

# Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño



Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería



## Control de Posición de un Sistema Suspendido por Cuerdas

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el  
grado de

MAESTRO EN INGENIERÍA

Presenta

**VÍCTOR DANIEL VELÁZQUEZ LOZANO**

Ensenada, Baja California, junio del 2018.

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
UNIDAD ENSENADA**

**Control de Posición de un Sistema Suspendido por Cuerdas**

**TESIS**

Que para obtener el grado de maestría en ingeniería presenta:

**Víctor Daniel Velázquez Lozano**

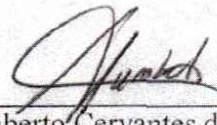
Aprobada por:



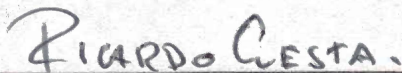
Dr. Manuel Moisés Miranda Velasco  
Director de tesis



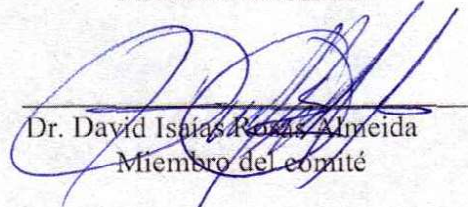
Dr. Miguel Enrique Martínez Rosas  
Miembro del comité



Dr. Humberto Cervantes de Ávila  
Miembro del comité



Dr. José Ricardo Cuesta García  
Miembro del comité



Dr. David Isaias Rojas Almeida  
Miembro del comité

Ensenada Baja California, México. Junio de 2018

**Resumen** de la tesis de **Víctor Daniel Velázquez Lozano**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN INGENIERÍA del programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería (MYDCI) de la UABC. Ensenada Baja California, México, junio del 2018.

## **Control de Posición de un Sistema Suspendido por Cuerdas**

Resumen Aprobado por:



---

Dr. Manuel Moisés Miranda Velasco  
Director de Tesis

El posicionamiento en tres dimensiones de un efector ha sido estudiado por varias generaciones, a partir de los cuales, se han obtenido múltiples desarrollos y sistemas de posicionamiento siendo uno de estos el sistema suspendido por cuerdas. Estos sistemas se obtienen grandes beneficios como: área de trabajo configurable, sistema reducido en tamaño y piezas, inocuo, entre otras, pero suelen ser sistemas diseñados para lugares grandes y suelen ser caros, es por eso que es necesario diseñar un sistema para un espacio confinado de bajo costo.

En este trabajo se presenta el análisis, modelado y simulaciones de un sistema suspendido por cuerdas concebido para posicionar un efector dentro de un espacio confinado en tres dimensiones para el caso de regulación. Se describe ampliamente el análisis matemático del sistema y las diferentes formas de aproximaciones, así como, se indican los retos involucrados este análisis.

Para resolver este trabajo se utilizaron las propiedades pitagóricas de cada cuerda para poder obtener las longitudes de las cuerdas para un punto deseado. Con las longitudes ya adquiridas, se relaciona la longitud de las cuerdas con el giro de los motores y a partir de ahí, se utilizó un control proporcional para poder manipular el sistema.

**Palabras Clave:** *Control, Sistema, Suspendido, Cuerdas*

## Dedicatoria

A mis padres quienes me apoyaron en cumplir esta meta.

A mis familiares y amigos por sus buenos deseos y apoyo durante este ciclo.

A todos aquellos que me apoyaron en lo personal y profesional para concluir esta tesis.

Para ellos es esta dedicatoria de tesis, pues es a ellos a quienes les agradezco su apoyo, y la resistencia existe.

## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento:

A mis sinodales Dr. Miguel Enrique Martínez Rosas, Dr. Humberto Cervantes de Ávila, Dr. José Ricardo Cuesta García y Dr. David Isaias Rosas Almeida y en especial a mí asesor de tesis el Dr. Manuel Moisés Miranda Velasco por sus consejos, críticas y apoyo durante el desarrollo de esta tesis.

A mis compañeros y amigos: por su amistad, apoyo y amenos momentos durante las jornadas de trabajo.

Al personal de la institución por sus atenciones, tiempo, amabilidad y disposición para ayudarme.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado y a la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) por las facilidades otorgadas para la realización de éste trabajo.

# Índice general

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                               | <b>2</b>  |
| 1.1. Motivación . . . . .                            | 3         |
| 1.2. Propuesta . . . . .                             | 4         |
| 1.2.1. Objetivos General . . . . .                   | 4         |
| 1.2.2. Objetivos específicos . . . . .               | 5         |
| 1.3. Antecedentes . . . . .                          | 5         |
| 1.3.1. Cuerdas y Poleas . . . . .                    | 5         |
| 1.3.2. Sistemas suspendido por cuerdas . . . . .     | 6         |
| 1.3.3. Antecedentes Internos . . . . .               | 7         |
| 1.4. Orden del documento . . . . .                   | 8         |
| <b>2. Marco teórico</b>                              | <b>10</b> |
| 2.1. Modelos Suspendidos Simples . . . . .           | 10        |
| 2.2. Modelo Suspendido Doble . . . . .               | 12        |
| 2.3. Modelo Suspendido Paralelo . . . . .            | 14        |
| 2.4. Comparación . . . . .                           | 15        |
| <b>3. Diseño</b>                                     | <b>16</b> |
| 3.1. Introducción . . . . .                          | 16        |
| 3.2. Análisis Matemático . . . . .                   | 16        |
| 3.2.1. Analisis por triángulos escalenos . . . . .   | 16        |
| 3.2.2. Análisis por triángulos rectángulos . . . . . | 19        |
| 3.3. Relación cuerda - polea . . . . .               | 21        |
| 3.3.1. Aproximación por espiral . . . . .            | 21        |
| 3.3.2. Aproximación circular . . . . .               | 22        |
| 3.3.3. Aproximación lineal . . . . .                 | 24        |
| 3.4. Cinemática Directa e Inversa . . . . .          | 24        |
| 3.5. Control . . . . .                               | 27        |
| <b>4. Resultados</b>                                 | <b>29</b> |
| 4.1. Sintonización de control . . . . .              | 29        |

|                                 |           |
|---------------------------------|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i>           | II        |
| 4.2. Simulaciones . . . . .     | 31        |
| <b>5. Conclusiones</b>          | <b>39</b> |
| 5.1. Conclusiones . . . . .     | 39        |
| 5.2. Trabajo a futuro . . . . . | 39        |

# Índice de tablas

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Ventajas del sistema suspendido por cuerdas [1]. . . . .          | 3  |
| 1.2. Clasificación de los sistemas SC. . . . .                         | 3  |
| 2.1. Tabla de comparación de sistemas suspendidos por cuerdas. . . . . | 15 |



# Índice de figuras

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Sistema de posicionamiento propuesto. . . . .                                                                                              | 4  |
| 1.2. Primer versión del sistema de adquisición de imágenes [2]. . . . .                                                                         | 7  |
| 1.3. Segunda versión del sistema de adquisición de imágenes [3]. . . . .                                                                        | 8  |
| 2.1. Skycam [4] . . . . .                                                                                                                       | 10 |
| 2.2. Sistema desarrollado en la Universidad de Delaware. . . . .                                                                                | 12 |
| 2.3. Bosquejo del sistema suspendido en conjunto de sus parametros geométricos. . . . .                                                         | 13 |
| 2.4. Sistema suspendido por cuerda paralela. . . . .                                                                                            | 14 |
| 3.1. Sistema completo visto en 2D . . . . .                                                                                                     | 17 |
| 3.2. Analisis de un solo triángulo. . . . .                                                                                                     | 18 |
| 3.3. Vista superior del sistema suspendido simple. . . . .                                                                                      | 20 |
| 3.4. Sistema rectangular en tres dimensiones . . . . .                                                                                          | 21 |
| 3.5. Esquema del sistema suspendido. . . . .                                                                                                    | 23 |
| 3.6. Esquema básico de un servomotor. . . . .                                                                                                   | 27 |
| 3.7. Esquema de control a partir de la longitud. . . . .                                                                                        | 28 |
| 3.8. Esquema de control a partir del ángulo. . . . .                                                                                            | 28 |
| 4.1. Lugar de las raíces . . . . .                                                                                                              | 30 |
| 4.2. Lugar de las raíces . . . . .                                                                                                              | 31 |
| 4.3. Desplazamiento al punto (0,9, 0,9, 0,2) por retroalimentación de la longitud de la cuerda. . . . .                                         | 32 |
| 4.4. Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de longitud . . .                                                                     | 33 |
| 4.5. Desplazamiento al punto (0,9, 0,9, 0,2) por retroalimentación por ángulo. . .                                                              | 33 |
| 4.6. Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de ángulo . . . .                                                                     | 34 |
| 4.7. Desplazamiento al punto (0,9, 0,9, 0,2) por retroalimentación de longitud con $K_p = 50$ . . . . .                                         | 35 |
| 4.8. Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de longitud con $K_p = 50$ . . . . .                                                  | 36 |
| 4.9. Comparación de simulaciones por retroalimentación de longitud, retroalimentación de ángulo y retroalimentación de longitud cuadrática. . . | 37 |

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| <i>ÍNDICE DE FIGURAS</i>                                 | 1  |
| 4.10. Desplazamiento al punto $(0,6,0,75,0,5)$ . . . . . | 37 |
| 4.11. Desplazamiento al punto $(0,1,0,1,0,1)$ . . . . .  | 38 |

# Capítulo 1

## Introducción

En las últimas décadas, los avances tecnológicos han permitido una importante mejora en los dispositivos actuadores, los cuales tienen un papel importante en diversas aplicaciones y procesos. Dentro de los actuadores se destacan los manipuladores y posicionadores los cuales han tomado relevancia como tema de investigación debido a las necesidades de la industria actual, dentro de los manipuladores se encuentran los sistemas *suspendidos por cables* (SC), los cuales han sido investigados ampliamente debido a que dichos sistemas ofrecen una serie de ventajas sobre los sistemas con estructuras rígidas, algunas de las mas importantes se muestran en la Tabla 1.1. Considerando que una de sus principales ventajas es su menor tamaño y peso por el hecho de prescindir de una estructura rígida para posicionar el efector final. Los sistemas SC han sido utilizados mayormente en lugares que requieren un área de trabajo grande como los aplicados en el radio telescopio de Arecibo en Puerto Rico [5] o los estadios [4], donde posicionadores rígidos no pueden ser utilizados. Sin embargo, estos sistemas son considerados complejos, la complejidad del sistema radica en las propiedades de las cuerdas, las cuales presentan una gran resistencia a la tensión provocada por una carga, pero presentan una flexibilidad extrema ante la compresión (tensión positiva hacia la cuerda) ocasionando efectos no deseados. Una desventaja adicional del uso de cuerdas radica en su susceptibilidad a fenómenos internos, deformaciones en las cuerdas por sobrestiramiento o por el desgaste del material de elaboración, y externos a la cuerda, el clima, viento, humedad, entre otras, efectos que no se presentan en las estructuras rígidas.

Los sistemas SC se clasifican de la misma forma que los sistemas mecánicos convencionales, dicha clasificación se realiza mediante la cantidad de grados de libertad  $n$  y la cantidad de cuerdas  $m$  [6], esta clasificación se puede observar en el Tabla 1.2, donde se observa la importancia de la cantidad de cuerdas para el análisis estático y dinámico del sistema. Consecuentemente, las ecuaciones cinemáticas del sistema se vuelven más complejas entre mayor cantidad de cuerdas incluya el sistema.

|                       | Ventajas                     |
|-----------------------|------------------------------|
| Inocuo/limpio         | Área de trabajo configurable |
| No invasivo           | Pocas piezas móviles         |
| Efecto final variable | Transportable                |
| Económico             | Reconfigurable               |
| Ecológico             |                              |

Tabla 1.1: Ventajas del sistema suspendido por cuerdas [1].

|                           | Clasificación  |
|---------------------------|----------------|
| Subactuado ó Incompleto   | $m < n$        |
| Actuado ó Completo        | $m = n$        |
| Sobreactuado ó Redundante | $m \geq n + 1$ |

Tabla 1.2: Clasificación de los sistemas SC.

## 1.1. Motivación

Este trabajo surge entorno a las necesidades de los diversos proyectos que se llevan a cabo en el cuerpo académico de Comunicaciones e Instrumentación Electrónica (CACIE) de la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño (FIAD) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), las cuales están relacionadas con procesos agrícolas y acuícolas. Durante las investigaciones realizadas se ha detectado la necesidad de contar con un sistema que permita una adecuada adquisición de imágenes para los estudios realizados. Diversos sistemas han sido desarrollados para dicha tarea, sin embargo no se ha llegado al sistema deseado. Por lo que, tomando en cuenta las características de un sistema suspendido por cuerdas consideramos que es adecuado para cubrir estas necesidades.

