



Universidad Autónoma de Baja California  
Facultad de Ciencias

Correcciones en teoría de perturbación al momento  
magnético de fermiones cargados en diferentes  
configuraciones cinemáticas.

T E S I S  
que para obtener el título de  
**Físico**  
Presenta  
**Óscar Iván Valdés Martínez**

---

Directores de Tesis:  
**Dr. Adnan Bashir**  
**Dr. Ramón Carrillo Bastos**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS

**CORRECCIONES EN TEORÍA DE PERTURBACIÓN AL  
MOMENTO MAGNÉTICO DE FERMIONES CARGADOS EN  
DIFERENTES CONFIGURACIONES CINEMÁTICAS**

TESIS PROFESIONAL  
QUE PRESENTA

**ÓSCAR IVÁN VALDÉS MARTÍNEZ**

APROBADO POR:

*Adnan Bashir*

---

DR. ADNAN BASHIR  
PRESIDENTE DEL JURADO



---

DR. RAMÓN CARRILLO BASTOS  
SECRETARIO



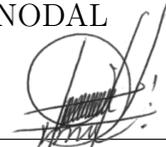
---

DR. ROBERTO ROMO MARTÍNEZ  
SINODAL



---

DR. JORGE ALBERTO  
VILLAVICENCIO AGUILAR  
SINODAL



---

DR. MANUEL HERRERA  
ZALDÍVAR  
SINODAL

**Resumen** de la tesis de **Óscar Iván Valdés Martínez** presentada como requisito parcial para la obtención de la **Licenciatura en Física**. Ensenada, Baja California, México, Noviembre del 2021.

**Correcciones en teoría de perturbación al momento magnético de fermiones cargados en diferentes configuraciones cinemáticas**

Resumen aprobado: \_\_\_\_\_

*Adnan Bashir*

Dr. Adnan Bashir

El momento magnético del muon ha llamado la atención a la comunidad de física de partículas dada la discrepancia del valor anómalo ( $g-2$ ) entre la teoría y el experimento. En abril del 2021, Fermilab anunció nuevos resultados los cuales confirman una discrepancia de 4.2 desviaciones estándares, lo anterior anuncia que hay una fuerte evidencia que nuestro mejor modelo teórico de física de partículas, el modelo estándar, está incompleto.

El cálculo del momento magnético anómalo para cualquier fermión cargado proviene del factor de forma magnético, el cual surge de la evaluación de los diagramas de Feynman contribuyentes a este fenómeno en teoría de perturbación. En nuestro trabajo calculamos la contribución al factor anómalo del momento magnético a un lazo para diferentes configuraciones cinemáticas del momento, e.g., cuando el fotón esta en su capa de masa, también presentando el resultado para el caso contrario. Adicionalmente se calculó la misma contribución en una nueva configuración cinemática, llamado límite simétrico, este modifica la definición del momento magnético anómalo dándole un nuevo valor que sigue siendo finito e independiente de norma. Finalmente se analizaron, sin calcular, las correcciones a dos lazos que nos dan una idea de la complejidad involucrada a este orden y a ordenes mayores.

Palabras Claves: **Física de Partículas, Electrodinámica Cuántica, Momento Magnético Anómalo, Diagramas de Feynman**

## Dedicatoria

Para mi madre, quien me enseñó el amor de persuadir sueños.

## Agradecimientos

No existen palabras para expresar mi gratitud al Dr. Adnan Bashir, quien, desde miles de kilómetros de distancia, en circunstancias tan inesperadas, sin nada a cambio, me proporcionó su apoyo incondicional. Dr. Bashir, es usted una de las personas que más admiro. Gracias por todo.

Agradezco al Dr. Ramón Carrillo Bastos, Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar, Dr. Manuel Herrera Zaldívar y al Dr. Roberto Romo Martínez, por su apoyo, dedicación y paciencia para el proceso de realización de esta tesis.

A todos los profesores que fueron parte de mi formación académica, gracias por motivarme, emocionarme y enseñarme. Siempre los recordaré.

Un agradecimiento a CONACYT por el apoyo brindado mediante la beca para ayudantes de investigación SNI III, espero este trabajo sea contribuyente para el futuro de nuestro país.

Omar, Maria y Scarlett, gracias por haber sido el mejor equipo de trabajo. Los quiero mucho.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Antecedentes.</b>	<b>8</b>
2.1. Electrodinámica clásica . . . . .	8
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	8
2.1.2. Momento magnético clásico . . . . .	9
2.2. Mecánica cuántica no relativista . . . . .	12
2.2.1. La ecuación de Schrödinger . . . . .	12
2.2.2. El átomo de hidrógeno . . . . .	13
2.2.3. El espín . . . . .	15
2.2.4. Precesión de Larmor . . . . .	16
2.2.5. Ecuación de Pauli-Schrödinger . . . . .	19
2.3. Mecánica cuántica relativista . . . . .	21
2.3.1. Notación relativista . . . . .	21
2.3.2. La ecuación de Klein-Gordon . . . . .	23
2.3.3. Solución para partícula libre . . . . .	24
2.3.4. Densidad y corriente de probabilidad . . . . .	24
2.3.5. Densidad y corriente eléctrica . . . . .	26
2.4. La ecuación de Dirac . . . . .	27
2.4.1. Deducción . . . . .	27
2.4.2. Las matrices Gamma . . . . .	29
2.4.3. Densidad y corriente de probabilidad . . . . .	30
2.4.4. Solución de partícula en reposo . . . . .	32
2.4.5. Solución de partícula libre . . . . .	34
2.4.6. Contenido de espín . . . . .	36
2.4.7. Normalización de los espinores . . . . .	38

2.4.8.	Antecedentes históricos: Las antipartículas . . . . .	39
2.5.	Electrodinámica Cuántica . . . . .	40
2.5.1.	Interpretación de Feynman y Stueckelberg . . . . .	40
2.5.2.	Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo . . . . .	41
2.5.3.	Electrón interactuando con un campo electromagnético . . . . .	43
2.5.4.	El fotón . . . . .	44
2.5.5.	Diagramas y reglas de Feynman . . . . .	46
2.5.6.	Momento magnético en QED . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>Metodología</b>	<b>54</b>
3.1.	Características de las correcciones al momento magnético anómalo	54
3.2.	La corrección de Schwinger (contribución a primer lazo) . . . . .	56
3.2.1.	Límite para momento de fotón no despreciable . . . . .	56
3.2.2.	Límite simétrico . . . . .	57
3.3.	Análisis de la corrección a segundo lazo . . . . .	57
3.3.1.	Análisis para límite simétrico y para momento de fotón no despreciable . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>Resultados y discusiones</b>	<b>58</b>
4.1.	Corrección a primer lazo . . . . .	58
4.1.1.	Configuración para momento de fotón no despreciable . . . . .	65
4.1.2.	Límite simétrico . . . . .	68
4.1.3.	Análisis de los resultados de la contribución a un lazo: On-Shell vs. Límite simétrico . . . . .	72
4.2.	Análisis de las correcciones a segundo lazo . . . . .	78
4.2.1.	Análisis para límite simétrico y para momento de fotón no despreciable . . . . .	82
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>83</b>



# Índice de figuras

1.	Diagrama de espira circular. . . . .	11
2.	Partícula de espín 1/2 en reposo en un campo magnético $B$ uniforme. . . . .	17
3.	Propagación en el tiempo de partículas cargadas según la interpretación de Feynman-Stueckelberg . . . . .	41
4.	Diagrama de Feynman para una partícula cargada interactuando con un campo electromagnético . . . . .	48
5.	Suma de las contribuciones para un proceso dispersivo partícula cargada-fotón según teoría de perturbaciones y diagramas de Feynman. . . . .	49
6.	Diagrama de Feynman para corrección a un lazo. . . . .	56
7.	Un diagrama de Feynman contribuyente para la corrección a dos lazos. . . . .	57
8.	Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el caso on-shell. Contribución al factor $g - 2$ a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del leptón y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma$ ). . . . .	73
9.	Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor $g - 2$ a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa efectiva del fotón y la del leptón. . . . .	74
10.	Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor $g - 2$ a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del leptón y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma^2$ ). . . . .	76

11.	Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor $g - 2$ a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del leptón y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma^2$ ).	77
12.	Diagramas de Feynman de segundo lazo contribuyentes al momento magnético del muón.	78

# 1. Introducción

El momento magnético anómalo del electrón, es una de las predicciones de la electrodinámica cuántica que la coloca como una de las teorías más exitosas de la física contemporánea. Hasta el momento, los cálculos teóricos y los resultados experimentales difieren alrededor de uno en un trillón (Aoyama et al, 2015), por lo que se concluye que el factor anómalo ( $g - 2$ ) del momento magnético es una de las pruebas mas irrefutables de la teoría cuántica.

En las últimas décadas la comunidad de física de partículas ha tomado un interés en el caso del muón, siendo este un fermión que pertenece a la familia de leptones. Posee propiedades similares a las del electrón, como su carga y espín; pero diferente en masa y reglas de decaimiento. Esta atención proviene de las conclusiones de los experimentos realizados durante las últimas décadas del siglo XX y la primera del siglo actual, mismo donde se encuentra una discrepancia entre el valor teórico y experimental al factor  $g - 2$  del muón. Este resultado es de gran interés, ya que el momento magnético posee contribuciones de todas las partículas de las tres interacciones según el modelo estándar: Interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas, por lo que abren las puertas a discusiones sobre nuevas teorías (Jegerlehner, 2008).

Actualmente, existen dos propuestas generales para encontrar la solución a este problema. La primera consiste en mejorar la medición experimental actual. Laboratorios de gran relevancia en contextos internacionales como FermiLab, el cual, en colaboración con CERN (Organización Europea para la Investigación Nuclear), buscan modernizar y mejorar las técnicas de medición (Logashenko et al, 2015). La segunda propone innovar sobre las ideas actuales, un ejemplo de ello son las investigaciones en J-PARC (Complejo de Investigación para Acelerador de Protón en Japón), donde se trabaja para obtener haces de muones a temperaturas bajas y a velocidades no relativistas para de esta

manera, introducirlos a un campo magnético externo y así medir la oscilación de precesión (Georgiy et al, 2019). La comunidad científica espera ansiosamente estas ampliaciones, ya que en caso de encontrar mayores discrepancias, el modelo estándar podría ser derrotado.

En abril de 2021, Fermilab anunció nuevos resultados sobre el experimento del muón  $g - 2$ . El nuevo valor calculado confirma y refuerza los hallazgos del experimento anterior del mismo nombre realizado en el Laboratorio Nacional Brookhaven. Combinados, los dos resultados muestran una fuerte evidencia de que nuestro mejor modelo teórico, el modelo estándar, está incompleto. Una posible explicación sería la existencia de partículas o fuerzas no descubiertas.

El experimento anterior, realizado en 2008 en el Laboratorio Nacional Brookhaven, ofreció indicios de que el comportamiento del muón no estaba de acuerdo con el modelo estándar. La nueva medición del experimento muón  $g - 2$  en Fermilab concuerda fuertemente con el valor encontrado en Brookhaven y diverge de la teoría con la medición más precisa hasta la fecha. Los valores teóricos aceptados para el muón son  $g = 2,00233183620(86)$ , y momento magnético anómalo:  $a = 0,00116591810(43)$  (incertidumbre entre paréntesis), donde  $g$  siendo la constante que acompaña al momento magnético. Los nuevos resultados experimentales son  $g = 2,00233184122(82)$  y momento magnético anómalo:  $a = 0,00116592061(41)$ . Los resultados combinados de Fermilab y Brookhaven muestran una diferencia con la teoría con una significación de 4.2 sigma, un poco por debajo de los 5 sigma (o desviaciones estándar) que los científicos requieren para declarar un descubrimiento, pero ¿Esto resulta ser evidencia convincente de la *nueva física*?. La probabilidad de que los resultados sean una fluctuación estadística es de aproximadamente 1 en 40.000 (B. Abi et al. 2021).

El marco teórico de este trabajo, proporciona un breve y conciso resumen sobre la electrodinámica clásica, los trabajos preliminares de la mecánica cuántica

tica, el desarrollo del espín, una introducción a la mecánica cuántica relativista y la ecuación de Dirac. Lo anterior constituye las bases para el análisis de las reglas de la electrodinámica cuántica.

El objetivo consiste en encontrar contribuciones al momento magnético anómalo de leptones en teoría de perturbaciones. En particular, se busca analizar las correcciones a primer y segundo lazo, para así calcular el comportamiento en ciertas configuraciones cinemáticas especiales y bajo un nuevo régimen teórico (límite simétrico). Lo anterior modifica los cálculos y los valores al momento magnético anómalo, dejándolos en términos de parámetros adicionales y podría tener aplicaciones para ámbitos experimentales.

## 2. Antecedentes.

### 2.1. Electrodinámica clásica

#### 2.1.1. Ecuaciones de Maxwell

Uno de los mayores éxitos del siglo XX fue el desarrollo de la teoría electromagnética tras los trabajos de Faraday, Gauss, Ampere, Maxwell, por nombrar algunos. La recopilación de todas estas investigaciones teóricas y empíricas llevaron a la formulación de las ecuaciones de Maxwell (1855) las cuales rigen todo comportamiento del electromagnetismo clásico. En unidades Gausseanas, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico,  $\vec{B}$  el campo magnético,  $\vec{J}$  la densidad de corriente eléctrica y  $\rho$  la densidad de carga eléctrica.

Se pueden proponer funciones potenciales para generalizar el campo eléctrico y magnético utilizando la descomposición de Helmholtz (George et al, 1995). Dado que la  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  es posible usar la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  para poder plantear un potencial vectorial magnético que satisfaga la ecuación (2).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (5)$$

donde  $\vec{A}$  es una función vectorial.

Análogamente se puede proponer una función potencial escalar de manera que se cumpla la relación vectorial  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , es decir, proponer que  $\vec{E} = -\nabla \phi$  de tal manera que satisfaga la ecuación (3) por lo que

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (6)$$

### 2.1.2. Momento magnético clásico

El potencial vectorial se define de manera explícita como

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int dV' \frac{J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (7)$$

al expandir el denominador mediante el teorema de Taylor, lo anterior se convierte en una suma de distintas contribuciones

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{cr} \int dV' \vec{J}(\vec{r}')}_{\vec{A}^{(0)}(\vec{r})} + \underbrace{\frac{1}{c} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3}}_{\vec{A}^{(2)}(\vec{r})} + \dots \quad (8)$$

A la ecuación anterior le llamamos la descomposición del potencial magnético en términos de momentos (monopolar, dipolar, cuadrupolar, ...). Al manipular de manera algebraica, y usando las consideraciones matemáticas propuestas

de la definición del campo magnético en términos del potencial (ecuación 5), podemos ver que la primera contribución  $A^{(0)}(\vec{r}) = 0$ , y que la segunda se reduce a

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (9)$$

donde

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int dV' \vec{r}' \times J(\vec{r}'). \quad (10)$$

A  $\vec{\mu}$  lo denotamos como el vector de *momento dipolar magnético* o, sin tomar consideraciones a mayores órdenes y sin pérdida de generalización, momento magnético (Greiner, 1988).

El momento magnético es una propiedad de los objetos magnéticos que determina el trabajo que se va a ejercer cuando es aplicado a un campo magnético externo. De manera precisa, se puede definir como un vector que relaciona la energía de alineación con el producto escalar con el campo magnético externo. La relación está dada explícitamente como

$$H = \vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (11)$$

donde  $H$  es el trabajo realizado y  $\vec{B}$  es el campo magnético externo aplicado a un material. En el caso donde la densidad de corriente eléctrica sea constante, el momento magnético será proporcional a un vector de área perpendicular a la superficie que encierra la trayectoria.

El caso más simple en electromagnetismo clásico es el momento magnético de una espira circular, asumiendo una densidad de corriente constante tendremos que

$$\vec{\mu} = \frac{i}{c} \vec{A}. \quad (12)$$

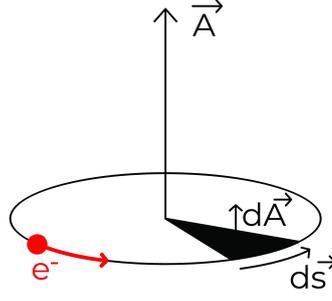


Figura 1: Diagrama de espira circular.

Donde  $\vec{A}$  es el vector de área perpendicular a la superficie circular de la espira e  $i$  es la corriente eléctrica, la cual se define como  $i = \frac{-|e|}{t}$  donde  $e$  es la carga de una partícula y  $t$  es el tiempo que esta tarda en girar alrededor de la espira (periodo). De esta manera  $\vec{\mu}$  en un cambio infinitesimal toma la forma

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|}{ct} \vec{A} = \frac{-|e|}{c} \frac{\vec{A}}{t} = \frac{-|e|}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (13)$$

Por otro lado, el momento angular se define como  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \frac{d\vec{s}}{dt})$ , en el caso infinitesimal  $d\vec{s}$ , al área  $d\vec{A}$  es aproximadamente un triángulo de área  $\frac{1}{2}r d\vec{s}$ , entonces

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}r \frac{d\vec{s}}{dt}. \quad (14)$$

Sustituyendo esto ultimo en el momento angular, encontramos que

$$\vec{L} = mr \frac{d\vec{s}}{dt} = 2m \frac{d\vec{A}}{dt}, \quad (15)$$

despejando para  $L$  y sustituyendo en (13), el momento magnético de una espira queda dependiente del momento angular de la forma

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|}{2mc} \vec{L}. \quad (16)$$

## 2.2. Mecánica cuántica no relativista

### 2.2.1. La ecuación de Schrödinger

De la misma manera que el electromagnetismo fue uno de los grandes éxitos de la física en el siglo XIX, la mecánica cuántica se considera como uno de los grandes triunfos del siglo XX, tras los primeros trabajos en la radiación del cuerpo negro (Planck, 1914), la dualidad onda-partícula de la materia (De Broglie, 1924), la dispersión de Bragg (1913) y los trabajos teóricos de Pauli (Wolfgang, 1925), Schrödinger logra postular una de las ecuaciones más importantes de la física contemporánea, la cual lleva su nombre y es

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle}, \quad \text{Ecuación de Schrödinger} \quad (17)$$

donde  $|\psi\rangle$  es el vector de estado de algún sistema cuántico y  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano de este. En el caso donde se permitan estados estacionarios, la ecuación anterior se convierte en la ecuación de eigenvalores (Schrödinger, 1926)

$$\hat{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle, \quad (18)$$

donde la solución final será  $|\psi\rangle = |\varphi\rangle e^{-iEt/\hbar}$ .

Aquí, el operador  $\hat{H}$  se rige por la energía total del sistema en operadores

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}(\mathbf{r})^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r}), \quad (19)$$

donde utilizando los postulados de la mecánica cuántica se llega a que el operador de momento  $\hat{p}(\mathbf{r})$  esta dado por

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla. \quad (20)$$

De esta forma, la ecuación de eigenvalores (18), proyectada en el estado de la posición  $\mathbf{r}$  toma la forma

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}), \quad (21)$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden donde la complejidad de resolución la dicta el potencial de interés.

