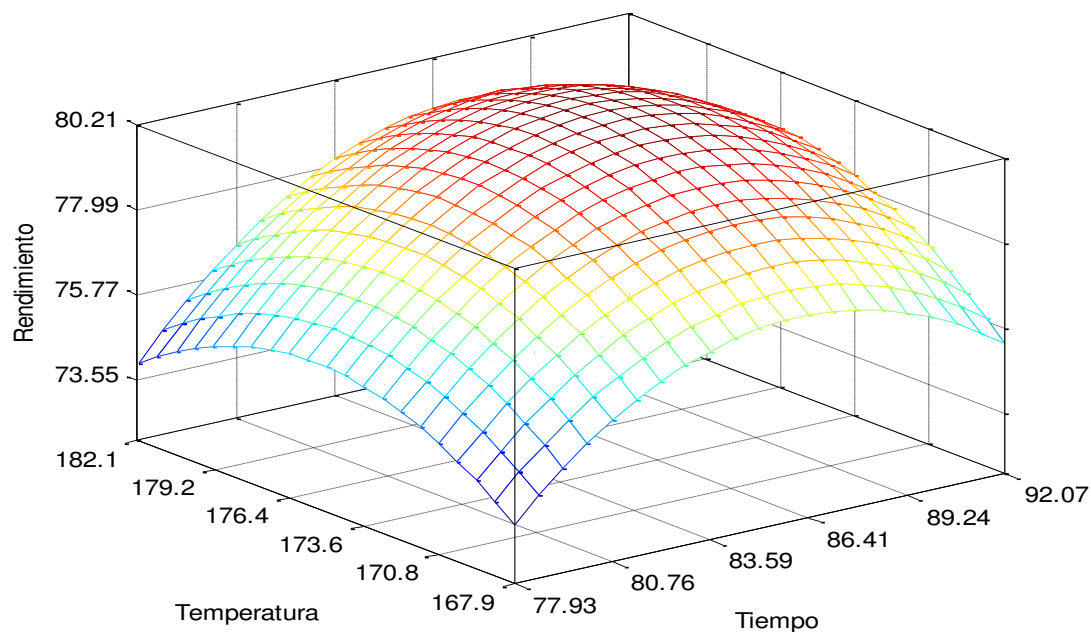


Figura 2.1 Superficie de respuesta para el rendimiento

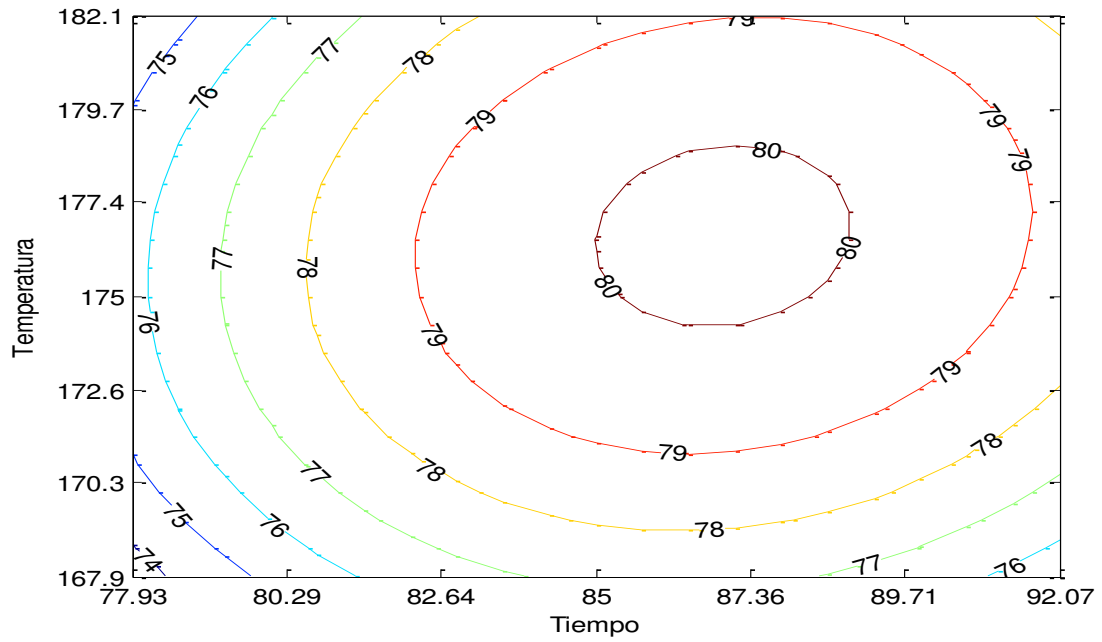


Figura 2.2 Gráfica de contorno para el rendimiento

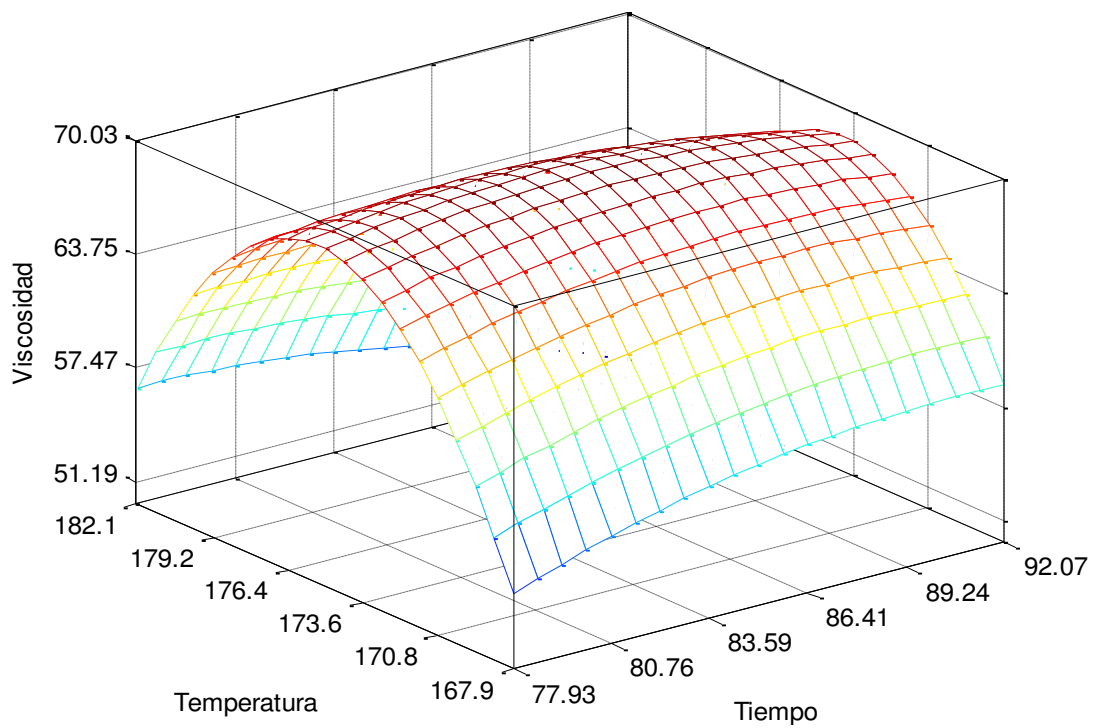


Figura 2.3 Superficie de respuesta para la viscosidad

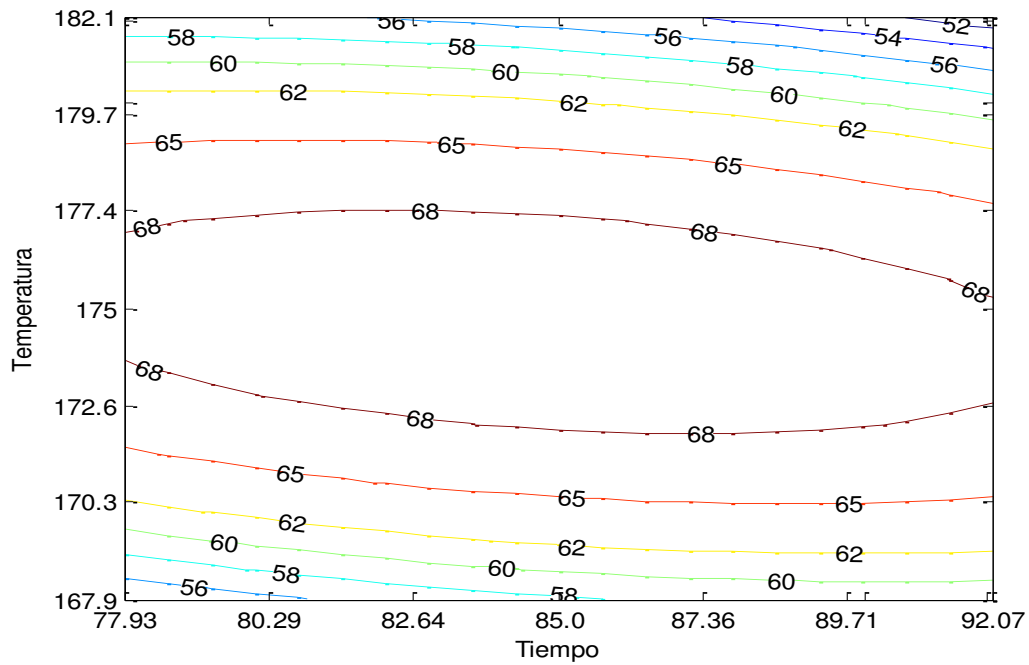


Figura 2.4 Gráfica de contorno para viscosidad

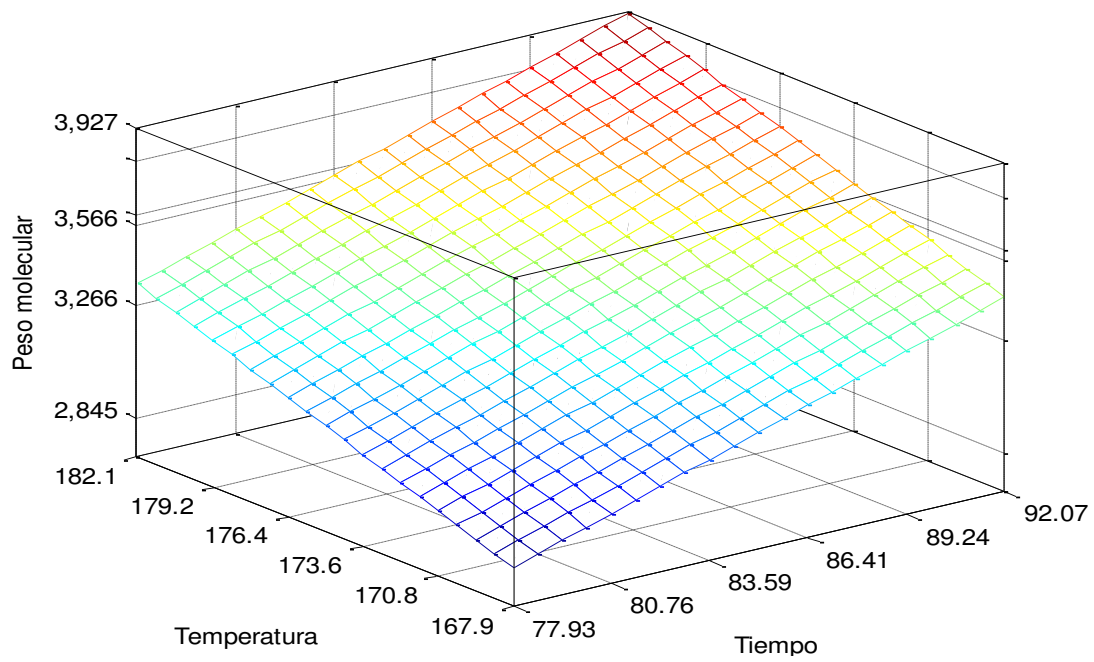


Figura 2.5 Superficie de respuesta para el peso molecular

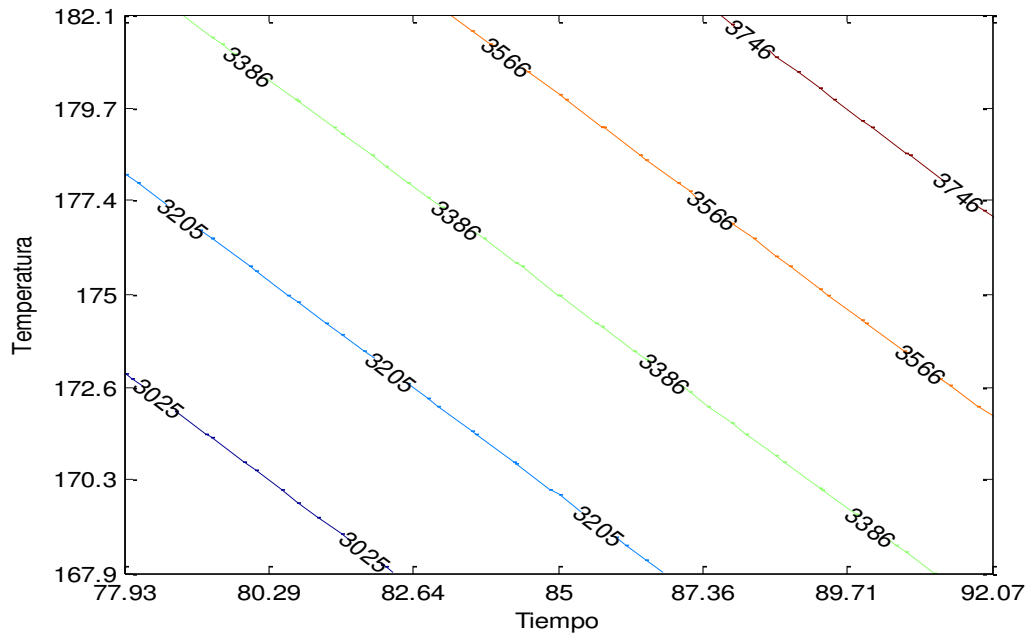


Figura 2.6 Gráfica de contorno para el peso molecular

Una vez que se tienen las tres gráficas de contorno, estas se superponen en una sola para buscar la zona en la que se cumple con las especificaciones simultáneamente. Esta Sobreposición se muestra en la figura 2.7 y las regiones en las que se cumple con los requisitos simultáneamente son las que aparecen de color verde y como puede apreciarse son varias las combinaciones de tiempo y temperatura en las que la respuesta media para las tres variables de respuesta cumplen con sus respectivas especificaciones.

Como puede verse esta técnica es relativamente sencilla y directa, pero también tiene algunos inconvenientes, por ejemplo, Montgomery (2005) menciona que cuando hay más de tres variables en el diseño, se hace muy complicada la Sobreposición de las gráficas de contorno, ya que esta es bidimensional, y $k-2$ de las variables de control deben de mantenerse constantes para construir la gráfica. Además también menciona que con frecuencia se necesita una gran cantidad de ensayo y error para determinar cuáles son los factores que deben mantenerse constantes y que niveles seleccionar para obtener la mejor vista de la superficie, por lo que existe interés práctico en métodos de optimización más formales para las respuestas múltiples.

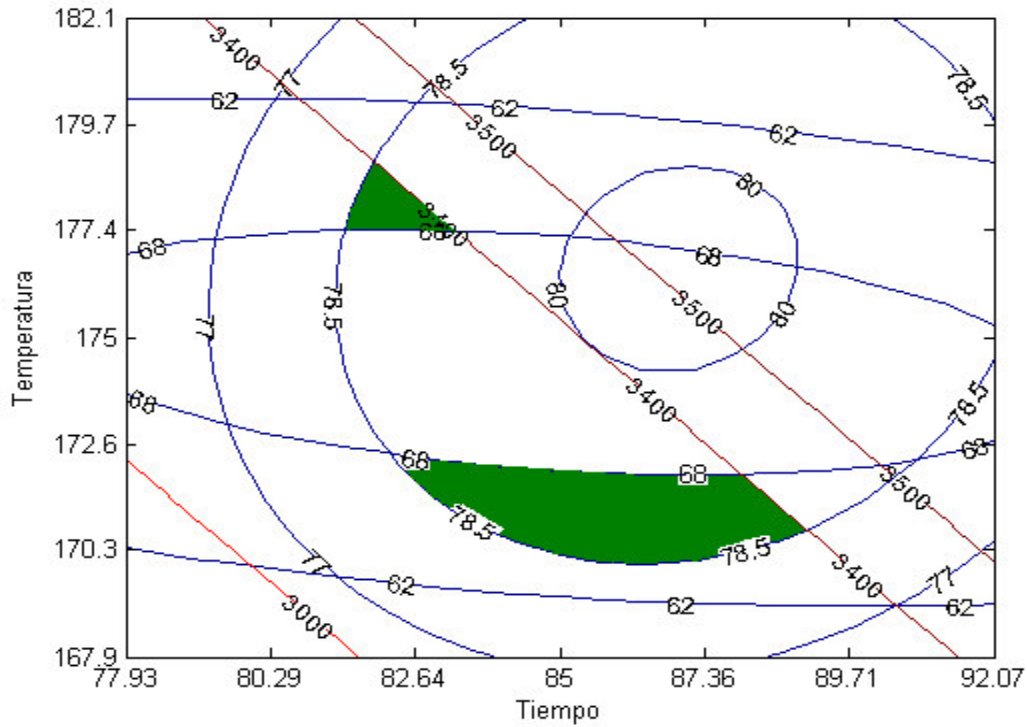


Figura 2.7 Sobreposición de las gráficas de contorno del rendimiento, la viscosidad y el peso molecular.

Adicionalmente en la Sobreposición de gráficas de contorno, tampoco es posible considerar algunos aspectos clave en la optimización simultánea, como lo es la correlación entre las variables de respuesta, la incertidumbre en los parámetros de los modelos y la robustez.

2.2.2 Problema de optimización restringida

En este enfoque se selecciona la variable de respuesta más importante y la utiliza con función objetivo y el resto de las respuestas se consideran como restricciones.

Esta propuesta puede resumirse de la siguiente manera:

Optimizar	Respuesta principal
S.a.	Requerimientos para las otras respuestas
	$x \in \Omega$

De lo anterior puede decirse que escoger una de las respuestas como función objetivo, es posible que no sea una tarea sencilla. Además, este enfoque no utiliza la idea básica de considerar todas las respuestas simultáneamente.

2.2.3 Combinación de las respuestas en una sola

Un enfoque popular para la optimización de múltiples respuestas ha sido el uso de la estrategia de la reducción de dimensionalidad. Esta estrategia convierte un problema de múltiples respuestas, en uno con una sola medición, el cual se resuelve como un problema de optimización de un objetivo simple (Ko et al., 2005). Entre estas propuestas surgen como las más utilizadas, las que emplean la función de deseabilidad, la función de pérdida o las que trabajan con índices de capacidad del proceso multivariable. Posteriormente, esta única variable de respuesta que de alguna manera resume la información referente a todas las variables originales, se modela y optimiza generalmente con la ayuda de técnicas de métodos numéricos. A continuación se muestra de manera general algunas propuestas de esta categoría.

2.2.3.1 Función de Deseabilidad

La idea es que esta función de deseabilidad actúa como una función de penalización que conduce el algoritmo a las regiones donde se pueden encontrar los valores deseados de las variables de respuesta. Los niveles de los factores que llevan a un máximo o un mínimo de las variables respuesta se denominan "puntos óptimos" Pourfarzad et. al., 2014. Al respecto Bahloul et al., (2014) señalan que la función de deseabilidad es una técnica utilizada para la optimización de multirespuestas en el análisis de experimentos, en el cual, varias respuestas tienen que ser optimizadas simultáneamente.

Según De Figueiredo et al., (2014), la metodología de optimización de deseabilidad se basa en la idea de que la calidad de un producto o proceso que tiene múltiples características,

cuando una de estas se encuentra fuera de ciertos límites "deseados", es completamente inaceptable. El método encuentra condiciones de funcionamiento que proporcionan la respuesta "más deseable". Los valores óptimos de los factores se determinan a partir de la maximización de la función. Un alto valor de D , que varía entre cero y uno, indica las mejores combinaciones de factores para optimizar el sistema estudiado.

Derringer y Suich (1980) proponen utilizar funciones de deseabilidad las cuales convierten el problema de múltiples respuestas, en un problema de una sola respuesta; esto es, la respuesta que se analiza es la deseabilidad total $D = (d_1(Y_1) \cdot \dots \cdot d_m(Y_m))^{1/m}$ donde $(Y_1, \dots, Y_m)$ son las m respuestas y $d_1, \dots, d_m$ son las deseabilidades individuales. Para convertir las respuesta y_i a d_i , estos autores, proponen la siguiente transformación:

$$d_i = \begin{cases} \left[\frac{\hat{y}_i(x) - EI_i}{T_i - EI_i} \right]^s & EI_i \leq \hat{y}_i(x) \leq T_i \\ \left[\frac{\hat{y}_i(x) - ES_i}{T_i - ES_i} \right]^t & T_i \leq \hat{y}_i(x) \leq ES_i \\ 0 & \hat{y}_i(x) < EI_i \quad o \quad \hat{y}_i(x) > ES_i \end{cases} \quad (2.7)$$

Donde s y t son exponentes que sirven para elegir la forma deseada de la transformación y con ello reflejar los deseos del experimentador: si se toman valores grandes (por ejemplo $s, t \geq 10$) significa que la deseabilidad d_i sólo toma valores grandes cuando $\hat{y}_i$ cae cerca de su valor objetivo; si se toman valores pequeños para s y t ($s, t \leq 0.1$) significa que cualquier valor de $\hat{y}_i$ dentro del intervalo $[EI_i, ES_i]$ es igualmente deseable. Lo anterior puede apreciarse en la figura 2.8.



Vera et al.,(2014) comenta que una vez que las “n” variables (niveles de factores y respuestas) se transforman en funciones de deseabilidad, se combinan en una única función llamada Deseabilidad Global (D) para encontrar el mejor conjunto de respuestas utilizando la siguiente ecuación:

Donde r_i es la importancia de cada variable con respecto a las otras.

Cuando D alcanza un valor diferente de cero, todas las variables que se están optimizados simultáneamente se puede considerar que tienen un valor de deseabilidad. Por otro lado, si una de las respuestas es completamente indeseable, $d_i(\hat{y}_i) = 0$, D será cero.

El optimizar múltiples variables de respuesta mediante la función de deseabilidad según Chiao y Hamada (2001) tiene dos desventajas: primero, D puede ser difícil de modelar ya que es una función compleja de las m respuestas; segundo, es difícil decir que es lo que significa la diferencia entre valores esperados de D excepto que el mayor es el mejor. Otra desventaja de este enfoque según Ko et al., (2005) es que no considera la estructura de varianzas-covarianzas de las respuestas y según mencionan ignorar esta información puede llevar a una solución no real, si en realidad las respuestas tienen varianzas significativamente diferentes o si están altamente correlacionadas. Se han propuesto otros enfoques basados en la deseabilidad para corregir algunos de los detalles mencionados anteriormente de la propuesta original, véase por ejemplo, Del Castillo et al., (1996), Ortiz et al. (2004), Lee y Kim (2007), Simsek et al., (2013) y Zhang et al., (2014),

2.2.3.2 Función de pérdida

Ames et al., (1997) proponen las funciones de pérdida para optimizar múltiples características de calidad. Mencionan que las funciones de pérdida proveen un marco conceptual que permite combinar criterios diferentes en una función objetivo única. Una función de pérdida describe la pérdida económica de la sociedad, provocada por las desviaciones de las características con respecto a su valor objetivo, debida a variaciones aleatorias y errores sistemáticos. La pérdida total a la sociedad debida a las desviaciones en todas las características del producto se puede tomar como la suma de las pérdidas debidas a las características individuales.

Según Ko et al., (2005), la mayor ventaja de la función de pérdida es su habilidad para incorporar la estructura de varianzas-covarianzas de las respuestas, así como la economía de los procesos. En su trabajo Ames et al., (1997) obtienen sus funciones de pérdida de la siguiente manera:

Sea V_r la medición de una variable de respuesta para una cierta característica de calidad r y T_r el valor objetivo o ideal para V_r . Cada resultado V_r puede variar de su valor objetivo T_r , debido a la variación aleatoria o al error sistemático. La función de pérdida de la calidad global (PCG) describe la pérdida de la sociedad que resulta de estas desviaciones. Bajo esta lógica usan una aproximación cuadrática para esta función de pérdida, de la siguiente manera:

$$PCG = \sum_{r=1}^{R_g} W_r \{V_r - T_r\}^2 \quad (2.9)$$

Donde los factores de ponderación W_r escalan la importancia relativa para los diferentes criterios y su suma se toma sobre todas las R_g respuestas que contribuyen a la calidad del producto.

Se puede tratar con la reducción de la función de pérdida mediante la elección apropiada de las variables controlables de entrada de un proceso ($X_1, X_2, \dots$) utilizando un modelo que relacione estas variables con las V_r respuestas de la siguiente manera:

$$V_r = Y_r(X_1, X_2, \dots) + e_r \quad (2.10)$$

Donde e_r es el término del error que incorpora tanto el componente aleatorio como el sistemático. Las funciones Y_r utilizadas son modelos polinomiales ajustados mediante el uso de experimentos diseñados. En particular estos modelos pueden ser modelos cuadráticos

de superficie de respuesta (*MCSR*). Una vez contruidos estos modelos la función de pérdida (2.9) se puede reemplazar por *PCGP* (pérdida de calidad global polinomial):

$$PCGP = \sum_{r=1}^R W_r \{Y_r(X_1, X_2, \dots) + e_r - T_r\}^2 \quad (2.11)$$

Donde R es el número de características de calidad para las que se puede construir un modelo de superficie de respuestas Y_r (el cual será un polinomio de grado 2 en las variables de control X_i) y puede ser menor a R_g . Finalmente si los errores e_r , son pequeños comparados con los errores con respecto a los valores objetivo $(Y_r - T_r)$, es posible despreciar e_r y entonces *PCGP* se puede reescribir como:

$$PCP = \sum_{r=1}^R W_r \{Y_r(X_1, X_2, \dots) - T_r\}^2 \quad (2.12)$$

Estas funciones de pérdida se deben minimizar para obtener las mejores condiciones de operación del proceso ya que esto minimizaría la pérdida del cliente o de la sociedad. Según Ames et al., (1997), al minimizar la función de pérdida además de la calidad más alta, también se produce la mayor estabilidad o robustez en el proceso contra las variaciones en la calidad debida a las variables de entrada. Para opciones de la función de pérdida más completas, es decir, que consideren más aspectos relevantes para la optimización simultánea, refiérase a Ko et al., (2005) y Romano et al., (2004).