El desarrollo de un sistema SC para el CACIE al ser un sistema no invasivo se considera una solución adecuada para la captura de imágenes, adicional a esto, se requiere que el sistema cumpla de los siguientes objetivos de control de posición:

- **Regulación**, Este tipo de sistemas permite el traslado de un efector de un punto inicial a un punto final, sin considerar la velocidad, tiempo y trayectoria. Estos sistemas son utilizados para adquisición de imágenes en muestras estáticas.
- **Seguimiento**, Este tipo de sistema es totalmente controlado, es decir, permite el traslado del efector de un punto inicial a un punto final a partir de una trayectoria, en un determinado tiempo o a cierta velocidad. Estos sistemas son utilizados en adquisición de video o imágenes de alta velocidad.

Dichos metodos permitirán utilizar una cámara de baja resolución para hacer un barrido en la zona de muestra, con el cual se podrá obtener una cantidad suficiente de información, equivalente a la obtenida por una cámara de alta gama a un costo menor. Debido a que las investigaciones llevadas a cabo requieren de un conjunto de datos obtenidos de forma uniforme para un correcto análisis, se espera que con el sistema SC la obtención de uniformidad al poder mantener el foco deseado de la cámara y manipulando solamente la posición de esta. Complementando a lo anterior, tambien se pueden obtener imágenes estereoscópicas con una sola cámara en el caso de los sujetos de prueba analizados sean de lento crecimiento.

## 1.2. Propuesta

El sistema propuesto en este trabajo se muestra en la Figura 1.1, se basa en la flexibilidad de poder posicionar y manipular mediante los motores  $\gamma$  una cámara de menor tamaño  $\lambda$  por medio de cuerdas  $\kappa$  y sin necesidad de modificar la instalación la “Cámara de condiciones controladas” [7].

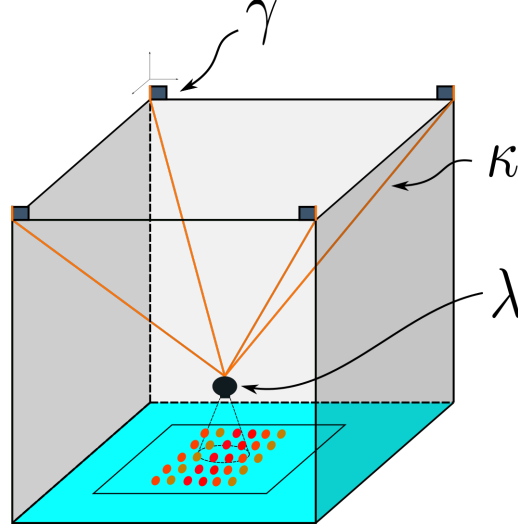


Figura 1.1: Sistema de posicionamiento propuesto.

### 1.2.1. Objetivos General

Controlar la posición de un efector final por medio de un sistema suspendido por cables (SC), en espacio reducido de trabajo de tres dimensiones.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Investigar los modelos de posicionamientos existentes y seleccionar el más adecuado.
- Desarrollar el análisis matemático de un Sistema posicionador suspendido por cuerdas
- Investigar los algoritmos de control para los sistemas de posicionamiento.

## 1.3. Antecedentes

En esta sección se mostrará la historia de los sistemas de cuerdas, así como también su desarrollo a lo largo del último par de décadas. Además, se presentarán los antecedentes internos que motivan esta investigación.

### 1.3.1. Cuerdas y Poleas

La cuerda es una de las herramientas mas antigua del ser humano y que sigue siendo de gran utilidad en la sociedad moderna. Debido a que los materiales de las primeras cuerdas eran de origen perecederos (cabellos, fibras, entre otras) no hay ejemplares que puedan determinar el tiempo de origen de las cuerdas, por lo que, no es hasta la epoca del antiguo Egipto en el 2600 a.C que se encuentra el primer registro de la elaboración y uso de cuerdas, siendo el papiro (*Cyperus papyrus*) el principal material usado para su elaboración. Sus usos eran variados y comprendían diferentes campos como el medicinal para curar dolores de cabeza, el marítimo para asegurar los barcos a los puertos, en la agricultura para trabajar con el ganado o durante la elaboración de edificaciones [8].

Una polea es una máquina simple, la cual consta de una rueda giratoria anclada, la cual tiene una hendidura por la que se desplaza una cuerda o una cadena. Gracias a este mecanismo se obtiene un cambio en la dirección de la fuerza manteniendo el valor de la fuerza aplicada y resultante iguales. Siguiendo este principio, al anclar un extremo de la cuerda y dejando la rueda suelta con una carga, se obtiene un mecanismo conocido como “polea simple móvil”, el cual obtiene una ventaja mecánica igual a la mitad de la fuerza aplicada. A partir de estos mecanismo, se obtiene el polipasto, el cual es una combinación de ambos principios, teniendo dos grupos, uno fijo y uno móvil al cual se le añade la carga. Dependiendo del número de poleas que integra el sistema puede calcularse la ventaja mecánica obtenida.

El primer registro histórico del uso de un sistema de poleas se encuentra en la obra “Vidas paralelas” de Plutarco aproximadamente del año 100 a.C., la cual narra la aneodota de Arquímedes, el cual probó la eficacia y simpleza del sistema de poleas mediante el desplazamiento de un barco repleto de pasajeros y carga con mínimo esfuerzo al rey

Hierón de Siracusa, a partir de este registro, diversas variaciones se han presentado facilitando el trabajo realizado por el hombre para desplazar objetos [9].

En la actualidad, la maquinaria pesada puede sustituir el trabajo que los sistemas de poleas hacían antes, sin embargo, no se ha abandonado del todo esta antigua técnica. Diversas maquinarias mezclan tecnología moderna con técnicas ya conocidas para mejorar el desempeño de la maquinaria, así como disminuir costos que con otros mecanismos no sería tan sencillo.

### 1.3.2. Sistemas suspendido por cuerdas

En 1939 J. Bossart patentó el primer sistema de suspensión por cuerdas para un montaje de luces y cámaras, el cual permitía que el portaobjetos, que cargaba las luces o las cámaras, estuviera estable ante el movimiento del escenario, así como también permitía el movimiento horizontal o vertical. Los movimientos verticales del portaobjetos se realizaban enrollando las cuerdas para ascender y desenrollando las cuerdas para descender, mientras que los movimientos horizontales eran mediante el desplazamiento de la estructura sobre de una viga que sostenía el sistema completo, el cual permitía un movimiento completo de dos dimensiones [10]. Diversos sistemas se desarrollaron a partir del sistema de Bossart, hasta que en 1986 Garret W. Brown desarrollo para la industria cinematografica un novedoso sistema de suspensión por medio de cuerdas [11, 12] el cual permite un completo movimiento de tres dimensiones, actualmente se le conoce como *Skycam* en la industria del entretenimiento.

En 1992, la division de sistemas roboticos dirigida por James Albus del Instituto Nacional de Estandares y Tecnología (NIST) diseño el NIST ROBOCRANE [13], basado de la plataforma de Stewart, dicho desarrollo podia controlar su posicion, velocidad y le brindaba al efector final seis grados de libertad (traslación y rotación de los ejes perpendiculares). A partir de éste desarrollo diversos sistemas han sido diseñados [14, 15] y analizados [16, 17].

En 1993 Zhang et al. presenta una evaluación de factibilidad de trayectorias de desplazamiento de un robot, la cual es necesaria para determinar si dentro de un área de trabajo determinada y las características del robot permitirán dichas trayectorias. Dicha evaluación se basa en discriminación polinomial y dado un conjunto de ecuaciones algebraicas que permiten evaluar la factibilidad de las trayectorias eficientemente sin necesidad del uso de cinemática inversa. [18].

En 1995 Kawamura et al. describe el desarrollo de un robot de velocidad ultra rápida llamado FALCON (FAst Load CONveyance) el cual se basa en un sistema de manipulación paralela actuada por cuerdas. El sistema alcanza velocidades de  $13m/s$  y aceleraciones de hasta  $43G$ , mediante el mecanismo de las cuerdas y utilizando elasticidad no lineal se logra el control de la fuerza interna entre las cuerdas para reducir la vibración [19].

En 1997 Rodney G. Roberts examina algunos problemas de la cinemática inversa

y estática de un robot suspendido por cuerdas, así como también presenta un estudio de las limitaciones en el área de trabajo inherente que resulta del hecho que el robot es actuado por cables [20].

### 1.3.3. Antecedentes Internos

En los últimos años, el cuerpo académico CACIE se ha enfocado primordialmente en la obtención de parámetros externos e internos de productos agrícolas y acuícolas mediante procesamiento digital de imágenes, algunos de los trabajos reportados son: el análisis de color de chiles habaneros [2], fotometría aplicada a la madurez de uvas [3] o sistemas de conteo de larvas [21].

En el transcurso de dichas investigaciones, los sistemas para obtener imágenes se han ajustado a las necesidades de la investigación en progreso, dichas variaciones en los sistemas no han permitido una adquisición uniforme de información entre sistemas pero ha permitido variar la cantidad o tipos de muestras. Posteriormente, se desarrolló una estructura denominada “Cámara de condiciones controladas” [7], el cual consiste de una estructura rígida con aislante con un volumen de  $1m^3$ , que controla ciertos parámetros ambientales internos de acuerdo a los requerimientos del experimento. Sin embargo, dicha estructura al ser solo un sistema de control de parámetros, no cuenta con el sistema de obtención de datos necesarios para los experimentos y que estos se realicen de forma más controlada.

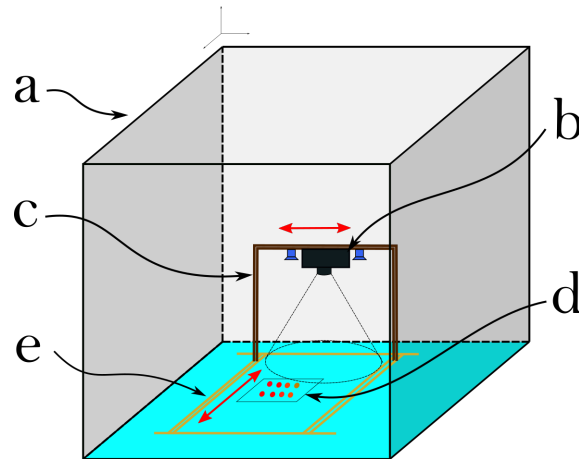


Figura 1.2: Primer versión del sistema de adquisición de imágenes [2].

En la Figura 1.2 se observa el primer mecanismo implementado, el cual consistía de una estructura rígida de dos grados de libertad puesta en una “Cámara de condiciones controladas” (a). El sistema de adquisición contaba con una base (e), la cual permitía un desplazamiento horizontal de la estructura (c), que sostenía la cámara (b), y un sistema de iluminación incandescente, mientras que la estructura (c), permitía un



desplazamiento vertical de la cámara. Las muestras ( $d$ ), eran colocadas dentro del área de muestreo de la montura.

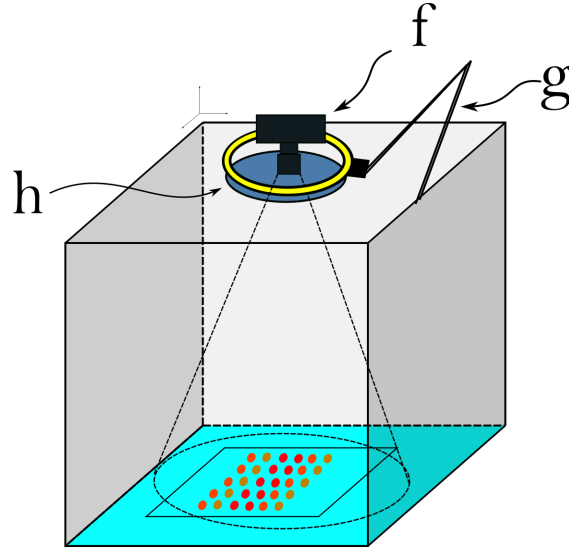


Figura 1.3: Segunda versión del sistema de adquisición de imágenes [3].

La segunda versión del sistema de adquisición de imágenes es presentada en la Figura 1.3, en el cual se eliminó la estructura rígida ( $e$ ) colocada dentro la “Cámara de condiciones controladas” y se instaló una base, el cual funciona como porta cámara ( $g$ ) e integra el sistema de iluminación ( $h$ ). La cámara al estar alejada de la muestra requiere de una iluminación apropiada para evitar problemas como sombras, colores falsos o sobreexposición, así como la cámara no puede tener el mismo enfoque entre diferentes muestras, por lo que debe de calibrarse el sistema mediante la integración de lentes. Sin embargo, al hacer una perforación en la tapa de la Cámara de condiciones controladas el sistema no presenta un aislamiento respecto al ambiente, situación que altera el experimento.

De los sistemas de adquisición construidos por el CACIE, se observa la necesidad de un sistema diferente de obtención de imágenes para un espacio confinado, por lo que se propone el sistema SC para solventar esta problemática.