Dadas las interpretaciones probabilísticas de las funciones de onda, se define la densidad de probabilidad como

$$\rho = \psi^*(x)\psi(x). \quad (22)$$

Con esto, utilizando la ecuación de continuidad ( $\nabla \cdot j + \partial_t \rho = 0$ ) es posible encontrar una corriente de probabilidad, la cual obedece a la siguiente relación

$$j = \frac{i\hbar}{2m}(\psi(x)\nabla\psi^*(x) - \psi^*(x)\nabla\psi(x)). \quad (23)$$

### 2.2.2. El átomo de hidrógeno

A principios del siglo XX, tras los trabajos de Thomson (1904) y Rutherford (1911), Bohr desarrolla su teoría del modelo atómico para el átomo de hidrógeno. Tomando en consideración el problema de las líneas espectrales (Rydberg, 1889), propuso los siguientes postulados:

1. El electrón se mueve en órbitas circulares bajo la influencia de una atracción coulombiana.
2. En lugar de tener una infinidad de órbitas definidas, los electrones solo pueden estar en órbitas enteras de  $n\hbar$ , es decir, el momento angular está cuantizado.
3. Los electrones no emiten radiación mientras se encuentran en estos estados.
4. Los electrones solo emiten radiación cuando decaen de una órbita a otra. (Bohr, 1913)

Este modelo tenía problemas, ya que fallaba al describir el efecto Zeeman (Preston, 1898), solo podía predecir los niveles de energía de un átomo con un solo electrón y las predicciones solo eran buenas hasta el orden de  $1 \times 10^{-5}$ .

Con el desarrollo de la mecánica cuántica, Schrödinger pudo resolver algunos de los problemas que presentaba la teoría de Bohr. Al resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula cargada interactuando con un potencial atractivo coulombiano, se encuentran soluciones analíticas que comprueban muchas de las hipótesis de Bohr. Las soluciones estacionarias según la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas son

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = Ae^{-r/2}r^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(r)Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (24)$$

donde  $A$  es una constante de normalización,  $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(r)$  son los polinomios de Laguerre de orden  $n - \ell - 1$  y  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos.

La función de onda queda parametrizada por 3 números, a estos les llamamos los “números cuánticos”;  $n$  lleva el nombre de “número cuántico principal” y describe el estado de energía en el que esta,  $\ell$  el “número cuántico orbital”, este describe los estados de momento angular permitidos y  $m$  el “número cuántico magnético” al cual se le asocia a los estados permitidos del momento angular en la componente  $z$ . Los números cuánticos anteriores están confinados por las siguientes reglas

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots, \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, n - 1, \\ m &= -\ell, \dots, \ell. \end{aligned} \quad (25)$$

Se definen los operadores de momento angular orbital  $\hat{L}$  y momento angular en la componente  $z$ ,  $\hat{L}_z$ , de tal manera que al aplicarlos a la función de onda, se encuentran sus respectivos eigenvalores

$$\hat{L}\psi_{n\ell m} = \hbar\sqrt{\ell(\ell + 1)}\psi_{n\ell m}, \quad \hat{L}_z\psi_{n\ell m} = \hbar m\psi_{n\ell m}. \quad (26)$$

Esta definición de momento angular modifica la teoría de Bohr, ya que el momento angular queda cuantizado por  $\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$  en vez de  $n\hbar$ .

De esta manera, bajo la hipótesis atómica clásica (partícula cargada girando alrededor de un núcleo) y lo mencionado en electromagnetismo clásico, el momento magnético total del átomo de hidrógeno está dado por

$$\mu = \frac{-|e|\hbar}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)} = \mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)}. \quad (27)$$

A  $\mu_B$  se le llama el magnetón de Bohr. Análogamente se puede encontrar el momento magnético de la componente  $z$ .

### 2.2.3. El espín

La teoría atómica de Schrödinger predecía de manera exacta el comportamiento de los elementos químicos por un factor de  $1/2$ . Parecía así que aun faltaba un número cuántico adicional, el cual permitiera que cada estado se pudiera utilizar dos veces. Era evidente que la teoría atómica de Schrödinger aun presentaba problemas.

Al modificar el hamiltoniano del átomo de hidrógeno para incluir un campo magnético externo, el desdoblamiento de las líneas espectrales esperado del efecto Zeeman se replicaba de manera teórica con el número cuántico magnético. Sin embargo, los resultados experimentales, mostraban que existía un desdoblamiento aún más fino y que aparecía en ausencia de un campo magnético externo. Las líneas espectrales de cada nivel de energía del número cuántico  $m$  se dividían en dos. A este fenómeno se le llamó el efecto Zeeman anómalo.

En 1925, Uhlenbeck y Goudsmit, junto al trabajo de Paul Ehrenfest, propusieron que el electrón debía tener un “giro” intrínseco cuantizado a dos estados (Uhlenbeck et al, 1925). Con esta proposición, la partícula tendría su propio momento angular y por ende momento magnético. Lo anterior le daba sentido a la cuantización espacial, el factor de dos que había propuesto Pauli en el prin-

cipio de exclusión (Wolfgang, 1925) y el efecto Zeeman anómalo (la interacción espín-órbita).

En 1927, Pauli formalizó la teoría del espín 1/2 de manera matemática utilizando las propiedades del grupo unitario de orden dos y los resultados del experimento de Stern-Gerlach de 1922 (Gerlach et al, 1922) sobre la cuantización espacial (el cual se le explicó al espín) para asociarle una representación matricial. Pauli propuso que de la misma manera que el momento angular orbital tiene componentes cartesianas, el espín también debía tenerlas, así los operadores de medición de espín obtienen la siguiente representación

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

donde, por conveniencia, se utiliza la base del operador  $S_z$  para representar un espín “up” o “down”. De manera general,  $S_i = \hbar/2\sigma_i$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices sigma.

#### 2.2.4. Precesión de Larmor

Usando el concepto de espín, se puede buscar cómo es el proceso dinámico de una partícula cargada al interactuar con un campo magnético externo. Utilizando lo mencionado previamente, se puede describir el hamiltoniano de esta interacción como

$$\hat{H} = \frac{-|e|\hbar}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}, \quad (29)$$

donde  $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ ,  $\mu\vec{S}$  es el momento magnético y  $\vec{B}$  el vector de campo magnético. Si asumimos que el campo magnético es perpendicular a la coordenada  $z$  y constante, el hamiltoniano se reduce a

$$\hat{H} = g\mu_B B_z \hat{\sigma}_z. \quad (30)$$

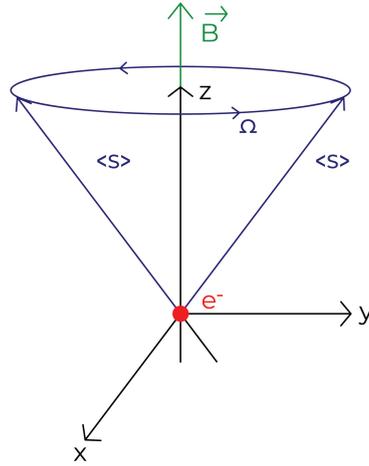


Figura 2: Partícula de espín 1/2 en reposo en un campo magnético  $B$  uniforme.

La constante  $g$  en (30) se le conoce como la razón giromagnética y esta resulta ser fundamental para el desarrollo del presente trabajo, en el caso del momento angular orbital del átomo de hidrógeno este factor es 1. La teoría predice que debería ser igual para el caso de espín, sin embargo, los resultados experimentales concluyen que esta es aproximadamente 2. Con el desarrollo de la mecánica cuántica relativista (Dirac, 1925) y la electrodinámica cuántica (Schwinger, 1948), se sabe que este es un poco mayor a lo anterior y depende del tipo de partícula que es.

Para observar la dinámica de la interacción, se propone un estado inicial dado por

$$|\psi(0)\rangle = c_1^0 |\uparrow\rangle + c_2^0 |\downarrow\rangle, \quad (31)$$

donde  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  son los eigenvectores del operador  $\hat{S}_z$  y representan el estado de espín “up” y “down” respectivamente.

Usando la descripción de Schrödinger, se sabe que la evolución temporal de este estado está dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle, \quad (32)$$

donde  $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  es el operador de evolución temporal, el cual lleva a  $|\psi(t')\rangle$  de  $t' = 0$  a  $t' = t$ . Dado que el estado ya está en la base del operador hamiltoniano ( $\hat{S}_z$ ), el operador de evolución temporal actuará en los kets, de tal forma que

$$|\psi(t)\rangle = C_1^0 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} |\uparrow\rangle + C_2^0 e^{i\frac{\Omega}{2}t} |\downarrow\rangle. \quad (33)$$

En forma matricial

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} C_1^0 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \\ C_2^0 e^{i\frac{\Omega}{2}t} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

donde  $\Omega = \frac{-g\mu_B B}{\hbar}$ .

Así vemos que la probabilidad de encontrar un estado up o down en el tiempo solo están dadas por las constantes  $C_1^0$  y  $C_2^0$  respectivamente, mientras que el valor esperado del operador  $\hat{S}_z$  será la resta de los cuadrados de estas. Lo interesante ocurre cuando hacemos mediciones de otras componentes de espín, recordando que estamos trabajando en la base del operador  $S_z$ , un estado de espín up en  $x$  es  $|\rightarrow\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . De esta forma, la probabilidad de encontrarlo en ese estado es

$$|\langle\rightarrow|\psi(t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^0 e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \\ C_2^0 e^{i\frac{\Omega}{2}t} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos^2(\Omega t)), \quad (35)$$

donde  $C_1^0 = C_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Análogamente para el estado  $|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)$  llegamos a

$$|\langle\leftarrow|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sin^2(\Omega t)). \quad (36)$$

En general, es de interés saber el valor esperado de los demás operadores de espín  $S_x$  y  $S_y$ : Llegan a ser

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_x \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\Omega t), \\
\langle \hat{S}_y \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin(\Omega t).
\end{aligned}
\tag{37}$$

Vemos entonces que la probabilidad de encontrar el espín en el estado  $S_x$  ó  $S_y$  depende del tiempo, mientras que para la coordenada  $z$ , la probabilidad es independiente. Esto nos lleva a interpretar la dinámica del sistema como precesión alrededor del eje  $z$ , lo anterior es un resultado icónico de la dinámica cuántica y la base experimental del cálculo del momento magnético, ya que si se sabe la intensidad de  $B_z$  y la frecuencia de oscilación, se puede encontrar el valor de la constante de la razón giromagnética. Hoy en día, se realizan consideraciones adicionales en laboratorios de gran relevancia para obtener formas más eficientes de calcular la frecuencia.

### 2.2.5. Ecuación de Pauli-Schrödinger

Tras el descubrimiento y formulación del espín, el camino natural fue hacer compatible la ecuación de Schrödinger con la idea de espín 1/2. Aun más general formular una ecuación que tenga consideraciones de un campo electromagnético externo. En caso de solo considerar espín 1/2 la ecuación de Schrödinger se modifica a

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle,
\tag{38}$$

Donde ahora  $|\psi\rangle$  es una matriz columna de  $2 \times 1$ , la cual representa el estado del espín en la base deseada. A lo ecuación anterior se le conoce como la ecuación de Pauli-Schrödinger (Wolfgang, 1927), y su derivación proviene del límite no relativista de la ecuación de Dirac. Para introducir un campo electromagnético se propone usar el potencial vectorial magnético  $\vec{A}$  y el potencial escalar eléctrico  $\phi$ , usando el acoplamiento mínimo invariante de norma del momento canónico. Hacemos el cambio  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} - qA$  y  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E - q\phi$ , y así la

ecuación anterior se modifica a

$$\left[ \frac{(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}))^2}{2m} + q\phi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle. \quad (39)$$

Por otra parte, los operadores sigma obedecen la siguiente identidad vectorial

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{a}) \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{b}) = (\hat{a} \cdot \hat{b}) + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{a} \times \hat{b}), \quad (40)$$

donde  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  son operadores que conmutan con el operador  $\hat{\sigma}$ . Si tomamos  $\hat{\pi} = \hat{a} = \hat{b} = \vec{p} - q\hat{A}$  tendremos

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma} \cdot \hat{\pi}) \cdot (\hat{\sigma} \cdot \hat{\pi}) &= (\vec{p} - q\hat{A})^2 + i\hat{\sigma} \cdot ((\vec{p} - q\hat{A}) \times (\vec{p} - q\hat{A}))\varphi \\ &= (\vec{p} - q\hat{A})^2 + i\hat{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{p} - q\hat{p} \times \hat{A} - q\hat{A} \times \hat{p} + q^2\hat{A} \times \hat{A})\varphi. \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado una función escalar  $\varphi$ , la cual será de conveniencia, las contribuciones vectoriales  $\vec{p} \times \vec{p}$  y  $\vec{A} \times \vec{A}$  se anulan. Al trabajar en el espacio de posición, lo anterior se reduce a

$$(\vec{p} - q\hat{A})^2 + i\hat{\sigma} \cdot (-i\hbar q \nabla \times \vec{A}\varphi - i\hbar q \vec{A} \times \nabla\varphi),$$

usando la identidad vectorial  $\nabla \times (\vec{C}\varphi) = \varphi \nabla \times \vec{C} - \vec{C} \times \nabla\varphi$ , la ecuación anterior se modifica a

$$\begin{aligned} (\vec{p} - q\hat{A})^2 + \hbar q \hat{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A}\varphi + \vec{A} \times \nabla\varphi - \vec{A} \times \nabla\varphi) \\ = (\vec{p} - q\hat{A})^2 + \hbar q \hat{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A})\varphi, \\ = (\vec{p} - q\hat{A})^2 + \hbar q \hat{\sigma} \cdot \vec{B}\varphi. \end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación anterior en (39), esta última toma la forma

$$\left[ \frac{(\vec{p} - q\hat{A})^2 + q\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{B}}{2m} + q\phi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle. \quad (41)$$

Podemos identificar  $\frac{q\hbar}{2m}$  como  $\mu_B$ , (haciendo el cambio de notación  $q = |e|$ ). De

esta manera la ecuación de Pauli-Schrödinger, interactuando con un potencial electromagnético externo es

$$\boxed{\left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \mu_B(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) + e\phi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle.} \quad (42)$$

### *Ecuación de Pauli-Schrödinger con interacción electromagnética*

Este resultado es de gran interés, ya que al hacer un acoplamiento mínimo en los potenciales electromagnéticos, el hamiltoniano sufre modificaciones, de manera que se concluye que el término de interacción de espín de Pauli es un efecto intrínseco no relativista. En general, esta ecuación resulta ser el límite no relativista de la ecuación de Dirac actuando con un campo electromagnético.

## **2.3. Mecánica cuántica relativista**

### **2.3.1. Notación relativista**

La ecuación de Schrödinger nos da una descripción no relativista del comportamiento de partículas microscópicas. Sin embargo no es una invariante de Lorentz, por lo que presentaremos la notación necesaria para formular una ecuación cuántica relativista. En relatividad especial denotamos la métrica del espacio de Minkowski como

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Esto para introducir el concepto de distancia entre dos eventos.

Denotemos un vector de evento (cuadri-distancia) de forma contravariante como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z). \quad (44)$$

La relación covariante de los cuadvectores esta determinada por la métrica del espacio de Minkowski

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu. \quad (45)$$

De esta manera se puede encontrar la distancia entre dos eventos, este intervalo es una invariante de Lorentz y esta dado por

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (46)$$

Para un marco de referencia  $S'$  que se mueve a velocidad constante  $v$  con respecto al marco de referencia  $S$  alineado en la dirección  $x$ , las transformadas entre sistemas coordenados están determinadas por las transformaciones de Lorentz, las cuales son

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Análogamente al cuadvector de posición, se define uno de momento de la siguiente manera

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right). \quad (48)$$

La norma del cuadvector de momento es una invariante de Lorentz y es

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underbrace{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}_{-|p|^2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2,$$

donde  $p^2$  es la norma del momento euclidiano. La relación de masa en reposo de Einstein (Einstein, 1905) nos menciona que

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (49)$$

Así podemos asociar la norma del cuadvector de momento con la relacion de

energía total de Eintein

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \quad (50)$$

Otro escalar de Lorentz relevante sera el cuadri-momento cinético, el cual obedece la norma

$$x^\mu P_\mu = Et - \vec{x} \cdot \vec{P}, \quad (51)$$

Adicionalmente, es conveniente definir el cuadvivector derivada, el cual es

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (52)$$

De esta manera se puede definir, en el contexto de mecánica cuántica el operador de momento como

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu \equiv (\hat{E}, \hat{p}). \quad (53)$$

### 2.3.2. La ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Schrödinger está basada en la relación clásica de energía total dada por  $E = K + V$  de tal manera que, al sustituir los operadores de momento y energía, sustentados por los postulados de la mecánica cuántica, se llega a esta ecuación. La idea general de crear una ecuación relativista es introducir estos operadores a la relación de masa en reposo de Einstein con las reglas de transformación adecuadas para así encontrar una ecuación invariante ante transformaciones de Lorentz.

Previamente demostramos que la norma del vector de cuadrivivector es proporcional a la relación de Einstein (ecuación 49). Usando este y su relación cuántica podemos encontrar que

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = (i\hbar)^2 \partial^\mu \partial_\mu = -\hbar^2 \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) = m^2 c^2. \quad (54)$$

Usando el operador d'Alembert ( $\square = \partial^\nu \partial_\nu$ ), lo anterior se simplifica a

$$\boxed{\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(\vec{x}, t) = 0.} \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon} \quad (55)$$

### 2.3.3. Solución para partícula libre

Las soluciones de la ecuación (55) para una partícula libre son de la forma

$$\psi(\vec{x}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x} \cdot \vec{p} - Et)} \quad (56)$$

$\psi(\vec{x}, t)$  soluciona la ecuación de Klein-Gordon, donde las energías permitidas serán

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (57)$$

De esta manera podemos generalizar más las soluciones a partícula libre

$$\psi(\vec{x}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x} \cdot \vec{p} \mp |E|t)}. \quad (58)$$

Existen problemas con la interpretación física, las partículas con energía negativa no existen. La primera opción es descartarlas, sin embargo, aunque se asuma soluciones con solo energía positiva, los estados de energía negativa emergen de distintas formas al evolucionar el estado original.

### 2.3.4. Densidad y corriente de probabilidad

De manera análoga a la ecuación de Schrödinger uno puede partir de dos sistemas para encontrar una corriente de probabilidad. Si tenemos:

$$\psi^*(\vec{x}, t) \left(\square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad \psi(\vec{x}, t) \left(\square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi^*(\vec{x}, t) = 0.$$

Al restarlas, llegamos a la relación

$$\partial_\mu \frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\vec{x}, t) \partial^\mu \psi(\vec{x}, t) - \psi(\vec{x}, t) \partial^\mu \psi^*(\vec{x}, t)] = 0. \quad (59)$$

De esta, podemos definir la cuadricorriente como

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\vec{x}, t) \partial^\mu \psi(\vec{x}, t) - \psi(\vec{x}, t) \partial^\mu \psi^*(\vec{x}, t)]. \quad (60)$$

Así se identifica que la ecuación (59) habla de la conservación de corriente.