2.2.3.3 Índices de capacidad de procesos

2.2.3.3.1 Índice *Cpm*

Ch'ng et al., (2005) proponen modificar el índice *Cpm* de tal forma que se obtiene la siguiente expresión:

$$Cpm = \frac{\min(LSE - T, T - LIE)}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{\mu} - T)^2 + \hat{\omega}_{\sigma}^2}} \quad (2.13)$$

Entre más grande sea el valor de este índice mejor será la configuración del proceso. Si lo que se desea es optimizar varias características de calidad al mismo tiempo Ch'ng et al., (2005) sugieren una modificación extra resultando la siguiente expresión:

$$Total \quad Cpm = \sum_{i=1}^p e_i \frac{\min(LSE_i - T_i, T_i - LIE_i)}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{i\mu} - T_i)^2 + \hat{\omega}_{i\sigma}^2}} \quad (2.14)$$

Cuando están disponibles el límite superior de especificación (LSE), el valor objetivo y el límite inferior de especificación (LIE) la ecuación anterior se puede utilizar para el caso del “Nominal es lo mejor”. Pero además esta ecuación también permite la optimización de características de calidad unilaterales. Por ejemplo cuando solo se conocen el valor objetivo y el LIE se procede haciendo el $LSE = \infty$. Así las ecuaciones 2.13 y 2.14 quedan de la siguiente manera respectivamente:

$$Cpm = \frac{T - LIE}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{\mu} - T)^2 + \hat{\omega}_{\sigma}^2}} \quad (2.15)$$

$$Total \quad Cpm = \sum_{i=1}^p e_i \frac{T_i - LIE_i}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{i\mu} - T_i)^2 + \hat{\omega}_{i\sigma}^2}} \quad (2.16)$$

Además cuando solo se dispone del LSE y el valor objetivo se puede hacer $LIE = -\infty$ resultando:

$$Cpm = \frac{LSE - T}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{\mu} - T)^2 + \hat{\omega}_{\sigma}^2}} \quad (2.17)$$

$$Total \quad Cpm = \sum_{i=1}^p e_i \frac{LSE_i - T_i}{3\sqrt{(\hat{\omega}_{i\mu} - T_i)^2 + \hat{\omega}_{i\sigma}^2}} \quad (2.18)$$

Para optimizar estas expresiones en base a el ajuste del proceso se pueden utilizar métodos numéricos como el método del gradiente reducido generalizado, que es el que utilizan Ch'ng et al., (2005) en su trabajo. Otra alternativa es hacer programas que busquen en todas las combinaciones posibles de las variables la que sería la óptima con la desventaja de que el tiempo de procesamiento sería más lento, pero con la ventaja de que no arrojaría óptimos locales.

2.2.3.3.2 Índices Mcpm y Mcpk

Plante (2001) propone un índice de capacidad del proceso llamado *MCpk*, el cual es igual a la media geométrica de las medidas de comportamiento *Cpk*'s, para que sea utilizado como un criterio para evaluar el diseño de productos o procesos con múltiples respuestas. Expresa el índice *MCpk* como una función de los factores de diseño $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la siguiente manera:

$$MCpk = \left\{ \prod_{i=1}^m \text{Min} \left[\frac{(\mu_i - LS_i)}{3\sigma_i}, \frac{(US_i - \mu_i)}{3\sigma_i} \right] \right\}^{(1/m)} \quad (2.19)$$

Donde:

σ_i = la desviación estándar del *i*-ésimo término del error, $\sigma_{\epsilon i}$.

Notar que cuando $m=1$, este resultado coincide con el índice Cpk .

Según Plante (2001), la filosofía fundamental detrás del índice $MCpk$ tiene profundas implicaciones en la calidad. Esto es, si una o más de las medidas de desempeño es inadecuada (índice cercano a cero), entonces el producto completo se vuelve inaceptable, sin importar los índices de capacidad de las restantes medidas de desempeño. De hecho el índice $MCpk$ es fuertemente influenciado por las características de calidad que tienen una capacidad baja. Además este criterio es más universalmente aplicable, puesto que no requiere de un valor objetivo para cada medida de desempeño.

Similar al índice $MCpk$, en el índice $MCpm$ también se utiliza la media geométrica de las medidas de desempeño Cpm individuales. El criterio de capacidad $MCpm$ se expresa de la siguiente manera:

$$MCPM = \left\{ \prod_{i=1}^m \left[\frac{(US_i - LS_i)}{6\sqrt{[\sigma_i^2 + (\mu_i - T_i)^2]}} \right] \right\}^{(1/m)} \quad (2.20)$$

Donde: T_i es igual al valor objetivo de la i -ésima característica de calidad.

Sin embargo, el índice $MCpm$, como el índice Cpm , requiere de valores objetivo para cada característica de calidad, por lo que no es tan flexible con el índice $MCpk$. Posteriormente tanto para el índice $MCpm$ como para el índice $MCpk$, se utiliza formulaciones de programación no lineal para maximizarlos.

Plante (2001), reconoce que en algunas ocasiones no todas las características de calidad son igual de importantes, por lo que según dice puede ser más importante lograr mayores índices de capacidad en una o más características a expensas de algunas otras. Es por esto que también propone un enfoque que considera la importancia relativa de las características de calidad.

2.2.4 Enfoques que se basan en la proporción de conformancia

2.2.4.1 Método de Chiao y Hamada

Según mencionan Chiao y Hamada (2001), cuando se analizan datos de múltiples respuestas, analizarlas por separado no ofrece resultados satisfactorios, especialmente cuando estas variables están correlacionadas. El realizar análisis separados puede llevar a conclusiones contradictorias respecto a los niveles de los factores importantes, ya que ciertos niveles de las variables pueden mejorar la calidad de alguna respuesta, pero empeorar la de otras. En el método que proponen se considera la matriz de varianzas-covarianzas dependiente de los factores experimentales y el criterio de decisión es la probabilidad de que todas las respuestas satisfagan simultáneamente sus respectivas especificaciones, por lo que la configuración óptima del proceso será aquella que maximice esta probabilidad de que las variables de respuesta estén en la región S , lo cual se simboliza de la siguiente manera:

$$P(Y \in S) \quad (2.21)$$

Debido a que según Chiao y Hamada (2001) la proporción de conformancia se determina por las medias, varianzas y correlaciones (ρ) de la distribución multivariada de las respuestas, proponen construir modelos para estos parámetros de la siguiente manera:

$$\mu_k = x\alpha_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.22)$$

$$\log(\sigma_k^2) = x\beta_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.23)$$

$$\tanh^{-1}(\rho_{kl}) = x\gamma_{kl}, \quad 1 \leq k < l \leq m. \quad (2.24)$$

En las ecuaciones anteriores x denota un vector fila de covariables asociadas con un conjunto de factores los cuales pueden incluir un intercepto, efectos principales,

interacciones de dos factores etc... Con los modelos anteriores se obtienen diferentes valores de los parámetros para diferentes niveles de los factores de interés (X 's), los cuales se sustituyen en la función de densidad de probabilidad conjunta Y , la cual se considera una normal multivariada m dimensional con media $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^T$ y matriz de varianza-covarianza Σ , $f(Y; \mu, \Sigma)$ dada por:

$$f(Y; \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-(m/2)} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y - \mu)' \Sigma^{-1} (Y - \mu)\right] \quad (2.25)$$

El enfoque Bayesiano propuesto por Peterson (2004), también considera la probabilidad de que el proceso cumpla con los requisitos de calidad de las características del producto a optimizar consideradas en el análisis.

2.2.4.2 El enfoque Bayesiano

Esta propuesta es un híbrido entre las categorías 3 y 4, ya que primeramente mediante simulación calcula probabilidades de conformancia para las variables de respuesta originales de acuerdo con sus especificaciones y posteriormente esta probabilidad de conformancia general reemplaza a las variables de respuesta originales.

Miró-Quesada et al. (2004) mencionan que el problema de la optimización de respuestas múltiples consiste en escoger los valores de los k factores controlables x_i , tal que y tenga ciertas propiedades deseadas. Frecuentemente se presenta el caso en que estas propiedades son que el vector de respuestas y satisfaga las especificaciones. Digamos que A representa la región del espacio de respuestas definido por estas especificaciones. La región A puede tener una forma arbitraria. Entonces la optimización de respuestas múltiples se puede resumir en un simple objetivo, el cual consiste en maximizar la probabilidad de tener el vector de respuestas dentro de la región de especificación A , por ejemplo, maximizar la siguiente probabilidad de conformancia:

$$\begin{aligned} \max p(x) &= p(y \in A | x, \text{datos}) \\ \text{sujeto a:} & \\ x &\in R \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde $y = B'x + \varepsilon$ y R es la región en donde el modelo es válido, la cual normalmente se toma como la región experimental definida por la matriz de diseño X .

Según Peterson (2004) partiendo del modelo típico de regresión multivariada:

$$Y = Bx + e \quad (2.27)$$

Donde B es una matriz $p \times q$ de los coeficientes de regresión y x es el vector $q \times 1$ de valores x en los que se evalúa la ecuación (2.27). Además el vector e tiene una distribución normal multivariada con vector de medias igual a $\mathbf{0}$ y matriz de varianzas-covarianzas Σ . Para considerar la incertidumbre en los parámetros del modelo B y Σ se puede usar la densidad posterior predictiva $f(y | x, \text{datos})$. Utilizando la distribución previa conjunta no informativa clásica para B y Σ y el modelo de la ecuación (2.27), la densidad predictiva bayesiana para y se puede obtener en forma cerrada. La densidad predictiva bayesiana para el vector de valores x en los que se evaluará la función, está dada por una distribución t multivariada con ν grados de libertad (gl), de la siguiente manera:

$$f(y | x, \text{datos}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+p}{2})}{(\pi\nu)^{p/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \sqrt{|H|} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} (y - \hat{B}'x)' H (y - \hat{B}'x) \right\}^{-\frac{\nu+p}{2}} \quad (2.28)$$

$$H = \left(\frac{\nu}{n-q} \right) \frac{\sum^{-1}}{1 + x'(X'X)^{-1}x}$$

$$p(x) = \frac{\# \text{ de valores en } A}{\# \text{ generados}} \quad (2.29)$$

Aquí p es la cantidad de respuestas a optimizar, $\mathbf{X}$ es la matriz de $q \times n$ formada por los $n(x_i)$ vectores de covariables, $\hat{\mathbf{B}}$ es la estimación por mínimos cuadrados de $\mathbf{B}$, $\Gamma(\cdot)$ se refiere a la función gamma, $\hat{\Sigma}$ es el estimador usual de Σ calculado con los residuales del ajuste de la regresión multivariada, $\nu = n - p - q + 1$ y n es el tamaño de muestra.

Según Peterson (2004), debido a que la ecuación 2.30, sigue una distribución t multivariada, es fácil simular los valores Y , de esta densidad predictiva. Jhonson (1987) en su libro *Multivariate statistical simulation* menciona que se puede simular una variable aleatoria t – *variada* Y , mediante la simulación de una variable aleatoria normal multivariada y una variable aleatoria Chi-cuadrada independiente (Peterson, 2004). Si W es una variable aleatoria normal con vector de medias igual a cero y una matriz de varianzas-covarianzas igual a H^{-1} y además U es una variable aleatoria Chi-cuadrada que es independiente de W , entonces:

$$Y_j = (\sqrt{\nu}W_j / \sqrt{U}) + \hat{\mu}_j, \quad \text{para } j=1, \dots, p \quad (2.30)$$

Donde Y_j es el j -ésimo elemento de Y , W_j es el j -ésimo elemento de W y $\hat{\mu}_j$ es el j -ésimo elemento de $\hat{\mu} = \hat{B}z(x)$. De lo anterior menciona Peterson (2004), se sigue que $\mathbf{Y}$ sigue una distribución t multivariada con ν grados de libertad.

2.3 La inferencia bayesiana

De acuerdo con Jackman (2004) el teorema de Bayes lleva ese nombre por el reverendo Thomas Bayes quien murió en 1761. Este teorema apareció por primera vez en un ensayo atribuido a Bayes y comunicado a la Real Sociedad después de su muerte por Richard Price en 1763, el cual se ha vuelto a publicar en muchas ocasiones. Bayes solamente anunció el resultado para una previa uniforme. En 1774 Laplace, aparentemente sin conocimiento del trabajo de Bayes, anunció el teorema en su forma más general.

Berger (2000) hace un recuento de la proliferación en los últimos años de las actividades referentes a la difusión de la inferencia Bayesiana. Menciona que de 1974 a 1994 la tendencia era lineal con aproximadamente el doble de artículos cada 10 años. Sin embargo en los últimos cinco años (con referencia a 1999, que fue cuando se publicó este artículo) ha habido un aumento muy dramático tanto en la cantidad como en la tasa de incremento de los artículos Bayesianos. Este mismo fenómeno también es visible en el número de libros escritos sobre este análisis. Menciona que durante los primeros 200 años de (1769 - 1969), hubo quizá unos 15 libros al respecto. En los años de 1970 a 1989 el número de libros fue de 30. De 1990 a 1999, aproximadamente 60 libros han sido escritos, sin contar las muchas docenas de conferencias, proceedings y colección de artículos sobre el tema.

Por análisis Bayesiano de datos se entiende, métodos prácticos para hacer inferencia de datos usando modelos de probabilidad para cantidades observadas y cantidades de las cuales deseamos aprender. La característica esencial de los métodos Bayesianos es su uso explícito de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre en inferencias basadas en el análisis estadístico de datos (Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., y Rubin, D. B., 1995).

Withers (2002) menciona que en la última década, la emergencia de los métodos Bayesianos en las ciencias y la estadística ha ocurrido como una fiebre y refiere que están teniendo un impacto fundamental en prácticamente todas las metodologías estadísticas.

La definición bayesiana de probabilidad ajusta el término probabilidad al lenguaje cotidiano, y así la teoría de probabilidad bayesiana parece estar relacionada de una manera mucho más cercana al razonamiento intuitivo de las personas en la presencia de incertidumbre (Lecoutre, 2006). El análisis bayesiano a diferencia del enfoque frecuentista es de naturaleza secuencial (Woolley, 2004). A este respecto Retzer (2006) comenta que la estimación Bayesiana consiste en la actualización de nuestras creencias actuales con nueva información procedente de los datos, lo cual describe el proceso fundamental de aprendizaje utilizado tanto en la ciencia como en la vida diaria.

En algunas ocasiones resulta adecuado considerar a un parámetro ϑ desconocido como el valor de una variable aleatoria de una distribución de probabilidad dada. Esto se presenta cuando antes de observar los resultados de los datos $X_1, \dots, X_n$, se tiene alguna información acerca del valor de ϑ y dicha información se puede expresar en términos de distribución de probabilidad, acertadamente llamada distribución a priori de ϑ Ross (2002). Esta distribución previa la cual se supone que representa lo que se conoce acerca de los parámetros desconocidos antes de tener datos disponibles, asume un papel importante en el análisis Bayesiano. Dicha distribución se puede utilizar para representar el conocimiento previo o la ignorancia relativa (Box y Tiao, 1992).

Según comenta Retzer (2006) el análisis Bayesiano es una reformulación de la teoría estadística básica, no una rama de estadísticos. Esto significa que cualquier cosa que se haga con la estadística tradicional también puede ser hecha con los métodos Bayesianos. En realidad, la flexibilidad fundamental de este enfoque permite hacer muchas cosas que no son posibles con el análisis estadístico tradicional. Para Chaparro et al., (2013), la teoría bayesiana actualmente está demostrando ser de gran utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori, además, el hecho de permitir hacer una revisión de esas estimaciones en función de la evidencia empírica, está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Una aplicación de esto son los clasificadores bayesianos que son frecuentemente usados en medicina.

2.3.1 El Teorema de Bayes

A continuación se presenta el teorema de Bayes para eventos y posteriormente para densidades según Colosimo y Del Castillo (2007).

2.3.1.1 El teorema de Bayes para eventos

Para los eventos A y B en algún espacio muestral S , partiendo de la definición de la probabilidad condicional tenemos,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.31)$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.32)$$

En donde estas expresiones serán verdaderas si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Por lo cual,

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad (2.33)$$

Esta fórmula muestra la esencia del Teorema de Bayes: si el evento B representa alguna información adicional disponible, entonces $P(A|B)$ es la probabilidad después de incorporar esta información, es decir, la *posterior* de A y $P(A)$ es la probabilidad antes de que esté disponible la información, es decir, la *previa* de A .

2.2.1.2 El teorema de Bayes para densidades

Si y representa datos y θ algún parámetro o vector de parámetros, entonces de la definición de densidad condicional, se tiene que,

$$p(y|\theta) = \frac{p(\theta, y)}{p(\theta)} \quad (2.34)$$

y

$$p(\theta | y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} \quad (2.35)$$

Lo cual implica que la densidad conjunta es

$$p(\theta, y) = p(\theta)p(y | \theta) = p(y)p(\theta | y),$$

lo cual implica

$$p(\theta | y) = \frac{p(\theta)p(y | \theta)}{p(y)} \quad (2.36)$$

En donde el denominador tanto en el caso discreto como en el continuo según Box y Tiao (1992), sería:

$$c^{-1} = \begin{cases} p(y) = \int p(y | \theta)p(\theta)d(\theta) & \text{caso continuo} \\ p(B) = \sum_{\text{todo } A} p(B | A)p(A) & \text{caso discreto} \end{cases}$$

Por lo que c es meramente una constante de normalización necesaria para asegurar que la distribuciones posteriores $P(\theta | y)$ o $P(A | B)$ integran o suman uno respectivamente.

Según Retzer (2006) una descripción intuitiva de los pasos básicos necesarios en el análisis Bayesiano se muestra enseguida:

- Se empieza el análisis con el conocimiento previo acerca de los parámetros antes de recolectar datos.

- Luego, se recolectan los datos y se representan en términos de lo que se conoce como función de verosimilitud.
- Finalmente se actualiza el conocimiento previo usando la información contenida en los datos recabados. Esta actualización de la información se refleja en la distribución *a posteriori* de los parámetros de interés. La actualización implica multiplicar *a priori* veces la verosimilitud.

Finalmente en referencia a la importancia de la inferencia Bayesiana, Berger (2000) redacta que es importante reconocer que el genio no se puede regresar a la botella. La “máquina” Bayesiana junto con las cadenas de Markov y la simulación Monte Carlo (*MCMC*), es posiblemente el mecanismo más poderoso jamás creado para el procesamiento de datos y conocimiento.

2.4 Las Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo (CMMC) y el muestreo de Gibbs

Según Jackman (2004), los métodos basados en cadenas de Markov con simulación Monte Carlo probablemente son el desarrollo más excitante en la estadística en los últimos años. Según Geyer (1992), la idea básica de las cadenas de Markov con simulación Monte Carlo es muy simple. Si no es posible encontrar una manera de simular datos independientes de algún proceso estocástico complicado, casi tiene la misma utilidad poder simular datos dependientes $x_1, x_2, \dots$ que formen una cadena de Markov irreducible con la distribución P de interés como la distribución estacionaria. El algoritmo de Metropolis – Hastings proporciona estas cadenas. Según Chib y Greenberg (1995) este algoritmo es extremadamente versátil y presenta el muestreo de Gibbs como un caso especial.

Mencionan Chib y Greenberg (1995) que el muestreo de Gibbs es uno de los métodos más conocidos de las Cadenas de Markov Monte Carlo para simular distribuciones multivariadas complejas sin una forma estándar, cuyo impacto en la estadística bayesiana ha sido inmenso. Según Casella y George (1992), el muestreo de Gibbs es una técnica para generar variables aleatorias de una distribución (marginal) indirectamente, sin tener que calcular su densidad que se basa únicamente en las propiedades elementales de las cadenas de Markov. Para la inferencia Bayesiana el muestreo de Gibbs se utiliza principalmente para generar distribuciones posteriores y su utilidad se incrementa grandemente conforme se incrementan las dimensiones del problema, debido a que evita el cómputo de integrales que pueden ser prohibitivas.

2.5 La media geométrica

Según Spiegel y Stephens (2002) la media geométrica (Mg) de un conjunto de N números positivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ es la raíz N -ésima del producto de esos números:

$$G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \dots X_N} \quad (2.37)$$

Los mismos autores también utilizan la fórmula:

$$G = \sqrt[N]{X_1^{f_1} X_2^{f_2} \dots X_k^{f_k}} \quad (2.38)$$

Donde $N = \sum f$. A esto se le denomina media geométrica ponderada (Mpg). Según los autores la Mg es más adecuada que la media aritmética para promediar proporciones.

3. Materiales y Métodos

En este capítulo se describen los equipos y software utilizado en el desarrollo del presente trabajo, así también, se da una descripción breve de los pasos que integran la metodología propuesta para resolver los casos de estudio analizados. En el siguiente capítulo se ilustrará con dos ejemplos para cada una de los pasos de esta metodología.

3.1 Materiales

El equipo y el software utilizados en el desarrollo de este trabajo fueron los siguientes:

Equipo: Computadora portátil ASUS con un procesador Intel Core i5-3230M CPU de 2.60GHz, memoria RAM de 6.0 GB y un sistema operativo de 64 bits. Este equipo se utilizó para la simulación, modelado, optimización y por último la redacción de la memoria de tesis. Respecto al software se requirieron los siguientes:

Software: se utilizaron Matlab, Minitab 16 y Excel 2013 de la paquetería de Office.

Minitab 16: Es un software diseñado especialmente para cálculos estadísticos, donde se puede ejecutar funciones básicas y avanzadas, su utilización es sumamente sencilla y fácilmente asimilable por el lector. Además combina lo amigable del uso de Microsoft Excel con la capacidad de ejecución de análisis estadísticos. Este software es muy popular debido a la sencillez de su uso, se pueden encontrar muchos trabajos donde reportan su utilización, libros basándose en su uso, prácticas del manejo de dicho software en las universidades, entre otros. En este trabajo fue requerido para:

1. El ajuste de los polinómios requeridos en el paso VIII, para modelar la relación entre las variables de control y la media geométrica de las deseabilidades.

Matlab R2010a: Es un software matemático interactivo que permite desarrollar programas de acuerdo a las necesidades de cada usuario, basando en un lenguaje propio de programación. Está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux, lo que permite ser un software accesible para todo público. Se requirió para:

1. Desarrollar un programa en Matlab tomando como referencia el propuesto por Del Castillo en su página web (Del Castillo, 2006) que se utilizó para la simulación de la distribución predictiva, con el cual se obtuvo el cálculo de las deseabilidades individuales y globales, siendo estas últimas utilizadas como las variables de respuesta a optimizar. Este programa se muestra en el anexo 7.1, en el cual se sufrió algunas modificaciones para representar el caso de estudio I y II y además para la validación de los resultados en la optimización.
2. Graficar el comportamiento de las condiciones de las variables de control en los distintos escenarios, esto se lleva a cabo en el paso VIII de la metodología.
3. Realizar la corridas de validación en la condición óptima encontrada según el paquete Solver de Excel. Esto se realiza en el paso IX de la metodología.
4. Graficar el comportamiento de las variables de respuesta convertidas en deseabilidad en los escenarios que se presentaron en las corridas de validación, esto se observa en el paso IX de la metodología.

Excel 2013: La paquetería de Excel fue necesaria para el uso de la hoja de cálculo tradicional y de igual manera su paquetería de Solver. Su utilización se explica enseguida:

1. Pronosticar la DG en las distintas combinaciones de los factores de control consideradas en la malla, utilizando los polinomios ajustados dentro del paso VIII.

2. La optimización en el paso IX haciendo uso del paquete Solver, el cual es previamente activado, debido a que no está incluido en los paquetes que abren automáticamente, para esto hay que activarlo entrando en la opción *Add-Ins* dentro de la ventana de *Excel options* que aparece cuando se acciona el logotipo de Windows que se encuentra en la pantalla principal de Excel.

Word 2013: La paquetería de Word fue utilizado para la redacción del documento de tesis.

3.2 Metodología

La metodología empleada para llevar a cabo la optimización en ambos casos de estudio, constó de los siguientes pasos:

Paso I: Seleccionar un par de ejemplos tomados de la literatura para representar la metodología, lo cuales deben de tener más de una variable de respuesta. Se identifican las variables de control y de respuesta, como en cualquier experimento diseñado.

Paso II: Determinar el tamaño de las combinaciones, para eso se subdividieron los factores de control en saltos más pequeños, esto se realiza dentro del programa donde se desarrolla la metodología, se trabajó con un arreglo de 11^2 , resultando en 121 combinaciones de las variables de control.

Paso III: Generar vectores de tamaño 10,000 en cada una de las combinaciones factoriales dentro del programa en cada una de las variables de respuesta, en este punto también se trabajó con la robustez, ya que en cada combinación factorial, mientras que dos de las variables de control permanecen fijas en la simulación, una tercer variable toma valores diferentes en cada iteración, lo cual asegura que la combinación sea robusta a cambios en una de las variables.

Paso IV: Calcular las deseabilidades individuales para cada una de las variables de respuesta simuladas anteriormente, comparándolas con sus respectivas especificaciones introducidas en la programación para que se realice el cálculo correspondiente en cada variable de respuesta.

Paso V: Calcular la deseabilidad global (*DG*) dentro del programa para cada una de las combinaciones de las deseabilidades individuales. Existen distintos escenarios de *DG* dentro del programa y se hacen modificaciones de acuerdo al caso de estudio con el que se esté trabajando.

Paso VI: Repetir el cálculo para cada una de las combinaciones de las variables de control con el fin de obtener el mayor valor de deseabilidad global.

Paso VII: Reducir la dimensión de las deseabilidades de cada una de las condiciones por medio del cálculo de la Media Geométrica (*MG*) para llegar a una sola variable de respuesta, lo cual se logra en los pasos IV y V.

Paso VIII: Generar modelos de regresión que explican la relación entre las variables de control y las deseabilidades globales resultantes, enseguida se ajustarán dichos modelos de manera que expliquen una buena relación, esto se aprecia estadísticamente si se obtiene una R^2 alta (mayor al 70%), seguido de comparar el comportamiento de los modelos de regresión y los datos simulados en el programa por medio de un gráfico. Una vez validados los modelos se hace una representación de ellos utilizando superficies de respuesta y gráficos de contorno, en ellas se observa el comportamiento de las variables y se ubica el punto máximo alcanzado (deseabilidad) dentro de las 121 combinaciones, realizado lo anterior se procede a optimizar (maximizar).