## 1.4. Orden del documento

El contenido de este documento tiene el siguiente orden, en el capítulo 2 se mostrarán tres modelos diferentes desarrollados, un pequeño análisis y comparación de los modelos en base a la necesidad de esta investigación. En el capítulo 3 se mostrarán diferentes desarrollos matemáticos de una aproximación a un sistema SC. En el capítulo 4 se mostrará el desarrollo de la etapa de control diseñado para controlar el sistema

SC propuesto y se presentarán resultados de simulaciones hechas con las propiedades cinemáticas y el control propuesto, finalmente, en el capítulo 5 se presentarán las conclusiones finales de esta investigación.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Modelos Suspendidos Simples

Los sistemas suspendidos por cables han sido desarrollado por sus multiples beneficios al poder maniobrar el efector final sin una estructura de gran tamaño. Además, de una línea de investigación por las características de estos sistemas. Dichos sistemas se encuentran comercialmente, el sistema Skycam que se muestra en la Figura 2.1. Este sistema normalmente se utiliza en la industria cinematográfica y más conocido en eventos deportivos. En este último se ubica una cámara dentro de un área de interés, regularmente una cancha, por lo que el área de interés es de mucho menor tamaño que la infraestructura, generalmente un estadio. Debido a que el origen de este desarrollo se encuentra en una patente, no se obtiene un análisis o modelo matemático. Sin embargo, se puede analizar de la siguiente forma, el sistema utiliza cuatro cuerdas que interconectan al efector final con los motores ubicados en cada extremo de la infraestructura o área de entretenimiento, permitiendo un desplazamiento dentro del área. [12].



Figura 2.1: Skycam [4]

En el año 2008, Vladimir Gordievsky del Instituto Tecnológico de Massachusetts

[1] presenta un sistema suspendido por cables para operar una cámara en un ambiente industrial que a diferencia del anterior, su área de trabajo es triangular al reducir una cuerda.

Dicho trabajo primeramente analiza cada cuerda como un ente singular a partir de la ley pitagórica para obtener su longitud, la cual esta dada por

$$L_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

en donde  $L_i$  representa la longitud de la cuerda deseada,  $x_i, y_i, z_i$  la posición de los motores y  $x, y, z$  una ubicación en el espacio del sistema. Al ser una representación triangular, se ubican los siguientes puntos en el espacio correspondiente a cada motor

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0), \quad (2)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (a, 0, 0), \quad (3)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (c \cdot \cos(\alpha), c \cdot \sin(\alpha), 0), \quad (4)$$

donde  $\alpha$  corresponde al ángulo entre los lados  $a$  y  $c$  del triángulo. Posteriormente, se obtienen los valores de las coordenadas con respecto las longitudes de las cuerdas sustituyendo las expresiones (2), (3) y (4) respecto a 1 respectivamente

$$x = \frac{1}{2a} (L_1^2 + a^2 - L_2^2), \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{2c \cdot \sin(\alpha)} \left( L_1^2 - L_3^2 - \frac{c \cdot \cos(\alpha)}{a} (L_1^2 + a^2 - L_2^2) + c^2 \right), \quad (6)$$

$$z = -\sqrt{L_1^2 - x^2 - y^2}. \quad (7)$$

Posteriormente, presentó la matriz Jacobiana para relacionar la posición del efector final directamente con el desplazamiento del motor y con esto obtener el control de la velocidad. Dicha matriz se obtiene sumando las derivadas parciales de (5), (6), (7) con respecto a las coordenadas generalizadas, obteniendo la matriz 8

$$J = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{a} & -\frac{L_2}{a} & 0 \\ \frac{L_1}{c \sin \alpha} \left( 1 - \frac{c \cos(\alpha)}{a} \right) & \frac{L_2 \cos(\alpha)}{a \sin(\alpha)} & -\frac{L_3}{c \sin(\alpha)} \\ \frac{\partial z}{\partial L_1} & \frac{\partial z}{\partial L_2} & \frac{\partial z}{\partial L_3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Finalmente, presentó las ecuaciones dinámicas utilizando la formula Lagrangiana, en donde la expresión de la energía cinética esta dada por

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (9)$$

donde  $m$  es la masa del efector final y las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  son sus componentes. La expresión de la energía potencial esta dada por

$$U = m \cdot g \cdot z, \quad (10)$$

donde  $g$  corresponde al par gravitacional, y finalmente, la expresión de el Lagrangiano

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{L}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial L_i} + \frac{\partial U}{\partial L_i}. \quad (11)$$

## 2.2. Modelo Suspendido Doble

El grupo de investigación del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Delaware dirigida por el Dr. S. K. Agrawal presenta un sistema suspendido por cuerdas paralelas, el cual sigue el mismo concepto que el NIST ROBOCRANE [13], como se puede apreciar en la Figura 2.2. El prisma es sujetado por dos cuerdas en cada lado permitiendo que el efector final tenga seis grados de libertad (guiñada, cabeceo, alabeo, y la traslación en los tres ejes perpendiculares) [22].

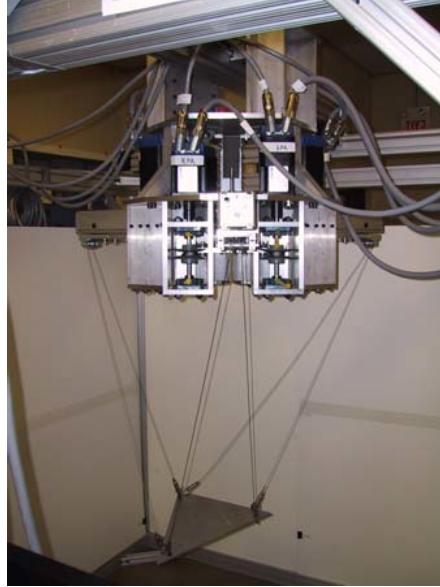


Figura 2.2: Sistema desarrollado en la Universidad de Delaware.

Las investigaciones presentan la cinemática del efector final, Figura 2.3, en el cual considera las coordenadas inerciales del prisma fijo  $F_N$  con una base vectorial  $n_1, n_2, n_3$  y el prisma móvil  $F_B$  con una base vectorial  $b_1, b_2, b_3$  el cual cuenta con una espacio

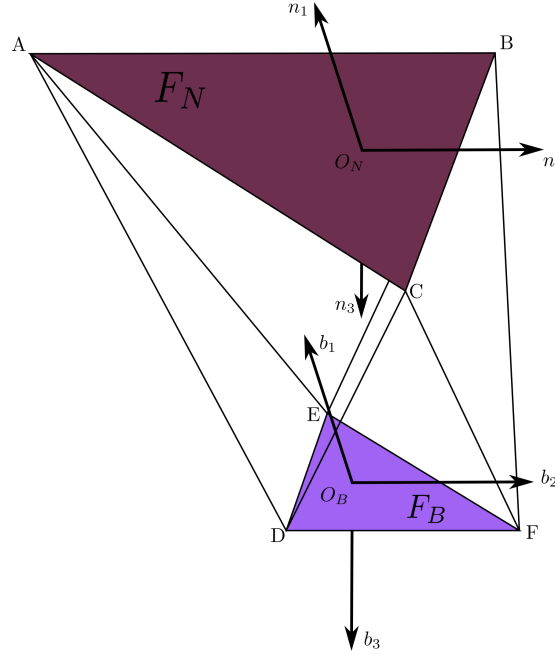


Figura 2.3: Bosquejo del sistema suspendido en conjunto de sus parametros geométricos.

rotacional en tres dimensiones dada por  $\psi$  sobre  $n_1$ ,  $\theta$  sobre  $n_2$ , y  $\phi$  sobre  $n_3$ .

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = R(\psi, \theta, \phi) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

en donde,

$$R = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi & C\psi S\theta C\phi + S\phi S\psi \\ C\theta C\phi & S\psi S\theta C\phi + S\phi C\psi & C\psi S\theta C\phi - S\phi S\psi \\ -S\theta & S\psi C\theta & C\psi C\theta \end{bmatrix}, \quad (13)$$

en donde  $C(*)$  representa  $\cos(*)$  y  $S(*)$  a  $\sin(*)$ .

La posición de  $O_B$  en  $F_N$  se describe por el conjunto de variables  $(x_m, y_m, z_m)^T$ , por lo que se denota que  $\mathbf{x} = (x_m, y_m, z_m, \psi, \theta, \phi)^T$ . Si la velocidad angular de  $F_B$  en  $F_N$  es  $\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3$ ,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S\theta \\ 0 & C\psi & S\psi C\theta \\ 0 & -S\psi & C\psi C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad x = P\dot{O}. \quad (14)$$

El desarrollo continua presentando la cinemática del sistema, las ecuaciones dinámicas del movimiento y el diseño de los controladores. Diversas investigaciones y trabajos se han realizado a partir de este trabajo debido al diseño de nuevos controladores [22, 23, 24, 25].

### 2.3. Modelo Suspendido Paralelo

El sistema suspendido por cable paralelo es una combinación de los dos modelos anteriores, obteniendo un sistemas más complejo que el de suspensión simple, pero con mayores libertades que el suspendido paralelo, dicho sistema se puede observar en la Figura 2.4. El sistema presentado a continuación elaborado por Mirjana Filipovic del Mihajlo Pupin Institute y Ana Djuric de la Wayne State University, el cual se compone de un sistema de 3 motores y dos cuerdas, que a diferencia de los modelos anteriores que requerían de un motor por cuerda [26].

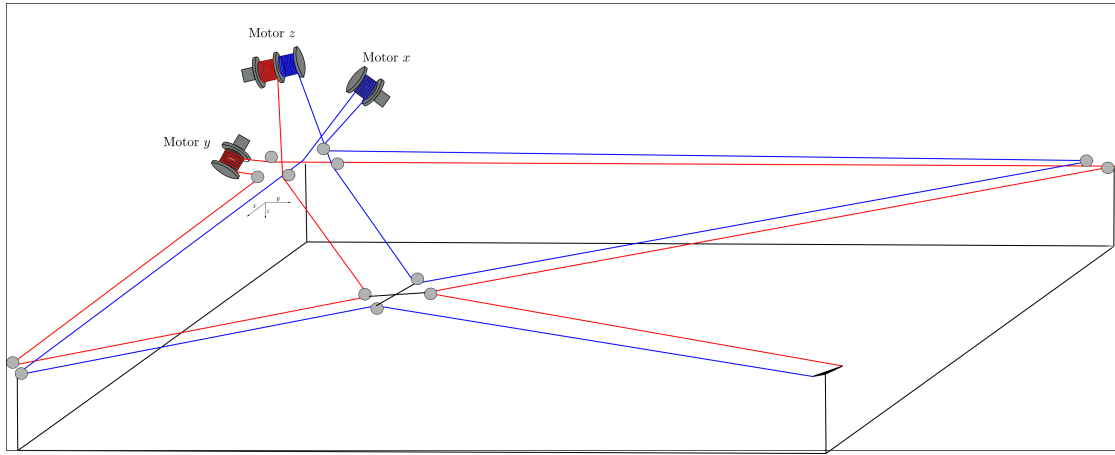


Figura 2.4: Sistema suspendido por cuerda paralela.

El sistema aprovecha la naturaleza de tensión de las cuerdas y de la gravedad para poder manipular el efector final, esto se logra anclando las dos cuerdas en una esquina y posicionando los motores en la contraesquina de la estructura. Las cuerdas entrelazan el efector final de una manera que ambas cuerdas estan paralelas entre si, cada cuerda es enredada en un carrete más no fija en este, permitiendo que al girar el carrete con el motor, la cuerda se enrolle en el carrete de un lado al mismo tiempo que permite que se desenrolle del otro lado, finalmente, el extremo final de las cuerdas se conectan a un par de carretes que estan conectados entre sí y el tercer motor. Sincronizando los primeros dos carretes se obtiene el movimiento en el plano X-Y, mientras que el tercer motor permite el movimiento en Z con la accion de enrollar y desenrollar.

Como se menciono anteriormente, este sistema combina los dos modelos anteriores, por lo que el análisis comienza con la ley pitagórica, sin embargo, esta vez no se compararan el conjunto de componentes al mismo tiempo, sino que cada componente será medida independientemente:

$$L_i = \sqrt{(d - x)^2 + (s - y)^2 + z^2}, \quad (15)$$

en donde  $d$  y  $s$  corresponden a las dimensiones del paralelepipedo con respecto al punto de origen del sistema y los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  corresponden al punto coordenado del efector final.