Analizando las componentes 0123 obtendremos

$$\partial_0 j^0 = \frac{i\hbar}{2mc} \frac{\partial}{\partial t} [\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}] = 0, \quad (61)$$

$$\partial_{1,2,3} j^{1,2,3} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] = 0. \quad (62)$$

Se pueden identificar en las ecuaciones (61) y (62), la densidad y la corriente de probabilidad respectivamente

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc} [\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}], \quad (63)$$

$$j = \frac{-i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*]. \quad (64)$$

La ecuación de Klein-Gordon no tiene una derivada de primer orden en su componente temporal, esto hace que no sea posible saber la función de onda en un lugar en particular. Para poder determinarla en un punto después, se debe saber la derivada temporal de la función de onda en ese instante. El análisis anterior se refleja en la definición de  $\rho$ : mientras que en la ecuación de Schrödinger la densidad de probabilidad se definía como  $\rho = \varphi^* \varphi$ , en la de Klein-Gordon es  $\rho = \frac{i\hbar}{2mc} [\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}]$ . En cualquier tiempo, la función de onda y su derivada pueden tener valores arbitrarios, esto es,  $\rho(\vec{x}, t)$  puede ser positiva y negativa.

Dada la solución  $\psi$  de la partícula libre, podemos encontrar de manera explícita la densidad y corriente de probabilidad (tomando las soluciones de

energía positiva)

$$\rho = \frac{E|A|^2}{2mc^2}, \quad j = \frac{p|A|^2}{2m}, \quad (65)$$

de tal forma que para una partícula libre, la corriente total de probabilidad está dada como

$$\boxed{j^\mu = \frac{|A|^2}{m} \left( \frac{E}{c}, p \right)}. \quad (66)$$

### 2.3.5. Densidad y corriente eléctrica

La ecuación de Klein-Gordon presenta dos problemas muy importantes: Energías negativas y densidad de probabilidad negativa. Estos conceptos no tienen sentido cuando hablamos de probabilidades, adquiere sentido físico cuando introducimos el concepto de carga, definimos la densidad y corriente eléctrica como

$$\rho' = e\rho, \quad j' = ej.$$

Esta interpretación soluciona el problema de densidad de probabilidad negativa. ¿Qué sucede con las energías negativas? Las soluciones de partícula libre recordemos son  $\pm E_p = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ , de tal manera que la densidad de probabilidad toma la forma

$$\rho_\pm = e \frac{\pm |E_p|}{mc^2} |A_\pm|^2,$$

o bien, le asignamos el signo de energía a la carga

$$\rho_\pm = \pm e \frac{|E_p|}{mc^2} |A_\pm|^2, \quad (67)$$

de esta manera, las soluciones de partícula libre pueden tomar la siguiente interpretación

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}, t)_+ &= A_+ e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\vec{p} - |E_p|t)} && \text{Particula con carga +,} \\
\psi(\vec{x}, t)_- &= A_- e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\vec{p} + |E_p|t)} && \text{Particula con carga -.}
\end{aligned}
\tag{68}$$

## 2.4. La ecuación de Dirac

### 2.4.1. Deducción

La ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal en la derivada temporal. La densidad de probabilidad esta definida de manera positiva. La desventaja viene en que no es una invariante de Lorentz. Por otro lado, la ecuación de Klein-Gordon es cuadrada en la derivada temporal, lo cual da como consecuencia la posibilidad de tener densidades de probabilidad negativa, la ventaja es que es invariante de Lorentz.

Dirac pensaba que debía existir una formulación relativista donde solo se involucrara la derivada temporal lineal, ya que lo anterior resolvía los problemas de densidad de probabilidad negativa (Dirac, 1928).

Utilizando unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ), la relación de energía-momento esta dada por:

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow E^2 - p^2 - m^2 \rightarrow p^\mu p_\mu - m^2 = 0. \tag{69}$$

Se puede factorizar lo anterior de la siguiente manera

$$(\beta^\kappa p_\kappa - m)(\gamma^\lambda p_\lambda + m) = 0. \tag{70}$$

Observamos que lo anterior se mantiene como una cantidad escalar, al desarrollarlo tendremos

$$(\beta^\kappa p_\kappa - m)(\gamma^\lambda p_\lambda + m) = \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + m\beta^\kappa p_\kappa - m\gamma^\lambda p_\lambda - m^2 = 0. \tag{71}$$

Es claro que los términos lineales en  $P$  deben desaparecer, por lo que  $\beta^\kappa = \gamma^\lambda$ ,

de esta manera, lo anterior se reduce a

$$p^\mu p_\mu - m^2 = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2 = 0. \quad (72)$$

Se debe encontrar de forma explícita la relación que deben seguir las constantes  $\gamma$ 's. Expandiendo para cada  $\lambda$  y  $\kappa$  tendremos

$$\begin{aligned} \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda &= \gamma^0 \gamma^0 p_0^2 + \gamma^1 \gamma^0 p_1 p_0 + \gamma^2 \gamma^0 p_2 p_0 + \gamma^3 \gamma^0 p_3 p_0; & \kappa = 0, \\ & \gamma^0 \gamma^1 p_0 p_1 + \gamma^1 \gamma^1 p_1^2 + \gamma^2 \gamma^1 p_2 p_1 + \gamma^3 \gamma^1 p_3 p_1; & \kappa = 1, \\ & \gamma^0 \gamma^2 p_0 p_2 + \gamma^1 \gamma^2 p_1 p_2 + \gamma^2 \gamma^2 p_2^2 + \gamma^3 \gamma^2 p_3 p_2; & \kappa = 2, \\ & \gamma^0 \gamma^3 p_0 p_3 + \gamma^1 \gamma^3 p_1 p_3 + \gamma^2 \gamma^3 p_2 p_3 + \gamma^3 \gamma^3 p_3^2; & \kappa = 3. \end{aligned}$$

Los elementos de  $p_\mu$  son cantidades escalares, por lo que conmutan, sin embargo para las  $\gamma$ 's no podemos asumir que son cantidades conmutables, agrupamos con esto en mente

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \gamma^0 \gamma^0 p_0^2 + \gamma^1 \gamma^1 p_1^2 + \gamma^2 \gamma^2 p_2^2 + \gamma^3 \gamma^3 p_3^2 \\ &+ (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 \\ &+ (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 + (\gamma^2 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^2) p_2 p_1 \\ &+ (\gamma^3 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^3) p_1 p_3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3 \end{aligned}$$

Se sabe que  $p^\mu p_\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ , esto obliga a que los términos  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$  que acompañan a los  $p_\mu$  deban ser 0

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad (73)$$

mientras que los cuadrados deberán seguir

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1. \quad (74)$$

Por lo que que estas cantidades  $\gamma$ 's deben obedecen la relación de anti-conmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (75)$$

Esto obliga a las cantidades  $\gamma$ 's a ser matrices de  $4 \times 4$ . Dicho esto, lo anterior se simplifica a

$$p^\mu p_\mu - m^2 = (\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^\lambda p_\lambda + m) = 0. \quad (76)$$

Por convención se utiliza

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0. \quad (77)$$

Se introduce el operador de momento  $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$ . Adicionalmente utilizaremos la notación Slash de Feynman la cual nos dice que  $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$ , de tal forma que

$$\boxed{(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0}, \quad \text{Ecuacion de Dirac} \quad (78)$$

donde  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $m$  es la masa de la partícula y  $\gamma^\mu$  es un conjunto de matrices de  $4 \times 4$  que satisfacen las relaciones de anticonmutación mencionadas anteriormente. Aquí  $\psi$  es una matriz columna de  $4 \times 1$  llamado bi-spinor o spinor de Dirac.

#### 2.4.2. Las matrices Gamma

Se ha definido la ecuación de Dirac encontrando la manera en que las matrices  $\gamma$ 's deben anti-conmutarse. Sin embargo, aun no se encuentra una relación explícita de estas. Cualquier conjunto de matrices de  $4 \times 4$  funcionará dado que todas están relacionadas una con las otras mediante transformaciones de similitud que contienen propiedades físicas. Las que se proponen mediante la convención de Bjorken y Drell (Bjorken et al, 1964) son las matrices de Pauli, o bien las matrices sigma, de manera explicita van de la forma

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Así, las matrices gamma se definen como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{1,2,3} \\ -\sigma_{1,2,3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Cada elemento de las matrices anteriores es una matriz de  $2 \times 2$ , esto va a satisfacer que sean de  $4 \times 4$ .

### 2.4.3. Densidad y corriente de probabilidad

De manera análoga a los dos marcos de trabajo anteriores, se puede definir una corriente de probabilidad. Supongamos que tenemos la ecuación de Dirac en el espacio dual (cuando trabajamos en este espacio se utiliza por convención la factorización adicional del planteamiento, en donde el término de masa es positivo)

$$\psi^\dagger(x)(i\cancel{\partial} + m) = 0.$$

De manera implícita utilizamos la notación de derivada común, sabemos que  $\gamma^0\gamma^0 = \mathbf{1}$ , multiplicamos a toda la ecuación por este factor y manipulamos algebraicamente

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x)(i\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu + m\gamma^0\gamma^0) &= 0 \\ \psi^\dagger(x)\gamma^0(i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu + m\gamma^0) &= 0 \\ \psi^\dagger(x)\gamma^0(i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu + m\gamma^0)\gamma^0 &= 0 \\ \psi^\dagger(x)\gamma^0(i\underbrace{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}_{\gamma^\mu}\partial_\mu + m\gamma^0\gamma^0) &= 0 \\ \psi^\dagger(x)\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) &= 0 \end{aligned}$$

De aquí definimos el bi-spinor adjunto como

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \quad (81)$$

Con lo anterior obtenemos la ecuación de Dirac adjunta

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0, \quad (82)$$

multiplicamos por la derecha la ecuación de Dirac adjunta por el bi-spinor común y a la ecuación normal por la izquierda por el bi-spinor adjunto, es decir

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0,$$

se suman, de tal forma que obtenemos

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0, \quad (83)$$

de lo anterior se identifica a la corriente como

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (84)$$

De tal manera que (83) nos menciona la conservación de probabilidad-corriente en el esquema de Dirac

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (85)$$

Análogo a lo encontrado en la ecuación de Klein-Gordon, se define la densidad y la corriente de probabilidad, respectivamente, como

$$j^0 = \rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi, \quad (86)$$

$$j^{1,2,3} = j = \bar{\psi}\gamma^{1,2,3}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^{1,2,3}\psi. \quad (87)$$

Así, se recupera la definición de densidad de probabilidad del esquema de Schrödinger, la cual esta definida de manera positiva.

#### 2.4.4. Solución de partícula en reposo

Para el problema de partícula libre se espera que las soluciones sean de tipo onda plana, en el espacio de momento estas van de la forma

$$\psi(p) = e^{-ix_\mu p^\mu} u(p), \quad (88)$$

donde  $u(p)$  es una matriz de  $4 \times 1$  y  $x_\mu p^\mu = Et - \vec{x} \cdot \vec{p}$ . Si se toma el caso de partícula en reposo la ecuación de Dirac se modifica a

$$(\gamma^0 E - m)e^{-iEt} u(p) = 0.$$

Simplificándola se obtiene

$$E\gamma^0 u(p) = mu(p), \quad (89)$$

la cual toma la forma en sistema matricial como

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Esta ecuación tiene cuatro posibles soluciones

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Estas soluciones resultan ser las adecuadas ya que llegamos a las relaciones  $E = \pm m$ , esto porque, en unidades naturales la energía y masa tienen las mismas magnitudes. A las primeras dos soluciones se les puede dar una interpretación física de energía positiva con espín up y espín down respectivamente. Es posible comprobar lo anterior al definir el operador de espín en la componente  $z$  para un sistema de  $4 \times 4$  como

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} S_z & 0 \\ 0 & S_z \end{pmatrix}. \quad (92)$$

De esta manera:

$$S_z u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} u_1, \quad (93)$$

$$S_z u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} u_2.$$

¿Qué sucede con las soluciones de energía negativa? Las necesitamos para mantener la completitud de los estados bases, si  $u_3$  y  $u_4$  son soluciones, deberán serlo con el signo en  $E$  y  $p$  cambiado, es por eso que las definimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} s_1(E, p) &= u_4(-E, -p), \\ s_2(E, p) &= u_3(-E, -p). \end{aligned} \quad (94)$$

De esta forma para una partícula en reposo,  $s_1$  y  $s_2$  se les asocia la solución de energía negativa con espín down y espín up respectivamente. Esta idea de asociar  $s_1$  con  $u_4$  y  $s_2$  con  $u_3$  se hace por conveniencia (convención de Feynman-Stuckeleberg), esto se debe a que cuando se define un operador de conjugación de carga, al actuar sobre un estado de energía positiva con espín up, lo transforma a un estado de energía negativa con espín down, de esta manera  $(u_1, s_1)$  componen un sistema de partículas de energía positiva - energía negativa con spines inversos, e.g, cuando el operador de conjugación de carga actúa sobre  $u_1$ , este lo manda a  $s_1$  y viceversa; similarmente para  $(u_2, s_2)$ .

El concepto de energía negativa tiene problemas de interpretación física, el cual se verá mas adelante.

### 2.4.5. Solución de partícula libre

Previamente se mostró que para el problema de partícula libre se esperan soluciones tipo ondas planas, en el espacio de momento, de manera que

$$\psi(p) = e^{-ix_\mu p^\mu} u(p). \quad (95)$$

Asumiendo que una partícula se encuentra en movimiento en tres dimensiones, la ecuación de Dirac toma la forma

$$\begin{aligned} & (\gamma^\mu p_\mu - m)e^{-ix_\mu p^\mu} u(p) = 0 \\ \mu = 0 & \quad (i\gamma^0 \partial_t - m)e^{-ix_\mu p^\mu} u(p) = 0 \rightarrow (+E\gamma^0 - m)u(p) = 0, \\ \mu = 1 & \quad (i\gamma^1 \partial_x - m)e^{-ix_\mu p^\mu} u(p) = 0 \rightarrow (-p_x\gamma^1 - m)u(p) = 0, \\ \mu = 2 & \quad (i\gamma^2 \partial_y - m)e^{-ix_\mu p^\mu} u(p) = 0 \rightarrow (-p_y\gamma^2 - m)u(p) = 0, \\ \mu = 3 & \quad (i\gamma^3 \partial_z - m)e^{-ix_\mu p^\mu} u(p) = 0 \rightarrow (-p_z\gamma^3 - m)u(p) = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

De forma compacta y sumada se simplifica

$$\gamma^\mu P_\mu - m = E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3 - m\mathbb{I} = 0. \quad (97)$$

Usando la notación de matrices de  $2 \times 2$  para representar las matrices aumentadas de  $4 \times 4$ , lo anterior en forma matricial se representa como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix} p_i - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} (E - m) & -\sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & -(E + m) \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Para tener coherencia en la notación de  $2 \times 2$  definimos por el momento que

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}. \quad (99)$$

De esta forma, la ecuación de Dirac para una partícula libre en movimiento en tres dimensiones toma la forma

$$\begin{pmatrix} (E - m) & -\sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0. \quad (100)$$

Podemos ver que hemos llegado a un sistema de ecuaciones acopladas

$$(E - m)u_A = (\sigma_i p_i)u_B, \quad (101)$$

$$(E + m)u_B = (\sigma_i p_i)u_A. \quad (102)$$

Será conveniente expandir los términos de  $\sigma_i \cdot p_i$

$$\sigma_i p_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}. \quad (103)$$

De esta forma, se puede despejar  $u_A$  de la ecuación (109) de tal forma que

$$u_A = \frac{\sigma_i p_i}{E - m} u_B = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_B. \quad (104)$$

Análogamente, para la ecuación (102)

$$u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A. \quad (105)$$

Con esto listo se toma la decisión de asignar valores convenientes y sentido físico a  $u_A$  y  $u_B$ . Recordando que estas son matrices columna de  $2 \times 1$ , las opciones a seguir son las siguientes.

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ o } u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ o } u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

donde las soluciones  $u(p)$  son las matrices de  $2 \times 1$  con los vectores  $u_A$  y  $u_B$  de  $2 \times 1$  como elementos de este, de tal forma que recuperamos la definición de vector columna de  $4 \times 1$ . Al seleccionar  $u_A$  o  $u_B$ , el sistema quedará parametrizado y tendrá cuatro soluciones diferentes, estas son

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \text{ con } u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \text{ con } u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (107)$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Las soluciones de energías  $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$  (positivas) serán  $u_1$  y  $u_2$ , mientras que las de energías  $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$  (negativas) son  $u_3$  y  $u_4$ . De esta manera, usando la convención de Feynman-Stuckeleberg, las soluciones de energías negativas se definen como

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_4(-E, -p) \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3(-E, -p) \quad (109)$$

En general,  $u_1, u_2, v_1, v_2$  no son eigenestados de  $S_z$ , esto es comprensible ya que  $[S_z, H] \neq 0$ . Sin embargo, al alinear el movimiento en el eje  $z$  haciendo  $p_x = p_y = 0$ , las soluciones resultantes se vuelven,

$$\begin{aligned} S_z u_1 &= \frac{1}{2} u_1, & S_z u_2 &= \frac{-1}{2} u_2, \\ S_z^v v_1 &= \frac{1}{2} v_1, & S_z^v v_2 &= \frac{-1}{2} v_2, \end{aligned} \quad (110)$$

donde  $S_z^v$  es el operador de espín con signo contrario, esto para tener concordancia con la convención de Feynman-Stuckenbeleg. De esta forma,  $u_1$  y  $v_2$  se les asocia espín up y a  $u_2$  y  $v_1$  espín down.

#### 2.4.6. Contenido de espín

La ecuación de Dirac parece pedir de manera intrínseca la idea de espín  $1/2$ . Una manera de ver si el espín es compatible con la ecuación de Dirac, es

encontrando la evolución temporal del operador de este. La teoría de dinámica en mecánica cuántica no relativista es compatible en el caso relativista. La ecuación de Heisenberg menciona que un operador cuántico evoluciona según

$$i\frac{d\hat{G}}{dt} = [\hat{G}, \hat{H}], \quad (111)$$

donde  $\hat{G}$  es un operador y  $\hat{H}$  es el hamiltoniano del sistema. Si lo anterior es 0 para el operador de espín, podremos concluir que la cantidad se conserva, lo cual es lo esperado. Para esto debemos identificar el hamiltoniano para partícula libre. Partiendo de la ecuación de Dirac se llegaba a

$$E\gamma^0 u(p) = (\gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z + \mathbb{I}m)u(p) \quad (112)$$

Usando la propiedad de  $\gamma^0\gamma^0 = 1$ , multiplicamos por  $\gamma^0$ . De esta manera, aislamos el término de la energía y dejamos la ecuación como una de eigenvalores para el vector  $u(p)$ , de esta manera podemos identificar el operador hamiltoniano como

$$\hat{H} = \gamma^0(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m), \quad (113)$$

donde  $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  y  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ .

Al hacer el conmutador se espera que este sea 0 tal como se mencionó previamente, sin embargo, este resulta no nulo. En el caso del operador de espín en la coordenada  $x$ , se tiene

$$[\hat{S}_x, \hat{H}] = -i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x. \quad (114)$$

Esto es un gran problema, ya que obtenemos que esta cantidad no se conserva en el tiempo, pero el espín si lo hace. La solución a este problema viene en la interpretación física del mismo. El espín tiene la analogía en mecánica clásica como el momento angular rotacional, aun falta considerar el momento angular orbital  $L$  de la partícula, si uno busca la evolución temporal de este (de nuevo

en la coordenada  $x$ ), se encuentra que

$$[\hat{L}_x, \hat{H}] = [yp_z - zp_y, \hat{H}] = i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x, \quad (115)$$

de esta forma se concluye que el momento angular total si conmuta con el hamiltoniano

$$[\hat{L}_x + \hat{S}_x, \hat{H}] = i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x - i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x = 0. \quad (116)$$

Esto es análogo para las otras dos componentes.

#### 2.4.7. Normalización de los espinores

Las soluciones a la ecuación de Dirac para partícula libre son

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Estas siguen las condiciones de ortogonalidad de forma

$$\begin{aligned} u_r^\dagger u_s &= N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs}, \\ v_r^\dagger v_s &= N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (118)$$

Usando la definición de densidad de probabilidad, se normalizará a  $2E$ , esto dado a que cada espinor describe dos partículas con la misma energía. De esta manera encontramos que  $N = \sqrt{E+m}$ . La condición de ortogonalidad será definida entonces como

$$\begin{aligned} \bar{u}_r u_s &= 2m\delta_{rs}, \\ \bar{v}_r v_s &= 2m\delta_{rs}. \end{aligned} \quad (119)$$

Con esta definición, la corriente total de probabilidad en el caso de partícula libre se reduce a

$$\boxed{j^\mu = 2(E, \vec{p})}. \quad (120)$$

#### 2.4.8. Antecedentes históricos: Las antipartículas

En 1927, para solucionar los problemas de densidad y corriente de probabilidad negativa, Dirac derivó su ecuación, la cual era lineal en la derivada temporal, de tal forma que recuperaba la definición de densidad de probabilidad de la ecuación de Schrödinger. Además con gran éxito, adquirió la descripción de espín  $1/2$  de manera intrínseca con su formulación. Sin embargo, el problema de energías negativas persistía y aun peor, la ecuación pareciera describir una partícula adicional. Dirac pensó en la idea de un mar de partículas en donde aplicó el principio de exclusión de Pauli, el cual dice que cada estado cuántico debe estar ocupado por una sola partícula. En su ecuación, describe cuatro partículas cargadas, dos con energías positivas y dos con energías negativas con espín  $\pm 1/2$ . Dirac supuso que los estados de energía negativa estaban ocupados, a esta propuesta se le nombró el Mar de Dirac (Dirac, 1930). Este mar tenía las propiedades físicas de energía y carga negativa infinita. Con momento total y momento angular total nulo, ya que para cada partícula con momento  $p$  existía una con momento  $-p$ . Las propiedades de carga y energía infinitas son cantidades no observables. Lo anterior tenía ventajas, ya que no permitía ninguna transición de un estado positivo a uno negativo, en vez de que una partícula de energía positiva decayera hasta menos infinito emitiendo una cantidad infinita de energía, esta solo puede decaer hasta el estado base, lo cual tenía sentido con lo establecido en ese entonces.

También se proponía que una partícula del mar podía "levantarse" a un estado de energía positivo, así efectivamente dejando un agujero en el mar el cual actuaba como una partícula (en el mundo real) con carga opuesta, momento contrario y energía positiva.

Según las consideraciones propuestas, este agujero debía ser creado con una partícula de alta energía, que al interactuar con una partícula de energía negativa, la levantaría a un estado positivo. Para satisfacer la conservación del momento en esta colisión, se necesitaría que el núcleo de un átomo pesado se bombardeara con rayos de alta energía ( $\gamma$ ) de tal forma que

$$\gamma + \text{núcleo} \rightarrow e^- + e^+ + \text{núcleo}^*,$$

lo cual constituiría un decaimiento beta forzado.

Anderson y Blackett en 1932 probaron la existencia del positrón experimentalmente. De esta manera, la teoría de Dirac permitía que un agujero existente pudiese llenarse con un electrón de energía positiva. La ecuación original que modela a un electrón, se convirtió en una que describe una infinidad de estos.

Se espera entonces que una teoría cuántica relativista completa trate con un sistema de varias partículas en donde existen procesos de creación y aniquilación. El concepto de grados de libertad infinitos y procesos de ascenso y descenso llevaron a la fundación de la electrodinámica cuántica (QED), la primera teoría cuántica de campos.

## 2.5. Electrodinámica Cuántica

### 2.5.1. Interpretación de Feynman y Stueckelberg

En la sección anterior se presentó la interpretación de Dirac a las soluciones de energías negativas mediante el concepto del Mar de Dirac. Tras la formulación de la electrodinámica cuántica, Feynman (1948) y Stueckelberg (1941) presentaron un nuevo esquema mas eficiente para la interpretación de estas. La idea es que las soluciones de energías negativas describen una partícula que se propaga hacia atrás en el tiempo, o equivalentemente, una anti-partícula que lo hace hacia adelante con energía positiva. Este concepto resulta ser de

gran importancia ya que provee las bases para los diagramas de Feynman, los cuales son fundamentales para teorías perturbativas. La corriente y densidad eléctrica en esta interpretación se define como

$$\begin{aligned} j^\mu(e^-) &= 2e(E, \vec{p}), \\ j^\mu(e^+) &= -2e(-E, -\vec{p}). \end{aligned} \quad (121)$$

Las soluciones de la ecuación de Dirac para partícula libre van de la forma  $e^{-iEt - \vec{x} \cdot \vec{p}}$ . En esta interpretación, el signo de la energía se le asocia al tiempo, de la misma manera que para el esquema de Klein-Gordon, el signo de la energía se le relacionaba a la carga eléctrica.

Bajo esta convención, se puede describir como una partícula se propaga en el tiempo mediante el siguiente diagrama

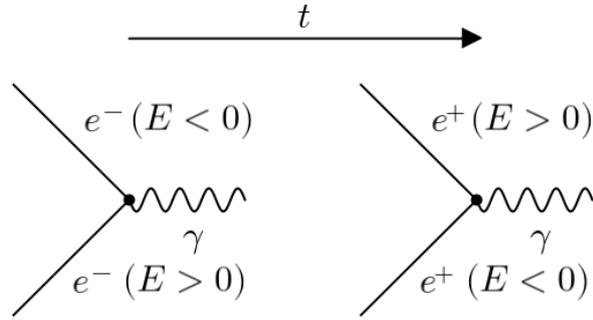


Figura 3: Propagación en el tiempo de partículas cargadas según la interpretación de Feynman-Stueckelberg

### 2.5.2. Teoría de perturbaciones dependiente del tiempo

En el formalismo de la dinámica cuántica en el caso no relativista, los estados estacionarios se desarrollan en el tiempo mediante el operador de evolución temporal el cual nos dice

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (122)$$

donde  $|\psi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle$ .

Por otra parte, los estados  $|\psi(t_0)\rangle$  satisfacen la ecuación independiente del

tiempo, donde  $\hat{H} |\psi(t_0)\rangle = E_n |\psi(t_0)\rangle$ . Si agregamos un potencial dependiente del tiempo a este sistema, la ecuación de Dirac, dependiente del tiempo se modifica de la siguiente manera

$$[\hat{H} + V(t)] |\psi(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle. \quad (123)$$

Resolvemos lo anterior usando la descripción de la dinámica de Dirac (de interacción) donde renombramos a  $V(t)$  como  $e^{i\hat{H}t} V(t) e^{-i\hat{H}t}$  de tal forma que, al sustituirla en lo anterior llegamos a la ecuación de Tomonaga-Schwinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = V(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (124)$$

Tomando las consideraciones iniciales en donde  $U(t_0, t_0) = 1$ , tendremos

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') U(t', t_0). \quad (125)$$

Esto es una ecuación integral, haciendo infinitas iteraciones se concluye que

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) V(t_2) \cdots V(t_n). \quad (126)$$

A lo anterior le llamamos *la serie de Dyson*.

Definimos la matriz de dispersión  $S$  como  $S = U(t, t_0) \forall t$ . De tal manera que la amplitud de dispersión de un estado  $|i\rangle$  a un estado  $|f\rangle$  será

$$|S_{fi}|^2 = |\langle f | U(t, t_0) | i \rangle|^2 \quad (127)$$

Hasta el momento no se a perdido el componente analítico sobre la matriz de dispersión. Si se considera un potencial que actúa por un tiempo corto y es pequeño en orden de magnitud comparado con  $\hat{H}$ , se puede truncar hasta el orden deseado, los primeros 2 ordenes de perturbación son los siguientes

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \delta_{fi}, \\
S_{fi}^{(1)} &= -i \int_{t_0}^t dt_1 \langle f | V(t_1) | i \rangle, \\
S_{fi}^{(2)} &= -i^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \langle f | V(t_1) V(t_2) | i \rangle,
\end{aligned}$$

donde la probabilidad de amplitud total sera

$$|S_{fi}| = |S_{fi}^{(0)} + S_{fi}^{(1)} + \dots + S_{fi}^{(n)}|^2. \quad (128)$$

Al proyectar en el estado de posición y dejándolo en términos explícitos, llegamos a que la corrección a primer orden para un potencial dependiente del tiempo es

$$S_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) e^{-i(E_f - E_i)t}. \quad (129)$$

Es evidente que para tener mejores resultados en la serie se tendrá que resolver a mayores órdenes (Sakurai, 1967), por el momento se mantendrá hasta este orden.

### 2.5.3. Electrón interactuando con un campo electromagnético

Con lo propuesto en el caso anterior y haciendo el acoplamiento mínimo de los potenciales invariantes ante un cambio de norma en la ecuación de Dirac, vemos que

$$(\gamma^\mu (p + eA)_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (130)$$

lo cual se reduce a

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) = -e\gamma^\mu A_\mu \psi(x).$$

Por otra parte, en la sección 2.4.6 (ecuación 113), se identificó el hamiltoniano de interacción para partícula libre de la ecuación de Dirac, por lo que

$$(\hat{H} - e\gamma^0\gamma^\mu A_\mu)\psi(x) = E\psi(x) \quad (131)$$

De tal manera que se identifica el potencial perturbador. Al introducir a la corrección a primer orden y proponiendo dos estados distintos (donde  $\psi(x) = u(p)e^{-ip_\mu \cdot x^\mu}$ ), tendremos

$$S_{fi}^{(1)} = ie \int d^4x \bar{u}_f \gamma^\mu u_i A_\mu e^{i(p_f - p_i)_\mu x^\mu}. \quad (132)$$

Finalmente, lo anterior se puede describir como

$$S_{fi}^{(1)} = ie \int d^4x j_{if}^\mu A_\mu, \quad (133)$$

donde  $j_{if}^\mu = \bar{u}_f \gamma^\mu u_i e^{i(p_f - p_i)_\mu x^\mu}$  es la corriente de probabilidad entre dos estados distintos. Vemos que lo anterior es una transformada de Fourier, la cual manda al potencial electromagnético al espacio de momento .

#### 2.5.4. El fotón

Tras el desarrollo de la relatividad especial (Einstein, 1905), el efecto fotoeléctrico (Einstein, 1905), la difracción de Bragg (1913), el efecto Compton (1923) y la radiación del cuerpo negro (Planck, 1903), era evidente que las ondas electromagnéticas actuaban como partículas de espín 1 sin masa, a estas se les llamó fotones.

En la sección 2.1 se definió el potencial escalar eléctrico y vectorial magnético, los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Es de interés observar la forma que toman estas en versión potencial. Al sustituir  $\vec{E}$  en la Ley de Gauss obtenemos

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 4\pi\rho.$$

Análogamente al sustituir  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  en la ecuación de Ampere-Maxwell se llega a

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Usando la calibración de Lorenz (Lorenz, 1867), la cual nos dice que  $\nabla \cdot \vec{A} + \partial_t \phi = 0$ , las anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 4\pi \rho, \\ -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned} \tag{134}$$

Al definir dos cantidades cuadvectoresiales, el cuadripotencial y la cuadr corriente eléctrica

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\phi, \vec{A}), \\ J^\mu &= (c\rho, \vec{J}), \end{aligned} \tag{135}$$

la ecuación (134) se reduce a

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \tag{136}$$

Notemos que en el caso de ausencia de fuentes  $\rho = \vec{J} = 0$  lo anterior toma la forma

$$\square A^\mu = 0. \tag{137}$$

Esto resulta ser de gran interés, ya que lo anterior es la solución para partícula libre de la ecuación de Klein-Gordon cuando  $m = 0$

$$\square \psi(x) = \square A^\mu = 0. \tag{138}$$

Así se interpreta que la ecuación de Klein-Gordon describe a los fotones, generalizando, se concluye que esta describe las partículas de espín entero, mientras que la de Dirac describe las partículas de espín  $n/2$ .

En la electrodinámica cuántica  $A^\mu$  toma la forma de la función de onda de un fotón, la cual es responsable de las manifestaciones cuánticas de los

fenómenos electromagnéticos, de la ecuación de Klein-Gordon, se sabe que la solución (en unidades naturales) es

$$A^\mu = Ae^{-ip^\mu \cdot x_\mu} \epsilon^{(u)}(p). \quad (139)$$

Aquí se ha agregado el término de  $\epsilon^{(u)}(p)$ , el cual se define como el vector de polarización. Este describe el espín del electrón y el factor de normalización. Al igual que el spinor de la ecuación de Dirac, tiene 4 componentes, pero no todos son independientes.

### 2.5.5. Diagramas y reglas de Feynman

En teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, los diagramas de Feynman se definen como los términos de la expansión de la Matriz de dispersión  $\mathcal{M}$ . Estos se usan de manera intuitiva para comprender y resolver la amplitud de dispersión de cada término de la expansión. Las reglas de Feynman para un proceso electromagnético son las siguientes (Griffiths, 2008)

1. Notación: A cada línea externa se le asocia un momento  $p_1, p_2, \dots, p_n$  y se denota por una recta apuntando en la dirección de propagación, si la línea se encuentra en la dirección del tiempo, esta se propaga hacia adelante, en el caso contrario, hacia atrás. Para cada línea interna, se le asocia un momento  $q_1, q_2, \dots, q_n$  donde de nuevo, una recta indica su dirección de propagación positiva o negativa en el tiempo.
2. Líneas Externas: Cada línea externa representa un factor que depende del tipo de partícula que describimos

$$\text{Leptones: } \begin{cases} \text{Adelante: } u(\rightarrow \cdot) \\ \text{Atras: } \bar{u}(\cdot \leftarrow) \end{cases}, \quad \text{Anti-leptones: } \begin{cases} \text{Adelante: } \bar{v}(\leftarrow \cdot) \\ \text{Atras: } v(\cdot \leftarrow) \end{cases},$$

$$\text{Fotones: } \begin{cases} \text{Adelante: } \epsilon_\mu(\rightsquigarrow \cdot) \\ \text{Atras: } \epsilon_\mu^*(\cdot \rightsquigarrow) \end{cases}.$$

3. Factores de Vértices: Cada vértice contribuye a un factor de  $ig_e \gamma^\mu$  donde  $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$ .

4. Propagadores: Cada línea interna contribuye a un factor de la siguiente forma (dependiendo de la partícula que se trate)

$$\text{Leptones y anti-leptones: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}, \quad \text{Fotones: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}.$$

5. Conservación de Energía y Momento: Para cada vértice, se escribe una función delta de la forma  $(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + \dots)$  donde  $k_1, k_2, \dots$  son las tres componentes de momento del vector de cuadrimomento que entra al vértice, en caso que salga, entonces  $k_1, k_2, \dots$  serán negativas en esa línea.
6. Integral sobre el momento interno: Para cada momento interno  $q$ , se escribe un factor  $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$
7. Cancelar la función delta: Al evaluar y cancelar la función delta, este nos llevará a un factor de  $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$  el cual corresponderá a la conservación total de energía-momento. Cancelamos este factor y se multiplica por  $i$ ; Lo que resulta será  $\mathcal{M}$ .
8. Anti-simetrización: Se incluye un signo menos entre diagramas que solo difieren en el intercambio de dos partículas que entran o salen del mismo.

Es importante evaluar los diagrama en el orden de las reglas anteriores, de otra forma la multiplicación de matrices quedará incoherente, el procedimiento más sencillo a seguir es identificar cada partícula que está actuando en los vértices y observar de donde proviene para así escribir cada factor de las reglas de Feynman. Cada leptón o anti-leptón debe crear un “sándwich” de la forma adjunta de un spinor. Mientras que cada vértice debe incluir un vector contravariante, el cual se contraiga con el índice de la línea del fotón o propagador.

En el caso de una partícula interactuando con un fotón, el diagrama está dado como

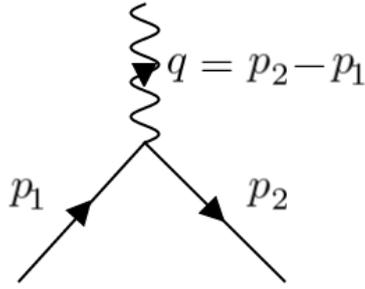


Figura 4: Diagrama de Feynman para una partícula cargada interactuando con un campo electromagnético

Según las reglas de Feynman, la amplitud de dispersión estará dada por

$$\mathcal{M} = -g_e \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \epsilon_\mu(q) \sim -e N \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) A_\mu(p_2 - p_1). \quad (140)$$

Este es el mismo resultado obtenido mediante teoría de perturbaciones dependiente del tiempo.

Los diagramas de Feynman resultan ser muy intuitivos para evaluar las amplitudes de órdenes mayores en la serie perturbativa, como se había mencionado, existe una relación muy cercana entre teoría de perturbaciones y los diagramas de Feynman; De manera algebraica se puede ir encontrando la interpretación física de los distintos órdenes de perturbación, en comparación, con diagramas de Feynman se le puede dar una interpretación física a cualquier diagrama que modifique el original para así, usando las reglas, encontrar el orden de perturbación y la función contribuyente.

El gran éxito de la teoría de Feynman es el hecho que cualquier fenómeno de la electrodinámica cuántica (QED) se puede descomponer en distintas contribuciones, donde a mayor orden en la expansión, menor relevancia. Así, el resultado final será la suma de las distintas contribuciones hasta el orden de perturbación deseado. En particular no se sabe que es lo que sucede a nivel cuántico en una interacción electromagnética, pero usando la amplitud de dis-

persión, se puede concluir que los diagramas de menor orden siempre tendrán una mayor probabilidad de ocurrir en comparación con las de mayor orden.