Paso IX: Optimizar la el modelo de regresión generados en el paso VIII para encontrar las mejores condiciones de operación del proceso, se realizó una búsqueda del punto óptimo

en los modelos de regresión por medio del Solver de Excel donde se utiliza el Gradiente Reducido Generalizado (*GRG*) no lineal para encontrar el valor máximo de Deseabilidad, para esto se utilizan 15 valores distintos exploratorios iniciales de las variables de control, con el fin de encontrar en cuantos valores distintos converge el algoritmo, el Solver de Excel encontrará la combinación que den el resultado óptimo (valor máximo). Se realiza una validación mediante una modificación al programa de simulación, de manera que las variables de control tuvieran valores fijos, los cuales corresponden a los puntos óptimos. La validación se simuló en 30 ocasiones en cada uno de los escenarios de *DG*. Por último se generan gráficos que representan el comportamiento de esas 30 simulaciones en cada uno de los escenarios de *DG*, esto para poder hacer comparaciones entre ellos y ver el comportamiento de las variables de respuesta en cada uno de ellos.

Paso X: Concluir en base a los resultados alcanzos en la etapa anterior.

Como se mencionó al inicio de este apartado en el siguiente capítulo se mostrarán dos casos de estudio que se abordan siguiendo en cada uno de ellos, las etapas mencionadas anteriormente por lo que queda más claro el trabajo realizado en cada una de ellas.

4. Análisis de Resultados

En el presente capítulo se explica paso a paso la manera en que se realizó el estudio de acuerdo con la metodología que se planteaba anteriormente. Para ilustrar de mejor manera se utilizan dos casos de estudio tomados de la literatura, los cuales se muestran a continuación:

4.1 Caso de estudio I: Optimización de un sistema de cromatografía líquida de alto rendimiento (HPLC).

Paso I: Para probar las hipótesis mencionadas anteriormente y cumplir con la metodología, se toman el caso de estudio, de Miro-Quesada et al. (2004) que consiste en Optimizar un sistema de cromatografía líquida de alto rendimiento (HPLC) para detectar mezclas de impurezas. La realización del ensayo se basó en cuatro variables de respuesta cuantitativas, Y_1 : resolución crítica (R_s), Y_2 : tiempo de ejecución total, Y_3 : proporción señal-ruido del último pico y Y_4 : factor de asimetría del pico principal. Se incluyeron tres factores controlables que afectan el ensayo de HPLC, X_1 : % de IPA, X_2 : temperatura y X_3 : pH, donde el % de IPA es la variable de ruido. Se utilizó un diseño de Box-Behnken con tres puntos centrales. Los datos se presentan en la tabla 4.1.

Paso II: Se determina el tamaño de las combinaciones de los factores que se utilizaran en la simulación para crear una malla fina de combinaciones mediante la ecuación 2.30, serán los vectores de respuesta necesarios para el cálculo de las deseabilidades. En este caso de estudio se trabajó con un arreglo 11^2 , es decir, se trabajó con 121 combinaciones distintas de los factores de control X_2 y X_3 , como se muestra en la tabla 4.2, utilizando los siguientes niveles para cada variable:

$$\{-1 \quad -0.8 \quad -0.6 \quad -0.4 \quad -0.2 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1\}$$

Tabla 4.1 Variables de control y variables de respuesta para el caso de estudio I.

Variables de control			Variables de respuesta			
% IPA	Temperatura	pH	Rs	Tiempo	S/R	Señal de Asimetría
65	30	0.175	2.14	22	172	0.76
65	50	0.175	1.73	12	311	0.88
65	40	0.05	1.93	16	251	0.8
65	40	0.3	1.95	16	241	0.8
70	40	0.175	2.17	16	278	0.79
70	50	0.05	1.97	14	371	0.86
70	30	0.3	2.38	19	194	0.74
70	50	0.3	1.98	11	360	0.86
70	30	0.05	2.37	18	204	0.74
70	40	0.175	2.2	14	280	0.78
75	40	0.3	2.42	13	314	0.78
75	30	0.175	2.61	17	223	0.73
75	50	0.175	2.14	10	410	0.85
75	40	0.05	2.42	12	324	0.78
70	40	0.175	2.2	14	281	0.79

Tabla 4.2 Combinaciones de los factores de control utilizadas para formar la malla en la simulación: Caso de estudio I.

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X ₂	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
X ₂	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
X ₂	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44

X ₂	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
X ₂	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
X ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
X ₂	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
X ₂	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
X ₂	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
X ₂	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
X ₂	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X ₃	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

Paso III: Una vez que se fijó la cantidad de combinaciones, se requiere determinar la cantidad de corridas a simularse en cada una de ellas utilizando la ecuación 2.30, en este caso se utilizaron 10,000 en cada una de las 121 combinaciones, es decir, 10,000 vectores de cuatro respuestas cada uno (Y_1, Y_2, Y_3 y Y_4) en este punto también se trabajó con la robustez, debido que para cada una de las combinaciones de (X_2 y X_3), mientras estas permanecen fijas en la simulación de los 10,000 vectores de respuesta, la variable (X_1) toma un valor diferente en cada iteración, la cual se genera de una distribución normal (0, 0.1), con lo que se forma un vector de covariables x_1, x_2 y x_3 , de tal forma que si entre las 121 combinaciones existe alguna que de por resultado una deseabilidad alta, también se

está asegurando que la combinación sea robusta a cambios en la variable X_1 , con los vectores obtenidos de la ecuación 2.30 se da paso al cálculo de la deseabilidad en las variables de respuesta y en sus 121 combinaciones.

Paso IV: Se calcula las deseabilidades de cada variable de respuesta utilizando la ecuación (2.7) en cada una de las 121 combinaciones, se compraran los valores de las variables de respuesta contra las especificaciones correspondientes de este caso de estudio las cuales se presentan en la tabla 4.3, en la cual también se observa el tipo de variable con la que se va a trabajar, de tal manera que el cálculo corresponda a las necesidades del caso de estudio.

Tabla 4.3 Especificaciones de las variables de respuesta del caso de estudio I para el cálculo de la deseabilidad.

Respuesta	LIE	Objetivo	LSE	Respuesta
y_1	1.2	1.8		Lo mayor es lo mejor
y_2	-	13.5	20	Lo menor es lo mejor
y_3	250	302	-	Lo mayor es lo mejor
y_4	0.75	0.795	0.84	Lo nominal es lo mejor

Paso V y VI: Se busca obtener la Deseabilidad Global (DG) para cada una de las combinaciones de las variables mostradas en la tabla 4.2 utilizando la ecuación 2.8.

En este caso de estudio se plantearon dos escenarios modificando los niveles de importancia de las variables de respuesta. En el escenario el escenario 1 (Dg) todas las variables de respuesta se consideran de igual importancia y en el escenario 2 (Dgp) tendrán distintos niveles como se muestra en la tabla 4.4, en la que puede verse que las variables Y_2 y Y_3 se consideran de manera ficticia de mayor prioridad con el fin de evaluar cómo responde el punto óptimo a estas ponderaciones.

Tabla 4.4 Escenarios considerados en el caso de estudio I.

Ponderaciones

Variables	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Dg	0.25	0.25	0.25	0.25
Dgp	0.1	0.4	0.4	0.1

Paso VII: Por medio del cálculo de la Media Geométrica (MG) se hace una reducción de dimensionalidad, ya que de cuatro variables de respuesta se redujo a una sola (Dg y Dgp). Enseguida se muestran las deseabilidades individuales y globales resultantes de la simulación para cada una de las combinaciones de acuerdo con los pesos mostrados en la tabla 4.4. En la tabla 4.5 se presentan las 121 combinaciones consideradas de las variables de control, las deseabilidades individuales, así como los valores Dg y Dgp obtenidos.

Tabla 4.5 Deseabilidades individuales y globales para caso de estudio I.

X_2	X_3	D_1	D_2	D_3	D_4	Dg	Dgp
-1	-1	0.9991	0.6685	0.001	0.0554	0.0778	0.0401
-1	-0.8	0.9993	0.682	0.001	0.0472	0.0752	0.0398
-1	-0.6	0.9991	0.6979	0.0004	0.0502	0.061	0.0279
-1	-0.4	0.9983	0.7066	0.0005	0.0482	0.0646	0.031
-1	-0.2	0.9992	0.7047	0.0007	0.0498	0.0708	0.0356
-1	0	0.9985	0.7155	0.0015	0.0489	0.0848	0.0477
-1	0.2	0.9992	0.7077	0.001	0.0516	0.0776	0.0408
-1	0.4	0.9985	0.6994	0.0007	0.0483	0.0699	0.0352
-1	0.6	0.9993	0.6967	0.0008	0.0515	0.074	0.0378
-1	0.8	0.9993	0.6812	0.0017	0.0513	0.0883	0.0501
-1	1	0.9971	0.6657	0.0012	0.054	0.0817	0.0437
-0.8	-1	0.9981	0.5518	0.0023	0.0892	0.1035	0.0548
-0.8	-0.8	0.9995	0.5726	0.0023	0.0923	0.105	0.0555
-0.8	-0.6	0.9992	0.5907	0.0012	0.0894	0.0887	0.0428
-0.8	-0.4	0.999	0.602	0.001	0.0962	0.0879	0.0413
X_2	X_3	D_1	D_2	D_3	D_4	Dg	Dgp
-0.8	-0.2	0.999	0.6174	0.0011	0.0913	0.0881	0.0421
-0.8	0	0.999	0.6305	0.0015	0.0891	0.0961	0.0487

-0.8	0.2	0.9984	0.6417	0.0011	0.089	0.0896	0.0436
-0.8	0.4	0.9992	0.654	0.0003	0.0896	0.0659	0.0266
-0.8	0.6	0.9986	0.6532	0.0013	0.0882	0.0928	0.0462
-0.8	0.8	0.9987	0.6567	0.0013	0.0835	0.0918	0.0461
-0.8	1	0.9985	0.6542	0.0011	0.0914	0.0907	0.0441
-0.6	-1	0.9983	0.4314	0.0073	0.1778	0.1536	0.0838
-0.6	-0.8	0.9992	0.4485	0.0043	0.1738	0.1352	0.0688
-0.6	-0.6	0.999	0.4566	0.0058	0.1808	0.1476	0.0783
-0.6	-0.4	0.9982	0.475	0.003	0.1813	0.1269	0.0614
-0.6	-0.2	0.999	0.4841	0.0029	0.1836	0.1264	0.0608
-0.6	0	0.9988	0.4957	0.0034	0.1866	0.1331	0.0657
-0.6	0.2	0.9987	0.5075	0.0027	0.1807	0.1256	0.0605
-0.6	0.4	0.9992	0.5127	0.003	0.1838	0.1297	0.0633
-0.6	0.6	0.9991	0.52	0.0026	0.1824	0.1254	0.0602
-0.6	0.8	0.9988	0.5276	0.0034	0.1761	0.1329	0.0667
-0.6	1	0.9987	0.5323	0.0027	0.1795	0.1263	0.0611
-0.4	-1	0.9982	0.327	0.1091	0.319	0.3265	0.2351
-0.4	-0.8	0.9982	0.3344	0.0767	0.3291	0.303	0.2067
-0.4	-0.6	0.9985	0.3391	0.0543	0.3333	0.2798	0.1813
-0.4	-0.4	0.9984	0.354	0.0387	0.338	0.2608	0.1613
-0.4	-0.2	0.9979	0.3646	0.0299	0.3368	0.246	0.147
-0.4	0	0.9991	0.3645	0.0229	0.3396	0.2306	0.1322
-0.4	0.2	0.9992	0.3803	0.0189	0.3375	0.2219	0.1246
-0.4	0.4	0.9976	0.3856	0.0171	0.3323	0.2162	0.1201
-0.4	0.6	0.9993	0.3947	0.0151	0.3362	0.2115	0.1155
-0.4	0.8	0.9988	0.3936	0.0141	0.3214	0.2055	0.1118
-0.4	1	0.9982	0.399	0.0174	0.3252	0.2178	0.1223
-0.2	-1	0.998	0.2931	0.4095	0.5077	0.4966	0.4001
X_2	X_3	D_1	D_2	D_3	D_4	Dg	Dgp
-0.2	-0.8	0.9983	0.2835	0.3712	0.5206	0.4836	0.3806
-0.2	-0.6	0.9989	0.2828	0.3339	0.5209	0.4708	0.3645
-0.2	-0.4	0.9981	0.2861	0.3055	0.5236	0.4623	0.3535

-0.2	-0.2	0.9981	0.2854	0.2797	0.5298	0.4533	0.3414
-0.2	0	0.9982	0.2916	0.2575	0.5266	0.4457	0.3329
-0.2	0.2	0.9983	0.2972	0.2416	0.5268	0.4408	0.327
-0.2	0.4	0.9987	0.2927	0.2262	0.5335	0.4334	0.3169
-0.2	0.6	0.9987	0.2907	0.2213	0.5213	0.4278	0.3126
-0.2	0.8	0.9984	0.296	0.2191	0.5154	0.4274	0.3133
-0.2	1	0.9987	0.3009	0.2211	0.5063	0.4283	0.3159
0	-1	0.9982	0.5033	0.7225	0.6907	0.7076	0.6429
0	-0.8	0.9986	0.4502	0.6826	0.7007	0.681	0.6019
0	-0.6	0.9981	0.4117	0.6468	0.7001	0.6568	0.5683
0	-0.4	0.9981	0.3838	0.6189	0.7072	0.6399	0.5435
0	-0.2	0.9978	0.3607	0.5916	0.7053	0.6225	0.5205
0	0	0.9982	0.3474	0.5687	0.7059	0.6108	0.5048
0	0.2	0.9981	0.3356	0.554	0.7019	0.6007	0.4924
0	0.4	0.9972	0.3271	0.5382	0.711	0.5944	0.4823
0	0.6	0.9987	0.3193	0.5307	0.7055	0.5878	0.4747
0	0.8	0.9978	0.3143	0.5312	0.7023	0.5849	0.4716
0	1	0.9985	0.3247	0.5319	0.6897	0.5873	0.4772
0.2	-1	0.9987	0.812	0.9677	0.7473	0.8751	0.8819
0.2	-0.8	0.9982	0.7807	0.9485	0.7488	0.8625	0.8613
0.2	-0.6	0.9979	0.7577	0.9301	0.7465	0.8512	0.8442
0.2	-0.4	0.9976	0.7276	0.908	0.7402	0.8357	0.8219
0.2	-0.2	0.9983	0.6958	0.8888	0.7462	0.8238	0.8012
0.2	0	0.9982	0.6806	0.8724	0.7466	0.8156	0.7882
0.2	0.2	0.9986	0.663	0.8598	0.7449	0.807	0.7754
0.2	0.4	0.999	0.644	0.8457	0.7492	0.799	0.7618
0.2	0.6	0.9971	0.6529	0.8385	0.7513	0.8002	0.7635
X_2	X_3	D_1	D_2	D_3	D_4	Dg	Dgp
0.2	0.8	0.9976	0.6448	0.8334	0.7469	0.7955	0.7574
0.2	1	0.9979	0.6613	0.835	0.7427	0.7998	0.7653
0.4	-1	0.9971	0.9199	0.9965	0.5684	0.849	0.9125
0.4	-0.8	0.9973	0.9227	0.9964	0.5699	0.8502	0.9138

0.4	-0.6	0.9981	0.9197	0.9953	0.5642	0.8473	0.9114
0.4	-0.4	0.9972	0.9098	0.9944	0.5639	0.8446	0.907
0.4	-0.2	0.9971	0.8951	0.9936	0.5584	0.8388	0.8999
0.4	0	0.9978	0.8955	0.9936	0.5613	0.8402	0.9006
0.4	0.2	0.9981	0.8964	0.9925	0.5648	0.8416	0.9012
0.4	0.4	0.9987	0.8953	0.9911	0.5613	0.8398	0.8997
0.4	0.6	0.9972	0.8976	0.9906	0.5708	0.8435	0.9018
0.4	0.8	0.9972	0.8857	0.9877	0.5621	0.8368	0.8946
0.4	1	0.9975	0.8813	0.9899	0.5651	0.8374	0.8941
0.6	-1	0.9959	0.9583	0.9983	0.3068	0.7353	0.8726
0.6	-0.8	0.9957	0.9597	0.9977	0.299	0.7307	0.8706
0.6	-0.6	0.997	0.9567	0.9984	0.2942	0.7275	0.8685
0.6	-0.4	0.9958	0.9518	0.9974	0.29	0.7236	0.865
0.6	-0.2	0.9974	0.9555	0.9988	0.291	0.7255	0.8673
0.6	0	0.9963	0.9532	0.9976	0.2906	0.7244	0.8658
0.6	0.2	0.9961	0.9528	0.9975	0.2875	0.7223	0.8647
0.6	0.4	0.9968	0.9524	0.9983	0.2879	0.7227	0.865
0.6	0.6	0.9976	0.9564	0.9979	0.2904	0.7251	0.8671
0.6	0.8	0.9972	0.9561	0.9973	0.2965	0.7286	0.8686
0.6	1	0.9967	0.9501	0.9972	0.3002	0.7297	0.8674
0.8	-1	0.9947	0.9715	0.9996	0.0871	0.5386	0.7739
0.8	-0.8	0.9955	0.9738	0.9994	0.0859	0.5372	0.7736
0.8	-0.6	0.9959	0.9756	0.9994	0.0834	0.5334	0.7718
0.8	-0.4	0.9956	0.9774	0.9995	0.0826	0.5324	0.7717
0.8	-0.2	0.9949	0.9761	0.9992	0.0792	0.5264	0.7679
0.8	0	0.9953	0.9774	0.9985	0.0756	0.5205	0.7646
X_2	X_3	D_1	D_2	D_3	D_4	Dg	Dgp
0.8	0.2	0.9962	0.9712	0.9995	0.0762	0.521	0.7636
0.8	0.4	0.9967	0.9747	0.9989	0.0838	0.534	0.7719
0.8	0.6	0.9952	0.9729	0.9985	0.0766	0.5216	0.7641
0.8	0.8	0.9963	0.9736	0.9988	0.0808	0.529	0.7686
0.8	1	0.9963	0.9696	0.9994	0.0921	0.5461	0.7777

1	-1	0.992	0.9742	0.9992	0.0273	0.4029	0.6896
1	-0.8	0.9925	0.9786	0.9995	0.0243	0.3921	0.6831
1	-0.6	0.9917	0.9845	0.9989	0.025	0.3952	0.6863
1	-0.4	0.9951	0.9823	0.9998	0.0205	0.376	0.6726
1	-0.2	0.9931	0.9811	0.9997	0.022	0.3828	0.6771
1	0	0.9949	0.9822	0.9994	0.0226	0.3855	0.6792
1	0.2	0.9946	0.9815	0.9999	0.0217	0.3814	0.6763
1	0.4	0.9931	0.9786	0.9997	0.0213	0.3794	0.6742
1	0.6	0.995	0.9842	0.9991	0.0219	0.3828	0.6776
1	0.8	0.9926	0.9806	0.999	0.0243	0.3921	0.6834
1	1	0.994	0.9788	0.9992	0.0277	0.4051	0.692

Paso VIII: Partiendo de los datos obtenidos mediante la simulación y que se muestran en la tabla 4.5 se ajustaron polinomios utilizando Minitab 16, para representar la relación entre las variables de control y las deseabilidades calculadas en ambos escenarios como Mgd y $Mgdp$. Estos los modelos se representan en las ecuaciones 4.1 y 4.2 respectivamente:

$$Mgd = 0.652 + 0.980 x_2 - 0.0193 x_3 - 0.722 x_2^2 - 1.61 x_2^3 + 0.301 x_2^4 + 0.790 x_2^5 \quad (4.1)$$

Con $R^2 = 99.5\%$

$$Mgdp = 0.565 + 1.18 x_2 - 0.0240 x_3 - 0.299 x_2^2 - 1.67 x_2^3 + 0.0915 x_2^4 + 0.814 x_2^5 \quad (4.2)$$

Con $R^2 = 99.4\%$

Con el fin de evaluar el ajuste de los modelos (Mgd y $Mgdp$) de forma gráfica se hace una comparación contra el comportamiento de las Dg y Dgp , para cada una de las 121 combinaciones de las variables de control según los valores obtenidos mediante la simulación y los respectivos valores pronosticados según los modelos para las mismas combinaciones factoriales, utilizando Matlab. Las comparaciones de los escenarios simulados contra los modelos ajustados se muestran en las figuras 4.1 para Dg y 4.2 para Dgp . Al observar las figuras se puede apreciar que el comportamiento de los resultados pronosticados según los polinomios es muy similar a sus respectivos resultados según la simulación, lo cual es congruente con la R^2 ajustada ya que estas fueron mayores a 99% para ambos modelos, razón por la cual se puede proceder a optimizar (maximizar) los modelos de regresión obtenidos ya que éstos representan de buena manera a los datos simulados según este caso de estudio.

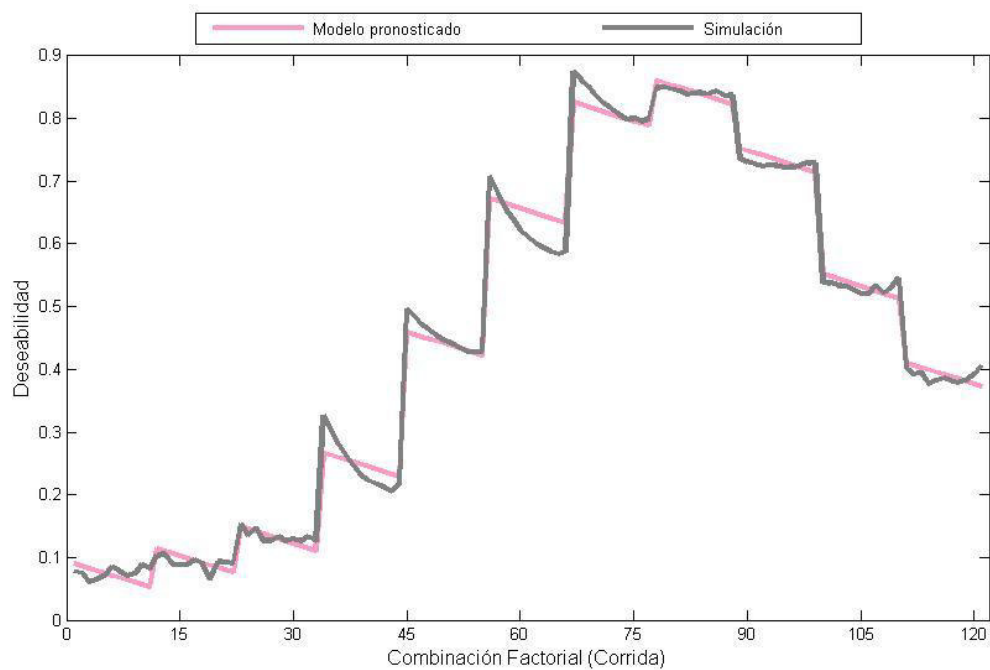


Figura 4.1 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades según el modelo ajustado para D_g contra los resultados de la simulación.

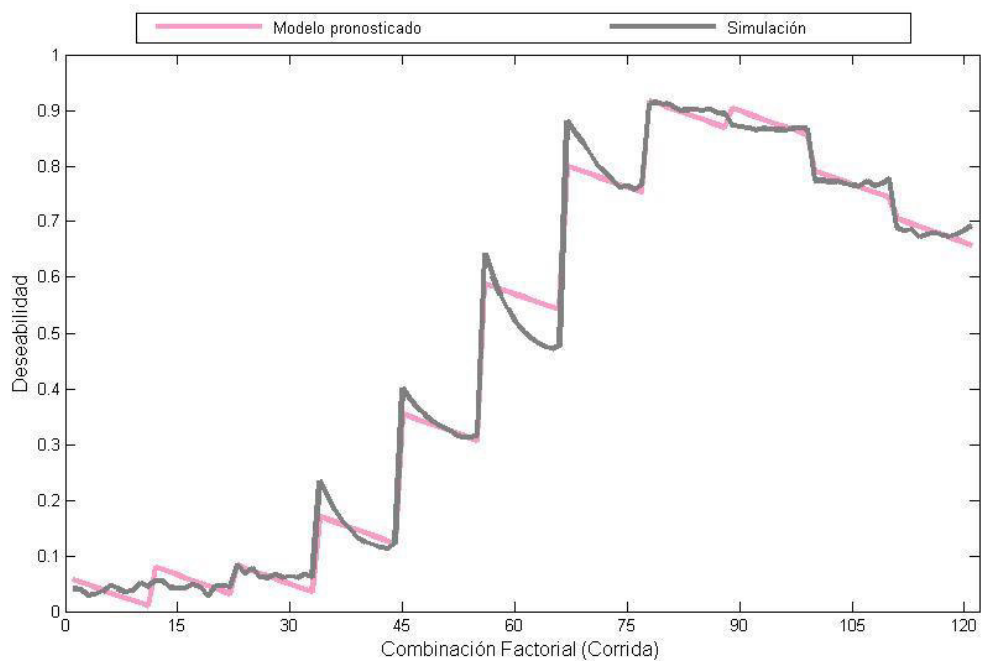


Figura 4.2 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades según el modelo ajustado para D_{gp} contra los resultados de la simulación.

Al validar los modelos ajustados se hace una representación de ellos por medio de superficies de respuesta y gráficas de contorno, generadas en Matlab, las cuales se muestran en las figuras 4.3-4.4, y 4.5-4.6 respectivamente, en ellas se puede ver la relación de las variables de control con las deseabilidades, en cada uno de los escenarios. En cada una de estas figuras se ubicó el punto máximo encontrado según las 121 combinaciones factoriales utilizadas para la simulación y posterior ajuste de modelos, el cual se localizó cerca del resultado óptimo encontrado que se propone en un paso posterior. Con relación a lo anterior en la tabla 4.6 se muestran las mayores deseabilidades alcanzadas para ambos modelos considerando solo las 121 combinaciones factoriales propuestos para construir la malla fina construida.

Tabla 4.6 Máximos valores de deseabilidad pronosticados según los modelos ajustados para las 121 combinaciones para el caso de estudio I.