Si comparamos las expresiones (1) y (15) se observa que la diferencia radica en el eje  $z$ , esto se debe a que el sistema aprovecha el par gravitacional y la propiedad de las cuerdas, por lo que no requiere de un cálculo para poder diferenciarlo respecto algun punto. Después de obtener las longitudes de las cuerdas, se obtiene el sistema dinámico a partir de la velocidad y aceleración de las cuerdas con respecto a los motores. Finalmente se obtiene la cinemática del sistema mediante las ecuación Lagrangiana para obtener las características completas del sistema. De igual manera, este diseño aún tiene mucho trabajo por delante [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

## 2.4. Comparación

Observando los modelos presentados anteriormente, podemos concluir:

- Para las necesidades de esta investigación, el uso de un prisma fijo no es deseable, asi como el efector final no cumple con los parámetros deseados en este desarrollo. Por lo tanto el modelo de suspensión doble queda descartado.
- El uso de motores en las esquinas de las infraestructura y las cuerdas para posicionar el efector final cumple con los requisitos deseados, por lo que es viable el desarrollo de esta investigación con el modelo de suspensión simple o paralelo.

|                     | Inocuo | No Invasivo | Económico | Reconfigurable | Ecológico |
|---------------------|--------|-------------|-----------|----------------|-----------|
| Sistema S. Simple   | ✓      | ✓           | ✓         | ✓              | ✓         |
| Sistema S. Doble    | ✓      | ✗           | ✗         | ✗              | ✓         |
| Sistema S. Paralelo | ✓      | ✓           | ✓         | ✓              | ✓         |

Tabla 2.1: Tabla de comparación de sistemas suspendidos por cuerdas.



# Capítulo 3

## Diseño

### 3.1. Introducción

A partir de las comparaciones realizadas en la Tabla 2.1, se concluye que los sistemas que cumplen requerimientos para las investigaciones realizadas en el CACIE son los sistemas de suspensión simple y paralelo. En estos sistemas, la relación entre la posición del efector final en un espacio cartesiano y la longitud de las cuerdas es biunívoca, es decir, para un conjunto de coordenadas en el espacio cartesiano se tiene un conjunto específico de longitudes de las cuerdas, y viceversa. Por lo anterior, es posible poder posicionar un efector final mediante el sistema suspendido por cuerdas, controlando las longitudes de las cuerdas.

El modelo matemático depende de la configuración y consideraciones del sistema SC, para esta investigación se utilizará un paralelepípedo, en el cual, será colocado un motor en cada vértice superior, ya que el modelo triangular [1] presenta un área de trabajo reducida y en su análisis se trabaja con ángulos, por lo que sus operaciones tienden a ser más complejas. Una vez obtenidas la relación de la posición del efector final y la longitud de cada cuerda, se debe analizar la interacción de las longitudes de las cuerdas con los cabrestantes, los cabrestantes incorporan una etapa de control, el cual regula la longitud de las cuerdas para llegar a la posición deseada. En este capítulo se mostrará el desarrollo del análisis matemático del sistema.

### 3.2. Análisis Matemático

#### 3.2.1. Análisis por triángulos escalenos

El presente análisis es una propuesta elaborada a partir de la predominación de las identidades pitagóricas en los sistemas suspendidos por cuerda desarrollados [1],[22],[26], los sistemas SC suelen ser representados mediante un paralelepípedo, y a partir de sus

vertices se conectan las cuerdas a un punto en conjunto donde se ubica el efector final, dichas cuerdas forman un conjunto de triángulos.

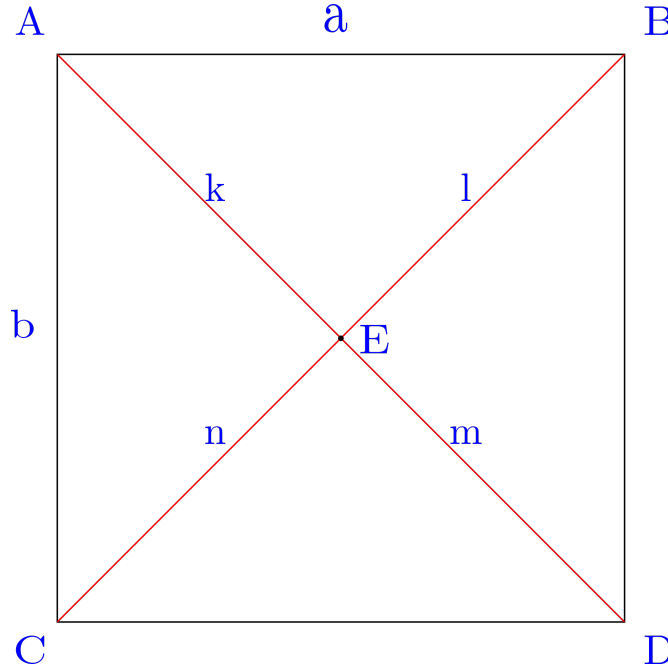


Figura 3.1: Sistema completo visto en 2D

El sistema en dos dimensiones, mostrado la Figura 3.1, tiene una estructura conformada por 4 triángulos escalenos encontrados entre sí, los cuales forman un punto de union en su vértice colindante, siendo el efector final. Si bien se observan triángulos isósceles en la Figura 3.1, lo cual corresponde a un caso ideal, ya que una vez desplazado el punto  $E$  dentro del área serán triángulos escalenos los que conformen la figura. A partir de esta analogía, se puede trabajar con los triángulos escalenos debido a que los valores de las hipotenusas son conocidos, siendo equivalentes a los lados del paralelepipedo y los catetos son representados por las longitudes de las cuerdas, las cuales son conocidas debido a la inicialización en un punto conocido del sistema.

En la Figura 3.2 se observa un fragmento del sistema completo, en el cual, los valores de  $m$  y  $n$  corresponden a las cuerdas del sistema, mientras que el valor de  $h$  equivale a la distancia que hay entre el efector final  $E$  y el limite de la estructura  $d$ . Desplazando el vertice correspondiente al efector final, las cuerdas cambian sus longitudes de tal forma que los triángulos escalenos son notables. Debido a que la posición del punto  $E$  es conocida, así como  $d$ , se deben conocer las longitudes de las cuerdas  $m$  y  $n$ , la expresión característica para este triángulo es:

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-m)(s-n)} \quad (16)$$

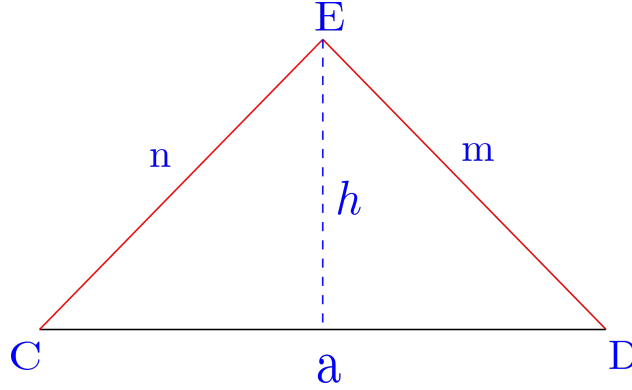


Figura 3.2: Analisis de un solo triángulo.

en donde:

$$s = \frac{a + m + n}{2} \quad (17)$$

al ser una ecuación de dos variables, se necesita de las demas expresiones del sistema para poder solucionarse. A partir de esta analogía y aplicandolo al conjunto de triángulos formados en la Figura 3.1, se obtiene la expresion correspondiente al triángulo ACE:

$$x' = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-n)(s-k)(s-b)} \quad (18)$$

en donde:

$$s = \frac{n + k + b}{2} \quad (19)$$

la expresion correspondiente al triángulo BDE:

$$b - x' = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-l)(s-m)(s-b)} \quad (20)$$

en donde:

$$s = \frac{l + m + b}{2} \quad (21)$$

la expresion correspondiente al triángulo CDE:

$$a - y' = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-m)(s-n)(s-a)} \quad (22)$$

en donde:

$$s = \frac{m + n + a}{2} \quad (23)$$

la expresion correspondiente al triángulo ABE:

$$y' = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-k)(s-l)(s-a)} \quad (24)$$

en donde:

$$s = \frac{k + l + a}{2} \quad (25)$$

A partir de las expresiones anteriores, se sustituyen las expresiones de  $s$  correspondientes obteniendo un nuevo conjunto de expresiones, la expresión correspondientes al triángulo ACE

$$\frac{4x'^2}{b} = -b^4 - k^4 - n^4 + 2b^2k^2 + 2b^2m^2 + 2k^2n^2 \quad (26)$$

al triángulo BDE

$$\frac{4x'^2 - 8ax' + 4x'^2}{2} = -b^4 - l^4 - m^4 + 2b^2l^2 + 2b^2n^2 + 2l^2m^2 \quad (27)$$

al triángulo CDE

$$\frac{4y'^2 - 8by' + 4y'^2}{2} = -a^4 - m^4 - n^4 + 2a^2m^2 + 2a^2n^2 + 2m^2n^2 \quad (28)$$

y al triángulo ABE

$$\frac{4y'^2}{a} = -a^4 - k^4 - l^4 + 2a^2k^2 + 2a^2l^2 + 2k^2l^2 \quad (29)$$

Se observa que las expresiones obtenidas no se pueden resolver mediante metodos clasicos debido a la dependencia de las variables  $k$ ,  $l$ ,  $m$  y  $n$ . Dicho esto, el analisis en tres dimensiones aumenta la complejidad de las expresiones obtenidas por lo que se concluye que el desarrollo del sistema SC por este metodo no es viable para el tiempo de investigación dado, así como, los efectos no lineales que representan estas expresiones.

### 3.2.2. Análisis por triángulos rectángulos

El modelo matemático por triángulos rectángulos es el predominante en la literatura, la gran ventaja que tiene este modelo es el análisis individual de la cuerda a diferencia del modelo de triángulos escalenos donde el analisis era en pares de cuerdas.

Utilizando el modelo en la Figura 3.1, pero utilizando triángulos rectángulos en vez de los triángulos escalenos, es más fácil obtener las longitudes de las cuerdas. Este modelo presenta propiedades trigonométricas, las cuales se pueden observar en la Figura 3.3, un ejemplo sería la longitud de la cuerda  $k$ , la cual esta dada por

$$k = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30)$$

en donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas deseadas.

Proyectando este modelo a tres dimensiones, obtenemos el sistema mostrado en la Figura 3.4, a partir de esta proyección, se tiene que si se considera un modelo utilizando la geometría de los triángulos formados de la protección de un punto del espacio

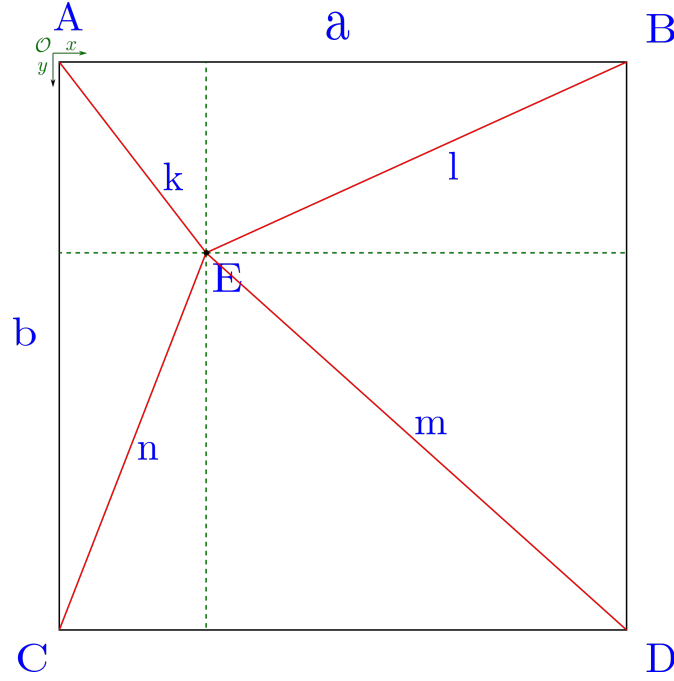


Figura 3.3: Vista superior del sistema suspendido simple.

sobre una cuerda que lo una a un vértice del espacio de trabajo se tiene, que se puede relacionar la longitud de las cuerdas con la posición en el plano cartesiano a través de las expresiones:

$$k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (31)$$

$$l = \sqrt{(a - x)^2 + y^2 + z^2} \quad (32)$$

$$m = \sqrt{x^2 + (b - y)^2 + z^2} \quad (33)$$

$$n = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + z^2} \quad (34)$$

y de forma similar se puede encontrar la relación del punto en el espacio cartesiano con las longitudes de los tensores con:

$$x = \frac{a^2 + k - l}{2a} \quad (35)$$

$$y = \frac{b^2 + k^2 - m^2}{2b} \quad (36)$$

$$z = \sqrt{k^2 - x^2 - y^2} \quad (37)$$

Es importante denotar que en las expresiones anteriores no aparece  $n$ , ya que es

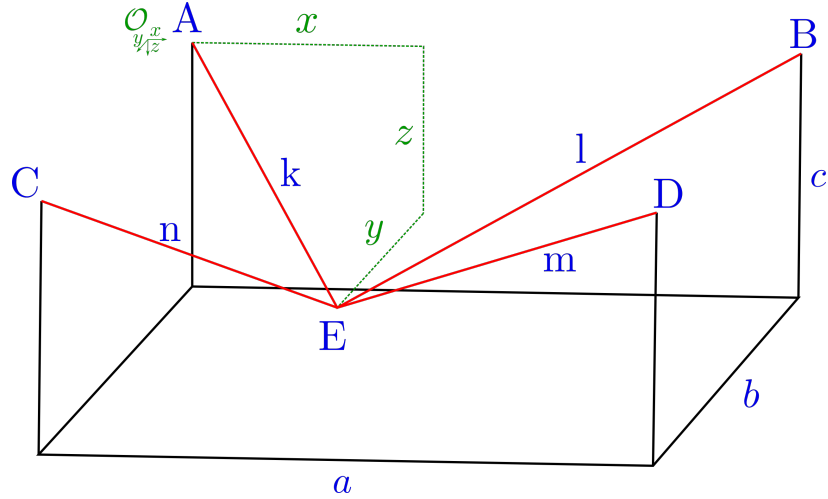


Figura 3.4: Sistema rectangular en tres dimensiones

linealmente dependiente de las longitudes restantes mediante:

$$n = \sqrt{l^2 - m^2 - k^2} \quad (38)$$

Otra cualidad que se puede denotar en las expresiones (31)-(34) es la ausencia de una diferencia en  $z$ , esto se debe a que el punto de origen cartesiano esta dado en el vértice A, y que la fuerza gravitacional atrae al efector final a la superficie terrestre, partiendo que el sistema de suspensión por cables no puede comprimir al efector final fuera del sistema, no hay una diferencia sobre  $z$ , esto se puede apreciar en la Figura 3.4.