Para la interacción de una partícula cargada con un fotón, la interpretación física de distintos órdenes se observan en la siguiente figura

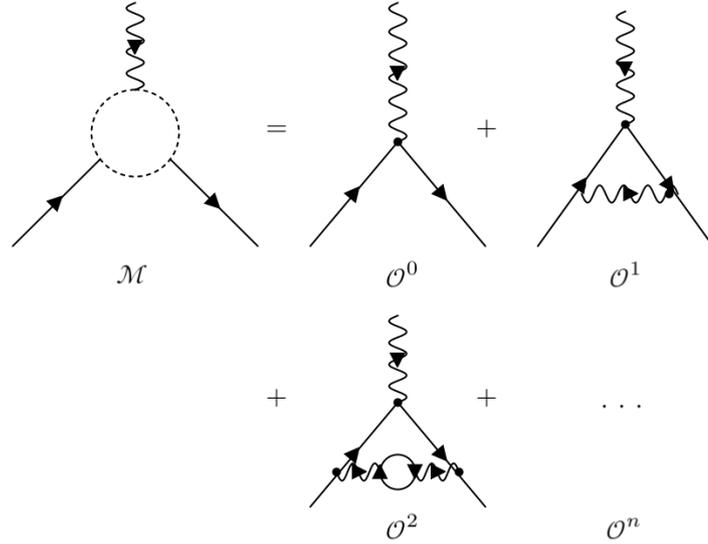


Figura 5: Suma de las contribuciones para un proceso dispersivo partícula cargada-fotón según teoría de perturbaciones y diagramas de Feynman.

$\mathcal{M}$  es una cantidad relevante para ámbitos experimentales, ya que esta será proporcional al tiempo de decaimiento y la sección eficaz (Griffiths, 2008).

### 2.5.6. Momento magnético en QED

Previamente se concluyó que la amplitud de dispersión a primer orden de una partícula cargada interactuando con un campo magnético está dado por

$$\mathcal{M} = -ej^\mu A_\mu = -e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)A_\mu(p' - p).$$

Podemos modificar lo anterior utilizando la descomposición de Gordon (Beringer, 2012), la cual nos dice que la corriente se puede expresar como

$$j^\mu = -e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = -e\bar{u}(p') \left[ \frac{(p+p')^\mu}{2m} + \frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu \right] u(p), \quad (141)$$

donde  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Con lo anterior, la interacción electromagnética toma la forma

$$-e\bar{u}(p') \left( \frac{(p+p')^\mu}{2m} \right) u(p) = -e\bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu - \frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p), \quad (142)$$

donde  $q = p' - p$ .

Aunque no lo parezca, el segundo término de la ecuación anterior hace referencia al momento magnético de una partícula cargada. De manera general, se pueden introducir factores de forma escalares como correcciones cuánticas al vértice de interacción, de esta manera la corriente se modifica y define como

$$\mathcal{M} = -e\bar{u}(p') \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i}{2m}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p)A^\mu(q). \quad (143)$$

A  $F_1$  y  $F_2$  se les llama factores de forma de Dirac y de Pauli respectivamente. Son constantes y serán dependiente del momento  $q$  (Melnikov, 2006). El significado físico de estos será evidente al tomar el límite no-relativista, esto incluye que el momento de interacción electromagnética  $q$ , tienda a cero. Lo anterior es viable ya que en la sección 2.2.5 se concluyó que el momento magnético resulta ser un efecto no relativista.

Con el propósito de hacer este límite, establecemos las siguientes relaciones: Las matrices de Pauli obedecen las reglas de anti-conmutación

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (144)$$

El paso a seguir es manipular de manera explícita la ecuación (143), encontrando que para la componente  $i = 0$  en  $\sigma^{ij}$ , esta tomará la forma

$$\sigma^{0j} = \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^j] = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Mientras que para las componentes  $i = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{ij} = -i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Por otra parte, los spinores de Dirac son de la forma

$$u(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Al tomar el límite no relativista de  $E \approx m$  y  $p \ll E$  lo anterior se reduce a

$$u(p) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (147)$$

Análogo para el espinor adjunto.

$$u(p') = (\varphi_2^\dagger \ 0). \quad (148)$$

Introduciendo lo anterior a la corriente eléctrica (143), podemos calcular, componente por componente, las contribuciones del segundo término (el de  $\sigma^{\mu\nu}$ ), en el caso de  $\mu = i = 0$

$$j^0 = -\frac{ieF^2(0)}{2m} (\varphi_2^\dagger \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} q_\nu = 0. \quad (149)$$

Mientras que para las componentes 1, 2, 3

$$j^i = \frac{-ieF_2(0)}{2m} \epsilon_{ijk} (\varphi_2^\dagger \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} q_j,$$

$$= \frac{-ieF_2(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \varphi_2 | \sigma_k | \varphi_1 \rangle q_j. \quad (150)$$

Para este caso, la interacción electromagnética para  $i = 1, 2, 3$  será

$$j^i A_i = \frac{-ieF_2(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \varphi_2 | \sigma_k | \varphi_1 \rangle q_j A_i. \quad (151)$$

Todo el procedimiento anterior se realizó en el espacio de momento. Es conveniente para la interpretación física usar el de posición. Al sustituir el operador de momento  $q$  como  $-i\partial_i$ , llevará todo al espacio de posición. Cabe de mencionar que  $A_i$  se encuentre en el espacio de momentos. Para mantener coherencia se hace el cambio de bases mediante la transformada de Fourier de los elementos de  $A_i$ . La notación quedará invariante. De esta manera

$$\frac{-eF_2(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \sigma_k \rangle \partial_j A_i.$$

Dado que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  y el producto cruz en notación de índices es  $\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk} A_i B_j$  identificamos a  $\epsilon_{ijk} \partial_j A_i$  como  $B_k$ , modificando lo anterior a

$$\frac{-eF_2(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \sigma_k \rangle B_k.$$

Esto resulta ser muy similar al hamiltoniano de interacción de la ecuación de Pauli-Schrödinger. Hemos encontrado una relación física entre el momento magnético y  $F_2(0)$ , ¿Qué es  $F_1(0)$ ? Para el primer término de  $\mathcal{M}^\mu$  tendremos

$$\mathcal{M}_{F_1}^0 = -eF_1(0) \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) A_\mu(q) = -\frac{eF_1(0)}{2m} \bar{u}(p') [(p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p) A_\mu(q).$$

Se ha aplicado la descomposición de Gordon por segunda vez. Para  $\mu = 0$  sabemos que el segundo término será 0. ¿Qué pasa para el primero? En el límite  $E \approx m$  se tiene

$$j^0 A_0 = -eF_1(0)\bar{u}(p')\frac{E + E'}{2m}u(p)A_0(q) = -eF_1(0)\phi(q)\langle\varphi_2^\dagger|\varphi_1\rangle. \quad (152)$$

Se identifica a  $-e\phi(q)$  como el hamiltoniano de la interacción del potencial eléctrico, esto también está presente en la ecuación de Pauli-Schrödinger. El factor de forma  $F_1$  se le asocia al momento dipolar eléctrico. Asumiendo que el leptón no tiene estructura interna, podemos tomar que  $F_1(0) = 1$ . ¿Qué procede con las demás componentes? Para  $i = 1, 2, 3$  sabemos que el término de  $i\sigma^{\mu\nu}$  estará relacionado con el campo magnético, renombrado  $(p + p')^i = p_t^i$  tendremos

$$j^i = -e\bar{u}(p')\frac{p_t^i}{2m}u(p)A_i(q). \quad (153)$$

Trabajando de nuevo en el espacio de posición,  $p_t^i = -i\nabla$  y las componentes de  $A_i(q) \rightarrow A_i(x)$  mediante la transformada de Fourier, lo anterior, en notación de índice, tomará la forma

$$j^i = ei \langle \partial_i \rangle A_i(x) \rightarrow ie\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (154)$$

Aquí hemos utilizado la condición de Coulomb ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ). Con esto listo podemos concluir: Dado que el potencial eléctrico no afecta a las componentes del magnético, será conveniente trabajar con uno magnético solamente, es decir  $A_\mu(q) = (0, \vec{A}(q))$ , de manera que la interacción electromagnética se reduce a

$$j^\mu A_\mu = \frac{-ei}{2m}\bar{u}(p') [F_1(0)\sigma^{\mu\nu}q_\nu + F_2(0)\sigma^{\mu\nu}q_\nu] u(p)A_\mu(q). \quad (155)$$

Que en el espacio de posición toma la forma

$$j^\mu A_\mu = -\frac{e}{2m}[F_1(0) + F_2(0)] \langle \vec{\sigma} \rangle \cdot \vec{B}. \quad (156)$$

Poniéndolo en términos de los operadores de espín, nos dará un factor de  $\frac{1}{2}$  adicional, Dirac propuso la constante giromagnética  $g = 2$  para compensar el

del operador, además, se concluyó previamente que  $F_1(0) = 1$ , así lo anterior se modifica a

$$j^\mu A_\mu = -2[1 + F_2(0)]\mu_B(\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B}) = -g\mu_B(\langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{B}). \quad (157)$$

Así notamos que

$$g = 2(1 + F_2(0)). \quad (158)$$

Comúnmente denotamos a  $F_2(0)$  como  $a_{e,\mu,\tau}$  y lleva el nombre *momento magnético anómalo* o *factor  $g - 2$  del momento magnético* y se parametriza de la siguiente forma

$$a_{e,\mu,\tau} = \frac{g - 2}{2}. \quad (159)$$

Las contribuciones a  $a_{e,\mu,\tau}$  están dadas por las correcciones a la amplitud de dispersión encontradas en teoría de perturbación dependiente del tiempo y se pueden evaluar usando los diagramas y reglas de Feynman, en general,  $a_{e,\mu,\tau}$  se puede expandir como

$$a_{e,\mu,\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{e,\mu,\tau}^{(i)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^i, \quad (160)$$

donde  $\alpha = e^2/(4\pi)$ , resulta conveniente usar esta constante, ya que es proporcional a  $e$ , lo cual acompaña a toda la interacción.

## 3. Metodología

### 3.1. Características de las correcciones al momento magnético anómalo

Antes de describir como se espera encontrar las correcciones al momento magnético, debemos discutir las características generales esperadas de estas.

El factor  $g - 2$  recibe contribuciones de todas las partículas en los tres marcos de trabajo según el modelo estándar (La electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica y las interacciones débiles) mediante un proceso llamado la polarización del vacío, en donde partículas virtuales  $m_p$  aparecen por un breve momento, es por eso que debemos entender como se espera que las contribuciones dependan de las masas (energía) de estas partículas  $m_p$ , consideremos el caso donde  $m_p \geq m$  (donde  $m$  es la masa del electrón, muón o tau), en general se espera que (Melnikov, 2006)

$$\delta a_{e,\mu,e}^n \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{m^2}{m_p^2} \log^{k_p} \left(\frac{m_p}{m}\right), \quad (161)$$

donde  $k_p$  es un factor a determinar de la expansión perturbativa al orden  $n$ . De esta forma, en el caso donde el momento de interacción  $q \sim m_p$ , se espera que el lazo lleve una contribución proporcional a

$$\Gamma^\mu \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n \frac{m^2}{m_p^2} \sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (162)$$

Esto se deberá comprobar al evaluar las correcciones propuestas. Con lo anterior, uno puedes esperar que el factor anómalo del momento magnético sea una suma de tres distintas componentes generales dentro del marco de trabajo del modelo estándar

$$a_{e,\mu,\tau} = a_{e,\mu,\tau}^{QED} + a_{e,\mu,\tau}^{QCD} + a_{e,\mu,\tau}^{Weak}. \quad (163)$$

Para las contribuciones de QED, se utiliza teoría de perturbación. El proceso viene dado al parametrizar el factor de forma magnético de los distintos diagramas de Feynmann que provienen de la serie de Dyson del potencial electromagnético, el total de las contribuciones se ve como la ecuación (160).

### 3.2. La corrección de Schwinger (contribución a primer lazo)

Para la primera contribución, debemos evaluar el siguiente diagrama e identificar cual será la corrección a primer orden al factor de forma de Pauli.

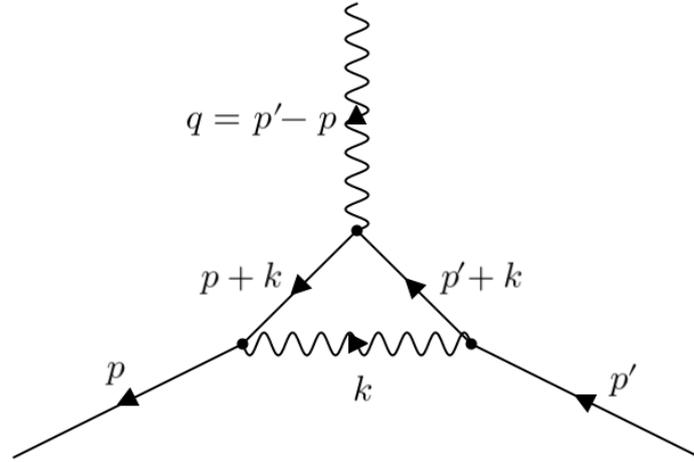


Figura 6: Diagrama de Feynman para corrección a un lazo.

El diagrama anterior se traduce a la siguiente ecuación

$$\Gamma^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma_\nu}{k^2 [(p+k)^2 - m^2] [(p'+k)^2 - m^2]}, \quad (164)$$

donde la amplitud de dispersión total estará dada por

$$i\mathcal{M} = \bar{u} \Gamma^\mu u. \quad (165)$$

#### 3.2.1. Límite para momento de fotón no despreciable

Utilizado los resultados anteriores, se propone resolver el problema teniendo en consideración que  $q^2 \neq 0$ , esto modificará la contribución previa.

### 3.2.2. Límite simétrico

Utilizando los resultados de la metodología propuesta en 5.2, se resolverá el problema tomando el caso donde  $q^2 = p'^2 = p^2$ , este se espera modifique el resultado original.

### 3.3. Análisis de la corrección a segundo lazo

Se buscará analizar los distintos diagramas contribuyentes, ver su comportamiento y su contribución (no se espera calcularla, si no entender las correcciones que aportará).

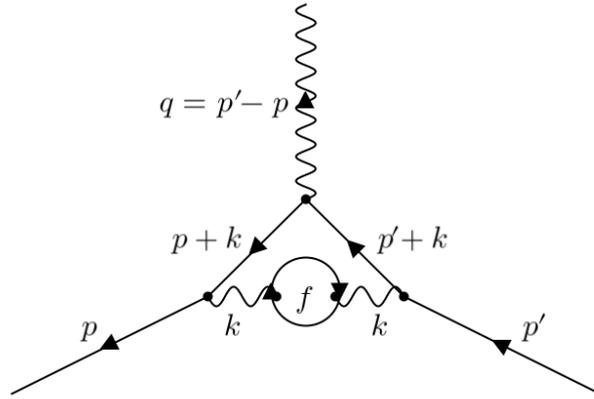


Figura 7: Un diagrama de Feynman contribuyente para la corrección a dos lazos.

#### 3.3.1. Análisis para límite simétrico y para momento de fotón no despreciable

Usando los resultados del caso anterior, analizar como será y la utilidad en el caso donde  $q^2 = p'^2 = p^2$  y  $q^2 \neq 0$ .

## 4. Resultados y discusiones

### 4.1. Corrección a primer lazo

El diagrama contribuyente a la corrección a primer lazo es el siguiente

$$\Gamma^\mu = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^\mu}{D}. \quad (166)$$

donde

$$N^\mu = \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma_\nu, \quad (167)$$

$$D = k^2 [(p+k)^2 - m^2] [(p'+k)^2 - m^2]. \quad (168)$$

Será de conveniencia utilizar la parametrización de Feynman para el denominador  $D$ , la cual nos dice que

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(x\alpha + y\beta + (1-x-y)\gamma)^3},$$

así el denominador toma la forma

$$\frac{1}{D} = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dxdy}{(x[(p+k)^2 - m^2] + y[(p'+k)^2 - m^2] + (1-x-y)k^2)^3}. \quad (169)$$

Debemos manipular el denominador algebraicamente, denotamos este nuevo denominador dentro de la integral  $D_1$  de tal forma que

$$\begin{aligned} D_1^{1/3} &= x(p+k)^2 - xm^2 + y(p'+k)^2 - ym^2 + k^2 - xk^2 - yk^2 \\ &= xp^2 + 2kpx + xk^2 - xm^2 + yp'^2 + 2p'ky + k^2y - ym^2 + k^2 - xk^2 - yk^2 \\ &= k^2 + 2k(px + p'y) - xm^2 - ym^2 + xp^2 + yp'^2. \end{aligned}$$

En la sección 2.1.1 se concluyó que  $p^2 = p^\mu p_\mu = m^2$ , esto se cumple para  $p$  y para  $p'$ , a este tipo de substitución se le asocia a que los leptones exteriores se encuentran 'On shell', así lo anterior se reduce a

$$D_1^{1/3} = k^2 + 2k(px + p'y). \quad (170)$$

Dado que el objetivo es dejar la integral en términos de  $m$  y de  $q$ , es de conveniencia ver como será  $q^2$  se relaciona con  $p'^2$  y  $p^2$

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 - 2pp' + p^2 = 2m^2 - 2pp'.$$

Así se puede identificar la siguiente identidad

$$2pp' = 2m^2 - q^2. \quad (171)$$

Con esto, continuamos con el desarrollo de la ecuación (172), completando el trinomio cuadrado perfecto se llega a

$$D_1^{1/3} = (k + px + p'y)^2 - (px + p'y)^2.$$

Será de conveniencia hacer un cambio de variable en el momento, se propone el siguiente

$$l = k + px + p'y. \quad (172)$$

Dado que  $p$ ,  $p'$ ,  $x$  y  $y$  son constantes y  $k$  es lineal en este, la substitución es trivial ante el diferencial, expandimos el segundo término del anterior y simplificamos usando la identidad de la ecuación (169)

$$\begin{aligned} D_1^{1/3} &= l^2 - [p^2x^2 + 2pxp'y + p'^2y^2] \\ &= l^2 - m^2(x^2 + y^2) - 2pp'xy \\ &= l^2 - m^2(x^2 + y^2) - (2m^2 - q^2)xy \\ &= l^2 - m^2[x^2 + y^2 + xy] + xyq^2 \\ &= l^2 - \underbrace{m^2(x + y)^2}_{\Delta} + xyq^2, \end{aligned}$$

donde se define  $\Delta = m^2(x + y)^2 - xyq^2$ .