Escenarios	Valores resultantes		Deseabilidad
	X_2	X_3	
<i>Dg</i>	0.4	-1	0.860535
<i>Dgp</i>	0.4	-1	0.916958

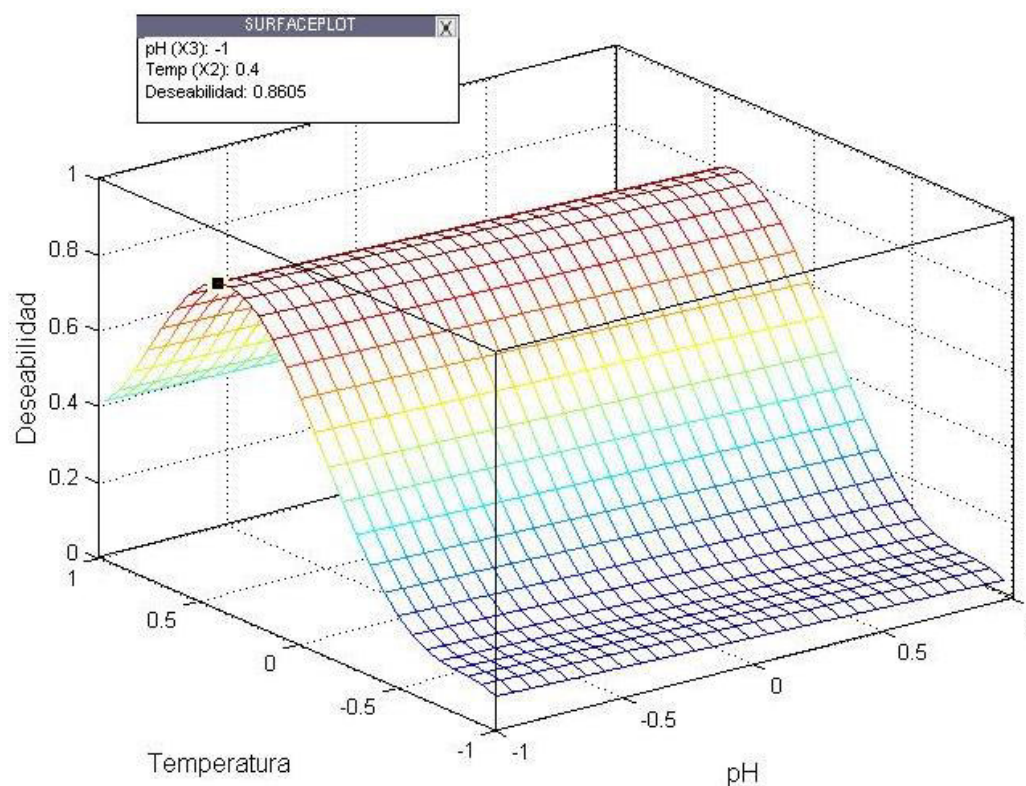


Figura 4.3 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a Dg .

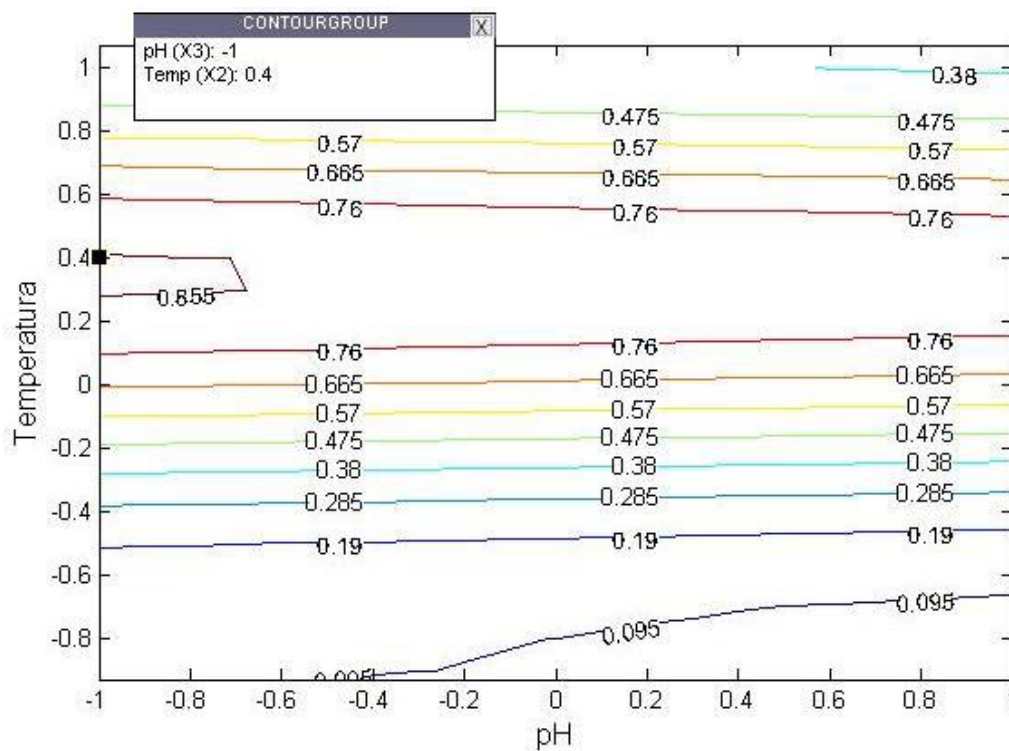


Figura 4.4 Gráfica de contorno para el modelo asociado a Dg .

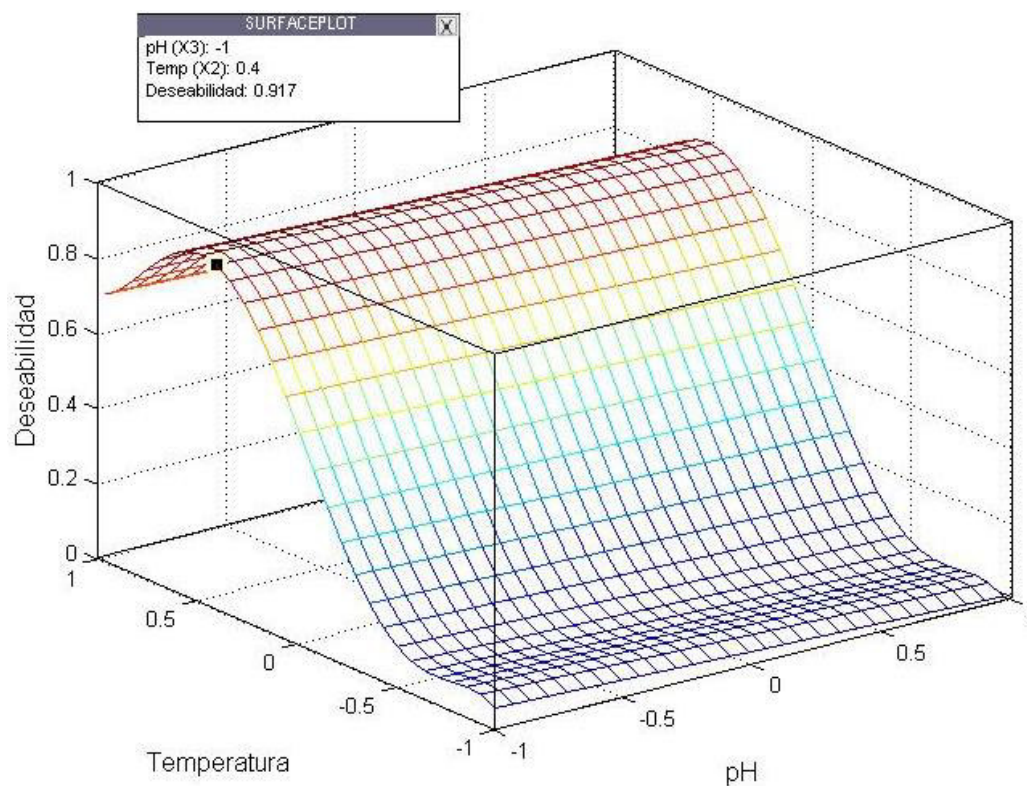


Figura 4.5 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a ***Dgp***.

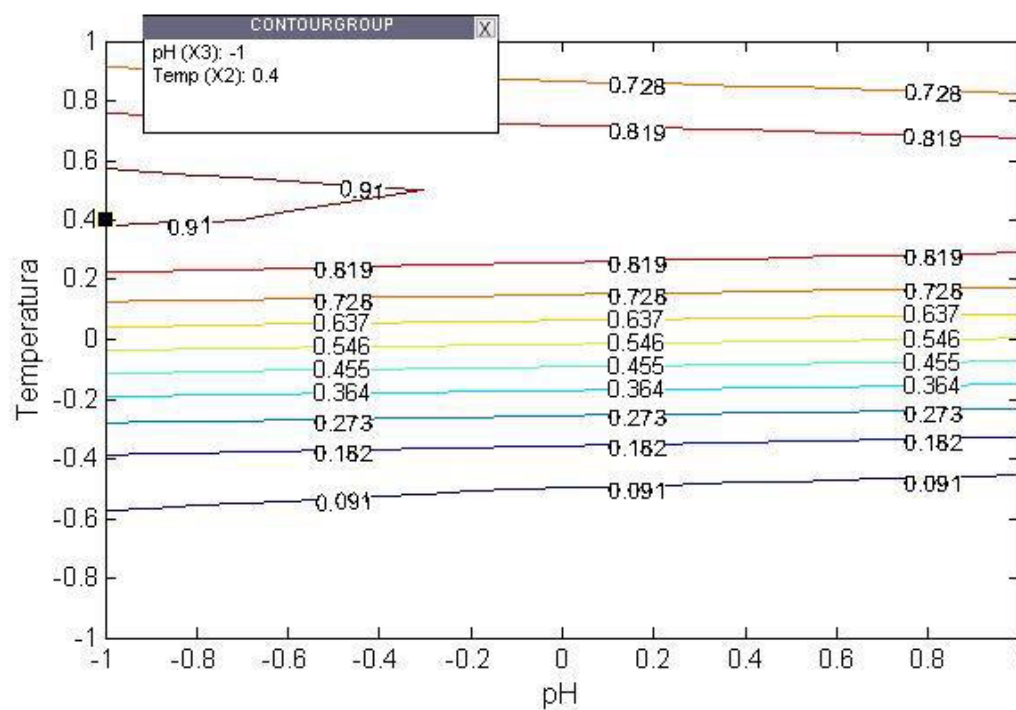


Figura 4.6 Gráfica de contorno para el modelo asociado a ***Dgp***.

Paso IX: Toda vez que se comprobó que los modelos obtenidos representaban de forma adecuada los datos de la simulación según este caso de estudio, se procedió a su optimización, esto con la ayuda del Solver de Excel que utiliza el método del Gradiente Reducido Generalizado (*GRG*), de tal manera que se buscaron los mejores valores de las variables de control donde se encontrara la máxima deseabilidad para los modelos asociados a Dg y Dgp .

Se realizó una búsqueda del punto óptimo en ambos modelos para evaluar los dos escenarios considerados en este caso de estudio y los resultados se muestran en la tabla 4.7. Para la evaluación se utilizaron los mismos 15 valores distintos iniciales de las variables de control en los dos escenarios, con el objetivo de evaluar en cuantos valores distintos convergía el algoritmo; el Solver de Excel inicia la búsqueda y encuentra la combinación de las variables que dan el resultado óptimo, es decir, el valor máximo en este caso. Al evaluar el modelo correspondiente a Dg se observa que en las 15 ocasiones en que se buscó el punto óptimo, los valores de las variables de control convergieron en todas las ocasiones hacia el mismo resultado, teniendo un valor de 0.865498 en la deseabilidad global, en cambio en el modelo para Dgp al realizar la misma prueba se encontraron tres combinaciones óptimas diferentes de las variables de control, pero se eligió solo la que proporcionó la deseabilidad global más alta para su posterior análisis. En la tabla 4.8 se muestra la combinación óptima a considerar y la deseabilidad global alcanzada para los dos escenarios analizados.

Tabla 4.7 Búsqueda del punto óptimo para Dg y Dgp partiendo de 15 valores iniciales distintos.

Valores Iniciales		Resultados óptimos encontrados para variables					
X_2	X_3	Dg		DG	Dgp		DG
1	1	0.348332	-1	0.865498	1	-1	0.7055
1	-1	0.348332	-1	0.865498	1	-1	0.7055
0	0	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
0.5	-1	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
0.5	0.5	0.348332	-1	0.865498	0.47865	-1	0.927423
0.5	-0.5	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
-0.7	-1	0.348332	-1	0.865498	-0.87063	-1	0.082493
-0.2	-1	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
0.9	0	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
0.8	0.1	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
0.7	-0.4	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423
-0.8	0.9	0.348332	-1	0.865498	-0.87063	-1	0.082493
-0.9	0.2	0.348332	-1	0.865498	-0.87063	-1	0.082493
-0.4	0.1	0.348332	-1	0.865498	0.478565	-1	0.927423

Tabla 4.8 Valores de deseabilidad óptimos alcanzados en ambos modelos para el caso de estudio I.

Escenario	Pesos utilizados				Punto óptimo		Deseabilidad óptima
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_2	X_3	
Dg	0.25	0.25	0.25	0.25	0.348332	-1	0.865498
Dgp	0.1	0.4	0.4	0.1	0.478565	-1	0.927423

Por último se validan las condiciones óptimas propuestas, mediante un programa de simulación que utiliza la función predictiva Bayesiana y el cálculo de la deseabilidad así como la robustez a la variable X_1 muy similar al utilizado en la simulación inicial solo que se le hizo una modificación de tal manera que las variables de control tuvieran valores fijos, los cuales se correspondieran con los valores óptimos encontrados por el Solver; para esto se utilizaron 10,000 iteraciones. La simulación se repitió en 30 ocasiones y los resultados se muestran en las tablas 4.9 y 4.10 esto con el fin de conocer cómo se comporta el promedio y la desviación estándar de las variables de respuesta originales así como las respectivas deseabilidades individuales de cada una de las variables de respuesta y por último la deseabilidad global. En la tabla 4.11 se muestran los datos resumidos (promedios) de la prueba anterior, donde se aprecia mejor el comportamiento de ambos modelos.

Se hizo una comparación gráfica del comportamiento de las cuatro variables de respuesta para ambos escenarios partiendo de los valores obtenidos en la validación y se muestran en las tablas 4.9 y 4.10 con el objetivo de observar si hubo una modificación en el comportamiento de sus deseabilidades debido a los distintos pesos que tuvieron en cada uno de los escenarios.

En la figura 4.7 se muestra el comportamiento de deseabilidad asociada a la variable Y_1 (D_1) para ambos escenarios. En la gráfica se observa que en 22 de las 30 ocasiones D_1 tiene valores mayores en el escenario Dg , lo que se debe a que en éste, a esta variable de respuesta se le dio una ponderación de 0.25, mientras que en el escenario Dgp tiene un peso de 0.1.

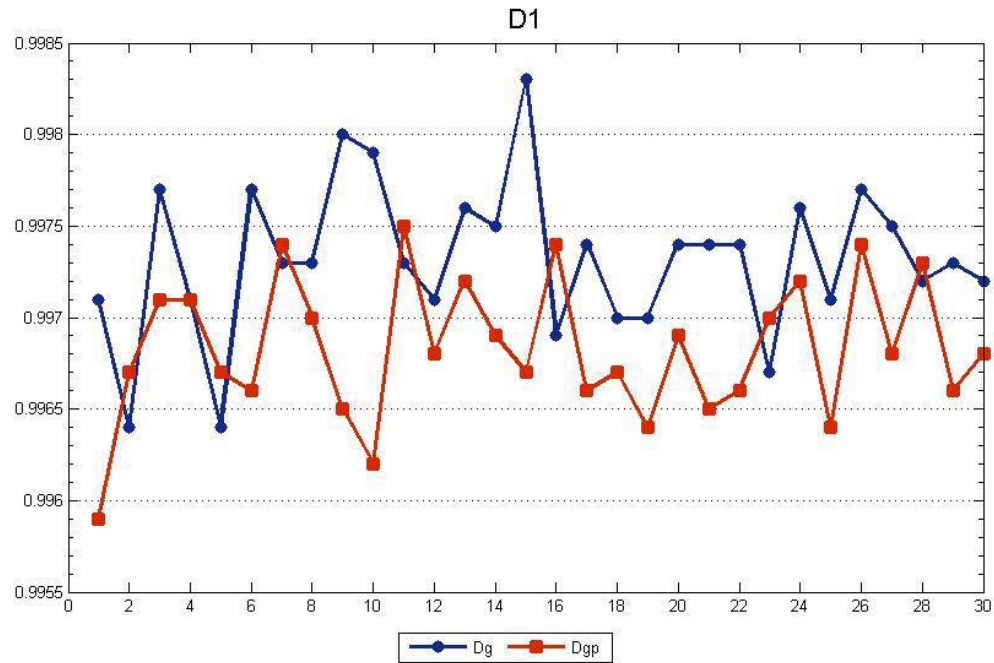


Figura 4.7 Comparación de valores de D_1 en los escenarios Dg y Dgp .

En el caso del comportamiento de la deseabilidad asociada a la variable Y_2 (D_2), se aprecian en la figura 4.8 los escenarios Dg y Dgp . Se observa que D_2 obtiene deseabilidades más altas en el escenario Dgp en las 30 ocasiones en que se realizó la validación, esto se debe a que en éste escenario, a la variable de respuesta Y_2 (D_2), se le dio una ponderación de 0.4, a diferencia de que en el escenario Dg tiene un peso de 0.25.

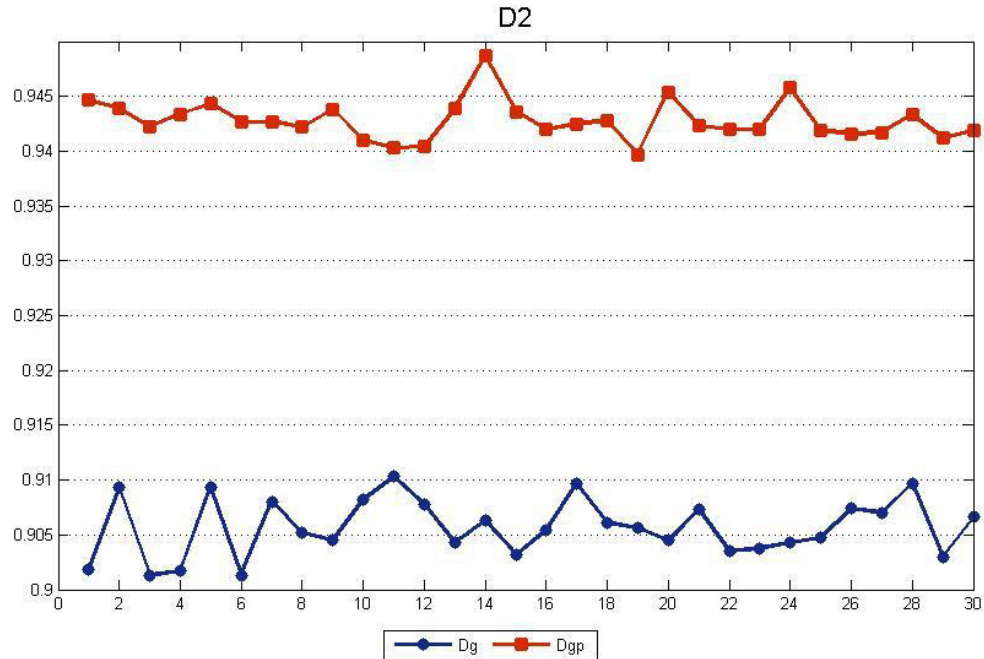


Figura 4.8 Comparación de valores de D_2 en los escenarios Dg y Dgp .

En la figura 4.9 se muestra el comportamiento de la deseabilidad asociada a la variable Y_3 (D_3), al observar el comportamiento de la deseabilidad de los escenarios Dg y Dgp , se aprecia que las 30 ocasiones en que se realizó la validación, los mayores resultados de deseabilidad son del escenario Dgp , esto se debe a que esta variable de respuesta tiene un peso de 0.4 en este escenario, en cambio en el escenario Dg tiene un peso de 0.25.

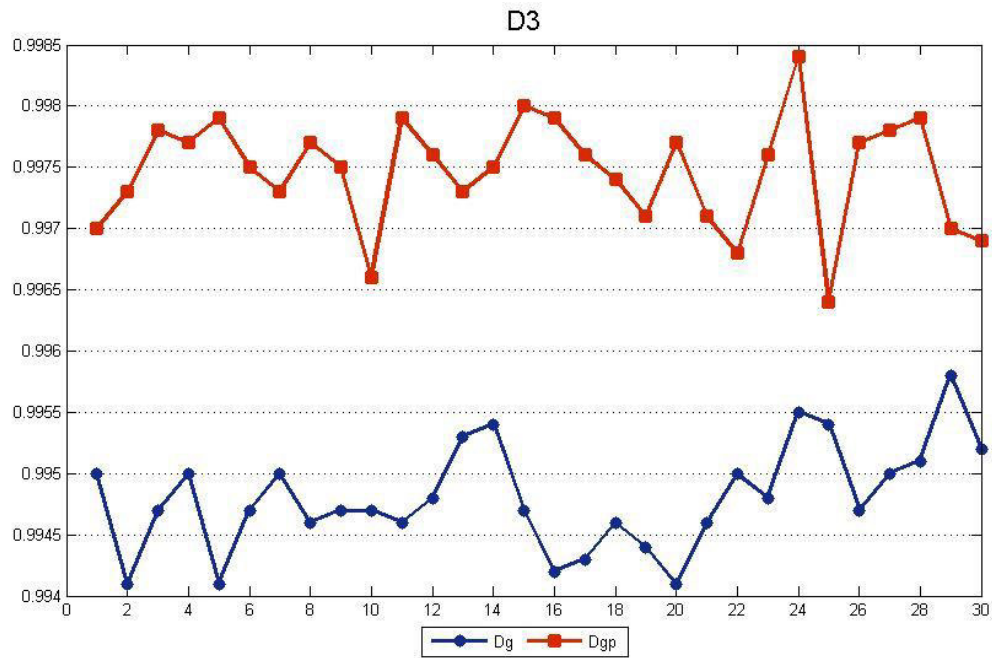


Figura 4.9 Comparación de valores de D_3 en los modelos Dg y Dgp .

Por último en la figura 4.10 se aprecia el comportamiento de la deseabilidad asociada a la variable de respuesta Y_4 (D_4), para los escenarios Dg y Dgp , en ella se muestran las 30 simulaciones para cada escenario, donde se observa que en el escenario Dg tiene mayores resultados en deseabilidad en las 30 ocasiones simuladas, esto se debe a que la variable tiene un peso de 0.25 en este escenario, mientras que en el escenario de Dgp tiene un peso de 0.1.

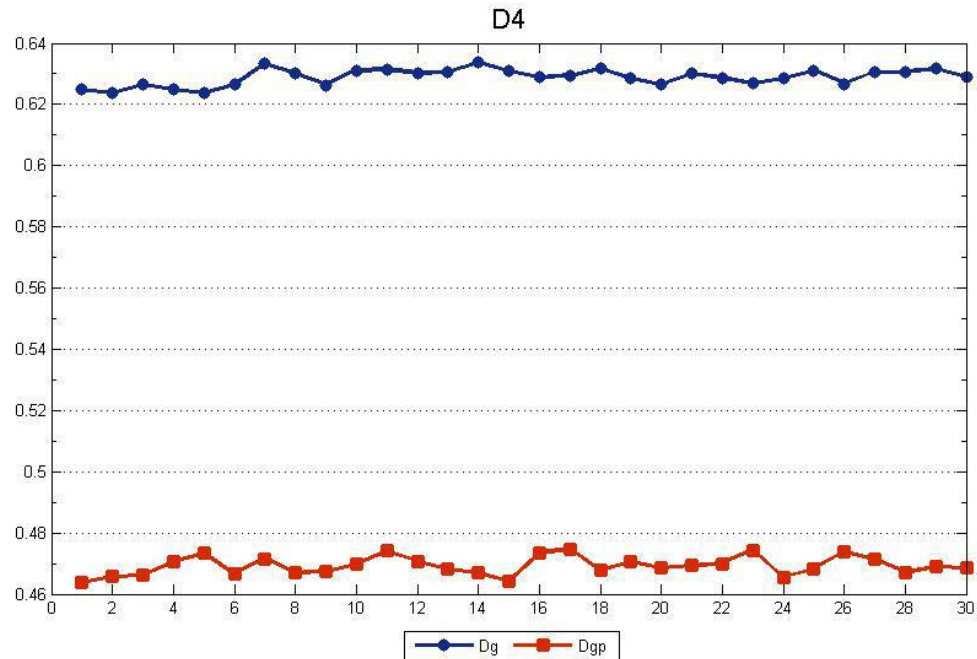


Figura 4.10 Comparación de valores de D_4 en los modelos Dg y Dgp .

Con la representación de las figuras anteriores se comparó las variables de respuesta en los dos escenarios Dg y Dgp , en los cuales las variables de respuesta tenían distintos valores de importancia, y conforme a lo que representan las gráficas se confirma la hipótesis la cual dice que los resultados óptimos alcanzados en los distintos escenarios propuestos tienden a favorecer a las variables de respuesta con los mayores pesos o ponderaciones.