### 3.3. Relación cuerda - polea

Como se mencionó en la sección anterior, para poder desplazar el efector final se deben de calcular las longitudes de las cuerdas, la manipulación de las longitudes de las cuerdas se realiza por medio de poleas o de un cabrestante. Sin embargo, el modelo de este sistema no es lineal, esto es debido a que las cuerdas al enrollarse/desenrollarse alrededor de las poleas circulares, cambian las dimensiones de esta, por lo que deben ser modeladas adecuadamente para poder incluirlas en el sistema de control.

#### 3.3.1. Aproximación por espiral

En esta aproximación suponemos que al enrollarse/desenrollarse la cuerda alrededor de la polea, esta se va enrollando sobre si misma presentandose una espiral. Mediante

esta comparación, se puede utilizar las expresiones conocidas de longitudes de una espiral [35], siendo:

$$L(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \theta^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} d\theta \quad (39)$$

en donde  $L$  corresponde a la longitud de la cuerda entre el ángulo  $\theta_0$  y  $\theta_1$ , resolviendo la integral tenemos:

$$L = \left(\frac{2\pi}{h}\right) + \frac{\theta_0}{2} \sqrt{1 + \theta_0^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2}| = \frac{\theta_1}{2} \sqrt{1 + \theta_1^2} + \frac{1}{2} \ln |\theta_1 + \sqrt{1 + \theta_1^2}| \quad (40)$$

para valores de  $\theta_1 \gg 1$  y  $\theta_0 = 0$ ,  $L$  se puede aproximar por la expresión:

$$L \approx \theta_1 \sqrt{\theta_1^2} + \ln |\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2}| \left(\frac{h}{4\pi}\right) \quad (41)$$

Observando la expresión (41), no es útil para nuestro caso de estudio, debido a que el sistema es para espacios reducidos o para valores de  $\theta$  pequeños, por lo que la aproximación no es válida, se ha decidido no utilizar esta aproximación.

### 3.3.2. Aproximación circular

En esta aproximación, se considera que la cuerda al ser despaizada por una polea circular en un sistema mono-vuelta, en la que la cuerda se enrolla/desenrolla sobre si misma, se propone verla como el perimetro del circulo inicial, al cual se le va añadiendo una fracción dada por el espesor de la cuerda y el ángulo recorrido. Se tiene que la relación de longitud de la cuerda con el ángulo de giro de la polea se relaciona por medio de la expresión :

$$L = r_0 \theta \pm \frac{h}{4\pi} \theta^2 \quad (42)$$

donde  $h$  es el espesor de la cuerda,  $\theta$  es el ángulo de giro de la polea (en radianes) y  $r_0$  es el radio de la polea cuando  $\theta = 0$  [35]. En cas de enrollarse se tiene la suma (+) y en caso de desenrollarse se tiene la substracción (-). Como se observa en la Figura 3.5, el signo indica si el sistema se esta enrollando o desenrollando al añadir o substraer el intervalo del giro dado por  $\frac{h}{4\pi} \theta^2$ .

Ya que se conoce la longitud  $L$  requerida para la posición deseada, se debe de obtener la  $\theta$  correspondiente, por lo que al despejar la expresión (42) se obtiene:

$$\theta = \frac{2\pi}{h} \left( -r_0 \pm \sqrt{\frac{h}{\pi} L + r_0^2} \right) \quad (43)$$

debido a que la expresión (42) es de segundo orden, se obtienen dos soluciones. Sin embargo, no se considera el que existan valores de  $L$  negativos por restricciones de diseño, entonces concluimos que los resultados deben ser reales positivos, por lo que la solución adecuada esta se muestra en la expresión (44).

$$\theta = \frac{2\pi}{h} \left( -r_0 + \sqrt{\frac{h}{\pi} L + r_0^2} \right) \quad (44)$$

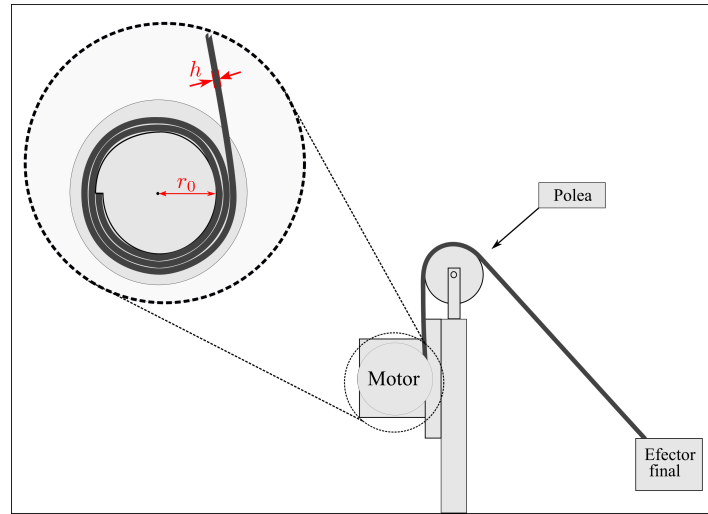


Figura 3.5: Esquema del sistema suspendido.



### 3.3.3. Aproximación lineal

A partir de la Figura (42) se puede hacer una aproximación lineal dentro de un intervalo determinado, el intervalo se obtiene a partir del número máximo de vueltas que la polea necesita dar para contener la longitud máxima de cuerda, considerando el sistema de la Figura 3.4 se tiene que la longitud máxima es la que parte del vértice inicial  $A$  al vértice opuesto, la cual es dada por:

$$L_{max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (45)$$

considerando únicamente el radio de la polea inicial y despreciando el efecto del cambio del radio por el enrollamiento/desenrollamiento de la cuerda, se tiene que el número máximo de vueltas esta dada por:

$$n_\theta = \frac{L_{max}}{2\pi r_0} \quad (46)$$

Se considera también la relación entre el radio de la polea y el ancho de la cuerda dada por la expresión:

$$v = \frac{r_0}{h} \quad (47)$$

Si  $v$  y  $n_\theta$  son lo suficientemente grandes, la longitud  $L$  dada por la expresión (42) se puede aproximar por la expresión (48).

$$L \approx r_0 \theta \quad (48)$$

## 3.4. Cinemática Directa e Inversa

La cinemática directa estudia la geometría y los aspectos de sincronización del movimiento del sistema sin una referencia a las causas que lo producen, siendo en este caso los motores. El sistema se ve como una cadena cinemática (abierta) de cuerpos rígidos interconectadas por sus uniones (revolucionadas o prismáticas). Los aspectos fundamentales por el cual la cinemática directa es necesaria, se deben a que se puede definir el área de trabajo del sistema y se puede obtener su calibración para la ejecución de tareas dada una tarea o ejecución. Dado un conjunto de datos coordinados en el espacio coordinado de las uniones  $q$  un conjunto de posiciones en el espacio del efector final  $T$ .

$$\vec{q} = T(\vec{q}) \quad (49)$$

La cinemática inversa al contrario de la directa, nos permite recuperar matemáticamente el proceso/movimiento relacionado de un objeto a partir de ciertos parametros de las uniones que proporcionan una posición deseada por cada efector final del sistema.

Dado un conjunto de datos en el espacio coordinado del efector final  $T$  se obtendrá un conjunto de coordenadas en el espacio de las uniones  $q$ .

$$T = \vec{q}(T) \quad (50)$$

Para modelar el estado dinámico del sistema a partir de su Jacobiano, se deben obtener la velocidad y la aceleración del sistema, por lo se obtienen la primera y segunda derivada de (35), (36) y (37), lo que da origen a las siguientes expresiones:

velocidad de  $x$ ,

$$\dot{x} = \frac{L_1 \dot{L}_1 - L_2 \dot{L}_2}{a} \quad (51)$$

aceleración de  $x$ ,

$$\ddot{x} = \frac{L_1 \ddot{L}_1 - L_2 \ddot{L}_2 + (\dot{L}_1)^2 - (\dot{L}_2)^2}{a} \quad (52)$$

velocidad de  $y$ ,

$$\dot{y} = \frac{L_1 \dot{L}_1 - L_2 \dot{L}_3}{b} \quad (53)$$

aceleración de  $y$ ,

$$\ddot{y} = \frac{L_1 \ddot{L}_1 - L_3 \ddot{L}_3 + (\dot{L}_1)^2 - (\dot{L}_3)^2}{b} \quad (54)$$

velocidad de  $z$ ,

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \frac{\dot{L}_1 [b^2 L_1 (L_1^2 - L_2^2) + a^2 L_1 (L_1^2 - L_3^2)]}{2a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \\ & + \frac{\dot{L}_2 [b^2 L_2 (L_2^2 - a^2 - L_1^2)]}{2a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \\ & + \frac{\dot{L}_3 [a^2 L_3 (L_3^2 - b^2 - L_1^2)]}{2a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \end{aligned} \quad (55)$$

aceleración de  $z$ , la expresión (56) se muestra en la siguiente página debido a su longitud.

Debido a la complejidad en el análisis de las ecuaciones presentadas anteriormente, y por restricciones de tiempo, se decidió utilizar un control para el caso de regulación mediante el modelo estático del sistema.

$$\begin{aligned}
\ddot{z} = & \frac{\ddot{L}_1 [L_1^3(a^2 + b^2) + a^2 L_3^2 L_1]}{a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \\
& + \frac{\ddot{L}_2 [b^2 L_2 (L_2^2 - a^2 - L_1^2)]}{a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \\
& + \frac{\ddot{L}_3 [a^2 L_3 (L_3^2 - b^2 - L_1^2)]}{a^2 b^2 \sqrt{L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2}} \\
& + \frac{4a^2 b^2 (\dot{L}_1^2 (3L_1^2 (a^2 + b^2) + a^2 L_3 - 2b^2 L_2 \dot{L}_2) + \dot{L}_2 [b^2 (3L_2^2 - a^2 - L_1^2)] + \dot{L}_3^2 (a^2 (3L_3 - b^2 - L_1^2)) - 2b L_1 \dot{L}_1 L_2 \dot{L}_2}{4a^4 b^4 \left[ L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2 \right]^{3/2}} \\
& - \frac{2\dot{L}_1 [b^2 L_1 (L_1^2 - L_2^2) + a^2 L_1 (L_1^2 - L_3^2)] + \dot{L}_2 [b^2 L_2 (L_2^2 - a^2 - L_1^2)] + \dot{L}_3^2 [a^2 L_3 (L_3^2 - b^2 - L_1^2)]^2}{4a^4 b^4 \left[ L_1^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + L_1 - L_3}{2b}\right)^2 \right]^{3/2}}
\end{aligned} \tag{56}$$

### 3.5. Control

El objetivo del caso de regulación es que el efector final se desplace de un punto inicial ( $O$ ) a un punto ( $P$ ), sin considerar la trayectoria o el tiempo. Para que el algoritmo de control realice su trabajo, transformamos el punto  $P$  dentro del plano cartesiano a una referencia en termino de las longitudes de las cuerdas, dado que la relación entre la posición en el plano cartesiano y las longitudes de las cuerdas es biunívoca, para un punto específico en el espacio cartesiano le corresponderá un conjunto específico de longitudes.