Con el desarrollo anterior, la ecuación (170) se modifica a

$$\Gamma^\mu = -2ie^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{N^\mu}{(l^2 - \Delta)^3}. \quad (173)$$

Lo que procede es modificar el numerador  $N^\mu$  para dejarlo en términos del momento  $l$ . El primer paso es deshacerse de las matrices  $\gamma$ 's, para permitir la regularización dimensional, necesitamos trabajar el álgebra para un espacio tiempo arbitrario de  $d$  dimensiones para esto se utilizan las siguientes identidades

$$\gamma^\nu \not{a} \gamma_\nu = -2\not{a} + (4-d)\not{a}, \quad \gamma^\nu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\nu = -2\not{c} \not{b} \not{a} + (4-d)\not{a} \not{b} \not{c}, \quad (174)$$

donde  $d$  es la dimension del espacio-tiempo (Peskin et al 1955), en general para este tipo de problemas la integral convergerá para  $d = 4$ , por lo que podemos desarrollar (167) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N^\mu &= \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma_\nu \\ &= \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\nu + m \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\mu \gamma_\nu + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \\ &= \underbrace{-2[\not{p} + \not{k}] \gamma^\mu [\not{p}' + \not{k}]}_{N_1} + \underbrace{4m[\not{p} + \not{p}' + 2\not{k}]}_{N_2} \underbrace{-2m^2 \gamma^\mu}_{N_3}. \end{aligned}$$

Primero se analiza el término  $N_1$ , despejando  $k$  de  $l$  para sustituir en este, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= -2[\not{p} + \not{l} - \not{p}x - \not{p}'y] \gamma^\mu [\not{p}' + \not{l} - \not{p}x - \not{p}'y] \\ &= -2\not{l} \gamma^\mu \not{l} - 2[\not{p}(1-x) - \not{p}'y] \gamma^\mu [\not{p}'(1-y) - \not{p}x]. \end{aligned}$$

Dado que  $\Gamma^\mu$  se encuentra entre espinores ( $\bar{u}\Gamma^\mu u$ ), se pueden usar las siguientes identidades de la ecuacion de Dirac

$$\not{p}u(p) = mu(p), \quad \bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m.$$

Adicionalmente, se usan las propiedades dadas de la descomposición de Gordon

$$\not{q}\gamma^\mu = q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \quad \gamma^\mu\not{q} = q^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu.$$

Con el hecho que  $p = p' - q$ ,  $p' = p + q$ , que  $p^2 = p'^2 = m^2$  y las identidades anteriores,  $N_1$  se modifica de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= -2\not{l}\gamma^\mu\not{l} - 2[\not{p}'(1-x) - \not{q}(1-x) - \not{p}'y]\gamma^\mu[\not{p}(1-y) + \not{q}(1-y) - \not{p}x] \\ &= -2\not{l}\gamma^\mu\not{l} - 2[\not{p}'(1-x-y) - \not{q}(1-x)]\gamma^\mu[\not{p}(1-x-y) + \not{q}(1-x)] \\ &= -2\not{l}\gamma^\mu\not{l} - 2[\not{p}'\gamma^\mu\not{p}(1-x-y)^2 + \not{p}'\gamma^\mu\not{q}(1-x-y)(1-y) \\ &\quad - \not{q}\gamma^\mu\not{p}(1-x-y)(1-x) - \not{q}\gamma^\mu\not{q}(1-x)(1-y)] \\ &= -2\not{l}\gamma^\mu\not{l} - 2[m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu + m(q^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)(1-x-y)(1-y) \\ &\quad - m(q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)(1-x-y)(1-x) - \not{q}\gamma^\mu\not{q}(1-x)(1-y)] \\ &= -2\not{l}\gamma^\mu\not{l} - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 2m(q^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)(1-x-y)(1-y) \\ &\quad + 2m(q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)(1-x-y)(1-x) + 2\not{q}\gamma^\mu\not{q}(1-x)(1-y). \end{aligned}$$

Es de interés ver como son los términos  $\not{l}\gamma^\mu\not{l}$  y  $\not{q}\gamma^\mu\not{q}$

$$\not{q}\gamma^\mu\not{q} = 2q^\mu\gamma^\mu\not{q} - q^2\gamma^\mu = -q^2\gamma^\mu, \quad (175)$$

lo anterior se debe a que  $\bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0$ .

Dada la invariancia de la integral en  $d$  dimensiones, esto es análogo para  $\not{l}\gamma^\mu\not{l}$ , solo que con un factor de 1/2 adicional.

$$\not{l}\gamma^\mu\not{l} = -\frac{1}{2}l^2\gamma^\mu. \quad (176)$$

Así,  $N_1$  toma la forma

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= l^2\gamma^\mu - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 2m(1-x-y)(x-y)q^\mu \\ &\quad + 2m(1-x-y)(2-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu - 2(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (177)$$

Continuamos con  $N_2$ , utilizando la descomposición de Gordon  $(p+p)^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$  e introduciendo  $l$  en  $k$ , este se modifica a

$$\begin{aligned}
N_2^\mu &= 4m[(2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu) + 2(l - px - p'y)^\mu] \\
&= 8m^2\gamma^\mu - 4mi\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 8ml^\mu - 8mp^\mu x - 8mp'^\mu y \\
&= 8m^2\gamma^\mu - 4mi\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 8ml^\mu - 8m x(p' - q)^\mu - 8my(p + q)^\mu \\
&= 8m^2\gamma^\mu - 4mi\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 8ml^\mu + 8m(x - y)q^\mu - 8mxp'^\mu - 8my p^\mu \\
&= 8m^2\gamma^\mu - 4mi\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 8ml^\mu + 8m(x - y)q^\mu - 8x\gamma^\mu p^2 - 8y\gamma^\mu p'^2.
\end{aligned}$$

De manera que  $N_2$  obtiene la siguiente forma

$$N_2^\mu = 8m^2\gamma^\mu(1 - x - y) - 4mi(1 - x - y)\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 8m(x - y)q^\mu. \quad (178)$$

El término de  $8ml^\mu = 0$ , esto se debe a que  $\bar{u}(p')l^\mu u(p) = 0$ . Adicionalmente, según la identidad de Ward (Peskin et al, 1955), los términos proporcionales a  $q^\mu$  se pueden ignorar.

Con esto listo, sumamos  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$ , de manera que

$$\begin{aligned}
N^\mu &= l^2\gamma^\mu - 2m^2(1 - x - y)^2\gamma^\mu + 2m(1 - x - y)(2 - x - y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \\
&\quad - 2(1 - x)(1 - y)q^2\gamma^\mu + 8m^2\gamma^\mu(1 - x - y) \\
&\quad - 4mi(1 - x - y)\sigma^{\mu\nu}q_\nu - 2m^2\gamma^\mu.
\end{aligned} \quad (179)$$

En la sección 2.5.6, la forma general de la corrección al vértice de interacción es de la forma

$$\Gamma^\mu = F_1^{1loop}(q^2)\gamma^\mu + F_2^{1loop}(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu.$$

Así se agrupa  $N^\mu$  en términos de  $\gamma$  y  $\sigma$

$$\begin{aligned}
N^\mu &= [l^2 - 2m^2(1 - x - y)^2 - 2(1 - x)(1 - y)q^2 + 8m^2(1 - x - y) - 2m^2]\gamma^\mu \\
&\quad + \frac{i}{2m}[4m^2(1 - x - y)(2 - x - y) - 8m^2(1 - x - y)]\sigma^{\mu\nu}q_\nu.
\end{aligned}$$

Simplificando cada término

$$\begin{aligned}
N^\mu &= [l^2 - 2\Delta + 2(1-x-y)(2m^2 - q^2)]\gamma^\mu \\
&\quad + \frac{i}{2m}[2m^2(-2(1-x-y)(x+y))]\sigma^{\mu\nu}q_\nu \\
&= \bar{N}_1\gamma^\mu + \frac{i}{2m}\bar{N}_2\sigma^{\mu\nu}q_\nu.
\end{aligned} \tag{180}$$

De esta forma, la corrección a un lazo para el factor de forma de Dirac es

$$F_1^{1loop}(q^2) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\bar{N}_1}{(l^2 - \Delta)^3}, \tag{181}$$

y para el de Pauli

$$F_2^{1loop}(q^2) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\bar{N}_2}{(l^2 - \Delta)^3}. \tag{182}$$

Anteriormente se concluyó que  $F_1^{1loop}(q^2) = 1$  cuando  $q^2 \rightarrow 0$ , la integral de este no es trivial y da origen al factor de forma de la carga eléctrica. Por otra parte, mencionamos que el factor anómalo de algún leptón esta dado por

$$F_2^{1loop}(0) = \frac{g-2}{2}.$$

Para poder encontrar este, debemos resolver la integral (182) en el limite donde  $q^2 = 0$ , esto solo modifica a  $\Delta$ , de manera que  $\Delta = m^2(x+y)^2$ . Dado que  $\bar{N}_2$  no depende de  $l$ , este puede salir de la integral de momento, de tal forma que

$$F_2^{1loop}(0) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \bar{N}_2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3}. \tag{183}$$

La identidad de Wick (Peskin et al, 1995) nos dice que una integral de momento trasladada al espacio euclideano adquiere la siguiente resolución

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{i(-1)^n}{(4\pi)^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{\Delta^{n-2}}. \tag{184}$$

Por lo que para el problema planteado resulta ser para el caso de  $n = 3$ , con esto

$$\begin{aligned}
F_2^{1loop}(0) &= -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \bar{N}_2 \left[ \frac{-i}{32\pi^2 \Delta} \right] \\
&= -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m^2(-2(1-x-y)(x+y))}{m^2(x+y)^2} \\
&= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1-x-y}{x+y} \\
&= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx (-\log(x) + x - 1) \\
&= \frac{e^2}{8\pi^2}.
\end{aligned}$$

Usando la definición de  $\alpha$  este se convierte en

$$\boxed{F_2^{1loop}(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0,001161409732888438.} \quad (185)$$

A este término se le llama la **corrección de Schwinger**. Este tiene concordancia con la ecuación (161) con  $n_p = 1$  y  $k_p = 0$ . Notemos que este resultado es independiente de las masas de los leptones, por lo que esta corrección es universal para el electrón, muón y tau. Los resultados experimentales más actuales concluyen que el factor  $g - 2$  del electrón y del muón son los siguientes

$$a_e^{exp} = 0,00115965218073(28), \quad a_\mu^{exp} = 0,00116592061(41). \quad (186)$$

De esta forma, el error porcentual entre el valor experimental y la primera corrección a primer lazo es

$$error(a_e) \% = 0,1513292\dots, \% \quad error(a_\mu) \% = 0,3883967\dots \quad (187)$$

En general, el factor giromagnético para todo leptón (en la configuración  $q^2 \rightarrow 0$ ) obtiene la forma

$$\begin{aligned}
g &= 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&\approx 2,002322819465776876 + \mathcal{O}(\alpha^2).
\end{aligned} \quad (188)$$

#### 4.1.1. Configuración para momento de fotón no despreciable

El caso anterior es la configuración en el caso donde  $q^2 = 0$ , esta aproximación toma la consideración de un fotón no relativista, o efectivamente, un campo magnético débil. El resultado de no hacer este limite nos lleva a una modificación a la corrección (185). Para este caso,  $\Delta = m^2(x + y) - xyq^2$ , así el factor de forma de Pauli toma la siguiente configuración

$$F_2^{1loop}(q^2) = -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m^2((-2(1-x-y)(x+y))}{(m^2(x+y)^2 - xyq^2)}. \quad (189)$$

Haciendo el cambio de notación  $z = 1 - x - y$  se obtiene

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z(1-z)m^2}{(m^2(1-z)^2 - (1-y-z)yq^2)}.$$

Por conveniencia se hace el cambio de variable  $\omega = 1 - z$ , de esta manera  $d\omega = -dz$  pero  $\omega(0) = 1$  y  $\omega(1) = 0$  por lo que el cambio resulta ser invariante.

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\omega \int_0^\omega dy \frac{(1-\omega)\omega m^2}{m^2\omega^2 - (\omega-y)yq^2}.$$

El integrando para  $y$  resulta ser de bastante complejidad dada la dependencia de  $\omega$  en los límites de integración, para eliminarla se propone  $\xi = y/\omega$  de esta forma  $\xi(\omega) = 1$  y  $\xi(0) = 0$  con el cambio en el diferencial  $dy = \omega d\xi$ . Al sustituir lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\omega \int_0^1 d\xi \frac{(1-\omega)\omega^2 m^2}{m^2\omega^2 - \omega^2(1-\xi)q^2\xi} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\omega \int_0^1 d\xi \frac{(1-\omega)m^2}{m^2 - (1-\xi)q^2\xi}. \end{aligned}$$

Dado que hemos eliminado la dependencia de la variable  $\omega$  en el límite para  $dy$ , podemos intercambiar el orden de integración, la integral para  $\omega$  es trivial (el resultado es  $1/2$ ), con esto la integral resultante es

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \frac{m^2}{m^2 - q^2(1 - \xi)\xi}.$$

Al completar el cuadrado en el denominador y haciendo el cambio de variable  $u = (\xi - 1/2)$  y  $c^2 = m^2/q^2 - 1/4$  tendremos

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{m^2}{q^2} \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{du}{u^2 + c^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{m^2}{q^2} \frac{\arctan\left(\frac{u}{c}\right)}{c} \Big|_{u(0)}^{u(1)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{2m^2}{\sqrt{q^2(4m^2 - q^2)}} \left[ \arctan\left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \arctan\left(-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Al usar la siguiente identidad

$$\arctan(x) - \arctan(-x) = 2 \arctan(x),$$

el resultado se modifica

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{2m^2}{\sqrt{q^2(4m^2 - q^2)}} \arctan\left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right).$$

Para expresar el comportamiento en forma logarítmica se utiliza la siguiente propiedad

$$\arctan(x) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+x}{i-x}\right),$$

de esta manera

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{4m^2 - q^2}}\right) = \frac{i}{2} \log\left(\frac{\sqrt{4m^2 - q^2} + \sqrt{-q^2}}{2m}\right).$$

Así, finalmente se llega a la corrección a primer lazo en el caso de momento de fotón no despreciable

$$\boxed{F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{4m^2}{\sqrt{-q^2(4m^2 - q^2)}} \log \left( \frac{\sqrt{4m^2 - q^2} + \sqrt{-q^2}}{2m} \right) \right]}. \quad (190)$$

Este resultado modifica de manera inmediata a la contribución encontrada, no obstante resulta ser muy rebuscada, será de interés ver algunos límites especiales. Adicionalmente, la contribución, a comparación en el caso previo, depende de la masa de los leptones. Algo que debe tomar importancia es el signo de  $q^2$ , a primera vista es de preocupación que aparezca como signo negativo dentro de raíces, sin embargo la definición de  $q^2$  parte de la norma del cuadrivector de momento el cual era igual a algún  $m^2$  por lo que podemos asociar una masa efectiva a este "momento" negativo de tal forma que  $m_\gamma^2 = -q^2$

**Límite para  $q^2 \approx -m^2$**  Evaluando lo anterior en  $-m^2$  obtenemos lo siguiente

$$F_2^{1loop}(q^2 = -m^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{4}{\sqrt{5}} \log \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right].$$

En general, podemos aproximar el factor que acompaña a la contribución original como aproximadamente  $5/6$  podemos decir entonces

$$\boxed{F_2^{1loop}(q^2 = -m^2) \approx \left( \frac{5}{6} \right) \frac{\alpha}{2\pi}}. \quad (191)$$

**Límite para momento de fotón ligero  $m^2 \gg q^2$**  En este caso el término logarítmico no tomará contribución, al expandir la raíz se obtiene lo siguiente

$$\boxed{F_{2(m^2 \gg q^2)}^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ 1 + \frac{q^2}{6m^2} + \frac{q^4}{30m^4} + \mathcal{O} \left( \frac{q^6}{m^6} \right) \right]}. \quad (192)$$

Vemos que en el caso donde las contribuciones a la segunda potencia en ade-

lante sean insignificantes, recuperamos el resultado obtenido en (189) en el caso donde  $q^2 \rightarrow 0$ .

**Límite para momento de fotón masivo  $q^2 \gg m^2$**  En el caso donde  $q^2 < 0$  y  $q^2 \gg m^2$ , el término de la raíz se vuelve aproximadamente  $4m^2 / -q^2$  con la aproximación de  $-q^4 \gg 4m^2 q^2$ , por otra parte en el logaritmo, dadas las condiciones establecidas, se considera que  $\sqrt{1 - q^2/4m^2} + \sqrt{-q^2/4m^2} \approx 2\sqrt{-q^2/4m^2}$  de tal forma que este se aproxima a  $\log\left(\sqrt{-q^2/m^2}\right)$ , así, para esta configuración se llega a

$$\boxed{F_{2(-q^2 \gg m^2)}^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{2m^2}{-q^2}\right) \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right)}. \quad (193)$$

esto es exactamente lo que se espera según Melnikov en la ecuación (161) (Melnikov, 2006) donde ahora  $n_p = 1$  y  $k_p = 1$  con una constante de proporcionalidad igual a 3, en el caso donde  $q^2 \rightarrow 0$  entonces  $k_p = 0$ , tal como concluimos en la sección 5.1.

#### 4.1.2. Límite simétrico

En esta sección se llevará a cabo el cálculo a la misma contribución según el diagrama de la figura 6, solo que en este caso se impondrá la siguiente condición

$$q^2 = p^2 = p'^2. \quad (194)$$

A esta se le conoce como el límite simétrico y es una contraparte a la sustitución “On shell” realizada en la sección 5.1.1, se observará como modifica los cálculos preliminares y luego se hará el límite  $q \rightarrow 0$ .

La primera definición a modificar, es el denominador  $D_1$

$$\begin{aligned}
D_1 &= x(p+k)^2 - xm^2 + y(p'+k)^2 - ym^2 + (1-x-y)k^2 \\
&= xp^2 + 2kpx + p'^2 + 2kp'y - m^2(x+y) + k^2 \\
&= k^2 + 2k(px+p'y) - (m^2 - q^2)(x+y) \\
&= l^2 - x^2p^2 - y^2p'^2 - 2pp'xy - (m^2 - q^2)(x+y).
\end{aligned}$$

Se ha realizado el mismo desarrollo anterior con el cambio de variable  $l$ , solo que ahora  $p^2 = p'^2 = q^2$ , esto se puede observar en el último término de la expresión anterior, en el caso 'on shell' estos valores serian igual a  $m^2$  lo cual hace el término de  $(x+y) = 0$ .

Por otra parte notemos lo siguiente

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 - 2pp' + p^2 = 2q^2 - 2pp'. \quad (195)$$

Por lo que podemos concluir que

$$2pp' = q^2. \quad (196)$$

Así la expresión del denominador se modifica a

$$\begin{aligned}
D_1 &= l^2 - (x^2 + y^2 + xy)q^2 - (m^2 - q^2)(x+y) \\
&= l^2 - \Delta.
\end{aligned}$$

con  $\Delta = q^2(x^2 + y^2 - x - y + xy) + m^2(x+y)$ . Afortunadamente el numerador queda invariante, es se debe a que todos los términos que sean proporcionales a  $q^2$  desvanecerán al hacer el limite  $q^2 \rightarrow 0$ .

Con lo anterior, el factor de forma magnético toma la siguiente forma

$$F_2^{1loop}(q^2) = 2ie^2 \left( \frac{-i}{32\pi^2} \right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{q^2(x^2 + y^2 - x - y + xy) + m^2(x+y)}.$$

Al hacer el limite  $q^2 \rightarrow 0$  tendremos

$$\begin{aligned}
F_2^{1loop}(0) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \frac{e^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{6}\right) \\
&= \boxed{\left(\frac{1}{3}\right) \frac{\alpha}{2\pi}}.
\end{aligned} \tag{197}$$

Se observa que lo anterior es la misma contribución a un lazo en el caso ‘‘On-Shell’’ (185), pero con un factor de 1/3 adicional, este será analizado en la siguiente sección.