Tabla 4.9 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dg .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9971	0.9964	0.9977	0.9971	0.9964	0.9977	0.9973	0.9973	0.998	0.9979
$\bar{Y}_1$	2.114	2.1118	2.1151	2.1141	2.1118	2.1151	2.1115	2.1142	2.1161	2.1168
σ_1	0.1061	0.1621	0.2491	0.1062	0.1621	0.2491	0.1761	0.193	0.1409	0.1835
D_2	0.9018	0.9093	0.9013	0.9017	0.9093	0.9013	0.908	0.9052	0.9045	0.9082
$\bar{Y}_2$	12.4182	12.418	12.434	12.4181	12.418	12.434	12.415	12.4254	12.4422	12.4302
σ_2	2.0057	2.0433	3.0797	2.0063	2.0433	3.0797	2.0264	1.8662	1.785	3.4668
D_3	0.995	0.9941	0.9947	0.995	0.9941	0.9947	0.995	0.9946	0.9947	0.9947
$\bar{Y}_3$	316.4255	316.4586	316.5333	316.4279	316.4586	316.5333	316.4916	316.5468	316.4846	316.6954
σ_3	12.4916	11.4884	24.2232	12.4878	11.4884	24.2232	9.9918	11.3172	10.013	14.1448
D_4	0.6248	0.6236	0.6264	0.6248	0.6236	0.6264	0.6332	0.63	0.6263	0.6311
$\bar{Y}_4$	0.8083	0.8083	0.809	0.8083	0.8083	0.809	0.8078	0.8091	0.809	0.8084
σ_4	0.026	0.0518	0.045	0.026	0.0518	0.045	0.0347	0.0912	0.0259	0.0391
Dg	0.8647	0.8657	0.8652	0.8647	0.8657	0.8652	0.8691	0.8672	0.866	0.8685
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9973	0.9971	0.9976	0.9975	0.9983	0.9969	0.9974	0.997	0.997	0.9974
$\bar{Y}_1$	2.1156	2.1109	2.1161	2.1135	2.1177	2.1133	2.1124	2.1126	2.1135	2.1147
σ_1	0.1689	0.1094	0.1675	0.107	0.1192	0.1102	0.1675	0.1542	0.1107	0.1399
D_2	0.9103	0.9078	0.9043	0.9063	0.9032	0.9054	0.9097	0.9061	0.9056	0.9045
$\bar{Y}_2$	12.4091	12.3965	12.4378	12.4293	12.4595	12.4118	12.3939	12.39	12.4235	12.4442
σ_2	2.1632	1.5099	1.658	1.9306	1.5928	1.5851	1.8918	4.0494	1.645	1.7633
D_3	0.9946	0.9948	0.9953	0.9954	0.9947	0.9942	0.9943	0.9946	0.9944	0.9941
$\bar{Y}_3$	316.6738	316.4426	316.447	316.6044	316.5712	316.5365	316.565	316.3115	316.395	316.5516
σ_3	10.946	8.9099	15.3112	9.4127	9.5005	9.2222	10.0961	19.7771	9.3265	10.8766
D_4	0.6314	0.6302	0.6304	0.6336	0.6308	0.6289	0.6294	0.6316	0.6285	0.6265
$\bar{Y}_4$	0.8082	0.8082	0.8082	0.8082	0.8089	0.8083	0.8084	0.8084	0.8084	0.8082
σ_4	0.0311	0.0253	0.0298	0.0268	0.0275	0.0257	0.0331	0.0299	0.0243	0.0307
Dg	0.8689	0.868	0.8674	0.8689	0.8673	0.8667	0.8681	0.868	0.8667	0.8658
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483	0.3483
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9974	0.9974	0.9967	0.9976	0.9971	0.9977	0.9975	0.9972	0.9973	0.9972
$\bar{Y}_1$	2.1139	2.1143	2.1165	2.1139	2.1149	2.1159	2.1161	2.1123	2.1144	2.1136
σ_1	0.157	0.1118	0.2101	0.1933	0.1532	0.1196	0.1434	0.1465	0.1087	0.1263
D_2	0.9073	0.9035	0.9038	0.9043	0.9047	0.9074	0.907	0.9097	0.903	0.9066
$\bar{Y}_2$	12.413	12.4308	12.4533	12.4317	12.4432	12.4407	12.4704	12.4119	12.4292	12.4356
σ_2	2.4478	1.7632	2.3242	2.6022	1.903	1.7366	2.1842	2.0808	1.734	2.0667
D_3	0.9946	0.995	0.9948	0.9955	0.9954	0.9947	0.995	0.9951	0.9958	0.9952
$\bar{Y}_3$	316.5025	316.5382	316.7414	316.7004	316.5982	316.507	316.6498	316.3533	316.6682	316.7062
σ_3	12.7406	9.8128	17.3843	12.2509	9.8431	13.146	12.3955	11.0533	9.5146	11.0015
D_4	0.63	0.6287	0.6269	0.6284	0.6311	0.6267	0.6306	0.6306	0.6317	0.6288
$\bar{Y}_4$	0.8086	0.809	0.8082	0.8082	0.8082	0.8092	0.8083	0.8088	0.8082	0.8083
σ_4	0.029	0.031	0.0621	0.0453	0.0278	0.0262	0.0331	0.0286	0.0253	0.0236
Dg	0.8678	0.8665	0.8658	0.8667	0.8676	0.8667	0.868	0.8686	0.8676	0.8673

Tabla 4.10 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9959	0.9967	0.9971	0.9971	0.9967	0.9966	0.9974	0.997	0.9965	0.9962
$\bar{Y}_1$	2.0823	2.0883	2.085	2.0853	2.0831	2.0862	2.0867	2.0836	2.0841	2.0845
σ_1	0.1633	0.3448	0.1305	0.131	0.1538	0.1822	0.2143	0.1108	0.1228	0.1564
D_2	0.9447	0.9439	0.9422	0.9434	0.9443	0.9427	0.9427	0.9422	0.9438	0.941
$\bar{Y}_2$	12.0226	12.1034	12.0675	12.0625	12.0025	12.0532	12.0045	12.0286	12.0182	12.0386
σ_2	2.0578	6.7105	2.0103	1.8501	4.0406	2.5348	2.606	1.6555	1.6118	2.4637
D_3	0.997	0.9973	0.9978	0.9977	0.9979	0.9975	0.9973	0.9977	0.9975	0.9966
$\bar{Y}_3$	327.1682	327.4421	327.3537	327.2232	327.2276	327.4023	327.1671	327.2227	327.1881	327.2611
σ_3	11.6136	27.8238	11.5285	10.0187	12.7817	11.6477	10.9809	9.2731	9.5668	13.5888
D_4	0.4638	0.4657	0.4661	0.4706	0.4735	0.4667	0.4715	0.467	0.4675	0.4697
$\bar{Y}_4$	0.8176	0.8177	0.8178	0.8179	0.8177	0.8178	0.8185	0.8178	0.8181	0.818
σ_4	0.0521	0.0335	0.0284	0.0261	0.0382	0.0274	0.0662	0.0255	0.025	0.0341
D_{gp}	0.9037	0.904	0.9036	0.905	0.9059	0.9038	0.9047	0.9038	0.9044	0.9034
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9975	0.9968	0.9972	0.9969	0.9967	0.9974	0.9966	0.9967	0.9964	0.9969
$\bar{Y}_1$	2.0848	2.0843	2.085	2.0823	2.0841	2.084	2.085	2.0847	2.0833	2.0903
σ_1	0.1532	0.1201	0.3453	0.1376	0.1939	0.122	0.2137	0.1245	0.1289	0.631
D_2	0.9403	0.9404	0.9439	0.9487	0.9436	0.942	0.9425	0.9428	0.9397	0.9454
$\bar{Y}_2$	12.0547	12.0483	12.1391	11.9796	12.0154	12.0458	12.0591	12.073	12.0276	11.9652
σ_2	1.7981	1.754	18.8066	3.9094	1.9037	1.9598	4.3011	2.5868	1.6969	5.463
D_3	0.9979	0.9976	0.9973	0.9975	0.998	0.9979	0.9976	0.9974	0.9971	0.9977
$\bar{Y}_3$	327.3588	327.2234	327.4759	327.1585	327.3163	327.3151	327.3341	327.441	327.2298	327.2239
σ_3	10.7745	11.3255	57.3805	11.1327	10.1453	10.0071	11.9637	13.0745	10.5251	12.5937
D_4	0.4741	0.4707	0.4682	0.4669	0.4642	0.4735	0.4748	0.4677	0.4706	0.4686
$\bar{Y}_4$	0.8173	0.8183	0.8186	0.8179	0.8174	0.8175	0.8176	0.8179	0.8176	0.8177
σ_4	0.0317	0.0314	0.0315	0.0241	0.0475	0.0274	0.0242	0.0377	0.0257	0.0266
D_{gp}	0.9045	0.9038	0.9045	0.9062	0.9038	0.9051	0.9053	0.904	0.9033	0.9053
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785	0.4785
X_3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
D_1	0.9965	0.9966	0.997	0.9972	0.9964	0.9974	0.9968	0.9973	0.9966	0.9968
$\bar{Y}_1$	2.0833	2.0847	2.084	2.0857	2.0852	2.0866	2.0849	2.0861	2.0845	2.0836
σ_1	0.1323	0.1153	0.1017	0.1485	0.1193	0.1185	0.1222	0.1144	0.1284	0.1426
D_2	0.9423	0.942	0.942	0.9458	0.9419	0.9416	0.9417	0.9433	0.9412	0.9419
$\bar{Y}_2$	12.0052	12.0402	12.0353	12.0456	12.0346	12.0756	12.0511	12.0471	12.0313	12.034
σ_2	1.9967	1.7894	1.4894	1.7752	1.7506	1.6219	1.8152	1.7509	1.8694	2.5081
D_3	0.9971	0.9968	0.9976	0.9984	0.9964	0.9977	0.9978	0.9979	0.997	0.9969
$\bar{Y}_3$	327.1846	327.2908	327.2749	327.3147	327.1652	327.5242	327.4118	327.4435	327.0945	327.1626
σ_3	10.0537	9.7818	8.8261	8.5751	10.2014	10.3498	9.9268	9.7468	12.4763	13.1769
D_4	0.4694	0.47	0.4744	0.4656	0.4684	0.4739	0.4713	0.4672	0.469	0.4686
$\bar{Y}_4$	0.818	0.818	0.8176	0.8177	0.818	0.8175	0.8175	0.8178	0.818	0.8184
σ_4	0.0285	0.0305	0.0255	0.0336	0.03	0.0312	0.029	0.032	0.0356	0.0289
D_{gp}	0.904	0.9039	0.9051	0.9051	0.9034	0.9049	0.9044	0.9043	0.9035	0.9037

Tabla 4.11 Resumen de los estadísticos según las corridas de validación para el caso de estudio I.

<i>Escenarios</i>	X_2	X_3	D_1	$\bar{Y}_1$	σ_1	D_2	$\bar{Y}_2$	σ_2	D_3	$\bar{Y}_3$	σ_3	D_4	$\bar{Y}_4$	σ_4	DGs
<i>Dg</i>	0.35	-1	0.99	2.11	0.15	0.91	12.43	2.13	0.99	316.54	12.48	0.63	0.81	0.04	0.87
<i>Dgp</i>	0.48	-1	0.99	2.08	0.17	0.94	12.04	3.00	1.00	327.29	13.03	0.47	0.82	0.03	0.90

Paso X: Esta fase se expone en el punto 4.3.

4.2 Caso de Estudio II: Porcentaje de Conversión y Actividad Térmica.

Pasos I: Para ilustrar nuevamente el funcionamiento de la metodología, se toman los datos del problema propuesto por Myers y Montgomery (1995), en el cual se consideran tres variables de diseño, X_1 : tiempo de reacción, X_2 : temperatura y X_3 : porcentaje de catalizador y dos variables de respuesta, Y_1 : porcentaje de conversión y Y_2 : actividad térmica y se utiliza un diseño central compuesto con seis corridas centrales. En este caso se consideró a X_1 : como variable de ruido (X_r), por lo que la optimización se realizará con respecto a las variables de control (X_c) X_2 y X_3 . Los datos se muestran en la tabla 4.12.

Tabla 4.12 Variables de control y variables de respuesta para el caso de estudio II.

Variable de Control			Variable de Respuesta	
Tiempo de X_r	Temperatura X_2	% de X_3	% de Y_1	Actividad Y_2
-1	-1	-1	74	53.2
1	-1	-1	51	62.9
-1	1	-1	88	53.4
1	1	-1	70	62.6
-1	-1	1	71	57.3
1	-1	1	90	67.9
-1	1	1	66	59.8
1	1	1	97	67.8
-1.682	0	0	76	59.1
1.682	0	0	79	65.9
0	-1.682	0	85	60
0	1.682	0	97	60.7
0	0	-1.682	55	57.4
0	0	1.682	81	63.2
0	0	0	81	59.2
0	0	0	75	60.4
0	0	0	76	59.1
0	0	0	83	60.6
0	0	0	80	60.8
0	0	0	91	58.9

Paso II: Se determina el tamaño de las combinaciones de los factores que se utilizarán en la simulación para crear una malla fina de combinaciones mediante la ecuación 2.30, serán los vectores de respuesta necesarios para el cálculo de las deseabilidades. En este caso de estudio se trabajó con un arreglo 11^2 , es decir, se trabajó con 121 combinaciones distintas de los factores de control X_2 y X_3 , como se muestra en la tabla 4.13, utilizando los siguientes niveles para cada variable:

$$\{-1 \ -0.8 \ -0.6 \ -0.4 \ -0.2 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1\}$$

Tabla 4.13 Combinaciones de los factores de control utilizadas para formar la malla en la simulación: Caso de estudio II.

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
X_2	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8	-0.8
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
X_2	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6	-0.6
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
X_2	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4	-0.4
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
X_2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
X_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
X_2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
X_2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

X_2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
X_2	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Corrida	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
X_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X_3	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

Paso III: Una vez que se fijó la cantidad de combinaciones, se requiere determinar la cantidad de corridas a simularse en cada una de ellas utilizando la ecuación 2.30, en este caso se utilizaron 10,000 en cada una de las 121 combinaciones, es decir, 10,000 vectores de cuatro respuestas cada uno (Y_1 y Y_2) en este punto también se trabajó con la robustez, debido que para cada una de las combinaciones de (X_2 y X_3), mientras estas permanecen fijas en la simulación de los 10,000 vectores de respuesta, la variable (X_1) toma un valor diferente en cada iteración, la cual se genera de una distribución normal (0, 0.1), con lo que se forma un vector de covariables x_1, x_2 y x_3 , de tal forma que si entre las 121 combinaciones existe alguna que de por resultado una deseabilidad alta, también se está asegurando que la combinación sea robusta a cambios en la variable X_1 , con los vectores obtenidos de la ecuación 2.30 se da paso al cálculo de la deseabilidad en las variables de respuesta y en sus 121 combinaciones.

Paso IV: Se calcula las deseabilidades de cada variable de respuesta utilizando la ecuación (2.7) en cada una de las 121 combinaciones, se compraran los valores de las variables de respuesta contra las especificaciones correspondientes de este caso de estudio las cuales se presentan en la tabla 4.14, en la cual también se observa el tipo de variable con la que se va a trabajar, de tal manera que el cálculo corresponda a las necesidades del caso de estudio.

Tabla 4.14 Especificaciones de las variables de respuesta del caso de estudio II para el cálculo de la deseabilidad.

Respuesta	LIE	Objetivo	LSE	Respuesta
y_1	80	110	-	Lo mayor es lo mejor
y_2	50	57.5	65	Lo nominal es lo mejor

Paso V y VI: Se busca obtener la DG para cada una de las combinaciones de las variables mostradas en la tabla 4.15 utilizando la ecuación 2.8.

En este caso de estudio se plantearon cuatro escenarios modificando los niveles de importancia de las variables de respuesta. En el escenario el escenario 1 (Dgp) las variables de respuesta se consideran de igual importancia y en los escenario 2 (Dgp_1), 3 (Dgp_2) y 4 (Dgp_3) tendrán distintos niveles como se muestra en la tabla 4.16, en la que puede verse que las variables Y_2 y Y_3 se consideran de manera ficticia de mayor prioridad con el fin de evaluar cómo responde el punto óptimo a estas ponderaciones.

Tabla 4.15 Escenarios de ponderaciones consideradas para las variables de respuesta del caso de estudio II.

Variables	Ponderaciones	
	Y_1	Y_2
Dgp	0.5	0.5
Dgp_1	0.6	0.4
Dgp_2	0.8	0.2
Dgp_3	0.2	0.8

Paso VII: Por medio del cálculo de (MG) se hace una reducción de dimensionalidad, ya que de dos variables de respuesta se redujo a una sola (Dgp_1, Dgp_2, Dgp_3 y Dgp_4). Enseguida se muestran las deseabilidades individuales y globales resultantes de la simulación para cada una de las combinaciones de acuerdo con los pesos mostrados en la tabla 4.15. En la tabla 4.16 se presentan las 121 combinaciones consideradas de las variables de control, las deseabilidades individuales, así como los valores Dgp_1, Dgp_2, Dgp_3 y Dgp_4 obtenidos.

Tabla 4.16 Deseabilidades individuales y globales para caso de estudio II.

X_2	X_3	D_1	D_2	Dgp_1	Dgp_2	Dgp_3	Dgp_4
-------	-------	-------	-------	---------	---------	---------	---------

-1.682	-1.682	0.036	0.5932	0.1462	0.1105	0.0631	0.3388
-1.682	-1.3456	0.1151	0.6271	0.2687	0.2268	0.1616	0.4468
-1.682	-1.0092	0.2793	0.6559	0.428	0.393	0.3313	0.553
-1.682	-0.6728	0.4927	0.6711	0.575	0.5575	0.5241	0.6309
-1.682	-0.3364	0.6815	0.6448	0.6629	0.6666	0.674	0.652
-1.682	0	0.8203	0.6162	0.7109	0.7316	0.7746	0.6525
-1.682	0.3364	0.9032	0.5629	0.713	0.7476	0.8217	0.6188
-1.682	0.6728	0.9458	0.4989	0.6869	0.7323	0.8322	0.567
-1.682	1.0092	0.9605	0.4231	0.6375	0.692	0.8153	0.4985
-1.682	1.3456	0.9661	0.3408	0.5738	0.6368	0.7844	0.4198
-1.682	1.682	0.9619	0.2689	0.5085	0.5777	0.7454	0.3469
-1.3456	-1.682	0.0074	0.6246	0.0681	0.0437	0.018	0.2574
-1.3456	-1.3456	0.0231	0.6735	0.1247	0.089	0.0453	0.3431
-1.3456	-1.0092	0.0826	0.7029	0.2409	0.1945	0.1267	0.458
-1.3456	-0.6728	0.2175	0.7125	0.3936	0.3496	0.2757	0.5619
-1.3456	-0.3364	0.3869	0.6829	0.514	0.4856	0.4335	0.6095
-1.3456	0	0.5473	0.647	0.5951	0.5852	0.5659	0.6257
-1.3456	0.3364	0.6653	0.5791	0.6207	0.6294	0.6471	0.5954
-1.3456	0.6728	0.7477	0.4983	0.6104	0.6357	0.6894	0.5404
-1.3456	1.0092	0.7993	0.4144	0.5756	0.6146	0.7009	0.4726
-1.3456	1.3456	0.8182	0.3274	0.5175	0.5672	0.6812	0.3932
-1.3456	1.682	0.8209	0.2545	0.4571	0.5139	0.6495	0.3217
-1.0092	-1.682	0.0022	0.6449	0.0376	0.0213	0.0068	0.207
-1.0092	-1.3456	0.006	0.7029	0.0651	0.0404	0.0156	0.2714
-1.0092	-1.0092	0.0194	0.7355	0.1196	0.0832	0.0402	0.3557
-1.0092	-0.6728	0.073	0.73	0.2309	0.1834	0.1157	0.4606
X_2	X_3	D_1	D_2	Dgp_1	Dgp_2	Dgp_3	Dgp_4
-1.0092	-0.3364	0.1734	0.7062	0.3499	0.3041	0.2296	0.5333
-1.0092	0	0.2952	0.6526	0.4389	0.4055	0.346	0.5569

-1.0092	0.3364	0.4091	0.5896	0.4911	0.4735	0.4401	0.5481
-1.0092	0.6728	0.4836	0.494	0.4888	0.4877	0.4857	0.4919
-1.0092	1.0092	0.5398	0.3994	0.4644	0.4786	0.5083	0.4242
-1.0092	1.3456	0.5642	0.3141	0.4209	0.4463	0.5018	0.3531
-1.0092	1.682	0.5518	0.2334	0.3589	0.3911	0.4645	0.2772
-0.6728	-1.682	0.0013	0.6588	0.0287	0.0154	0.0044	0.1882
-0.6728	-1.3456	0.002	0.7124	0.038	0.0212	0.0066	0.2207
-0.6728	-1.0092	0.0076	0.744	0.0754	0.0477	0.0191	0.2978
-0.6728	-0.6728	0.0268	0.7369	0.1406	0.1009	0.052	0.3798
-0.6728	-0.3364	0.0758	0.7115	0.2322	0.1856	0.1186	0.4546
-0.6728	0	0.1546	0.6524	0.3176	0.275	0.2062	0.4892
-0.6728	0.3364	0.2303	0.5804	0.3656	0.3333	0.277	0.4824
-0.6728	0.6728	0.2887	0.4865	0.3748	0.3557	0.3205	0.4383
-0.6728	1.0092	0.3228	0.3907	0.3552	0.3485	0.3354	0.3761
-0.6728	1.3456	0.3303	0.2933	0.3112	0.315	0.3225	0.3003
-0.6728	1.682	0.3194	0.2216	0.266	0.2759	0.2969	0.2384
-0.3364	-1.682	0.001	0.6724	0.0257	0.0134	0.0036	0.1823
-0.3364	-1.3456	0.0016	0.7212	0.0335	0.0182	0.0053	0.2114
-0.3364	-1.0092	0.0053	0.7461	0.0626	0.0382	0.0142	0.2769
-0.3364	-0.6728	0.0166	0.7354	0.1106	0.0757	0.0355	0.3447
-0.3364	-0.3364	0.0509	0.7073	0.1898	0.1459	0.0862	0.4179
-0.3364	0	0.0933	0.6518	0.2466	0.203	0.1376	0.4418
-0.3364	0.3364	0.1432	0.563	0.284	0.2477	0.1883	0.4282
-0.3364	0.6728	0.1834	0.4757	0.2954	0.2685	0.2219	0.3931
-0.3364	1.0092	0.2004	0.3733	0.2735	0.257	0.227	0.3297
X_2	X_3	D_1	D_2	Dgp_1	Dgp_2	Dgp_3	Dgp_4
-0.3364	1.3456	0.1973	0.2823	0.236	0.2277	0.212	0.2628
-0.3364	1.682	0.1826	0.2079	0.1948	0.1923	0.1874	0.2026
0	-1.682	0.0019	0.6611	0.0353	0.0196	0.0061	0.2047

0	-1.3456	0.0035	0.7185	0.0499	0.0293	0.0101	0.2472
0	-1.0092	0.01	0.7398	0.0859	0.0558	0.0236	0.3126
0	-0.6728	0.0244	0.7396	0.1342	0.0954	0.0482	0.3737
0	-0.3364	0.0581	0.7018	0.2019	0.1573	0.0956	0.4264
0	0	0.0989	0.6446	0.2524	0.2093	0.1439	0.443
0	0.3364	0.132	0.5591	0.2716	0.2351	0.1761	0.4189
0	0.6728	0.1548	0.4615	0.2673	0.2396	0.1926	0.3709
0	1.0092	0.1579	0.3622	0.2391	0.2201	0.1864	0.3068
0	1.3456	0.1428	0.274	0.1978	0.1853	0.1626	0.2405
0	1.682	0.1239	0.1989	0.1569	0.1497	0.1362	0.1809
0.3364	-1.682	0.0072	0.66	0.0689	0.0439	0.0178	0.2674
0.3364	-1.3456	0.0124	0.7081	0.0936	0.0625	0.0278	0.3152
0.3364	-1.0092	0.031	0.733	0.1508	0.1099	0.0584	0.3894
0.3364	-0.6728	0.0663	0.7274	0.2196	0.1728	0.107	0.4505
0.3364	-0.3364	0.1127	0.6936	0.2796	0.2331	0.1621	0.4822
0.3364	0	0.1552	0.6356	0.314	0.2727	0.2057	0.4794
0.3364	0.3364	0.18	0.5533	0.3156	0.282	0.2253	0.442
0.3364	0.6728	0.1913	0.4507	0.2936	0.2695	0.227	0.3797
0.3364	1.0092	0.1798	0.3468	0.2497	0.2338	0.205	0.3041
0.3364	1.3456	0.1508	0.2572	0.1969	0.1867	0.1678	0.2311
0.3364	1.682	0.1223	0.1881	0.1517	0.1453	0.1333	0.1726
0.6728	-1.682	0.039	0.6554	0.1598	0.1205	0.0685	0.3727
0.6728	-1.3456	0.0742	0.7029	0.2284	0.1824	0.1164	0.4484
0.6728	-1.0092	0.1358	0.7263	0.314	0.2655	0.1899	0.5194
X_2	X_3	D_1	D_2	Dgp_1	Dgp_2	Dgp_3	Dgp_4
0.6728	-0.6728	0.2046	0.7151	0.3825	0.3375	0.2627	0.5567
0.6728	-0.3364	0.2632	0.6859	0.4249	0.386	0.3187	0.5663
0.6728	0	0.3055	0.6214	0.4357	0.4058	0.3521	0.5391
0.6728	0.3364	0.3263	0.5341	0.4174	0.3974	0.3601	0.4839

0.6728	0.6728	0.3067	0.4451	0.3695	0.356	0.3304	0.4132
0.6728	1.0092	0.2724	0.3444	0.3063	0.2992	0.2855	0.3286
0.6728	1.3456	0.2219	0.2404	0.231	0.2291	0.2255	0.2366
0.6728	1.682	0.1563	0.1859	0.1705	0.1676	0.1619	0.1796
1.0092	-1.682	0.2117	0.634	0.3663	0.3282	0.2636	0.5091
1.0092	-1.3456	0.308	0.6838	0.4589	0.4238	0.3613	0.583
1.0092	-1.0092	0.4023	0.7052	0.5327	0.5036	0.4501	0.6304
1.0092	-0.6728	0.4801	0.7029	0.5809	0.5592	0.5181	0.6513
1.0092	-0.3364	0.5325	0.6663	0.5956	0.5824	0.5569	0.6371
1.0092	0	0.5567	0.6072	0.5814	0.5764	0.5665	0.5967
1.0092	0.3364	0.5547	0.5269	0.5406	0.5434	0.549	0.5323
1.0092	0.6728	0.5168	0.4364	0.4749	0.483	0.4996	0.4514
1.0092	1.0092	0.465	0.3377	0.3962	0.4091	0.4361	0.36
1.0092	1.3456	0.3779	0.2518	0.3085	0.3213	0.3484	0.2731
1.0092	1.682	0.289	0.187	0.2325	0.2429	0.2649	0.2041
1.3456	-1.682	0.5742	0.6064	0.5901	0.5869	0.5805	0.5998
1.3456	-1.3456	0.6803	0.6491	0.6645	0.6676	0.6739	0.6552
1.3456	-1.0092	0.7642	0.6705	0.7158	0.7252	0.7444	0.6882
1.3456	-0.6728	0.8137	0.6693	0.7379	0.7525	0.7825	0.6959
1.3456	-0.3364	0.8434	0.6386	0.7339	0.7546	0.7978	0.6752
1.3456	0	0.8519	0.5908	0.7095	0.7359	0.7918	0.6357
1.3456	0.3364	0.831	0.5166	0.6552	0.6871	0.7556	0.5681
1.3456	0.6728	0.7995	0.4259	0.5835	0.6215	0.7049	0.4831
X_2	X_3	D_1	D_2	Dgp_1	Dgp_2	Dgp_3	Dgp_4
1.3456	1.0092	0.7258	0.3307	0.4899	0.53	0.6202	0.387
1.3456	1.3456	0.627	0.2496	0.3956	0.4338	0.5215	0.3001
1.3456	1.682	0.4923	0.1856	0.3023	0.3333	0.405	0.2256
1.682	-1.682	0.8973	0.5707	0.7156	0.7487	0.8197	0.6248
1.682	-1.3456	0.9431	0.6013	0.753	0.7877	0.8619	0.6579