Dado que para llegar a un punto en el espacio basta garantizar que la longitud de las cuerdas lleguen a un valor específico, este trabajo propone el uso de un servomotor, donde la transmisión de polea-cuerda permitira convertir el giro del motor en un desplazamiento de la longitud de la cuerda. Como en el caso de regulación no se considera la trayectoria o el tiempo, se puede controlar de forma independiente los servomotores utilizados en cada vértice superior. Esto reduce la complejidad del esquema de control al simplemente controlar cada servomotor por medio de un control proporcional, el cual es estudiado en la literatura del control clásico [36].

Un servomotor se compone de un motor, una transmisión y de un lazo de control proporcional retroalimentado como se puede observar en la Figura 3.6.

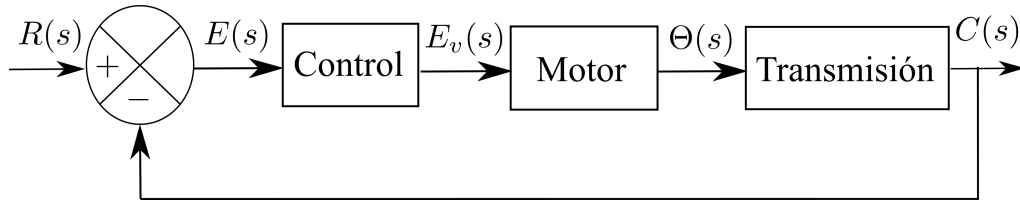


Figura 3.6: Esquema básico de un servomotor.

A partir del esquema mostrado, la función de transferencia básica tiene la siguiente forma:

$$\frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_o s + b_o) + K_2 K_3 s} \quad (57)$$

Dada la naturaleza lineal del sistema, se propone usar la expresion (48) para modelar la transmisión, por lo que la función de transferencia es:

$$\frac{C(s)}{\Theta(s)} = r_0 \quad (58)$$

Para el control proporcional se tiene:

$$\frac{E_v(s)}{E(s)} = K_p \quad (59)$$

de las expresiones (57), (58) y (59), se tiene que la función de transferencia en lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{E_v(s)}{E(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{C(s)}{\Theta(s)} = \frac{K_p r_0 K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_o s + b_o) + K_2 K_3 s} \quad (60)$$

obteniendo el control deseado,

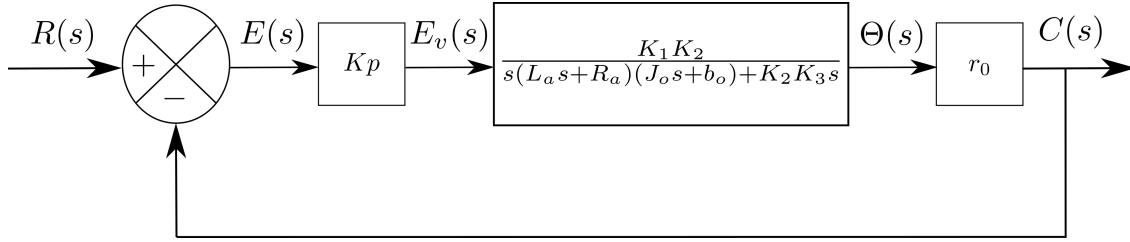


Figura 3.7: Esquema de control a partir de la longitud.

Para el caso de control por medio de ángulos, se utiliza la expresión (44), a partir del control del ángulo de rotación del motor no se requiere de una transmisión. La función de transferencia de lazo abierto se aprecia en la expresión (61) y su esquema en la Figura 3.8.

$$G(s) = \frac{E_v(s)}{E(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_p K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_o s + b_o) + K_2 K_3 s} \quad (61)$$

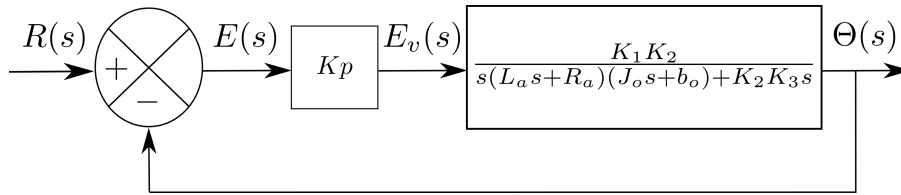


Figura 3.8: Esquema de control a partir del ángulo.

A partir de los modelos de control mostrados en la Figura 3.7 y la Figura 3.8, obtenemos dos esquemas de control que pueden ser utilizados a partir de la referencia que más nos convenga, ya sea a partir de la longitud de la cuerda para el caso lineal, o del giro del motor a partir del ángulo de este. También es necesario conocer los valores de los parámetros del sistema para la selección de la ganancia  $K_p$ , esto se puede realizar con herramientas de teoría de control clásico como el lugar de las raíces. Sin embargo, se espera que al usar los parámetros de un sistema práctico se encuentre un valor de  $K_p$  que garantice el objetivo de control.

# Capítulo 4

## Resultados

En el laboratorio de CACIE se cuenta con una “Cámara de condiciones controladas” [7] en la cual se desea llevar a cabo adquisición de imágenes de forma controlada, por lo que a partir de la investigación realizada, el sistema suspendido por cuerdas (SC) es una herramienta apropiada. Sin embargo, debido a las restricciones de tiempo para realizar este trabajo de maestría no se realizó un sistema físico para probar el trabajo realizado, por lo que los resultados presentados en este capítulo corresponde a simulaciones numéricas.

### 4.1. Sintonización de control

Para los parámetros en las simulaciones realizadas se utilizaron distintos materiales encontrados en el laboratorio con las cuales se consideran cercanos al prototipo físico. Los parámetros considerados son: una cuerda plástica de nylon con un grosor de  $h = 1mm$ , un carrete con radio  $r_0 = 3cm$  y un espacio de trabajo de  $1m^3$ . Dada esta información, se tiene que la distancia máxima de cuerda, dada por la expresión (42), es

$$L_{max} = \sqrt{3} \approx 1,732m. \quad (62)$$

La ganancia de  $K_p$  debe ser calculada como primer paso para aplicar el esquema, esta se obtiene a partir del método del lugar geométrico de las raíces, la cual es una técnica gráfica para investigar los efectos de la variación de un parámetro del sistema sobre la ubicación de los polos en lazo cerrado.

Para la retroalimentación de la longitud de la cuerda, se utiliza una transmisión dada por la expresión (58)

$$\frac{C(s)}{\Theta(s)} = r_0 = 0,03m \quad (63)$$

y se utilizó un servomotor LEGO [37], el cual tiene una función de transferencia

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{5036}{S^3 + 35,98s^2 + 623,4s} \quad (64)$$

y una ganancia de  $K_p = 1$ , sustituyendo los parámetros anteriores en la expresión (60), se tiene que la función de transferencia en lazo abierto es.

$$G(s) = \frac{E_v(s)}{E(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{C(s)}{\Theta(s)} = \frac{1 * 0,03 * 5036}{s^3 + 35,98s^2 + 623,4s}. \quad (65)$$

Mediante el uso del software MATLAB, se aplica el lugar de las raíces a la expresion (65) para obtener el rango de ganancias mostrado en la Figura 4.1.

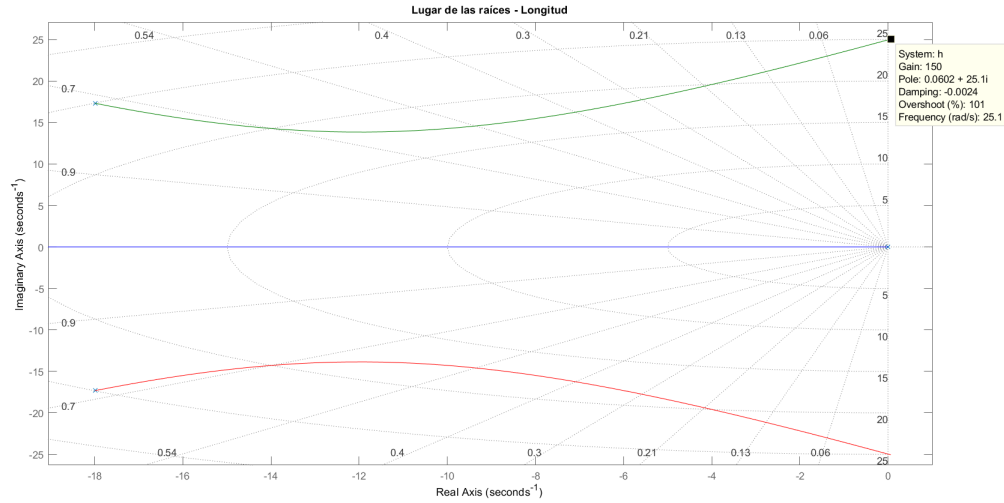


Figura 4.1: Lugar de las raíces .

En la aproximación por ángulo la transmisión es directa, esto quiere decir que el ángulo del motor actua directamente sobre el efector por lo que la tranmisión queda expresada de la siguiente manera,

$$\frac{C(s)}{\Theta(s)} = 1 \quad (66)$$

Ya que se utiliza el mismo motor que en el ejemplo pasado, tenemos la función en lazo abierto

$$G(s) = \frac{E_v(s)}{E(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{C(s)}{\Theta(s)} = \frac{1 * 1 * 5036}{s^3 + 35,98s^2 + 623,4s} \quad (67)$$

El rango de ganancias del lugar de las raíces a la expresión (67) se muestra en la Figura 4.2.

Se concluye para el caso lineal, se tiene un rango de ganancia máxima  $K_p$  de 150, mientras que para el caso de retroalimentación por ángulo, el rango de ganancia máximo  $K_p$  es de 4,5. Mientras mas cercano sea el valor de la ganancia  $K_p$  al eje real, más rápido convergirá el sistema, pero mayor es la posibilidad de oscilaciones no deseadas.

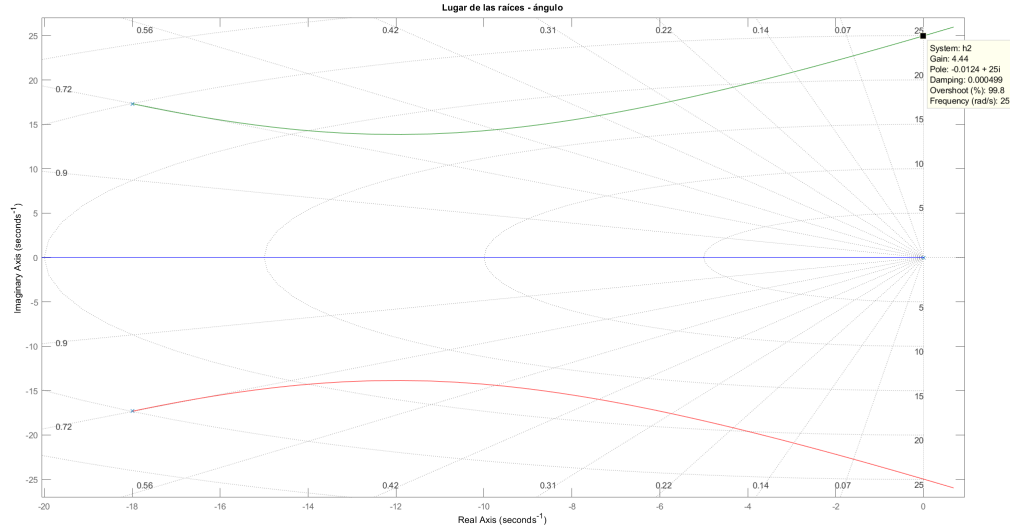


Figura 4.2: Lugar de las raíces .

## 4.2. Simulaciones

Para las simulaciones, se considera los siguiente:

- **Límites matemáticos**, debido a las restricciones físicas del sistema, no se puede llevar el efector final a posiciones como lo son los vértices o aristas de la estructura.
- **Límites de altura**, el efector final tiene dimensiones no consideradas en esta investigación, por lo que, llevar el efector final a los límites superiores o inferiores puede provocar choques entre la estructura y el efector, o del efector contra las muestras.
- **Parámetros**, se seleccionaron los valores de  $K_p = 5$  para la retroalimentación de la longitud de la cuerda y  $K_p = 0,15$  para la retroalimentación por ángulo, asimismo, se declara que el punto inicial de las simulaciones esta dado por  $P(0,5, 0,5, 0,2)$ .



En la Figura 4.3, se observa la trayectoria del sistema por retroalimentación de la longitud de la cuerda al punto  $(0,9,0,9,0,2)$ , donde “o” es el punto de inicio y “x” el fin de la trayectoria. Cabe destacar que ambos puntos se encuentran en la misma coordenada Z por lo que no debería de haber traslación fuera de ese punto en Z. Sin embargo, debido a que el sistema es de regulación y no de seguimiento, el sistema se mueve en los tres ejes para llegar al punto deseado.