En el caso donde  $q^2 \neq 0$ , la integral a resolver es la siguiente

$$F_2^{1loop}(q^2) = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{q^2(x^2+y^2-x-y+xy) + m^2(x+y)}. \tag{198}$$

Lo anterior resulta ser de bastante complejidad, sin embargo es de interés ver el comportamiento para ciertas configuraciones

**Límite para  $m^2 \approx q^2$**  La integral se modifica a

$$F_2^{1loop}(q^2 = m^2) = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)}{(x^2+y^2+xy)}. \tag{199}$$

Al utilizarse el cambio de variable  $u = x + y$ , la integral se simplifica a

$$\begin{aligned}
F_2^{1loop}(q^2 = m^2) &= \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \int_0^1 dx \int_x^1 du \frac{4u(1-u)}{(u^2 - x(u-x))} \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \left. \frac{-(x-1) \log(|u^2 - xu + x^2|)}{2} \right|_x^1 + \\
&\quad \frac{(x^2+x) \arctan\left(\frac{2u-x}{\sqrt{3x}}\right)}{\sqrt{3x}} \Big|_x^1 - u \Big|_x^1 \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi}{\sqrt{27}}\right).
\end{aligned}$$

Dado que es de interés ver la modificación al factor conocido de la corrección de Schwinger, podemos aproximar  $2\pi/\sqrt{27} \approx 6/5$  de tal manera que

$$\boxed{F_2^{1loop}(q^2 = m^2) \approx \left(\frac{6}{5}\right) \frac{\alpha}{2\pi}.} \quad (200)$$

**Límite para  $m^2 \gg q^2$**  Para este límite, consideremos  $Q_i = (x^2 + y^2 - x - y + xy)$  en el denominador de la integral de la ecuación (200), modificando el denominador podemos escribirla como

$$F_{2(m^2 \gg q^2)}^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{\left[1 - \left(-\frac{Q_i q^2}{(x+y)m^2}\right)\right] (x+y)m^2}.$$

De tal forma que usando la definición de serie geométrica podemos expresar la integral como

$$F_{2(m^2 \gg q^2)}^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{(x+y)m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-Q_i q^2}{(x+y)m^2}\right)^k.$$

Expandiendo la serie al segundo término y sustituyendo  $Q_i$

$$F_{2(m^2 \gg q^2)}^{1loop}(q^2) \approx \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy 4(1-x-y) - \frac{4(1-x-y)Q_i q^2}{(x+y)m^2}.$$

El primer término de la serie es el mismo del caso  $q^2 \rightarrow 0$ , esto tiene sentido ya que para masas mucho mayores al momento del fotón  $q \rightarrow 0$ , resulta solo ser necesario resolver la segunda parte de la integral

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x^2 + y^2 - x - y + xy)q^2}{(x+y)m^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{(12x^2 \log(x) - 10x^3 + 12x^2 - 6x + 4)q^2}{3m^2} \\ &= \frac{x(24x^2 \log(x) - 15x^3 + 16x^2 - 18x + 24)q^2}{18m^2} \Big|_0^1 = \frac{7q^2}{18m^2}, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\boxed{F_{2(m^2 \gg q^2)}^{1loop}(q^2) = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\alpha}{2\pi} \left[ 1 + \frac{7}{12} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{q^4}{m^4}\right) \right]}. \quad (201)$$

**Límite para  $q^2 \gg m^2$**  De manera análoga al caso anterior, podemos expandir la integral mediante una serie geométrica de la siguiente manera

$$F_{2(q^2 \gg m^2)}^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{Q_i q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-(x+y)m^2}{Q_i q^2} \right)^k.$$

Usando hasta el primer término de la serie, la integral a resolver es la siguiente

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(x+y)}{(x^2+y^2-x-y+xy)q^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{(x \left( -8\sqrt{3x^2-2x-1} \arctan\left(\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{3x+1}\right) - 8 \right) + 12x^2 - 4)m^2}{(3x+1)q^2} \\ &= - \frac{((4x-4)\sqrt{3x^2-2x-1} \arctan\left(\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{3x+1}\right) + 2\log(x) - 6x^2 + 10x)m^2}{3q^2} \Big|_0^1 \\ &= - \frac{4m^2}{3q^2}. \end{aligned}$$

De tal forma que para esta configuración

$$\boxed{F_{2(q^2 \gg m^2)}^{1loop}(q^2) = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{2m^2}{-q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{q^4}\right) \right]}. \quad (202)$$

### 4.1.3. Análisis de los resultados de la contribución a un lazo: On-Shell vs. Límite simétrico

Dados los resultados obtenidos en la sección 5.1.1, es de interés interpretar de manera gráfica el comportamiento de la contribución al momento magnético. Será conveniente normalizar nuestras cantidades, dado que todas las contribuciones son proporcionales a  $\alpha/2\pi$ , el factor de forma  $F_2(q^2)$  quedará normalizado a lo anterior, es interesante que el factor anómalo puede modifi-

carce de manera algebraica de tal manera que quede normalizado por la masa efectiva del fotón. En el caso de  $\frac{m}{m_\gamma}$  tenemos los siguientes comportamientos en los distintos límites mencionados.

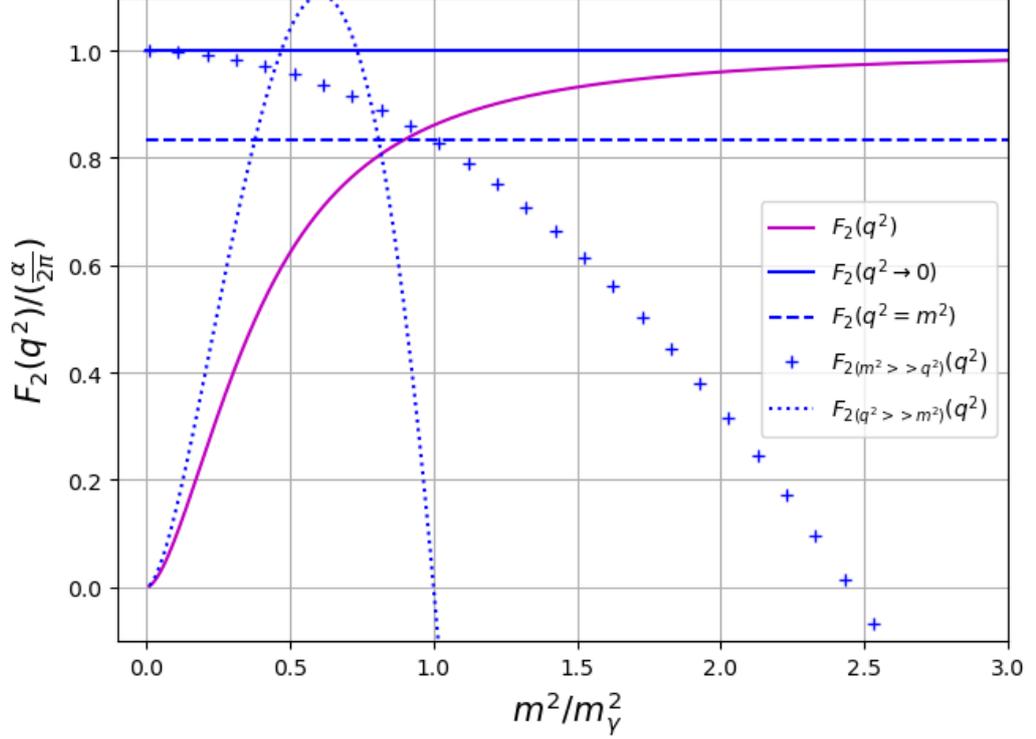


Figura 8: Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el caso on-shell. Contribución al factor  $g - 2$  a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del leptón y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma$ ).

Vemos que la contribución al factor de forma analítico tiende a 0 cuando la razón entre la masa de la partícula y la masa efectiva del fotón es 0. Esto tiene sentido ya que en el caso donde la masa sea 0, no habrá momento magnético. Vemos que en el rango donde la masa de la partícula (energía) es alrededor de tres veces mayor al del fotón de interacción, este empieza actuar en el límite  $q^2 \rightarrow 0$ , lo anterior tiene sentido ya que cuando se hace ese límite la interpretación física es que el campo magnético se vuelve inexistente, se sabe que el momento magnético es una cantidad que existe independientemente de este, por ende, podemos concluir que en el caso donde la norma de la energía

del fotón de interacción del campo magnético es menor a 3 veces el de la masa del leptón, la contribución al factor  $g-2$  debe tener consideraciones adicionales. Lo anterior se capta en el límite  $m^2 \gg q^2$  en donde cuando la razón es de alrededor de  $1/3$  este empieza a divergir.

Los casos anteriores se pueden identificar graficando el inverso, es decir, dejando la masa de la partícula constante y modificando la masa efectiva del fotón.

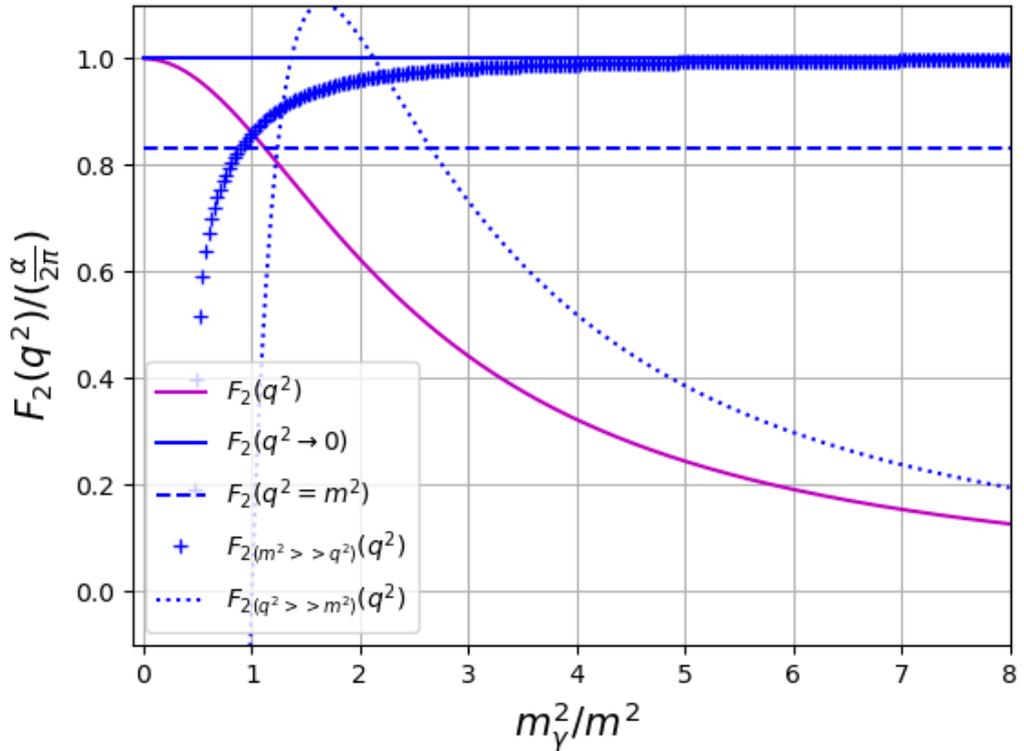


Figura 9: Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor  $g-2$  a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa efectiva del fotón y la del leptón.

Podemos analizar que cuando  $m_\gamma = 0$  se tiene el resultado esperado en donde  $a = \frac{\alpha}{2\pi}$ , curiosamente en el límite en donde el campo magnético es muy grande comparado con el de la masa, el factor de forma empieza a tomar modificaciones de tal manera que tiende a cero, esto tiene sentido físico ya que en esta configuración la masa empieza a hacerse nula (en comparación al del

fotón). Igualmente al analizar la razón en donde la masa de la partícula es mucho mayor al las del fotón, vemos que tiende asintoticamente a 1.

Lo anterior es esperado del comportamiento “On-Shell” será de interés ver como es el en la configuración de límite simétrico. El factor de 1/3 adicional reportado en (197) resulta ser de interesante a comparación del límite ”On-Shell” este resultado es el mismo para los tres leptones  $e$ ,  $\mu$  y  $\tau$ , lo anterior nos motiva a definir un nuevo momento magnético anómalo

$$a_{ls} = \frac{3}{2}(g - 2) = F_2(q^2 \rightarrow 0). \quad (203)$$

Con lo anterior definido, podemos analizar el comportamiento en los distintos límites encontrados. Dado que la integral para el factor de forma magnético en el límite simétrico resulta ser de bastante complejidad para una resolución analítica, se tomó una aproximación numérica.

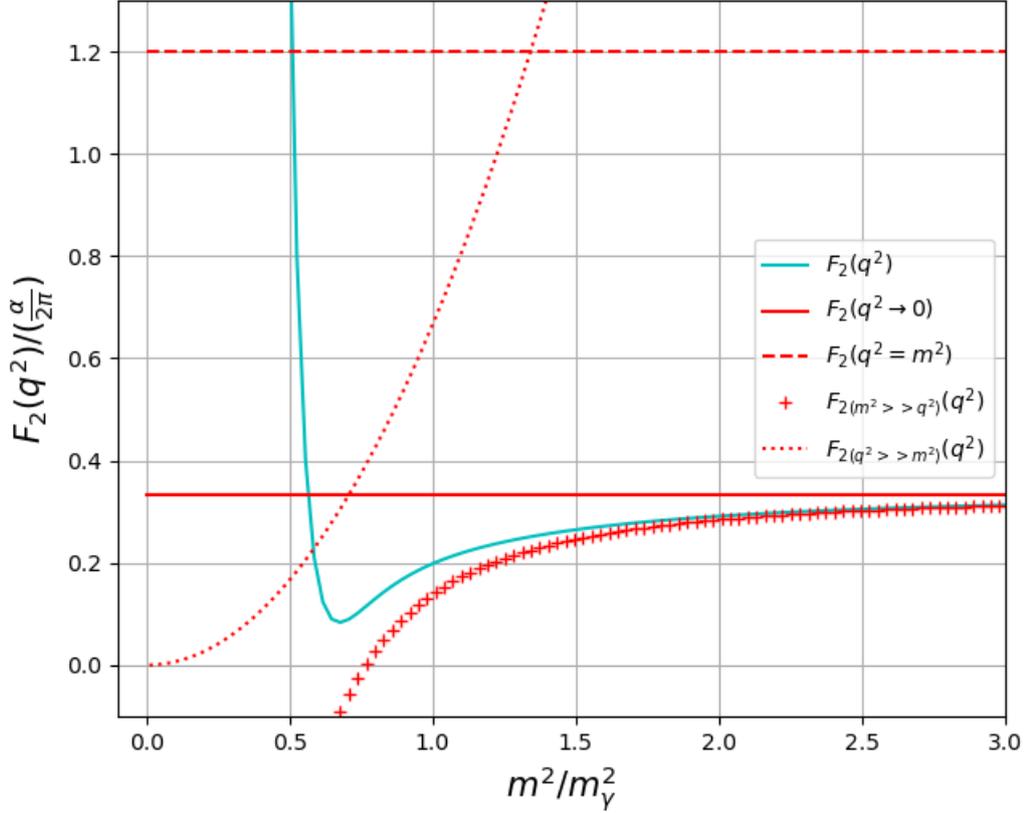


Figura 10: Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor  $g-2$  a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del leptón y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma^2$ ).

Primero se puede observar una indeterminación en 0, lo anterior concuerda con lo establecido, ya que en el caso en donde la masa tienda a 0, también la masa efectiva del fotón por ende la razón entre estas generará una indeterminación. En esta configuración resulta ser de bastante interés, no solo el resultado, si no el análisis del caso  $q^2 = m^2$  ya que en sí se estaría introduciendo un régimen híbrido entre límite simétrico y “On-Shell” ( $p^2 = p'^2 = m^2 = q^2$ ), en esta situación encontramos que la contribución es aproximadamente  $6/5$  más de la original encontrada en el caso “On-Shell”. Una pregunta natural en esta configuración viene siendo ¿A que nos referimos a con las razones de las masas?, ¿No acaso siempre sería 1? La gran diferencia en este límite proviene del hecho que se esta evadiendo la condición en donde el eigenvalor de la norma

del operador del momento es proporcional a la masa, lo anterior genera una flexibilidad en las masas; también es muy importante mencionar que la masa efectiva del fotón de manera experimental se encuentra en el rango de  $10^{-17}eV$  por lo que es imposible físicamente hablar de que un lepton tenga esta masa, es un régimen nuevo el cual bajo cierta configuración teórica nos permite calcular el momento magnético anómalo, enfocándonos en esto, el caso en donde  $q^2 \rightarrow 0$  y  $q^2 \gg m^2$  los cuales resultan ser los más aplicables, se recupera el resultado esperado en donde tiende a un valor fijo. Al graficar el inverso de las razones, a comparación a el caso de límite de capa de masa (“On-Shell”), se encuentra las mismas configuraciones, esto tiene sentido dado lo establecido de la masa efectiva del fotón.

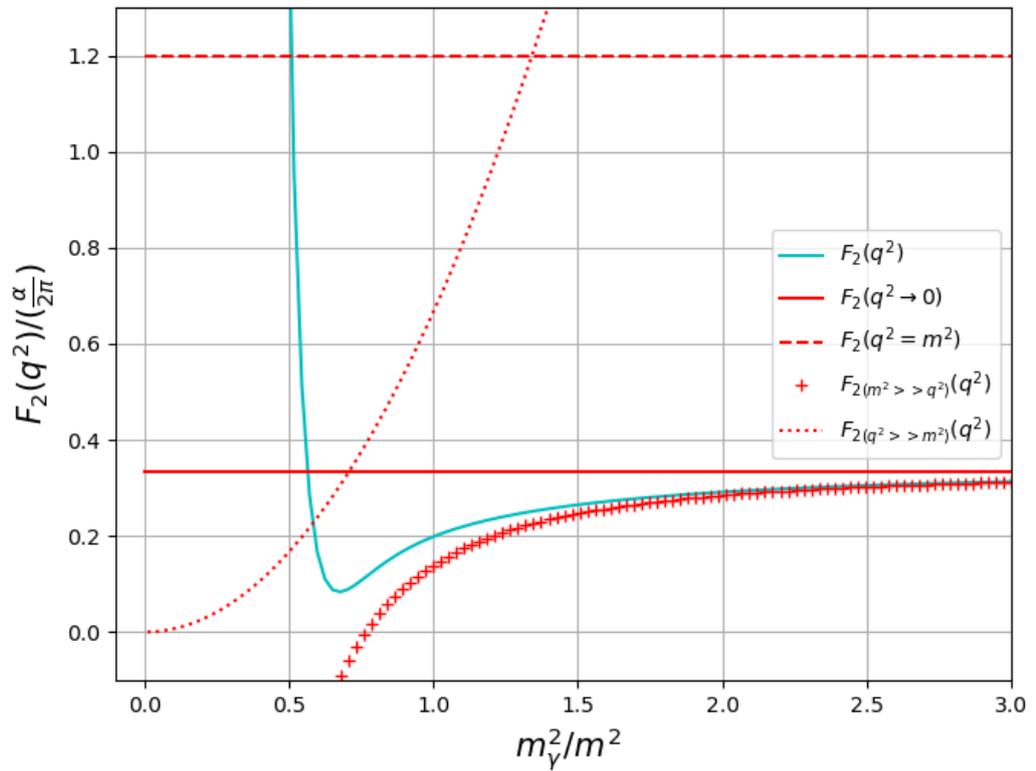


Figura 11: Diferentes configuraciones para el factor de forma magnético en el límite simétrico. Contribución al factor  $g-2$  a un lazo normalizado vs. la razón entre la masa del lepton y la efectiva del fotón ( $q^2 = -m_\gamma^2$ ).