1.682	-1.0092	0.9674	0.6306	0.7811	0.8152	0.8881	0.687
1.682	-0.6728	0.9802	0.6213	0.7804	0.8168	0.8948	0.6806
1.682	-0.3364	0.9819	0.6077	0.7725	0.8104	0.8921	0.6689
1.682	0	0.9834	0.5587	0.7413	0.7844	0.8783	0.6256
1.682	0.3364	0.9789	0.4983	0.6984	0.7472	0.8553	0.5704
1.682	0.6728	0.964	0.4127	0.6307	0.6866	0.8135	0.489
1.682	1.0092	0.9345	0.329	0.5544	0.6155	0.7584	0.4053
1.682	1.3456	0.8794	0.2533	0.472	0.5345	0.6856	0.3249
1.682	1.682	0.7647	0.1921	0.3832	0.44	0.5801	0.2532

Paso VIII: Partiendo de los datos obtenidos mediante la simulación y que se muestran en la tabla 4.17 se ajustaron polinomios utilizando Minitab 16, para representar la relación entre las variables de control y las deseabilidades calculadas en los cuatro escenarios como $Mgdp_1$, $Mgdp_2$, $Mgdp_3$ y $Mgdp_4$. Estos los modelos se representan en las ecuaciones de la 4.3-4.6 respectivamente:

$Mgdp_1 = 0.263 + 0.0687 x_2 + 0.0806 x_3 - 0.118 x_2 x_3 + 0.267 x_2^2 - 0.133 x_3^2 - 0.0199 x_2^2 x_3 - 0.0116 x_3^3 + 0.00978 x_2^3 x_3 + 0.00604 x_2^3 x_3^2 + 0.0115 x_3^3 x_2 - 0.0357 x_2^4 + 0.0238 x_3^4 - 0.00557 x_3^4 x_2^2 - 0.00627 x_2^5$ $R^2 = 98.3\%$	(4.3)
$Mgdp_2 = 0.222 + 0.0709 x_2 + 0.0499 x_3 - 0.106 x_2 x_3 + 0.289 x_2^2 - 0.122 x_3^2 + 0.00534 x_2^3 x_3^2 + 0.0129 x_3^3 x_2 - 0.0348 x_2^4 + 0.0234 x_3^4 - 0.00678 x_3^4 x_2^2 - 0.00499 x_2^5$ $R^2 = 97.2\%$	(4.4)
$Mgdp_3 = 0.155 + 0.0708 x_2 + 0.0764 x_3 - 0.118 x_2 x_3 + 0.320 x_2^2 - 0.0971 x_3^2 + 0.0144 x_3^3 x_2 - 0.0299 x_2^4 + 0.0208 x_3^4 - 0.00812 x_3^4 x_2^2$	(4.5)

$R^2 = 96.9\%$	
$Mgdp_4 = 0.443 + 0.0406 x_2 - 0.00516 x_3 - 0.0945 x_2 x_3 + 0.165 x_2^2 - 0.155 x_3^2 - 0.0571 x_2^2 x_3 + 0.0441 x_3^2 x_2 - 0.0179 x_2^3 + 0.0178 x_2^3 x_3 - 0.0100 x_2^3 x_3^2 + 0.00521 x_3^3 x_2 + 0.00681 x_3^3 x_2^2 - 0.0339 x_2^4 + 0.0237 x_3^4 + 0.00776 x_2^4 x_3 + 0.00537 x_2^4 x_3^2 - 0.0130 x_3^4 x_2 - 0.00541 x_3^4 x_2^2 + 0.00446 x_3^4 x_2^3$	(4.6)
$R^2 = 99.4\%$	

Con el fin de evaluar el ajuste de los modelos ($Mgdp_1, Mgdp_2, Mgdp_3$ y $Mgdp_4$) de forma gráfica se hace una comparación contra el comportamiento de las Dgp_1, Dgp_2, Dgp_3 y Dgp_4 , para cada una de las 121 combinaciones de las variables de control según los valores obtenidos mediante la simulación y los respectivos valores pronosticados según los modelos para las mismas combinaciones factoriales, utilizando Matlab. Las comparaciones de los escenarios simulados contra los modelos ajustados que se muestran en las figuras 4.11-4.14 para Dgp_1, Dgp_2, Dgp_3 , y Dgp_4 respectivamente. Al observar las figuras se puede apreciar que el comportamiento de los resultados pronosticados según los polinomios es muy similar a sus respectivos resultados según la simulación, lo cual es congruente con la R^2 ajustada ya que estas fueron mayores a 96% para todos los modelos, razón por la cual se puede proceder a optimizar (maximizar) los modelos de regresión obtenidos ya que éstos presentan de buena manera a los datos simulados según este caso de estudio.

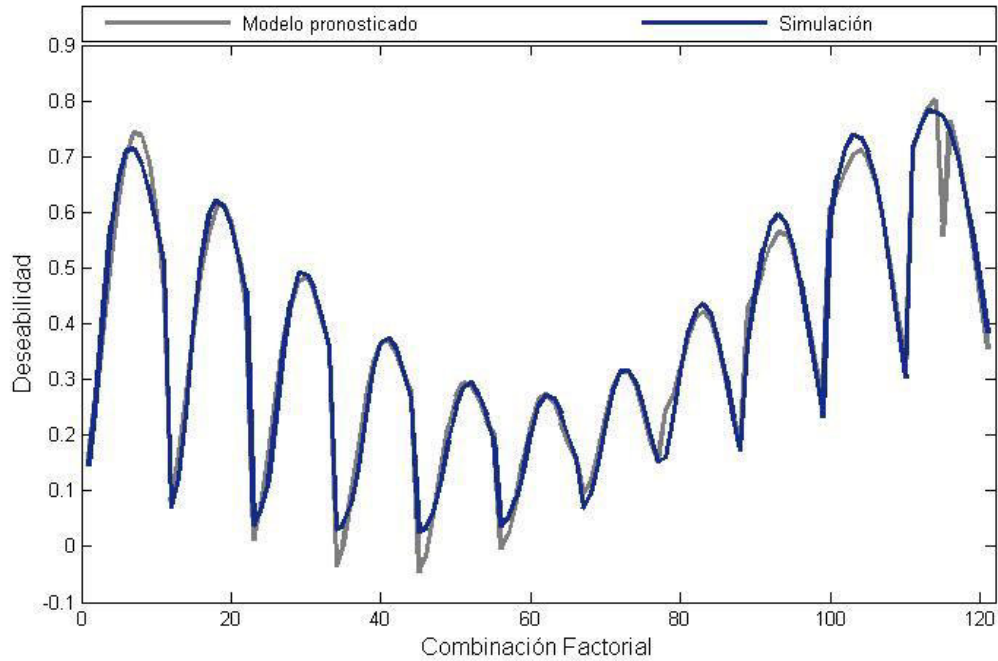


Figura 4.11 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para Dgp_1 contra los resultados de la simulación.

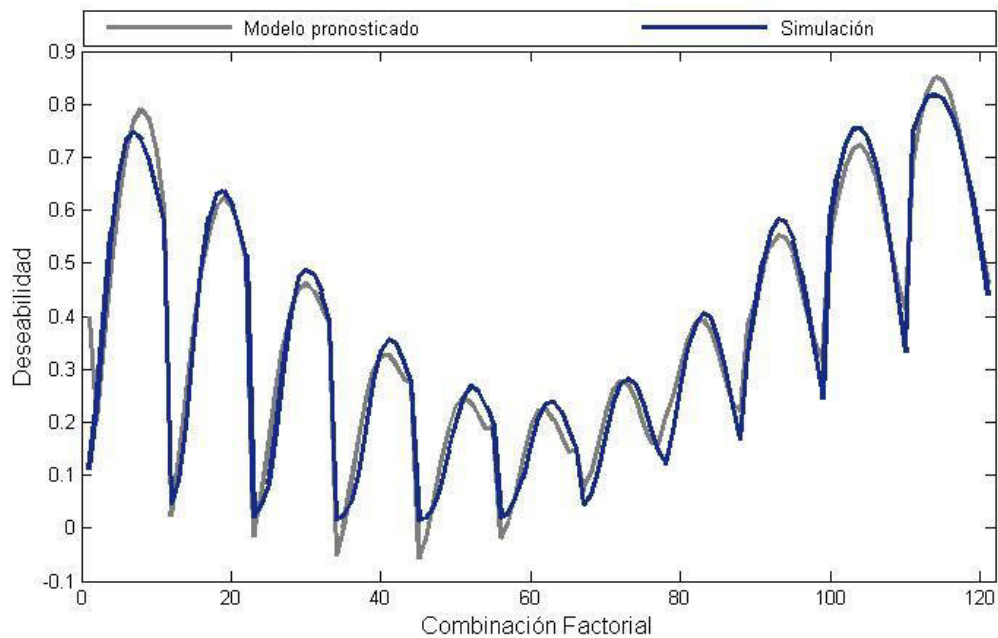


Figura 4.12 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para Dgp_2 contra los resultados de la simulación.

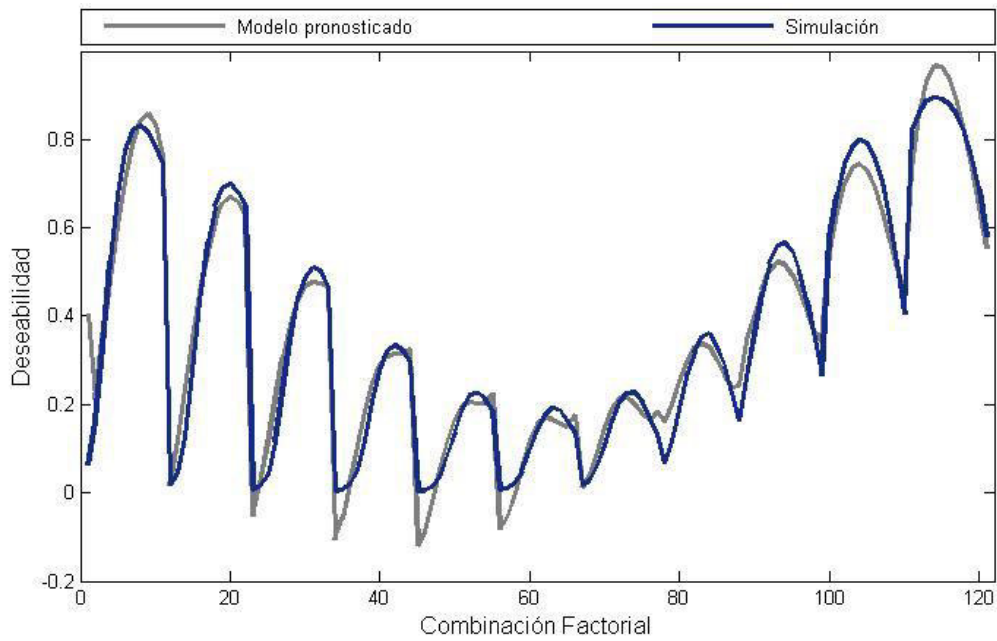


Figura 4.13 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para Dgp_3 contra los resultados de la simulación.

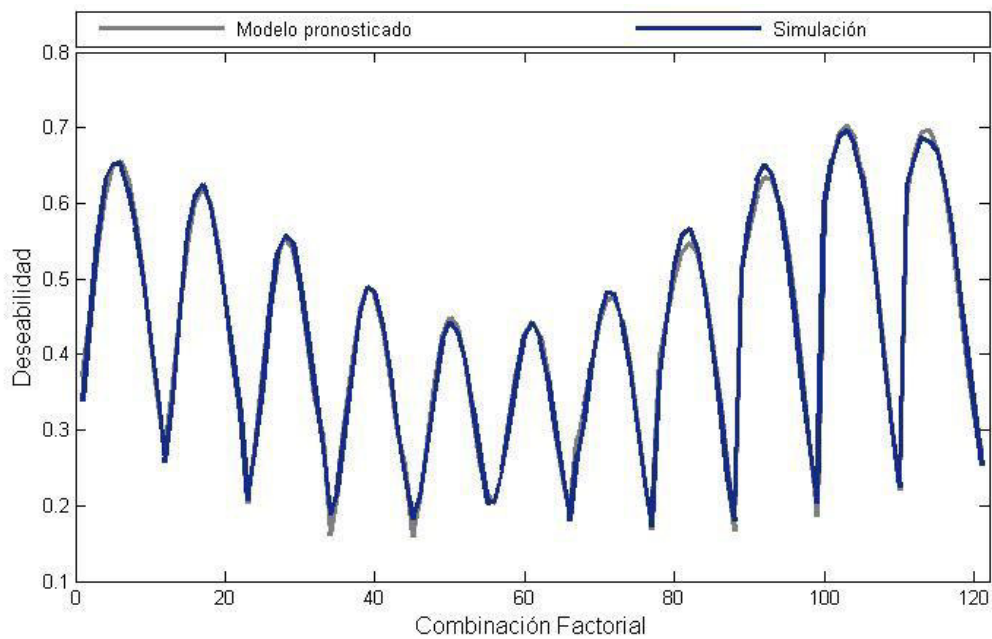


Figura 4.14 Gráfica comparativa del comportamiento de las deseabilidades del modelo ajustado para Dgp_4 contra los resultados de la simulación.

Al validar los modelos ajustados se hace una representación de ellos por medio de superficies de respuesta y gráficas de contorno, generadas en Matlab, las cuales se muestran en las figuras 4.15-4.16, 4.17-4.18, 4.19-4.20 y 4.21-4.22 respectivamente, en ellas se puede ver la relación de las variables de control con las deseabilidades, en cada uno de los escenarios. En cada una de estas figuras se ubicó el punto máximo encontrado según las 121 combinaciones factoriales utilizadas para la simulación y posterior ajuste de modelos, el cual se localizó cerca del resultado óptimo encontrado que se propone en un paso posterior. Con relación a lo anterior en la tabla 4.17 se muestran las mayores deseabilidades alcanzadas para ambos modelos considerando solo las 121 combinaciones factoriales propuestos para construir una malla fina construida.

Tabla 4.17 Máximos valores de deseabilidad pronosticados según los modelos ajustados para las 121 combinaciones para el caso de estudio I.

Modelos	Variables de control		Deseabilidad
	X_2	X_3	
Dgp_1	1.682	-0.6728	0.8017
Dgp_2	1.682	-0.6728	0.8501
Dgp_3	1.682	-0.6728	0.9657
Dgp_4	1.346	-0.6728	0.7032

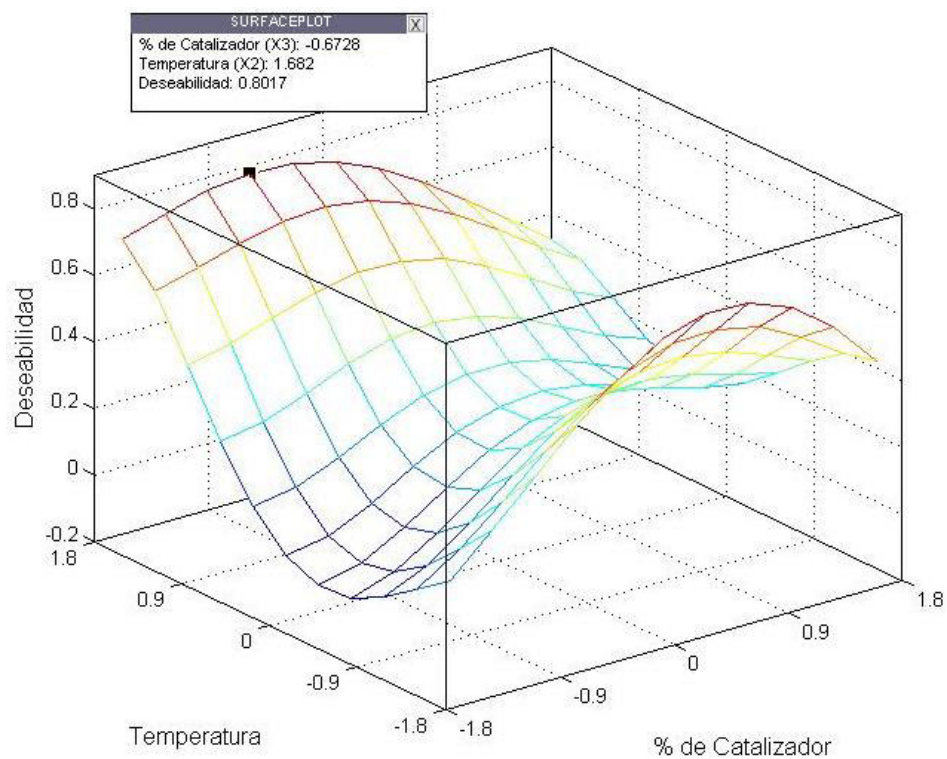


Figura 4.15 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a Dgp_1 .

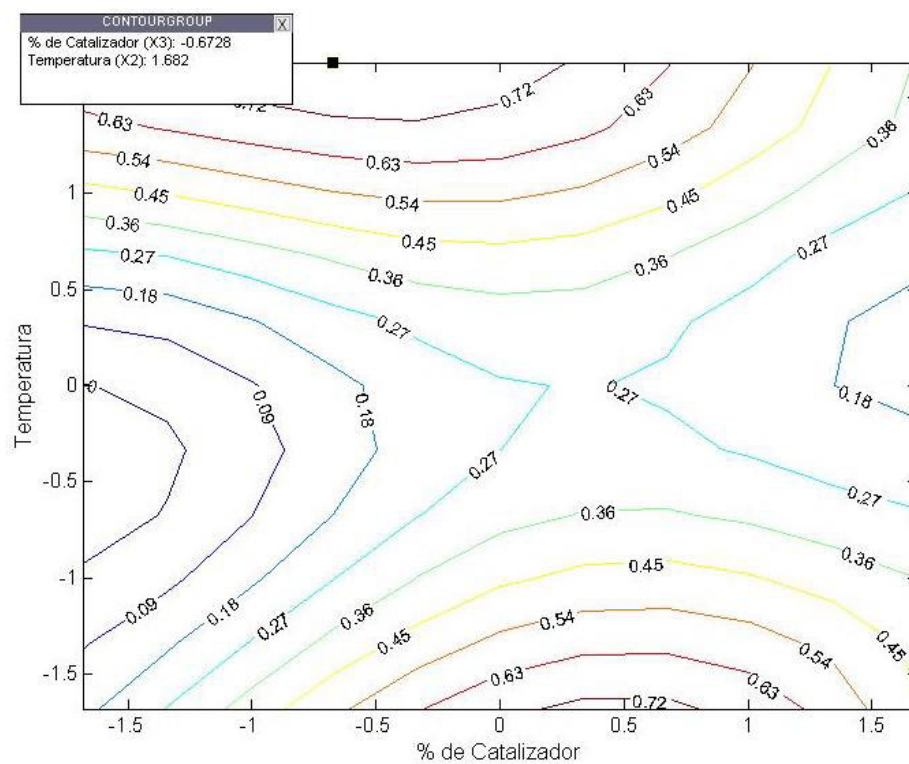


Figura 4.16 Gráfica de contorno del modelo asociado a Dgp_1 .

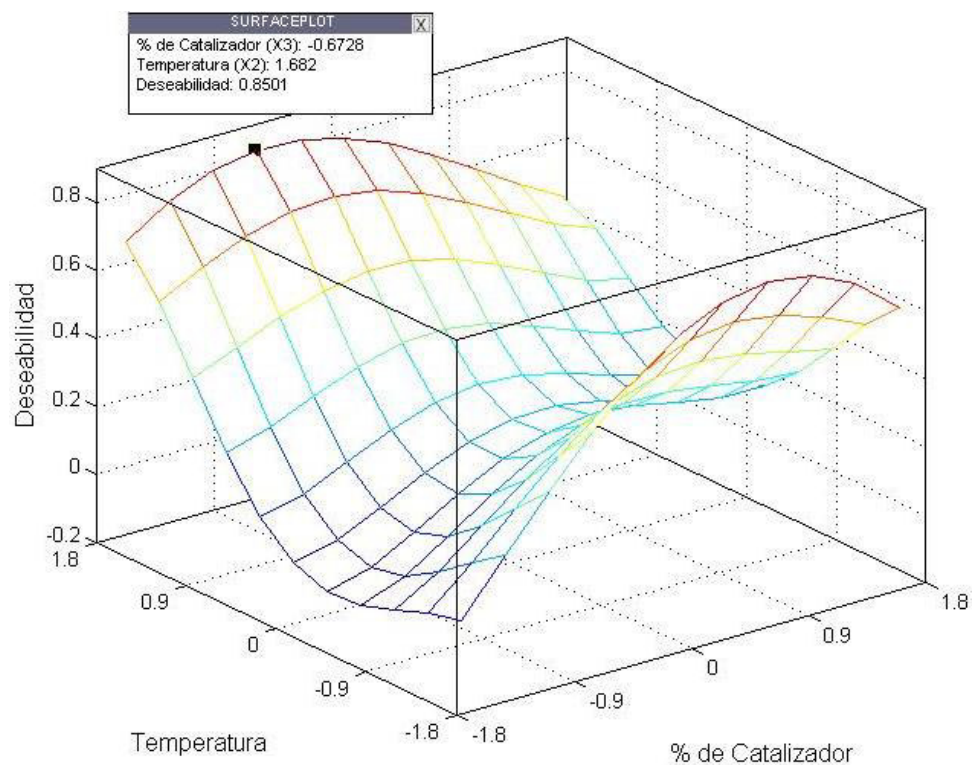


Figura 4.17 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a Dgp_2 .

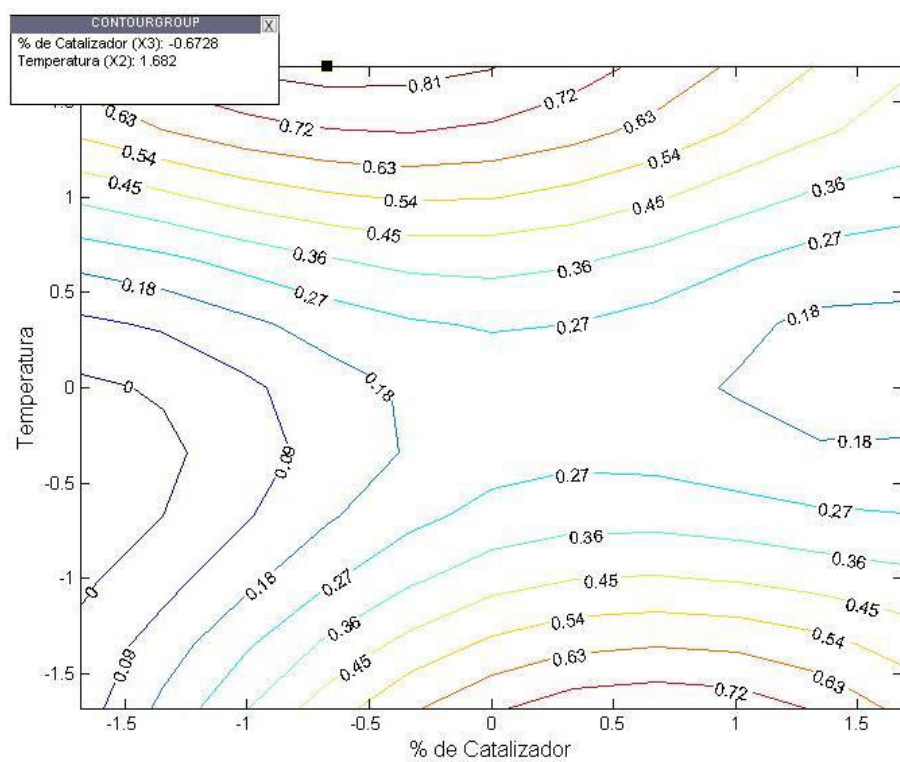


Figura 4.18 Gráfica de contorno para el modelo asociado a Dgp_2 .

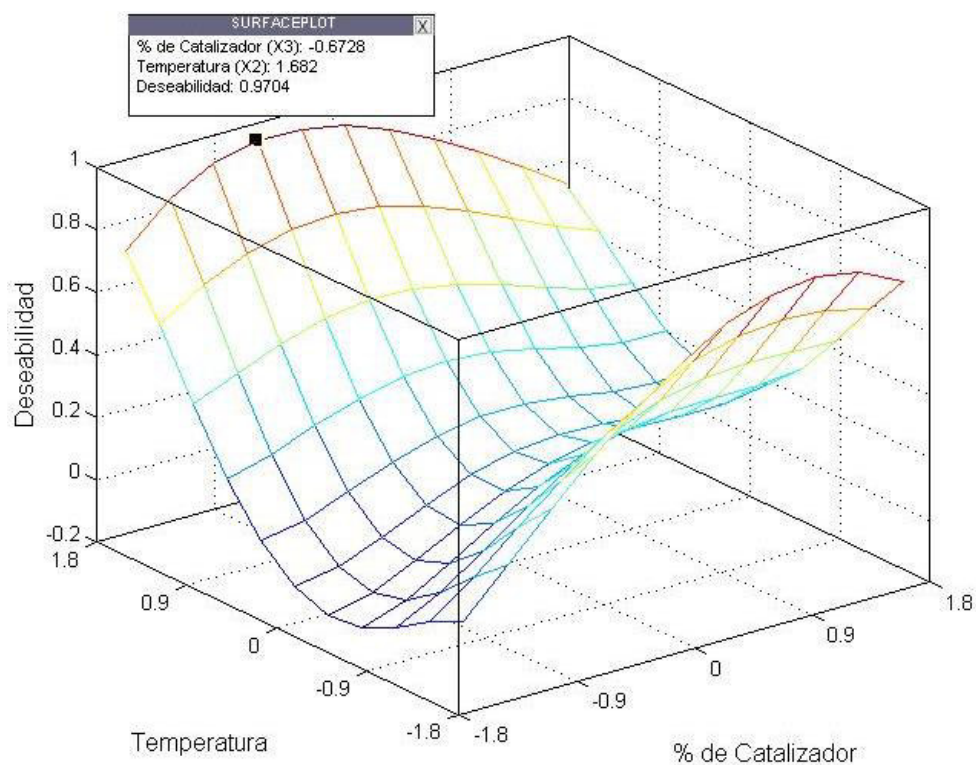


Figura 4.19 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a Dgp_3 .