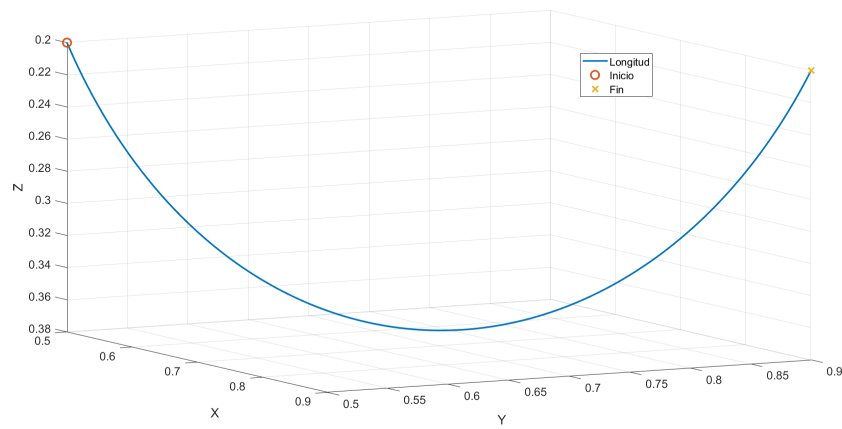


Figura 4.3: Desplazamiento al punto  $(0,9,0,9,0,2)$  por retroalimentación de la longitud de la cuerda.

En la Figura 4.4 se observa el tiempo y la forma de respuesta del sistema debido a la selección de la variable  $K_p = 5$ .

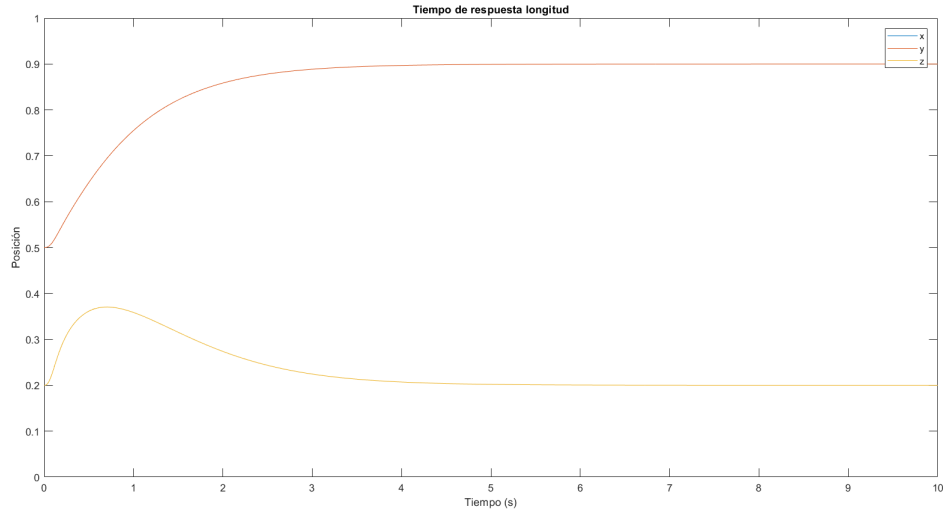


Figura 4.4: Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de longitud

En la Figura 4.5, se observa la trayectoria del sistema por retroalimentación por ángulo al mismo punto  $(0,9, 0,9, 0,2)$  para mostrar la diferencia de comportamientos. Sin embargo, si se compara con la de la Figura 4.3 se observa que las trayectorias son muy similares y tienen la misma característica del desplazamiento en  $Z$  aunque no se desee ese movimiento.

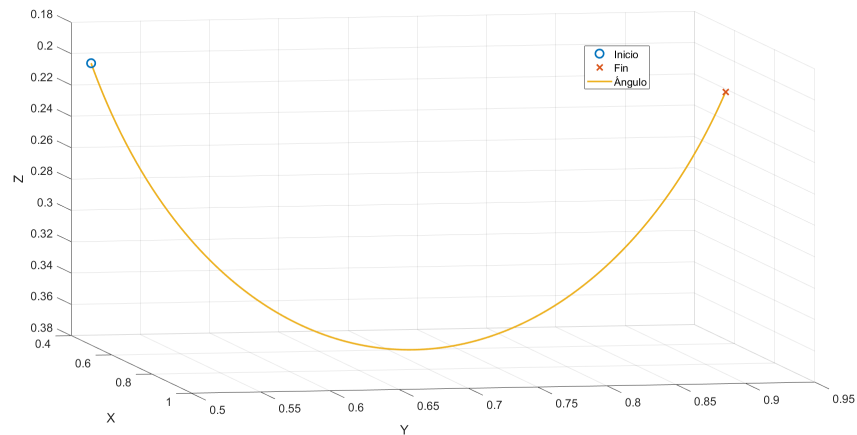


Figura 4.5: Desplazamiento al punto  $(0,9, 0,9, 0,2)$  por retroalimentación por ángulo.

En la Figura 4.6 se observa el tiempo y la forma de respuesta del sistema debido a la selección de la variable  $K_p = 0,15$ .

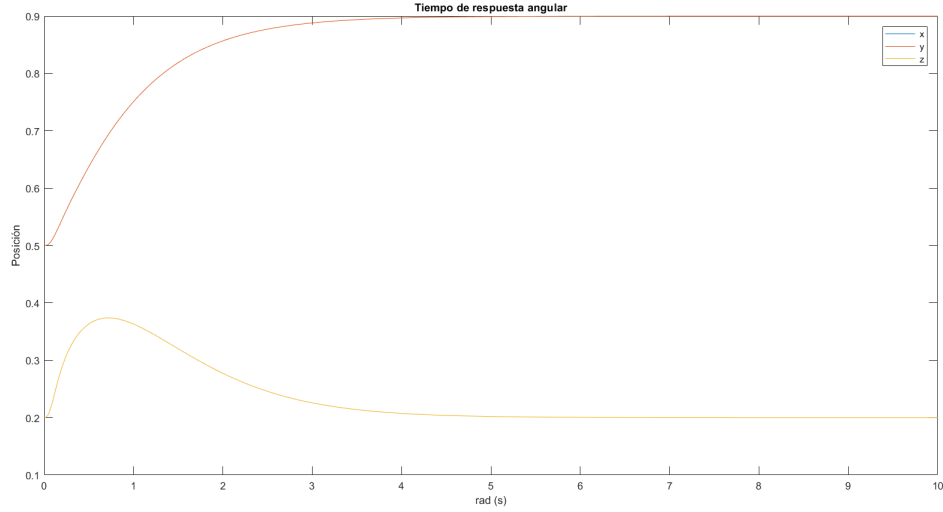


Figura 4.6: Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de ángulo

Es importante elegir los valores de  $K_p$  de manera correcta debido a la forma de respuesta del sistema, en las Figuras 4.7 y 4.8, se observa y compara la trayectoria y la respuesta al impulso obtenida a partir de la elección de  $K_p = 50$  y  $K_p = 5$ . Se observa que el sistema con  $K_p = 50$  tiene la cualidad de estabilizarse más rápido, teniendo la gran desventaja de hacer una trayectoria errática y que puede poner en peligro el experimento o al efector, mientras que el sistema con  $K_p = 5$  analizado previamente tarda más en estabilizarse pero converge al punto de una forma más suave.

Mediante la herramienta de SIMULINK se hace una simulación para la expresión (42) la cual es una ecuación cuadrática. La Figura 4.9 muestra la simulación del sistema en comparación de la simulaciones de las Figuras 4.3 y 4.5. Se puede denotar que los sistemas se comportan de manera muy similar.

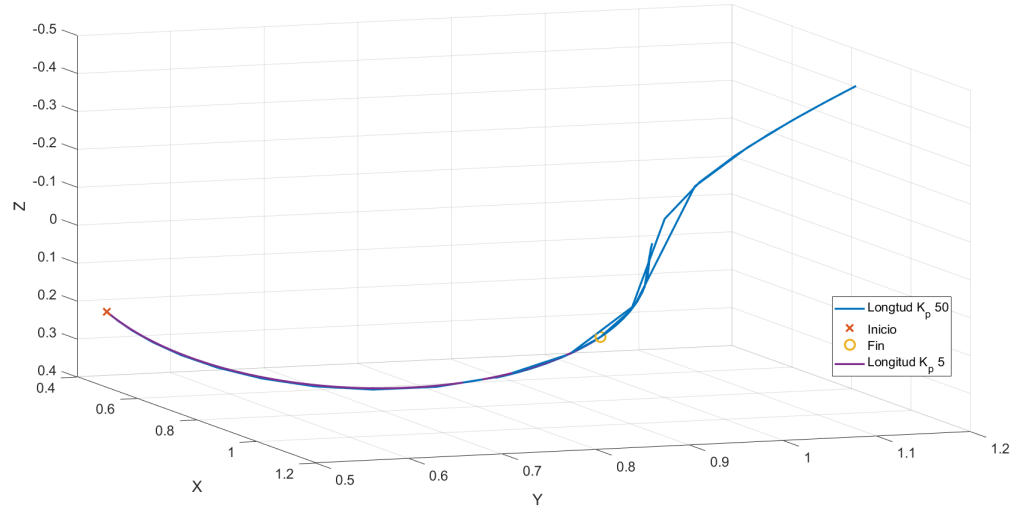


Figura 4.7: Desplazamiento al punto  $(0,9,0,9,0,2)$  por retroalimentación de longitud con  $K_p = 50$ .

A partir de aquí, los resultados mostrados muestra en la misma figura los dos esquemas de control (retroalimentación por longitud y por ángulo). En la Figura 4.10 se define el punto final  $(0,6,0,75,0,5)$ , esta trayectoria es corta con respecto al ejemplo anterior, asimismo, se destaca la pequeña diferencia que hay entre ambas trayectorias para una ruta cercana.

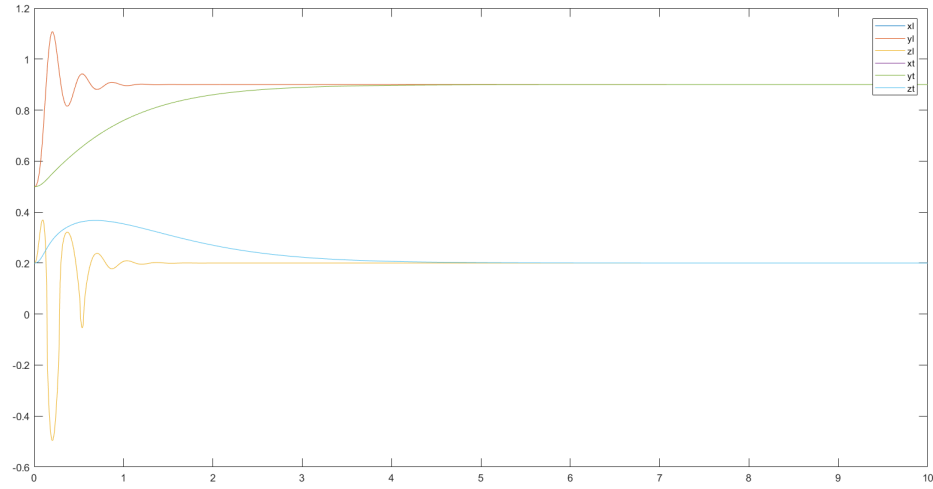


Figura 4.8: Tiempo de respuesta de sistema por retroalimentación de longitud con  $K_p = 50$ .

En los ejemplos anteriores la trayectoria es descendiente, en la Figura 4.11 se muestra el comportamiento de la trayectoria cuando el efector asciende.

Finalmente concluimos que independientemente de la elección del punto a desplazarse, el sistema se desplazará sobre los 3 ejes debido a la relación matemática establecida en el capítulo 3. A pesar de esto, se logra llegar al punto deseado a partir de una posición inicial conocida.

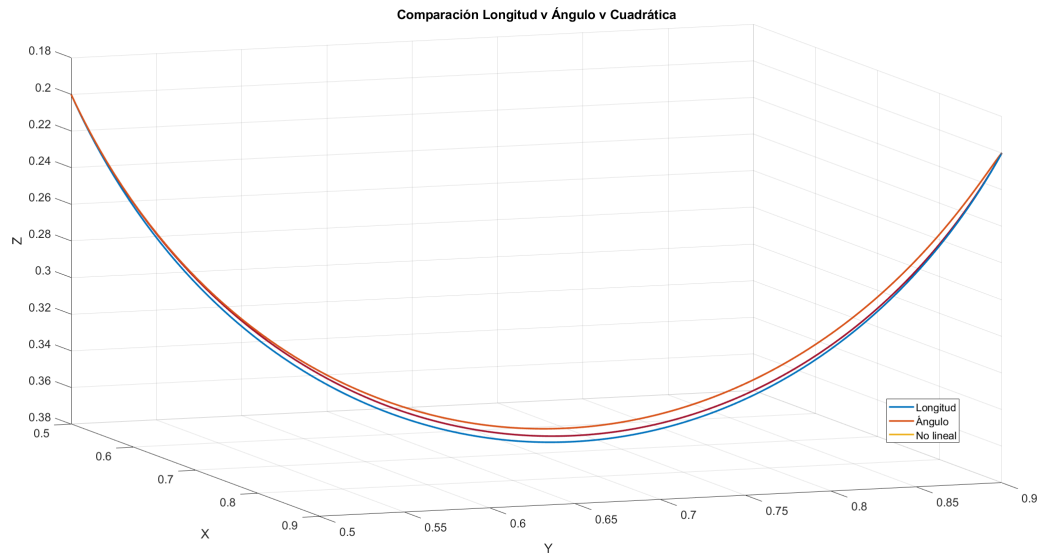


Figura 4.9: Comparación de simulaciones por retroalimentación de longitud, retroalimentación de ángulo y retroalimentación de longitud cuadrática.