## 4.2. Análisis de las correcciones a segundo lazo

A diferencia del caso de a primer lazo, en donde solo hay un diagrama que contribuye, existen 8 diagramas al factor de forma magnético para el caso de segundo lazo. Estos se presentan a continuación.

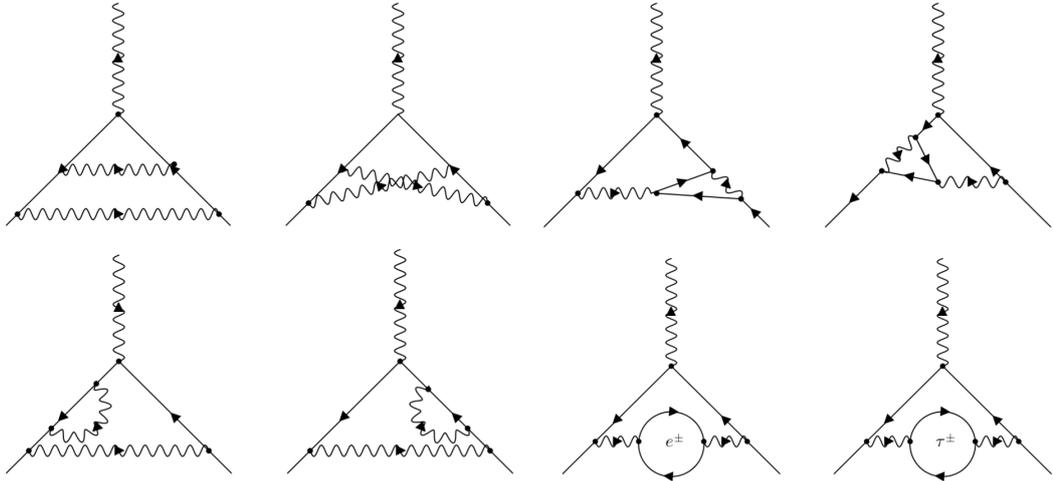


Figura 12: Diagramas de Feynman de segundo lazo contribuyentes al momento magnético del muón.

Es mucho más complicado calcular estas contribuciones a comparación a la del primer lazo, a este orden de perturbación las correcciones al momento magnético anómalo son dependientes de las masas de las partículas cargadas que ocurren en el proceso de la polarización de vacío; Por lo anterior nos referimos a que los fotones virtuales, producidos por el leptón, por un corto tiempo se convierten en un par partícula - anti-partícula (tal como se mira en los últimos 2 diagramas de la figura anterior). Por convención, cuando hablamos de las correcciones en electrodinámica cuántica (electrones, muones, taos) estas se mantienen dentro de las contribuciones de QED, sin embargo no hay nada que impida que se consideren bariones y mesones virtuales, al igual que en ves de producir fotones virtuales produzca gluones o partículas omega y zeta, lo último cae sobre las contribuciones hadrónicas y de interacciones débiles respectivamente. Con lo anterior, para la contribución en QED, escribimos que

$a_\mu$  es una suma de varios términos.

$$a_\mu^{2loop} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 [\omega_2^e + \omega_2^\tau + \omega_2]. \quad (204)$$

Aquí  $\omega_2^e$  es la contribución electrón-positron virtual,  $\omega_2^\tau$  es la contribuyente al del par tau-anti tau y  $\omega_2$  son las contribuciones de los diagramas que solo involucran fotones virtuales.

Como mencionamos previamente, a este orden de perturbación, todas las contribuciones serán proporcionales a la masa de las partículas virtuales y del leptón, tal como se mencionó en las características esperadas en la metodología en la sección 4.1, en donde  $a_{e,\mu,\tau}^{i loop} \propto m_{e,\mu,\tau}^2/m_p^2$ , donde  $m_p$  es la masa de la partícula virtual. Lo anterior resulta ser primordial para comprender la razón de porque el momento magnético del muón difiere del electrón, por ejemplo, para el electrón la contribución al momento magnético

$$a_e^{2loop} \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \omega_2 \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 + \omega_2 \left(\frac{m_e}{m_\tau}\right)^2 + \omega_2 \right]. \quad (205)$$

Considerando que la razón entre las masas del muón y el electrón es de 207 y que la razón entre el tau y electrón es de 3477, lo anterior queda modificado a

$$a_e^{2loop} \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \omega_2 \left(\frac{1}{207}\right)^2 + \omega_2 \left(\frac{1}{3477}\right)^2 + \omega_2 \right]. \quad (206)$$

Se puede apreciar que los términos de  $\omega_2$  quedan amortiguados por factores que son proporcionales a las razones de masas del electrón con los otros dos leptones al cuadrado, considerando más aún que estos términos son proporcionales a  $\alpha^2$  en donde  $\alpha \approx 1/137$ , es evidente que la contribución es extremadamente pequeña. Ahora tomando el caso del muón tenemos lo siguiente

$$a_\mu^{2loop} \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \omega_2 \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 + \omega_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + \omega_2 \right], \quad (207)$$

así, introduciendo las razones de masas tenemos

$$a_{\mu}^{2loop} \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \omega_2 (207)^2 + \omega_2 \left(\frac{3}{50}\right)^2 + \omega_2 \right]. \quad (208)$$

Es evidente que las contribuciones en el caso del electrón quedan amortiguadas por el hecho que las partículas virtuales a las que son proporcionales son de mayor masa mientras que en el caso del muón estas son proliferadas, el hecho que el momento magnético sea proporcional al cuadrado de las razones de las masas hace que los factores aumentan o decrezcan el valor, lo anterior es la razón por la cual el momento magnético resulta ser diferente para cada leptón. Esto dicho, el caso del muón no debería presentar problemas ya que la única diferencia vendría al ajustar los cálculos para diferentes masas, entonces, ¿Porqué para caso del electrón el factor anómalo difiere tan poco de los experimentos pero para el muón resulta haber discrepancias? Es aquí donde la *nueva física* toma lugar, le llamamos nueva física a aquellas teorías que aun no han sido implementadas al modelo estándar, la explicación mas viable a la discrepancia es que existen partículas que no se han considerado, tales que para el caso del electrón las contribuciones de estas son tan insignificantes que resultan ser irrelevantes al total, pero para el muón ya son notables. En el caso más optimista se opina que aun falta afinar la teoría de la cromodinámica cuántica y así considerar (adicionalmente a los mesones y bariones) nuevas partículas encontradas en el LHC de CERN que llevan el nombre de tetra-quarks y penta-quarks (un barión es una combinación de tres quarks o tres anti-quarks, un penta o tetra-quarks son partículas compuestas de cuatro o cinco quarks respectivamente). En casos más pesimistas, se sugiere que teorías como gravedad cuántica, energía oscura, materia oscura, etc. deben ser consideradas en el modelo estándar para incluirlas en el calculo del momento magnético (considerando que existen partículas responsables de estas teorías). Tal como se mencionó en la introducción, en abril del 2021 FermiLab anunció

nuevas mediciones experimentales del momento magnético del muón, los cuales reafirmaron los resultados obtenidos en 2001 en el laboratorio nacional de Brookhaven, en donde se observó por primera vez que existía una discrepancia entre el experimento y la teoría, el valor experimental se encuentra a 4.2 desviaciones estándares del valor teórico, según los estándares estadísticos una diferencia de 5 desviaciones estándares es suficiente para declarar una medición errónea, por lo que aun no es posible asegurar que el error es suficiente para afirmar los problemas del modelo estándar, sin embargo cada vez los experimentos se acercan más a este, por lo que disimularlos tampoco es viable (B. Abi et al, 2021). Para más información sobre los experimentos más relevantes se recomienda la lectura *Muon g-2: Review of Theory and Experiment* (Miller et al, 2017).

La contribución a segundo lazo para el momento magnético anómalo es la siguiente (Aoyama et al, 2015)

$$a_{\mu}^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ \frac{197}{144} + \left(\frac{1}{2} - 3 \log(2)\zeta(2)\right) + \frac{3}{4}\zeta(3) \right], \quad (209)$$

$$\approx -1,77230506... \times 10^{-6},$$

donde  $\zeta(n)$  es la función zeta de Riemann a orden  $n$ .

A mayores órdenes de perturbación los diagramas contribuyentes explotan en cantidad y en dificultad de resolución, tanto así que se necesita apoyo numérico para solo calcular cuantos diagramas se deben resolver; A tercer lazo existen 72 diagramas, a cuarto 891, a quinto 12672, etc. Para una evaluación completa de los diagramas de 4 y 5 lazos, se tienen que utilizar métodos numéricos; Estas dos contribuciones se están actualizando con el tiempo debido al progreso en la tecnología computacional (Jegerlehner, 2008).

#### 4.2.1. Análisis para límite simétrico y para momento de fotón no despreciable

El propósito de hablar de un límite simétrico o tomar el caso en donde el momento del fotón no es despreciable es para encontrar una mayor precisión y/o simplificar los cálculos. El interés de expandir el límite simétrico a ordenes mayores en la serie de perturbación proviene del hecho que buscamos encontrar el factor de  $1/3$  a la definición del momento magnético anómalo encontrado en el caso de un lazo, esto sería evidencia que este límite es universal a todo orden de expansión y podría servir para expandir el marco teórico del momento magnético anómalo, aunque para el caso de de un lazo lo cálculos se complicaron, la esperanza es que para los 8 diagramas contribuyentes a segundo lazo los cálculos puedan simplificarse, cabe de mencionar que en este caso algunas contribuciones quedan de manera no analítica, en el escenario más optimista se podría esperar que algunas de las contribuciones se modifiquen de tal forma que se pueda encontrar de manera analítica y continua los factores de forma a este orden. En cuanto el caso del momento de fotón no despreciable, tal como concluimos en la sección anterior, es de interés para ámbitos experimentales dejar el factor anómalo en término de un parámetro libre, en este caso el momento del fotón de interacción, lo anterior podría ser una forma oficial de aislar las contribuciones de QED, en el experimento se mide todo el momento magnético, si expandimos esta configuración a todo orden de QED, podremos de manera oficial aislar a QED como el problema en la discrepancia en el caso del muón.

## 5. Conclusiones

En el presente trabajo se realizó el cálculo de la contribución a primer lazo del momento magnético anómalo para los leptones utilizando las reglas de Feynman, el anterior calculo usualmente se realiza en el límite donde el momento del fotón tiende a 0 dejando así el factor de forma magnético constante. Al evadir esta configuración, se encontró una expresión analítica, la cual modifica al factor de forma a una función dependiente de la norma del cuadri-vector de momento del fotón. Adicionalmente se reafirmó el comportamiento expandiendo y tomando límites especiales dentro de la configuración analítica del factor de forma magnético. De esta manera se analizó el comportamiento en diferentes situaciones cinemáticas. Además, se presentó el esquema de “límite simétrico”, el cual introduce un nuevo régimen para la resolución del momento magnético. Esto se contrasta con el caso anterior en donde se usa la norma “On-Shell”, la cual aprovecha el hecho que el eigenvalor de la norma del cuadrimomento es igual a la masa de la partícula. En esta nueva presentación, se consideró que las normas del quadri-momento del leptón entrante y saliente y del fotón son iguales, al hacer el límite en donde  $q^2 \rightarrow 0$  se recuperó el resultado original obtenido en el caso “On-Shell” pero con un factor adicional de  $1/3$ , aunque la resolución para el caso del fotón no despreciable resultó ser no analítica, se expandió la integral para distintos casos cinemáticos, los cuales fueron analizadas cuidadosamente. Finalmente se presentó un análisis de las correcciones a segundo lazo, en donde se explicó por qué existe una diferencia entre los momentos magnéticos de los distintos leptones, por qué las discrepancias solo son evidentes en el caso del muón, cuales son las explicaciones de esta y cómo se esperan sean las discrepancias a lazos mayores. Adicionalmente, se presentó la idea de introducir la configuración de momento del fotón no despreciable, y del “límite simétrico” con lo cual se concluyó que

estas modificaciones podrían brindar mayor precisión y un esquema diferente al cálculo del momento magnético anómalo.

## 6. Referencias

- Aoyama, T., Hayakawa, M., Kinoshita, T. and Nio, M. (2015). “Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment — Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops”. 91. 033006. Physical Review D. U.S.A - Japan. 3 p.
- B. Abi et al. (2021). “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm”. Phys. Rev. Lett. 126, 141801, U.S.A. 10 p.
- Beringer, J. et al. (2012). “Review of Particle Physics (RPP)”. Phys.Rev D86:010001, U.S.A.
- Bjorken, D.J and Drell, S.D (1964). “Relativistic Quantum Mechanics”. Mc-Graw Hill. U.S.A. 25-37 p.
- Bohr, N. (1913). “On the Constitution of Atoms and Molecules, Part II Systems Containing Only a Single Nucleus”. 26 (153), Philosophical Magazine. England. 476–502 p.
- Bragg, W. H. and Bragg, W. L. (1913). “The Reflexion of X-rays by Crystals”. A. 88 (605). Proc. R. Soc. Lond. England. 428–38 p.
- Compton, A.H. (1923). “A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements”. 21 (5). Physical Review. U.S.A. 483–502 p.
- de Broglie, M.L (1924). “A tentative theory of light quanta”. ed. 35. Philosophical Magazine. France. 446-458 p.
- Dirac, P.A.M (1930). “A Theory of Electrons and Protons”. 126 (801). Proceedings of the Royal Society A. England. 360–365 p.
- Dirac, P.A.M. (1928). “The quantum theory of the electron”. A117. Proc. R. Soc. Lond. England. 610–624 p.
- Einstein, A. (1905). “Does the Inertia of a Body Depend Upon Its Energy Content?”. 18 (13):. Annalen der Physik. Germany. 639-641 p.
- Einstein, A. (1905). “On a Heuristic Viewpoint Concerning the Production and Transformation of Light”. 17 (6). Annalen der Physik. Germany. 132–148 p.
- Eisberg, R. and Resnick, R. (1985) “Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles”. 2nd Edition, John Wiley and Sons. New York. 132 p.

- Feynman, R. P. (1948). “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”. 20 (2). *Reviews of Modern Physics*. U.S.A. 367–387 p.
- George, B.A. and Hans J. W. (1995). “Mathematical Methods for Physicists”, 4th edition., Academic Press, San Diego, 92-93 p.
- Georgiy, R., Youngju, C., Seonho Choi, Seungho H., Evgeniy K., Alexey, P., Alexandr P., Tsutomu, M., Boris S. and Young H. (2019). “Development of the CsI(Tl) Muon Beam Profile Monitor for the Muon  $g-2$  EDM Experiment at J-PARC”. *PhiPsi 2019*, EPJ Web of Conferences 212, 01008. Japan.
- Gerlach, W. and Stern, O. (1922). “The experimental proof of directional quantization in a magnetic field”. 9 (1). *Zeitschrift für Physik*. Germany, 349–352 p.
- Greiner, Walter (1988). “Classical Electrodynamics”. Springer-Verlag New York, U.S.A., 70-99 p.
- Griffiths, D.J. (2008). “Introduction to elementary particles”. 2nd Edition. Wiley. U.S.A. 225-274 p.
- Halzen, D. and Martin A.D. (1984). “Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics”. John Wiley and Sons. New York. 70-172 p.
- Jegerlehner, F. (2008). “The Anomalous Magnetic Moment of the Muon”. *Springer Tracts in Modern Physics Volume 226*. Springer. U.S.A. 3-92 p.
- Logashenko, J. Grange, P. Winter, R. M. et al. (2015). “The Measurement of the Anomalous Magnetic Moment of the Muon at Fermilab”. 44. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 031211, U.S.A.
- Lorentz, L. (1867). “On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents”. Series 4. 34 (230). *Philosophical Magazine*. England. 287–301 p.
- Maxwell, J.C. (1865). “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, Vol. 155, *The Royal Society*, U.K, 459-512 p.
- Melnikov, K. and Vainshtein, A. (2006). “Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment”. *Springer Tracts in Modern Physics Volume 216*. Springer. U.S.A. 7-31 p.
- Miller, James P., de Rafael, Eduardo and Roberts, B. Lee (2007). “Muon  $g-2$ : Review of Theory and Experiment”. *Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France*, 10-65 p.

- Peskin, Michael E. and Schroeder, Daniel V. (1995) “An Introduction To Quantum Field Theory”. CRC Press, U.S.A, 175-196 p.
- Planck, M. (1900). “On the distribution law of energy in the normal spectrum”. German Physical Society Meeting. Germany. 202-237 p.
- Planck, M. (1914). “The Theory of Heat Radiation”. 2nd ed. P. Blakiston’s Son and Co. Germany. 42 p.
- Preston, T. (1898). “Radiation phenomena in a strong magnetic field”. 2nd series. 6 . The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society. Ireland. 385–342 p.
- Rutherford, E. (1911). “The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom”. Vol. 21. Philosophical Magazine. Series 6, 669-688 p.
- Rydberg, J.R. (1889). “Researches sur la constitution des spectres d’émission des éléments chimiques” [Investigaciones sobre la composición de las líneas espectrales de elementos químicos]. Royal Swedish Academy of Science, 2nd series, 23 (11), 1–177 p.
- Sakurai, J.J. (1967). “Advanced Quantum Mechanics”. Adision-Wesley series in advanced physics, U.S.A. 179-204 p.
- Schrödinger, E. (1926). “Quantization as an eigenvalue problem (first communication)”. 384, Annalen Phys. Germany, 361 p.
- Schwinger J.S. (1948). “On Quantum Electrodynamics and the magnetic moment of the Electron”. 73. Phys.Rev. U.S.A. 416-417 p.
- Schwinger J.S. (1949). “Quantum Electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: Radiative Corrections to scattering”. 76. Phys.Rev. U.S.A. 790-817 p.
- Stueckelberg, Ernst (1941), “The meaning of proper time in wave mechanics”. Acta 14. Helv. Phys. France. 322–323 p.
- Thomson, J. J. (1904). “On the Structure of the Atom: an Investigation of the Stability and Periods of Oscillation of a number of Corpuscles arranged at equal intervals around the Circumference of a Circle; with Application of the Results to the Theory of Atomic Structure”. Sixth. 7 (39), Philosophical Magazine. England. 237–265 p.
- Uhlenbeck, G.E. and Goudsmit S. (1925). “Replacement of the hypothesis of non-mechanical compulsion by a requirement relating to the internal behavior of each

individual electron". 13. Naturwiss. Germany. 953 p.

- Wolfgang, P. (1925). "About the connection between the termination of the electron groups in the atom and the complex structure of the spectra". 31 (1). Zeitschrift für Physik. Germany. 765–783 p.
- Wolfgang, P. (1927). "On the quantum mechanics of the magnetic electron". 43 (9–10). Zeitschrift für Physik. Germany. 601–623 p.