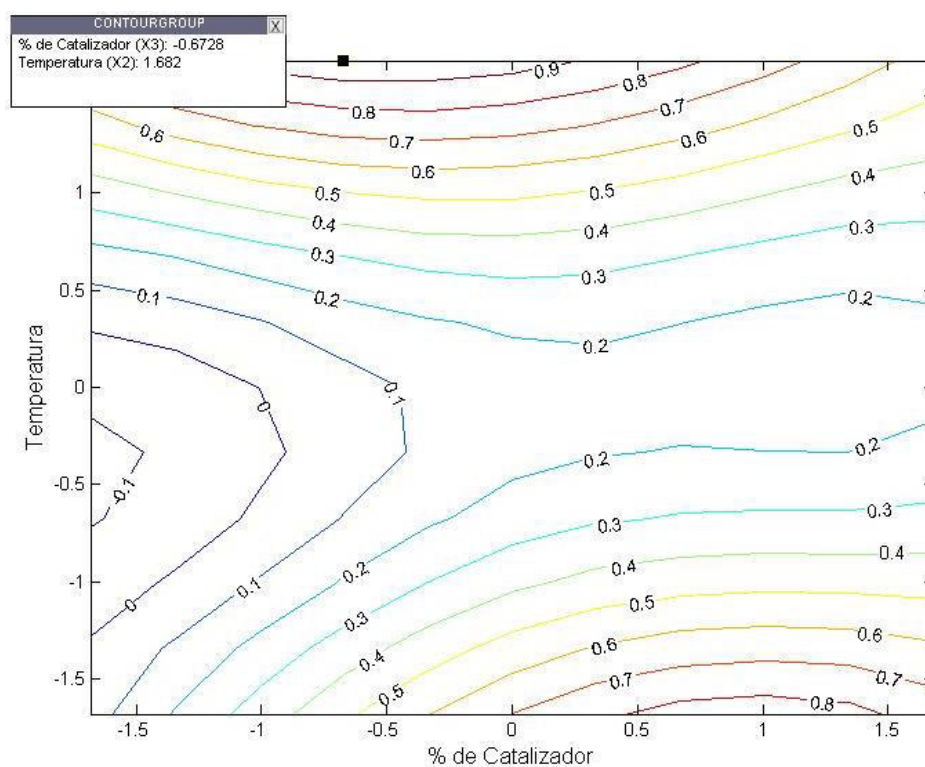


Figura 4.20 Gráfica de contorno del modelo asociado a Dgp_3 .

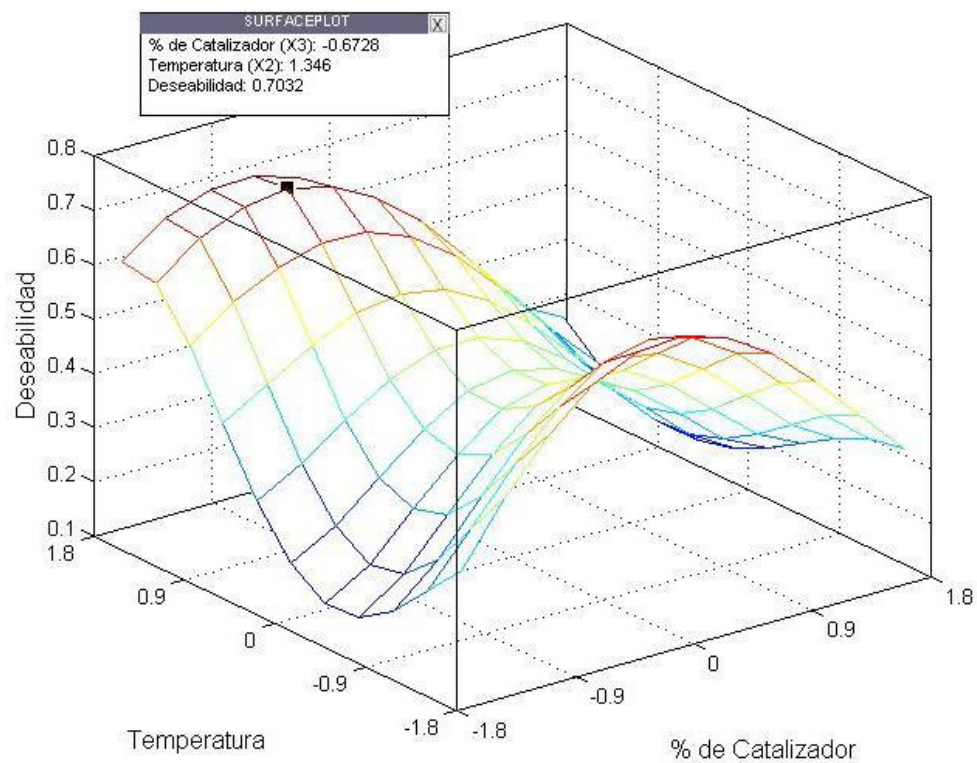


Figura 4.21 Gráfica de superficie que representa al modelo asociado a Dgp_4 .

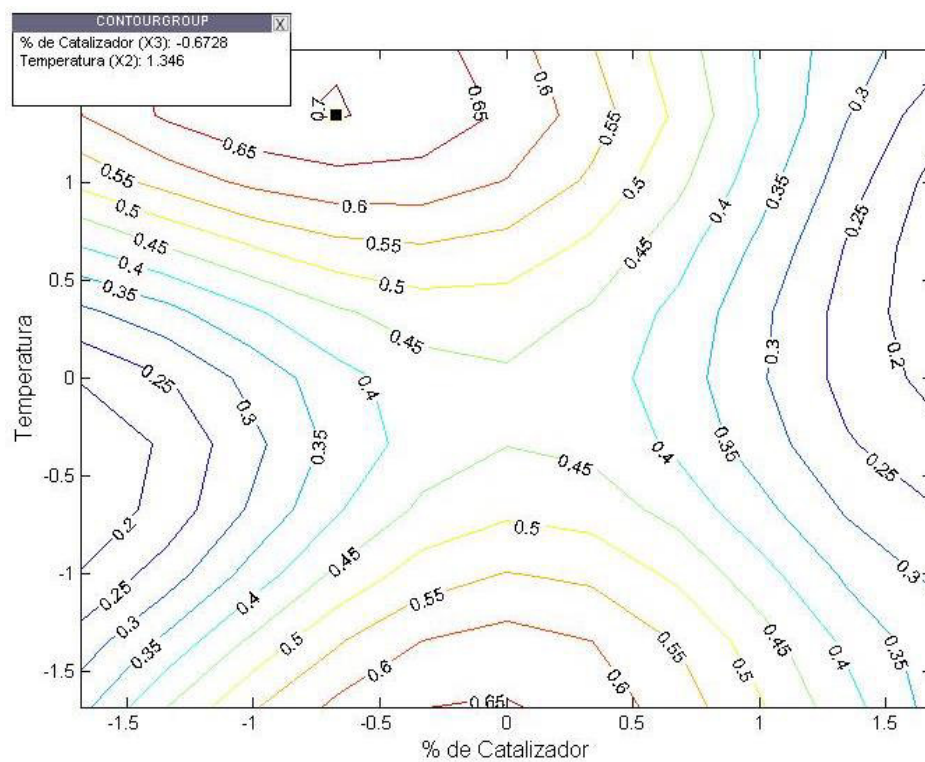


Figura 4.22 Gráfica de contorno del modelo asociado a Dgp_4 .

Paso IX: Toda vez que se comprobó que los modelos obtenidos representaban de forma adecuada los datos de la simulación según este caso de estudio, se procedió a su optimización, esto con la ayuda del Solver de Excel que utiliza el *GRG*, de tal manera que se buscaron los mejores valores de las variables de control donde se encontrara la máxima deseabilidad para los modelos asociados a Dgp_1 , Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 .

Se realizó una búsqueda del punto óptimo en los cuatro modelos para evaluar los escenarios considerados en este caso de estudio y los resultados se muestran en la tabla 4.18. Para la evaluación se utilizaron los mismos 15 valores distintos iniciales de las variables de control en los escenarios, con el objetivo de evaluar en cuantos valores distintos convergía el algoritmo; el Solver de Excel inicia la búsqueda y encuentra la combinación de las variables que dan el resultado óptimo, es decir, el valor máximo en este caso. Al evaluar el modelo asociado a Dgp_1 , se observa las 15 ocasiones en que se buscó el punto óptimo, los valores de las variables de control convergieron en dos distintas combinaciones, pero se eligió la combinación que proporcionó la deseabilidad global más alta para su posterior análisis. En los modelos correspondientes a Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 se puede apreciar al realizar la búsqueda en las 15 ocasiones el Solver convergió en dos combinaciones de las variables, pero de la misma manera que en el primer modelo se elige la combinación de las variables de control donde la deseabilidad global es más alta. Las deseabilidades globales máximas alcanzadas en cada uno de los modelos se muestran en la tabla 4.19.

Tabla 4.18 Búsqueda del punto óptimo para Dgp_1, Dgp_2, Dgp_3 y Dgp_4 partiendo de 15 valores iniciales distintos.

Valores iniciales		Resultados óptimos alcanzados en las variables de control															
X_2	X_3	Dgp_1			DG	Dgp_2			DG	Dgp_3			DG	Dgp_4			DG
1.682	-1.0092	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
1.682	1.682	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
1.682	-1.682	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0	0	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0.8	-1.682	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0.8	0.8	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0.8	-0.8	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
-0.7	-1.2	-1.682	0.4880	0.7458		-1.682	0.6881	0.7901		-1.682	0.9981	0.8533		-1.682	-0.1083	0.6570	
-0.5	-1.45	-1.682	0.4880	0.7458		-1.682	0.6881	0.7901		-1.682	0.9981	0.8533		-1.682	-0.1083	0.6570	
1.5	0	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0.9	0.3	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77562	0.7140	
0.7	-0.4	1.682	-0.6055	0.8022		1.682	-0.5710	0.8513		1.682	-0.5208	0.9737		1.5073	-0.77563	0.7140	
-0.8	0.9	-1.682	0.4880	0.7458		-1.682	0.6881	0.7901		-1.682	0.9981	0.8533		-1.682	-0.1083	0.6570	
-0.9	0.2	-1.682	0.4880	0.7458		-1.682	0.6881	0.7901		-1.682	0.9981	0.8533		-1.682	-0.1083	0.6570	
-0.4	0.1	-1.682	0.4880	0.7458		-1.682	0.6881	0.7901		-1.682	0.9981	0.8533		-1.682	-0.1083	0.6570	

Tabla 4.19 Valores de deseabilidad óptimos alcanzados en los modelos para el caso de estudio II.

Escenario	Pesos utilizados		Punto óptimo		Deseabilidad
	Y_1	Y_2	X_2	X_3	
Dgp_1	0.5	0.5	1.682	-0.6055	0.8022
Dgp_2	0.6	0.4	1.682	-0.5710	0.8513
Dgp_3	0.8	0.2	1.682	-0.5208	0.9737
Dgp_4	0.2	0.8	1.5073	-0.7756	0.7140

Por último se validan las condiciones óptimas propuestas, mediante un programa de simulación que utiliza la función predictiva Bayesiana y el cálculo de la deseabilidad así como la robustez a la variable X_1 muy similar al utilizado en la simulación inicial solo que se le hizo una modificación de tal manera que las variables de control tuvieran valores fijos, los cuales se correspondieran con los valores óptimos encontrados por el Solver; para esto se utilizaron 10,000 iteraciones. La simulación se repitió en 30 ocasiones y los resultados se muestran en las tablas 4.20-4.23 esto con el fin de conocer cómo se comporta el promedio y la desviación estándar de las variables de respuesta originales así como las respectivas deseabilidades individuales de cada una de las variables de respuesta y por último la deseabilidad global. En la tabla 4.24 se muestran los datos resumidos (promedios) de la prueba anterior, donde se aprecia mejor el comportamiento de ambos modelos.

Se hizo una comparación gráfica del comportamiento de las dos variables de respuesta para los cuatro escenarios partiendo de los valores obtenidos en la validación y se muestran en las tablas 4.20-4.23 con el objetivo de observar si hubo una modificación en el comportamiento de sus deseabilidades debido a los distintos pesos que tuvieron en cada uno de los escenarios.

En la figura 4.23 se muestra el comportamiento de deseabilidad asociada a la variable Y_1 (D_1) para los cuatro escenarios. En la gráfica se observa que en 19 ocasiones de las 30 en D_1 alcanza los mayores valores en el escenario Dgp_3 , lo que se debe a que en éste, a esta variable de respuesta se le dio una ponderación de 0.8, mientras que en los otros escenarios tuvo ponderaciones menores, en Dgp_1 se le dio un valor de 0.5, en Dgp_2 un valor de 0.6 y por último en el escenario Dgp_4 un valor de 0.2.

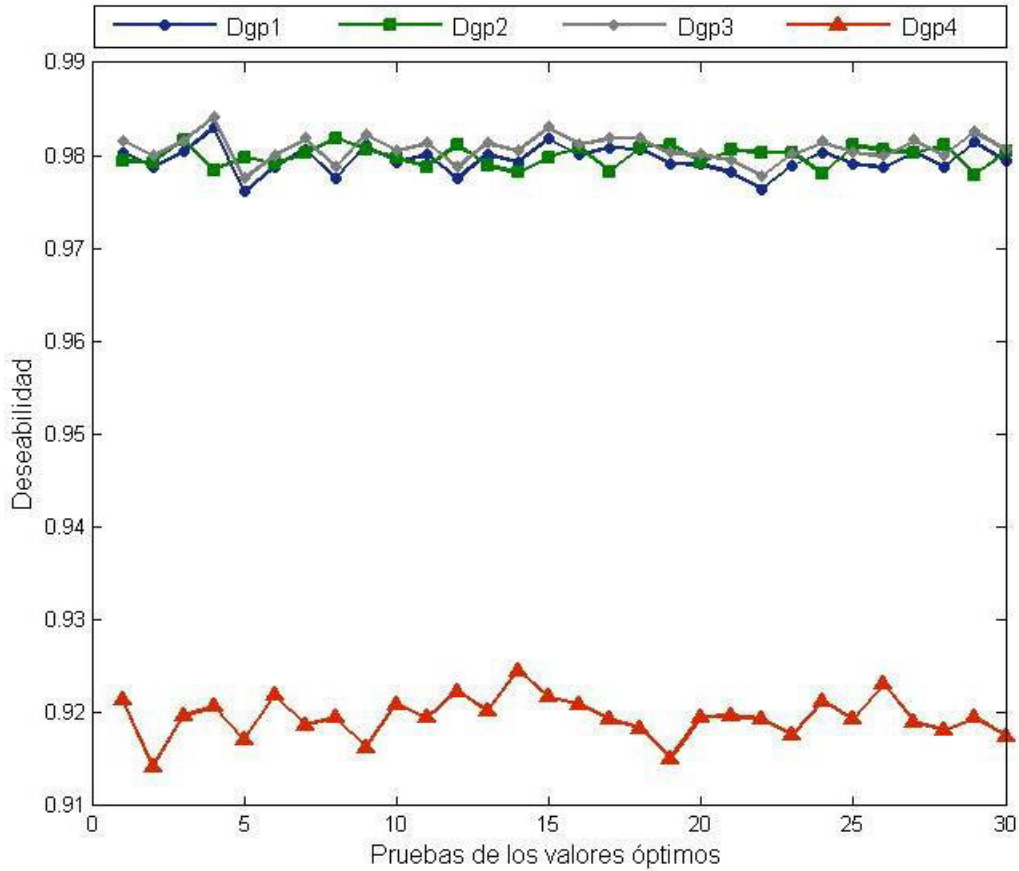


Figura 4.23 Comparación de valores de D_1 en los escenarios Dgp_1 , Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 .

En el caso del comportamiento de la deseabilidad asociada a la variable Y_2 (D_2), se aprecian en la figura 4.24 los cuatro escenarios Dgp_1 , Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 . Se observa que en D_2 las deseabilidades más altas se dieron en el escenario Dgp_4 en las 30 ocasiones en que se realizó la validación, esto se debe a que en este escenario la variable Y_2 (D_2), se le dio una ponderación de 0.8 a diferencia de los otros escenarios, Dgp_1 por ejemplo tiene un peso de 0.5, Dgp_2 tiene un peso de 0.4 y por último Dgp_3 un peso de 0.2.

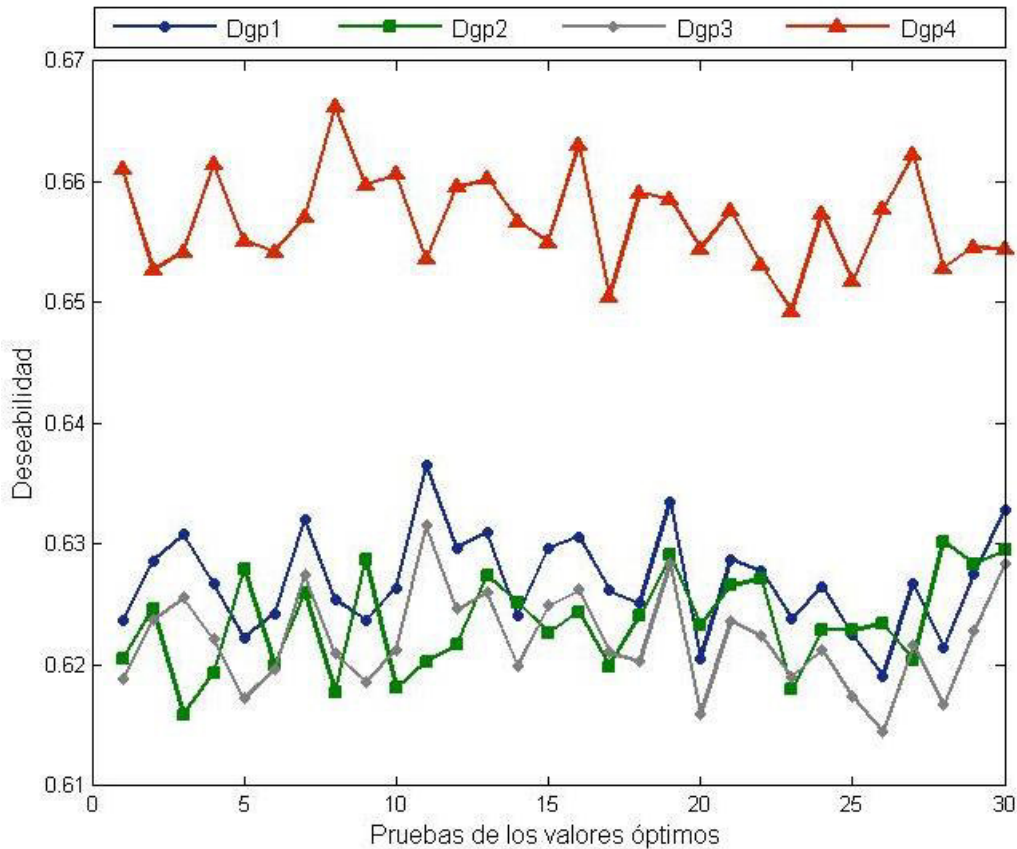


Figura 4.24 Comparación de valores de D_2 en los escenarios Dgp_1 , Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 .

Con la representación de las figuras anteriores se comparó las variables en los escenarios Dgp_1 , Dgp_2 , Dgp_3 y Dgp_4 , en los cuales las variables de respuesta tenían distintos valores de importancia, y conforme a lo que representan las gráficas se confirma la hipótesis la cual dice que los resultados óptimos alcanzados en los distintos escenarios propuestos tienden a favorecer a las variables de respuesta con los mayores pesos o ponderaciones.

Tabla 4.20 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp_1 .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682
X_3	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606
D_1	0.980	0.979	0.980	0.983	0.976	0.979	0.981	0.978	0.981	0.979
$\bar{Y}_1$	120.223	119.995	120.420	120.514	120.071	120.294	120.230	120.061	120.228	120.208
σ_1	9.057	9.016	9.250	8.910	9.346	9.173	9.031	9.147	8.965	9.258
D_2	0.624	0.629	0.631	0.627	0.622	0.624	0.632	0.625	0.624	0.626
$\bar{Y}_2$	58.901	58.894	58.878	58.839	58.911	58.893	58.858	58.862	58.938	58.917
σ_2	3.419	3.422	3.381	3.456	3.476	3.475	3.370	3.483	3.423	3.382
Dgp_1	0.782	0.784	0.786	0.785	0.779	0.782	0.787	0.782	0.782	0.783
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682
X_3	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606
D_1	0.980	0.978	0.980	0.979	0.982	0.980	0.981	0.981	0.979	0.979
$\bar{Y}_1$	120.058	119.940	120.249	120.183	120.326	120.152	120.422	120.489	120.185	120.153
σ_1	8.936	9.161	9.064	9.166	9.050	9.093	9.009	9.237	9.162	9.194
D_2	0.637	0.630	0.631	0.624	0.630	0.631	0.626	0.625	0.634	0.621
$\bar{Y}_2$	58.888	58.893	58.830	58.843	58.856	58.745	58.918	58.892	58.863	58.914
σ_2	3.349	3.416	3.426	3.455	3.409	3.428	3.423	3.441	3.392	3.476
Dgp_1	0.790	0.785	0.786	0.782	0.786	0.786	0.784	0.783	0.788	0.779
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682
X_3	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606	-0.606
D_1	0.978	0.976	0.979	0.980	0.979	0.979	0.980	0.979	0.981	0.979
$\bar{Y}_1$	120.137	119.993	120.209	120.207	120.077	120.167	120.370	120.230	120.314	120.155
σ_1	9.040	9.328	9.154	9.162	9.069	9.247	9.107	9.208	9.003	9.162
D_2	0.629	0.628	0.624	0.627	0.623	0.619	0.627	0.621	0.628	0.633
$\bar{Y}_2$	58.911	58.964	58.887	58.871	58.963	58.923	58.870	58.862	58.844	58.811
σ_2	3.391	3.383	3.404	3.362	3.475	3.474	3.395	3.424	3.419	3.382
Dgp_1	0.784	0.783	0.782	0.784	0.781	0.778	0.784	0.780	0.785	0.787

Tabla 4.21 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp_2 .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
X_3	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.33	120.13	120.36	120.14	120.28	120.21	120.19	120.41	120.31	120.25
σ_1	9.07	9.18	9.07	9.15	9.15	9.25	8.94	8.97	9.04	9.15
D_2	0.62	0.62	0.62	0.62	0.63	0.62	0.63	0.62	0.63	0.62
$\bar{Y}_2$	58.90	58.98	58.98	58.93	58.92	58.97	58.94	58.94	58.94	58.93
σ_2	3.44	3.41	3.52	3.46	3.42	3.48	3.39	3.48	3.39	3.45
Dgp_2	0.82	0.82	0.81	0.81	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.81
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
X_3	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.23	120.21	120.18	120.16	119.97	120.36	120.06	120.39	120.09	120.09
σ_1	9.23	9.02	9.11	9.18	8.96	9.07	9.19	9.20	8.90	9.08
D_2	0.62	0.62	0.63	0.63	0.62	0.62	0.62	0.62	0.63	0.62
$\bar{Y}_2$	58.88	58.96	58.92	59.00	58.96	58.97	58.91	58.95	58.92	59.09
σ_2	3.52	3.49	3.39	3.37	3.38	3.42	3.53	3.44	3.39	3.38
Dgp_2	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
X_3	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57	-0.57
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.33	120.35	120.38	120.24	120.26	120.25	120.32	120.17	120.19	120.30
σ_1	8.99	9.08	9.12	9.24	9.01	8.99	9.18	8.90	9.38	9.13
D_2	0.63	0.63	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	0.63	0.63	0.63
$\bar{Y}_2$	58.97	58.94	58.89	58.94	58.91	58.98	58.99	58.89	58.97	58.94
σ_2	3.37	3.36	3.54	3.42	3.47	3.41	3.45	3.38	3.39	3.36
Dgp_2	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82

Tabla 4.22 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp_3 .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
X_3	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.38	120.15	120.57	120.67	120.23	120.45	120.39	120.22	120.38	120.36
σ_1	8.97	8.93	9.16	8.82	9.26	9.09	8.94	9.06	8.88	9.17
D_2	0.62	0.62	0.63	0.62	0.62	0.62	0.63	0.62	0.62	0.62
$\bar{Y}_2$	59.07	59.06	59.04	59.01	59.08	59.06	59.02	59.03	59.10	59.08
σ_2	3.39	3.39	3.35	3.42	3.44	3.44	3.34	3.45	3.39	3.35
Dgp_3	0.90	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89	0.90	0.89	0.90	0.90
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682
X_3	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.22	120.10	120.40	120.34	120.48	120.31	120.58	120.64	120.34	120.31
σ_1	8.85	9.07	8.98	9.08	8.96	9.00	8.92	9.15	9.07	9.11
D_2	0.63	0.62	0.63	0.62	0.62	0.63	0.62	0.62	0.63	0.62
$\bar{Y}_2$	59.05	59.06	59.00	59.01	59.02	58.91	59.08	59.06	59.03	59.08
σ_2	3.32	3.38	3.39	3.42	3.38	3.40	3.39	3.41	3.36	3.44
Dgp_3	0.90	0.89	0.90	0.89	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	0.89
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682	1.682
X_3	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52	-0.52
D_1	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$\bar{Y}_1$	120.29	120.15	120.36	120.36	120.23	120.32	120.52	120.39	120.47	120.31
σ_1	8.95	9.24	9.07	9.07	8.98	9.16	9.02	9.12	8.92	9.07
D_2	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	0.61	0.62	0.62	0.62	0.63
$\bar{Y}_2$	59.08	59.13	59.05	59.04	59.13	59.09	59.04	59.03	59.01	58.98
σ_2	3.36	3.35	3.37	3.33	3.44	3.44	3.36	3.39	3.39	3.35
Dgp_3	0.89	0.89	0.89	0.90	0.89	0.89	0.90	0.89	0.90	0.90

Tabla 4.23 Resultados de la simulación con los valores óptimos alcanzados para Dgp_4 .

CORRIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_2	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507
X_3	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776
D_1	0.921	0.914	0.920	0.921	0.917	0.922	0.919	0.920	0.916	0.921
$\bar{Y}_1$	112.182	111.854	112.064	112.003	111.845	112.002	111.982	111.842	111.732	112.022
σ_1	8.684	8.774	8.611	8.478	8.588	8.418	8.691	8.389	8.601	8.509
D_2	0.661	0.653	0.654	0.661	0.655	0.654	0.657	0.666	0.660	0.661
$\bar{Y}_2$	58.540	58.570	58.553	58.520	58.524	58.596	58.577	58.549	58.554	58.494
σ_2	3.175	3.264	3.264	3.165	3.271	3.215	3.177	3.145	3.208	3.218
Dgp_4	0.706	0.698	0.700	0.707	0.701	0.701	0.703	0.711	0.705	0.706
CORRIDA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X_2	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507
X_3	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776
D_1	0.920	0.922	0.920	0.925	0.922	0.921	0.919	0.918	0.915	0.920
$\bar{Y}_1$	111.960	112.094	111.930	112.184	112.247	111.962	111.931	111.916	111.782	111.984
σ_1	8.605	8.495	8.536	8.458	8.671	8.601	8.631	8.487	8.756	8.593
D_2	0.654	0.660	0.660	0.657	0.655	0.663	0.651	0.659	0.659	0.655
$\bar{Y}_2$	58.507	58.519	58.415	58.577	58.553	58.525	58.573	58.570	58.620	58.549
σ_2	3.245	3.202	3.220	3.214	3.232	3.186	3.265	3.185	3.178	3.197
Dgp_4	0.700	0.705	0.706	0.703	0.701	0.708	0.697	0.704	0.703	0.701
CORRIDA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X_2	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507	1.507
X_3	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776	-0.776
D_1	0.920	0.919	0.918	0.921	0.919	0.923	0.919	0.918	0.920	0.918
$\bar{Y}_1$	111.981	111.860	111.944	112.134	112.004	112.082	111.933	111.857	111.928	111.889
σ_1	8.602	8.514	8.680	8.551	8.645	8.452	8.600	8.577	8.539	8.716
D_2	0.658	0.653	0.649	0.657	0.652	0.658	0.662	0.653	0.655	0.654
$\bar{Y}_2$	58.533	58.620	58.582	58.533	58.525	58.508	58.477	58.564	58.535	58.521
σ_2	3.157	3.264	3.263	3.188	3.216	3.211	3.177	3.230	3.262	3.268
Dgp_4	0.703	0.699	0.696	0.703	0.698	0.704	0.707	0.699	0.701	0.700

Tabla 4.24 Resumen de los estadísticos según las corridas de validación para el caso de estudio II.

<i>Escenarios</i>	X_2	X_3	D_1	$\bar{Y}_1$	σ_1	D_2	$\bar{Y}_2$	σ_2	DGs
<i>Dgp₁</i>	1.682	-0.606	0.980	120.209	9.123	0.627	58.881	3.420	0.784
<i>Dgp₂</i>	1.682	-0.571	0.980	120.239	9.098	0.624	58.946	3.430	0.818
<i>Dgp₃</i>	1.682	-0.521	0.981	120.364	9.036	0.622	59.048	3.388	0.895
<i>Dgp₄</i>	1.507	-0.776	0.920	111.971	8.582	0.657	58.543	3.215	0.703

Paso X: Esta fase se expone a continuación en el siguiente apartado.

4.3 Discusión de Resultados

4.3.1 Conclusiones Paso X: Optimización de un sistema de cromatografía líquida de alto rendimiento (HPLC).

En el caso de estudio I utilizado para representar la modificación a la metodología propuesta por Miró-Quesada et al. (2004), se puede apreciar el efecto de utilizar la media geométrica de las deseabilidades individuales como la variable de respuesta a optimizar, por ejemplo, si solo se utiliza la media geométrica sin ponderar, escenario Dg , la mejor condición de operación resultó en (0.35, -1) según el solver, condición que se encuentra en la región de X_2 entre 0.2 y 0.4, en la cual Dg tiene un mejor desempeño de acuerdo a la malla simulada, en cambio cuando se utilizan distintos pesos en el cálculo de la media geométrica, tal como sucede en el escenario Dgp , se encontró que la mejor condición de operación resultó en (0.48, -1) la cual se encuentra en la región de X_2 entre los valores 0.4 y 0.6, región en la que Dgp tiene mejor desempeño, obteniendo su mejor resultado en $X_2 = 0.4$. Se observa que la región de X_2 cambió para este último escenario desplazándose a la vecindad de 0.4 por tener un mejor desempeño en las variables Y_2 y Y_3 ya que fueron las de mayor ponderación en este escenario.

Como se observa en este ejemplo, hubo un cambio en la región de operación óptima para el proceso, cargándose hacia las condiciones en donde las variables más importantes se comportan de mejor manera. El desplazamiento observado fue de $X_2 = 0.35$ a $X_2 = 0.48$, por lo que el cambio se muestra evidente en esta variable de control. Esto sucede porque las regiones de operación con $X_2 = 0.2$ y 0.4 , son las que mejor se desempeñan en el escenario Dg , muy por encima de las del resto de las condiciones y además tienen un desempeño muy similar en las cuatro variables analizadas, (de hecho para marcar un poco más estas diferencias es que las especificaciones se modificaron con respecto al trabajo de referencia), en el escenario de Dgp su desempeño sigue siendo muy parecido, por lo que a la hora de optimizar mediante el GRG la solución se mueve hacia $X_2 = 0.48$, con lo cual se aprecia que la región de optimización cambio respecto a Dg .

En la tabla 4.25 se muestran las estimaciones por intervalo con un 95% de confianza de las deseabilidades individuales, partiendo de las estimaciones puntuales obtenidas en las condiciones óptimas que se muestran en la tabla 4.11. En estos intervalos puede verse que existe una diferencia estadísticamente significativa en las deseabilidades de las variables de respuesta, dependiendo de los pesos que tengan en los escenarios planteados. En general puede observarse que los límites de los intervalos se desplazan hacia arriba conforme las ponderaciones aumentan y que se tiene el efecto contrario cuando las ponderaciones se reducen.

Tabla 4.25 Intervalos de confianza para las deseabilidades en cada variable de respuesta en las condiciones óptimas del caso de estudio I.

<i>Escenarios</i>	<i>Pesos</i>				<i>Promedios</i>				<i>Intervalos de Confianza del 95%</i>			
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4	D_1	D_2	D_3	D_4
<i>Dg</i>	(0.25)	(0.25)	(0.25)	(0.25)	0.9973	0.9057	0.9948	0.6288	(0.997160, 0.997474)	(0.904714, 0.906693)	(0.994643, 0.994964)	(0.627825, 0.629842)
<i>Dgp</i>	(0.1)	(0.4)	(0.4)	(0.1)	0.9968	0.9428	0.9975	0.4693	(0.996687, 0.996973)	(0.942118, 0.943475)	(0.997296, 0.997631)	(0.468157, 0.470456)

4.3.2 Conclusiones Paso X: Porcentaje de Conversión y Actividad Térmica

En la tabla 4.19 se muestran los resultados de los valores óptimos de las variable de control X_2 y X_3 en los cuatro escenarios, y como puede apreciarse los escenarios Dgp_1 , Dgp_2 , y Dgp_4 tienen resultados similares, sin embargo, se observa en las tablas 4.20 y 4.21 que si se compara Dgp_1 con Dgp_2 , al buscar condiciones en donde se comporte de mejor manera $D_1(Y_1)$ sin afectar demasiado a $D_2(Y_2)$, ya que sus ponderaciones no son tan distintas, pero en cambio sí se comprara Dgp_1 contra Dgp_3 en las tablas 4.20 y 4.22, las modificaciones a favor de D_1 y en contra de D_2 comienzan a ser más evidentes, esto gracias a que las diferencias en las ponderaciones en las variables de respuesta se hace más fuerte para D_1 . En el caso del escenario Dgp_4 se aprecia en la tabla 4.23, se puede apreciar que los valores óptimos propuestos tanto para X_2 como para X_3 , ahora sí son bastante diferentes a los anteriores, sobre todo en X_2 , esto debido a que en esta ocasión de le dio una ponderación

de 0.2 a D_1 y de 0.8 a D_2 , por lo que la metodología busca la zona en donde D_2 tuvo su mejor desempeño a expensas de D_1 . Todo lo anterior se puede apreciar de manera resumida en las deseabilidades individuales, las medias y las deseabilidades globales presentadas en la tabla 4.24.

Adicionalmente en la tabla 4.17 puede observarse que Dgp_4 tiene su resultado más alto en $X_2 = 1.346$ y $X_3 = -0.6728$ por lo que el resultado óptimo alcanzado es muy similar a este según la tabla 4.19. Respecto a Dgp_1 también tiene su mejor resultado en $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.6728$ de acuerdo a la tabla 4.17, sin embargo su resultado óptimo se encontró en $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.6055$. En el caso de Dgp_2 los resultados más altos en las variables en la tabla 4.17 fueron idénticos que en Dgp_1 , $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.6728$ esto es a causa de que las ponderaciones en estos escenarios son muy similares, en cambio en la tabla 4.19 los valores fueron $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.5710$. Es importante señalar también que al resolver el problema presentado como ejemplo en este trabajo, Myers y Montgomery (1995) encuentran como mejor propuesta para solución óptima $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.5955$, la cual es similar a las encontradas utilizando Dgp_2 , y Dgp_3 , este último resulta importante ya que es el escenario con la deseabilidad más alta es esta metodología propuesta, los valores óptimos fueron $X_2 = 1.682$ y $X_3 = -0.5208$, los resultados de deseabilidad para Dgp_2 fue $DG = 0.8513$, en cambio Dgp_3 alcanza una $DG = 0.9737$ como se muestra en la tabla 4.19. En la tabla 4.26 se muestran las estimaciones por intervalo con un 95% de confianza de las deseabilidades individuales, partiendo de las estimaciones puntuales obtenidas en las condiciones óptimas que se muestran en la tabla 4.19. En estos intervalos puede verse que existe una diferencia estadísticamente significativa en las deseabilidades individuales de las variables de respuesta, dependiendo de los pesos que tengan en los cuatro escenarios planteados. En general, al igual que en el caso de estudio I, puede observarse que los límites de los intervalos se desplazan hacia arriba conforme las ponderaciones aumentan y que se tiene el efecto contrario cuando las ponderaciones disminuyen.

Tabla 4.26 Intervalos de confianza para las deseabilidades en cada variable de respuesta en las condiciones óptimas del caso de estudio II.

Así pues, según los resultados alcanzados en ambos casos de estudio se puede decir que la metodología reaccionó de acuerdo con las ponderaciones dadas a cada variable de

<i>Escenarios</i>	<i>Pesos</i>		<i>Promedios</i>		<i>Intervalos de Confianza del 95%</i>	
	<i>D₁</i>	<i>D₂</i>	<i>D₁</i>	<i>D₂</i>	<i>D₁</i>	<i>D₂</i>
<i>Dgp₁</i>	(0.5)	(0.5)	0.9795	0.6269	(0.978972, 0.980101)	(0.625400, 0.628480)
<i>Dgp₂</i>	(0.6)	(0.4)	0.9799	0.6235	(0.979508, 0.980352)	(0.622063, 0.625037)
<i>Dgp₃</i>	(0.8)	(0.2)	0.9807	0.6220	(0.981972, 0.982994)	(0.595745, 0.598568)
<i>Dgp₄</i>	(0.2)	(0.8)	0.9196	0.6568	(0.918730, 0.920397)	(0.655318, 0.658302)

respuesta, buscando las condiciones de operación del proceso, en donde las variables con las ponderaciones más altas se comportan de mejor manera, de acuerdo con su deseabilidad.

5. Conclusión y Recomendaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones de acuerdo con las hipótesis y objetivos planteados sobre la metodología propuesta y posteriormente se muestran las conclusiones generales de este trabajo, seguidas por las recomendaciones.

5.1 Conclusiones de acuerdo con las Hipótesis y los Objetivos

A continuación se presentan las conclusiones de la presente investigación de acuerdo con las hipótesis y los objetivos planteados.

5.1.1 Conclusiones de acuerdo con las Hipótesis

Hipótesis 1: La metodología propuesta por Peterson (2004) y complementada por Miró-Quesada et al. (2004) funciona correctamente si las variables de respuesta originales se sustituyen por la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales.

Esta hipótesis resultó verdadera, ya que al sustituir las variables de respuesta originales, por las deseabilidades individuales de cada una de las variables de respuesta, y estas últimas a su vez por su media geométrica ponderada, se tuvieron las siguientes ventajas:

- Se redujo la dimensión del problema original, una sola variable de respuesta, lo que lo hace más simple.
- La nueva variable de respuesta fue sencilla de entender, ya que es un promedio ponderado de cada una de las deseabilidades individuales de cada variable de respuesta.
- Fue posible introducir diferencias en las ponderaciones de cada una de las variables de respuesta de acuerdo con su relevancia de acuerdo con los costos o a la finalidad del producto.

Hipótesis 2: La media geométrica ponderada se puede modelar utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Respecto a esta hipótesis, se puede afirmar que fue verdadera, ya que en ambos casos de estudio que se utilizaron la ilustrar la metodología y los diferentes escenarios planteados se pudieron ajustar modelos de los datos simulados por medio de *MCO*.

Hipótesis 3: Se puede utilizar el *Método del Gradiente Reducido Generalizado (GRG)* para optimizar el polinomio resultante, lo que es deseable, ya que este permite la optimización restringida.

Esta hipótesis fue verdadera, ya que en los casos utilizados en este trabajo se hizo uso de *GRG* con el cual se alcanzaron los valores óptimos de las variables de control y como resultado las deseabilidades globales, lo cual fue consistente con la información contenida en las gráficas de superficie y contornos, así como con las gráficas donde se contrasta la información de los datos simulados con contra los modelos de regresión, ya que en todas se puede apreciar de manera visual una región óptima similar.

Hipótesis 4: La condición óptima resultante para operar el proceso será diferente si se consideran diferentes ponderaciones y tenderá hacia donde las variables de respuesta más importantes se comportan de la mejor manera, si se utiliza como variable de respuesta a optimizar la media geométrica ponderada de las deseabilidades individuales, dando ponderaciones más altas a dichas variables.

En esta hipótesis se pudo observar en todos los casos considerados en este trabajo que las condiciones óptimas propuestas se desplazan hacia zonas en donde las variables de respuesta más importantes muestran un mejor desempeño a expensas de las menos importantes y los resultados alcanzados difieren dependiendo de las ponderaciones consideradas para las variables de respuesta, por lo cual afirmamos que esta hipótesis también se considera verdadera.

5.1.2 Conclusiones de acuerdo con los Objetivos

En cuanto a los objetivos propuestos al inicio de este trabajo, se puede decir que se cumplieron tanto en general como en los específicos en ambos ejemplos ilustrativos.

5.1.3 Conclusiones Generales

De acuerdo a los resultados alcanzados en ambos casos de estudio se puede concluir que la metodología propuesta por Peterson (2004) y complementada por Miró-Quesada et al. (2004), funciona adecuadamente con las modificaciones propuestas considerando que las variables de respuesta tengan diferentes ponderaciones, lo cual sí puede modificar los resultados óptimos alcanzados, buscando configuraciones del proceso con mejores comportamientos en las variables con los mayores pesos. Esto último hace posible analizar casos en los que no todas las variables de respuesta son igual de importantes, con lo que la metodología original se vuelve más flexible y atractiva en muchos de los casos prácticos, ya que en su originalmente no permitía incorporar estas consideraciones. Una ventaja es que con la modificación propuesta acerca del uso de ponderaciones, el problema se puede resolver utilizando diferentes combinaciones de pesos, lo que proporcionaría a los ingenieros y a los investigadores diferentes alternativas óptimas de operación del proceso, lo que puede enriquecer la toma de decisiones.

Como conclusión general de este trabajo, se puede decir que la inferencia bayesiana, es una opción que permite ser aplicada en todas las situaciones en las que el análisis de datos sea requerido. A favor de la opción bayesiana se puede decir que es muy flexible y permite considerar aspectos de dentro de la estadística clásica no es posible manejar, por ejemplo la incertidumbre en los parámetros de los modelos de regresión.

En contra de la estadística bayesiana se puede decir, que todavía no es muy conocida y por lo tanto poco aplicada en casos prácticos dentro de la ingeniería industrial, pero poco a

poco va ganando terreno y cada vez es más común encontrar publicaciones científicas en donde se ha utilizado. Por otra parte también existe un mayor grado de complejidad para su implementación, ya que en ocasiones puede ser necesario generar programas de cómputo que realicen tal tarea.

6. Bibliografía

- Ames, A. E., Matucci, N., Macdonald S., Szonyi, G., y Hawkins, D. M. (1997). Quality Loss Function for Optimization Across Multiple Response Surfaces. *Journal of Quality Technology*, 339-346.
- Bahloul, B., Ali L., M. y Sfar, S. (2014). A novel approach for the development and optimization of self emulsifying drug delivery system using HLB and response surface methodology: Application to fenofibrate encapsulation. *International Journal of Pharmaceutics*, 341-348.
- Berger, J. O. (2000). Bayesian Analysis: A Look at Today and Thoughts of Tomorrow. *Journal of the American Statistical Association*, 1269-1276.
- Box, G. E. P., and Draper, N. R. (1987). *Empirical Model Building and Response Surfaces*. New York: John Wiley & Sons.
- Box, G. E. P., y Tiao G. C. (1992). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. New York: Wiley Interscience.
- Casella, G., y George, E. I. (1992). Explaining the Gibbs Sampler. *The American Statistician*, 167-174.
- Ch'ng, C. K., Quah S. H. y Low H. C. (2005). Index C*pm in multiple response optimization. *Quality Engineering*, 165-171.
- Chaparro, J. A., Giraldo, B. y Rodón, S. (2013). Evaluación del clasificador Naïve Bayes como herramienta de diagnóstico en Unidades de Cuidado Intensivo. *Journal Technology*, 87-93.
- Chen, Y. y Ye, K. (2011). A Bayesian hierarchical approach to dual response surface modelling. *Journal of Applied Statistics*, 1963–1975.
- Chiao, C. H., y Hamada, M. (2001). Analyzing Experiments With Correlated Multiple Responses. *Journal of Quality Technology*, 451- 465.
- Chib, S., y Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis – Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 327-335.
- Colosimo, B. M., y Del Castillo, E. (2007). *Bayesian Process Monitoring, Control and Optimization*. Boca Raton, Florida: Chapman and Hall/CRC.
- Copeland, K. A. F., y Nelson, P.R. (1996). Dual Response Optimization Via Direct Function Minimization. *Journal of Quality Technology*, 331-336.
- Costa, N., Lopes Pereira, Z., y Lourenco, J. (2011). Mean and Standard Deviation Optimization of Multiple Responses. Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists. *Hong Kong: International Asso*, 1225-1230.

- De Figueiredo, A. K., Rodríguez, L. M., Riccobene, I. C. y Nolasco, S. M. (2014). Analysis of the Performance of a Dehulling System for Confectionary Sunflower Seeds. *Food and Nutrition Sciences*, 541-548.
- Del Castillo, E. (27 de Enero de 2006). Obtenido de Página Web de Enrique del Castillo: <http://www2.ie.psu.edu/Castillo/Personal%20Web%20Page/Castillo.htm>.
- Del Castillo, E., Montgomery, D.C., y McCarville, D. R. (1996). Modified Desirability Functions for Multiple Response Optimization. *Journal of quality technology*, 337-345.
- Derringer, G. y Suich, R. (1980). Simultaneous optimization of several response variables. *Journal of Quality Technology*, 214-219.
- Ding, R., Lin, D. K. J., y Wei, D. (2004). Dual-Response Surface Optimization: A weighted MSE. *Quality Engineering*, 377-385.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., y Rubin, D. B. (1995). *Bayesian Data Analysis*. Londres: Chapman and Hall.
- Geyer, C. J. (1992). Practical Markov Chain Monte Carlo. *Statistical Science*, 473-483.
- Gutierrez, H. y De la Vara, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*. México: Mc Graw Hill.
- Jackman, S. (2004). Bayesian Analysis for Political Research. *Annual Review of Political Science*, 483-505.
- Jhonson, M. E. (1987). *Multivariate Statistical Simulation: A Guide to Selecting and Generating Continuous Multivariate Distributions*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- John B. (2013). Application of desirability function for optimizing the performance characteristics of carbonitrided bushes. *Journal of Industrial Engineering Computations*, 305-314.
- Ko, Y. H., Kim, K. J. y Jun, C. H. (2005). A new loss function-based method for multiresponse optimization. *Journal of Quality Technology*, 50-59.
- Lecoutre, B. (2006). And if You Were a Bayesian Without Knowing it? *AIP Conference Proceedings, 26th International workshop* (págs. 15-22). Paris: American Institute of Physics.
- Lee, M. S., y Kim, K. J. (2007). Expected Desirability Function: Consideration of Both Location and Dispersion Effects in Desirability Function Approach. *Quality Technology and Quantitative Management*, 365-377.
- Lin, D. K. J. y Tu, W. (1995). Dual Response Surface Optimization. *Journal of Quality Technology*, 34-39.
- Miro-Quesada, G., Del Castillo, E., y Peterson, J. J. (2004). A Bayesian Approach for Multiple Response Surface Optimization in the Presence of Noise Variables. *Journal of Applied Statistics*, 251-270.
- Montgomery, D. C. (2005). *Diseño y Análisis de Experimentos*. México: Limusa Wiley.

- Myers, R. H., y Montgomery, D. C. (1995). Response Surface Methodology Process and Product Optimization Using Designed Experiments. *New York: Wiley Interscience*.
- Najafi, S., Salmasina, A., y Kazemzadeh, R. B. (2011). Optimization of Robust Design for Multiple Response Problem. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1566-1577.
- Ortiz, F., Simpson, J. R., Pignatiello, J. J., y Heredia-Lagner. (2004). A Genetic Algorithm Approach to Multiple-Response Optimization. *Journal of Quality Technology*, 432-450.
- Pal, S., y Gauri, S. K. (2010). Multi-Response Optimization Using Multiple Regression-Based Weighted Signal-to-Noise Ratio (MRWSN). *Quality Engineering*, 336-350.
- Peterson, J. J. (2004). A Posterior Predictive Approach to Multiple Response Surface Optimization. *Journal of Quality Technology*, 139-153.
- Plante, R. D. (2001). Process capability: a criterion for optimizing multiple response product and process design. *IIE Transactions*, 497-509.
- Pourfarzad, A., Habibi, N. M. B., Haddad, K. M. H. (2014). Characterization of fructan extracted from *Eremurus spectabilis* tubers: a comparative study on different technical conditions. *Journal of Food Scientists & Technologists*, 2657-2667.
- Retzer, J. J. (2006). The Century of Bayes. *International Journal of Market Research*, 49-59.
- Rezende, H. C. y Coelho, N. M. M. (2014). Determination of Total Arsenic and Arsenic (III) in Phosphate Fertilizers by Hydride Generation Atomic Absorption Spectrometry After Ultrasound-Assisted Extraction Based on a Control Acid Media. *Journal of AOAC International*.
- Romano, D., Varetto, M., y Vicario, G. (2004). Multiresponse Robust Design: A General. *Journal of Quality Technology*, 27-37.
- Ross, S. M. (2002). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. México, D. F.: Ed. Mc Graw Hill.
- Simsek B., Tansel Y. y Simsek E. H. (2013). A fullfactorial desing based desirability function approach for optimization of properties of C 40/50 concrete class. *Journal of Mathematical and Computational Applications*, 330-339.
- Spiegel, M. R., y Stephens, L. J. (2002). *Estadística*. México: Mc Graw Hill Interamericana.
- Taleghani, M. (2009). Important Issues in Multiple Response Optimization. *Iranian Journal of Optimization*, 230-242.
- Vera, C. L., M. De Zan, M., Cámara, M. S., y Goicoechea, H. C. (2014). Experimental design and multiple response optimization. Using the desirability function in analytical methods development. *Journal Talanta*, 123-138.
- Vining, G. G., y Myers, R. H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies: A Dual Response Approach. *Journal of Quality Technology*, 38-45.

- Withers, S. D. (2002). Quantitative methods: Bayesian Inference, Bayesian Thinking. *Progress in Human Geography*, 553-566.
- Woolley, T. W. (2004). Classical Versus Bayesian Inference: A Classroom Illustration. *Teaching statistics*, 42-45.
- Zhang, X., Lu, X., Li, S., Zhong, M., Shi, X., Luo, G. y Ding, L. (2014). Investigation of 2,4-dichlorophenoxyacetic acid adsorption onto MIEX resin: Optimization using response surface methodology. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineer*, 1835–1841.

7. Anexos

7.1 Anexos

7.1 Anexo 1

```
function [Ytilde,prob]=SimulateMultiPred(X,Y,x,noOfSimulations,low,high);
```

```
[N p]=size(X);
```

```
[N q]=size(Y);
```

```
v=N-p-q+1;
```

```
factors=x;
```

```
w=[1 factors' factors(1)*factors(2) factors(1)^2 factors(2)^2]';
```

```
Bhat=((X'*X)^(-1)*X'*Y)';
```

```
S=(Y-X*Bhat')'*(Y-X*Bhat');
```

```
H=v*S^(-1)/(1+w'*(X'*X)^(-1)*w);
```

```
u=mvnrnd(zeros(noOfSimulations,q),H^(-1));
```

```
c=chi2rnd(ones(noOfSimulations,1)*v);
```

```
mean=kron((Bhat*w)',ones(noOfSimulations,1));
```

```
Ytilde = u.*sqrt([v./c v./c])+mean;
```

```
prob=proportion(between(Ytilde(:,1),low(1),high(1)) &
```

```
between(Ytilde(:,2),low(2),high(2)));
```

```
end
```