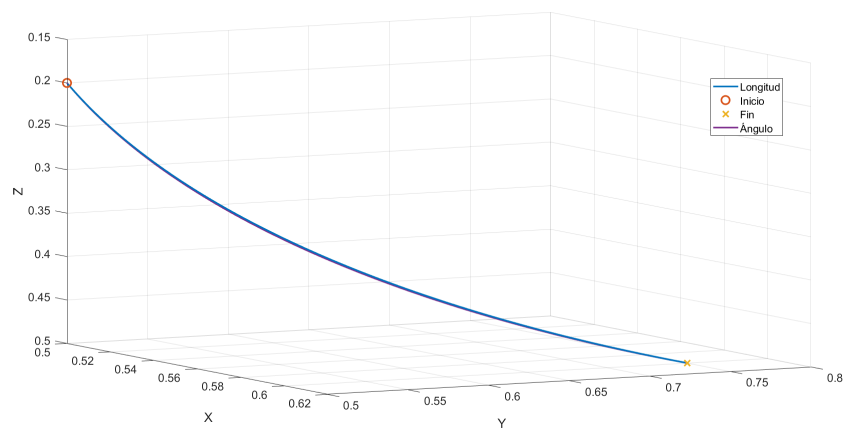


Figura 4.10: Desplazamiento al punto  $(0,6,0,75,0,5)$ .

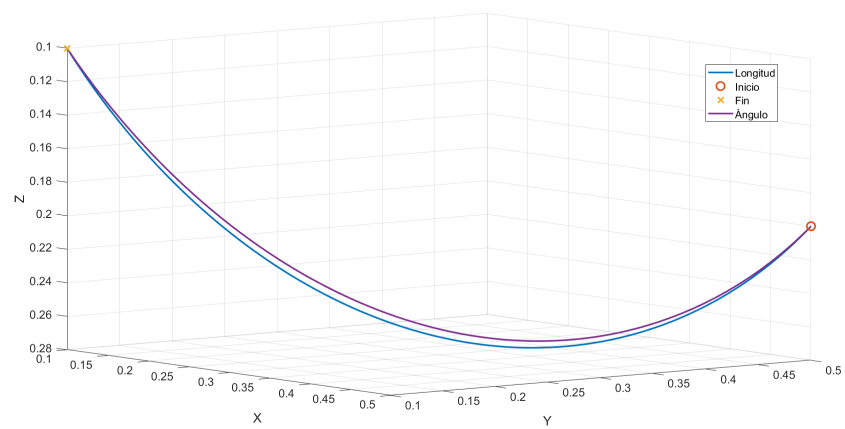


Figura 4.11: Desplazamiento al punto  $(0,1,0,1,0,1)$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones

Los sistemas suspendidos por cables si bien no son nuevos, la tecnología actual ha logrado que sean novedosos y ofrezcan nuevas ventajas con respecto las tecnologías tradicionales, como los son tamaño, peso, costo y área de trabajo; debido a las necesidades de este tipo de sistema en rubros donde no son de tan facil acceso, tanto por diseño como por costos, cambios en su diseño deben efectuarse.

En este trabajo de investigación se realizó el análisis y modelado de un sistema suspendido mediante cuatro cables dentro de un paralelepipedo. Debido a la complejidad del modelo dinámico del sistema y a las restricciones de tiempo para realizar este trabajo de maestría, se acotó al caso de regulación; debido a el uso de un servomotor y un modelo matemático estable se utilizó un controlador proporcional. El controlador fue simulado mediante el uso del software MATLAB, el cual demostró que las expresiones matemáticas descritas en este documento son coherentes. Así como, los resultados de este experimento mostraron que para diferentes retroalimentaciones, el sistema se comporta de manera similar. Otra cualidad destacable es el tiempo de estabilización siendo de 5 segundos. Debido a la relación directa entre las cuerdas y la posición del efector, notamos que siempre habra traslación sobre los 3 ejes, esto puede traer complicaciones a la hora de montar el experimento, pues puede llevar el efector final a impactarse con las muestras del experimento por lo que aun queda mucho trabajo para mejorar.

### 5.2. Trabajo a futuro

El análisis presentado en este documento no abarca todo el potencial de este tipo sistema, diferentes modelos matemáticos pueden ser estudiados y/o continuados, como lo es el modelo matemático a partir de triángulos escalenos. Se debe de continuar con el modelo dinámico del sistema para poder desarrollar el caso de seguimiento, en el



cual, el usuario puede trazar una ruta y el sistema recorrera dicha trayectoria. Este trabajo presenta el caso idea de cuerdas, por lo que, se debe de hacer el modelado de las cuestiones de deformación, perturbación, etcetera, al hacer esto, se debe de tomar en cuenta la manera de mejorar la respuesta del sistema.

# Bibliografía

- [1] V. Gordievsky, *Design and Control of a Robotic Cable-Suspended Camera System for Operation in 3-D Industrial Enviroment*, 2008.
- [2] R. M. Sandoval, *Análisis del Color en Post-cosecha de Chile Habanero en Sistemas de Visión por Computadora*, 2014.
- [3] E. A. M. Bracamontes, *Fotometría aplicada a la caracterización de la madurez de la uva*, 2014.
- [4] “<https://www.sportingkc.com/post/2016/04/01/skctv-debut-cutting-edge-skycam-saturday-when-sporting-kc-hosts-real-salt-lake>.”
- [5] B. Duan, “A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis,” *Mechatronics*, vol. 9, pp. 53–64, 1999.
- [6] T. Bruckmann and L. Mikelsons, “Wire robots part 1 kinematics, analysis & design,” in *Parallel robots New developments*, E. J.-H. Ryu, Ed. Vienna, Austria: Editorial I-tech Education and Publishing, 2008, ch. 9, pp. 109–132.
- [7] E. O. C. Zepeda, *Control de Temperatura en un Medio Confinado*, 2017.
- [8] W. Wendrich, “Rope and knots in ancient egypt,” in *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*, H. Selin, Ed. Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2008, pp. 1908–1910.
- [9] Plutarch, “Marcellus,” in *Plutarch’s Lives*, A. H. Clough, Ed., 1859.
- [10] L. Stage, “Suspension System for a Camera and Light Stage,” 1940.
- [11] G. W. Brown, “US4625938 - Suspension System for Supporting and Conveying Equipment, such as a Camera,” 1986.
- [12] —, “US4710819A - Suspension System for Supporting and Conveying Equipment, such as a Camera,” 1982.

- [13] J. Albus, R. Bostelman, and N. Dagalakakis, "The NIST ROBOCRANE," vol. 10, no. 5, pp. 709–724, 1992.
- [14] J. Pusey, A. Fattah, S. Agrawal, and E. Messina, "Design and workspace analysis of a 6-6 cable-suspended parallel robot," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 39, no. 7, pp. 761–778, 2004.
- [15] M. H. Korayem, "Design and programming a 3D simulator and Controlling graphical user interface of ICaSbot, a cable suspended robot," vol. 21, pp. 663–681, 2014.
- [16] J. Lamaury and M. Gouttefarde, "Control of a Large Redondantly Actuated Cable-Suspended Parallel Robot," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4644–4649, 2013.
- [17] K. Kozak, Q. Zhou, and J. Wang, "Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, no. 3, pp. 425–433, 2006.
- [18] H. Zhang, I. Section, and I. Introduction, "Efficient Evaluation of the Feasibility of Robot Displacement Trajectories," vol. 23, no. 1, pp. 324–330, 1993.
- [19] S. Kawamura, W. Choe, S. Tanaka, and S. R. Pandian, "Development of an ultra-high speed robot FALCON using wire drive system," *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 215–220, 1995.
- [20] R. G. Roberts, T. Graham, and J. M. Trumpower, "On the inverse kinematics and statics of cable-suspended robots," *Systems, Man, and Cybernetics, 1997. Computational Cybernetics and Simulation., 1997 IEEE International Conference on*, vol. 5, no. 4, pp. 4291–4296, 1997. [Online]. Available: [{%}5Cn10.1109/ICSMC.1997.637374{%}5CnOntheinversekinematicsandstaticsofcable-suspendedrobots.pdf](http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=637374)
- [21] E. M. Sandoval, *Sistema de visión por computadora para contabilizar larvas de peces*, 2015.
- [22] A. B. Alp and S. K. Agrawal, "Cable suspended robots: feedback controllers with positive inputs," *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*, vol. 1, pp. 815–820, 2002.
- [23] S. R. Oh and S. K. Agrawal, "A reference governor-based controller for a cable robot under input constraints," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 4, pp. 639–645, 2005.

- [24] —, “Cable suspended planar robots with redundant cables: Controllers with positive tensions,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, no. 3, pp. 457–465, 2005.
- [25] Y. Z. Y. Zhang, S. Agrawal, and M. Piovoso, “Coupled dynamics of flexible cables and rigid end-effector for a cable suspended robot,” *2006 American Control Conference*, pp. 3880–3885, 2006.
- [26] M. Filipovic and A. Djuric, “Mathematical model of the aerial robotic camera base on its geometric relationship,” *FME Transactions*, vol. 42, no. 2, pp. 133–142, 2014.
- [27] L. B. Kevac, “MATHEMATICAL MODEL OF CABLE WINDING / UNWINDING SYSTEM,” pp. 1–13, 2017.
- [28] M. Filipovic, L. Kevac, and B. Reljin, “Comparative analysis of two configurations of aerial robot,” *2012 IEEE 10th Jubilee International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, SISY 2012*, pp. 211–216, 2012.
- [29] M. Filipovic and A. Djuric, “Cable-suspended CPR-D type parallel robot,” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, no. 2007, p. 645, 2016. [Online]. Available: <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/3472>
- [30] Mirjana M. Filipovic, Ana M. Djuric, Ljubinko B. Kevac, and Zeljko V. Despotovic, “The elastic F-type Cable-suspended Parallel Robot in the Service of parents,” *International Workshop and Summer School on Medical and Service Robotics 2014*, no. June 2015, 2014. [Online]. Available: [https://www.academia.edu/7773807/The\\_{\\_}elastic\\_{\\_}F-type\\_{\\_}Cable-suspended\\_{\\_}Parallel\\_{\\_}Robot\\_{\\_}in\\_{\\_}the\\_{\\_}Service\\_{\\_}of\\_{\\_}Parents{#}1](https://www.academia.edu/7773807/The_{_}elastic_{_}F-type_{_}Cable-suspended_{_}Parallel_{_}Robot_{_}in_{_}the_{_}Service_{_}of_{_}Parents{#}1)
- [31] L. Kevac, M. Filipovic, and A. Rakic, “Dynamics of the process of the rope winding (unwinding) on the winch,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 48, pp. 821–843, 2017.
- [32] M. Filipovic, A. Djuric, and L. Kevac, “Contribution to the modeling of cable-suspended parallel robot hanged on the four points,” *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 3526–3531, 2012.
- [33] L. Kevac, M. Filipović, and A. Djurić, “The comparison between the real and the scaled model of the CPR system The comparison between the real and the scaled model of the CPR system,” no. June, 2014.
- [34] M. Filipović and L. Kevac, “A new winch construction for the smooth cable winding/unwinding,” *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, vol. 15, no. 3, 2017.

- [35] N. Aguirre, “La espiral de arquímedes en un proyecto de modelación matemática,” 2008.
- [36] K. Ogata, *System Dynamics*, 4th ed., 2004.
- [37] R. N. Kandalan, *The Modeling and Simulation of EV3 Motor Dynamics*, 2016.
- [38] “Robots and robotic devices – vocabulary,” International Organization for Standardization, Geneva, CH, Standard, Mar. 2012.
- [39] B. Y. Duan, “A new design project of the line feed structure for larche spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis,” *Mechatronics*, vol. 9, no. 1, pp. 53–64, 1999.
- [40] S. Staicu, “Dynamics of the 6-6 stewart parallel manipulator,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 27, pp. 212–220, 2011.
- [41] A. B. Alp and S. K. Agrawal, “Cable suspended robots: Design, planning and control,” *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on robotics and Automation*, 2002.